

OBEČNÁ ASTRONOMIE

skripta PřF MU

verze 1.5



RNDr. Jan Janík, Ph.D.
prof. RNDr. Zdeněk Mikulášek, CSc.

prosinec 2022

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky
Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

Obsah

1. Úvod	3
1.1 Základní úkoly a disciplíny astronomie	3
1.2 Vznik a hlavní etapy rozvoje astronomie	4
1.3 Význam astronomických pozorování a astronomických přístrojů . . .	11
2. Souřadnicové soustavy, jejich transformace a aplikace	13
2.1 Souřadnice bodu v rovině	13
2.2 Souřadnice bodu v prostoru	16
2.3 Geometrie na kouli, sférický dvojúhelník a trojúhelník	17
2.4 Sférický trojúhelník a jeho řešení	19
2.5 Transformace souřadnic	22
2.6 Zeměpisné souřadnice	24
2.7 Astronomické souřadnicové soustavy	26
2.7.1 Obzorníková (horizontální) soustava	26
2.7.2 Rovníková (ekvatoreální) soustava 1. druhu	27
2.7.3 Rovníková (ekvatoreální) soustava 2. druhu	27
2.7.4 Ekliptikální soustava	28
2.7.5 Galaktická soustava	28
2.7.6 ICRS a ICRF	30
2.8 Vzájemný převod rovníkových souřadnic 1. a 2. druhu	30
2.9 Převod obzorníkových a rovníkových souřadnic 1. druhu	31
2.10 Převod ekliptikálních a rovníkových souřadnic	33
2.11 Denní pohyb Slunce v různých zeměpisných šířkách	35
2.12 Poloha planet na zemské obloze	36
2.13 Zvěřetníková (zodiakální) souhvězdí	37
2.14 Převod galaktických souřadnic na rovníkové	38
3. Dynamika sluneční soustavy	40
3.1 Pohyby planet a Měsíce po hvězdné obloze	40
3.2 Rotace a librace Měsíce	43
3.3 Sluneční a měsíční zatmění	45
3.3.1 Podmínky pro sluneční a měsíční zatmění	45
3.4 Ptolemaiova soustava	48
3.5 Koperníkův systém	51
3.6 Keplerovy zákony	53
3.7 Galileův přínos	55
3.8 Newtonovy pohybové zákony	57
3.9 Newtonův gravitační zákon	59
3.10 Problém dvou těles, upřesněná podoba Keplerových zákonů	60
3.11 Geometrie trajektorie, rychlost a poloha na trajektorii	63

3.12	Dráhové elementy	69
3.13	Pohyb družic Země	71
3.14	Problém tří a více těles	74
3.14.1	Lagrangeovy librační body	74
3.14.2	Ekvipotenciální plochy	75
3.14.3	Rocheův model	77
3.15	Poruchy - rušivé gravitační síly	79
3.15.1	Slapové síly, příliv a odliv	80
3.15.2	Poruchy v drahách těles sluneční soustavy	81
4.	Země a její pohyby, čas	83
4.1	Rozměry Země	83
4.2	Tvar Země	84
4.3	Dohlednost a deprese obzoru	86
4.4	Šířka geocentrická, geodetická a astronomická	87
4.5	Hmotnost a gravitační pole Země	87
4.6	Rotace Země	89
4.7	Důkazy rotace Země	90
4.8	Změny v rotaci Země	91
4.9	Moderní časové stupnice	92
4.10	Důsledky rotace Země	93
4.11	Oběh Země kolem Slunce, aberace, paralaxa	94
4.12	Aberace	94
4.13	Variace radiální rychlosti, heliocentrická korekce	96
4.14	Paralaxa	96
4.15	Srovnání paralaxy a aberace	98
4.16	Důsledky pohybu Země kolem Slunce	99
4.17	Precese a nutace	103
4.18	Sluneční čas, sluneční hodiny	106
4.19	Časová rovnice	108
4.20	Pásmový čas	110
4.21	Kalendář	111
	Použitá literatura	119

ÚVOD

Astronomie patří společně s matematikou k nejstarším vědním disciplínám. Poznatky o vesmíru patřily již u dávných civilizací do jejich kultury, jejich úroveň byla dána také bohatostí duchovního života společnosti. Astronomie se však vyvíjela nerovnoměrně, mezi obdobími, kdy prožívala bouřlivá období rozvoje, nastávaly bohužel i etapy její stagnace.

1.1 Základní úkoly a disciplíny astronomie

Astronomie je přírodní věda. Slovo *astronomie* je řeckého původu a etymologicky znamená *άστρον* - hvězda a *νόμος* - zákon, čili zákon o hvězdách. Cílem astronomie je tedy hledání jistých zákonitostí, dle kterých je možné:

- určit a předpovědět polohu a pohyb kosmických těles
 - a) na obloze (starověk, středověk)
 - b) v prostoru (novověk)
- nejstarší odvětví - vynuceno praktickými úkoly (určování času a polohy, náboženské a astrologické úkazy)
- určit fyzikální povahu dějů určujících vlastnosti a stavbu těles a jejich soustav - řešeno aplikací fyzikálních zákonů na vesmír - *astrofyzika*
 - určit vznik, vývoj a zánik vesmíru a jeho součástí - vychází z pochopení současné stavby vesmíru - pokročilá součást astrofyziky, rozvoj v posledních desetiletích

Astronomie se dále může dělit dle jednotlivých disciplín (oborů), které se mohou navzájem i překrývat.

1. Astrometrie - zabývá se určováním přesných poloh a pohybů nebeských těles na základě měření jejich poloh na obloze

- *sférická astronomie*
určování poloh na obloze + redukce těchto poloh o nejrůznější vlivy (refrakce, aberace, precese, paralaxa), určování času
- *fundamentální astronomie*
určování přesných poloh hvězd, tvorba katalogů poloh a vlastních pohybů hvězd - opěrné soustavy na hvězdné obloze
- *praktická astronomie*
teorie astronomických pozorování a měření + praktické využití astronomie např. při určování polohy na Zemi (astronavigace), času, konstrukce kalendáře

2. Teoretická astronomie

- *metodika určování trajektorií těles z pozorovaných dat a výpočet efemerid podle známých elementů*
kosmická dynamika - nebeská mechanika, aplikace základních pohybových zákonů na pohyb kosmických těles v prostoru (planety, družice, měsíce, komety, asteroidy, dvojhvězdy ...) Vše se vztahuje k řešení 1. úlohy astronomie
- *teorie stavby planet, hvězd a jejich atmosfér*

Rovněž se dá astronomie rozdělit dle předmětu studia a to například

- a) planetologie - fyzika planet (družic)
- b) fyzika a dynamika meziplanetární hmoty
- c) hvězdná astronomie
- d) hvězdná statistika
- e) fyzika mezihvězdné (mezigalaktické) hmoty
- f) dynamika Galaxie
- g) stavba a vývoj hvězd a hvězdných soustav
- h) kosmologie - stavba a vývoj vesmíru

Tato rozdělení nejsou striktní, mají jen pomocný význam. V současné době mají mimořádný význam zejména výzkumy v oblastech hraničních oborů (přínos nových metod).

1.2 Vznik a hlavní etapy rozvoje astronomie

Astronomie patří k nejstarším vědním oborům, první zápisy astronomických pozorování, o kterých není pochyb, spadají do 8. století před naším letopočtem. Nicméně již ve starém Egyptě ve 4. tisíciletí před naším letopočtem byli schopni předpovídat nilské záplavy na základě tzv. heliaktického východu Síria (Sírius vyšel nad obzor těsně před východem Slunce), který stanovil také okamžik začátku roku. Délka tohoto roku byla stanovena na základě střídání dne a noci od tohoto okamžiku až do dalšího heliaktického východu Síria na 365 dní.

Megalitická stavba ve Stonehenge (viz obr. 1) sloužila již 2000 let před naším letopočtem jako kultovní místo i jako astronomická observatoř, což potvrzují hlavní záměrné přímky tohoto obřího kruhu z kamenných kvádrů (východo-západní směr).



Obrázek 1: Megalitická astronomická observatoř ve Stonehenge s vycházejícím Sluncem v době letního slunovratu [E1].

Na Dálném východě byla rozvinutá astronomie ještě v dřívějších dobách. Některé záznamy o slunečních zatměních jsou datovány až k roku 4000 př. n. l., ale většinou se uvádí čas o tisíc let pozdější. Je známo, že za císaře Hoang-Tia byla vybudována observatoř v roce 2608 př. n. l. (Murray 1836), která posloužila ke sběru dat pro zpřesnění čínského kalendáře. Na základě těchto pozorování byl objeven 19letý cyklus (saros) podobných slunečních zatmění.

Čínští astronomové měli také za povinnost předvídat astronomické jevy, což se prý stalo osudným za éry císaře Tchong-kanga v roce 2159 př. n. l. jeho dvěma astronomům (Ho a Hi), kteří se opili a nedali tak vědět o blížícím se zatmění Slunce. Rozzlobený císař je tak nechal popravit svým generálem. Jde nicméně o zkazku (viz Murray 1836).

Čínští astronomové měli 28 zvířetníkových souhvězdí (též lunární dómy) rozdělených dle hranic radiálně vycházejících ze severního světového pólu kolmo protínající rovník, čímž vznikly nestejně díly (staří Babyloňané a Řekové jich měli 12). Délku tropického roku stanovili na 365 a čtvrt dne. Na obrázku 2 je zobrazeno čínské souhvězdí Severní naběračky.

I když na naši kulturu čínská astronomie neměla přímý vliv díky velké vzdálenosti, dodnes jsou pro nás velice cenné záznamy astronomických pozorování (např. supernova z roku 1054, historické návraty Halleyovy komety apod.).



Obrázek 2: Souhvězdí Severní naběračky (naš Velký vůz) nesoucí nebeského hodnostáře. Reliéf z hrobky Wu Lianga z roku 147 př. n. l. [E2].

Astronomie se vyvíjela také na americkém kontinentě. Staří Mayové na území dnešní Guatemaly a poloostrovu Yucatan patřili mezi výtečné pozorovatele. Jejich kalendář dokázal předpovídat zatmění Slunce a Měsíce, vznikl na základě dlouhodobých pozorování, jejichž začátek spadá mezi roky 500–400 př. n. l. I indiáni v Severní Americe pozorovali hvězdnou oblohu a stejně jako u megalitických staveb i zde můžeme najít význačné záměrné směry (medicine wheel). Historické kresby Anasazů nám v Arizoně zanechaly piktogramy s pravděpodobnou konjunkcí supernovy v roce 1054 s úzkým srpkem Měsíce těsně před jeho novem (viz obr. 3).

U některých civilizací nám chybějí písemné zápisy, nicméně praktické znalosti astronomie museli mít např. Polynézané, kteří využívali navigace pomocí hvězd při plavbách mezi ostrovy v noci.

Můžeme tedy obecně říci, že vždy, když stupeň kultury dosáhl jisté úrovně, rozvinula se zároveň i astronomie a s ní spojená astronomická pozorování.

Na náš kulturní (a také astronomický vývoj) měla bezprostřední vliv babylonská astronomie. Na území dnešního Iráku se rozkládala Mezopotánská říše a zde prováděná pravidelná systematická astronomická pozorování přispěla k vývoji, který vedl až k současné moderní astronomii. Již 3000 let př. n. l. byl zaveden sluneční kalendář, který je co do konstrukce daleko složitější než kalendář měsíční. Zavedení tohoto kalendáře hrálo důležitou roli pro vyvinuté zemědělství. Následně zbožštění planet, Slunce a Měsíce pak zavádí základy astrologie, která potřebuje tyto objekty nepřetržitě sledovat a také předpovídat jejich vzájemné polohy. Proto je zapotřebí vybudovat astronomické observatoře a astronomická pozorování dobře zapisovat a archivovat na hliněných destičkách. Díky těmto přesným pozorováním a zápisům babylonští astronomové během slunečních zatmění zjistili, že dráha



Obrázek 3: Piktogram v Chaco kaňonu se zobrazením supernovy z roku 1054 a srpku Měsíce [E3].

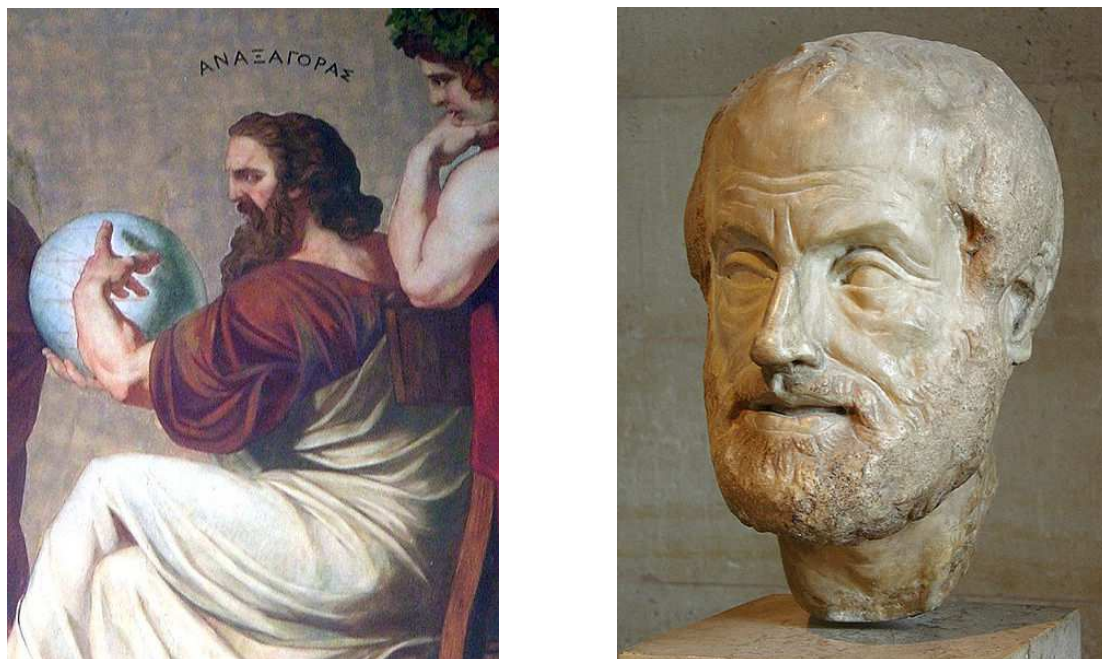
Slunce mezi hvězdami je stále ta samá - *ekliptika*. Dokázali nalézt souvislosti mezi ročními dobami, místy východů a západů a polohou Slunce na ekliptice. Díky těmto souvislostem pak našli velice důležitý bod - *jarní bod*.

Babylónští astronomové na základě měsíčních fází a znalostí o pohybu Slunce po ekliptice vytvořili lunisolární kalendář. Rovněž již znali, že se planety pohybují podél roviny ekliptiky a že některé z nich vykazují občas retrográdní pohyb. Na rozdíl od čínských astronomů zavedli pouze 12 zvířetníkových (zodiakálních, ekliptikálních) souhvězdí, které od nich dále převzali cca 600 let př. n. l. Chaldejci.

Nedílnou součástí babylonského náboženství byla i astrologie, pro kterou bylo nutné znát předpovědi poloh dalších bohů (po Měsíci a Slunci), tj. planet, které také měly dle astrologie ovlivňovat lidské osudy.

Výrazným způsobem se do dějin astronomie zapsala astronomie řecká. Řecká společnost měla úctu k vědění a poznávání, které navíc velice rychle přebírala i od jiných národů a uchovávala je. Výrazným pokrokem byla jejich jiná filozofie. Zatímco pro Egypťany a Babyloňany byla nebeská tělesa ztotožňována s bohy, kteří se hýbali dle vlastní vůle, Řekové na tato tělesa nahlíželi myšlenkově s tím, že lze odhalit povahu věcí jejich pozorováním a analýzou. Odmítli doktrínu, že vše již bylo poznáno a že není třeba poznávat nové věci. Řekové zahájili *věk rozumu*.

Řekové převzali mnoho znalostí od Chaldeců (včetně astrologie), začali analyzovat i staré záznamy. V 5. stol. př. n. l. přišel Anaxagoras (cca 500–428 př. n. l.) se správným vysvětlením střídání měsíčních fází, které jsou zapříčiněny prostоровou dráhou Měsíce kolem Země, což by zároveň přirozeně i vysvětlilo sluneční a měsíční zatmění. Do té doby toto vysvětlení bylo problematické, překrývání těles



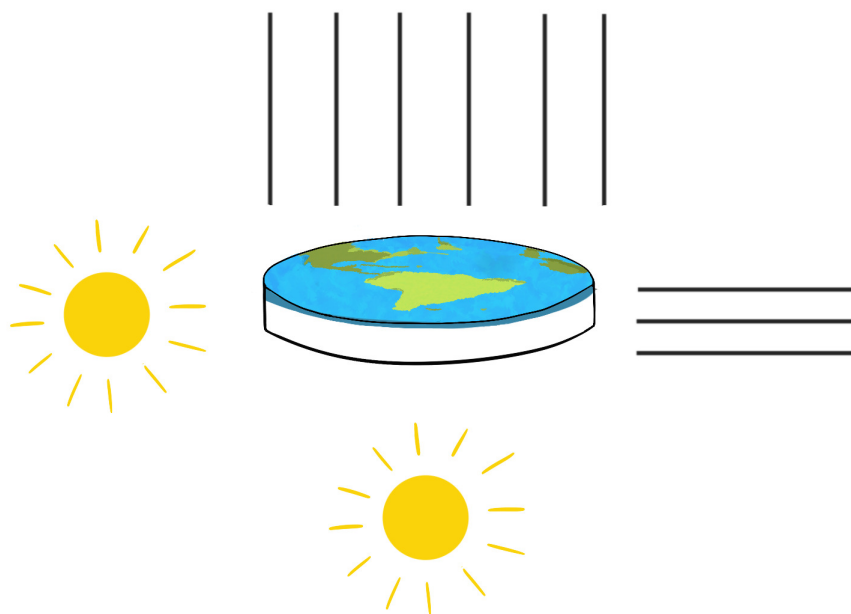
Obrázek 4: Vlevo je na části fresky z Národní univerzity v Aténách Anaxagoras [E4], vpravo je pak antická busta Aristotela z Louvru [E5].

na jedné sféře, navíc se původní představa Země jako placky výrazně odlišovala od Anaxagorasovy hypotézy, že z tvaru stínu při měsíčním zatmění jde zjistit tvar Země a tím musí být koule (Fotheringham 1908).

K nejvýznamnějším řeckým filozofům patří Aristotelés ze Stageiry (384–322 př. n. l.), nejvýznamnější žák Platonův a vychovatel Alexandra Makedonského. Aristotelův názor na vesmír měl obrovský vliv na myšlení lidí. Převzal ho od něj za necelých pět století později Klaudios Ptolemaios a geocentrický (Země je středem všeho) systém se pak stal uznávaným až do konce středověku. Aristoteles dále dělí vesmír na pozemskou část, která sahá k Měsíci, kde vše vzniká i zaniká, a oblast nad Měsícem, kde je svět nebeských těles vybudovaný z pátého živlu - éteru. Slunce, Měsíc, planety i stálice jsou umístěny ve sférách (těch má být celkem 56 včetně těch, kterými si Aristoteles pomáhal při vysvětlování odchylek planet od kruhových drah) a obíhají kolem Země na stejných kruhových drahách.

Aristarchos ze Samu (cca 320–250 př. n. l.) proslul nejvíce jako zakladatel heliocentrického modelu. Jako první prohlásil, že ve středu soustavy leží nehybné Slunce a Země a planety kolem něj obíhají. Země oběhne kolem Slunce jednou za rok a jednou za den se otočí kolem své osy. V té době bylo známo pět planet, které se pohybovaly nerovnoměrně a někdy se dokonce zastavovaly a několik dní „couvaly“. Astronomové se snažili rozluštit tento jev, na který jim poskytl odpověď právě Aristarchův systém.

Aristarchos ovšem nepřestal pobuřovat veřejné mínění. Z velikosti zemského stínu na Měsíci při zatmění vyvodil, že Slunce musí být mnohem větší než Země. A poprvé se také pokusil měřením zjistit, jaký doopravdy je vzájemný poměr velikostí Země, Měsíce a Slunce. Došel k závěru, že Měsíc je asi třikrát menší, kdežto Slunce skoro sedmkrát větší než Země. Dále také zjistil, že vzdálenost ke Slunci

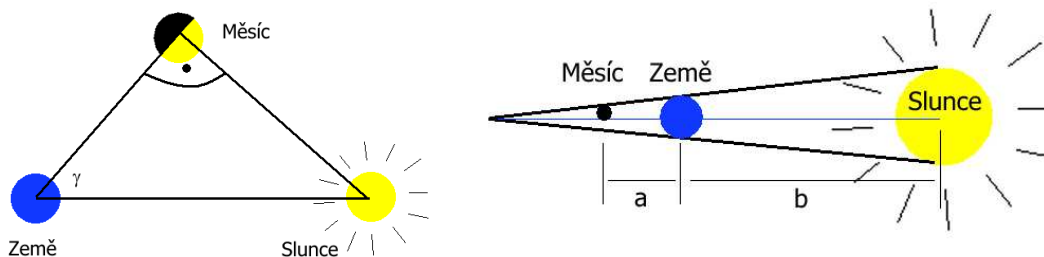


Obrázek 5: Aristotelův důkaz kulatosti Země, stín Země při zatměních Měsíce by měl být jiný ráno a večer než o půlnoci, kdyby Země měla tvar plochého disku (Aristoteles 350 BC, credit: Veronika Veselá).

je 19krát větší než vzdálenost k Měsíci. To jsou sice velmi nepřesná čísla, ale metoda, kterou použil, byla správná. Přesnější měření bylo provedeno až v 17. století. K dovršení všeho Aristarchos prohlásil, že vesmír je nekonečný a hvězdy jsou jiná Slunce. To byly kacírské myšlenky a Aristarchos byl obžalován z bezbožnosti. Jeho model byl zamítnut a posléze na dlouho zapomenut.

Aristarchova metoda určení vzdálenosti Měsíce od Země je znázorněna na obr. 6. Vychází z předpokladu, že se v okamžiku první či poslední čtvrti Měsíce změří úhel mezi Měsícem a Sluncem. Z Aristarchových měření tento úhel vycházel přibližně 87° , současnými měřeními vychází tento úhel na $89^\circ 50'$. Vzhledem k tomu, že úhlové průměry Měsíce a Slunce jsou téměř totožné, je pak možné stanovit poměry jak velikosti Měsíce, Země a Slunce, tak i poměry jejich vzdáleností (viz obr. 6).

Skvělý metodický postup Aristotelův podnítil Eratosthena (275–194 př. n. l.) k určení lineárních rozměrů Země. Obvod Země určil velmi jednoduchou geometrickou metodou, která spočívala v určení úhlů právě dopadajících slunečních paprsků u svislých tyčí na dvou různých místech téhož poledníku. Sluneční paprsky v době rovnodennosti dopadaly v tehdejší Syeně (dnešní Asuán) kolmo na povrch (až na dno studny), kdežto v severněji položené Alexandrii i v poledne vrhaly předměty krátké stíny. Tento úhel, který Eratosthenes určil na $7^\circ 12'$, odpovídal 5 000 stádiím a odtud velice jednoduchým přepočtem získal obvod Země, který byl roven přibližně 250 000 stádiím. Otázkou ovšem je, jakou stádii použil. Přikloníme-li se ke stádii egyptské (1 egyptská stádie je rovna 157,7 m), získáme obvod Země



Obrázek 6: Aristarchova metoda určení poměrů vzdáleností Měsíc-Země a Země-Slunce 1 : 19 (vlevo) a poměrů poloměrů Měsíce, Země a Slunce 0,36 : 1 : 6,75 (vpravo).

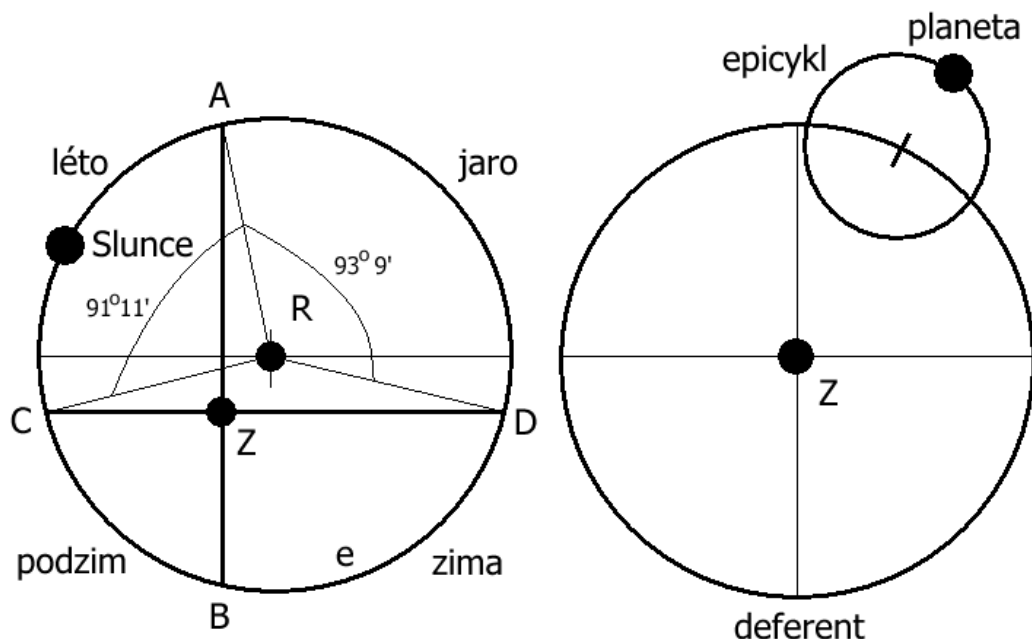
přibližně 39 400 km. Nepřesnost měření byla jednak dána tím, že obě místa neleží přesně na tom samém poledníku a také nepřesností určení úhlu, pod kterým v době rovnodennosti dopadají paprsky v Alexandrii, ale i tak je výsledek velice blízký současné hodnotě. Eratosthenes rovněž změřil sklon zemské osy, který byl v poměru $11/83$ ze 180° .

V dějinách astronomie je Hipparchos (cca 190–120 př. n. l.) považován za nejvýznamnějšího astronoma starověku, který byl excelentním pozorovatelem, jenž pozoroval hlavně z Alexandrie a z Rhodosu (mezi lety 161–127 př. n. l.). Právě Hipparchos zavedl nový koncept světa, který v souladu s aristotelovskou fyzikou postuloval, že střed Země je v centru sfér hvězd a planety se kolem ní pohybují po komplikovaném systému kružnic (viz obr. 7). Hipparchos samozřejmě dobře věděl od Metona, že délka ročních období není stejně dlouhá. Aby toto pozorování vysvětlil, střed kružnice, která příslušela pohybu Slunce dal mimo střed Země. Tímto excentrickým umístěním, které bylo v poměru $1/24$ poloměrům sluneční dráhy, docílil dobré shody modelu s pozorováním. Nicméně zde byla rovněž možnost vysvětlit pohyb Slunce i za pomoci epicyklu a deferentu.

Hipparchos rovněž znal s přesností na několik minut délku tropického roku díky starým babylónským pozorováním. Na základě dalších vlastních pozorování v době rovnodenností a slunovratů a s použitím Metonových měření kolem roku 430 př. n. l. a Aristarchových z roku 280 př. n. l. vypočítal délku tropického roku o $1/144$ dne kratší než 365 a čtvrt dne, tj. 365,243 1 dne (dnešní hodnota 365,242 2 dne). Tato měření mu sloužila ke zpřesnění úhlu sklonu zemské osy k rovině ekliptiky ($23^\circ 51'$), ale také ke zjištění, že se jarní bod posouvá každé století nejméně o jeden obloukový stupeň a že celou ekliptikou projde za maximálně 36 000 let (dnešní hodnota precese je cca $50,3''$).

Díky Hipparchově pečlivosti a jeho vlastnoručním záznamům vzniká první katalog pozorovaných hvězd (částečně vlivem pozorované novy v souhvězdí Štíra v roce 134 př. n. l.). Takto vytvořený katalog v roce 129 př. n. l. obsahoval 800 hvězd a stal se později základem pro katalog Ptolemaiův. Přestože Hipparchos znal Aristarchovu heliocentrickou hypotézu, zůstal přívržencem geocentrického modelu, který dovedl do dokonalosti další starověký astronom Klaudios Ptolemaios (85–165).

Ptolemaiův systém vycházel z Hipparchova systému deferentů a epicyklů, který jako první ucelený geocentrický model vesmíru popisuje strukturu sluneční soustavy, pohyby jejích těles a umožňuje vysvětlit tehdy všechny pozorovatelné jevy



Obrázek 7: V levé části je Hipparchova představa pohybu Slunce, v pravé pak definice deferentu a epicyklu (upraveno dle Jáchim 2003).

na obloze. Tento koncept byl v souladu s tehdejší aristotelovskou fyzikou, předpovědi byly ve velice dobré shodě s pozorováními, což zapříčinilo stagnaci astronomie na dlouhá staletí. (Detailnější popis Ptolemaiova systému lze nalézt v kapitole [Dynamika sluneční soustavy](#).)

Zatímco dochází v Evropě v době středověku, kterému se také říká období temna, k úpadku věd a racionálnosti, arabský svět přijímá a překládá díla řeckých učenců, v této době provádějí přesná pozorování Al-Battani (858–929), Al-Biruni (973–1048) nebo Ulugh Bek (1394–1449).

Na konci středověku s narůstajícími požadavky astronavigace, přesného určování času a zámořskými objevy dochází k ožívání evropské astronomie. Jsou překládány z arabštiny zpětně řecké astronomické knihy. S evropským novověkem jsou pak spojena jména Mikuláše Koperníka (1473–1543), Johannese Keplera (1571–1630), Galilea Galileiho (1564–1642) a Isaaca Newtona (1643–1727).

Na konci 19. století pak přechází astronomie v astrofyziku, když se astronomové začínají ptát po fyzikální povaze, stavbě a vývoji nebeských těles.

1.3 Význam astronomických pozorování a astronomických přístrojů

Člověk byl přírodou obdařen relativně dobrým zrakem, kterým může i bez použití jiných pomůcek pozorovat spoustu astronomických jevů. Brzy však bylo zjištěno, že tato pozorování jsou hodně subjektivní a bylo zapotřebí co nejvíce minimalizo-

vat tuto faktickou nevýhodu. Proto si astronomové pomáhají při svých pozorováních různými pomůckami, ať již nejpoužívanějším přístrojem - dalekohledem, který poprvé použil v roce 1609 Galileo Galilei, přes spektrografy, fotografické emulze, fotonásobiče, radioteleskopy či CCD detektory. Přístroje jsou také umísťovány mimo zemskou atmosféru na družicích a sondách, které člověk vyslal do meziplanetárního prostoru.

Astronomická pozorování jsou hlavním zdrojem vědomostí a informací o okolním světě, každá nová pozorovací metoda vždy přinesla celou řadu, a často i nečekaných, výsledků (např. nová pozorovací okna mimo zemskou atmosféru, částicová astrofyzika apod.). Podrobnějšímu seznámení s metodami astronomických pozorování je věnována přednáška F4200 Astronomická pozorování.

DOPLŇUJÍCÍ LITERATURA

Jáchim F. 2003, *Jak viděli vesmír*, Rubico, Olomouc, 272 stran

Leverington D. 2013, *Encyclopedia of the History of Astronomy and Astrophysics*, Cambridge University Press, Cambridge, 550 stran

Pannekoek A. 1989, *A History of Astronomy*, Dover Publications, Inc., New Your, 521 stran

SOUŘADNICOVÉ SOUSTAVY, JEJICH TRANSFORMACE A APLIKACE

Základní úlohou astronomie je určení okamžité polohy tělesa na základě pozorování, což je ovšem problematické z řady důvodů

- a) pozorujeme ze Země, můžeme tak určit jen směr, vzdálenost tělesa obecně neznáme
- b) pozorujeme ze Země, která se pohybuje a pozorování jsou většinou získána z jejího povrchu, což přináší zkreslení nejrůznějšího druhu
- c) rychlost světla je konečná - informace o směru je zpožděná

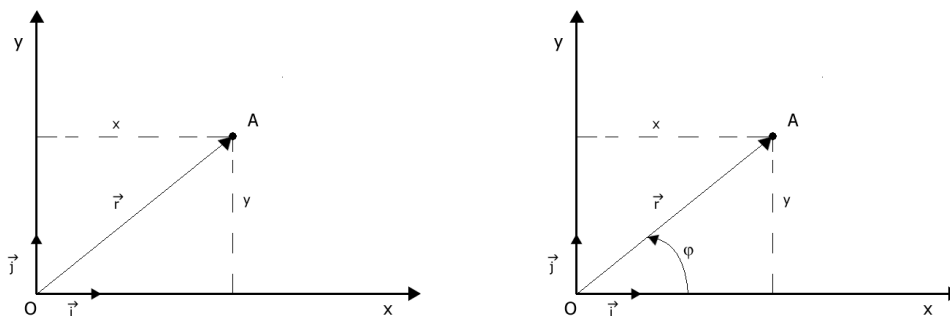
Všechny efekty je třeba dobře pochopit, popsat a správně provést redukce. Poloha bodu se vždy vztahuje k určité souřadnicové (vztažné) soustavě. Můžeme pro jednoduchost předpokládat plochý, euklidovský prostor a v něm nejobvyklejší souřadnicovou soustavu kartézskou. Tato soustava je určena počátkem a polohou tří (v prostoru) navzájem kolmých os. Můžeme v obecnosti uvažovat i jiné souřadnicové systémy např. sférický či válcový.

2.1 Souřadnice bodu v rovině

Pro případ, že se těleso (bod) pohybuje pouze v rovině, s čímž se setkáme např. při řešení Keplerovy rovnice, nám vystačí k popisu polohy tělesa pouze dvě souřadnice. Tyto souřadnice si můžeme zapsat jako uspořádanou dvojici čísel, kterou reprezentuje polohový vektor \vec{r} (viz obr. 8).

Směr os x a y souřadnicové kartézské soustavy je určen dvojicí navzájem kolmých jednotkových vektorů \vec{i} a \vec{j} , pro které platí

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \quad \text{a} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0. \quad (1)$$



Obrázek 8: Poloha bodu A je dána vzhledem k počátku O polohovým vektorem \vec{r} , který reprezentují dva průměty x a y (vlevo). V polárních souřadnicích je poloha bodu A dána velikostí polohového vektoru r a úhlem φ (vpravo).

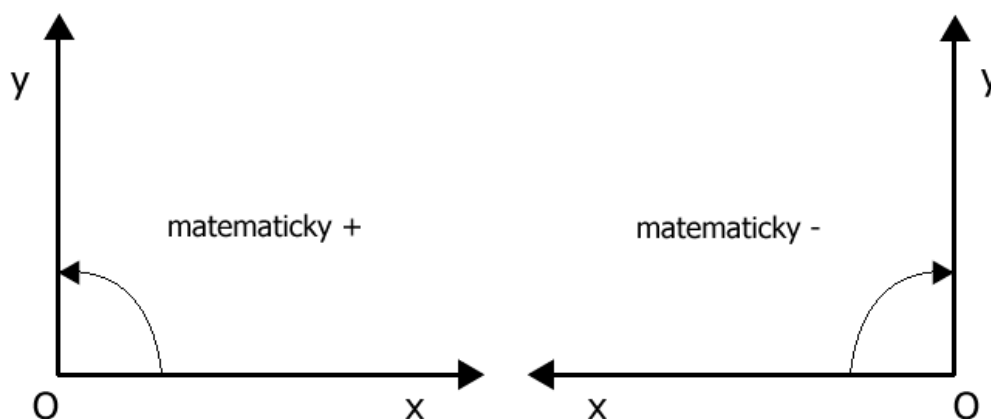
Součin vektorů \vec{i} a \vec{j} je roven nule, protože jsou tyto vektory na sebe kolmé. Hledáme-li průměty vektoru \vec{r} do os x a y , vyjdeme ze vztahů

$$x = \vec{r} \cdot \vec{i}, \quad y = \vec{r} \cdot \vec{j} \quad \text{a} \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}. \quad (2)$$

Výhodné je užívat pro zápis maticového (vektorového) formalismu

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} (x\vec{i} + y\vec{j}). \quad (3)$$

S vektory se dají dělat běžné operace jako sčítání a odčítání, což nám v maticovém zápisu ulehčí práci. Kartézská soustava je určena počátkem, základním směrem a orientací, tj. jde-li o levotočivou či pravotočivou soustavu (viz obr. 9).



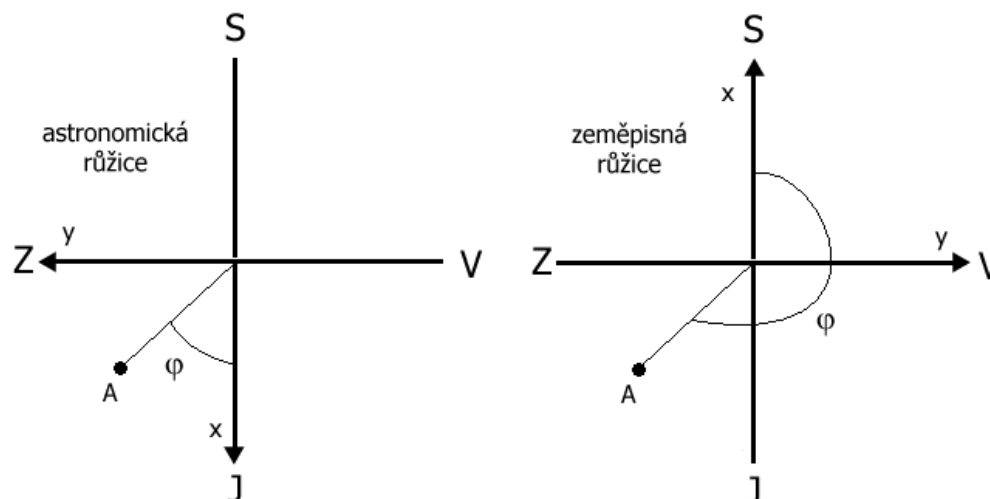
Obrázek 9: Pravotočivá (vlevo) a levotočivá (vpravo) souřadnicová soustava.

Použijeme-li pro popis polohy bodu v rovině polárních souřadnic, hodnotu souřadnic x a y lze vyjádřit jako

$$x = r \cos(\varphi) \quad \text{a} \quad y = r \sin(\varphi), \quad (4)$$

kde r je radius (délka, velikost vektoru \vec{r}) a φ je argument, který lze vyjádřit v úhlové míře

- ve stupních ($0^\circ, 360^\circ$)
- v radiánech ($0, 2\pi$)
- či v časových úhlových jednotkách (hodiny).



Obrázek 10: Srovnání astronomické a zeměpisné (navigační) rúžice, obě soustavy jsou levotočivé, liší se hlavním směrem, tj. směrem osy x (u astronomické míří na jih).

Jednoduchými přepočty lze přecházet mezi stupni a radiány, radiány a hodinami či stupni a hodinami

$$\begin{aligned} 2\pi \text{ radiánů} &= 360^\circ = 24^{\text{h}} \\ 15^\circ &= 1^{\text{h}} \\ 1^\circ &= 4^{\text{m}} \end{aligned} \quad (5)$$

V maticovém zápise pak můžeme složky vektoru \vec{r} napsat jako

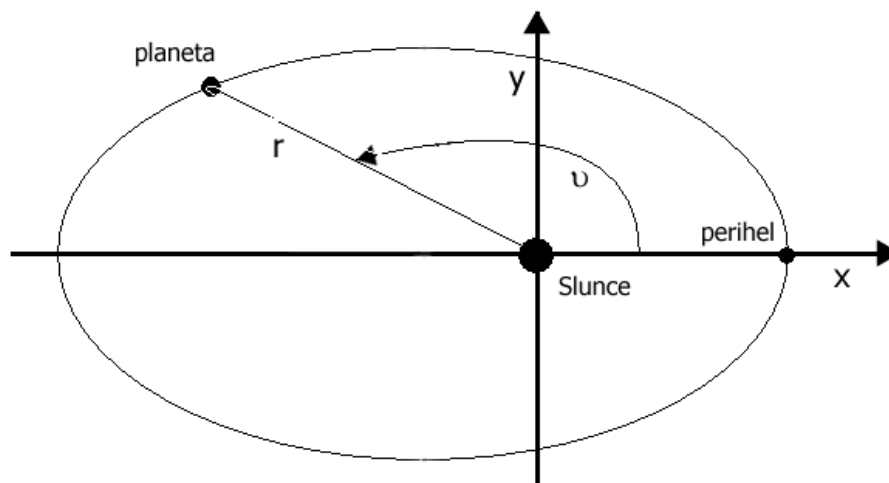
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (6)$$

kde r je $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Úhel φ je pak argumentem x a y $\varphi = \arg(x, y)$, pro který platí

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{y}{x} & x > 0 \\ \varphi &= \pi + \arctan \frac{y}{x} & x < 0 \\ \varphi &= \pi/2 & x = 0 \text{ a } y > 0 \\ \varphi &= 3\pi/2 & x = 0 \text{ a } y < 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Použití souřadnicového systému v rovině lze ukázat na následujících, nejenom astronomických, příkladech:

- horizontální rovina - větrná rúžice (astronomická vs. geometrická, navigační viz obr. 10)
- rovina dráhy tělesa ve sluneční soustavě (viz obr. 11), která je dána vzdáleností r od Slunce (velikostí polohového vektoru \vec{r}) a pravou anomálií v (úhel mezi polohovým vektorem - průvodičem a Sluncem - perihelem).



Obrázek 11: Rovina dráhy tělesa (planety) ve sluneční soustavě.

2.2 Souřadnice bodu v prostoru

Na rozdíl od popisu polohy bodu v rovině, pro popis polohy bodu v prostoru je potřeba zavést souřadnicovou soustavu s počátkem, základní rovinou, základním směrem a její orientací. Tato souřadnicová soustava je pak popsána trojicí jednotkových vektorů \vec{i} , \vec{j} a \vec{k} . Polohový vektor \vec{r} je pak dán

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ a } \vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Hledáme-li naopak kartézské souřadnice z polohového vektoru \vec{r} , můžeme zapsat

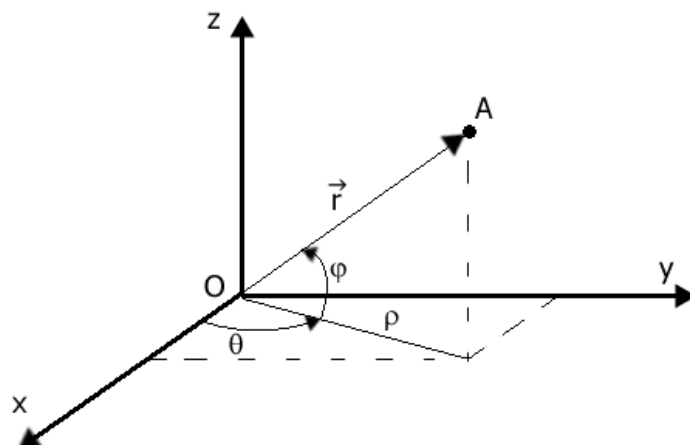
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{i}\vec{r} \\ \vec{j}\vec{r} \\ \vec{k}\vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (9)$$

kde vynásobené matice jednotkových vektorů dávají jednotkovou matici řádu 3×3

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

V prostoru můžeme rovněž využít v případě válcové symetrie (diskové modely, Galaxie apod.), která využívá kombinace polární soustavy v rovině xy a kartézské souřadnice z . Poloha bodu je tak dána souřadnicemi (ϱ, θ, z) , kde $x = \varrho \cos(\theta)$, $y = \varrho \sin(\theta)$ a $z = z$. V maticovém zápise pak můžeme zapsat

$$\begin{pmatrix} \varrho \cos \theta \\ \varrho \sin \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (11)$$



Obrázek 12: Sférická souřadnicová soustava (v astronomii je úhel φ brán od základní roviny, v matematice od osy z).

Velikost polohového vektoru \vec{r} je dána $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\varrho^2 + z^2}$. Velikost $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ a úhel $\theta = \arg(x, y)$. Jak bylo zmíněno výše, v astronomii se válcové soustavy souřadnic používá u naší Galaxie, kde počátek souřadnic je ve Slunci, osa x míří do galaktického středu a osa y je v rovině Galaxie ve směru matematicky kladném. Osa z pak míří do pólu Galaxie.

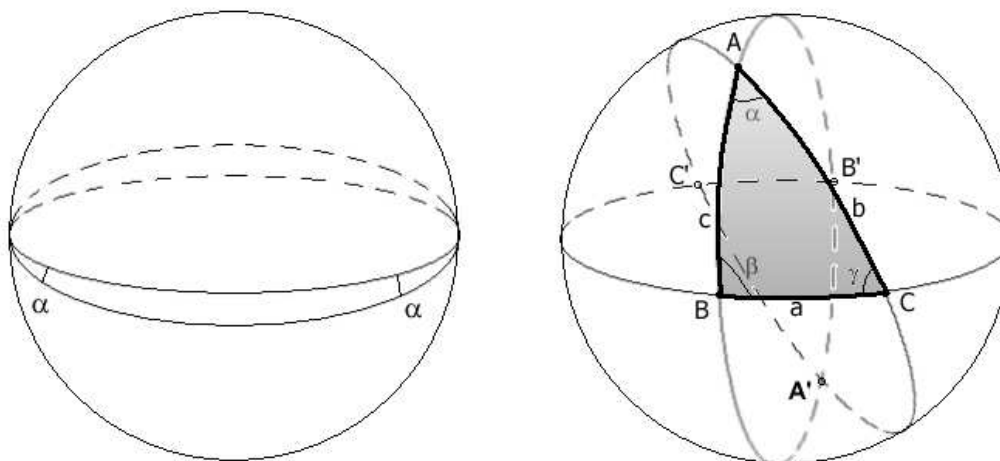
S největším využitím se v obecné astronomii setkáváme u souřadnicové soustavy sférické. Z našich pozorování známe přímo směr k pozorovanému objektu, o vzdálenosti v obecnosti mnoho nevíme. Sférická soustava je opětovně definovaná svým počátkem, základní rovinou xy , základním směrem v ose x a svou orientací případně směrem k pólu (což je ekvivalentní informaci o orientaci soustavy). Bod je popsán pomocí dvou úhlových souřadnic, které udávají směr θ a φ (délka a šířka) a jeho vzdáleností r (velikost polohového vektoru \vec{r} (viz obr. 12).

Stejně jako u válcových souřadnic v rovině je velikost ϱ dána jako $\sqrt{x^2 + y^2}$ nebo též jako $\varrho = r \cos \varphi$. Pro převod do kartézských souřadnic x, y, z lze napsat jednoduché vztahy

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \theta & \varphi &= \arcsin z/r \\ y &= r \cos \varphi \sin \theta & \theta &= \arg(x, y) \\ z &= r \sin \varphi & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

2.3 Geometrie na kouli, sférický dvojúhelník a trojúhelník

Hlavním rozdílem mezi geometrií v plochém prostoru a geometrií na kouli je např. ten fakt, že na kouli jsme schopni zkonstruovat trojúhelník na základě znalosti pouze tří úhlů, což v prostoru nelze, protože nám to dává nekonečně mnoho řešení ve tvaru podobných trojúhelníků. Na kouli však můžeme také vytvořit tzv. sférický dvojúhelník (viz obr. 13), což v plochém prostoru nelze, který je omezen dvěma hlavními kružnicemi a dělí sféru na 4 díly o celkové ploše 4π steradiánu. Plocha



Obrázek 13: Znázornění sférického dvojúhelníku (vlevo) a sférického trojúhelníku (vpravo) s důležitými úhly a body.

takového dvojúhelníku je pak dána jako

$$S = 2R^2\alpha, \quad (13)$$

kde je-li R poloměr koule v metrech a α je v radiánech, pak plocha dvojúhelníku vychází v m^2 .

Sférický trojúhelník, který je vyobrazen vpravo na obrázku 13, je vymezen třemi hlavními kružnicemi, které vymezují tři roviny řezu, ze kterých tak na povrchu koule vznikne $2^3 = 8$ trojúhelníků. Pro geometrii na kouli platí, že součet úhlů v trojúhelníku je větší než 180° , neboli

$$\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ. \quad (14)$$

Vyjdeme-li ze vztahu 13, tak pro velikost ploch platí

$$\begin{aligned} P_{ABC} + P_{A'BC} &= 2\alpha R^2 \\ P_{ABC} + P_{AB'C} &= 2\beta R^2 \\ P_{ABC} + P_{ABC'} &= 2\gamma R^2 \end{aligned} \quad (15)$$

a dále pak také po sečtení těchto rovnic

$$2P_{ABC} + P_{A'BC} + P_{AB'C} + P_{ABC'} = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma). \quad (16)$$

Vzhledem k symetrii platí, že plochy trojúhelníků $P_{AB'C} = P_{A'BC'}$ a $P_{A'B'C} = P_{ABC'}$, což po dosazení do rovnice 16 dává

$$2P_{ABC} + 2\pi R^2 = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma). \quad (17)$$

Označíme-li rozdíl $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ jako ϵ (sférický exces), pak můžeme pro plochu sférického trojúhelníku psát

$$P_{ABC} = R^2\epsilon. \quad (18)$$

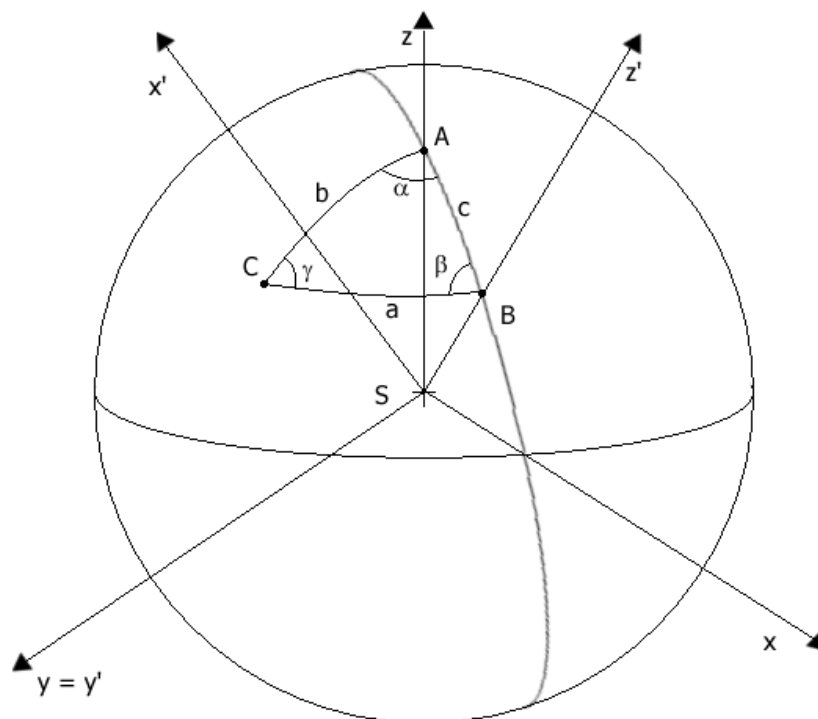
Např. velikost excesu rovnostranného trojúhelníku o hraně 300 km je 10^{-3} rad (asi $3'$), odchylky jsou v tomto případě oproti běžné trigonometrii ještě zanedbatelné. Něco jiného ovšem nastane v případě osminy kole, kde je plocha rovna $P = 0,5\pi R^2$, v tomto případě je exces roven 90° a s klasickou rovinnou trigonometrií již nemůžeme počítat.

2.4 Sférický trojúhelník a jeho řešení

K řešení většiny úloh, s nimiž se setkáváme ve sférické astronomii, je třeba znalostí sférické trigonometrie, jejíž nejdůležitější rovnice odvodíme v této kapitole.

Tři body A , B a C se mohou nacházet např. na hvězdné obloze či na povrchu Země, jak je znázorněno na obrázku 14. Tyto body jsou spojeny oblouky hlavních kružnic a tvoří obrazec, kterému se říká sférický trojúhelník. Délky stran však nejsou, jak jsme zvyklí z euklidovské geometrie úsečkami, ale oblouky, jejichž střed leží ve středu koule. Ve sférickém trojúhelníku tak rozlišujeme úhly dvojího druhu

- úhly sevřené stranami: pro kouli jednotkového poloměru $\sphericalangle BSC = a$,
 $\sphericalangle CSA = b$, $\sphericalangle ASB = c$,
- úhly sevřené rovinami: $\sphericalangle (ASC, ASB) = \alpha$, $\sphericalangle (BSA, BSC) = \beta$
a $\sphericalangle (CSA, CSB) = \gamma$.



Obrázek 14: Pro odvození vět sférického trojúhelníku využijeme transformací zrcadlení a otočení.

Hlavní rovina prochází body AB , čárkovaná soustava souřadnic má s nečárkovanou souřadnicovou soustavou společnou osu y . Jednotlivé souřadnice lze pak zapsat jako

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin a \cos \beta \\ r \sin a \sin \beta \\ r \cos a \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin b \cos \alpha \\ r \sin b \sin \alpha \\ r \cos b \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Soustavy jsou opačně orientovány, pro přechod mezi nimi je potřeba provést operaci zrcadlení a následně je ještě nutné rotovat o úhel c kolem společné osy $y = y'$. Toto lze zapsat v maticovém tvaru následovně

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos c & 0 & -\sin c \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin c & 0 & \cos c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Po dosazení za čárkované a nečárkované kartézské souřadnice z rovnice 19 dostáváme matice

$$\begin{pmatrix} r \sin a \cos \beta \\ r \sin a \sin \beta \\ r \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos c & 0 & \sin c \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin c & 0 & \cos c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin b \cos \alpha \\ r \sin b \sin \alpha \\ r \cos b \end{pmatrix}, \quad (21)$$

což vede na výsledné řešení ve tvaru tří vět o trojúhelníku, které lze pak řešit:

$$\begin{aligned} \sin a \cos \beta &= -\cos c \sin b \cos \alpha + \sin c \cos b \\ \sin a \sin \beta &= \sin b \sin \alpha \\ \cos a &= \sin c \sin b \cos \alpha + \cos c \cos b \end{aligned} \quad (22)$$

První věta se nazývá *větou sinuskosinovou*, druhá je *věta sinová* a třetí *věta kosinová* (třetí větu lze přirozeně odvodit z prvních dvou). V astronomii se setkáváme často s řešením sférického trojúhelníku, kde bod A je reprezentován severním světovým pólem, bod B zenitem a bod C objektem (např. hvězdou). Takovému sférickému trojúhelníku se pak říká *trojúhelník nautický*. Při řešení sférického trojúhelníku lze cyklicky jednotlivé strany zaměňovat.

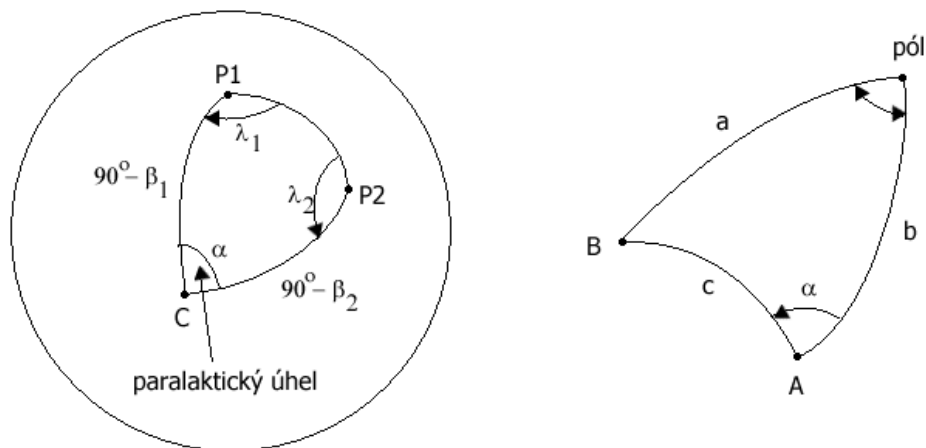
Budou-li všechny strany sférického trojúhelníku velmi malé, bude se blížit trojúhelníku v rovině. Za tohoto předpokladu pak můžeme aproximovat trigonometrické funkce $\sin x \doteq x$ a $\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Kosinová věta pro sférický trojúhelník pak přejde, neuvažujeme-li vyšší než druhé mocniny

$$\begin{aligned} \cos a &= \sin c \sin b \cos \alpha + \cos c \cos b \\ 1 - \frac{a^2}{2} &= bc \cos \alpha + \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2}\right) \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned} \quad (23)$$

do klasicky běžné kosinové věty v prostoru. Obdobně lze velice jednoduše odvodit sinovou větu

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad (24)$$



Obrázek 15: Příklady využití sférického trojúhelníku při výpočtu paralaktického úhlu a vzdálenosti hvězd či pozičního úhlu.

a pro sinuskosinovou větu pak při zanedbání všech členů od druhého řádu výše

$$\begin{aligned} \sin a \cos \beta &= -\cos c \sin b \cos \alpha + \sin c \cos b \\ a \cos \beta &= \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) c - b \cos \alpha \left(1 - \frac{c^2}{2}\right) \\ a \cos \beta + b \cos \alpha &= c \end{aligned} \quad (25)$$

vychází sinuskosinová věta v rovině.

Příkladem využití sférického trojúhelníku je například zjištění určení paralaktického úhlu, viz obr. 15 vlevo, nebo vzdálenosti dvou hvězd na hvězdné obloze, což je znázorněno na stejném obrázku vpravo. Zde je vzdálenost hvězd dána velikostí strany c , poziční úhel je úhel α . Známe-li např. souřadnice dvou hvězd A a B v rovníkových souřadnicích druhého druhu, pak platí

$$\begin{aligned} a &= 90^\circ - \delta_A \\ b &= 90^\circ - \delta_B \\ \gamma &= \alpha_B - \alpha_A \end{aligned} \quad (26)$$

a řešením tohoto sférického trojúhelníku pomocí kosinové věty dostáváme

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \gamma = \\ &= \sin \delta_B \sin \delta_A + \cos \delta_B \cos \delta_A \cos (\alpha_B - \alpha_A). \end{aligned} \quad (27)$$

V případě, že jsou hvězdy na obloze úhlově blízko sebe, můžeme psát

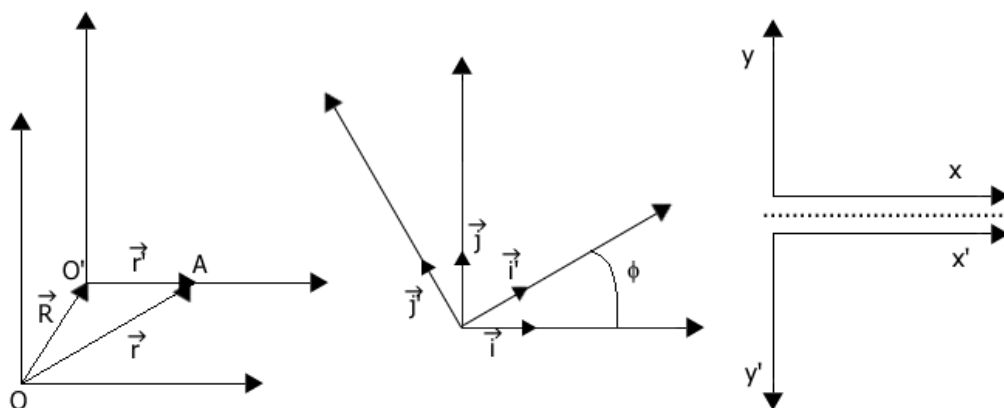
$$c^2 = (\Delta\delta)^2 + \cos^2 \left(\frac{\delta_A + \delta_B}{2} \right) (\Delta\alpha)^2. \quad (28)$$

Pro poziční úhel α pak ze sinové věty platí

$$\frac{\sin c}{\sin (\alpha_B - \alpha_A)} = \frac{\sin (90^\circ - \delta_A)}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\cos \delta_A}{\sin c} \sin (\alpha_B - \alpha_A). \quad (29)$$

2.5 Transformace souřadnic

Vzhledem k velkému množství různých souřadnicových systémů je občas zapotřebí nalézt transformační vztahy mezi nimi. K tomu slouží tzv. transformační rovnice, které můžeme psát ve výhodnějším maticovém tvaru, což nám další výpočty ulehčí.



Obrázek 16: Tři možné transformace souřadnic: posunutí (vlevo), rotace (uprostřed) a zrcadlení (vpravo).

Transformace jsou trojího druhu:

- a) posun počátku
- b) otočení
- c) zrcadlení.

Nejdříve si ukážeme tyto transformace v rovině. Budeme-li mít soustavu čárkovanou, pro kterou je polohový vektor bodu vyjádřen jako \vec{r}' , která je oproti nečárkované soustavě souřadnic posunuta o vektor \vec{R} (viz obr. 16), pak platí

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}, \quad (30)$$

kde

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (31)$$

a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Pro otočení o úhel ϕ můžeme zapsat transformace

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \end{pmatrix} (\vec{i} \ \vec{j}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}'\vec{i} & \vec{i}'\vec{j} \\ \vec{j}'\vec{i} & \vec{j}'\vec{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Matice, ve které se mezi sebou násobí jednotkové vektory čárkované a nečárkované soustavy, se nazývá matice otočení a jejími prvky jsou tzv. směrové kosiny,

pro které platí

$$\begin{aligned}\vec{i}'\vec{i} &= \cos \phi \\ \vec{i}'\vec{j} &= \cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi \\ \vec{j}'\vec{i} &= \cos(90^\circ + \phi) = -\sin \phi \\ \vec{j}'\vec{j} &= \cos \phi\end{aligned}\quad (34)$$

a dosazením do rovnice 33 pak dostáváme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \phi + y \sin \phi \\ -x \sin \phi + y \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Transformace zrcadlení nám převádí pravotočivou soustavu na levotočivou a naopak. Jak je uvedeno na obr. 16, zrcadlení je dáno $y' = -y$, matice transformace je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

V případě polárních souřadnic v rovině platí pro posunutí počátku stejný vztah jako u kartézských souřadnic, pro otočení o úhel ϕ pak

$$\begin{aligned}\varphi' &= \varphi - \phi & \text{a pro zrcadlení} & \quad \varphi' = -\varphi \\ r' &= r & & \quad r' = r\end{aligned}. \quad (37)$$

Pokud se budeme zajímat o transformace kartézských souřadnic v prostoru, pro posun počátku o vektor $\vec{R} = (X, Y, Z)$ platí

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad (38)$$

což lze zkráceně zapsat jako

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}. \quad (39)$$

Pro obecnou transformaci otočení potřebujeme znát matici otočení, kterou získáme z transformace

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (40)$$

kde hledaná matice otočení je

$$O = \begin{pmatrix} \vec{i}'\vec{i} & \vec{i}'\vec{j} & \vec{i}'\vec{k} \\ \vec{j}'\vec{i} & \vec{j}'\vec{j} & \vec{j}'\vec{k} \\ \vec{k}'\vec{i} & \vec{k}'\vec{j} & \vec{k}'\vec{k} \end{pmatrix}. \quad (41)$$

V této matici nejsou všechny hodnoty nezávislé, ale dají se vyjádřit na základě 3 parametrů, které jsou jako v případě rovinného problému reprezentovány směrovými kosiny, které jsou odpovědné za rotaci kolem tří os. Matice otočení kolem osy z o úhel ϕ ($z=z'$ a $\vec{k} = \vec{k}'$)

$$O(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

otočení kolem osy y o úhel θ

$$O(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (43)$$

a otočení kolem osy x o úhel ψ

$$O(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Postupným využitím výše uvedených matic otočení, lze každou soustavu libovolně otočit. Operace otočení kolem jednotlivých os nejsou komutativní.

2.6 Zeměpisné souřadnice

Na tělesech kulového tvaru, jakým je např. v prvním přiblížení Země, je výhodné zavést pro popis polohy na jejich povrchu sférickou soustavu, která má počátek ve středu koule. Budeme-li dále uvažovat Zemi, pak její základní rovina je totožná s rovinou rovníku, která je navíc kolmá k rotační ose procházející rovněž počátkem souřadnic. Rotační osa protíná na idealizované zemské kouli dva body, kterým se říká severní a jižní pól. Zemský rovník pak tuto sféru dělí na dvě stejné polokoule, severní a jižní.



Obrázek 17: Fotografie nultého poledníku na Greenwichské observatoři [E6].

Zeměpisné souřadnice jsou velice důležité i z hlediska astronomie, protože se stále většina pozorování provádí z povrchu Země a znalost místa pozorování je proto důležitá. Na sféře definujeme tzv. *hlavní kružnice*, což jsou průsečnice koule s rovinou jdoucí středem (počátkem souřadnicového systému) a tzv. *vedlejší kružnice*, které jsou dány průsečnicemi koule s rovinami, které neprocházejí počát-

kem. Na Zemi je hlavní kružnice reprezentována rovinou rovníku, vedlejší kružnice jsou pak rovnoběžné s rovníkem a jejich délky se směrem k pólům zmenšují. Těmto kružnicím se říká *rovnoběžky*, jejich poloha je dána zeměpisnou šířkou $\varphi \in (-90^\circ, 90^\circ)$. Zvláštní postavení, nejenom z astronomického hlediska, mají polární kruhy $\varphi = \pm 66^\circ 33'$ (severní a jižní) a obratníky raka $\varphi = 23^\circ 27'$ a kozoroha $\varphi = -23^\circ 27'$, které na Zemi vyčleňují tři klimatické oblasti - polární, mírnou a tropickou.

Hlavní kružnice (půlkružnice), které procházejí póly, nám definují tzv. *poledníky*. Význačný poledník (hlavní, nultý, základní, Greenwichský na obr. 17) nám definuje hlavní směr, který je dán průsečnicí roviny nulového poledníku s rovinou rovníku. Zeměpisné souřadnice jsou pak dány jako souřadnice sférické soustavy, která se počítá kladně na východ, osa y je v matematicky kladném směru, jde tedy o pravotočivou soustavu.

Pro konkrétní místo na povrchu, kterým prochází tzv. *místní poledník* (půlkružnice spojující póly), jsou souřadnice dány trojicí čísel: zeměpisná délka λ , šířka φ a nadmořská výška h , která odpovídá vzdálenosti bodu od středu koule. Zeměpisná délka je v rozmezí $\lambda \in (-180^\circ, 180^\circ)$, kde $\lambda < 0^\circ$ je také označována jako západní a $\lambda > 0^\circ$ je pak označována jako východní délka. Délka se může kromě stupňů, minut a vteřin vyjadřovat také v hodinách, minutách a sekundách (úhlově), jejichž význam souvisí s časovým rozdílem právě vrcholícího Slunce oproti Greenwichskému poledníku. Např. observatoř Masarykovy univerzity na Kraví hoře (MUO-IAU Station 616) má zeměpisné souřadnice

$$\lambda = 16^\circ 35' 0,5228'' \quad , \quad \varphi = 49^\circ 12' 15,8906'' \quad \text{a} \quad 306 \text{ m n.m.} \quad (45)$$

Zeměkouli si idealizujeme kouli, která má objem stejný jako Země, což představuje poloměr $R = 6371$ km. Jeden stupeň na hlavní kružnici pak představuje $1^\circ \sim 6371 \frac{2\pi}{360^\circ} = 111$ km, $1' \sim 1,85$ km a $1'' \sim 30,9$ m. Délka rovnoběžky o zeměpisné šířce φ je pak dána jako $2\pi R \cos \varphi$, což pro brněnskou rovnoběžku znamená, že jeden délkový stupeň je roven přibližně 73 km, jedna úhlová minuta 1,2 km a jedna úhlová vteřina 20,2 metrům.

Vzdálenost dvou bodů na zeměkouli je dána délkou tzv. *ortodromy*. Jde vlastně o část délky hlavní kružnice, která je vymezena těmito body, mezi kterými a středem Země je úhel γ . Tento úhel pak udává délku ortodromy $l = R\gamma$, resp. ve stupních $R \frac{360^\circ \gamma}{2\pi}$. Úhel γ lze vypočítat jako úhel mezi vektory \vec{a} a \vec{b}

$$\vec{a} \vec{b} = R^2 \cos \gamma, \quad (46)$$

kde vektory \vec{a} a \vec{b} jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} \vec{a} &= R(\vec{i} \cos \varphi_A \cos \lambda_A + \vec{j} \cos \varphi_A \sin \lambda_A + \vec{k} \sin \varphi_A) \\ \vec{b} &= R(\vec{i} \cos \varphi_B \cos \lambda_B + \vec{j} \cos \varphi_B \sin \lambda_B + \vec{k} \sin \varphi_B) \\ &\quad \downarrow \\ \cos \gamma &= \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos (\lambda_A - \lambda_B) + \sin \varphi_A \sin \varphi_B. \end{aligned} \quad (47)$$

Jde-li o relativně dva blízké body, tj. $\vec{a} \doteq \vec{b}$, můžeme si najít průměrnou zeměpisnou šířku a délku jako

$$\left. \begin{aligned} \varphi_A &= \varphi + \frac{\Delta\varphi}{2} & \varphi_B &= \varphi - \frac{\Delta\varphi}{2} \\ \lambda_A &= \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2} & \lambda_B &= \lambda - \frac{\Delta\lambda}{2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{po členy} \\ \text{2. řádu} \end{array} \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
1 - \frac{\gamma^2}{2} &= \cos\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cos\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cos \Delta\lambda + \sin\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \sin\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \\
&= 1 - 2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2 - \cos^2 \varphi \frac{(\Delta\lambda)^2}{2} \Rightarrow \\
\gamma &= \sqrt{(\Delta\varphi)^2 + \cos^2 \varphi (\Delta\lambda)^2}.
\end{aligned} \tag{49}$$

2.7 Astronomické souřadnicové soustavy

Astronomické souřadnicové soustavy jsou zpravidla soustavami sférickými nebo kartézskými a lze je dělit dle dvou kritérií

a) podle počátku soustavy

1. topocentrická soustava - střed v místě pozorování
2. geocentrická soustava - střed v těžišti Země
3. heliocentrická soustava - střed v těžišti Slunce
4. barycentrická soustava - střed v těžišti sluneční soustavy
5. planetocentrická soustava - střed v těžišti planety apod.

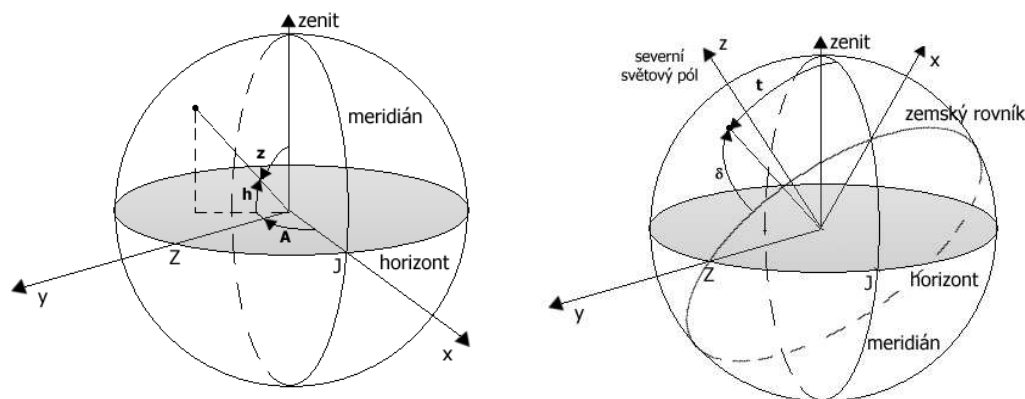
b) podle základní roviny a základního směru

1. obzorníková (horizontální) soustava - horizont a místní poledník, levotočivá
2. 1. rovníková soustava - zemský rovník a místní poledník, levotočivá
3. 2. rovníková soustava - zemský rovník a jarní bod, pravotočivá
4. ekliptikální soustava - ekliptika a jarní bod, pravotočivá
5. galaktická soustava - rovina Galaxie a centrum Galaxie, pravotočivá
6. orbitální soustava - rovina dráhy a výstupní uzel, pravotočivá
7. mezinárodní nebeský referenční systém (ICRS - International Celestial Reference System) - rovníkové souřadnice druhého druhu vybraných kvazarů a mimogalaktických objektů

2.7.1 Obzorníková (horizontální) soustava

Základní rovinou je tečná rovina s místem pozorování, která protíná s nebeskou sférou kružnici, které se říká místní horizont. Základní směr (směr osy x) je dán průsečnicí místního horizontu a roviny místního poledníku, tzv. *meridiánu*, v jižním směru. Osa y směřuje k západnímu bodu obzoru, soustava je tudíž levotočivá. Souřadnice délková je tzv. *azimut* A , který se měří od základního směru směrem na západ (90°), šířková souřadnice je tzv. *výška nad obzorem* h , což je úhel mezi pozorovaným bodem a tečnou rovinou v místě pozorování. Někdy je výhodné místo výšky nad obzorem zavést tzv. *zenitovou vzdálenost* z , která je rovna $z = 90^\circ - h$. Osa z této soustavy míří do zenitu (viz obr. 18). Vedlejšími kružnicím, které jsou rovnoběžné s rovinou horizontu se říká *almukantaráty*. Polohový vektor \vec{r} můžeme zapsat

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos h \cos A \\ r \cos h \sin A \\ r \sin h \end{pmatrix} \text{ a pro souřadnice } \begin{matrix} A \in (0^\circ, 360^\circ) \\ h \in (-90^\circ, 90^\circ) \\ z \in (0^\circ, 180^\circ) \end{matrix}. \tag{50}$$



Obrázek 18: Vlevo: obzorníková (horizontální) soustava souřadnic s vyznačením azimutu A , výšky nad obzorem h a zenitové vzdálenosti z . Vpravo: rovníková (ekvatoreální) soustava souřadnic 1. druhu s vyznačením hodinového úhlu t , deklinace δ a polohy severního světového pólu ve směru osy z .

2.7.2 Rovníková (ekvatoreální) soustava 1. druhu

Základní rovinou je rovina zemského rovníku, která s průsečnicí s rovinou místního poledníku (meridiánu) udává základní směr (v jižním směru). Osa y směřuje k průsečnici roviny zemského rovníku a místního horizontu směrem na západ, soustava je tudíž levotočivá. Souřadnice délková je tzv. *hodinový úhel* t , který se měří od základního směru směrem na západ, šířková souřadnice je tzv. *deklinace* δ , což je úhel mezi pozorovaným bodem a rovinou zemského rovníku. Někdy je výhodné místo deklinace zavést tzv. *pólovou distanci*, která je rovna $\delta' = (90^\circ - \delta)$. Osa z této soustavy míří do severního světového pólu (viz obr. 18 vpravo), který se v současné době nachází v souhvězdí Malé medvědice poblíž její nejjasnější hvězdy Polárky (α UMi). Polohový vektor \vec{r} můžeme zapsat

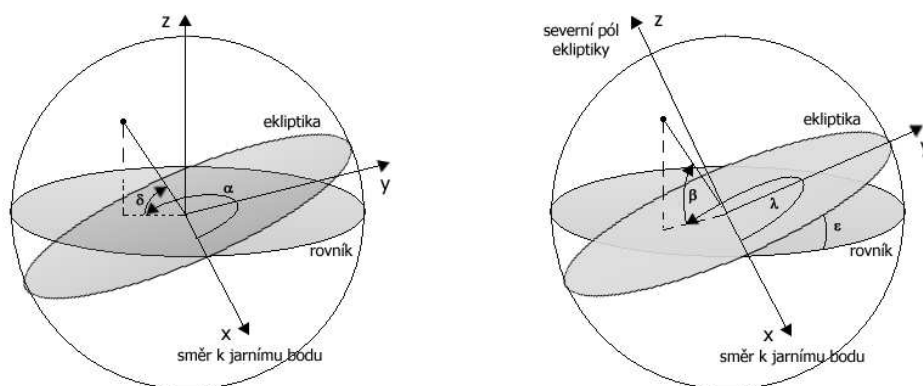
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \delta \cos t \\ r \cos \delta \sin t \\ r \sin \delta \end{pmatrix} \quad \text{a pro souřadnice} \quad \begin{array}{l} t \in (0^{\text{h}}, 24^{\text{h}}) \\ \delta \in (-90^\circ, 90^\circ) \\ \delta' \in (0^\circ, 180^\circ) \end{array} . \quad (51)$$

2.7.3 Rovníková (ekvatoreální) soustava 2. druhu

Základní rovinou je rovina zemského rovníku, která s průsečnicí s rovinou ekliptiky udává základní směr osy x k *jarnímu bodu*. Osa y směřuje v základní rovině je otočena o 90° proti směru otáčení oblohy (směrem na východ), soustava je tudíž pravotočivá. Souřadnice délková je tzv. *rektascenze* α , která se měří od základního směru směrem na východ, šířková souřadnice je tzv. *deklinace* δ , což je úhel mezi pozorovaným bodem a rovinou zemského rovníku. I v této soustavě je někdy výhodné použít místo deklinace *pólovou distanci*. Osa z této soustavy míří do severního světového pólu (viz obr. 19 vlevo). Polohový vektor \vec{r} můžeme zapsat

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \delta \cos \alpha \\ r \cos \delta \sin \alpha \\ r \sin \delta \end{pmatrix} \quad \text{a pro souřadnice} \quad \begin{array}{l} \alpha \in (0^{\text{h}}, 24^{\text{h}}) \\ \delta \in (-90^\circ, 90^\circ) \\ \delta' \in (0^\circ, 180^\circ) \end{array} . \quad (52)$$

Rozdíl oproti soustavě rovníkových souřadnic 1. druhu je v tom, že tato soustava je opačně orientovaná a rotuje s hvězdami.



Obrázek 19: Vlevo: rovníková (ekvatoreální) soustava souřadnic 2. druhu s vyznačením rektascenze α , deklinace δ a polohy severního světového pólu ve směru osy z . Vpravo: ekliptikální soustava souřadnic s vyznačením ekliptikální délky λ , ekliptikální šířky β , severním pólem ekliptiky ve směru osy z a úhlem ε , který svírají rovina ekliptiky a zemský rovník.

2.7.4 Ekliptikální soustava

Základní rovinou je rovina ekliptiky, která je reprezentována trajektorií Země při oběhu kolem Slunce. Základním směrem (osa x) je směr k *jarnímu bodu*, který je na průsečíku roviny ekliptiky a roviny zemského rovníku (výstupní uzel - Slunce se dostává nad rovinu zemského rovníku). Osa y směřuje v rovině ekliptiky proti směru otáčení oblohy (směrem na východ), soustava je tudíž pravotočivá. Souřadnice délková je tzv. *ekliptikální délka* λ , která se měří od základního směru směrem na východ, šířková souřadnice je tzv. *ekliptikální šířka* β , což je úhel mezi pozorovaným bodem a rovinou ekliptiky. Osa z ekliptikální soustavy míří do severního pólu ekliptiky (viz obr. 19 vpravo), který se nachází v souhvězdí Draka. Rovina zemského rovníku a rovina ekliptiky spolu svírají úhel $\varepsilon = 23^{\circ}27'$. Polohový vektor \vec{r} můžeme zapsat

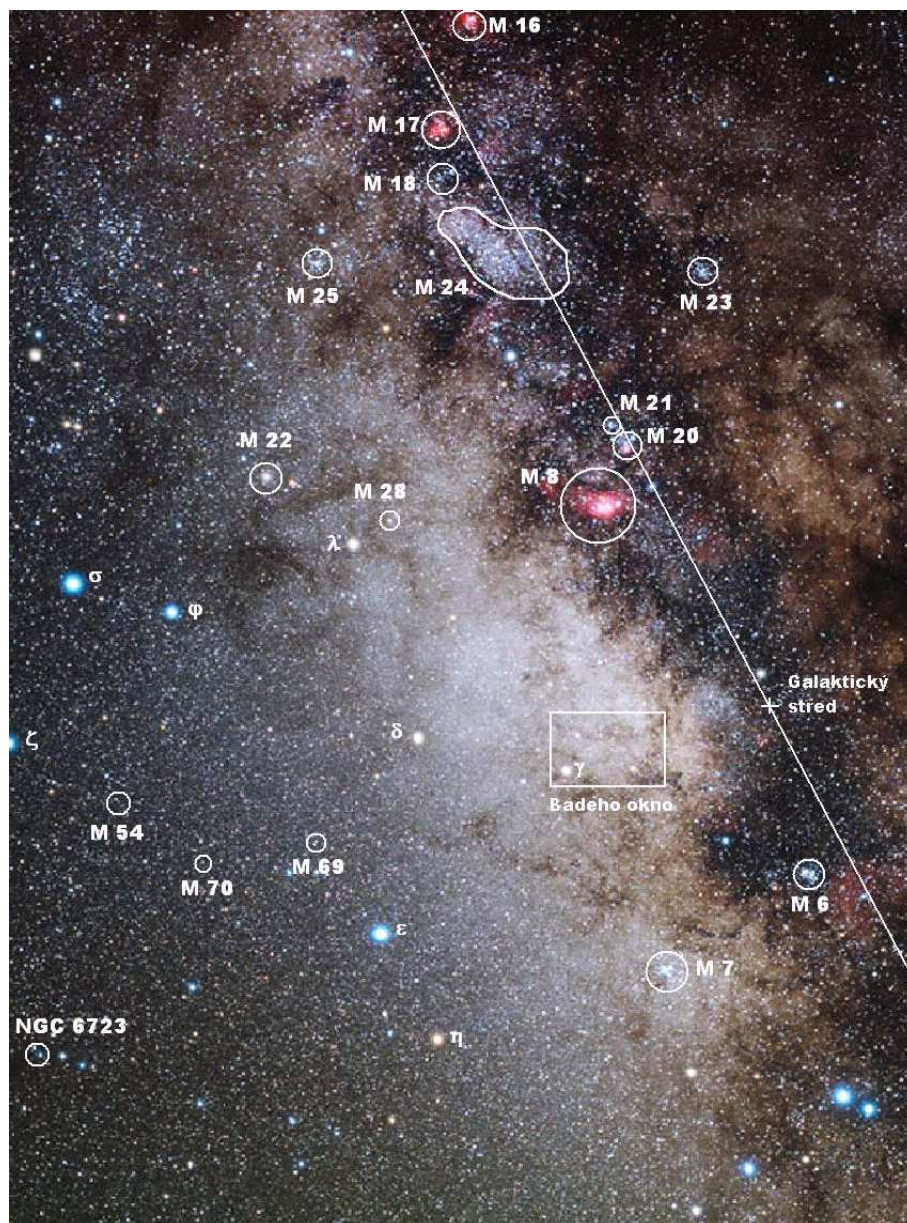
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \beta \cos \lambda \\ r \cos \beta \sin \lambda \\ r \sin \beta \end{pmatrix} \text{ a pro souřadnice } \begin{matrix} \lambda \in (0^{\circ}, 360^{\circ}) \\ \beta \in (-90^{\circ}, 90^{\circ}) \\ \varepsilon = 23^{\circ}27' \end{matrix} \quad (53)$$

2.7.5 Galaktická soustava

Základní rovinou je rovina Galaxie (Mléčné dráhy), která svírá s rovinou zemského rovníku úhel $i = 62,6^{\circ}$. Základním směrem (osa x) je směr ke *galaktickému centru* (viz obr. 20), který je dán definitoricky jako $\alpha = 17^{\text{h}}45^{\text{m}}37^{\text{s}}$ a $\delta = -28^{\circ}56'10''$ pro equinokcium 2000 (časový okamžik). Osa y směřuje v rovině Galaxie proti směru otáčení oblohy (směrem na východ), soustava je tudíž pravotočivá. Souřadnice délková je tzv. *galaktická délka* l , která se měří od základního směru směrem

na východ, šířková souřadnice je tzv. *galaktická šířka* b , což je úhel mezi pozorovaným bodem a rovinou Galaxie. Osa z galaktické soustavy míří do severního galaktického pólu, který se nachází v souhvězdí Vlasů Bereniky a jeho souřadnice jsou $\alpha = 12^{\text{h}}51^{\text{m}}26^{\text{s}}$ a $\delta = 27^{\circ}07'42''$, rovněž pro equinokcium 2000. Polohový vektor \vec{r} můžeme zapsat

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos b \cos l \\ r \cos b \sin l \\ r \sin b \end{pmatrix} \text{ a pro souřadnice } \begin{matrix} l \in (0^{\circ}, 360^{\circ}) \\ b \in (-90^{\circ}, 90^{\circ}) \\ i = 62,6^{\circ} \end{matrix} . \quad (54)$$



Obrázek 20: Pohled ve směru středu Galaxie [E7].

2.7.6 ICRS a ICRF

Vznik systému ICRS (International Celestial Reference System) souvisí se stále se zvyšujícími nároky na přesnost určení polohy, která by nebyla vázána se souřadnicovým systémem na Zemi. Tento systém je tvořen souřadnicemi objektů na nebeské sféře (souřadnicemi vybraných kvazarů a dalších mimogalaktických objektů, zpravidla jejich rektascenzemi a deklinacemi v epoše J2000). ICRS systém je vázán na nebeskou sféru a je ideální realizací inerciálního systému. V současné době existují tři realizace (International Celestial Reference Frame) systému ICRS (ICRF/ICRF2/ICRF3), které se od sebe liší větším počtem pozorování a větším počtem zaměřených objektů. Poslední ICRF3 byl představen v roce 2019 a má 303 pevně definovaných bodů a dalších 4 233 kandidátů. Přesnost souřadnic v tomto systému je $0,000 2''$ a není již ovlivněna např. posunem jarního bodu.

2.8 Vzájemný převod rovníkových souřadnic 1. a 2. druhu

Souřadnicové systémy rovníkových souřadnic 1. a 2. druhu mají shodnou základní rovinu, která je dána zemským rovníkem a jedna ze souřadnic, deklinace δ , je rovněž shodná pro obě soustavy. Transformace mezi soustavou 1. a 2. druhu je dána velice jednoduchým vztahem, kterým můžeme přejít od hodinového úhlu k rektascenzi

$$\alpha = S - t, \quad (55)$$

kde S je tzv. *hvězdný čas*, který je roven hodinovému úhlu jarního bodu. Hvězdný čas je rovnoměrně narůstající veličina, která je odrazem rotace Země vzhledem ke hvězdám. Perioda této rotace je rovna siderické době rotace, což je jeden hvězdný den.

$$1 \text{ hvězdný den} \sim \frac{365,244}{366,244} \text{ dne} = 0,997 27 \text{ str. slun. dne} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 04 \text{ s} \quad (56)$$

Výpočet hvězdného času pro daný okamžik lze provést na základě znalosti hvězdného času pro půlnoc předcházející noci, kterou lze nalézt např. v hvězdářské ročence, a nadcházející půlnoci, mezi kterými provedeme jednoduchou interpolaci

$$S = 1,002 738 T + S_1, \quad (57)$$

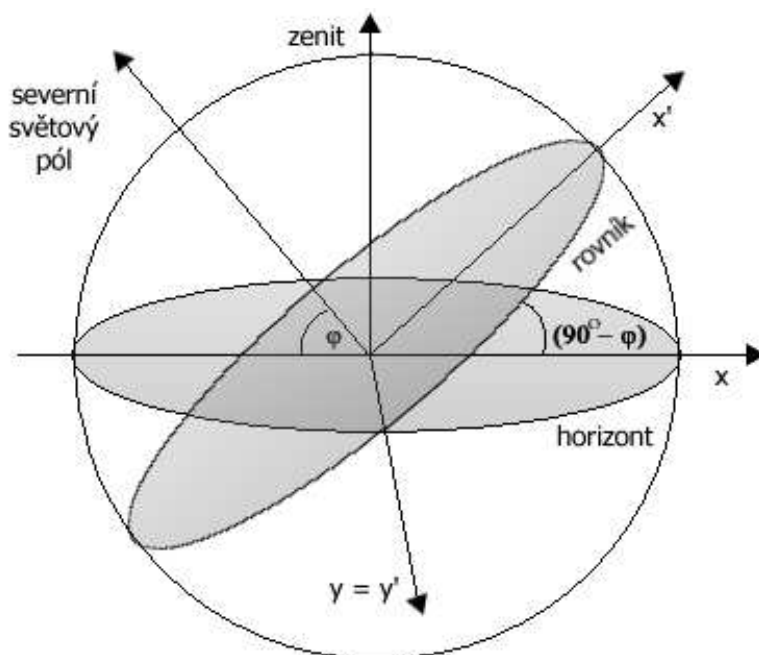
kde T je čas ve středním slunečním čase (občanský čas). Hvězdný den je tak o 3 minuty a 56 sekund kratší než den sluneční, do roka tak Země učiní vůči hvězdám o jednu otočku navíc (hvězdných dní je v roce o jeden více). Můžeme si položit otázku, kdy se běžné (občanské) a hvězdné hodiny srovnají. Uvážíme-li, že mezi hvězdným časem a hodinovým úhlem platí jednoduchý vztah 55, pak v době podzimní rovnodennosti má Slunce rektascenzi $\alpha_{\odot} = 12^{\text{h}}$ a pro dolní kulminaci Slunce platí, že hodinový úhel Slunce je v té době roven $t_{\odot} = 180^{\circ} = 12^{\text{h}}$, což odpovídá hvězdnému času $S = 0 \text{ h}$ a je tím pádem shodný s časem slunečním. V době jarní rovnodennosti jsou hvězdný a sluneční čas posunuty o 12 hodin.

2.9 Převod obzorníkových a rovníkových souřadnic 1. druhu

Tyto dvě soustavy mají shodnou osu y , která míří západním směrem, hlavní roviny jsou mezi sebou skloněny o úhel $\Theta = 90^\circ - \varphi$, kde φ odpovídá zeměpisné šířce místa pozorování (viz obr. 21).

Uvážíme-li, že jde pouze o transformaci otočení kolem osy y , můžeme použít vztah 43 a přechod od obzorníkové soustavy do rovníkové soustavy 1. druhu pak můžeme zapsat jako

$$\begin{pmatrix} \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ \cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos t \\ \cos \delta \sin t \\ \sin \delta \end{pmatrix}. \quad (58)$$



Obrázek 21: Transformace obzorníkových a rovníkových souřadnic 1. druhu.

Řešením soustavy rovnic dostáváme následující tři transformační vztahy

$$\begin{aligned} \sin \varphi \cos h \cos A + \cos \varphi \sin h &= \cos \delta \cos t \\ \cos h \sin A &= \cos \delta \sin t, \\ -\cos \varphi \cos h \cos A + \sin \varphi \sin h &= \sin \delta \end{aligned} \quad (59)$$

provedeme-li přechod od rovníkové soustavy 1. druhu k soustavě obzorníkové, půjde o otočení kolem osy y o úhel $-\Theta$. Můžeme tedy napsat

$$\begin{pmatrix} \sin \varphi & 0 & -\cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos t \\ \cos \delta \sin t \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ \cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix} \quad (60)$$



Obrázek 22: Dráhy hvězd na obloze v okolí severního světového pólu [E8].

a opět získáme tři transformační rovnice

$$\begin{aligned}
 \sin \varphi \cos \delta \cos t - \cos \varphi \sin \delta &= \cos h \cos A \\
 \cos \delta \sin t &= \cos h \sin A \\
 \cos \varphi \cos \delta \cos t + \sin \varphi \sin \delta &= \sin h
 \end{aligned} \tag{61}$$

Důsledkem těchto transformačních vztahů je závislost viditelnosti objektů nebeské sféry na zeměpisné šířce. Hvězdy, pro které na severní polokouli platí

$$\delta_{\text{cirk}} > 90^\circ - \varphi, \quad (62)$$

jsou hvězdami *cirkumpolárními*, nikdy nezajdou pod horizont, naproti tomu hvězdy s deklinací

$$\delta_{\text{nev}} < -90^\circ + \varphi, \quad (63)$$

nejsou ze zeměpisné šířky φ pozorovatelné. Ostatní objekty vycházejí a zapadají a nad horizontem opíší tzv. *denní oblouk*, jehož délka je dvojnásobkem maximální velikosti hodinového úhlu, který lze vypočítat dosazením za $h = 0^\circ$ do rovnice 61

$$\cos \varphi \cos \delta \cos t_{\text{max}} + \sin \varphi \sin \delta = 0 \Rightarrow \cos t_{\text{max}} = -\tan \varphi \tan \delta. \quad (64)$$

Denní oblouk 180° mají objekty s deklinací rovnou nule nebo pokud pozorujeme z libovolného místa na zemském rovníku. Pro cirkumpolární hvězdy není kosinus definován, hvězdy nad obzorem opíší za siderický den celé kružnice (viz obr. 22).

Můžeme najít na základě výše uvedených transformačních vztahů i závislost azimutu západu tělesa A o deklinaci δ na zeměpisné šířce φ , kdy získáme dosazením do třetí rovnice za $h = 0^\circ$ v soustavě rovnic 59

$$\sin \delta = -\cos \varphi \cos A \Rightarrow \cos A = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}. \quad (65)$$

Z tohoto vztahu je ihned patrné, že objekty o deklinaci nula stupňů vždy zapadají přesně na západě a vycházejí na východě, pro póly pak vychází, že objekty ani nevycházejí, ani nezapadají, jejich pohyb je rovnoběžný s rovinou horizontu.

Pro denní pohyb Slunce na obloze $\delta_\odot \in (-23^\circ 27', 23^\circ 27')$, pak platí, že na severním pólu se pohybuje rovnoběžně s rovinou horizontu a v době, kdy má deklinaci větší než nula stupňů, vůbec nezapadá, nastává polární den. V té samé době je na jižním pólu polární noc. Od pólu až k polárním kruhům ($\pm 66^\circ 33'$) tak mohou nastat situace, kdy Slunce některé dny v roce nezapadne, nebo naopak vůbec nevyjde nad obzor. Pro ostatní zeměpisné šířky již Slunce vždy vychází i zapadá a mění se jen délka dne a noci v závislosti na deklinaci Slunce. Pro Brno tak platí, že v době letního slunovratu je maximální výška Slunce nad obzorem $64^\circ 15'$ (délka dne je o něco málo větší než 16 hodin) a v době zimního slunovratu pak $17^\circ 21'$ (den trvá necelých 8 hodin).

2.10 Převod ekliptikálních a rovníkových souřadnic

Již starověcí astronomové na základě svých pozorování zjistili, že se během roku deklinace Slunce mění v rozmezí $\pm 23^\circ 27'$ a že rektascenze Slunce monotonně narůstá od 0^{h} do 24^{h} . V pravou místní pólnoc kulminují hvězdy, pro které platí

$$\alpha = \alpha_\odot \pm 12^{\text{h}}. \quad (66)$$

Postupně tak během roku kulminují o pólnoci hvězdy se stále vyšší rektascenzí, což má za důsledek, že se Slunce pohybuje na hvězdné obloze mezi hvězdami po hlavní

kružnici, která je k rovině světového rovníku skloněná o úhel $\varepsilon = 23^\circ 27'$. Tato hlavní kružnice se nazývá ekliptika, tento název souvisí se zákryty (eclipse) Měsíce a Slunce. Dráhu Slunce na hvězdné obloze bylo možné vysledovat v okamžicích slunečních zatmění, v případě zatmění Měsíce pak bylo možné říci, že Slunce se nachází právě na opačné straně (ekliptikální délka Slunce je o 180° větší než Měsíce). Tento pohled je ale pohledem geocentrickým. Podíváme-li se na to z hlediska obíhající Země kolem Slunce, pak právě rovina dráhy Země je totožná s rovinou ekliptiky a průsečnice roviny této dráhy s nebeskou sférou je ekliptika. Rotační osa Země svírá s rovinou ekliptiky (zemské dráhy) úhel $\varepsilon = 23^\circ 27'$. Pól ekliptiky leží v současné době v souhvězdí Draka, Slunce se pohybuje po ekliptice proti otáčení oblohy denně zhruba o $360^\circ/365,25 = 0,986^\circ$, což je méně než jeden stupeň, protože sluneční den je o 3 minuty a 56 sekund delší než den hvězdný.

Slunce se nachází ve výstupném uzlu své dráhy v době jarní rovnodennosti, tento bod se nazývá jarním bodem, v sestupném uzlu je pak v době podzimní rovnodennosti. Maximální deklinaci má Slunce v čase letního slunovratu, minimální deklinace Slunce je v době zimního slunovratu.

Transformace mezi rovníkovými souřadnicemi 2. druhu a ekliptikálními souřadnicemi je dána pouhým otočením o úhel $\varepsilon = 23^\circ 27'$ kolem osy x , která je u obou souřadnicových systémů shodná (viz obr. 19). Transformační vztahy jsou pak

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix}, \quad (67)$$

čímž získáme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \varepsilon \cos \delta \sin \alpha + \sin \varepsilon \sin \delta &= \cos \beta \sin \lambda \\ -\sin \varepsilon \cos \delta \sin \alpha + \cos \varepsilon \sin \delta &= \sin \beta \end{aligned} \quad (68)$$

Pro Slunce stále platí, že $\beta_\odot = 0^\circ$, můžeme vztahy zjednodušit, ale je lépe vyjít z opačné transformace

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}, \quad (69)$$

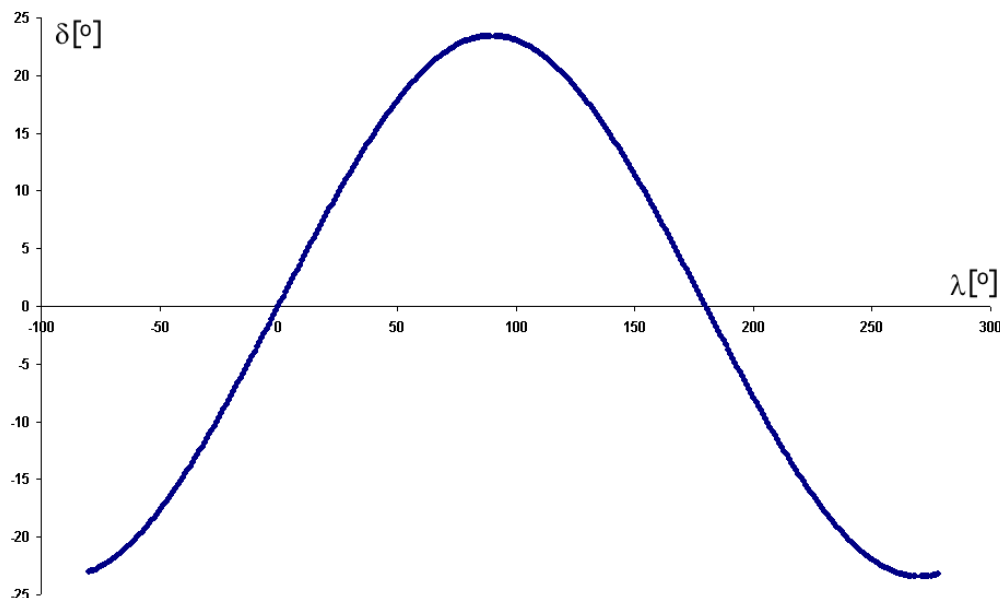
což dává

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \varepsilon \cos \beta \sin \lambda - \sin \varepsilon \sin \beta &= \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \varepsilon \cos \beta \sin \lambda + \cos \varepsilon \sin \beta &= \sin \delta \end{aligned} \quad (70)$$

Dosazení ekliptikální šířky Slunce $\beta_\odot = 0^\circ$ do těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} \cos \lambda_\odot &= \cos \delta_\odot \cos \alpha_\odot \\ \cos \varepsilon \sin \lambda_\odot &= \cos \delta_\odot \sin \alpha_\odot, \\ \sin \varepsilon \sin \lambda_\odot &= \sin \delta_\odot \end{aligned} \quad (71)$$

z čehož nám vyplývá vztah mezi ekliptikální délkou Slunce a jeho deklinací, který je dán třetí rovnicí.



Obrázek 23: Změna deklinace Slunce v závislosti na jeho ekliptikální délce.

Hledáme-li závislost změny rektascenze Slunce na ekliptikální délce, vyjdeme naopak z prvních dvou rovnic, které podělíme a dostaneme tak

$$\tan \alpha_{\odot} = \tan \lambda_{\odot} \cos \varepsilon. \quad (72)$$

Zajímáme-li se o rychlost změny rektascenze, pak tuto rovnici zderivujeme podle času

$$\dot{\alpha}_{\odot} = \frac{d\alpha_{\odot}}{dt} \text{ a } \dot{\lambda}_{\odot} = \frac{d\lambda_{\odot}}{dt} \Rightarrow \dot{\alpha}_{\odot} \frac{1}{\cos^2 \alpha_{\odot}} = \dot{\lambda}_{\odot} \frac{\cos \varepsilon}{\cos^2 \lambda_{\odot}} \quad (73)$$

a dále ji můžeme po pár úpravách přepsat jako

$$\dot{\alpha}_{\odot} = \frac{\cos \varepsilon}{\cos^2 \lambda_{\odot} + \sin^2 \lambda_{\odot} \cos^2 \varepsilon} \dot{\lambda}_{\odot}. \quad (74)$$

Z této rovnice je patrné, že i v případě kruhového pohybu Země kolem Slunce, tj. že by platilo $d\lambda_{\odot}/dt = \text{konst}$, bude vycházet pro různé ekliptikální délky různá změna v rektascenzi (nerovnoměrný pohyb). K celkovému nerovnoměrnému pohybu Slunce během roku v rektascenzi přispívá kromě eliptické dráhy také sklon roviny ekliptiky a rovníku, který se při vzájemné transformaci podílí na tomto nerovnoměrném pohybu více než elipticita zemské trajektorie.

2.11 Denní pohyb Slunce v různých zeměpisných šířkách

Začneme-li zkoumat denní pohyb Slunce v závislosti na naší poloze na Zemi, bude našim prvním místem severního pól, který má zeměpisnou šířku $\varphi = 90^\circ$. Slunce se zde pohybuje rovnoběžně s rovinou horizontu, je-li jeho deklinace větší než 0° , pak

ekliptikální délka	změna v rektascenzi
$\lambda_{\odot} = 0^{\circ}$	$\dot{\alpha}_{\odot} = 0,917 \dot{\lambda}_{\odot}$
$\lambda_{\odot} = 45^{\circ}$	$\dot{\alpha}_{\odot} = 0,996 \dot{\lambda}_{\odot}$
$\lambda_{\odot} = 90^{\circ}$	$\dot{\alpha}_{\odot} = 1,090 \dot{\lambda}_{\odot}$
$\lambda_{\odot} = 135^{\circ}$	$\dot{\alpha}_{\odot} = 0,996 \dot{\lambda}_{\odot}$
$\lambda_{\odot} = 180^{\circ}$	$\dot{\alpha}_{\odot} = 0,917 \dot{\lambda}_{\odot}$

Tabulka 1: Změna rektascenze Slunce v závislosti na jeho ekliptikální délce.

je nad obzorem a hovoříme o polárním dni, je-li menší, není vidět a nastává polární noc. Vzhledem k tomu, že na severní polokouli trvá léto déle než na polokouli jižní, délka polárního dne je zde větší než polární noci. Maximální výška Slunce nad obzorem je v době letního slunovratu a činí $h_{\max} = 23^{\circ}27'$.

Půjdeme-li ze severního pólu směrem k rovníku, dostaneme se na rovnoběžku se zeměpisnou šířkou $\varphi = 66^{\circ}33'$, které se říká severní polární kruh. Slunce na této rovnoběžce vychází a zapadá po celý rok s dvěma výjimkami. V době letního slunovratu Slunce nezapadne a jeho maximální výška nad obzorem bude $h_{\max} = 46^{\circ}54'$ zatímco minimální bude rovna nule. V době zimního slunovratu naopak maximální výška Slunce bude rovna nule a minimální pak $h_{\min} = -46^{\circ}54'$.

V Brně vychází i zapadá Slunce po celý rok, a protože je sklon roviny rovníku a brněnského horizontu $40^{\circ}48'$, vychází tak maximální výška Slunce nad obzorem $h_{\max} = 64^{\circ}15'$ pro letní slunovrat a $h_{\min} = 17^{\circ}21'$ pro slunovrat zimní.

Půjdeme-li dále k jihu, dostaneme se na obratník Raka ($\varphi = 23^{\circ}27'$), kde nám v době letního slunovratu Slunce vrcholí v zenitu a jeho výška je tak 90° , pro zimní slunovrat je pak výška Slunce rovna $h_{\min} = 43^{\circ}06'$.

Nakonec přijdeme až na rovník. Zde trvá den i noc po celý rok stejnou dobu a to přibližně 12 hodin. Slunce prochází zenitem v dobách rovnodenností, v čase zimního slunovratu vrcholí ve výšce $66^{\circ}33'$ nad jihem, o letním slunovratu ve stejné výšce, ale nad severem.

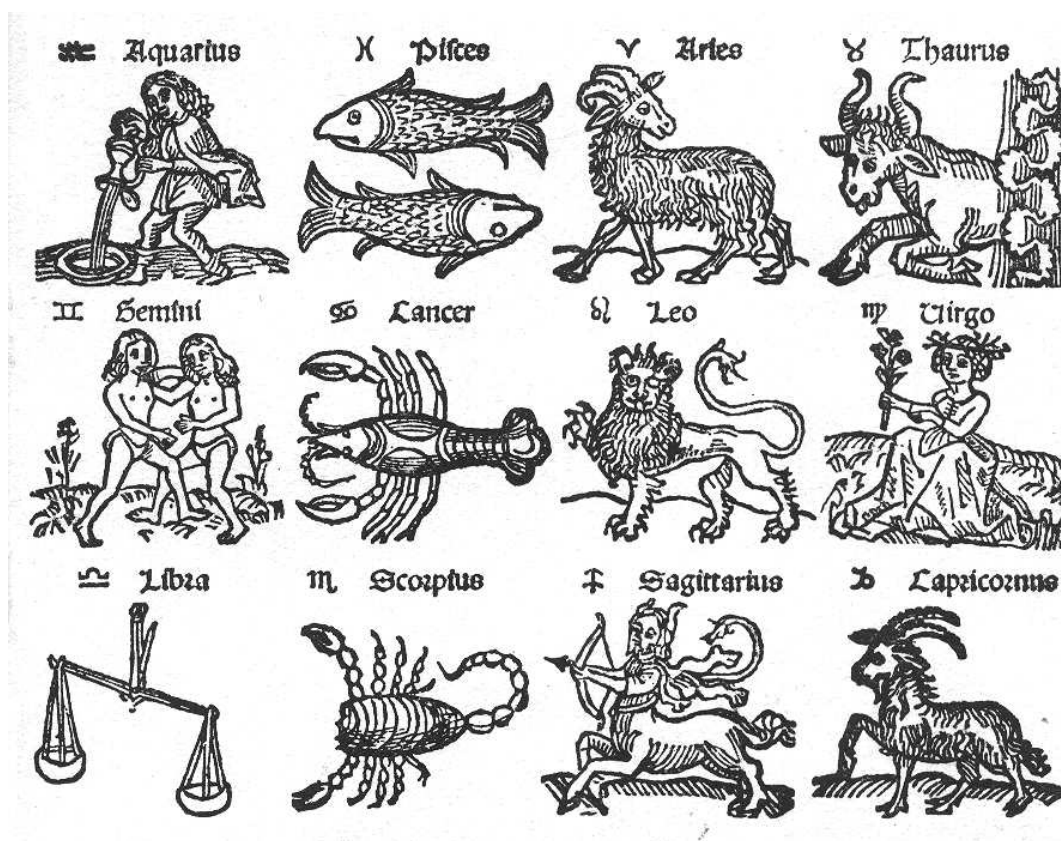
2.12 Poloha planet na zemské obloze

Planety se nacházejí rovněž jako Měsíc a Slunce poblíž roviny ekliptiky. Největší sklon dráhy k této rovině má planeta Merkur $i = 7^{\circ}00'$ a Venuše $i = 3^{\circ}23'$.

Vnější planety se většinou pohybují ve směru proti otáčení hvězdné oblohy (jako Slunce), vnitřní planety se mohou vzdálit od Slunce jen o maximální úhlovou vzdálenost, která se nazývá *elongace*. Návrat na totéž místo na hvězdné obloze souvisí se *synodickou periodou*, která je nejdelší pro Mars 780 dní a pro Venuši 583 dní. Se synodickými periodami souvisí i možnost pozorování planet a jejich viditelnost. (Podrobněji budou pohyby planet popsány v kapitole [Dynamika sluneční soustavy](#)).

	λ_{\odot}	\odot vstupuje do znamení	\odot vstupuje do souhvězdí (2021–22)
♈ Beran	0°	20.03.2021 09:37	18.04.21 19:28 19.04.22 01:40
♉ Býk	30°	19.04.2021 20:33	14.05.21 06:58 14.05.22 13:02
♊ Blíženci	60°	20.05.2021 19:37	21.06.21 14:29 21.06.22 20:33
♋ Rak	90°	21.06.2021 03:32	20.07.21 19:19 21.07.22 01:23
♌ Lev	120°	22.07.2021 14:26	10.08.21 18:24 11.08.22 00:25
♍ Panna	150°	22.08.2021 21:34	16.09.21 19:34 17.09.22 01:43
♎ Váhy	180°	22.09.2021 19:21	31.10.21 07:57 31.10.22 13:59
♏ Štír	210°	23.10.2021 04:51	23.11.21 10:53 23.11.22 17:00
Hadonoš	—	—	29.11.21 22:55 30.11.22 04:59
♐ Střelec	240°	22.11.2021 02:33	18.12.21 06:24 18.12.22 12:37
♑ Kozoroh	270°	21.12.2021 15:59	20.01.21 01:44 20.01.23 07:55
♒ Vodnář	300°	20.01.2022 02:39	16.02.22 12:14 16.02.23 18:29
♓ Ryby	330°	18.02.2022 16:43	12.03.22 13:39 12.03.23 19:58

Tabulka 2: Časy vstupů Slunce do znamení a souhvězdí v UT (vypočítáno dle [E9]).



Obrázek 24: Znamení zvěrokruhu ze 16. století [E10].

2.13 Zvířetníková (zodiakální) souhvězdí

V rovině ekliptiky se nachází celkem třináct souhvězdí, dvanáct z nich je tzv. zvířetníkových. Tato souhvězdí hrají roli pro astrologii a tvorbu horoskopů. V dobách,

kdy astronomie a astrologie nebyly ještě odlišeny, tato souhvězdí přímo souvisela i se znameními a polohou Slunce na hvězdné obloze. Vlivem precesního pohybu však došlo k posunu a v dnešní době o jarní rovnodennosti se Slunce nachází v souhvězdí Ryb a ne v Beranovi, jak by podle horoskopu mělo být. Posun o jedno znamení nastává přibližně za 2000 let. Rozdíl mezi znamením a skutečnou polohou Slunce v souhvězdí je uveden v tabulce 2.

2.14 Převod galaktických souřadnic na rovníkové

Mléčnou dráhou, která obepíná celou oblohu, můžeme vést hlavní kružnici, která je průsečnicí nebeské sféry s rovinou Galaxie (Mléčné dráhy). Sklon zemského rovníku k rovině Galaxie je $62,6^\circ$. Pól Galaxie leží v souhvězdí Vlasů Bereniky a má souřadnice $\alpha = 12^{\text{h}}51^{\text{m}}26^{\text{s}}$ a $\delta = 27^\circ07'42''$ (pro epochu 2000).

Chceme-li tak během roku vidět celou Mléčnou dráhu, musíme pozorovat ze zeměpisných šířek mezi $-27,4^\circ < \varphi < 27,4^\circ$. I z tohoto důvodu byla vystavěna největší část Evropské jižní observatoře (ESO) - Paranal observatory ($24^\circ37'38''$ j.š. a $70^\circ24'15''$ z.d.) v nehostinné poušti v nadmořské výšce 2635 m blíže rovníku než starší observatoř na La Silla ($29^\circ15'40''$ j.š. a $70^\circ43'52''$ z.d., 2400 m n.m.).



Obrázek 25: Hlavní dalekohledy na observatoři La Silla (zleva doprava): MPG/EOS 2,2m, Schmidt 1m, NTT 3,5m a ESO 3,6m (foto J. Janík, 1.8.2011).

Nulový bod galaktické šířky a délky má v rovníkových souřadnicích druhého druhu souřadnice $\alpha = 17^{\text{h}}45^{\text{m}}37^{\text{s}}$ a $\delta = -28^\circ56'10''$ (pro epochu 2000). Poloha

uzlu je $\alpha_0 = 18^{\text{h}}51^{\text{m}}37^{\text{s}}$ a $\delta_0 = 00^{\circ}00'00''$ (pro epochu 2000), což odpovídá $l_0 = 33^{\circ}$ a $b = 0^{\circ}$.

Při transformaci od rovníkových souřadnice druhého druhu k souřadnicím galaktickým musíme provést celkem tři otočení. První je otočení okolo osy z o úhel α_0 , druhé otočení je kolem osy x o úhel mezi rovinou Galaxie a rovinou zemského rovníku i a poslední je rotace kolem nově definované osy z' o úhel $-l_0$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos l_0 & -\sin l_0 & 0 \\ \sin l_0 & \cos l_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 & \sin \alpha_0 & 0 \\ -\sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (75)$$

Můžeme si ale také přepsat tyto transformace jako

$$\begin{pmatrix} \cos b \cos(l-l_0) \\ \cos b \sin(l-l_0) \\ \sin b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos(\alpha-\alpha_0) \\ \cos \delta \sin(\alpha-\alpha_0) \\ \sin \delta \end{pmatrix}, \quad (76)$$

z čehož získáme

$$\begin{aligned} \cos b \cos(l-l_0) &= \cos \delta \cos(\alpha-\alpha_0) \\ \cos b \sin(l-l_0) &= \cos i \cos \delta \sin(\alpha-\alpha_0) + \sin i \sin \delta \\ \sin b &= -\sin i \cos \delta \sin(\alpha-\alpha_0) + \cos i \sin \delta \end{aligned} \quad (77)$$

Opačný převod nám dá

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos(\alpha-\alpha_0) \\ \cos \delta \sin(\alpha-\alpha_0) \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b \cos(l-l_0) \\ \cos b \sin(l-l_0) \\ \sin b \end{pmatrix}, \quad (78)$$

z čehož získáme

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos(\alpha-\alpha_0) &= \cos b \cos(l-l_0) \\ \cos \delta \sin(\alpha-\alpha_0) &= \cos i \cos b \sin(l-l_0) + \sin i \sin b \\ \sin \delta &= -\sin i \cos b \sin(l-l_0) + \cos i \sin b \end{aligned} \quad (79)$$

DOPLŇUJÍCÍ LITERATURA

Guth V., Link F., Mohr J. M., Šternberk B. 1954, *Astronomie I.*, NČAV, Praha, 664 stran

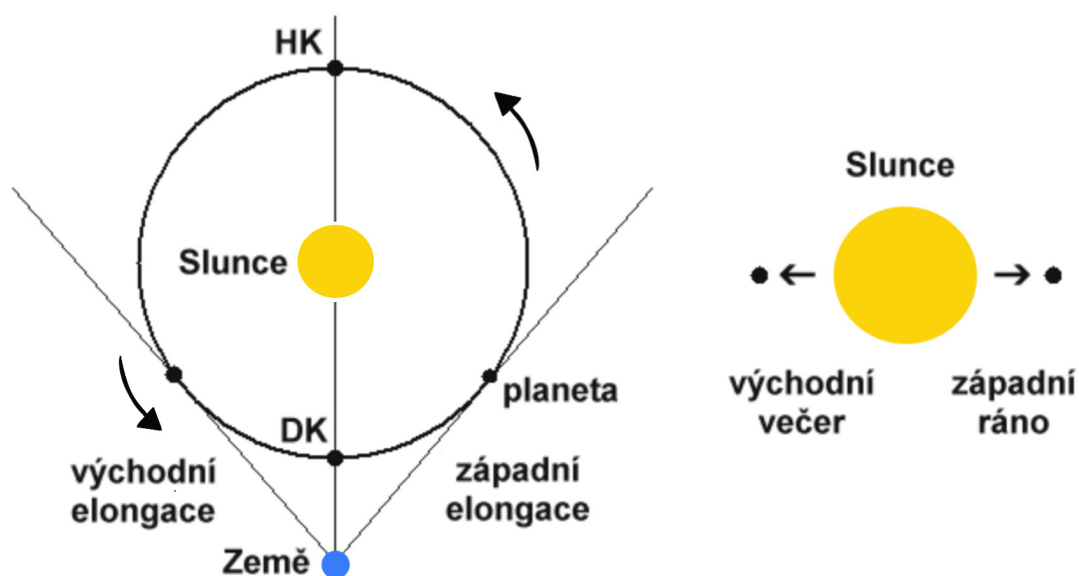
Hacar B. 1963, *Úvod do obecné astronomie*, SPN, Praha, 512 stran

Široký J., Široká M. 1973, *Základy astronomie v příkladech*, SPN, Praha, 160 stran

DYNAMIKA SLUNEČNÍ SOUSTAVY

3.1 Pohyby planet a Měsíce po hvězdné obloze

Již starověcí astronomové si všimli odlišného chování v pohybech planet, jejichž historické dělení bylo na planety dolní, dnes vnitřní (Merkur a Venuše), a horní - vnější (Mars, Jupiter, Saturn). Toto dělení vzniklo na základě rozdílných pohybů vzhledem ke Slunci.



Obrázek 26: Východní a západní elongace, horní a dolní konjunkce pro vnitřní planety (credit: Veronika Veselá).

Vnitřní planety se nacházejí vždy v témže nebo v sousedním souhvězdí jako Slunce, od kterého se mohou odchýlit o určitý maximální úhel, kterému se říká

elongace. Pro planetu Merkur jsou možné elongace v rozmezí 18° – 28° , u Venuše je rozpětí mezi 45° – 48° v závislosti na vzájemné poloze planety, Slunce a Země.

Elongace jsou dvojího druhu, *východní*, která nastává večer po západu Slunce (planeta je vzhledem ke Slunci více na východ), a *západní* nastávající ráno před východem Slunce (planeta je více na západ od Slunce).

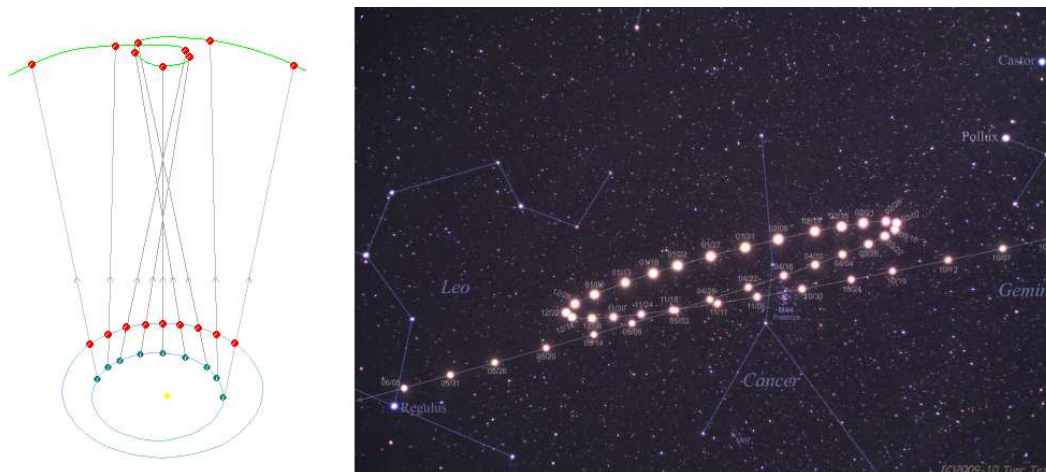
Merkur		
datum	střed přechodu (UT)	minimální vzdálenost od středu \odot v ''
07.05.2003	07:52	708,3
08.11.2006	21:41	422,9
09.05.2016	14:57	318,5
11.11.2019	15:20	75,9
13.11.2032	08:54	572,1
07.11.2039	08:46	822,3

Venuše		
datum	střed přechodu (UT)	minimální vzdálenost od středu \odot v ''
09.12.1874	04:07	829,9
06.12.1882	17:06	637,3
08.06.2004	08:20	626,9
06.06.2012	01:29	554,4
11.12.2117	02:48	723,6
08.12.2125	16:01	736,4

Tabulka 3: Data přechodů vnitřních planet před slunečním kotoučem mezi lety 2000–2040 pro Merkur a 1800–2200 pro Venuši [E11].

Pohyb planety vůči Slunci si popíšeme dle obrázku 26. Vyjdeme z bodu, kdy je planeta v největší západní elongaci. V tomto okamžiku má i největší úhlovou vzdálenost od Slunce a je pozorovatelná na východě ráno před východem Slunce. Od tohoto okamžiku se začíná přibližovat ke Slunci, vychází stále později a pohybuje se proti směru otáčení hvězdné oblohy. Tak se dostává do místa zvaného horní konjunkce, kdy vychází ve stejný čas jako Slunce a není pozorovatelná. Po průchodu horní konjunkcí se dostává východněji od Slunce a začíná být pomalu pozorovatelná navečer hned po západu Slunce nad západním obzorem. Období, kdy lze planetu na večerní obloze pozorovat se stále prodlužuje, až se planeta dostane do bodu své největší východní elongace, její pohyb vůči Slunci se zastaví a od tohoto okamžiku se začne opět úhlově přibližovat ke Slunci a pohybuje se ve směru otáčení hvězdné oblohy až se dostane do místa dolní konjunkce, kdy je sice nejbližší Zemi, ale není viditelná. Existují ovšem výjimky, kdy můžeme vnitřní planety pozorovat i během dolní konjunkce (viz tabulka 3), např. v případě přechodů před slunečním kotoučem nebo z družic zkoumající Slunce (jak horní tak dolní konjunkce).

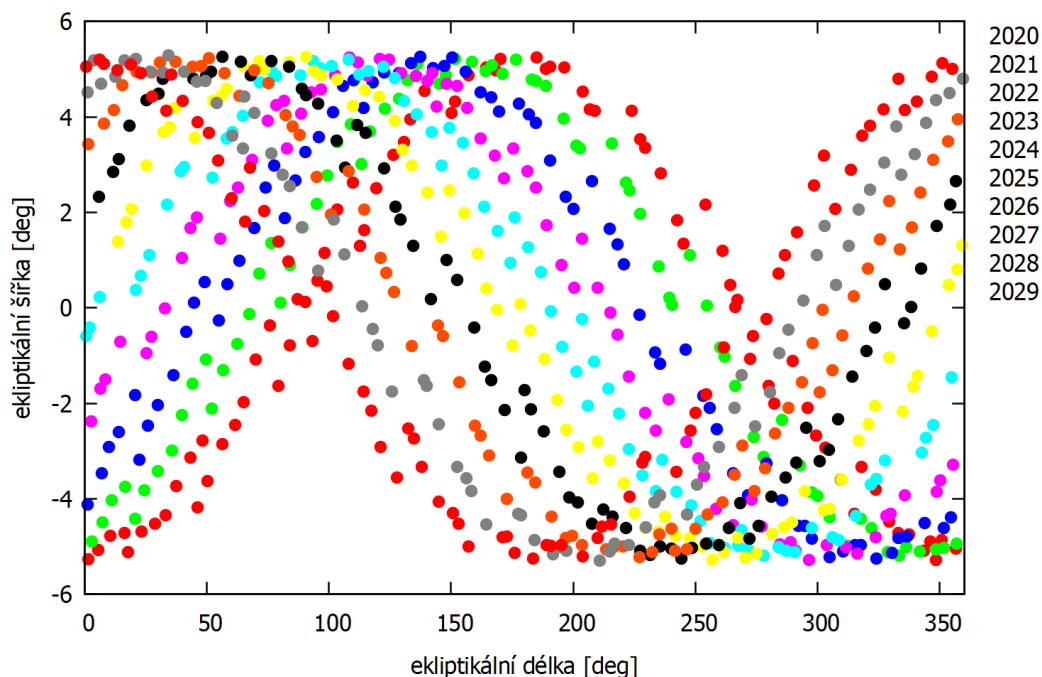
Vnější planety vykazují zcela odlišné pohyby. Většinu času se pohybují proti směru otáčení hvězdné oblohy, ale pomaleji než Slunce. Proto se úhlová vzdálenost



Obrázek 27: Znárodnění vzniku retrográdního pohybu (vlevo) a skutečná pozorování planety Mars (vpravo) (Tezel [E12]).

planety od Slunce zmenšuje, až je planeta nepozorovatelná v paprscích zapadajícího Slunce. Slunce se poté dostane před planetu, tj. je východněji než planeta a planeta tak začne být pozorovatelná těsně před východem Slunce na ranní obloze. Úhlová vzdálenost planety a Slunce se stále zvětšuje, planeta je pozorovatelná postupně nad ránem, později po většinu noci, její pohyb po hvězdné obloze se zpomaluje, až se dostane do tzv. zastávky a začne vykonávat *retrográdní pohyb* (pohyb ve směru otáčení hvězdné oblohy) až do další zastávky, kdy se pohyb změní opětovně proti směru otáčení hvězdné oblohy a planetu ze západu dožene Slunce a je opět nepozorovatelná.

Pohyb Měsíce po hvězdné obloze je pohybem nejkomplicovanějším. Na rozdíl od planet se Měsíc pohybuje jen v přímém směru proti otáčení oblohy a stejně jako planety se nachází pouze poblíž roviny ekliptiky. Trajektorie Měsíce kolem Země je elipsa s velkou poloosou $a = 384\,000$ km a excentricitou $e = 0,055$. Rozdíl mezi vzdáleností perigea a apogea tak činí 42 200 km, což se výrazně projevuje na změně úhlové velikosti Měsíce. Vzhledem k tomu, že měsíční dráha a rovina ekliptiky mají sklon cca $5^{\circ}09'$, můžeme v pásu o šířce přibližně $10^{\circ}18'$ nalézt Měsíc. Měsíční dráha mezi hvězdami není tataž vzhledem k tomu, že se uzly měsíční dráhy stáčí (posouvají se proti jeho oběhu, na každou otočku Měsíce je stočení uzlů o cca 1,5 stupně) a tím pádem se Měsíc dostává do různých míst v tomto pásu (obr. 28). Skutečný pohyb Měsíce je však mnohem komplikovanější a jeho popis je svízelný. Je to dáno hlavně značnými poruchami měsíční trajektorie, kdy jsou i ty nejmenší odchylky díky malé vzdálenosti Měsíce od Země nápadné a rozdílností geocentrické a topocentrické polohy. Parametry měsíční dráhy se neustále mění v širokém rozmezí (např. sklon měsíční trajektorie se mění v rozmezí od $4^{\circ}58'$ do $5^{\circ}20'$), pro jejich přesný popis je zapotřebí i několika set periodických členů. Sekulární pohyby postihují i délku výstupného uzlu a délku perigea. Uzlová přímka se pohybuje proti pohybu Měsíce, perioda stáčení (základní) je 18 let a 7 měsíců (6 793 dní), přímka apsid (perigeum) se naproti tomu stáčí k východu s periodou 9 let (3 232 dní).



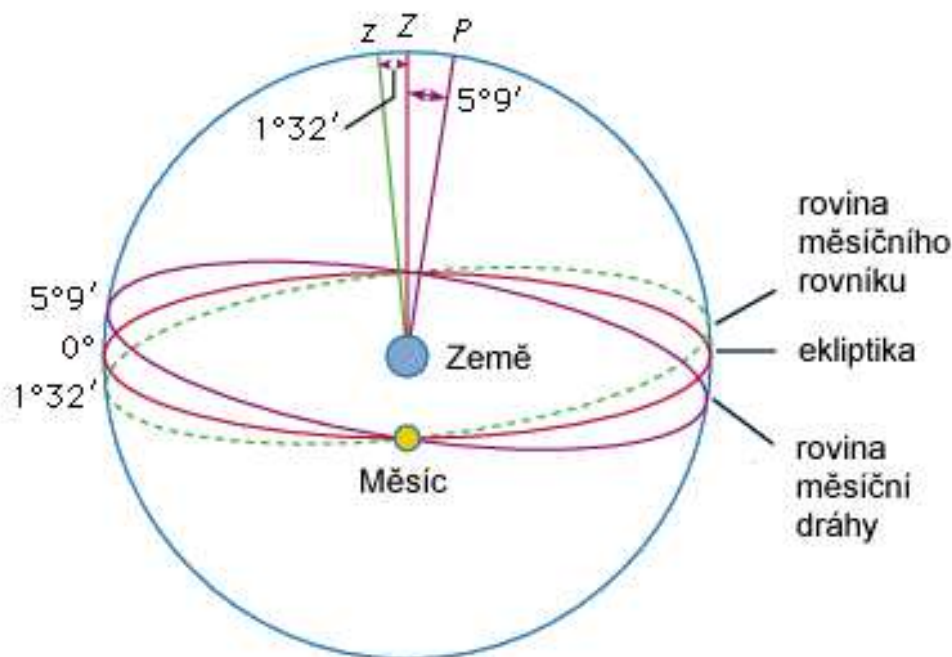
Obrázek 28: Graf polohy Měsíce vůči rovině ekliptiky v letech 2020–29, na kterém je zřetelně viditelný posun uzlů měsíční dráhy proti jeho pohybu.

Pohyb uzlů určuje podmínky viditelnosti Měsíce, je-li výstupný uzel v blízkosti jarního bodu, pak je dráha Měsíce mezi hvězdami vně prostoru mezi rovníkem a ekliptikou, sklon měsíční dráhy k zemskému rovníku může být až $28^{\circ}36'$ ($23^{\circ}27' + 5^{\circ}09'$), naopak, je-li poblíž jarního bodu uzel sestupný, sklon měsíční dráhy vůči rovníku je jen $18^{\circ}18'$ ($23^{\circ}27' - 5^{\circ}09'$). Z toho plynou změny deklinace Měsíce během roku v rozmezích $-28^{\circ}36'$ až $28^{\circ}36'$ pro první případ a $-18^{\circ}18'$ až $18^{\circ}18'$ pro případ druhý. Jak je vidět na obrázku 28, první případ nastane koncem roku 2024.

Doba, která uplyne mezi průchody Měsíce týmž uzlem, se nazývá *drakonický měsíc*, který je kratší než měsíc siderický (je to způsobeno pohybem uzlové přímky proti směru jeho oběhu) a to 27,212 dne (27 dní 5 hodin a 6 minut) oproti 27,321 dne *měsíce siderického*. Tento rozdíl činí 0,109 dne a až po 18,6 letech se uzlová přímka dostane do původní polohy. Měsíční fáze se střídají s periodou *synodického měsíce* 29,530 dní (29 dní 12 hodin a 44 minut). Anomalistický měsíc má periodu 27,55 dní a měsíc tropický je jen o 7 sekund kratší než měsíc siderický.

3.2 Rotace a librace Měsíce

Rotace Měsíce kolem osy je vázaná s jeho oběhem kolem Země a je totožná se siderickým měsícem (27,321 dne). Rotační osa Měsíce svírá s kolmicí k rovině měsíční trajektorie úhel $6^{\circ}39'$ ($\pm 10'$), s rovinou ekliptiky pak úhel $1^{\circ}32'$. V roce 1693 formuloval Giovanni Domenico Cassini (1625–1712) tři zákony o pohybu Měsíce, ze kterých vyplývá, že roviny ekliptiky, dráhy Měsíce a měsíčního rovníku se stále protínají v téže uzlové přímce (obr. 29).



Obrázek 29: Cassiniho zákon o pohybu Měsíce.

V daný okamžik je ze Země viditelných 50 % měsíčního povrchu, dlouhodobějšími pozorováními můžeme zmapovat až 60 % díky tzv. *libracím Měsíce*. Optické librace (geometrické) pak rozdělujeme na *v délce*, *v šířce* a *paralaktickou*.

Librace v selenografické délce souvisí s pohybem Měsíce po eliptické trajektorii. Rotace Měsíce je víceméně rovnoměrná, vlivem eliptické dráhy se však Měsíc pohybuje nerovnoměrně. Úhlová rychlost se mění jako důsledek 2. Keplerova zákona a za 1/4 měsíce průvodič po průchodu perigeem opíše větší úhel než 90° , tím se poodhalí východní část odvrácené strany, naopak po průchodu apogeem se odhalí více část západní. Perioda librací v délce souvisí s anomalistickým měsícem, amplituda librací je $7^\circ 54'$.

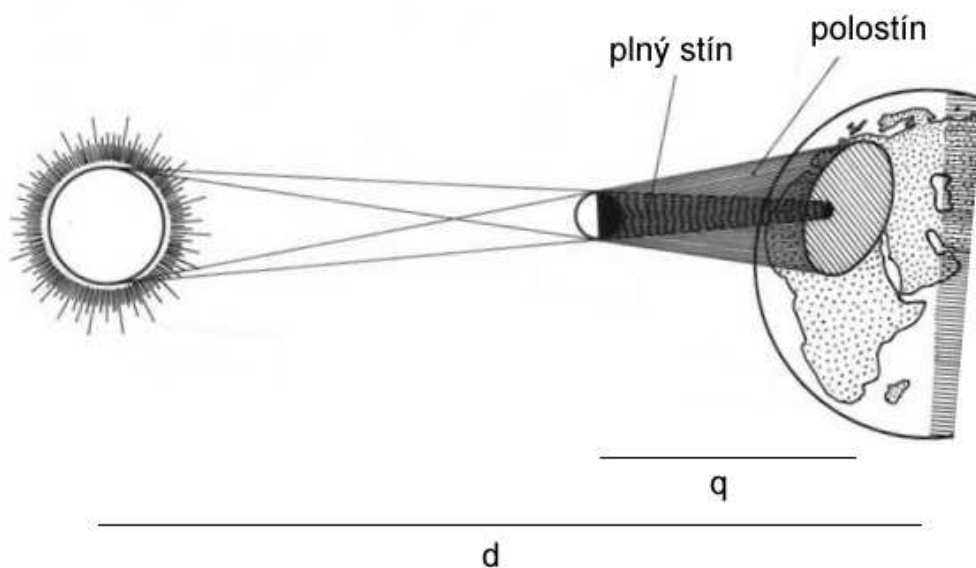
Librace v selenografické šířce je dána sklonem rotační osy Měsíce k jeho dráze, perioda librací je úměrná délce drakonického měsíce, jejich amplituda je $6^\circ 41'$.

Paralaktická (půldenní) librace souvisí v blízkosti Měsíce od Země. Pozorovateli se během jednoho dne, díky otáčení jeho vlastní polohy kolem osy rotace naší planety, naskýtají na Měsíc pohledy z různých úhlů. Maximální amplituda paralaktické librace je cca 1 stupeň.

Skutečné „pohupování“ Měsíce je dáno fyzickou librací, která souvisí s jeho elipsoidálním tvarem. Velká poloosa Měsíce se periodicky odklání od směru na Zemi, amplituda těchto změn je však nepatrná a činí kolem $2'$.

3.3 Sluneční a měsíční zatmění

Průběh slunečního zatmění, kdy je na zemský povrch vrhán měsíční stín (polostín), závisí na konkrétním místě na Zemi. Na obrázku 30 je znázorněno geometrické uspořádání při zatmění Slunce. Délka kužele plného stínu q je dána poměrem velikostí Měsíce $r_2 = 1\,738$ km a Slunce $r_1 = 696\,000$ km a dále vzdáleností Slunce od Země $d = 149,7 \cdot 10^6$ km. Z podobnosti trojúhelníků pak pro délku kužele plného stínu vychází $q = dr_2/r_1 = 374\,000$ km. Střední vzdálenost Měsíce a Země je sice $384\,400$ km, ale vzhledem k tomu, že se vzdálenost mění v rozmezí od $363\,300$ do $405\,500$ km a i zemský poloměr $6\,378$ km je nezanedbatelný, pak jsou možná i úplná zatmění Slunce. Je-li vzdálenost místa větší než q , pak nastává zatmění prstencové.



Obrázek 30: Geometrie zatmění Slunce (upraveno dle [E13]).

I za nejlepších podmínek není velikost oblasti úplného zatmění (totality) větší než 270 km, úplná zatmění Slunce jsou na jednom místě Země vzácná. Sluneční zatmění mají shodný průběh. Měsíc postupně ukusuje ze západního okraje Slunce (1. kontakt) až skončí na východním okraji (4. kontakt). Druhý a třetí kontakt pak definují fázi úplného zatmění Slunce. Nejdelší úplné zatmění může trvat okolo 7 minut, délka celého úkazu (včetně částečné fáze) může trvat až kolem 2 hodin.

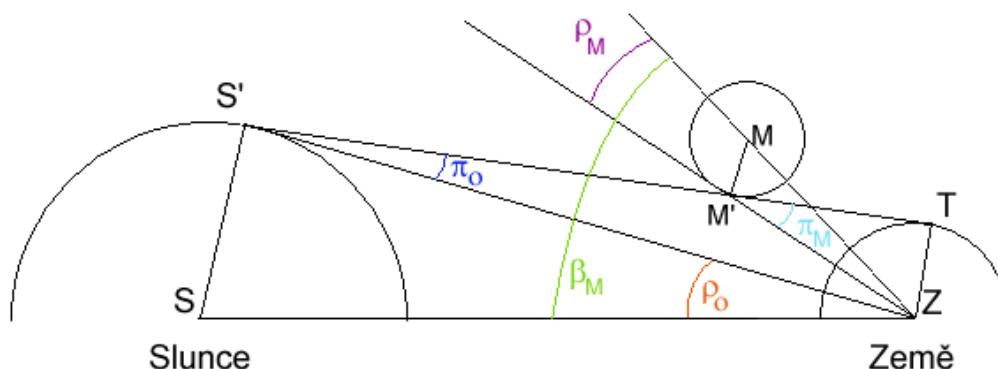
3.3.1 Podmínky pro sluneční a měsíční zatmění

Kdyby roviny měsíční dráhy a ekliptiky byly tytéž, pak by nastávala sluneční a měsíční zatmění každý synodický měsíc. Ve skutečnosti tyto roviny spolu svírají úhel $5^{\circ}09'$, proto se během konjunkce (opozice) Slunce a Měsíc nacházejí nad (pod) sebou. Aby nastalo zatmění, musí být splněny následující podmínky. Měsíc musí být buď v novu (sluneční zatmění) nebo v úplňku (měsíční zatmění) a zároveň se musí

nacházet v blízkosti uzlu (výstupného či sestupného) své dráhy, tj. nedaleko roviny ekliptiky. Pro okamžik začátku slunečního zatmění (1. kontakt) si můžeme dle obrázku 31 definovat měsíční π_M a sluneční π_\odot paralaxu, střední úhlové poloměry Měsíce ρ_M a Slunce ρ_\odot a geocentrickou ekliptikální šířku Měsíce β_M , pro kterou někde na Zemi proběhne aspoň částečné zatmění Slunce. Uvážíme-li, že střední hodnoty pro paralaxy Měsíce a Slunce jsou $\pi_M = 57'$, $\pi_\odot = 8,8''$ a velikosti jejich středních úhlových poloměrů $\rho_M = 15,5'$, $\rho_\odot = 16,3'$, pak pro geocentrickou ekliptikální šířku Měsíce dostaneme

$$\beta_M = \sphericalangle MZM' + \sphericalangle M'ZS' + \sphericalangle S'ZS, \quad (80)$$

kde $\sphericalangle MZM' = \rho_M$, $\sphericalangle S'ZS = \rho_\odot$ a $\sphericalangle M'ZS' = \pi_M - \pi_\odot$. Po dosazení dostaneme ekliptikální geocentrickou šířku Měsíce rovnu $\beta_M = 88,7'$. Po přepočtení do ekliptikální geocentrické délky nám vychází $\sin \Delta\lambda = \tan \beta_M / \tan i$, což pro hodnoty $i = 5^\circ 09'$ a $\beta_M = 88,7'$ nám dává $\Delta\lambda = 16,5^\circ$. Zatmění Slunce tak může nastat, je-li střed měsíce v úplňku vzdálen $\pm 16,5^\circ$ od výstupného (sestupného) uzlu. Tento úsek (33°) uběhne Slunce za 34 dní. Během této doby určitě nastane alespoň jeden nov, ne-li dva (délka synodického měsíce je 29,5 dne). Během roku tak nastanou minimálně dvě sluneční zatmění (jedno u výstupného, druhé u sestupného uzlu) a maximálně pět a to tehdy, když první ze zatmění je krátce po 1. lednu, druhé nastane následující nov a třetí a čtvrté dříve než za půl roku. Páté pak bude pozorovatelné po 354 dnech od 1. zatmění. Musíme však poznamenat, že jde o všechny typy zatmění (částečné, úplné i prstencové).

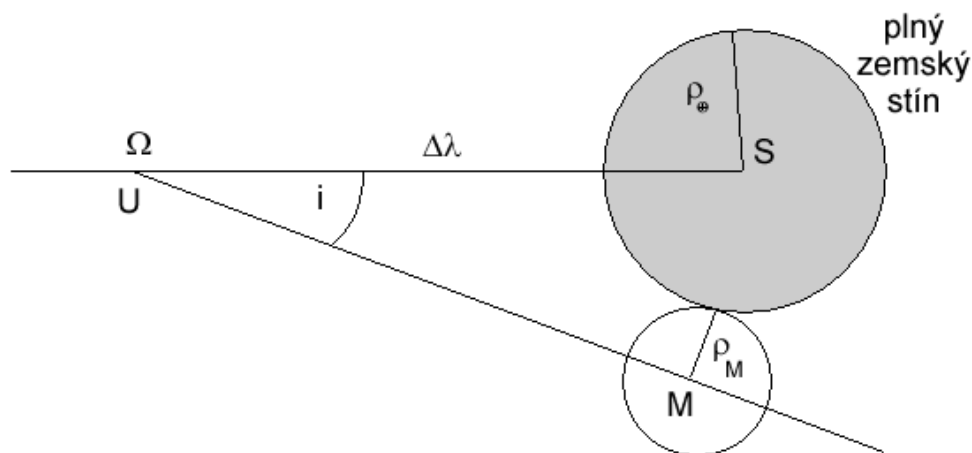


Obrázek 31: Sluneční zatmění.

Nyní se můžeme podívat, jak je to se zatměním Měsíce. Na obrázku 32 je znázorněn uzel měsíční dráhy Ω a plný zemský stín, který se dotýká Měsíce v bodě M' . Poloměr plného zemského stínu je dán $\rho_\oplus = \pi_M + \pi_\odot - \rho_\odot = 57' + 9'' - 16,3' \doteq 41'$. K alespoň částečnému plnostínovému zatmění Měsíce dojde, jsou-li středy zemského stínu a Měsíce vzdáleny méně než $41' + 15,5' = 56,5'$. Ze sférického trojúhelníku $\sphericalangle MUS$ můžeme pomocí sinovy věty vypočítat geocentrickou ekliptikální délku $\sin 56,5' = \sin \Delta\lambda \sin 5^\circ 09' \Rightarrow \Delta\lambda = 10,6^\circ$.

Zatmění (plnostínové) Měsíce, třeba jen krátkodobé, nastane tehdy, je-li střed zemského stínu vzdálen od uzlu měsíční dráhy méně než $10,6$ stupně. Stín Země

se po ekliptice pohybuje v průměru rychlostí 59 minut za den. Období, kdy se zemský stín pohybuje v okolí uzlu měsíční dráhy, tak trvá $2 \cdot 10,6(60/59) = 21,6$ dne. Je to výrazně méně, než činí synodická perioda. Proto, pokud v určitém měsíci došlo k zatmění Měsíce, v předchozím ani v následujícím k zatmění dojít nemohlo. Během roku nemusí dojít k žádnému zatmění, maximálně mohou být tři, první hned po 1. lednu, druhé za půl roku a poslední těsně před jeho koncem. Musíme si ale uvědomit, že hovoříme o úplném zatmění, budeme-li se zabývat zatměním polostínovým, pak úhlová velikost polostínu Země je $\rho_{\oplus} = \pi_M + \pi_{\odot} + \rho_{\odot} \doteq 73,4'$ a maximální vzdálenost středů polostínu Země a Měsíce je pak rovna $89'$. Tomu odpovídá úsek od uzlu měsíční dráhy dlouhý $16,8^\circ$ (celkem pak $33,6^\circ$), ve kterém se realizuje polostínové zatmění Měsíce. To již odpovídá statistice slunečních zatmění, minimálně 2, maximálně 5.



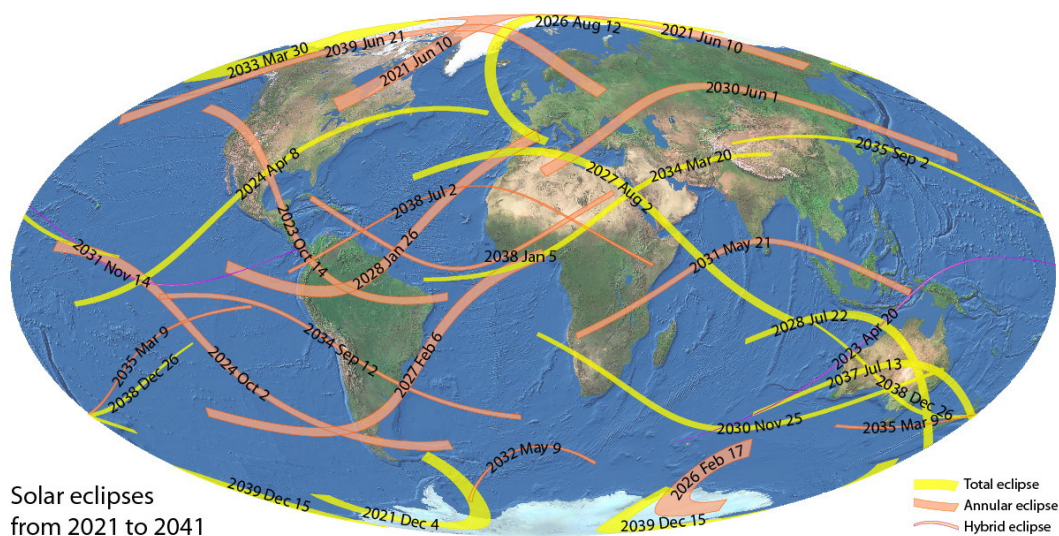
Obrázek 32: Zatmění Měsíce.

Z výše uvedených podmínek můžeme určit maximální počet zatmění Slunce (úplná, prstencová, částečná) + plnostínových zatmění Měsíce (vyloučena polostínová) na sedm a to buď 5 slunečních a 2 měsíční nebo 4 sluneční a 3 měsíční. To se děje však velmi výjimečně, nejčastější je případ dvou slunečních a měsíčních zatmění během jednoho kalendářního roku.

Posloupnost zatmění se opakuje takřka přesně s periodou zvanou saros (18 let 11,3 dne). Souvisí to s periodami střídání fází Měsíce (synodický měsíc 29,53 dne), průchodem uzly jeho dráhy (drakonický měsíc 27,21 dne) a drakonickým rokem (346,62 dne), který je dán dobou průchodu Slunce výspuným uzlem měsíční trajektorie. Nejmenší společná perioda, při které se dostanou všechny periody do přibližně téže fáze odpovídá 242 drakonickým měsícům (6 585,36 dne), 223 synodickým měsícům (6 585,32 dne, tj. 18 let 11 dní 7 hodin a 42 minut) a 19 drakonickým letům (6 585,75 dne). Tyto rozdíly vedou k jistým malým změnám (1/3 dne), což má vliv na oblast viditelnosti zatmění, která se posouvá s každým cyklem saros o 120 stupňů směrem na západ.

Během každého sarosu dojde k 70 zatměním, z nichž je 41 slunečních a 29 měsíčních. Z konkrétního místa zemského povrchu je jich však viditelných velmi málo. To se týká hlavně úplných zatmění Slunce, i když jich bývá během sarosu 10, frek-

vence jejich opakování na jednom místě je jednou za 200 až 300 let. Z našich končin nastane pozorovatelné úplné zatmění Slunce až 7. října 2135 a bude pozorovatelné ze severní části České republiky s maximální dobou trvání totální fáze 4 minuty 50 sekund.



Obrázek 33: Místa slunečních zatmění pro roky 2021–2041 [E14].

3.4 Ptolemaiova soustava

Při pozorování ze Země není jasné, zda se těleso a s ním i pozorovatel hýbe, a to si uvědomovali i naši předkové. Řeční učenci připouštěli obě možnosti, jak myšlenku geocentrickou, tak heliocentrickou.

Geocentrická domněnka měla mnohem více zastánců, kteří se oháněli dobrými argumenty:

- Země se nijak nechvěje, necuká, nehází sebou → je nehybná
- fyzikální důvody — vše padá do středu Země — Aristotelova fyzika
- hvězdy nejeví paralaxu (objevena až 200 let po vynálezu dalekohledu)
- čistě pragmatické hledisko — zajímá nás poloha planet, Měsíce a Slunce na naší, tedy geocentrické obloze. Proč si tedy komplikovat situaci a hledat jiný střed pohledu. Transformace souřadnic byly mimo tehdejší matematické možnosti.

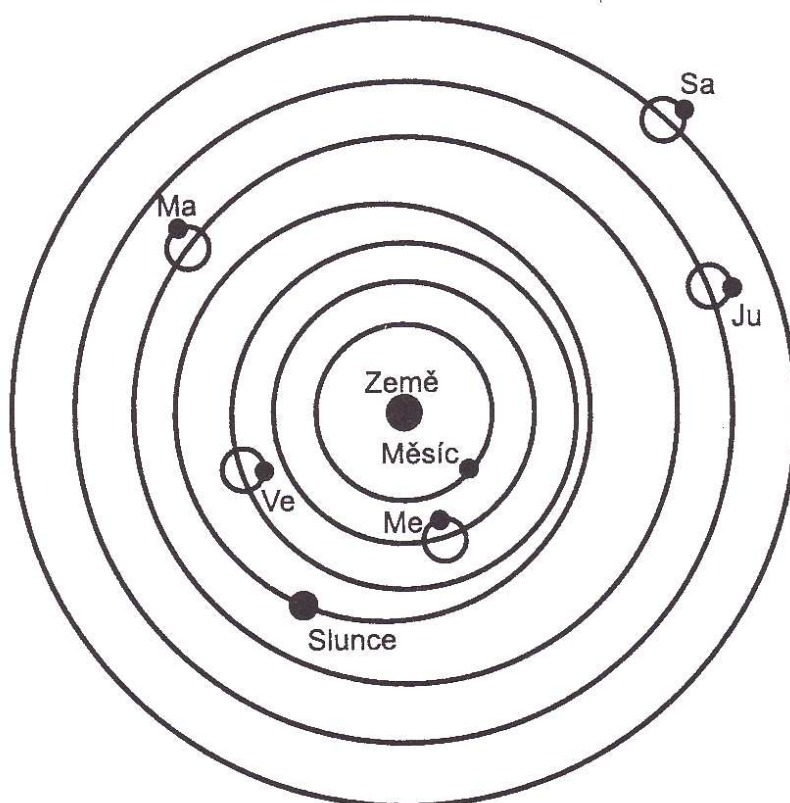
Uvážíme-li výše zmíněné argumenty, je zřejmé, že v té době byl dobře matematicky propracován jen geocentrický model. Hipparchos, který patřil k nejlepším starověkým astronomům (jeho měření byla základem i pro jeho následovníky), navrhl první dokonalý systém ve 2. stol. př. n. l. Umístil Zemi do středu sféry hvězd, planety, Měsíc a Slunce se pak pohybovaly po komplikovaném systému kružnic.

Hipparchův model, který známe pod názvem *Ptolemaiova soustava*, sepsal Ptolemaios až v 2. stol. n. l. ve svém díle *Syntaxis megale* (Velká skladba, kolem roku

140). Nám se dochovalo díky arabskému přepisu z 8. století jako *Al-Magesto* (Největší dílo), na který navázali středověcí učenci.

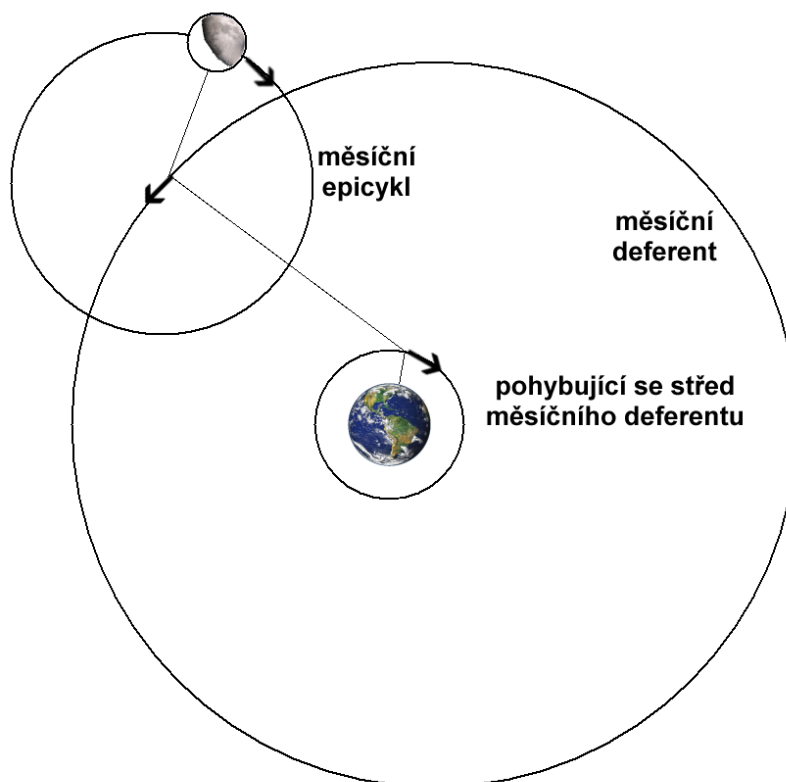
Model vychází ze dvou jednoduchých předpokladů; povolený je pouze pohyb po kružnicích s konstantní úhlovou rychlostí a že je Země uprostřed.

Podíváme-li se na pohyb Slunce mezi hvězdami, již od dob egyptských astronomů se ví, že se Slunce pohybuje po ekliptice s různou úhlovou rychlostí, v zimě rychleji než v létě. U jeho pohybu není pozorován retrográdní pohyb. Řešením bylo, že se střed kruhové dráhy Slunce kolem Země položil excentricky vůči Zemi a při zachování rovnoměrného pohybu Slunce po takto vystředěné kružnici vůči Zemi (deferent s periodou 1 roku) se podařilo tento pohyb předpovídat (viz obr. 7 vlevo).



Obrázek 34: Ptolemaiov celkový pohled na vesmír. Již v tomto přehledném schématu (střed epicyklu Merkuru, Venuše a Slunce mají být v tomto modelu na jedné přímce, zde jde jen o celkové schéma) musel volit kružnici pro sféru Slunce excentricky vůči Zemi (Jáchim 2003).

Pro popis pohybu Měsíce už Hipparchos použil deferent s centrem v Zemi, který se po epicyklu hýbe v opačném směru úhlovou rychlostí jen o málo menší (cca 3° za oběh). Tím docílil, že se místo, kde se Měsíc přibližuje nejvíce Zemi, posouvá s periodou 9 let, což je potřeba k výpočtu zatmění. Ptolemaios zkomplikoval model tím, že střed deferentu se otáčí rovnou po kružnici za 1 synodický měsíc v opačném směru, viz obr. 35. Už Hipparchos sklonil rovinu dráhy Měsíce o 5° k deferentu



Obrázek 35: Schématický diagram finální verze Ptolemaiova modelu pohybu Měsíce. Nejenom epicykl ale i pohyb centra měsíčního deferentu kolem středu Země jsou zapotřebí k vysvětlení pohybu Měsíce po nebeské sféře v Ptolemaiově systému.

Slunce a nechal ji stáčet s periodou 18 a $\frac{2}{3}$ roků směrem na západ (pohyb uzlů), což bylo nezbytné pro předpovědi zatmění.

U vnitřních planet bylo podobně komplikované schéma, jako tomu bylo u Měsíce, pro Venuši však nebylo nutné uvažovat střed deferentu obíhající po kružnici kolem Země (Země byla jen excentricky vůči středu deferentu).

Pro vnější planety si Ptolemaios vystačil pouze s epicyklem a deferentem, v jehož středu byla umístěna Země (viz obr. 7 vpravo). Vnější planety se pohybují většinu času v přímém směru (proti pohybu hvězdného pozadí), což odpovídá přibližně siderické periodě (pohyb po deferentu). Tento pohyb se pak skládá s pohybem po epicyklu se synodickou periodou, který modeluje pohyb retrográdní.

Ptolemaiov systém se skvěle osvědčil, bylo možné podle něj předpovídat na desítky let dopředu, bohužel neodpovídal na základní otázku, jak je vše uspořádáno v prostoru. Vše vycházelo pouze z úhlových vzdáleností od centra, lineární rozměry drah nebyly podstatné. Model selhal při přesnějších měřeních, bylo nutné přidávat další a další korekční členy, čímž se model stával složitějším. To vedlo následně k jeho revizi a oprášení heliocentrické domněnky.

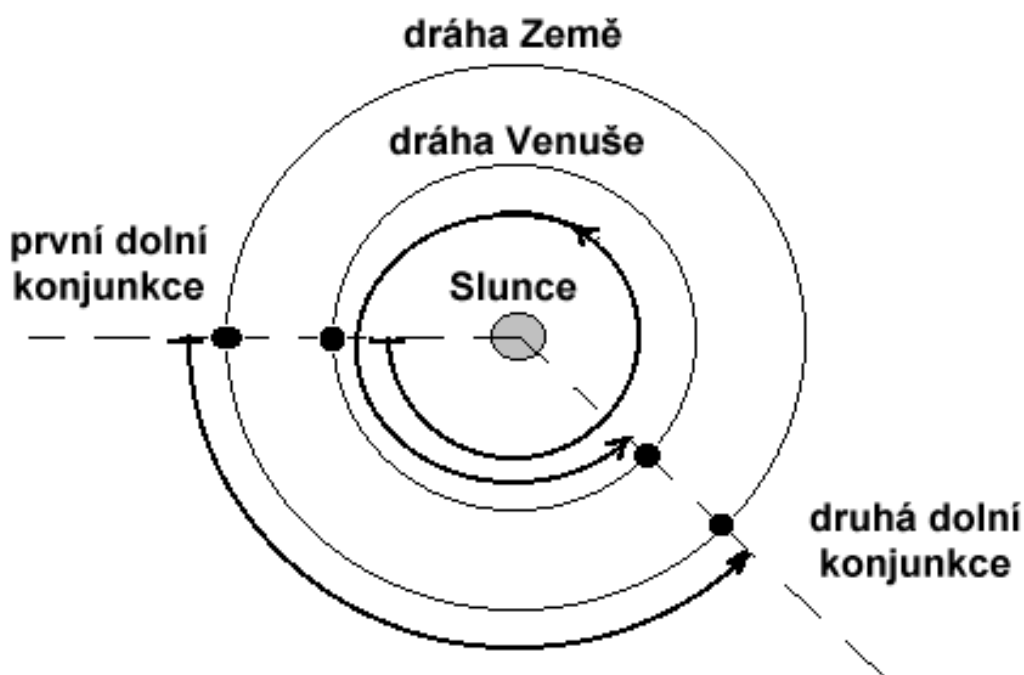
3.5 Koperníkův systém

Mikuláš Koperník (1473–1543) přináší opětovně na uspořádání sluneční soustavy heliocentrický pohled. Země je jen jednou z mnoha planet, které obíhají okolo Slunce, nicméně planety stále obíhají po kružnicích, pro zemskou trajektorii není Slunce v centru oběhu.

Počátek revoluce v pohledu na uspořádání světa pak popsal ve svém díle *De revolutionibus orbium coelestium*, které vyšlo v roce 1543. Uspořádání planet odpovídá dnešnímu modelu, stejně tak i proporce jejich drah. Rychlost planet je tím vyšší, čím je planeta blíže Slunci. Koperníkův model názorně vysvětluje rozdělení planet na vnitřní a vnější i jejich vzájemné konfigurace vůči Slunci (elongace, horní a dolní konjunkce pro vnitřní planety a opozice, konjunkce a kvadratura pro planety vnější).

Doba, po které se kompletně vystřídají všechny aspekty planet, je periodou synodickou, která je dána pozicí planety vůči Zemi a Slunci. Naproti tomu perioda siderická je vztažena vůči hvězdám a odráží pohyb samotné planety vůči nim. V heliocentrickém modelu je tím větší siderická perioda, čím je větší poloměr trajektorie planety.

Lze nalézt také vztah, který svazuje *periodu siderickou s periodou synodickou*, viz obr. 36, na kterém je znázorněno odvození vztahu ze vzájemných pozic Venuše a Země vůči Slunci. Nyní zavedeme synodickou periodu Venuše jako S (doba mezi



Obrázek 36: Od první dolní konjunkce Venuše k druhé uplyne právě synodická perioda, tj. 583,92 dne.

první a druhou dolní konjunkcí, viz obrázek 36), její siderická perioda bude P a siderická perioda Země E . Celkový úhel, který opíše planeta Venuše mezi dolními konjunkcemi lze vyjádřit jako

$$\Omega = S \frac{2\pi}{P}. \quad (81)$$

Tento úhel musí být ten samý jako úhel, který opíše za tuto dobu planeta Země s přičtením 360° .

$$S \frac{2\pi}{P} = S \frac{2\pi}{E} + 2\pi. \quad (82)$$

Odtud lze jednoduchou úpravou získat vztah

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{E} + \frac{1}{S} \Rightarrow \frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{E}, \quad (83)$$

který platí pro vnitřní planety a

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{E} - \frac{1}{S} \Rightarrow \frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{P} \quad (84)$$

pro planety vnější. Jak je patrné z tabulky 3, největší synodickou periodu má planeta Mars, doba mezi dvěma opozicemi je něco přes dva roky (780 dní), s čímž souvisí období, kdy jej lze pozorovat.

planeta	siderická perioda (roky)	synodická perioda (roky)
Merkur	0,241	0,317
Venuše	0,615	1,599
Mars	1,881	2,135
Jupiter	11,86	1,092
Saturn	29,46	1,035
Uran	84,32	1,012
Neptun	164,8	1,006

Tabulka 4: Synodické a siderické periody planet v rocích.

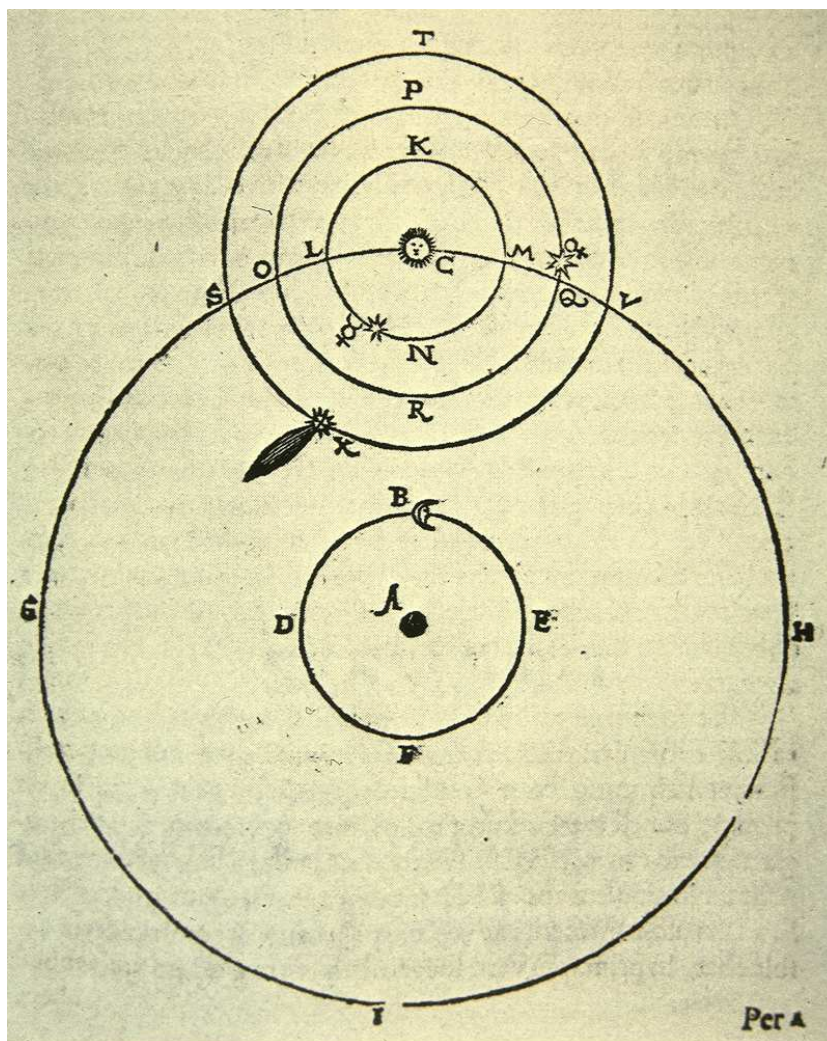
planeta	Koperník (AU)	současná hodnota (AU)
Merkur	0,38	0,387
Venuše	0,72	0,723
Země	1,00	1,000
Mars	1,52	1,52
Jupiter	5,22	5,20
Saturn	9,17	9,54

Tabulka 5: Vzdálenost planet od Slunce dle Koperníka a současné hodnoty (v astronomických jednotkách).

Zatímco Ptolemaios nedokázal v rámci svého modelu zdůvodnit rozsah a rychlost retrográdního pohybu, Koperník to vykládal jako logický důsledek toho, že se

Země přiblížila k planetě, přičemž její úhlová rychlost je větší. Přírozeným důsledkem je rovněž vysvětlení, proč má Mars větší retrográdní kličku než např. planeta Saturn. Bohužel se Koperník stále držel kruhových trajektorií, takže byl nucen pro shodu jeho modelu s pozorováními ponechat epicykly. Došlo tak k převrácení role deferentu a epicyklu.

Hlavním triumfem Koperníkova systému byla možnost vyčíslit relativní rozměry dráhy vzhledem k rozměrům trajektorie Země kolem Slunce (v astronomických jednotkách) a rovněž vysvětlení, proč se čas od času vyskytují různé maximální elongace vnitřních planet. V relativních velikostech drah se Koperníkův systém téměř shoduje se současnými hodnotami.

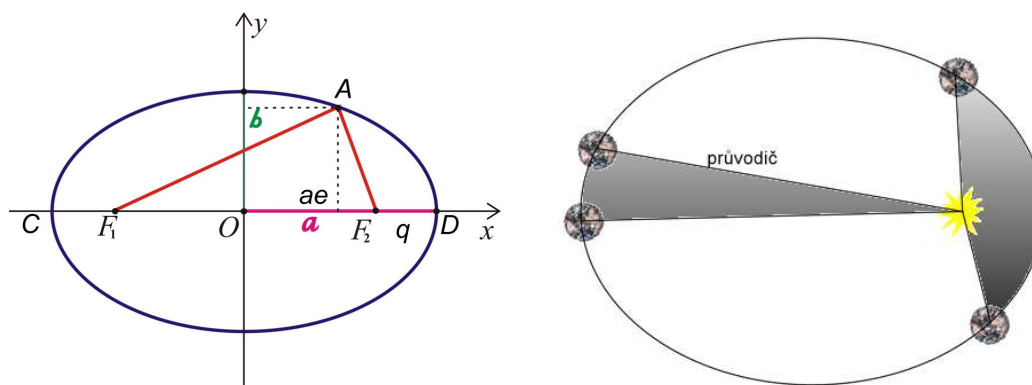


Obrázek 37: Kompromisní model Tycho Brahe sluneční soustavy [E15].

3.6 Keplerovy zákony

Tycho Brahe (1546–1601) cestoval po neshodách s dánským králem Kristiánem IV. od roku 1597 po celé Evropě, až byl Rudolfem II. v roce 1599 na radu Tadeáše

Hájka z Hájku pozván do Prahy, kde působil u dvora jako císařský astrolog. Postavil novou observatoř v Benátkách nad Jizerou, kde mu posledních několik měsíců života dělal asistenta Johannes Kepler (1571–1630).



Obrázek 38: Parametry elipsy (vlevo) a Druhý Keplerův zákon - zákon ploch (vpravo).

Brahe se řadí mezi nejlepší pozorovatele, úhlová přesnost jeho měření dosahovala $1'$. Brahe heliocentrismus nepřijal kvůli nenaměřené paralaxě, i když byl Koperníkův systém jednodušší. Podařilo se mu však změřit denní paralaxu Měsíce, který se od svého východu až do západu zřetelně posune mezi hvězdami. Navrhl proto jiný model, kompromisní, uspořádání sluneční soustavy. V centru zůstala Země, kolem které obíhalo Slunce. Ostatní planety pak obíhaly ale kolem Slunce (viz obr. 37). Aby si ověřil platnost svého systému, pozval do Prahy v roce 1600 Johannes Keplera, kterého považoval za schopného teoretika.

Kepler byl zastáncem Koperníkovy systému a na základě pozorování Braheho i svých zjistil, že prostorovou dráhou Marsu nemůže být kružnice, ale elipsa. Tímto revolučním krokem postuloval svůj první zákon, tj. planety se pohybují po elipsách (v dnešní podobě se hovoří obecně o kuželosečkách).

Pro elipsu (viz obr. 38 vlevo) platí, že $F_2A + AF_1 = \text{const}$, vzdálenost CD je rovna dvojnásobku velikosti velké poloosy a . Výstřednost e pak charakterizuje zploštění elipsy, je-li výstřednost rovna nule, pak jde právě o kružnici. Vzdálenost planety v perihéliu je $q = a(1 - e)$, pro afélium pak $Q = a(1 + e)$.

Druhý Keplerův zákon říká, že plocha opsaná průvodičem planety je za stejný časový okamžik vždy stejná. Tento zákon je jen jiným vyjádřením zákona zachování momentu hybnosti. Plyne z něj, že při rostoucí vzdálenosti planety od Slunce její rychlost klesá, tj. pohyb po elipse je pohybem nerovnoměrným. Pro poměr rychlostí v perihéliu a aféliu platí

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{2a - q}{q} = \frac{2a - a + ae}{a - ae} = \frac{1 + e}{1 - e}, \quad (85)$$

pro poměr úhlových rychlostí ($\omega = v/r$) v perihéliu a aféliu pak

$$\frac{\omega_P}{\omega_A} = \frac{v_P r_A}{v_A r_P} = \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right)^2. \quad (86)$$

Budeme-li chtít porovnat excentrické řešení pohybu Slunce kolem Země v Ptolemaiově systému s Keplerovým druhým zákonem, vyjdeme z předpokladu, že máme

kružnici o poloměru R a její vystředění je dáno $p = R\varepsilon$. Poměr úhlových rychlostí je opět dán

$$\frac{\Omega_P}{\Omega_A} = \frac{R+p}{R-p} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad (87)$$

a uvážíme-li, že se tento poměr musí shodovat s poměrem pro elipsu, porovnáním dostaneme

$$\frac{\Omega_P}{\Omega_A} = \frac{\omega_P}{\omega_A} \implies \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad (88)$$

Je-li excentricita elipsy malá $e \ll 1$, můžeme provést rozvoj

$$\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 = ((1+e)^2)^2 = 1+4e \quad (89)$$

a současně

$$\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) = 1+2\varepsilon \implies \varepsilon = 2e, \quad (90)$$

ze kterého vyplývá, že pro kružnici bylo potřeba umístit střed 2 krát dále od středu Slunce, což je v dobré shodě s Ptolemaiovým systémem. První dva zákony vydal Kepler ve svém díle *Astronomia nova* v roce 1609.

Teprve až deset let po prvních dvou Keplerových zákonech se objevil jeho třetí harmonický zákon popsany v díle *Harmonices Mundi*, které vyšlo v roce 1619. Pohyb planet se snažil vysvětlit z hlediska hudební harmonie a našel jednoduchý vztah mezi periodou a velkou poloosou trajektorie

$$P^2 = a^3, \quad (91)$$

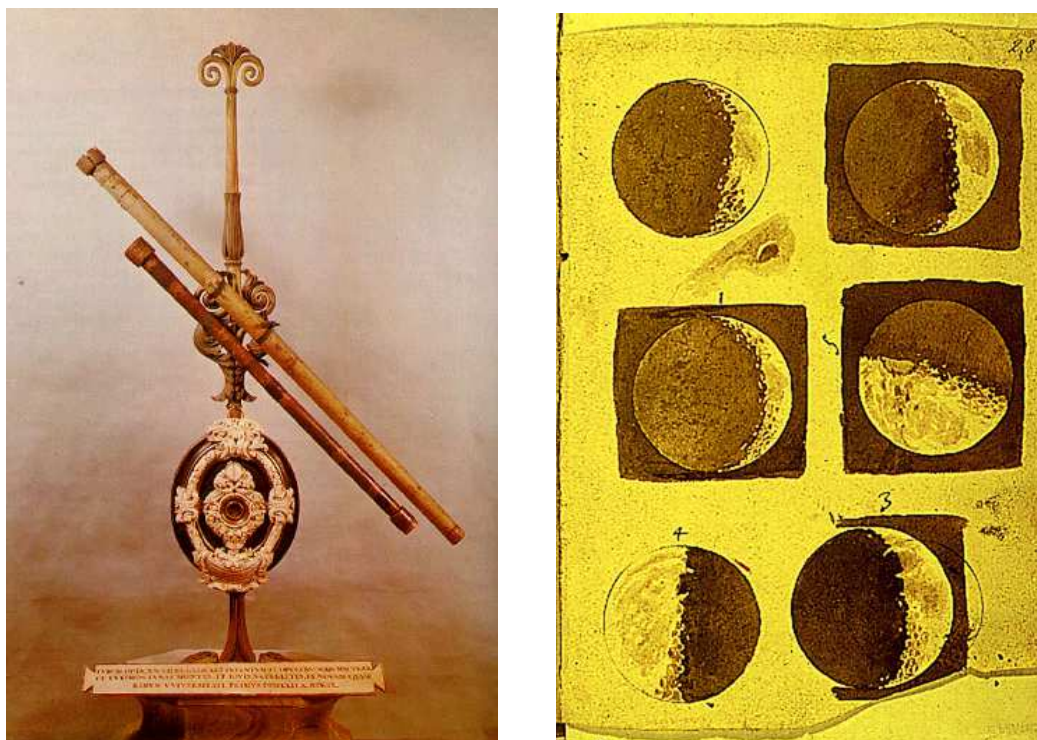
kde P je perioda v letech a a je velká poloosa v astronomických jednotkách. Kepler věřil, že síla pohánějící planety pramení ve Slunci, a i když to není pravda, patřil mezi první, kteří se snažili nalézt model založený na fyzikálním základu. Předchozí pokusy vždy byly na filosofických či teologických principech. Od této chvíle se snaží astronomové také pochopit, co je příčinou pozorovaného pohybu a ne jenom popisovat a předpovídat polohy.

Přestože ani Kepler nezměřil hvězdnou paralaxu, elegance jeho modelu a přesnost, se kterou dával výsledky, jasně zvítězila, i když stále pozitivní důkaz tohoto modelu chyběl.

3.7 Galileův přínos

Galileo Galilei (1564–1642) byl prvním astronomem, který po vynálezu dalekohledu začal s jeho pomocí objevovat taje vesmíru. Jeho pozorování přinesla podporu Koperníkova heliocentrického systému, který byl v té době přijímán jen jako možný teoretický model. Již na počátku roku 1610 objevil v blízkosti planety Jupiter, do té doby nepozorované, čtyři měsíce, které kolem něho obíhaly. Z toho mohl usoudit, že není pouze jeden střed oběhu (kolem Země), ale takových středů může být daleko více. Kepler po tomto objevu i zde potvrdil platnost hamonického třetího zákona.

Galilei svým primitivním dalekohledem (obr. 39 vlevo) pozoroval povrch Měsíce (obr. 39 vpravo), na kterém našel jeho rozmanitý povrch (krátery, moře, pohoří, brázdy), což však bylo proti tehdejší víře, že nebeská tělesa jsou perfektní koule. Další ránu přinesla jeho pozorování Slunce a jeho povrchu, na kterém našel



Obrázek 39: První Galileiho dalekohled (vlevo) a jeho pozorování měsíčních fází (vpravo).

lezl sluneční skvrny, které se navíc po povrchu pohybovaly. Tento pohyb vysvětlil tím, že Slunce kolem své osy rotuje, stejně tak i Země (což usnadnilo přijetí této myšlenky). Při pozorování planety Venuše objevil její fáze, což by v Ptolemaiově systému nebylo možné zcela vysvětlit (v kompromisním systému Tychona Brahe ale ano).

Kromě těles sluneční soustavy Galileo pozoroval i Mléčnou dráhu a přestože používal velice jednoduchý dalekohled, rozložil její světlo na tisíce hvězd.

Všechny jeho objevy však vyvolaly spor s církví, která požadovala, aby své tvrzení o pravdivosti heliocentrismu odvolal. Spor se tedy ze začátku odehrával mezi starou (aristotelovskou) koncepcí a novou, která tvrdila, že pohyby nebeských těles jsou řízeny stejnými fyzikálními zákony, jaké platí i na Zemi, později se změnil hlavně na otázku zemské rotace. Nakonec byl Galilei nucen v roce 1633 odvolat, zatratit a zošklivit si svou práci a slíbit, že odsoudí i jiné, kteří budou zastávat jeho předchozí pohled. Za to byl „pouze“ odsouzen k doživotnímu domácímu vězení.

Kromě astronomie se Galileo zabýval i fyzikou, studoval mechaniku (pohyb a pád těles), na základě svého studia pak formuloval *princip setrvačnosti*: „*Těleso setravává v pohybu rovnoměrně přímočarém, pokud není vnějšími silami přinuceno tento stav změnit.*“ Touto silou bylo většinou tření, což popíralo uznávanou Aristo-

telovu hypotézu, že objekty přirozeně zpomalují a zastaví se, pokud na ně nepůsobí síla. Vše bylo základem pro dynamiku, kterou rozvinul Isaac Newton (1643–1727), který pohyb popisoval jako výsledek setrvačnosti a působících sil.

3.8 Newtonovy pohybové zákony

Pro rozvoj dynamiky bylo zapotřebí zavést pojmy *síla* a *hmotnost*, kromě nich zavedl Newton ještě pojmy *setrvačnost* a *interakce*. První Newtonův zákon je zákonem setrvačnosti, který převzal z Galileiho principu setrvačnosti, normálním stavem těles není jejich klidový stav. Musí být současně splněno $\vec{v} = \vec{0}$ ale současně také $\sum \vec{F} = \vec{0}$, což v pozemském podmínkách nenastává (stále je přítomna gravitační síla, tření), ale obecně ani nikde jinde ve vesmíru, protože jsou vždy nějaké síly přítomny.

Druhý Newtonův zákon (předpokládáme-li pro hybnost $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$, zákon síly, dává do souvislosti výslednici působících sil na těleso a jeho zrychlení, které je touto výslednicí sil způsobeno.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} \quad (92)$$

Hmotnosti m se také říká *hmotnost setrvačná*, která je mírou odporu proti změně stavu tělesa, na které působí výslednice sil. Je-li působící výslednice sil kolmá na vektor rychlosti \vec{v} , pak na základě vektorového počtu platí, že se absolutní velikost vektoru rychlosti nemění, mění se pouze její směr. Tím lze velice jednoduše vysvětlit křivočarý pohyb po kružnici.

Třetí Newtonův zákon, zákon akce a reakce, říká, že působí-li jedno těleso na druhé silou \vec{F} , pak působí druhé těleso na to první stejnou silou opačného směru $-\vec{F}$. Aplikujeme-li princip akce a reakce na 2. Newtonův zákon, pak jedno těleso zrychluje těleso druhé. Velice často jsou však poměry hmotností natolik rozdílné, že hmotnost jednoho tělesa vůči druhému je zanedbatelná, proto i zrychlení hmotnějšího tělesa je zanedbatelné oproti zrychlení méně hmotného tělesa.

Z Newtonových zákonů můžeme vysvětlit např. 2. Keplerův zákon. Za předpokladu, že působící síla (gravitační síla), je silou centrální, směřující vždy do středu Slunce, můžeme definovat dostředivou sílu

$$\vec{F} = f \frac{\vec{r}}{r}, \quad (93)$$

kde $r = |\vec{r}|$ a podíl $\frac{\vec{r}}{r}$ je jednotkový vektor. Moment síly je definován jako $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ a pro případ centrální síly $f = f(r)$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f \frac{\vec{r}}{r} = \vec{0}. \quad (94)$$

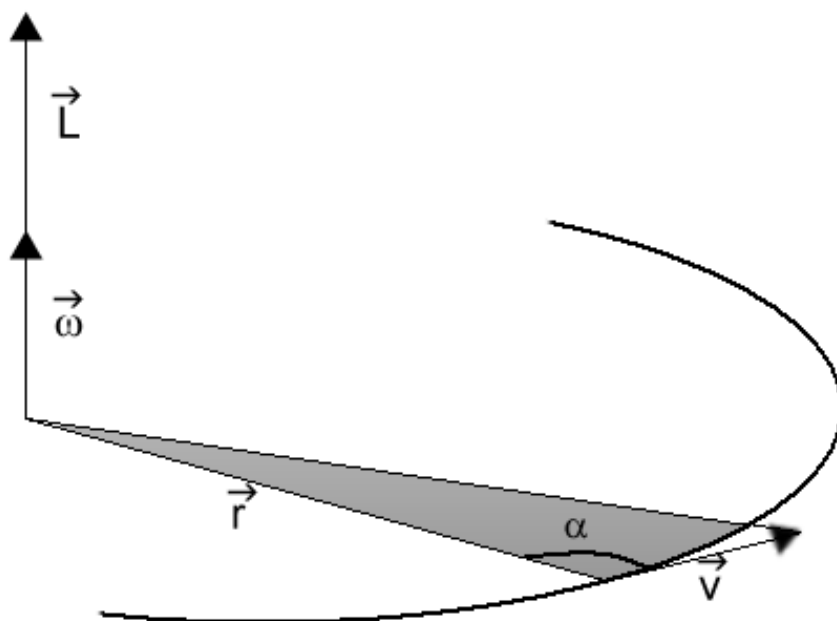
Moment hybnosti je definován jako

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}). \quad (95)$$

Budeme-li uvažovat časovou derivaci momentu hybnosti pro případ s centrální silou, dostáváme

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}} = \vec{0}. \quad (96)$$

Časová derivace momentu hybnosti je v poli centrální síly nulová, z toho plyne, že moment hybnosti je konstantní vektor, který je kolmý k rovině pohybu (viz obr. 40). Plocha trojúhelníka je polovinou velikosti vektorového součinu $|\vec{r} \times \vec{v}| = |\vec{r}||\vec{v}| \sin \alpha$. Protože platí, že vektorový součin polohového vektoru a vektoru hybnosti



Obrázek 40: Velikost plochy opsaná průvodičem za jednotku času je plochou trojúhelníka.

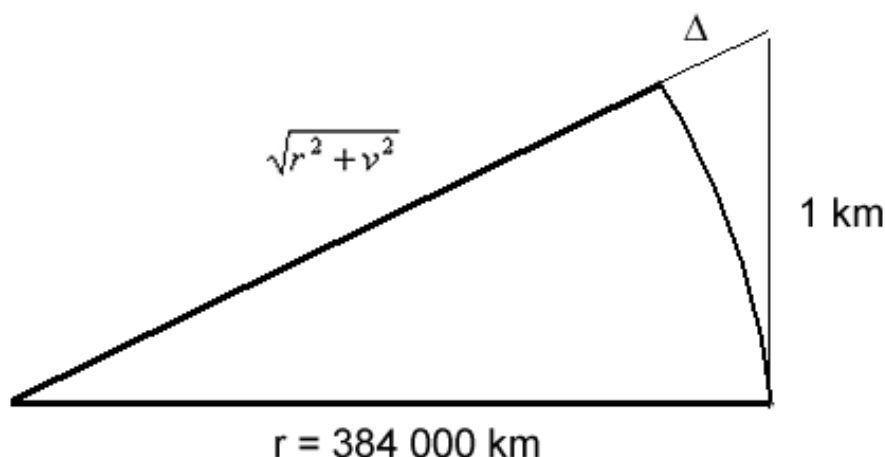
nosti je konstantní $\vec{r} \times \vec{p} = \text{const}$, pohyb se děje v rovině a vektory úhlové rychlosti a momentu hybnosti jsou rovnoběžné $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$. Můžeme učinit tedy obecný závěr: jde-li o pohyb tělesa v poli centrální síly, pohyb se děje vždy v rovině.

Působí-li na pohybující se těleso rušivé síly, např. gravitační síla Měsíce na pohyb Země, časová derivace momentu hybnosti již nebude rovna nule $\frac{d\vec{L}}{dt} \neq \vec{0}$. Tyto rušivé síly vytvářejí moment síly \vec{M} , který nutí osu Země vykonávat precesní pohyb. Analogicky totéž platí i pro nutaci.

Stáčení roviny dráhy Měsíce a ostatních planet (uzlových přímek) je jen důsledek toho, že podmínka $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$, není přesně splněna, protože rušivé síly nejsou silami centrálními.

3.9 Newtonův gravitační zákon

Základní myšlenkou, na které je založen gravitační zákon, je ta, že tatáž síla, která nutí na Zemi k pádu tělesa, je příčinou pohybu těles ve vesmíru (sluneční soustavě). Úvaha začala u Měsíce. Ze znalosti jeho vzdálenosti a oběžné periody vychází jeho oběžná rychlost, uvažujeme-li kruhovou trajektorii, rovna přibližně 1 km/s. Aby Měsíc neodletěl od Země, musí být za 1 sekundu urychlen tak, aby se přiblížil (spadl) na Zemi o 1,3 mm, v tomto případě zůstane jeho vzdálenost od Země konstantní (viz obr. 41).



Obrázek 41: Aby Měsíc měl stále stejnou vzdálenost od Země, musí se k Zemi za 1 sekundu přiblížit (spadnout) o 1,3 mm.

Vyjdeme z obr. 41. Pro Δ platí

$$\Delta = \sqrt{r^2 + v^2} - r = r \left(\sqrt{1 + \frac{v^2}{r^2}} - 1 \right) \doteq r \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{r^2} \right) = \frac{v^2}{2r} = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ km}, \quad (97)$$

což odpovídá zrychlení $2,6 \text{ mm/s}^2$. Protože Newton znal zrychlení Měsíce, mohl rovněž vypočítat jeho trajektorii, čímž mohl popsat i sílu, která tento pohyb způsobuje - zákon univerzální gravitace

$$\vec{F} = \underbrace{-\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}}_{\text{skalár}} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (98)$$

kde m_1 a m_2 reprezentují setrvačné hmotnosti, které jsou rovny hmotnostem tíhovým a $\kappa = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ je gravitační konstanta. Je možno odvodit gravitační zákon z 3. Keplerova zákona aplikovaného na pohyb po kružnici. K udržení na kruhové dráze, jak je znázorněna na obr. 41, je zapotřebí dostředivé síly

$\vec{F} = m\vec{a}$. Dostředivá síla musí být v rovnováze se silou odstředivou, jinak by Měsíc nemohl obíhat po kružnici tj.

$$ma = \underbrace{m \frac{v^2}{r}}_{\text{síla odstředivá}} \quad \text{a } v = \frac{2\pi r}{P}, \quad (99)$$

kde r je poloměr dráhy a P perioda. Po dosazení vychází

$$ma = m \frac{4\pi^2 r}{P^2}. \quad (100)$$

Použijeme-li nyní 3. Keplerův zákon a dosadíme za periody

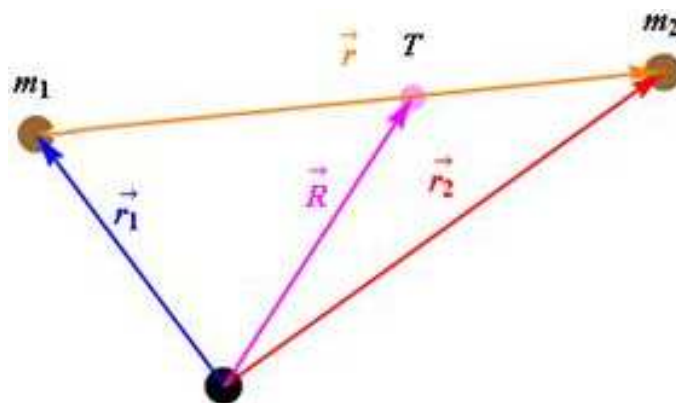
$$\frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \implies \frac{a_1}{a_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (101)$$

zjistíme, že zrychlení je nepřímo úměrné kvadrátu vzdálenosti. Třetí Keplerův zákon pak můžeme zapsat také jako $P^2 = kr^3$. Odtud pak

$$F = \frac{4\pi^2 m}{k r^2} \implies \vec{F} = -\kappa \frac{Mm}{r^3} \vec{r}. \quad (102)$$

3.10 Problém dvou těles, upřesněná podoba Keplerových zákonů

Ke gravitační interakci je podle gravitačního zákona zapotřebí alespoň dvou těles o hmotnostech m_1 a m_2 , jejichž polohy jsou popsány polohovými vektory \vec{r}_1 a \vec{r}_2 . Problém dvou těles je analyticky řešitelný, nejvýhodnější je přejít do těžišového systému.



Obrázek 42: Znázornění těžiště v systému dvou těles o vzdálenosti $|\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, hmotnostech m_1 a m_2 a jejich polohových vektorech \vec{r}_1 a \vec{r}_2 . Polohový vektor těžiště značíme \vec{R} .

Těžiště soustavy, hmotný střed, je definováno polohovým vektorem \vec{R} , který je roven $\sum m_i \vec{r}_i / \sum m_i$. Podle 3. Newtonova zákona je zrychlení těžiště rovno nule,

proto je vhodné do něj umístit počátek vztažné soustavy. Pro naše dvě tělesa pak platí

$$\vec{0} = \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \implies \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2. \quad (103)$$

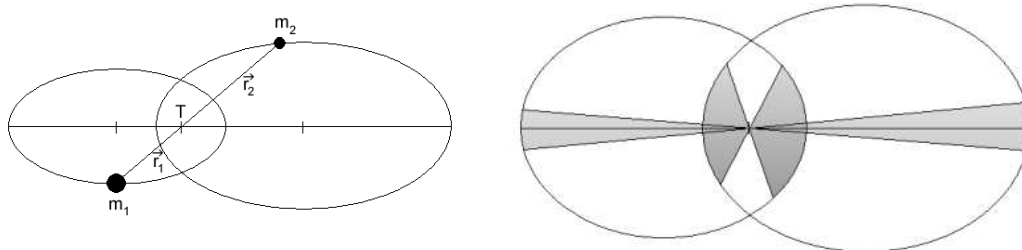
Těžiště leží na spojnici těles a je blíže tělesu hmotnějšímu. Zapišeme-li pohybové rovnice pro obě tělesa, získáme dvě rovnice

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (104)$$

a

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}. \quad (105)$$

1. Keplerův zákon: „*Tělesa se pohybují v rovině po kuželosečkách, v jejichž společném ohnisku je těžiště sluneční soustavy.*“. Pro poměry velkých poloos a hmotností platí $a_1/a_2 = m_2/m_1$ a pro excentricity elips pak $e_1 = e_2 = e$. Obě tělesa tak společně procházejí pericentrem a apocentrem. Křivkou nemusí být jen elipsa, ale i další kuželosečky, parabola a hyperbola. Stejně tak platí pro pohyb dvou těles i 2. Keplerův zákon.



Obrázek 43: Pohyb dvou těles kolem společného těžiště, jejich vzájemný polohový vektor vždy prochází těžištěm (vlevo) a zákon ploch (vpravo).

Pro obecné kuželosečky 3. Keplerův zákon neplatí, jeho platnost se omezuje pouze pro elipsy, kde

$$a^3 = P^2(m_1 + m_2). \quad (106)$$

Použijeme-li restrikcí, tj. vztáhneme vzájemný pohyb k jednomu ze dvou těles (prvnímu), definujeme vzájemný polohový vektor \vec{r} a v těžišťové soustavě pak

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \implies \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (107)$$

Po derivaci a dosazením do pohybové rovnice druhého tělesa dostáváme

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \\ m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} &= -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \\ \ddot{\vec{r}} &= -\kappa \frac{m_1 + m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned} \quad (108)$$

Bude-li hmotnost prvního tělesa, vůči kterému jsme vztáhli pohyb, daleko větší než hmotnost druhého, tj. $m_1 \gg m_2$, pak platí $\ddot{\vec{r}} = -\kappa \frac{m_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$.

Nyní se můžeme podívat na aplikaci zákona zachování energie pro případ této soustavy. Celková energie systému se nemění, tj. energie kinetická a potenciální je rovna

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \kappa \frac{m_1m_2}{r}, \quad (109)$$

kde první dva členy jsou příspěvky kinetických energií obou těles a třetí člen pak reprezentuje potenciální energii. Tato energie odpovídá energii, která drží systém pohromadě, jinými slovy řečeno, je potřeba dodat do systému právě tolik energie, aby se tento systém rozpadl. Provedeme-li převod na vzájemné souřadnice, tj. přejdeme-li opět na vztažení pohybu jen vůči prvnímu tělesu, dostáváme

$$m_1\vec{v}_1 = -m_2\vec{v}_2 \implies \vec{v}_1 = \frac{m_2\vec{v}}{m_1 + m_2} \text{ a } \vec{v}_2 = -\frac{m_1\vec{v}}{m_1 + m_2}. \quad (110)$$

Po dosazení do rovnice 109, dostaneme pro energii

$$E = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}v^2 - \kappa \frac{m_1m_2}{r}. \quad (111)$$

Zapišeme-li poměr součinu hmotností a jejich součtu jako $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ (*redukovaná hmotnost*), přejde rovnice 111 do tvaru

$$E = \frac{\mu v^2}{2} - \kappa \frac{m_1m_2}{r}. \quad (112)$$

Budeme-li mít případ, že $m_1 \gg m_2$ pak redukovaná hmotnost bude přibližně rovna hmotnosti druhého tělesa, tj. $\mu \doteq m_2$, čehož může být příkladem třeba Země, jejíž hmotnost $m_2 = m$ je 333 000 krát menší než hmotnost $m_1 = M$ Slunce. Odtud pak

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \kappa \frac{mM}{r}, \quad (113)$$

kde druhý člen odpovídá gravitačnímu potenciálu $\Phi = -\kappa \frac{M}{r}$. Z toho vyplývá, že pokud se Země přibližuje ke Slunci, klesá její vzdálenost r , ale tím pádem musí růst i její rychlost v , aby platil zákon zachování energie.

Z energetického hlediska pak můžeme soustavu rozdělit podle celkové energie na

- 1) $E < 0$, soustava je vázaná, existuje maximální vzdálenost r , trajektorií je elipsa (případně kružnice)
- 2) $E = 0$, soustava má malou stabilitu, v nekonečnu má těleso nulovou rychlost, trajektorií je parabola
- 3) $E > 0$ soustava je nevázaná, trajektorií tělesa je hyperbola, v nekonečnu má těleso nenulovou rychlost.

Z teoretické mechaniky pro gravitační interakci dále platí (i obecně pro libovolný počet bodů) *Viriálový teorém*, který svazuje střední hodnoty kinetické a potenciální energie vztahem

$$2 \langle E_K \rangle + \langle E_P \rangle = 0. \quad (114)$$

Porovnáme nyní kruhovou a parabolickou dráhu. Pro parabolu platí, že celková energie je $E = 0$. Odtud plyne, že hodnota kinetické energie je rovna záporné hodnotě energie potenciální $E_K = -E_P$. Dosazením za energie získáme parabolickou rychlost, která je rovna

$$v_p = \left(2\frac{\kappa M}{r}\right)^{1/2}. \quad (115)$$

Pro kruhovou dráhu platí, že kinetická energie je konstantní $E_K = \text{konst}$, stejně tak i energie potenciální $E_P = \text{konst}$. Střední hodnoty kinetické i potenciální energie jsou pak rovny přímo jejím hodnotám, tj. $\langle E_K \rangle = E_K$ a $\langle E_P \rangle = E_P$. Pro kruhovou rychlost tak získáme

$$v_k = \left(\frac{\kappa M}{r}\right)^{1/2} \implies v_p = \sqrt{2}v_k. \quad (116)$$

Jednou z možných aplikací je využití při brždění družic v okolí Země.

3.11 Geometrie trajektorie, rychlost a poloha na trajektorii

Při gravitačním působení (pole centrální síly) se pohyb dvou těles, která na sebe působí jen gravitačně, uskutečňuje v rovině procházející jejich těžištěm. Je-li hmotnost jednoho tělesa vůči druhému zanedbatelná, pak je hmotnější těleso v těžišti soustavy a kolem něj obíhá těleso druhé, pro které je hmotnější těleso v ohnisku jeho eliptické dráhy.

Elipsa patří mezi kuželosečky. V rovině x-y je jejím vyjádřením rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (117)$$

kde (obr. 44) $a = CO = OD$ je velká poloosa a $b = OB$ je poloosa malá. Excentricita je definována jako $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$. Ohniska elipsy mají souřadnice $F_1 = (ae, 0)$ a $F_2 = (-ae, 0)$. Vzdálenost pericentra je $q = F_1D = a(1 - e)$, vzdálenost apocentra $Q = CF_1 = a(1 + e)$. Úhlu ϑ_1 se říká pravá anomálie. Z trojúhelníka F_1F_2A máme

$$r_1 \sin \nu_1 = r_2 \sin \nu_2 \quad \text{a} \quad r_2 \cos \nu_2 - r_1 \cos \nu_1 = 2ae. \quad (118)$$

Dále platí pro bod $A(x, y)$ na elipse

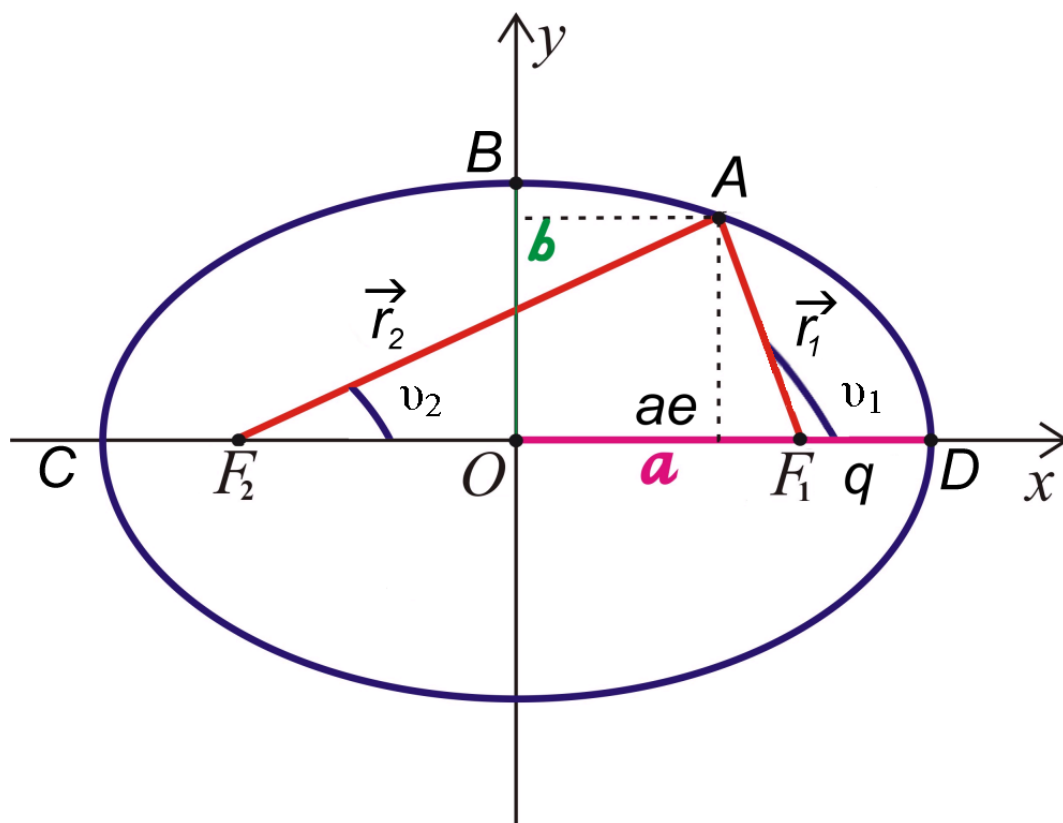
$$r_1 = \sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = a - ex, \quad r_2 = \sqrt{(x + ae)^2 + y^2} = a + ex \quad (119)$$

a tedy

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (120)$$

Ze vztahů (117) můžeme vyjádřit např. r_2 a ϑ_2 pomocí r_1 a ϑ_1 . Dosazením za r_2 do (119) a malou úpravou dostáváme parametrické vyjádření rovnice elipsy (index 1 vynechán)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}. \quad (121)$$



Obrázek 44: Eliptická trajektorie tělesa s vyznačením pravé anomálie v_1 .

Ve standardních polárních souřadnicích (ϱ, φ) je tvar rovnice elipsy do dosazení $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$

$$\varrho = \frac{b}{(1 - e^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}. \quad (122)$$

Plocha elipsy je dána vztahem $S = \pi ab$.

Pro výpočet rychlosti tělesa na dráze, vyjdeme z obrázku 45, na kterém je znázorněn rozklad vektoru rychlosti \vec{v} tělesa do tečného \vec{v}_t a radiálního směru \vec{v}_r .

Ze zákona ploch dostaneme

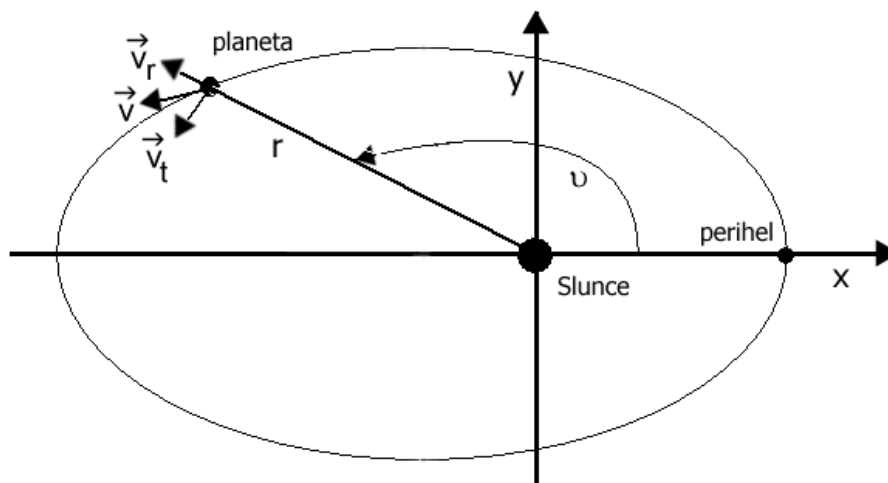
$$\frac{rv_t}{2} = \frac{dS}{dt} = \text{const} = \frac{S}{P}, \quad (123)$$

kde dS je část plochy elipsy opsaná průvodičem za jednotku času, $S = \pi ab$ je plocha elipsy a P je perioda. Velikost vektoru tečné rychlosti je dána vztahem

$$v_t = r \frac{dv}{dt} \implies r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{2S}{P} = \frac{2\pi ab}{P}. \quad (124)$$

Po dosazení za $b = a\sqrt{1 - e^2}$ získáme pro časovou derivaci pravé anomálie

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2\pi a^2}{Pr^2} (1 - e^2)^{1/2}. \quad (125)$$



Obrázek 45: Rozklad vektoru rychlosti na radiální a tečnou složku pro planetu na eliptické dráze kolem Slunce.

Pro velikost radiální rychlosti platí

$$v_r = \frac{dr}{dt}. \quad (126)$$

Parametrická rovnice elipsy je

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}, \quad (127)$$

takže po derivaci získáme

$$v_r = \frac{2\pi a}{P} \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \sin v. \quad (128)$$

Pro velikost tečné rychlosti pak

$$v_t = \frac{2\pi a}{P} \frac{(1 + e \cos v)}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (129)$$

Ze vztahu pro tečnou rychlost můžeme okamžitě vypočítat celkovou rychlost v perihéliu a aféliu, protože známe i velikosti pravé anomálie ($v = 0^\circ$ pro perihélium a $v = 180^\circ$ pro afélium).

$$v_{\text{per}} = v_t(0^\circ) = \frac{2\pi a}{P} \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \quad (130)$$

$$v_{\text{afe}} = v_t(180^\circ) = \frac{2\pi a}{P} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \quad (131)$$

Obecně pro kvadrát velikosti rychlosti platí

$$v^2 = v_t^2 + v_r^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{P^2} \frac{1 + 2e \cos v + e^2}{1 - e^2}. \quad (132)$$

Dosazením z parametrické rovnice elipsy

$$e \cos v = \frac{a(1 - e^2) - r}{r} \quad (133)$$

a využitím vztahu pro kvadrát periody

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{\kappa(M + m)} a^3 \quad (134)$$

získáme rovnici pro kvadrát rychlosti tělesa, která bude vyjádřena jako funkce vzdálenosti r a ne pravé anomálie

$$v^2 = \kappa(M + m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (135)$$

Rovněž si můžeme přepsat rovnici zákona zachování energie do polárních souřadnic (počátek v ohnisku elipsy)

$$E = \frac{1}{2} \mu (v_t^2 + v_r^2) - \frac{\kappa M m}{r}, \quad (136)$$

kde μ je redukovaná hmotnost $\mu = \frac{Mm}{M+m}$. Dosadíme-li za tečnou a radiální složku vektoru rychlosti $v_r = \dot{r}$ a $v_t = r \frac{dv}{dt}$, přejde rovnice na tvar

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{v}^2) + \phi(r). \quad (137)$$

Chceme-li zjistit přesnou pozici tělesa na dráze, musíme si nejdříve najít jistou veličinu, která plyne rovnoměrně. Touto veličinou je tzv. *střední anomálie* M , která je definovaná jako

$$M = \frac{2\pi}{P} (t' - T), \quad (138)$$

kde T je časový okamžik průchodu perihéliem a $t = t' - T$. Střední anomálie je vlastně střední denní úhlový pohyb. Podle 2. Keplerova zákona platí

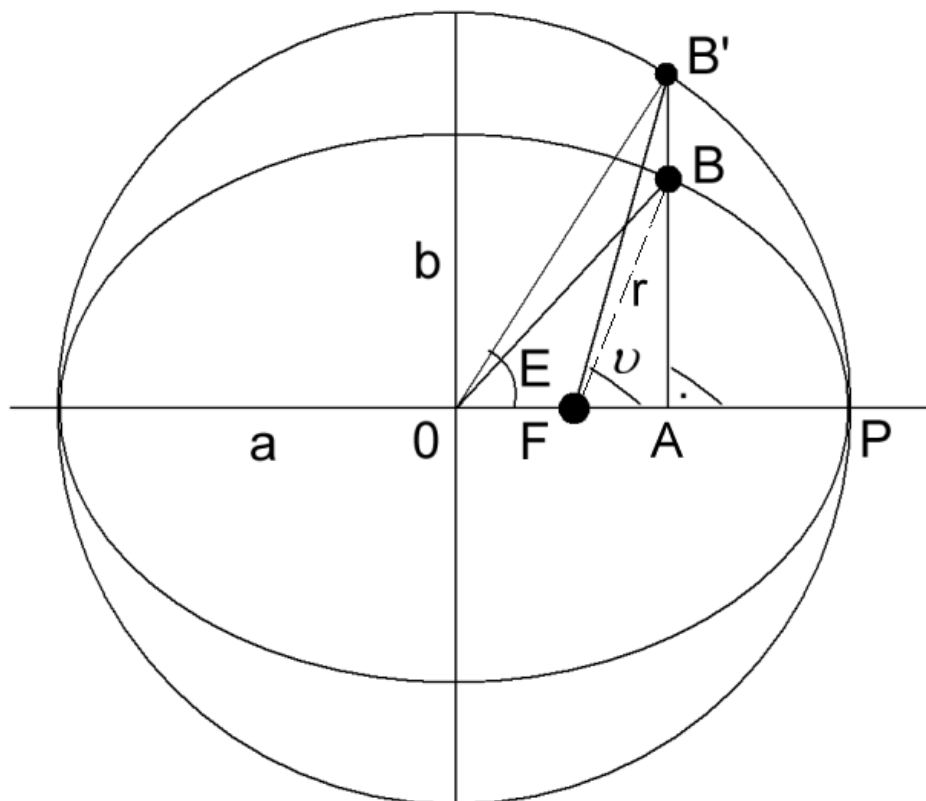
$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{t}{P} \implies \Delta S = \frac{\pi ab}{P} t, \quad (139)$$

kde ΔS je plocha opsaná průvodičem za čas t . Je potřeba najít vztah mezi ΔS a pravou anomálií v . K tomu využijeme obr. 46, na kterém je znázorněna trajektorie tělesa, které se pohybuje po elipse, a právě se nachází v bodě B . Přes tento bod je vedena kolmice na přímkou apsid (spojnice perihélia a afélia), která se protíná v místě B' s kružnicí, která má stejný střed jako elipsa a její poloměr je roven velikosti velké poloosy elipsy $r = a$. Úhel, který svírají úsečky PO a OB' , se nazývá *excentrická anomálie* E a pro opsané plochy platí, že

$$\Delta S = \frac{b}{a} \Delta S_E, \quad (140)$$

kde ΔS_E je kruhová výseč bez trojúhelníku $FB'O$. Plocha kruhové výseče je úměrná $\frac{1}{2} E a^2$, je-li excentrická anomálie E v radiánech, pak je plocha $FB'O \sim \frac{1}{2} (a \sin E) a e$ z čehož dále plyne, že

$$\Delta S_E = \frac{1}{2} a^2 (E - e \sin E) \quad (141)$$



Obrázek 46: Znázornění excentrické E a pravé anomálie v , které jsou reprezentovány úhly POB' a PFB .

a také

$$\Delta S = \frac{1}{2} ab(E - e \sin E) = \frac{\pi ab}{P} t. \quad (142)$$

Odtud pak plyne

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{P} t = M \implies E - e \sin E = M, \quad (143)$$

což je tzv. *Keplerova rovnice*, která nám dává do souvislosti neznámou excentrickou anomálii s anomálií střední, kterou pro konkrétní čas umíme vypočítat. Tato rovnice lze nejrychleji řešit metodou postupných iterací. První iterací bude, že $E_0 = M$ a řešením získáme novou excentrickou anomálii E_1 , kterou opětovně dosadíme do Keplerovy rovnice a řešíme. Po několika iteracích se hodnota E již nebude měnit, řešení rychle konverguje.

$$\begin{aligned} E_0 &= M \\ E_1 &= M + e \sin E_0 \dots \\ E_n &= M + e \sin E_{n-1} \end{aligned} \quad (144)$$

Známe-li $E(t)$, můžeme pak již lehce vypočítat vzdálenost r a pravou anomálii v . Z obrázku 46 můžeme určit vzdálenost bodů FA jako

$$FA = OA - OF = a(\cos E - e) \quad (145)$$

a bodů AB jako

$$AB = \frac{b}{a} AB' = \frac{b}{a} a \sin E = b \sin E. \quad (146)$$

Uvážíme-li, že platí ještě

$$b = a\sqrt{1-e^2} \text{ a } r = \sqrt{(FA)^2 + (AB)^2} = a\sqrt{(\cos E - e)^2 + (1-e^2)\sin^2 E} \quad (147)$$

pak nám vychází, že

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (148)$$

Pro pravou anomálii pak platí, že její tangenta je rovna

$$\tan v = \frac{AB}{FA} = \frac{a\sqrt{1-e^2}\sin E}{a(\cos E - e)} \implies \tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (149)$$

Při zjišťování polohy tělesa v dráze postupujeme následovně. Nejdříve musíme zjistit, jaká doba uplynula od průchodu tělesa perihéliem dráhy a musíme znát periodu oběhu tělesa P . Odtud pak vypočítáme střední anomálii M (rovnice 138), kterou použijeme jako první aproximaci do Keplerovy rovnice (rovnice 143) a ze známé excentricity trajektorie pak můžeme touto rovnicí vypočítat excentrickou anomálii E pro požadovaný čas. Ze známé excentrické anomálie, excentricity a velké poloosy trajektorie, již můžeme dále vypočítat polohový vektor r dle rovnice 148 a pravou anomálii pak ze vztahu 149. Tím známe všechny parametry, které jsou potřebné pro stanovení polohy tělesa v dráze, tj. pravou anomálii v a vzdálenost od ohniska r , čímž je poloha v dráze (v rovině) plně určena.

Jako příklad si můžeme uvést dráhu Země, která má parametry $a = 1 \text{ AU}$ ($1,49598 \cdot 10^{11} \text{ m}$) a $e = 0,0167$. Pro vzdálenost Země-Slunce v perihéliu platí

$$r = a(1 - e) = 0,9833 \text{ AU} \quad (150)$$

a v aféliu pak

$$r = a(1 + e) = 1,0167 \text{ AU}. \quad (151)$$

Nyní se můžeme zeptat, kolik stupňů urazí Země na své dráze po čtvrt roce od průchodu perihéliem. Střední anomálie M je dle (138) rovna $\pi/2$. Pro první iteraci do Keplerovy rovnice proto volíme $E_0 \doteq M = \pi/2$.

$$E \doteq M + e \sin E_0 = \frac{\pi}{2} + 0,0167 = 1,5708 + 0,0167 = 1,5875, \quad (152)$$

odtud pak vypočítáme vzdálenost od Slunce

$$r = a(1 - e \cos E) = 1(1 - 0,0167 \cos 1,5875) = 1,0003 \text{ AU} \quad (153)$$

a pravou anomálii

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \left(\frac{E}{2} \right) = 1,0168 \tan \left(\frac{1,5875}{2} \right) = 1,604 = 91,9^\circ. \quad (154)$$

Střední úhlový pohyb Slunce po ekliptice je přibližně 1 stupeň za den, takže rozdíl 1,9 stupňům odpovídá necelým dvěma dnům. Stejně tak se můžeme zeptat,

za kolik dní od průchodu perihéliem se změní pravá anomálie o 90 stupňů, tj. $v = 90^\circ$, $\tan \frac{v}{2} = 1$.

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \tan \frac{v}{2} \implies E = 1,5541 \quad (155)$$

Po dosazení do Keplerovy rovnice dostaneme, že $M = 1,5374$ rad a čas $t = 0,2447P = 89,37$ d. Další čtvrtina pak uběhne za 93,25 dne. Tohoto rozdílu 4 dní si všiml už i Hipparchos.

V rámci zápisu eliptické dráhy v polárních souřadnicích, se můžeme ještě podívat na extrémní změny polohového vektoru a pravé anomálie. Derivace \dot{r} a \dot{v} jsou rovny

$$\begin{aligned} r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \implies \\ \dot{r} &= \frac{2\pi a}{P} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin v \\ \dot{v} &= \frac{v_t}{r} = \frac{2\pi}{P} \frac{(1+e\cos v)^2}{(1-e^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (156)$$

Extrémních hodnot nabývá derivace průvodiče pro hodnoty $v = \pm 90^\circ$

$$\dot{r} = \frac{2\pi a}{P} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \quad (157)$$

a je-li excentricita malá, pak

$$\dot{r} = \pm \underbrace{\frac{2\pi a}{P}}_{29,7 \text{ km/s}} e \quad (158)$$

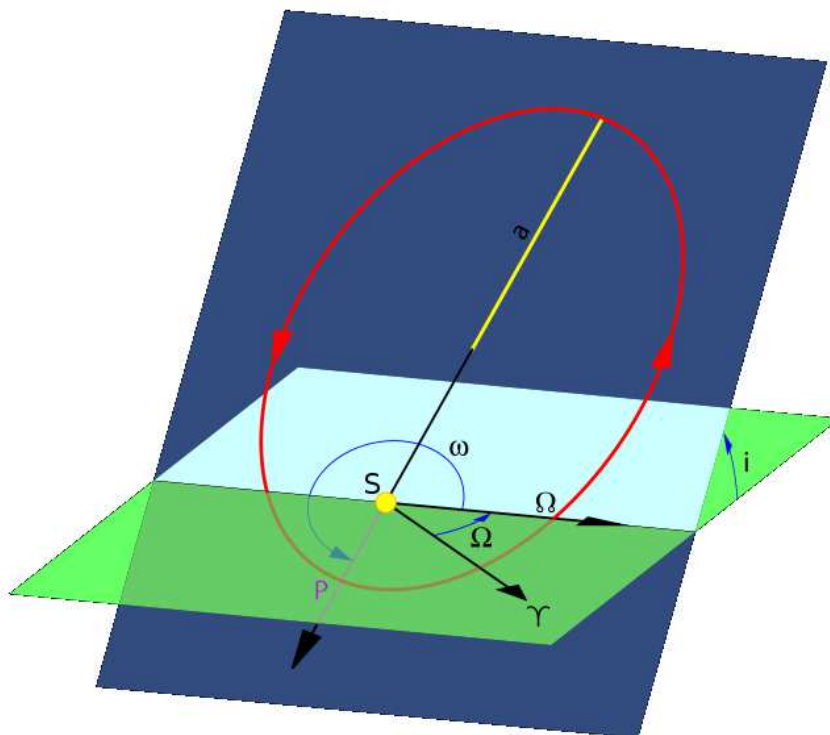
a změna radiální rychlosti Země vůči Slunci je v rozmezí $\pm 0,5$ km/s. Extrémní změny pravé anomálie jsou pak pro hodnoty $v = 0^\circ$ a $v = 180^\circ$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{\max} &= \frac{2\pi}{P} \frac{(1+e)^2}{(1-e)^{3/2}} \doteq \frac{2\pi}{P} (1+2e) = 1,019^\circ/\text{den} \\ \dot{v}_{\min} &= \frac{2\pi}{P} \frac{(1-e)^2}{(1-e)^{3/2}} \doteq \frac{2\pi}{P} (1-2e) = 0,9856^\circ/\text{den} \end{aligned} \quad (159)$$

$$\frac{\dot{v}_{\max}}{\dot{v}_{\min}} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 \doteq (1+4e) = 1,069. \quad (160)$$

3.12 Dráhové elementy

Dráha tělesa je určena dráhovými elementy, mezi které patří velká poloosa a a excentricita dráhy e . Tyto nám udávají její tvar a velikost. K nim je zapotřebí znát ještě čas průchodu perihéliem T . Jde o 3 základní parametry, které postačují pro případ pohybu tělesa v rovině. Obecně je ale zapotřebí řešit pohyb v prostoru, např. vůči rovině ekliptiky, a proto je zapotřebí k popisu dráhy ještě dalších



Obrázek 47: Znázornění dráhových elementů a rovin ekliptiky (zelená) a roviny oběhu tělesa (modrá).

parametrů. Dva z nich nám dávají informace o poloze roviny dráhy (směrnice normály), tj. sklon dráhy i a délka výstupného uzlu Ω . Posledním argumentem, který je potřeba k dráhy tělesa v prostoru je poloha (argument) perihélia, viz obr. 47.

Délka sestupného uzlu je rovna $\Omega \pm 180^\circ$, pokud je sklon dráhy $i < 90^\circ$, pohyb tělesa je souhlasný s pohybem Slunce v rovině ekliptiky, je-li $i > 90^\circ$, pak jde o pohyb nesouhlasný (retrográdní).

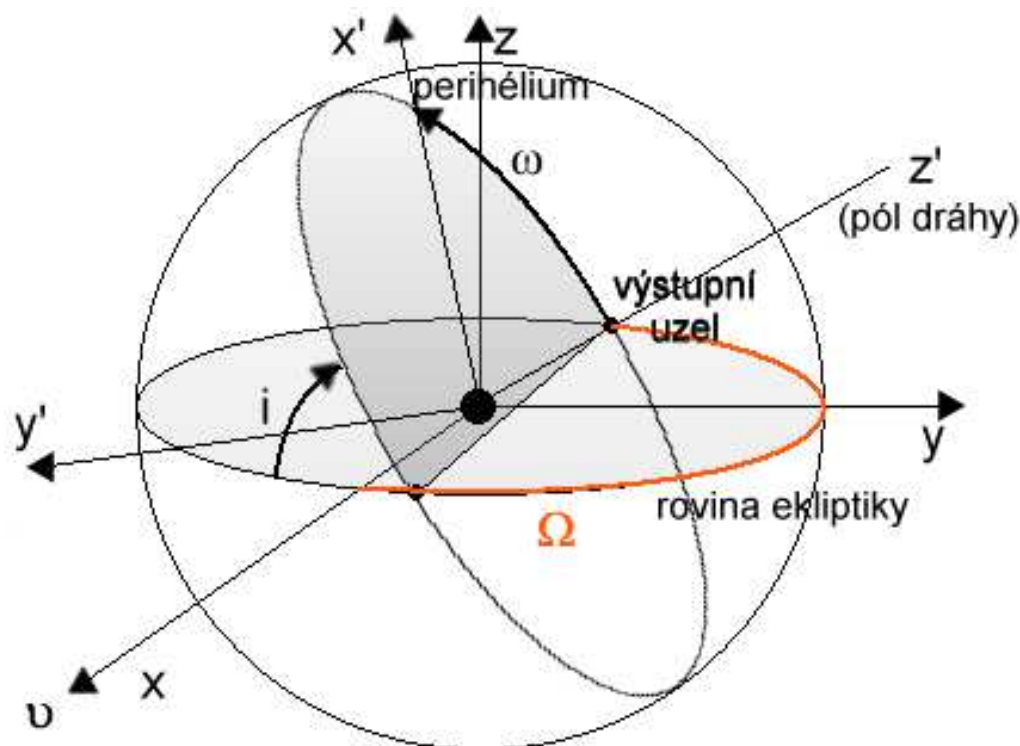
U drah hyperbolických a parabolických se místo velké poloosy a uvádí vzdálenost perihélia q , je-li drahou parabola, pak stačí pro popis pouze 5 parametrů. Tento předpoklad je výhodný jako první přiblížení při popisu dráhy neznámého tělesa.

Dráhové elementy umělých družic se vztahují analogicky k Zemi.

Poloha tělesa je na dráze, jak již víme, určena, vzdáleností r a pravou anomálií v . Základní rovinou je rovina dráhy tělesa, základním směrem je směr k perihéliu. Chceme-li souřadnice tělesa transformovat do souřadnicového systému s počátkem ve Slunci, se základní rovinou v rovině ekliptiky a základním směrem k jarnímu bodu ν , musíme provést tři transformace.

Postup při transformacích od planetárních k heliocentrickým ekliptikálním souřadnicím je zřejmý dle obrázku 48 a je následující:

- 1) otočení kolem osy z' o úhel $-\omega$,
- 2) otočení kolem osy z o úhel $-\Omega$ a
- 3) otočení kolem osy $x = x'$ o úhel $-i$.



Obrázek 48: Základní směry a základní roviny při transformaci z orbitálních (planetárních) souřadnic do souřadnicové soustavy heliocentrických ekliptikálních souřadnic.

3.13 Pohyb družic Země

Ověření možnosti existence umělé družice Země se uskutečnilo s jejím prvním vypuštěním, které bylo 4. října 1957, kdy na oběžnou dráhu kolem Země vynesla sovětská raketa družici Sputnik. Počáteční parametry její dráhy byly 215 km v perigeu a 939 km v apogeu se sklonem k rovníku $65,1^\circ$ a oběžnou periodou 96,2 minuty. Pro dosažení oběžné dráhy kolem Země byla družici udělena 1. kosmická rychlost, která odpovídá rychlosti na kruhové dráze, tj. vektor rychlosti družice $\vec{v} \perp \vec{g}$. Pro kruhovou rychlost platí

$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa M}{R+h}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}, \quad (161)$$

kde $g = \kappa M/R^2$, $R = 6,371 \cdot 10^6$ m a $g = 9,81$ m/s². Pro $h = 0$ m tak získáme první kosmickou rychlost rovnu 7,912 km/s.

Je-li rychlost rovna v ve vzdálenosti r , pak pro ni platí rovnice (135)

$$v^2 = \kappa M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (162)$$

Dosazením do rovnice (162) dostáváme pro apogeum a perigeum vztahy

$$v_a^2 = \frac{\kappa M}{a} \frac{q}{Q} \quad \text{a} \quad v_p^2 = \frac{\kappa M}{a} \frac{Q}{q}. \quad (163)$$

Pro trajektorii, jejíž velká osa $2a = R + h$ je jen málo větší než poloměr Země, dostáváme při počáteční rychlosti v na povrchu Země

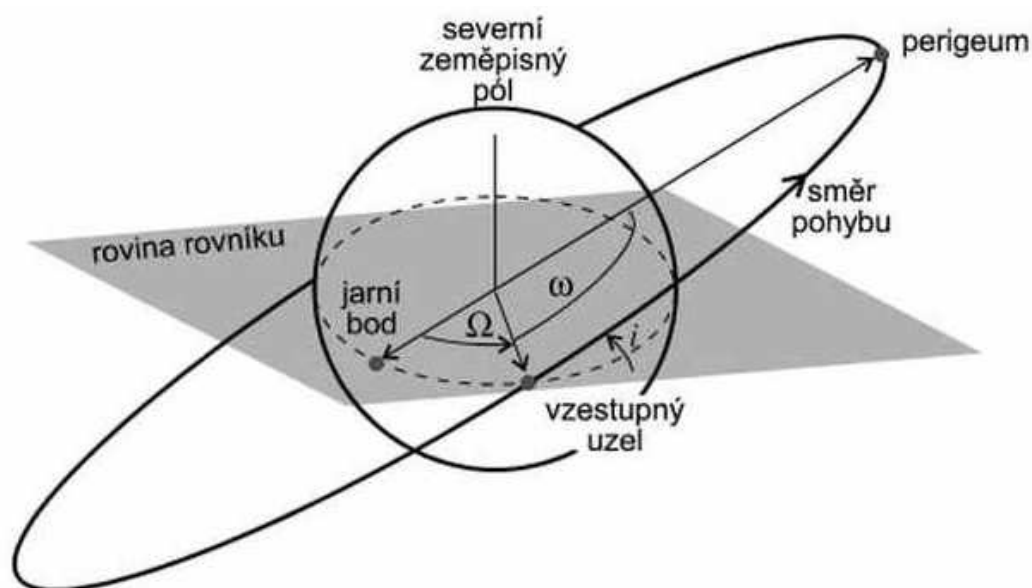
$$v^2 = \kappa M \left(\frac{2}{R} - \frac{2}{R+h} \right) = \kappa M \frac{2h}{R^2(1 + \frac{h}{R})} \doteq \frac{2\kappa M}{R^2} h \implies h = \frac{v^2}{2g}, \quad (164)$$

tedy známý vztah pro pohyb v homogenním gravitačním poli. Pro obíhající tělesa v okolí Země můžeme najít analogický vztah ke 3. Keplerovu zákonu

$$P = 1,659 \cdot 10^{-4} a^{3/2}, \quad (165)$$

kde a je velká poloosa trajektorie družice v kilometrech a oběžná perioda P je pak v minutách. Jestliže apocentrum je natolik vzdáleno od Země, že platí $Q \rightarrow \infty$, pak těleso opouští oblast Země, má parabolickou dráhu a jeho rychlost je větší než tzv. 2. kosmická rychlost.

Stav na družici je stavem beztíže, jde o neustálý volný pád v gravitačním poli Země. Vázané dráhy jsou elipsami nebo jejich úseky, což platí jak pro volný pád stejně tak i pro vodorovný vrh (parabola je jen přiblížením pro homogenní gravitační pole).



Obrázek 49: Znázornění dráhových elementů družic Země. [E16]

Velice zvláštní je dynamika těles na oběžné dráze. Změny dráhy jsou vždy jako odezva na určitou akci. Máme-li na počátku velikost velké poloosy a

$$v_0^2 = \kappa M \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right) \implies \frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\kappa M} \quad (166)$$

a provedeme-li její malou změnu o Δa , což bude mít za následek i změnu rychlosti o Δv_0

$$a' = a + \Delta a \text{ a } v'_0 = v_0 + \Delta v_0 \implies v_0'^2 = v_0^2 + 2v_0\Delta v_0, \quad (167)$$

kde Δv_0^2 zanedbáváme.

$$\frac{1}{a} \left(1 - \frac{\Delta a}{a} \right) = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\kappa M} \left(1 + \frac{2\Delta v_0}{v_0} \right) \implies \frac{\Delta a}{a^2} = \frac{2v_0\Delta v_0}{\kappa M} \quad (168)$$

Z této rovnice vyplývá, že jestliže přidáme rychlost ve směru pohybu, pak $\Delta a > 0$, což znamená, že se prodlouží i perioda $\Delta P > 0$, těleso začne zaostávat a dostane se dozadu (analogicky pro snížení rychlosti - těleso se dostane dopředu). Kolmý pohyb prakticky nemění kvadrát výslednice, perioda je tatáž $\Delta P = 0$, dochází pouze ke změnám vůči základnímu postavení. Důsledky dynamiky na oběžné dráze jsou pozorovatelné na pohybu kosmonautů, rozpadu tělesa komety a důvodu vzniku meteorického vlákna.

Dráhové elementy družic (viz obr. 49) jsou obdobné jako je tomu u planet jen s tím rozdílem, že hlavní rovinou je rovina zemského rovníku. Dráhovými elementy jsou a , e , i , Ω , ω a T (průchod perigeem).

U družic dochází k velice výrazným sekulárním změnám, které vyplývají z faktu že

- a) Země není hmotný bod nebo ideální koule (Země je zploštělá) \rightarrow stáčení uzlové přímky,
- b) kromě Země je v blízkosti i Měsíc, Slunce a jiná tělesa sluneční soustavy \rightarrow rušivé účinky a
- c) většina družic prolétá přes zbytky atmosféry, což má za následek jejich brždění (hlavně v okolí perigea), což znamená, že se postupně zmenšuje velká poloosa a trajektorie se stává více kruhovou (časem družice sestoupí do hustších vrstev atmosféry, kde většinou zanikne).

I jiné planety mají družice ať už přirozené či umělé (které tam poslal člověk). Velké planety mají početnou rodinu družic jejichž pozorováním lze odhalit délku velké poloosy družice a a její periodu P . Za pomoci zpřesněného 3. Keplerova zákona pak můžeme určit hmotnost centrálního tělesa. Pro systém Slunce - Země platí

$$\frac{a_{\oplus}^3}{P_{\oplus}^2} = M_{\oplus} + M_{\odot} \doteq 1 \text{ v jednotkách Slunce} \quad (169)$$

a pro planety a jejich měsíce pak $m_d \ll m_{pl}$ platí

$$\frac{a_d^3}{P_d^2} = (m_{pl} + m_d) \doteq m_{pl} \text{ (opět v jednotkách Slunce)}. \quad (170)$$

Hmotnost Jupitera je $1/1050 M_{\odot}$, hmotnost Země je $1/333000 M_{\odot}$. Pro parametry měsíční dráhy $a = 384400 \text{ km} = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ AU}$ a periodu $P = 27,3 \text{ dne} = 0,0747 \text{ roku}$ vychází celková hmotnost soustavy Země-Měsíc $1/329000 M_{\odot}$. Soustava Země-Měsíc má tedy poměr hmotností $1/81$, což se projevuje tím, že se kolem středu soustavy (těžiště) tzv. *barycentra* pohybuje střed Země s poloměrem dráhy cca 4650 km . Tato vzdálenost je v principu měřitelná, při blízkém přiblížení planetky Eros v letech 1930–31 se tak podařilo změřit hmotnost Měsíce (Harold Spencer Jones).

3.14 Problém tří a více těles

Situace, kdy jsou v prostoru pouze dvě tělesa, je více méně akademická. Ve skutečnosti je těchto těles velmi mnoho. Představíme-li si pouze sluneční soustavu, tak kromě Slunce, planet a jejich měsíců tady máme trpasličí planety, asteroidy a také komety. Vše na sebe působí gravitační silou, tj. dochází ke vzájemnému ovlivňování, které se dá přesnými měřeními odhalit. Řešení problému u vzájemně se ovlivňujících N těles najdeme řešením $3 \times N$ pohybových rovnic

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \kappa m_i m_j \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{(r_i - r_j)^3}. \quad (171)$$

Obecně tedy máme $3 \times N$ diferenciálních rovnic a $3 \times N$ integrálů pohybu (zachovávací se veličiny), pro případ 3 těles tak máme 9 diferenciálních rovnic a potřebujeme 9 integrálů pohybu. Bohužel jich však existuje jen 7. Tři z nich jsou dány zákonem zachování celkové hybnosti, tři celkovým momentem hybnosti

$$\sum m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \text{konst} \left\{ \begin{array}{l} \sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) \\ \sum m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) \\ \sum m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) \end{array} \right\} \quad (172)$$

a sedmý integrál pohybu je dán zákonem zachování celkové energie soustavy

$$\frac{1}{2} \sum m_i (\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) + \Phi = \text{konst}, \quad (173)$$

kde Φ je potenciální energie daná vztahem

$$\Phi = -\kappa \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}. \quad (174)$$

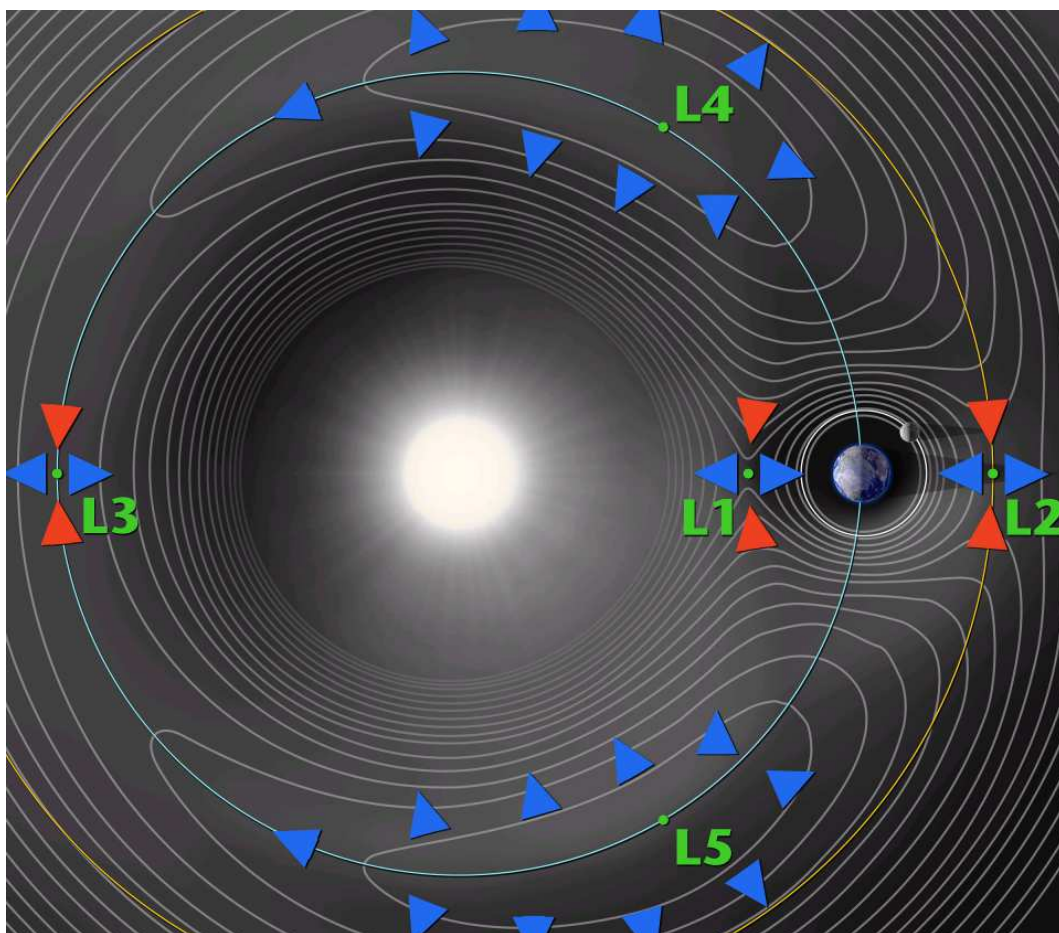
Zákony zachování dostáváme sečtením rovnice (171) pro všechna $i = 1 \dots N$ (rovnoměrný pohyb těžiště), vynásobením vektorově \vec{r}_i a sečtením (zachování momentu hybnosti) a nakonec skalárně $\dot{\vec{r}}_i$ a sečtením (zachování energie).

Žádné matematické postupy nevedou k nalezení dalších integrálů pohybu, z toho vyplývá, že nelze najít žádné analytické řešení tohoto problému. Lze nalézt pouze analytické řešení pro speciální případ tzv. restringovaného problému tří těles, kdy hmotnost jednoho je o hodně menší než zbývajících dvou $m_3 \ll m_1; m_2$.

3.14.1 Lagrangeovy librační body

Lagrange našel v roce 1772 v takovéto soustavě jisté výjimečné body, které se nacházejí v rovině oběhu. Tyto 5 bodů se nazývají *Lagrangeovy librační body*, pro které existují relativně stabilní řešení (viz obr. 50). Okolo těchto bodů může „třetí“ těleso vykonávat periodické pohyby.

Pokud do Lagrangeových bodů těleso umístíme, může zde setrvat neomezeně dlouho, nejstabilnější jsou librační body L_4 a L_5 , které leží mimo spojnicí středů dvou hmotnějších těles a jsou umístěny pro libovolný poměr hmot v oběžné rovině na vrcholech rovnostranného trojúhelníka s oběma tělesy ve zbývajících vrcholech.



Obrázek 50: Lagrangeovy body v systému Slunce-Země a znázornění ekvipotenciálních ploch [E17].

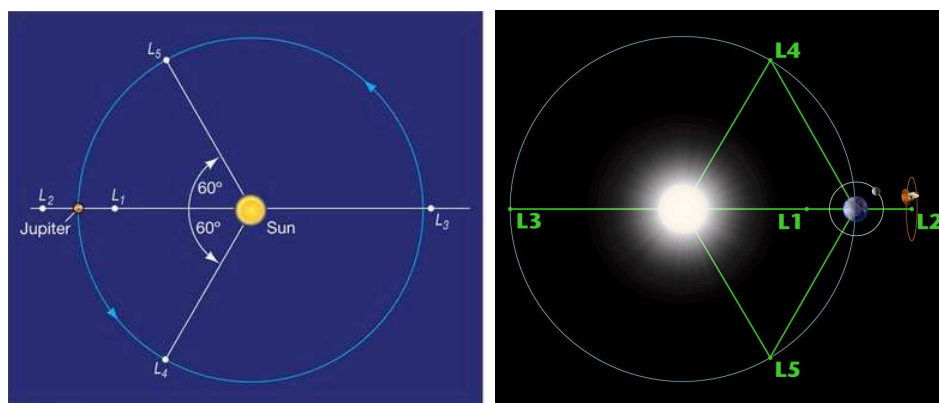
Příkladem těchto libračních bodů L_4 a L_5 jsou Trojané, kteří jsou takto zachyceni v systému Slunce-Jupiter 60° před a 60° za Jupiterem, jak je znázorněno v obrázku 51 (vlevo), ale i pro systém Země-Slunce (vpravo). Méně stabilními jsou pak body L_1 , L_2 a L_3 , které leží na spojnici mezi oběma hmotnějšími tělesy a to tak, že L_1 je umístěn mezi tělesy, L_2 ležící vně méně hmotného bodu M_2 a L_3 ležící vně hmotnějšího bodu M_1 . Pro vzdálenost Lagrangeova bodu L_1 od středu hmotnější složky platí aproximativní vztah [E18]

$$l_1 \cong a \left(\frac{1}{2} + 0,227 \log \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \right). \quad (175)$$

3.14.2 Ekvipotenciální plochy

Velice důležité jsou tzv. ekvipotenciální plochy, tj. spojnice míst se stejným potenciálem. Při pohybu po těchto plochách se nekoná práce, protože platí

$$\vec{s} \cdot \vec{F} = 0. \quad (176)$$



Obrázek 51: Vlevo jsou Trojané v systému Slunce-Jupiter [E19] a vpravo pak librační body v systému Země-Slunce [E20].

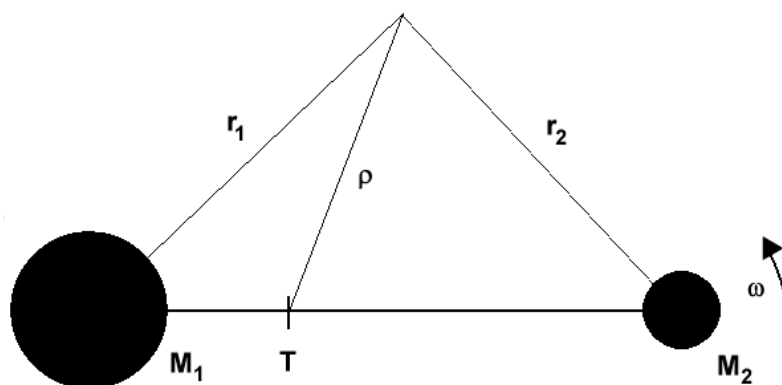
Tekutá (plastická) tělesa držena vlastní gravitací nabývají v ustáleném stavu právě jejich tvaru. Jde-li o gravitační pole pouze jednoho tělesa (reprezentovaného hmotným bodem), pak je povrch reprezentován ekvipotenciální plochou koule, pro kterou platí

$$\Phi = -\kappa \frac{M}{r}. \quad (177)$$

V obecném případě tělesa rotujícího kolem pevné osy je

$$\Phi = -\kappa \frac{M}{r} - \frac{\rho^2 \omega^2}{2}, \quad (178)$$

kde ρ je vzdálenost od rotační osy a ω je úhlová rychlost. Těleso pak nabývá tvaru rotačního elipsoidu.



Obrázek 52: Korotující systém dvou těles kolem těžiště.

Dalším příkladem jsou ekvipotenciální plochy systému s vázanou rotací dvou těles o hmotnostech M_1 a M_2 , které obíhají po kruhových drahách v korotující

neinerciální soustavě s počátkem v těžišti (obr. 52). Úhlová rychlost daná 3. Keplerovým zákonem je

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = \left(\kappa \frac{M_1 + M_2}{r^3} \right)^{1/2}, \quad (179)$$

kde r je vzdálenost těles, která je neměnná, neboť tělesa obíhají po kruhových drahách. Potenciální energie v místě o souřadnicích (x, y, z) se skládá ze součtu gravitačních potenciálů vzhledem k oběma hvězdám o hmotnostech M_1 a M_2 a členu odpovídajícímu fiktivnímu potenciálu odstředivé síly

$$\Phi(x, y, z) = \underbrace{-\frac{\kappa M_1}{r_1} - \frac{\kappa M_2}{r_2}}_{\text{gravitační zrychlení}} - \underbrace{\frac{\rho^2 \omega^2}{2}}_{\text{rotace systému}}, \quad (180)$$

kde ρ je vzdálenost vybraného bodu od normály k orbitální rovině procházející těžištěm, a r_1 a r_2 jsou vzdálenosti zvoleného bodu od prvního a druhého tělesa. Místa, kde je potenciální energie rovna 0, odpovídají singulárním bodům (*Lagrangeovy librační body*), ve kterých se ekvipotenciální plochy protínají (viz obr. 53).

Význam ploch je důležitý hlavně u dvojhvězd, ekvipotenciální plochy, které procházejí vnitřním Lagrangeovým bodem L_1 , dávají za vznik dvěma plochám, pod kterými je oblast, která náleží určitému tělesu. Překročí-li tuto plochu nějaká částice, ztrácí tak stabilitu, částice bude patřit i tělesu druhému.

3.14.3 Rocheův model

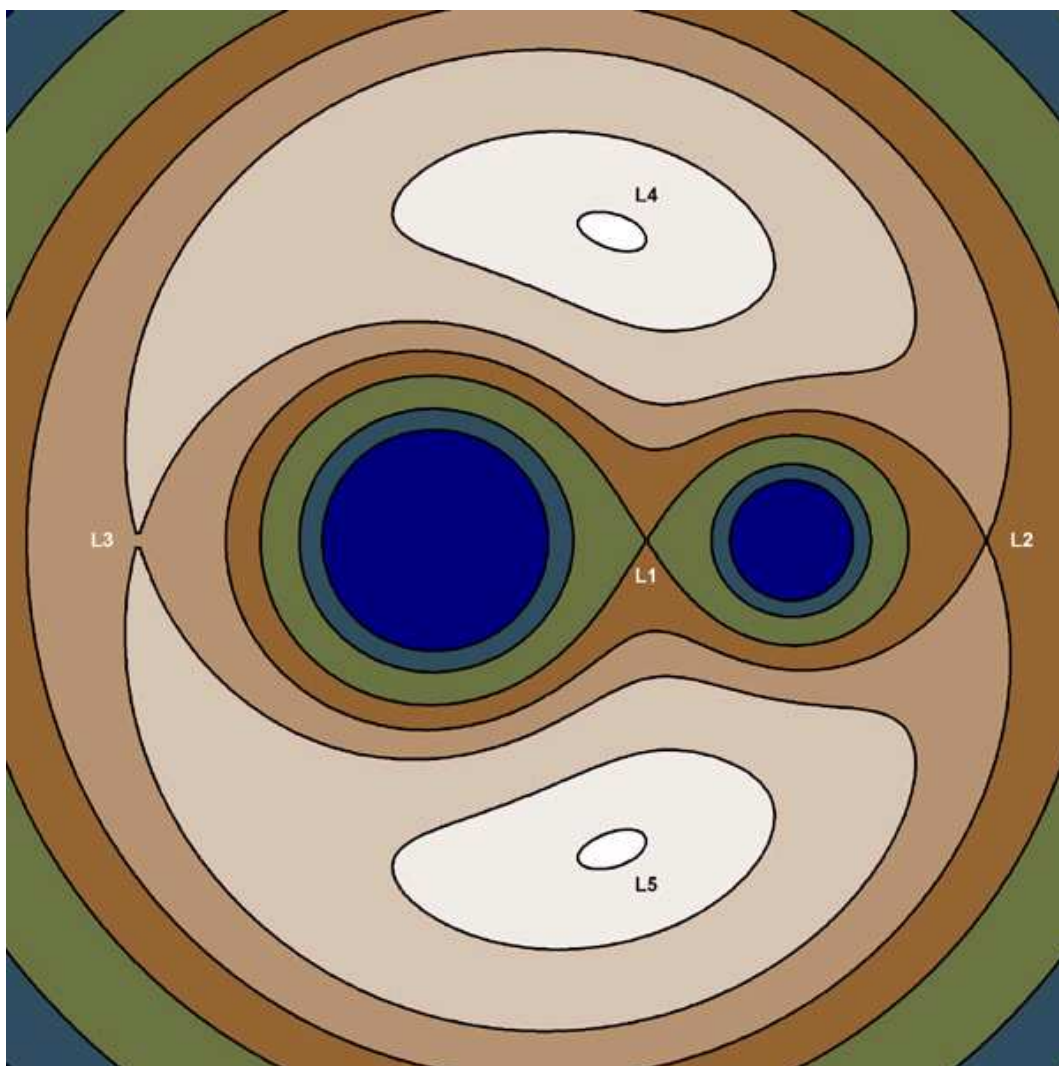
Rocheův model představuje nahrazení skutečného potenciálu dvojhvězdy, které obíhají kolem společného těžiště, potenciálem dvou hmotných bodů umístěných v centrech složek dvojhvězdy a potenciálem odstředivé síly oběžného pohybu. Tato aproximace je vzhledem k vysoké koncentraci hmoty hvězd směrem k centru zcela přípustná. Ukazuje se, že tvar ekvipotenciálních ploch Rocheova modelu závisí pouze na poměru hmotností obou hmotných bodů. Příslušné ekvipotenciální plochy jsou nejprve uzavřené kolem obou hvězd, ale pro určitou kritickou hodnotu potenciálu se slévají v jakési brýle s úhlem velmi přibližně 57 stupňů vůči spojnici obou center. Další ekvipotenciální plochy již obklopují obě hvězdy, poté se postupně otvírají nejprve za méně hmotnou a poté za hmotnější složkou, a ve velké vzdálenosti se limitně blíží sférickým plochám kolem celé dvojhvězdy. Ona kritická „brýlovitá“ ekvipotenciála se nazývá Rocheova mez.

V soustavě planeta a její družice působí planeta diferenciální zrychlení v místě na povrchu družice (obr. 54)

$$\Delta a = -\frac{\kappa M}{(r - R)^2} - \left(-\frac{\kappa M}{r^2} \right) \implies \Delta a \cong -2\frac{\kappa M}{r^3} R, \quad (181)$$

které míří k planetě. K tomuto diferenciálnímu zrychlení je ovšem ještě zapotřebí přičíst rozdíl odstředivého zrychlení

$$\Delta a = \omega^2(r - R) - \omega^2 r = -\omega^2 R, \quad (182)$$



Obrázek 53: Rocheův model s barevným vyznačením Rocheových laloků [E21].

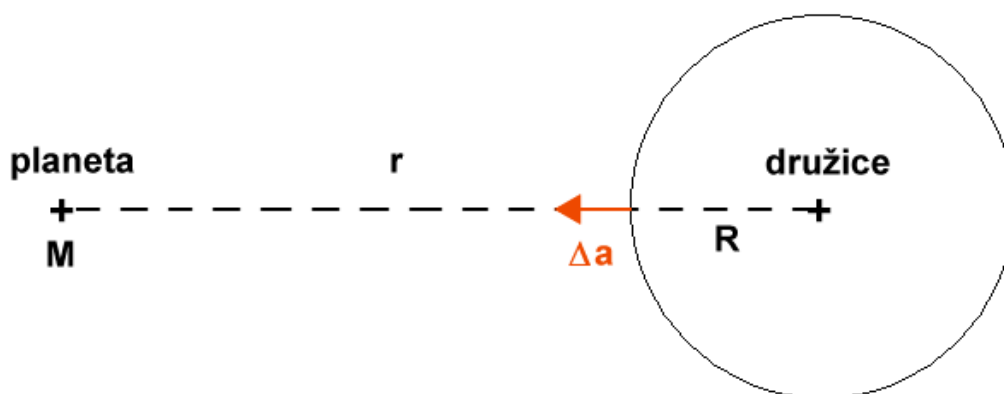
kteří je způsobené rotací kolem těžiště (v tomto případě je hmotnost planety o hodně větší než družice, proto je těžiště přibližně v centru planety). Uvažíme-li, že pro korotující systém platí podle (179)

$$\omega^2 = \kappa \frac{M}{r^3} \implies \Delta a = -3 \frac{\kappa M}{r^3} R. \quad (183)$$

Rušivé působení na těleso je nepřímě úměrné třetí mocnině vzdálenosti, proto vzdálenější tělesa vytvářejí homogennější gravitační pole, u kterých se diferenciální zrychlení neprojeví. Rozdíl diferenciálního zrychlení musí být vyrovnán soudržností a gravitačního zrychlení družice. Zanedbáme-li první vliv (soudržnost), pro gravitační zrychlení družice platí

$$g_s = -\frac{\kappa M_s}{R_s^2}, \quad (184)$$

porovnáním s diferenciálním zrychlením pak pro případ stabilní existence družice



Obrázek 54: Diferenciální zrychlení.

musí platit

$$g_s > \Delta a \implies -\frac{\kappa M_s}{R_s^2} > -3\frac{\kappa M}{r^3} R_s. \quad (185)$$

Vyjádříme-li vzdálenost r v jednotkách poloměru planety R_p jako $r = kR_p$, po úpravě a dosazení dostaneme

$$\frac{M_s}{R_s^3} > 3\frac{M_p}{k^3 R_p^3}, \quad (186)$$

odkud pro konstantu k platí

$$k > \sqrt[3]{3\left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right)}. \quad (187)$$

Je-li k rovno, pak jde o kritickou vzdálenost, která je $k_{\text{krit}} = 1,44\sqrt[3]{\frac{\rho_p}{\rho_s}}$. V případě, že materiál satelitu je pružný, dojde k jeho protažení směrem k planetě a jeho roztržení má pak lepší předpoklady. Pro takový případ platí vztah $k_{\text{krit}} = 2,44\sqrt[3]{\frac{\rho_p}{\rho_s}}$.

3.15 Poruchy - rušivé gravitační síly

Pro poruchy, které způsobují rušící síly, je rozhodující nikoliv zrychlení, které působí rušící těleso na planetu, ale rozdíl zrychlení (planeta-družice) vůči centrálnímu tělesu. Pro systém Země-Měsíc je rušícím tělesem Slunce. Pro rozdíl zrychlení platí

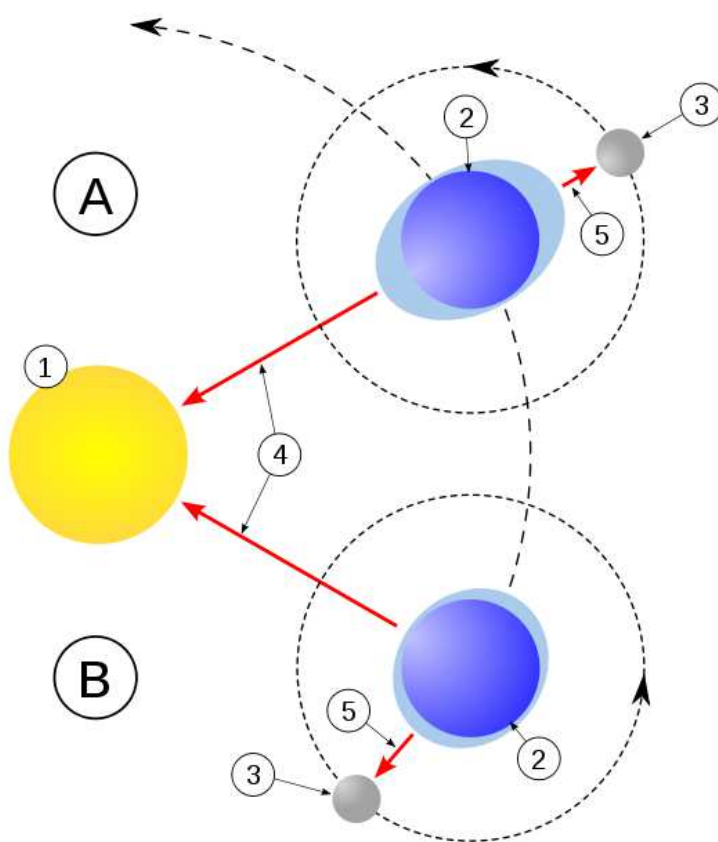
$$a_p - a_s = \kappa M_\odot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r + r_0)^2} \right) \text{ pro } r \gg r_0 \implies a_{\text{ruš.}} \doteq 2\kappa M_\odot \frac{r_0}{r^3}, \quad (188)$$

kde r je vzdálenost Země-Slunce, r_0 pak vzdálenost Země-Měsíc. Porucha způsobena rušícím tělesem je opětovně nepřímo úměrná třetí mocnině vzdálenosti od rušícího tělesa. I když je zrychlení působené Sluncem na Měsíc větší než od Země,

rušícím tělesem je Slunce. Které těleso je rušícím lze zjistit z poloměru tzv. *sféry aktivity* σ , daného přibližným vztahem [E22]

$$\sigma = r \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{2/5}, \quad (189)$$

kde r je vzdálenost těles m_1 a m_2 . Pro případ Země a Slunce vychází z tohoto vztahu sféra aktivity Země vůči Slunci 930 000 km a pro Zemi a Měsíc je sféra Měsíce vůči Zemi 66 000 km. Jestliže se do této sféry vlivu (např. Měsíce) dostane letící sonda, bude její trajektorie ovlivňována gravitačním polem tohoto tělesa. Poloměr sféry aktivity vychází z rovnosti podílů zrychlení způsobeného centrální hmotou $m_1(m_2)$ ku rozdílovému zrychlení způsobeného hmotou $m_2(m_1)$ (Polyakhova 1974).



Obrázek 55: Znázornění skočného (A) a hluchého dmutí (B) (1-☉ 2-⊕ 3-☾ 4-směr přitahování Sluncem 5-směr přitahování Měsícem) [E23].

3.15.1 Slapové síly, příliv a odliv

Důsledkem gravitačních a odstředivých sil je přibližně šestihodinový interval stoupání a pak zase klesání vodní hladiny. Za polovinu doby mezi po sobě následujícími kulminacemi Měsíce, tj. 12 hodin 25 minut a 14 sekund, tak dojde opět k přílivu

(či odlivu), hovoříme o půldenním dmutí, interval mezi přílivem a odlivem na stejném místě je pak 6 hodin 12 minut 37 sekund. Vlivem sklonu dráhy Měsíce se ne všude na Zemi výrazně projevuje půldenní dmutí (Atlantský a Severní ledový oceán), jinde se projevuje hlavně dmutí jednodenní (Jávské a Ochotské moře). Slapy se týkají nejenom vodní (vzdušné) masy, ale také zemské kůry. Už Newton se snažil vysvětlit příčiny slapového působení za předpokladu statického přístupu. Tvar Země má tendenci vyplnit ekvipotenciální plochu, která je reprezentovaná protaženým kapkovitým tělesem, které je navíc zploštělé.

Slapově nepůsobí pouze Měsíc, ale podílí se i Slunce, jeho účinek je však menší a to v poměru

$$\frac{M_{\odot}}{M_{\zeta}} \left(\frac{r_{\zeta}}{r_{\odot}} \right)^3 \simeq \frac{5}{11}. \quad (190)$$

Zesílení slapových účinků je v novu a úplňku, kdy jsou slapy maximální, tehdy jsou středy těles v jedné rovině (skočné dmutí), což má za následek i maxima výšky přílivu. Naproti tomu je-li úhel Měsíc, Země, Slunce pravý, pak dochází k hluchému dmutí (obr. 55). Nejvyšší hranice na světě dosahuje příliv v zálivu Fundy v Kanadě, kde hladina stoupá až o 20 metrů.

Protože Země není absolutně tuhým tělesem, projevují se slapové síly i v kůře, dochází k deformacím, což má za následek disipaci energie (transformace na teplo). Důsledkem slapového působení je pak zpomalování rotace Země, která se těmito silami brzdí. Prodlužování periody činí přibližně 0,0016 s za sto let. Energie rotace se přesouvá do tepelné energie v zemském tělese a protože platí zákon nejenom zachování energie ale i momentu hybnosti, dochází k postupnému vzdalování Měsíce od Země. Jeho vzdálenost tak v současnosti každým rokem vzroste o cca 3,7 centimetry. V dřívějších dobách, kdy byl Měsíc blíže Zemi, byly i slapové síly, a tím pádem příliv a odliv, daleko markantnějšími (je to dáno tím, že závisí nepřímo úměrně třetí mocnině vzdálenosti).

Slapovými silami působí ale také Země na Měsíc, toto působení je 20krát větší než ze strany Měsíce na Zemi, a to způsobilo, že došlo k vázané rotaci Měsíce (je natočen k Zemi stále stejnou stranou). Měsíc se bude neustále od Země vzdalovat, až dojde k vzájemné vázané rotaci obou těles, Měsíc bude vzdálen 556 000 km a obíhat bude s periodou 47,4 dne. Podrobnější popis statické teorie slapů lze nalézt v článku Štefla (2011).

3.15.2 Poruchy v drahách těles sluneční soustavy

Tělesa sluneční soustavy mají různé hmotnosti, obíhají kolem hmotného středu (těžiště) sluneční soustavy. Nejbližší těžiště je Slunce, které se od něj může vzdálit i na více než dva své poloměry. Tento rozdíl je důležitý pro výpočet přesných efemerid, protože to mění časy východů a západů těles, nejdůležitější vychylující planetou je samozřejmě Jupiter, který, když je např. na ranní obloze, opoždí východy ostatních těles.

Jupiter způsobuje největší poruchy na oběžných drahách ostatních těles, z původních drah se mohou stát dráhy chaotické (komety, planetky).

Za objevem planety Neptun byly zjištěné poruchy v dráze planety Uran, kterou objevil W. Herschel v roce 1781 zcela náhodně. Počátkem 19. století francouzský

astronom A. Bouvard publikoval podrobné tabulky poloh tří tehdy známých obřích planet. Ukázalo se, že v případě planety Uranu se nová pozorování s tabulkovými propočty ztelně rozcházejí. Bouvard po dalším pečlivém zkoumání těchto nepravidelností v pohybu Uranu vyslovil hypotézu, že pozorované odchylky mají svůj původ v gravitačním působení další, dosud neznámé planety. Na základě analýz pohybu Uranu pak bylo vypočteno nezávisle na sobě J. C. Adamsem a U. Le Verrierem neznámé těleso, které má tyto poruchy vyvolávat a zároveň byla předpovězena i jeho poloha. Neptun nakonec na základě žádosti Le Verriera objevil 23. září 1846 Johann Gottfried Galle.

Trpasličí planeta Pluto byla objevena v roce 1930 více méně náhodou, přestože se v pohybech Uranu a Neptuna vyskytovaly další nevysvětlené poruchy, ale podrobným rozbořem se ukázalo, že za drahou Neptuna již žádné velké planety nejsou.

Gravitační poruchy v pohybu umělých družic planet nám dávají možnost detailního prošetření tvaru gravitačního potenciálu ústředních těles, jejichž rozbořem můžeme zkoumat rozložení hmoty pod povrchem. Výsledné gravimetrické mapy Země pak přinášejí geofyzikům velmi cenné informace o hustotních nehomogenitách zemské kůry a svrchního pláště. Kvantitativní interpretací gravimetrických map lze vymezit průběhy zlomových linií a vyhledávat struktury perspektivní pro výskyt ložisek ropy a zemního plynu a dalších nerostných surovin.

DOPLŇUJÍCÍ LITERATURA

Abalkin V. K. 1979, *Osnovy efemeridnoj astronomii*, Nauka, Moskva, 448 stran

Guth V., Link F., Mohr J. M., Šternberk B. 1954, *Astronomie I.*, NČAV, Praha, 664 stran

Hacar B. 1963, *Úvod do obecné astronomie*, SPN, Praha, 512 stran

Stephenson F. R. 1997, *Historical Eclipses and Earth's Rotation*, Cambridge University Press, Cambridge, 574 stran

ZEMĚ A JEJÍ POHYBY, ČAS

4.1 Rozměry Země

První historická měření rozměru Země vycházela z Eratosthénovy metody, která svazovala úhel mezi dvěma body na povrchu a vzdálenost, která je mezi nimi. Takto určili již Arabové délku 1° mezi 111,7–113,3 km. První novodobá měření podobnou metodou provedl v roce 1528 J. Fernel (1497–1558), který pomocí otáček kola na povrchu stanovil délku tzv. Pařížského poledníku mezi Paříží a Amiens.

Od této metody se postupně přešlo k přesnější metodě triangulační. Na povrchu Země se vytýčily body, pro které platilo, že nejbližší mezi sebou byly viditelné. Měřením úhlů a vzdáleností mezi nimi se pak postupně proměřovaly jednotlivé trojúhelníky, které měly strany cca mezi 30–40 km (příklad je na obrázku 56). Od roku 1669 proběhlo měření napříč celou Francií, bylo zjištěno, že 1° měří různě. Vysvětlení je prosté, Země není ideální koule, ale směrem k pólům se více projevuje její zploštění. Teoretické odvození provedl Isaac Newton kolem roku 1686, příčina zploštění Země tkví v její rotaci. Další měření provedená v Laponsku a v Peru pak toto tvrzení jen potvrdila. Na základě těchto měření pak byla definována jednotka 1 m jako $1/10\,000\,000$ poledníkového kvadrantu Země.

Mezi roky 1733–1740 Jacques (1677–1756) a jeho syn César (1714–1784) Cassiniové uskutečnili první triangulaci celé Francie včetně přepočtení délky jednoho stupně meridiánu, což vedlo v roce 1745 k publikaci první mapy Francie na rigorózních základech.

Ve Francii byl také metr uznán jako oficiální délková míra v roce 1799, v Rakousko-Uhersku se tak stalo až v roce 1876. Prototyp metru je umístěn v Sèvres u Paříže. V současné době je metr definován pevně stanovenou hodnotou rychlosti světla ve vakuu, kterou toto světlo urazí během časového intervalu $1/299\,792\,458$ sekundy.

Dnešní geodetická měření se provádějí pomocí družic Země. Měření jsou mnohonásobně přesnější než pomocí trigonometrické sítě, získáváme velmi podrobné

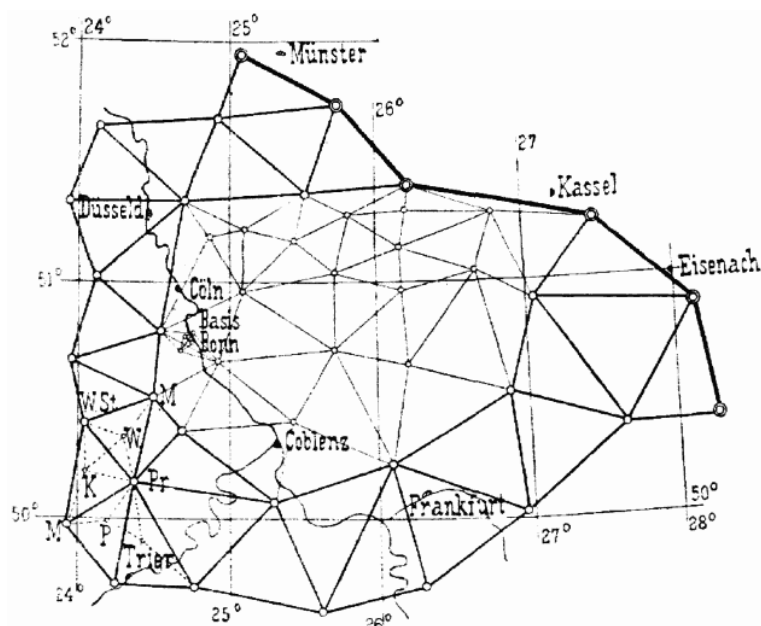


Fig. 4. Die rheinisch-hessische Kette und das nieder-rheinische Dreiecksnetz.

Obrázek 56: Historická mapa Německa z 19. století se znázorněnými triangulačními body v oblasti Porýní-Hesenska [E24].

informace o tvaru, rozměrech Země a také o rozložení hmoty v ní. To vše je možné díky přímým pozorováním a měřením vzdáleností pomocí laserových odražečů či rádiových měření, relativních rychlostí určených z Dopplerova posuvu, interferometrických měření a altimetrií z družic.

Přesnou definicí trajektorie družic a pohybu po ní nám umožňují speciální geodetické družice, které jsou schopny potlačit negravitační poruchy, což nám pak umožňuje zjistit přesný potenciál Země.

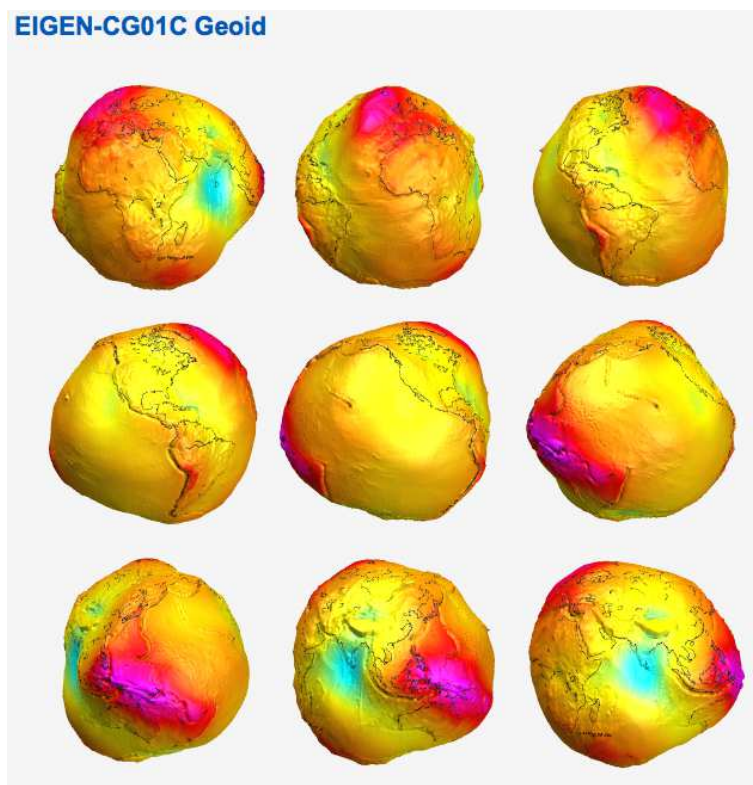
4.2 Tvar Země

Snaha o popsání tvaru Země naráží na složitou aproximaci velmi členitého zemského povrchu tělesem jednodušších vlastností. Realizace ekvipotenciální plochy nejtěsněji přiléhající ke střední klidné hladině moří a oceánů, ke které se vztahuje tzv. nadmořská výška, je tvarem velice komplikovaným pro praxi. Tato plocha reprezentuje tzv. *geoid* (obr. 57). Pro praktické potřeby se zavádí zjednodušení, kterého se využívá v astronomii a kartografii.

Prvním jednodušším modelem tvaru Země je *rotační elipsoid*, který lze ve válcových souřadnicích se středem v centru Země popsat vztahem

$$\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1, \quad (191)$$

kde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ je vzdálenost od osy otáčení, a je rovníkový poloměr a b poloměr



Obrázek 57: Geoid - tvar Země, výškové rozdíly jsou schválně zvětšeny, aby byly viditelné [E25].

polární. Zploštění i je definováno jako poměr

$$i = \frac{a - b}{a}. \quad (192)$$

Referenční elipsoid, který slouží jako (co nejlepší) náhrada geoidu, vznikl na základě družicových měření. Současným globálním standardem mezi referenčními elipsoidy je tzv. WGS-84, jehož střed leží ve středu Země a poloosy jsou $a = 6\,378\,137$ m, $b = 6\,356\,752,3$ m. Zploštění je $i=1:298,257$. Tento elipsoid se používá např. při satelitní navigaci GPS. Ostatní referenční elipsoidy lze definovat pomocí posunutí jejich středu vůči středu WGS-84, případně i změnou délky poloos (změnou délky hlavní poloosy a rozdílem zploštění). Zploštění Země není pouhým okem rozpoznatelné a proto má Země z vesmíru tvar dokonalé koule.

Přesnějším vystižením tvaru geoidu je *trojosý rotační elipsoid* popsany rovnicí (Burša 1995)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1, \quad (193)$$

s rovníkovým zploštěním

$$i_R = \frac{a - b}{a}. \quad (194)$$

Polární zploštění je definováno obdobně jako

$$i_P = \frac{a - c}{a}. \quad (195)$$

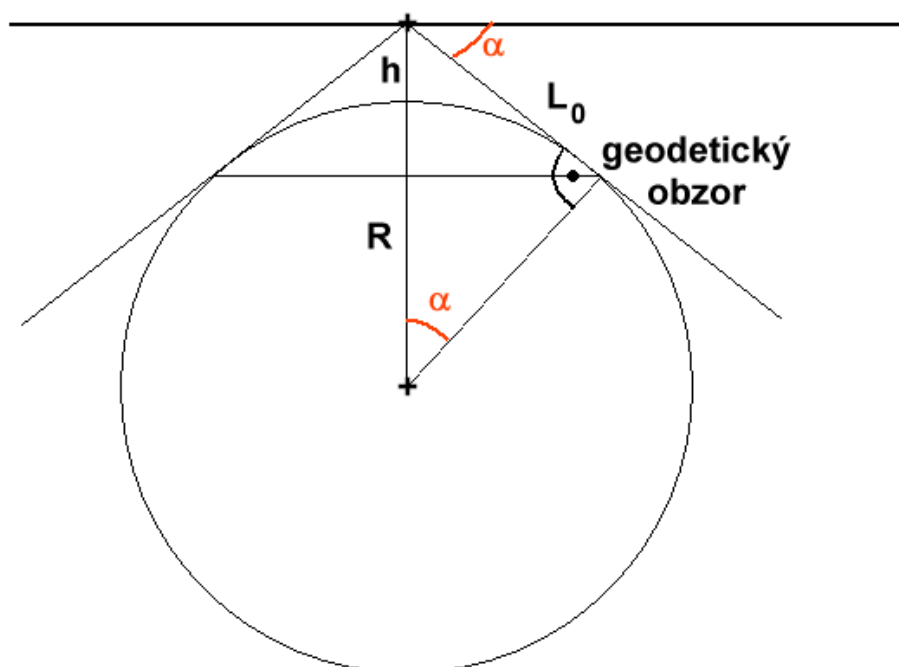
Parametry elipsoidu jsou $a = 6\,378\,173$ m, $i_R = 1 : 94\,000$, $i_P = 1 : 297,787$, přitom hlavní osa x protíná rovník na zeměpisné délce $\lambda_a = 14,8^\circ$. Tomuto modelu se nejvíce přibližuje rotační elipsoid s parametry $a = 6\,378\,139$ m a $i = 1 : 297,257$.

Skutečný tvar Země je znázorněn na obrázku 57, ze kterého je patrné, že se severní polokoule liší od jižní, tvarem připomíná hrušku. Odchytky od ideálního tvaru jsou cca 50 metrů.

Že je Země přibližně kulatého tvaru lze dokázat jednak pozorováním jejího stínu při zatměních Měsíce, různou výškou Polárky nad obzorem v závislosti na zeměpisné šířce nebo přímým pozorováním z družic.

4.3 Dohlednost a deprese obzoru

Stojíme-li na zemském povrchu, čím se nacházíme ve větší nadmořské výšce, tím se nám vzdálenost, do které vidíme objekty na Zemi zvětšuje. Je to dáno jejím zakřivením, jak je znázorněno na obrázku 58.



Obrázek 58: Geodetický obzor pro výšku pozorovatele h nad povrchem Země.

Pro vzdálenost geodetického obzoru vyjdeme z obrázku 58, ze kterého platí, že

$$L_0 = [(R + h)^2 - R^2]^{1/2} = \left[2Rh \left(1 + \frac{h}{2R} \right) \right]^{1/2} \doteq \sqrt{2Rh} \quad (196)$$

a pro tangentu pak (α je tzv. úhel deprese)

$$\tan \alpha = \left[\frac{(R + h)^2 - R^2}{R^2} \right]^{1/2} \doteq (2h/R)^{1/2}. \quad (197)$$

Pro případ, že by Země byla bez atmosféry, pak vychází pro výšku $h = 10$ m úhel deprese $\alpha = 6' 5''$ a vzdálenost geodetického obzoru $L_0 = 11,29$ km. Vlivem refrakce je však skutečná vzdálenost L geodetického obzoru větší, $L > L_0$. Dohlednost za normálních podmínek je větší přibližně o 6,5 %. Hodně však záleží na teplotním rozvrstvení přízemní atmosféry, která má na refrakci velký vliv.

4.4 Šířka geocentrická, geodetická a astronomická

Vzhledem k tomu, že je tvar Země odlišný od koule a popisujeme jej pomocí rotačního elipsoidu, rozlišujeme různé typy zeměpisných šířek. Šířka geocentrická Ψ souvisí s úhlem mezi místem na povrchu, středem Země a rovníkem, šířka geodetická φ pak s úhlem mezi místem na povrchu, těžištěm (místem do kterého míří tížnice) a rovníkem. Z rovnice rotačního elipsoidu

$$\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1 \quad (198)$$

vychází, že úhel φ je roven

$$\tan \varphi = -\frac{d\rho}{dz} \text{ a } \frac{2\rho d\rho}{a^2} + \frac{2z dz}{b^2} = 0, \quad (199)$$

z čehož pak plyne

$$\tan \varphi = \frac{a^2}{b^2} \frac{z}{\rho} = \frac{a^2}{b^2} \tan \Psi. \quad (200)$$

Protože ale také platí, že

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \implies \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{1 - e^2}, \quad (201)$$

vyjde nám pro vztah mezi Ψ a φ

$$\tan \Psi = (1 - e^2) \tan \varphi. \quad (202)$$

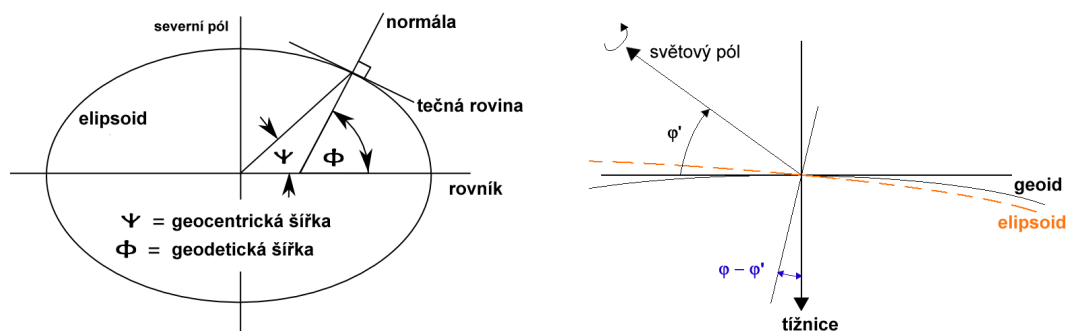
Maximální rozdíl mezi geocentrickou a geodetickou šířkou je pro úhel $\varphi = 45^\circ$ a činí $\Delta = 11' 33''$. Pro rovník a pro póly jsou tyto šířky shodné.

Astronomická šířka φ' je definována jako úhel mezi osou rotace a kolmicí k místní tížnici $\varphi = \varphi' - \Delta\varphi$ (viz obr. 59 vpravo), kde $\Delta\varphi$ je tížnicová odchylka.

V důsledku polárního zploštění Země směrem k pólům roste vzdálenost mezi rovnoběžkami. Zatímco na rovníku odpovídá jednomu stupni vzdálenost rovnoběžek 110,576 km, v blízkosti pólů je to již 111,695 km.

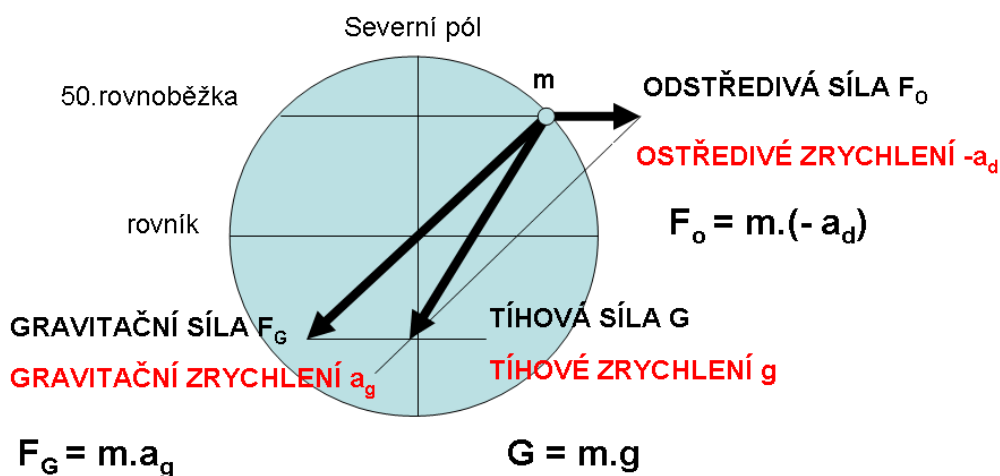
4.5 Hmotnost a gravitační pole Země

Rozložení hmoty v tělese určuje tíhové pole, jehož studiem se zabývá gravimetrie. Gravitační zrychlení \vec{g} souvisí s gravitačním potenciálem rovnicí $\vec{g} = -\text{grad}V$, velikost gravitačního zrychlení určuje např. chod kyvadlových hodin (na přelomu 19. a 20. století metodika R. Sternecka pro měření tíhového zrychlení pomocí přesných kyvadlových hodin). Pokud je budeme na povrchu přemísťovat, můžeme proměřit velikost \vec{g} v závislosti na poloze na Zemi. Zjistíme, že velikost \vec{g} souvisí se



Obrázek 59: Vlevo je zobrazena geocentrická a geodetická zeměpisná šířka (upraveno dle [E26]), vpravo pak šířka astronomická.

zeměpisnou šířkou a rotací, která způsobuje zploštění Země. Studium tížnicových odchylek můžeme odhalovat nehomogenity v rozložení hmot, nicméně odchylky tížnice od kolmice nejsou až tak výrazné, jak by se mohlo zdát z členitosti terénu. Např. G. Everet zjistil, že skutečný účinek Himaláje na odklon tížnice je $3\times$ menší, než odpovídá výpočtu z rozložení hmoty na povrchu. Jediným vysvětlením je předpoklad kompenzujících hustotních nehomogenit v zemském nitru (tzv. *izostáze* - rovnovážný stav).



Obrázek 60: Gravitační, tíhové a odstředivé zrychlení a síly.

Na velikost výsledné gravitační síly má vliv síla odstředivá. Pro úhlovou rychlost rotace Země platí

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 7,2921 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}, \quad (203)$$

pro střední hodnotu gravitačního zrychlení (pro ideálně kulovou nerotující Zemi),

$$\bar{g} = \kappa \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} = 9,823 \text{ m/s}^2, \quad (204)$$

pokud $M_{\oplus} = 5,976 \cdot 10^{24}$ kg a součin $\kappa M_{\oplus} = 3,986 \cdot 10^{14}$ m³/s², což je přímo měřitelná veličina. Za standardní velikost gravitačního zrychlení byla zvolena hodnota $g_0 = 9,80665$ m/s² jako převodní faktor mezi hmotností a váhou tělesa. Odstředivé zrychlení na rovníku je $a_{\text{ods.}} = 3,39 \cdot 10^{-2}$ m/s² a vzájemný poměr $g_0/a_{\text{ods.}} = 1/288,38$.

Pro zjištění gravitačního zrychlení na konkrétní zeměpisné šířce a nadmořské výšce můžeme použít Helmertova vztahu (Moritz 2000)

$$g_{\varphi} = (9,8061999 - 0,0259296 \cos(2\varphi) + 0,0000567 \cos^2(2\varphi)) - 3,086 \cdot 10^{-6} h. \quad (205)$$

Rozdíl mezi gravitačním zrychlením na rovníku a pólu činí

$$g_{90^{\circ}} - g_{0^{\circ}} = (5,2 \cdot 10^{-2}) \text{ m/s}^2, \quad (206)$$

kde 2/3 této hodnoty jsou dány odstředivou silou a 1/3 zploštěním Země.

4.6 Rotace Země

Země se otáčí kolem své severojižní osy jako tuhé těleso, tzn. toutéž úhlovou rychlostí ω . Vztáhneme-li tento pohyb vůči hvězdnému pozadí je otočení o 360 stupňů rovno siderické periodě rotace, která je rovna $\omega = 2\pi/P = 7,29211508 \cdot 10^{-5}$ rad/s. Unášivá rychlost bodu na zemském povrchu (koule) je dána vztahem

$$v_{\varphi} = \omega_{\oplus} R_{\oplus} \cos \varphi, \quad (207)$$

maximální rychlost je na rovníku a to 465,1 m/s, pro naši zeměpisnou šířku pak 290 m/s. Tuto rychlost musíme brát na zřetel při velmi přesných měřeních radiálních rychlostí kosmických objektů. Unášivá rychlost se projevuje odstředivou silou, která souvisí s odstředivým zrychlením na rovníku, které je rovno $3,39 \cdot 10^{-2}$ m/s².

Základním zákonem, který reguluje rotaci Země, je zákon zachování momentu hybnosti

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad \text{a} \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (208)$$

Součet příspěvků k velikosti momentu hybnosti od jednotlivých hmotných elementů dm je roven $|\vec{r} \times \vec{v}| = r^2\omega$, odkud plyne

$$L = \omega \int r^2 dm = \omega I, \quad (209)$$

kde I je moment setrvačnosti $I = \int r^2 dm$. Osa rotace Země prochází těžištěm, takže $\vec{R} \int dm = \int \vec{r} dm$, rotační energie Země je tedy $E_{\text{rot}} = 1/2 I \omega^2$.

Zákon zachování momentu hybnosti nám říká, že žádná vnitřní energie není schopna změnit hodnotu momentu hybnosti \vec{L} , těleso se může přemísťovat jen tak, že jeho osa zůstává rovnoběžná sama se sebou (gyroskop, rotující tělesa v prostoru). Se změnou rotace ($d\omega/dt \neq 0$) dochází proto ke změně momentu setrvačnosti $I = \int r^2 dm$, což souvisí s přerozdělením hmoty v tělese Země (hlavně v rovníkových oblastech).

Vnější síly, které působí na rotující Zemi, způsobují momenty sil, které mají za následek změnu orientace rotační osy (precese) a může dojít i ke změně momentu hybnosti, což má za následek brždění rotace Země (a zvětšování velké poloosy dráhy Měsíce kolem Země).

4.7 Důkazy rotace Země

Nepřímým důkazem je pohyb kosmických těles po obloze, který může mít sice dvojitý výklad, ale vysvětlení rotací Země je přirozenější. V případě nehybné, nerotující Země, by musela mít vzdálená tělesa velké oběžné rychlosti, všechny hvězdy by musely mít shodné oběžné periody, což je nepravděpodobné a pozorujeme-li navíc tělesa ve sluneční soustavě, všechna se otáčejí (tak proč by se neměla otáčet i Země).

Mezi přímé důkazy rotace patří účinek neinerciálních sil (*Coriolisova a odstředivá síla*): stáčení roviny kyvu *Foucaultova kyvadla* či *odchylka padajících těles*. Coriolisova síla se objevuje v rotující (tedy neinerciální) vztažné soustavě. Tato síla způsobuje zrychlení, jehož vektor je dán vztahem $\vec{a}_c = 2\vec{v} \times \vec{\omega}$. Má mimo jiné za následek stáčení meridionálních vzdušných i vodních proudů na Zemi (viz obr. 61).



Obrázek 61: Vlevo je znázorněno stáčení trajektorií proudů na Zemi vlivem Coriolisovy síly [E27] a vpravo je Foucaultovo kyvadlo v Paříži [E28].

Jean Bernard Léon Foucault (1819–1868) se proslavil pokusem v pařížském Pantheonu (obr. 61 vpravo), kde v roce 1851 přímo dokázal s kyvadlem délky 67 metrů, že se Země otáčí (pro Paříž rychlost stáčení roviny kyvu je $11,3^\circ$ za hodinu). Vzhledem k tomu, že je rotující Země neinerciální vztažnou soustavou, kyvadlo si zachovává počáteční rovinu kyvu vůči rotujícímu zemskému povrchu. Pro pozemského pozorovatele se zdá, že se rovina kyvadla stáčí v opačném směru, než rotuje Země. Úhlová rychlost stáčení je dána $\omega = 360^\circ \sin \varphi$ za den. Na rovníku se rovina kyvu nemění, na pólu opíše 360° za den.

Odchylka padajících těles je dalším přímým důkazem rotace Země. Vlivem Coriolisova zrychlení, které urychluje těleso směrem na východ, je tak volně padající těleso odkloněno od svého původního směru. Velikost Coriolisova zrychlení je dána

$$a_{\text{Cor.}} = 2t|\vec{g} \times \vec{\omega}| = 2tg_{\oplus} \cos \varphi. \quad (210)$$

Integrací pohybové rovnice získáme (osa x míří na východ)

$$\ddot{x} = a_{\text{Cor.}} \implies x = \frac{1}{3} g \omega_{\oplus}^2 t^3 \cos \varphi = \frac{2}{3} \omega_{\oplus} \left(\frac{2h^3}{g} \right)^{1/2} \cos \varphi. \quad (211)$$

Dosadíme-li za $\omega_{\oplus} = 7,3 \cdot 10^{-5}$ rad/s, $g = 9,8$ m/s² a pro výšku zvolíme $h = 100$ m a zeměpisnou šířku 50 stupňů, pak nám odchylka padajícího tělesa vyjde rovna

$$x = 2,195 \cdot 10^{-5} h^{3/2} \cos \varphi = 1,4 \text{ cm!} \quad (212)$$

První experiment s dostatečnou výškou uskutečnil v roce 1791 Giovanni Battista Guglielmini na jedné z věží města Bologna. Tělesa pouštěl přibližně ze 78m výšky a pro 15 pokusů byla průměrná odchylka 16 mm směrem na východ (teoretická hodnota je 10,8 mm). Velmi přesná měření odchylek padajících těles byla provedena v roce 1831 v uhelném dole poblíž Freiburgu F. Reichem. Pro šachtu hlubokou 158,5 metrů vychází teoretická hodnota odchylky 29,4 mm, měřením zjistil hodnotu 28,0 mm (Tiersten & Soodak 2000).

4.8 Změny v rotaci Země

Změny v rotaci Země můžeme rozdělit do tří kategorií

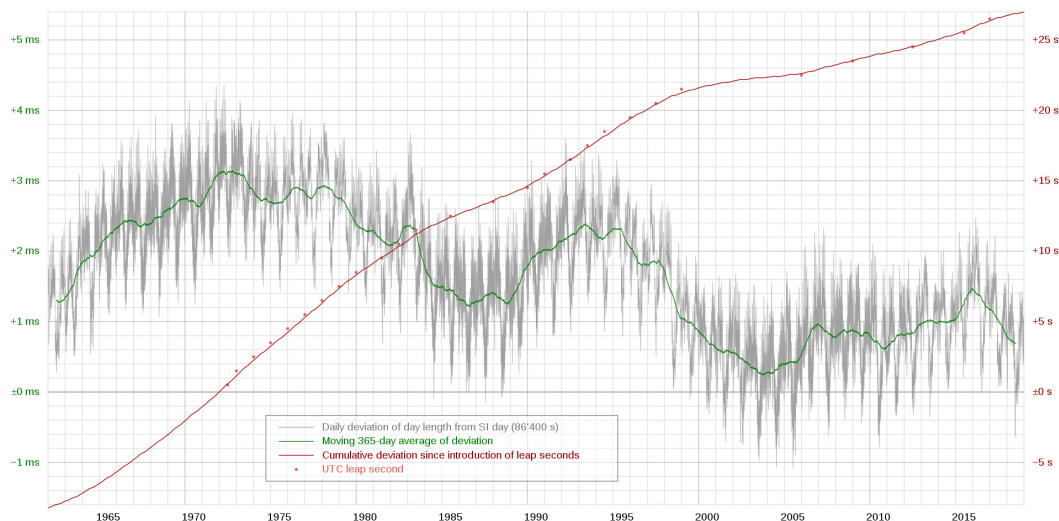
- 1) dlouhodobé (sekulární) změny v periodě rotace,
- 2) nepravidelné skokové změny v rychlosti rotace a
- 3) sezónní periodické změny.

Dlouhodobé změny rotace souvisejí se zpomalováním rotace Země. V důsledku slapového tření se přenáší moment hybnosti z její rotace do momentu hybnosti Měsíce, čímž se prodlužuje jeho oběžná doba a roste jeho vzdálenost od Země. Slapová vlna se šíří proti rotaci Země. Brždění činí přibližně mezi 0,001–0,002 s za století. To potvrzují pozorování okamžiků zatmění, dále paleontologické nálezy rychlosti růstu korálů, ze kterých lze usoudit, kolik bylo dní v roce. Např. pro střední devon (před 380 milióny lety) tak byla perioda rotace mezi 21,7–22,5 hodinami a rok trval 397 ± 7 dnů.

Nepravidelné skokové změny souvisejí s přeskupováním hmot v nitru Země a mohou být až v řádech několika tisíciny sekundy. Jako příklad zde můžeme uvést zemětřesení v Tóhoku o síle 9,0 stupně Richterovy škály a následně až 38 metrů vysoké tsunami, které zasáhly v pátek 11. března 2011 v 6:46 SEČ severovýchodní pobřeží Japonska. Epicentrum zemětřesení bylo v moři u ostrova Honšú, zhruba 130 kilometrů východně od města Sendai v hloubce 24 kilometrů. Severovýchodní Japonsko, se vlivem zemětřesení posunulo o 2,4 metru k Severní Americe. Části Japonska nejbližší k epicentru, v délce 400 km, poklesly o 0,6 metru, což významně umožnilo šíření tsunami do vnitrozemí. Pacifická deska se posunula na západ až o 20 metrů. Zemská osa se posunula o 10 cm, což způsobilo změnu délky dne i naklonění planety Země. Den se zkrátil o 1,8 mikrosekundy.

Periodické změny v rychlosti rotace Země jsou porovnávány s atomovým časem. Roční perioda změn má amplitudu přibližně 0,022 s, souvisí s přesunem vzdušných hmot, sněhové a ledové pokrývky a vegetací. Půlroční perioda má amplitudu

0,010 s, je důsledkem eliptické trajektorie Země kolem Slunce, v perihéliu je silnější gravitační působení Slunce na Zemi než v aféliu. Poslední periodická změna v rotaci Země souvisí s anomalistickým Měsícem a půlměsícem, Měsíc obíhá rovněž po eliptické trajektorii.



Obrázek 62: Zpomalování rotace Země v milisekundách [E29].

4.9 Moderní časové stupnice

Protože je rotace Země nerovnoměrná, v dnešní době již nemůže sloužit jako časový standard, jak tomu bylo až do 50. let 20. století. Čas se pak začal měřit na fyzikální základě pomocí kmitů křemíkového krystalu a v současné době nám jako nejpřesnější standard slouží atomové hodiny (definice z roku 1967), kde sekunda je definována dobou trvání 9 192 631 770 kmitů atomů cesia 133 při přechodu mezi dvěma hladinami hyperjemné struktury základního stavu.

Od roku 1958 byl zaveden rovnoměrně plynoucí atomový čas *TAI*, který byl právě na začátku roku 1958 roven času světovému a od té doby je základem pro měření času, nejde-li nám přímo o rotaci Země. Čas vázaný na rotaci Země *UT1* souvisí s denně narůstajícím úhlem o 2π ve vztažné soustavě rovnoměrně rotující s periodou tropického roku vůči hvězdám, Země je v počátku souřadnicového systému a Slunce v průměru stále v ose x . *UT1* je zvolen tak, aby Slunce kulminovalo nad nultým poledníkem během roku průměrně ve 12 hodin. Rozdíl časů *TAI* a *UT1* neustále narůstá, protože se zpomaluje rotace Země, rozdíl jsou desetiny sekundy za rok. V tabulce 6 je uveden rozdíl *TAI* a *UT1* pro data od roku 2006. Dalším z časů je světový koordinovaný čas *UTC*, který se od *TAI* liší o celistvý počet sekund. Pokud je *UT1-UTC* menší než 0,8 sekundy, pak se vkládá tzv. přestupná minuta, která trvá 61 sekund. Tato minuta se zavádí buď 1. ledna nebo 1. července. Tímto časem (*UTC*) se řídí hodiny po celém světě. Náš čas, čas střeoevropský (*SEČ*), souvisí s časem koordinovaným tak, že $SEČ = UTC + 1$, v případě letního času pak $SELČ = UTC + 2$.

Začátek	TAI-UTC	GPS-UTC	TT-UT1	UT1-UTC
2013-01-01	35	16	+66.91	+0.27
2013-07-01	35	16	+67.13	+0.05
2014-01-01	35	16	+67.28	-0.10
2014-07-01	35	16	+67.49	-0.31
2015-01-01	35	16	+67.64	-0.46
2015-07-01	36	17	+67.86	+0.32
2016-01-01	36	17	+68.10	+0.08
2016-07-01	36	17	+68.40	-0.22
2017-01-01	37	18	+68.59	+0.59
2017-07-01	37	18	+68.82	+0.36
2018-01-01	37	18	+68.96	+0.22
2018-07-01	37	15	+69.11	+0.07
2019-01-01	37	18	+69.22	-0.04
2019-07-01	37	18	+69.35	-0.17
2020-01-01	37	18	+69.36	-0.18

Tabulka 6: Tabulka s rozdíly časů TAI-UTC, GPS-UTC, TT-UT1 a UT1-UTC pro různá data [E30].

Hvězdný čas se vztahuje k jarnímu bodu, je určen jeho hodinovým úhlem. Běží rychleji než čas UTC, hvězdných dní je do roka o jeden více než dní slunečních. Přes hvězdný čas se z pozorování určuje hodnota UT1.

Historicky se lze setkat i s časem efemeridovým (*ET*), který byl definován nikoli rotací Země, ale jejím oběhem kolem Slunce, byl zjišťován dodatečně a ne moc přesně. Proto se místo něj zavedl čas terestrický (*TT*), který je definitoricky posunut od TAI o 32,184 sekundy. Na konci 20. století tak byl terestrický čas o minutu delší než UTC. Rozdíl TT-UTC narůstá asi o 1,5 sekundy za rok.

4.10 Důsledky rotace Země

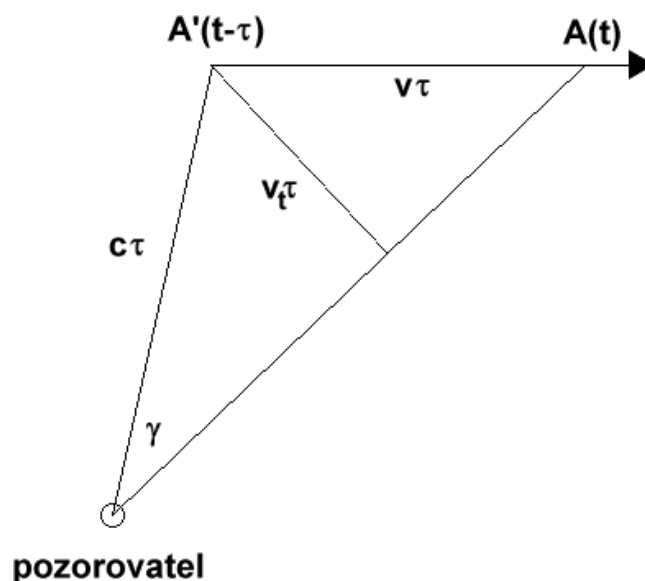
Důsledky, se kterými se můžeme setkat vlivem rotace Země jsou následující:

- 1) vychylování pohybujících se objektů Coriolisovou silou na severní polokouli doprava, na jižní doleva (v našich zeměpisných šířkách převládá západní proudění atmosféry), stáčení mořských proudů, asymetrie říčních koryt,
- 2) střídání dne a noci,
- 3) slapové jevy,
- 4) pohyb těles po obloze, jejich východy a západy,
- 5) tvar Země, v 1. přiblížení rotační elipsoid, odstředivá síla způsobuje zploštění,
- 6) denní paralaxa blízkých těles, pro Měsíc $\pi = 6\,378/384\,400 = 57'$.

4.11 Oběh Země kolem Slunce, aberace, paralaxa

Pozorovatel na povrchu Země vykonává složitý pohyb. Jeho pozorovací stanoviště je bodem v neinerciální vztažné soustavě. Uvážíme-li k tomu ještě konečnou rychlost šíření světla, pak nám vznikne celá řada efektů, které komplikují lokalizaci objektu v prostoru, například pozorovaný směr k objektu není obecně totožný se spojnicí obou bodů v prostoru.

V případě, že se těleso vůči nám v dráze posouvá, my je díky konečné rychlosti šíření světla vidíme se zpožděním, které je potřeba uvažovat. Oprava na šíření světla je dána rovnicí $\tau = 499,006 \Delta$ sekund a Δ je zde v astronomických jednotkách. Úhel mezi pozorovanou polohou a skutečnou polohou tělesa je dán $\gamma = \arcsin(v_t/c)$ (obrázek 63).



Obrázek 63: Oprava na šíření světla.

4.12 Aberace

S relativním pohybem Země kolem Slunce souvisí i ten fakt, že se při pozorování hvězd projevuje změna jejich souřadnic jak během roku (*roční aberace*), tak i během dne (*denní aberace*). Směr ke vzdáleným hvězdám vztahujeme ke Slunci (těžišti sluneční soustavy), což je dostatečně inerciální soustava, vůči které se pozorovatel pohybuje okamžitou rychlostí \vec{v} . Směr jeho pohybu je roven tzv. *apexu pohybu*.

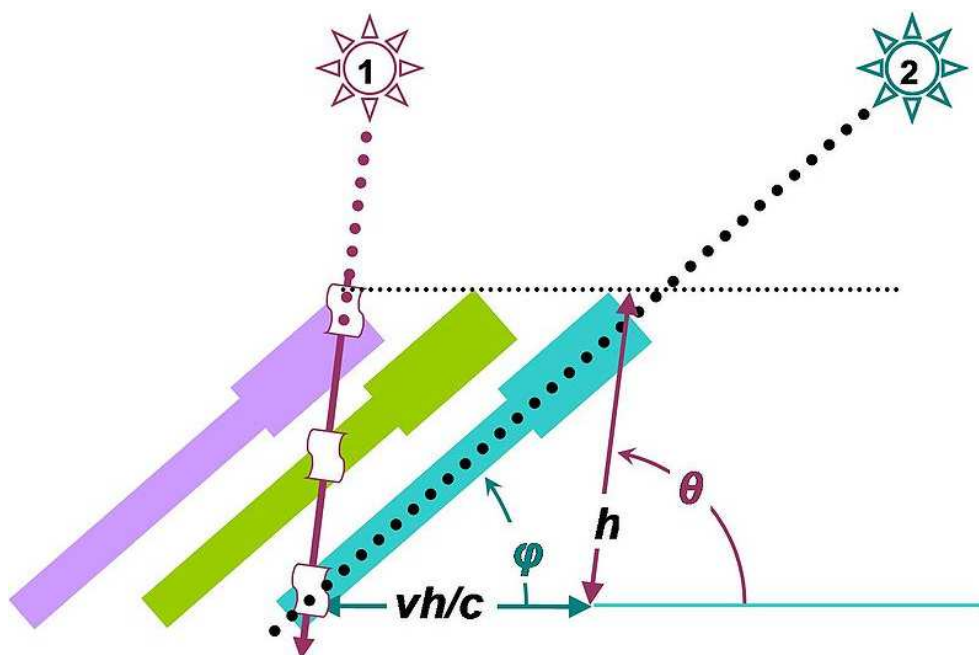
Při ročním oběhu Země kolem Slunce se apex posouvá po ekliptice. Abychom hvězdu viděli ve středu zorného pole dalekohledu, musíme jej sklonit o úhel $(\Theta - \varphi)$ směrem k apexu, viz obrázek 64. Aberace záleží pouze na rychlosti pozorovatele

a ekliptikální šířce pozorovaného objektu. Protože platí

$$\frac{\sin(\Theta - \varphi)}{v} \approx \frac{\sin \varphi}{c} \quad (213)$$

a navíc je poměr v/c malý, dostaneme

$$\Delta\Theta = \Theta - \varphi \approx \frac{v}{c} \sin \varphi. \quad (214)$$



Obrázek 64: Aberace světla. [E31]

Pro větší rychlosti pohybu je potřeba aberaci počítat již ze speciální teorie relativity jako

$$\Delta\Theta = \Theta - \varphi = \frac{v}{c} \sin \varphi + \frac{1}{4} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin 2\varphi. \quad (215)$$

Pro Zemi je poměr v/c roven přibližně $1/10\,000$, což dává aberační úhel cca $20,5''$. V okolí pólu ekliptiky budeme během roku pozorovat aberační kružnici o poloměru $a = 20,495\,52''$, budeme-li se blížit rovině ekliptiky, kružnice přejde do elipsy, jejíž malá poloosa bude mít úhlovou velikost $b = 20,495\,52'' \sin \beta$. V rovině ekliptiky pak budeme pozorovat pouze aberační přímku. Vektor \vec{v} se mění během roku, tím se mění i velikost a směr aberace, která leží na hlavní kružnici procházející tělesem a apexem.

Složky hvězdné aberace můžeme rozdělit na

- denní - souvisí s rotací Země ($v \sim 0,46$ km/s),
- roční - pohyb Země kolem Slunce ($v \sim 30$ km/s),
- pohyb Země vůči těžišti soustavy Země-Měsíc zanedbáváme ($v \sim 0,01$ km/s),
- sekulární - pohyb těžiště sluneční soustavy prostorem (v Galaxii).

V praxi sekulární aberaci nelze odlišit od opravy na šíření světla, tuto aberaci neurčujeme, je součástí tzv. střední polohy hvězd.

Korekce souřadnic pro denní aberaci můžeme vypočítat podle vztahů

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= 0,021\ 3^s \cos\varphi \cos t \sec\delta \\ \Delta\delta &= 0,320'' \sin\varphi \sin t \sin\delta,\end{aligned}\tag{216}$$

maximální posun v rektascenzi bude pro hodinový úhel $t = 0^\circ$ a $t = 180^\circ$, v deklinaci pak $t = \pm 90^\circ$ pro deklinaci objektu rovnu $\delta = 90^\circ$.

Pro roční aberaci je nutné znát okamžitý vektor rychlosti \vec{v} oproti těžišti sluneční soustavy. Ten lze vypočítat numerickou derivací geocentrických pravoúhlých souřadnic Slunce a heliocentrických pravoúhlých souřadnic planet (nejdůležitější je planeta Jupiter). Roční aberace byla odhalena již v roce 1725 J. Bradleyem a S. Molyneauxem, v roce 1728 pak Bradley podal její výklad.

4.13 Variace radiální rychlosti, heliocentrická korekce

Vzhledem k tomu, že Země obíhá kolem Slunce, téměř vždy se projeví při měření radiální rychlosti objektu kolísání frekvence (perrody)

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{v_{\text{rad}}}{c}.\tag{217}$$

V tomto vztahu je ν_0 střední (laboratorní) frekvence a $\Delta\nu$ je rozdíl mezi touto frekvencí a frekvencí naměřenou. Nemusí však jít vždy jen o elektromagnetické záření, může jít také o frekvenci pulsaru či oběhu dvojhvězdy pozorované prostřednictvím elektromagnetického záření. Radiální rychlost můžeme určit ze spektra jen tehdy, známe-li laboratorní vlnovou frekvenci ν_0 a změřený rozdíl $\Delta\nu$.

Při pozorování ze Země se během roku projeví tzv. variace radiální rychlosti, která souvisí jednak s rotací Země kolem osy (maximální hodnoty jsou na rovníku ráno a večer) a dále pak s jejím oběhem kolem Slunce. Maximální změna radiálních rychlostí je u objektů, jejichž ekliptikální šířka je rovna nule, pro objekty v pólech ekliptiky je pak změna nulová.

Pro správné určení hodnot radiálních rychlostí objektů je proto potřeba přepočítat jejich velikosti vůči Slunci na heliocentrickou radiální rychlost (nejlépe pak vůči těžišti sluneční soustavy). Důležité je rovněž čas, kdy byl objekt pozorován, převést z pozemského času na čas heliocentrický. Tomuto kroku se říká heliocentrická korekce, která může činit mezi ± 8 minutami a souvisí s dobou šíření světla. Nulová je pro objekty na pólech ekliptiky, maximální pro objekty, které jsou v opozici se Sluncem, minimální pro jejich konjunkci se Sluncem.

4.14 Paralaxa

Jedním z důkazů, že Země obíhá kolem Slunce, je zjištění paralaxy hvězd. To se však dlouho nedařilo. Naopak, denní paralaxa Měsíce byla známa již ve starověku. Z praktického hlediska lze topocentrické (místo pozorovatele) a geocentrické soustavy považovat za identické. Pro případ blízkých těles však tato místa nejsou

shodná a v tomto případě pak hovoříme o denní paralaxě, která má jednodenní periodu vzhledem k rotaci Země. Rozdíly v rektascenzi a deklinaci pozorovaného objektu vzhledem ke středu Země a pozorovateli jsou dány vztahy (Seidelmann 2006)

$$\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= -\pi \frac{\rho}{a} \cos \psi \sin H \sec \delta = -\pi c \sin (s - \alpha) \sec \delta \\ \delta' - \delta &= -\pi \frac{\rho}{a} (\sin \psi \cos \delta - \cos \psi \cos H \sin \delta) = \\ &= \pi [c \cos (s - \alpha) \sin \delta - s \cos \delta],\end{aligned}\quad (218)$$

kde π je horizontální rovníková paralaxa daná vztahem $\sin \pi = a/D$, ρ je vzdálenost středu Země a mořské hladiny ve směru pozorovatele, a je rovníkový poloměr Země, H je tzv. geocentrický hodinový úhel ($H = s - \alpha$) a ψ je geocentrická a φ geodetická zeměpisná šířka. Mezi geocentrickou a geodetickou šířkou platí vztahy

$$\begin{aligned}\rho \sin \psi &= (aS + h) \sin \varphi \implies s = \rho/a \sin \psi = (S + h/a) \sin \varphi \\ \rho \cos \psi &= (aC + h) \cos \varphi \implies c = \rho/a \cos \psi = (C + h/a) \cos \varphi,\end{aligned}\quad (219)$$

kde h je nadmořská výška v metrech v místě pozorování. Parametry S a C jsou dány vztahy (Seidelmann 2006)

$$S = \frac{(1 - i)^2}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - i)^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{a} \quad C = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - i)^2 \sin^2 \varphi}}.\quad (220)$$

Ze vztahů (201) a (192) získáme relaci

$$e^2 = 2i - i^2,\quad (221)$$

což po dosazení do rovnic (220) dává

$$S = \frac{1 - e^2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{a} \quad C = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.\quad (222)$$

Dosazením za $e^2 = 6,694\,385 \cdot 10^{-3}$ a rovníkového poloměru $a = 6\,378,136$ km (Cox 2000) do rovnic (219) a (222) dostaneme

$$\begin{aligned}s &= [0,993\,306(1 - 0,006\,694 \sin^2 \varphi)^{-1/2} + 0,1568 h \cdot 10^{-6}] \sin \varphi \\ c &= [(1 - 0,006\,694 \sin^2 \varphi)^{-1/2} + 0,1568 h \cdot 10^{-6}] \cos \varphi.\end{aligned}\quad (223)$$

Roční paralaxu uvažujeme jen u hvězd, které jsou nejbližší Slunci. Jde o úhel, pod nímž z dané hvězdy vidíme poloměr zemské trajektorie. Vzhledem k tomu, že tyto úhly jsou menší než $1''$, byla paralaxa změřena až v roce 1838 F. Bessel u hvězdy 61 Cygni. Proxima Centauri má paralaxu $0,7687 \pm 0,0003$ arcsec. Vyjádříme-li si pravoúhlé geocentrické rovníkové souřadnice Slunce v astronomických jednotkách jako

$$\begin{aligned}X &\doteq \cos L = \cos \delta_{\odot} \cos \alpha_{\odot} \\ Y &\doteq \sin L \cos \varepsilon = \cos \delta_{\odot} \sin \alpha_{\odot} \\ Z &\doteq \sin L \sin \varepsilon = \sin \delta_{\odot}\end{aligned}\quad (224)$$

$$\begin{aligned}\implies \\ \alpha' - \alpha &= \pi(Y \cos \alpha - X \sin \alpha) \sec \delta \\ \delta' - \delta &= \pi(Z \cos \delta - X \cos \alpha \sin \delta - Y \sin \alpha \sin \delta),\end{aligned}$$

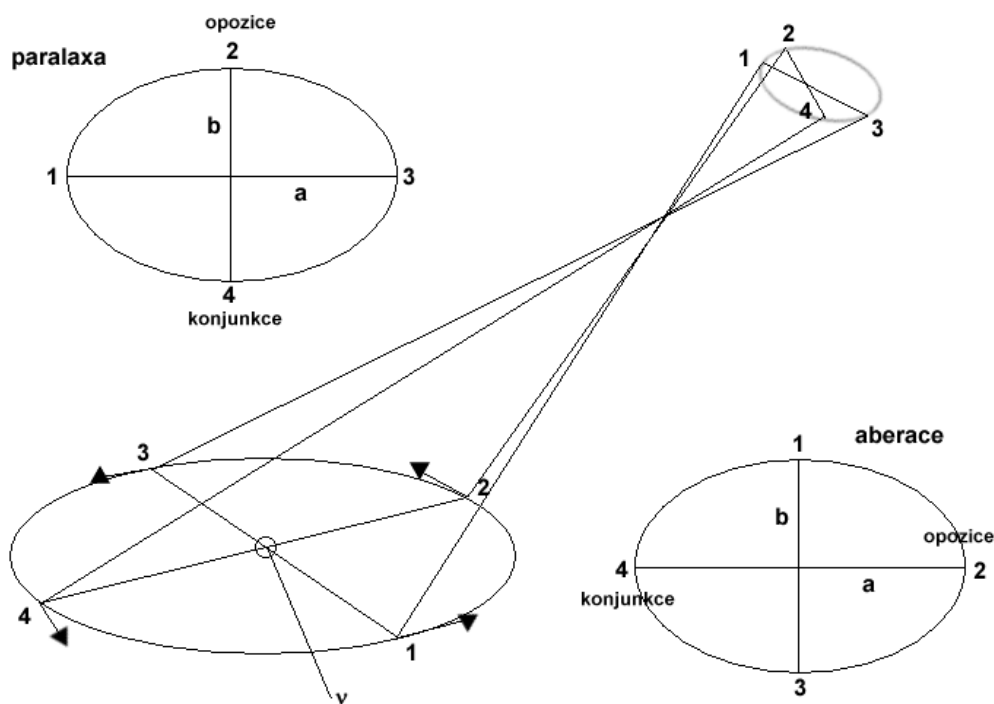
kde π je roční paralaxa.

4.15 Srovnání paralaxy a aberace

Trajektorie Země je sice elipsa, ale pro paralaxu ji můžeme aproximovat kružnicí o poloměru 1 astronomické jednotky. Pouze na pólech ekliptiky je paralaxa kružnicí o poloměru $a = \pi$, pro ekliptikální šířku β pak kružnice přechází na elipsu s malou poloosou $b = \pi \sin \beta$, až v rovině ekliptiky bude místo elipsy pouze úsečka. Maximální výchylky jsou pro rozdíly ekliptikálních délek objektu a Slunce

$$\begin{array}{ll} 1. \lambda_{\odot} - \lambda_{\star} = 90^{\circ} & 3. \lambda_{\odot} - \lambda_{\star} = 270^{\circ} \\ 2. \lambda_{\odot} - \lambda_{\star} = 180^{\circ} & 4. \lambda_{\odot} - \lambda_{\star} = 0^{\circ} \end{array}, \quad (225)$$

kde v bodě 2 je objekt v opozici a v bodě 4 v konjunkci se Sluncem (viz obr. 65). Na severní polokouli se pohybuje objekt po paralaktické elipse v matematicky záporném směru, tj. z bodu 1 přes body 2 a 3 až do bodu 4. Naproti tomu je aberace maximální, je-li maximální tečná rychlost, tj. vůči opozici a konjunkci je vše posunuto o $\pi/2$ (o čtvrt roku opožděno).



Obrázek 65: Porovnání paralaxy (nahore) a aberace v průběhu roku (dole).

V bodech 1 a 3 je maximální radiální rychlost Země vůči hvězdě a to $\Delta v_r = -v_{\oplus} \cos \beta$ v bodě 1 a $\Delta v_r = v_{\oplus} \cos \beta$ v bodě 3. Vůči radiální heliocentrické rychlosti hvězdy v_{r0} tak variace radiální rychlosti způsobí rozkmit, který je roven $2v_{\oplus} \cos \beta$.

Rovněž rozdíl časů, kdy přijde signál z pozorovaného objektu k Zemi a Slunci, se mění, pouze v bodech 1 a 3 a v pólech ekliptiky, Slunci a hvězdě je heliocentrická korekce rovna nule. Maximální hodnoty korekce jsou pak v bodech 2 a 4 a jejich velikosti jsou $\Delta t = \tau \cos \beta$ v bodě 2 a $\Delta t = -\tau \cos \beta$ pro bod 4. Velikost

heliocentrické korekce může být maximálně rovna

$$\Delta t = \frac{r \cos \beta}{c} = \tau \cos \beta, \quad (226)$$

kde $\tau = 499$ s je oprava na šíření světla.

Existence paralaxy je jedním z hlavních důkazů pro platnost heliocentrického systému. Pokusy o její změření selhávaly ať již z důvodu neexistence vhodné metody či z důvodů nevhodných přístrojů. Tycho Brahe nezměřil paralaxu, což jej vedlo k podpoře geocentrické soustavy, stejně tak neuspěl ani Koperník. Problémem bylo, že jejich měření byla absolutní. Galileo Galilei i Christian Huyghens navrhli, že je lepší použít měření pozic relativních vůči hvězdám v pozadí, které mohou posloužit jako opěrné body. Tím se zvýší přesnost astrometrie a navíc se bližší hvězdy projeví změnou své polohy vůči vzdálenějším hvězdám na pozadí. Ale ani to nepřineslo úspěch, i když se o heliocentrickém modelu již nepochybovalo. Příčinou byla velká vzdálenost hvězd, u kterých je paralaxa menší než $\pi \ll 1''$. V roce 1838 Friedrich Bessel (1784–1846) určil paralaxu hvězdy 61 Cygni na $\pi = 0,314''$, dnes udávaná hodnota je $\pi = 0,286''$. Souběžně určil paralaxu Vegy Friedrich Georg Wilhelm von Struve (1793–1864) a Thomas James Henderson (1798–1844) pak vzdálenost Tolimanu (alfa Centauri).

Měření vzdálenějších hvězd je obtížnější, paralaktické úhly jsou velmi malé, spolehlivost byla do 20–30 pc. V této vzdálenosti se nachází ale málo důležitých a opěrných typů hvězd (ty jsou většinou hodně jasné a ve velkých vzdálenostech, v prostoru málo zastoupeny), což vede ke složitějšímu způsobu navazování vzdáleností. Velkým přínosem byla astrometrická družice HIPPARCOS (**H**igh **P**recision **PAR**allax **C**OLlecting **S**atellite), která vystartovala v roce 1989 a po 4 letech změnila polohy a vlastní pohyby více než 100 tisíc hvězd s přesností 0,002''.

Všechny výše vzpomínané efekty (aberrace, paralaxa, variace radiální rychlosti, heliocentrická korekce i variace v počtu meteorů) nám dávají důkazy o pohybu Země kolem těžiště sluneční soustavy.

4.16 Důsledky pohybu Země kolem Slunce

Země vzhledem ke hvězdám oběhne kolem Slunce za *rok siderický*, který je dlouhý 365,256 36 dne. *Rok tropický* je dán dvěma po sobě následujícími průchody Slunce jarním bodem, tj. dobou od jarní do jarní rovnodennosti, trvá o něco méně než rok siderický a to 365,242 19 dne. Tento rozdíl souvisí s tím, že se jarní bod pomalu posouvá po ekliptice proti pohybu Slunce. Do původní polohy se opětovně dostane až za necelých 26 000 let a tato perioda se nazývá *rokem platónským*. Posun jarního bodu souvisí s precesí zemské osy. Doba mezi dvěma průchody Země perihéliem se nazývá *rok anomalistický*, který trvá 365,259 64 dne. Přímka apsid se stáčí ve směru pohybu Slunce po ekliptice, proto je anomalistický rok delší a do stejné pozice vůči hvězdám se přímka apsid vrátí po 110 000 rocích. Velice důležitým rokem je rok drakonický, který je definován dobou mezi dvěma průchody Slunce výstupným uzlem měsíční dráhy. Uzlová přímka Měsíce se stáčí proti pohybu Slunce po ekliptice, proto je délka drakonického roku rovna 346,620 06 dnům, do stejného bodu v prostoru se pak dostane za 19,6 let.

Oběh Země kolem Slunce se rovněž projeví ve střídání ročních období. Ani sklon rotační osy Země vůči rovině ekliptiky není konstantní a mění se v čase dle

$$\varepsilon(t) = 23^{\circ}26'21,4'' - 0,4681''(t - 2000), \quad (227)$$

kde t je letopočet. Sluneční paprsky dopadají během roku na obě polokoule pod měnícím se úhlem, který souvisí se změnou deklinace Slunce na hvězdné obloze. Tato změna má pak za příčinu různé teploty, které souvisejí s tzv. středními klimatickými pásy. Ty vznikají tak, že jsou v rozdílných zeměpisných šířkách

- a) různé délky dne a noci,
- b) rozdílné výšky Slunce nad obzorem během dne,
- c) různě zmírňovány teplotní setrvačností a
- d) proměnlivou vzdáleností Země a Slunce během roku.

S tím souvisí množství energie, které od Slunce dopadá na zemský povrchu na jednotku plochy. Toto množství si můžeme vyjádřit jako

$$W = \frac{K}{r^2} \cos z = \frac{K}{r^2} \sin h, \quad (228)$$

kde K je sluneční konstanta, která je pro vzdálenost 1 astronomické jednotky rovna 1360 W/m^2 , r je vzdálenost od Slunce v astronomických jednotkách, z je zenitová vzdálenost a h pak výška Slunce nad obzorem. Insolace (oslunění) je pak energie, která dopadá za jeden den na 1 m^2 plochy na horní hranici zemské atmosféry a je dána vztahem

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int_{t=-t_0}^{t=t_0} \frac{K}{r^2} \sin h \, dt \\ \sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \\ \cos t_0 &= -\tan \varphi \tan \delta \end{aligned} \quad (229)$$

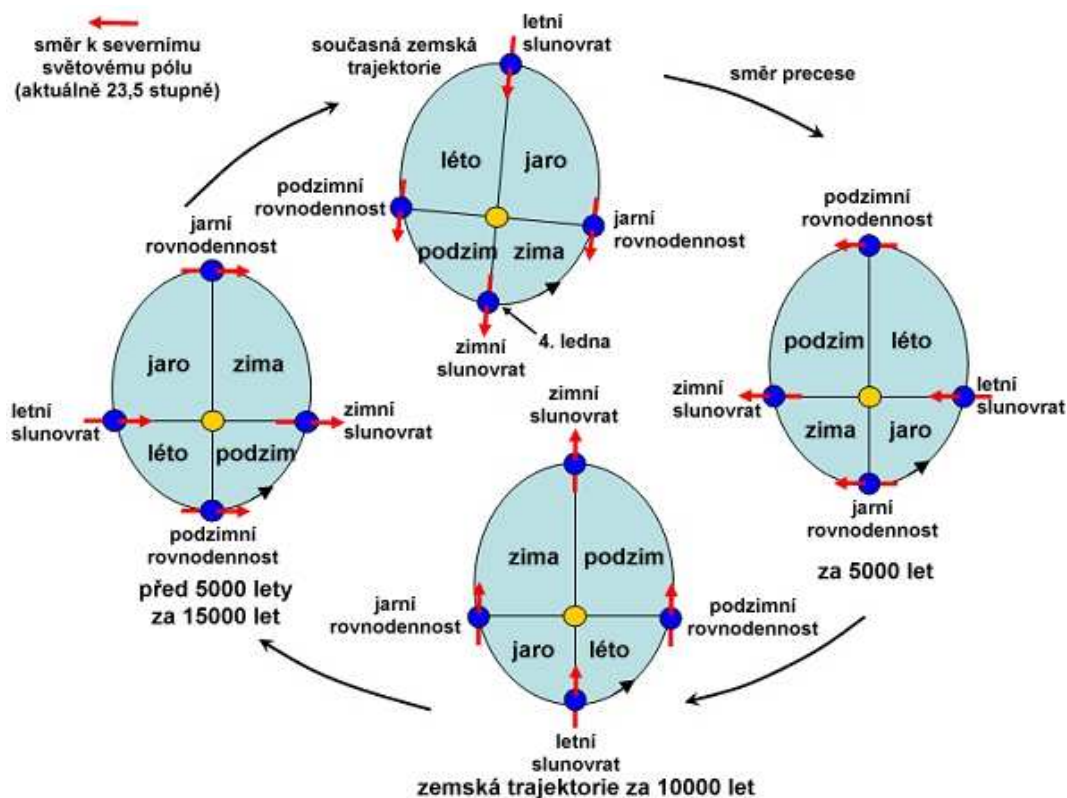
a po integraci a dosazení dostaneme

$$\varepsilon = \frac{K}{r^2} (2t_0 \sin \varphi \sin \delta + 2 \cos \varphi \cos \delta \sin t_0). \quad (230)$$

Mezní hodnota t_0 plyne z $\sin h = 0$. Jestliže je $\tan \varphi \tan \delta > 1$, Slunce nezapadá a $t_0 = \pi$. Naopak pro $\tan \varphi \tan \delta < 1$ Slunce nevychází a $t_0 = 0$.

φ	% rovníku	φ	% rovníku
0	100,0	50	68,4
10	98,6	60	56,9
20	94,5	70	47,4
30	87,9	80	42,9
40	79,0	90	41,5

Tabulka 7: Celková insolace v poměru k insolaci na rovníku v závislosti na zeměpisné šířce.



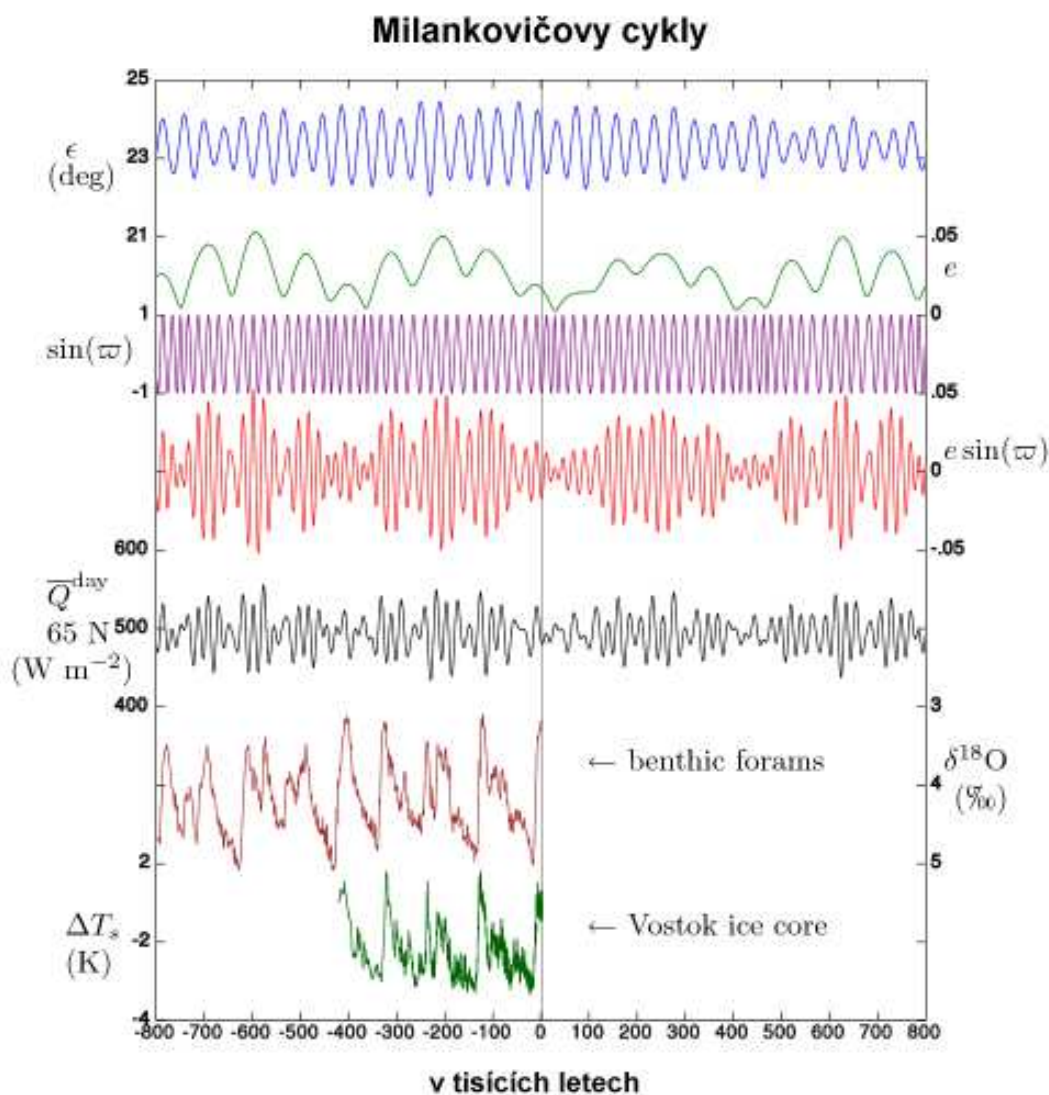
Obrázek 66: Vliv precesního pohybu (změna severního světového pólu) na změnu ročních období (upraveno dle [E32]).

Astronomická roční období jsou vzhledem k různé rychlosti Země v dráze různé dlouhá. Nejdelší je astronomické léto (pro severní polokouli), nejkratší pak astronomická zima. Letní půlrok je o 7,5 dne delší než zimní. Klimaticky je tak podnebí na severní polokouli mírnější, vlivem precese se však za 13 000 let polokoule prohodí a bude tomu naopak. Celkové roční úhrny insolace jsou uvedeny v tabulce 7. Rozdíly nejsou až tak extrémní, je možné osídlit i vyšší zeměpisné šířky zejména v období krátkého léta.

Parametry zemské trajektorie nejsou konstantní a mění se v čase. Sklon zemské osy kolísá mezi $\varepsilon = 22^{\circ}04'$ a $\varepsilon = 24^{\circ}34'$ s periodou 41 000 let. Při rostoucím sklonu rotační osy bude i změna deklinace Slunce větší, takže léta pak budou teplejší (a zimy chladnější). Pro zjištění sklonu ekliptiky můžeme použít vztahu (*The Astronomical Almanac for the Year 1990*)

$$\varepsilon = 23^{\circ}26'21,448'' - 46,815\,0''T - 0,000\,59''T^2 + 0,001\,813''T^3, \quad (231)$$

kde $T = (JD - 2\,451\,545,0)/36\,525$. Změna délky perihélia Π se děje s periodou 21 000 let a v této periodě se Země dostává nejbližší Slunci v různých částech roku. Je-li $\Pi = 0^{\circ}$, nastává jarní rovnodennost v přísluní, $\Pi = 90^{\circ}$ je Země v přísluní v době zimního slunovratu (kratší a teplejší zima, delší a chladnější léto), $\Pi = 180^{\circ}$ je podzimní rovnodennost v přísluní a $\Pi = 270^{\circ}$ je Země v přísluní v době letního slunovratu (kratší a teplejší léto a delší a chladnější zima). Změny ve výstřednosti dráhy Země vycházejí dle simulací *Laskara a kol. (2011)* s periodou



Obrázek 67: Minulé a budoucí Milankovičovy cykly. Nahoře je znázorněna změna sklonu zemské osy, pod ní pak změna excentricity zemské trajektorie, sinus délky perihélia a násobek excentricity a sinu délky perihélia. Černou barvou je pak závislost střední hodnota insolace pro zeměpisnou šířku 65 stupňů pro horní část atmosféry. Poslední dvě křivky dole znázorňují změny zastoupení izotopu kyslíku ^{18}O v ukládaných sedimentech a změny teploty na růstu antarktického ledu ze stanice Vostok [E33].

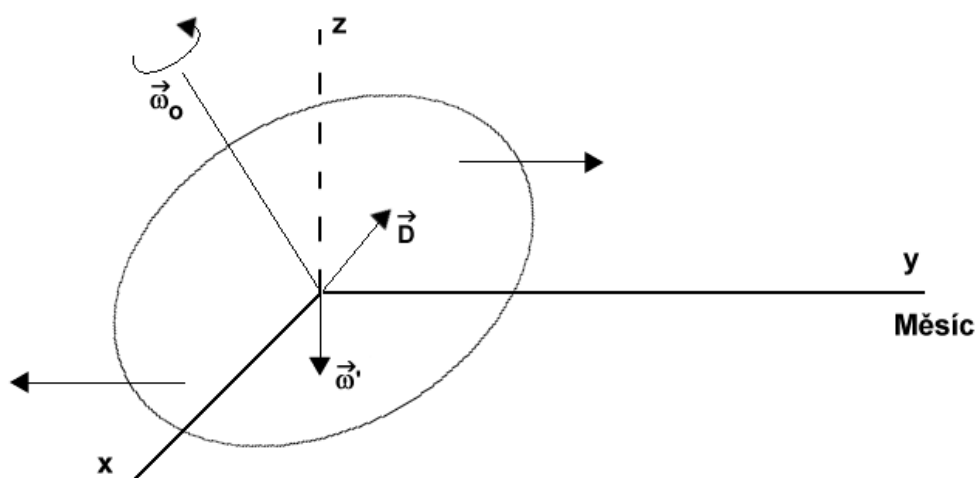
cca 100 000 let, excentricita se pak mění v rozmezí 0,000 055–0,0679. V současné době je rovna 0,016 7. Při vyšší excentricitě trajektorie je Země větší část oběhu ve větší vzdálenosti, což má za následek doby ledové. Délka velké poloosy se mění zcela nepatrně.

Všechny tyto periody se snaží popsat Milankovičova teorie (Milutin Milanković (1879–1958)), která předpokládá, že změny klimatu Země souvisejí s periodami změn výstřednosti zemské trajektorie, délkou perihélia, sklonem zemské osy a její precesí (viz obr. 67).

4.17 Precese a nutace

Precesi objevil kolem roku 130 př. n. l. Hipparchos, který porovnával svá pozorování s pozorováním řeckých astronomů. Zjistil přírůstek ekliptikálních délek, které vysvětlil posunem jarního bodu proti směru pohybu Slunce. Ptolemaios precesi změřil na $36''$ za rok. Arabští astronomové mezi 10. a 11. stoletím precesi určili mezi $48'' - 54''$ za rok. V roce 1260 perský hvězdář Nassir Edin pak určil velice přesnou hodnotu precese $51''$ za rok, která je velice blízká současné hodnotě $50,3''$ /rok. Od dob Hipparcha se jarní bod posunul zhruba o 30 stupňů.

Fyzikální vysvětlení precese podal až Isaac Newton, který popsal rotaci Země jako chování roztočeného setrvačnicku s rotační osou, na kterou působí vnější síly a pokud mají vůči tělesu určitý moment, pak vyvolávají precesi (viz obr. 68). Moment sil \vec{D} působených Měsícem a Sluncem na zploštělou Zemi chce osu Země



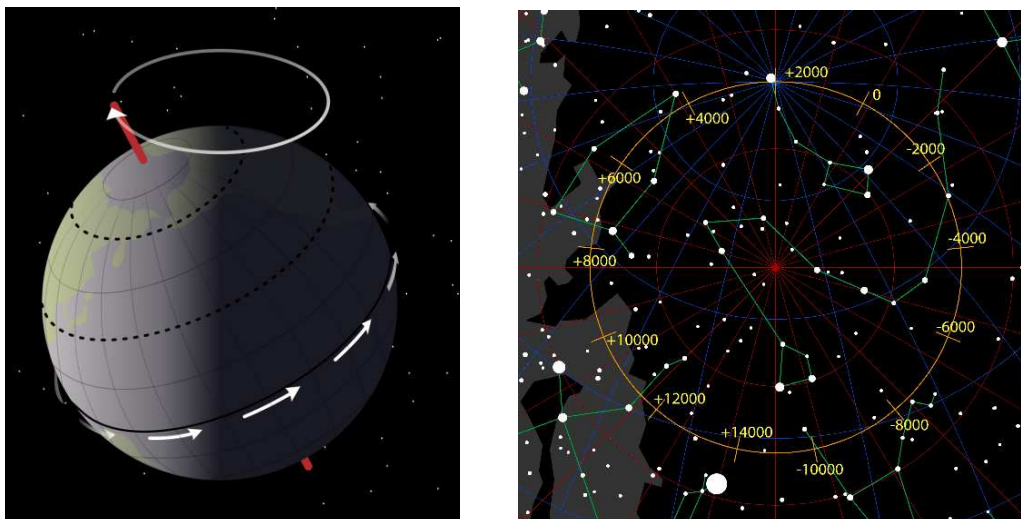
Obrázek 68: Výsledný moment sil \vec{D} , který vzniká působením dvojice sil Měsíce a Slunce za zploštělou Zemi.

narovnat vůči rovině ekliptiky. Výsledkem tak je pohyb zemské osy okolo pólu ekliptiky. Velikost momentu sil je dán vektorovým součinem

$$\vec{D} = C(\vec{\omega}' \times \vec{\omega}_0), \quad (232)$$

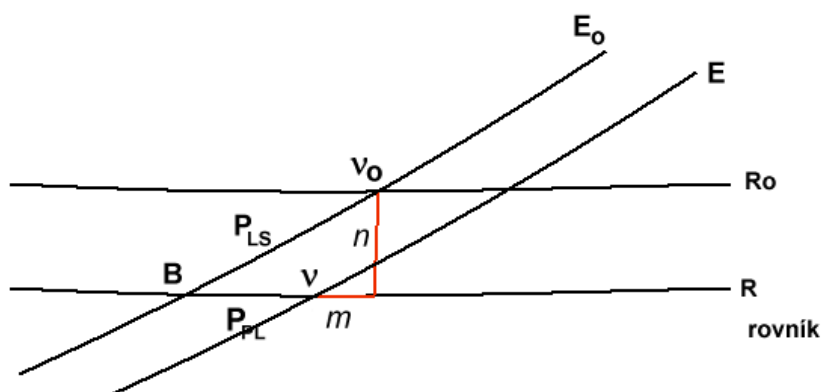
kde vektor $\vec{\omega}'$ míří do jižního pólu ekliptiky. Pohyb rotační osy země se děje v opačném smyslu než rotace a oběh Země kolem Slunce. Díky tomu je tropický rok kratší než rok siderický.

Celý kuželovitý pohyb vykoná osa Země za 1 platónský rok, který trvá 25 771 let. Osa však ve skutečnosti vykonává daleko složitější pohyb. V roce 1747 objevil James Bradley (1693–1762) periodickou složku tzv. *nutaci*, kterou v roce 1749 vysvětlil Jean le Rond d'Alambert (1717–1783) a jeho výklad pak zjednodušil Leonhard Euler (1707–1783). Nutace vzniká působením časově proměnného momentu síly, který odpovídá periodě 18,6 let a souvisí s precesí výstupného uzlu měsíční dráhy. Pozorovaná amplituda činí asi $17''$.



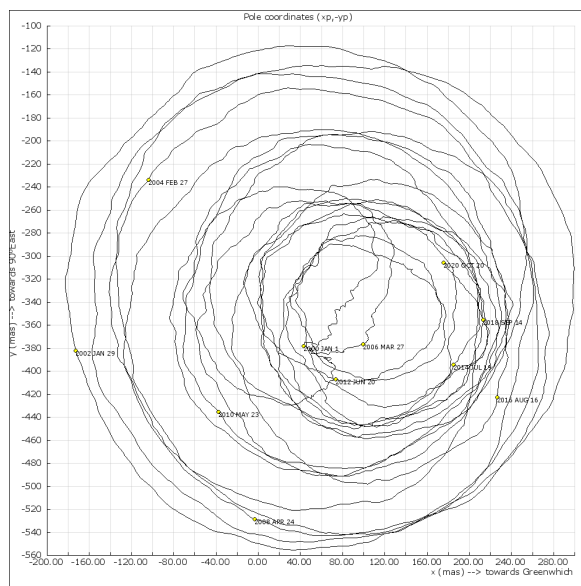
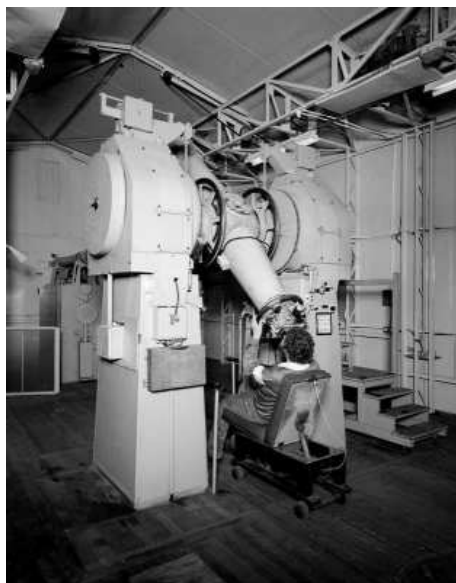
Obrázek 69: Vlevo je znázorněn precesní pohyb rotační osy Země [E34] a vpravo pak změna severního světového pólu pro různá období [E35].

Celková precese se skládá z precesních pohybů, které jsou způsobeny všemi tělesy sluneční soustavy, ale hlavní podíl je dán Měsícem a Sluncem. Jejich společným působením vzniká lunisolární precese, která je $50,41''/\text{rok}$ (60 % připadá na gravitační vliv Měsíce a 40 % na vliv Slunce). Vliv působení planet pak zahrnujeme do pojmu planetární precese Země. Počítá se přímo změna dráhy Země, čímž se mění poloha pólu ekliptiky, tj. sklon o $-0,46''/\text{rok}$ (v roce 2000 byl sklon zemské osy $\varepsilon = 23^\circ 26' 21,448''$) a posouvají jarní bod o $-0,12''/\text{rok}$ proti lunisolární precesi. Celková (generální) precese je pak složena z obou složek a její hodnota pro rok 2020 je $50,2926''/\text{rok}$.



Obrázek 70: Znázornění změn souřadnic vlivem precesního pohybu.

Důsledkem precese a nutace je změna polohy světového pólu, s tím souvisí změna oblohy viditelné z daného místa. Hvězda Polárka tak bude nejbližší severního světového pólu v roce 2103 a bude vzdálena od něj $27'$, v roce 12000 bude



Obrázek 71: Vlevo je pasážíkový dalekohled na observatoři v Greenwichi umístěný na nultém poledníku [E36] a vpravo je pak zachycen pohyb severního světového pólu od roku 2005 do roku 2012 [E37].

„Polárkou“ Vega (viz obr. 69) a v roce 3000 př. n. l. byla nejbližší pólu hvězda Thuban (α Dra). Za několik tisíc let tak bude z Evropy viditelný Jižní kříž, ale nebude viditelný Sirius a část Orionu. Protože se poloha jarního a podzimního bodu od dob Hipparchových posunula o cca 30 stupňů, souvisí s tím nesoulad mezi polohou Slunce v souhvězdích a znameních, které se o jedno znamení posunulo (ve znamení Berana je Slunce v Rybách). Vlivem precese se také mění ekliptikální souřadnice, můžeme říci, že se zhruba mění jen ekliptikální délka, která narůstá cca o $50,3''$ /rok. Neplatí to úplně přesně, neboť se díky planetární precisi také mění sklon ekliptiky a poloha světového pólu. Větší změny jsou však u rovníkových souřadnic druhého druhu, které jsou důležité pro nalezení objektu a jsou vztaženy k určitému času (ekvinokciu). Přibližné vztahy pro změnu v rektascenzi a deklinaci můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= [m + n \tan \delta \sin \alpha] \Delta T \\ \Delta\delta &= [n \cos \alpha] \Delta T,\end{aligned}\quad (233)$$

kde konstanta roční změny v rektascenzi je pro rok 2012 $m = 46,1250''$ a roční změna v deklinaci pak $n = 20,0407''$. Lunisolární precese způsobí posun jarního bodu ν_0 do bodu B (viz obr. 70), čemuž odpovídá pouze jeho posun po ekliptice. Planetární precese pak má za následek další posun jarního bodu z místa B do nové pozice ν (posun pouze po rovníku), což lze přepsat do rovnic

$$\begin{aligned}n &= p_{LS} \sin \varepsilon \doteq 20,0''/\text{rok} \\ m &= p_{LS} \cos \varepsilon - p_{PL} \doteq 46,1''/\text{rok}.\end{aligned}\quad (234)$$

Měření se ovšem vztahují k zidealizovanému střednímu pólu, jehož poloha je však proměnná a osciluje kolem středního pólu v důsledku nutace (nutační elipsa). S tím souvisí změna polohy jarního bodu i změna sklonu ekliptiky k rovníku a vše

závisí na úhlové vzdálenosti výstupného uzlu Ω měsíční dráhy od jarního bodu. Změny ekliptikální délky a sklonu ekliptiky způsobené nutací můžeme určit ze vztahů

$$\begin{aligned}d_{\lambda} &= -17,24'' \sin \Omega \\d_{\epsilon} &= 9,21'' \cos \Omega.\end{aligned}\tag{235}$$

Kromě precese a nutace vykonává zemská osa i jemnější pohyby, které lze zjistit měřením tranzitů hvězd místním poledníkem např. pomocí pasáží (meridiánový dalekohled), respektive dnes pomocí interferometrických měření kosmologických rádiových zdrojů pomocí VLBI. Pohyb osy se jeví jako kvaziperiodické obíhání s amplitudou asi $0,3''$, což odpovídá 15 m v průmětu na zemský povrch (viz obr. 71). Na datech je patrná přibližná Chandlerova perioda 430 dní. Příčina těchto pohybů není přesně známá, pravděpodobně se na nich podílejí endogenní procesy (přesuny hmot uvnitř Země), interakce Země s atmosférou, časově proměnné slapy Měsíce apod.

4.18 Sluneční čas, sluneční hodiny

Život člověka je synchronizován se střídáním dne a noci, které souvisí s denním pohybem Slunce po obloze. Slunce se pohybuje po ekliptice (mezi hvězdami) nerovnoměrně, právě Slunce neurčuje rovnoměrný tok času. Přístroj, kterým lze měřit pravý sluneční čas se nazývá *sluneční hodiny*. Sluneční hodiny mohou mít tři možné způsoby konstrukce a to

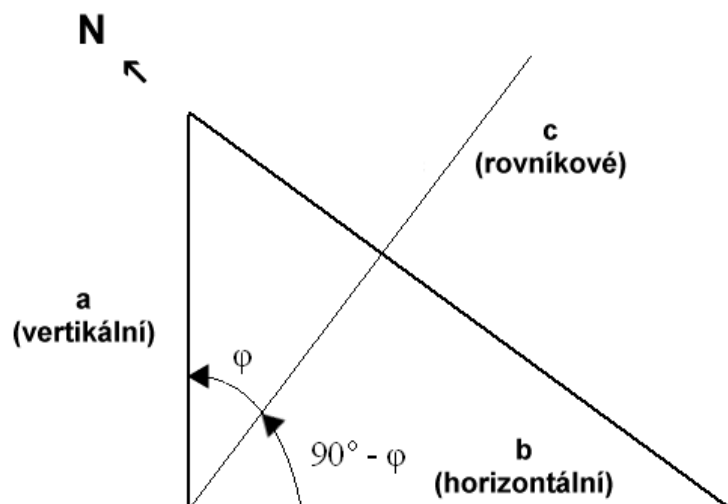
- a) vertikální
- b) horizontální
- c) rovníkové.

Ke konstrukci je potřeba mít stínítko a stínovou tyč, která vždy míří k světovému pólu. Na obrázcích 72 a 73 jsou zobrazeny různé konstrukce slunečních hodin.



Obrázek 72: Svislé (vertikální) sluneční hodiny ze zámku ve Valašském Meziříčí (vlevo), vodorovné (horizontální) před Hvězdárnou a planetáriem Brno na Kraví hoře a rovníkové z Hvězdárny a planetária v Hradci Králové [E38].

Sluneční hodiny se většinou umísťují na jižní stěny budov, číselníky ukazující místní pravý sluneční čas jsou pak vypočítány pro konkrétní místo a konkrétní konstrukci. Rovníkové sluneční hodiny mají číselník rovnoměrný.

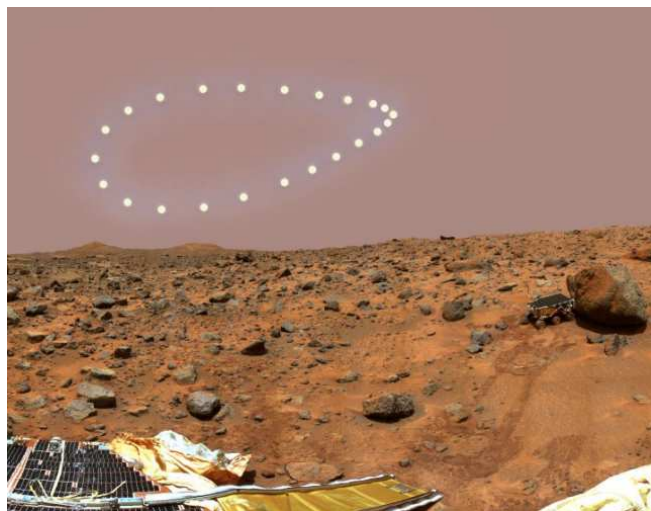
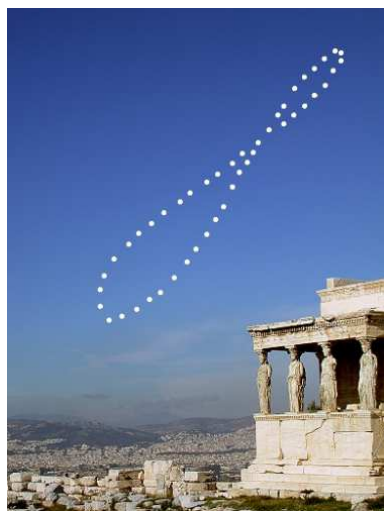


Obrázek 73: Znázornění konstrukce různých typů slunečních hodin.

Pravý sluneční čas je dán dobou mezi dvěma po sobě následujícími dolními kulminacemi Slunce

$$T_{PS} = t_{\odot} \pm 12h. \quad (236)$$

Tento čas se vztahuje ke konkrétnímu místu a liší se od středního místního slunečního času. Budeme-li zjišťovat rozdíl pravého a středního místního slunečního času např. v pravé poledne, získáme tzv. *analemu Slunce* (viz obr. 74). Můžeme si ji také představit jako myšlenou dráhu Slunce po obloze vždy pro stejný místní střední sluneční čas.



Obrázek 74: Analema Slunce v Aténách v roce 2003 [E39] a analema Slunce pozorovaná z Marsu [E40].

4.19 Časová rovnice

Rozdíl mezi místním pravým a středním slunečním časem nám udává tzv. *časová rovnice*

$$E = T_{\text{PS}} - T_{\text{SS}} = t_{\odot} \pm 12\text{h} - T_{\text{SS}} = \Theta - \alpha_{\odot} \pm 12\text{h} - T_{\text{SS}}, \quad (237)$$

kde rozdíl $(\Theta - \alpha_{\odot})$ je nezávislý na místě pozorování a lze dohledat např. ve hvězdářské ročence. Pro kladné hodnoty E pravé Slunce kulminuje dříve, při záporném E pak pravé Slunce kulminuje později. V roce 2021 nastává dřívější kulminace 14. května o 3,68 minuty a 3. listopadu pak o 16,42 minuty, pozdější kulminace 11. února o 14,42 minuty a 26. července o 6,5 minuty. Maximální rozdíl tak může činit až 30 minut. Právě o hodnotu E se liší čas na slunečních hodinách od času na našich hodinkách (neuvažujeme-li letní čas).

Zatímco rozdíl $(\Theta - T_{\text{SS}})$ narůstá rovnoměrně za den o 3 minuty a 56 sekund (rozdíl délky hvězdného a slunečního dne), rektascenze Slunce α_{\odot} roste nepravidelně. Za tento rozdíl mohou dvě příčiny. Země obíhá kolem Slunce po eliptické dráze, takže se pravá anomálie mění nerovnoměrně a i kdyby Země obíhala kolem Slunce po kružnici, díky nenulovému sklonu roviny ekliptiky k rovině zemského rovníku se mění rektascenze Slunce také nerovnoměrně. Pravý sluneční čas si tak můžeme v prvním přiblížení představit jako dvě harmonické funkce.

Nejdříve se podíváme, jak se projevuje oběh Země kolem Slunce po eliptické dráze. V prvním přiblížení budeme uvažovat, že v ohnisku je Slunce, i když ve skutečnosti to je těžiště sluneční soustavy. V dalším pak střed Slunce a těžiště sluneční soustavy ztotožníme. Země prochází jarním bodem právě tehdy, když Slunce prochází podzimním bodem, tj. v okamžiku podzimní rovnodennosti. Ekliptikální délka Země je tak posunuta o 180 stupňů oproti Slunci. Délka perihélia je rovna $\lambda_{\oplus} = 103,14^{\circ}$. Siderická doba oběhu Země je 365,256 4 dne a střední úhlový pohyb je $\lambda_{\oplus} = 360^{\circ}/P = 0,985 6^{\circ}$ za den. Známe-li střední úhlový pohyb Země, pak si můžeme vypočítat střední anomálii M v čase T po průchodu perihéliem v čase T_0 z rovnice

$$M = \frac{360^{\circ}}{P}(T - T_0). \quad (238)$$

Průchod Země perihéliem nastal v roce 2012 až 5. ledna v 1 hodinu světového času. Střední délka perihélia je $103,14^{\circ}$. Pro ekliptikální délku Země pak můžeme psát

$$\lambda_{\oplus} = \lambda_{\oplus\text{per}} + v = 103,14^{\circ} + v \quad (239)$$

Je-li D počet dnů, které uplynuly od 1. ledna 0 hodin UT, můžeme střední anomálii vypočítat jako

$$M = \frac{360^{\circ}}{365,25} D - 4,93^{\circ}. \quad (240)$$

Chceme-li vypočítat $\lambda_{\oplus}(D)$, musíme znát velikost pravé anomálie v . Aproximací řešení Keplerovy rovnice

$$f(E) = E - M - e \sin E = 0 \quad (241)$$

Newtonovou metodou, kdy

$$E_{n+1} = E_n - \frac{f(E_n)}{f'(E_n)} \quad (242)$$

dostáváme s $E_0 = M$ už v první aproximaci postačující výsledek

$$E = M + \frac{e \sin M}{(1 - e \cos M)} \doteq M + e \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin(2M). \quad (243)$$

Třetí člen je úměrný e^2 , takže pro excentricitu $e = 0,0167$ může vycházet jeho maximální hodnota $\frac{1}{2}e^2 = 0,000139$ rad $\doteq 29''$, což lze zanedbat. Můžeme proto vycházet z řešení Keplerovy rovnice (243) a pak získat pravou anomálii z rovnice (149)

$$v = 2 \arctan \left[\left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \tan \left(\frac{M + e \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin(2M)}{2} \right) \right]. \quad (244)$$

Funkce rozdílu pravé a střední anomálie ($v - M$) je velmi dobře podobná sinusovce, kterou můžeme aproximovat vztahem

$$(v - M) = 1,91368^\circ \sin M + 0,01997^\circ \sin 2M. \quad (245)$$

Skutečné Slunce se oproti prvnímu střednímu Slunci může rozejít až o $1,91^\circ$, což odpovídá 1,95 středním dnům na obloze a je to rozdíl v čase $\pm 7,64$ minuty. Maximální rozdíl je v dubnu a říjnu pro $M = \pm 90^\circ$. Ekliptikální délku Slunce můžeme tedy vypočítat ze vztahu

$$\lambda_\odot = 180^\circ + \lambda_\oplus = 283,14^\circ + v = 283,14^\circ + M + 1,91^\circ \sin M + 0,02^\circ \sin 2M, \quad (246)$$

kde střední anomálie M se rovná

$$M = 0,9856^\circ D - 4,93^\circ \quad (247)$$

a D je počet dnů od začátku roku.

Nyní se podíváme, nakolik ovlivňuje časovou rovnici nenulový sklon roviny ekliptiky a zemského rovníku. V rovníkových souřadnicích nás zajímá rektascenze Slunce α_\odot a ne jeho ekliptikální délka λ_\odot . Proto použijeme transformací mezi ekliptikální a rovníkovou soustavou druhého druhu

$$\begin{aligned} \cos \delta_\odot \sin \alpha_\odot &= \cos \varepsilon \sin \lambda_\odot \\ \cos \delta_\odot \cos \alpha_\odot &= \cos \lambda_\odot \end{aligned} \quad (248)$$

a jejich podělením dostaneme vztah

$$\tan \alpha_\odot = \cos \varepsilon \tan \lambda_\odot. \quad (249)$$

Rozdíl ekliptikální délky a rektascenze Slunce si můžeme vyjádřit jako

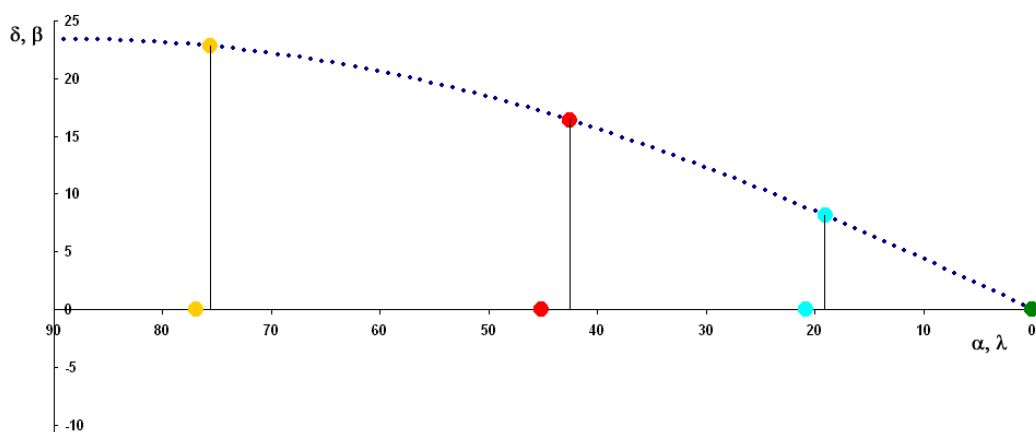
$$(\lambda_\odot - \alpha_\odot) \doteq 2,46563^\circ \sin 2\lambda_\odot - 0,05305^\circ \sin 4\lambda_\odot + 0,00152^\circ \sin 6\lambda_\odot. \quad (250)$$

Maximální hodnoty rozdílu jsou pro $\lambda_\odot \pm 45^\circ$ a $\lambda_\odot \pm 135^\circ$, amplituda změn odpovídá rozdílu ± 10 minut. Efekt sklonu ekliptiky k rovině rovníku tak výrazněji přispívá do časové rovnice než nerovnoměrný pohyb po eliptické dráze.

Dosazením obou efektů získáme aproximaci s přesností na cca 0,3 minuty. Časová rovnice pak nabude tvaru

$$T_{PS} - T_{SS} = 0,46 \cos \tau - 7,34 \sin \tau - 3,36 \cos 2\tau - 9,33 \sin 2\tau, \quad (251)$$

kde $\tau = 360^\circ/365,25D$ a rozdíl pravého a středního slunečního času vychází v minutách. D je opětovně počet dní od začátku roku.



Obrázek 75: Porovnání pozice Slunce v ekliptikálních a v rovníkových souřadnicích druhého druhu pro různé dny v roce (zelená - jarní rovnodennost, světle modrá - 11.4.2011, červená - 6.5.2011 a žlutá - 8.6.2011).

4.20 Pásmový čas

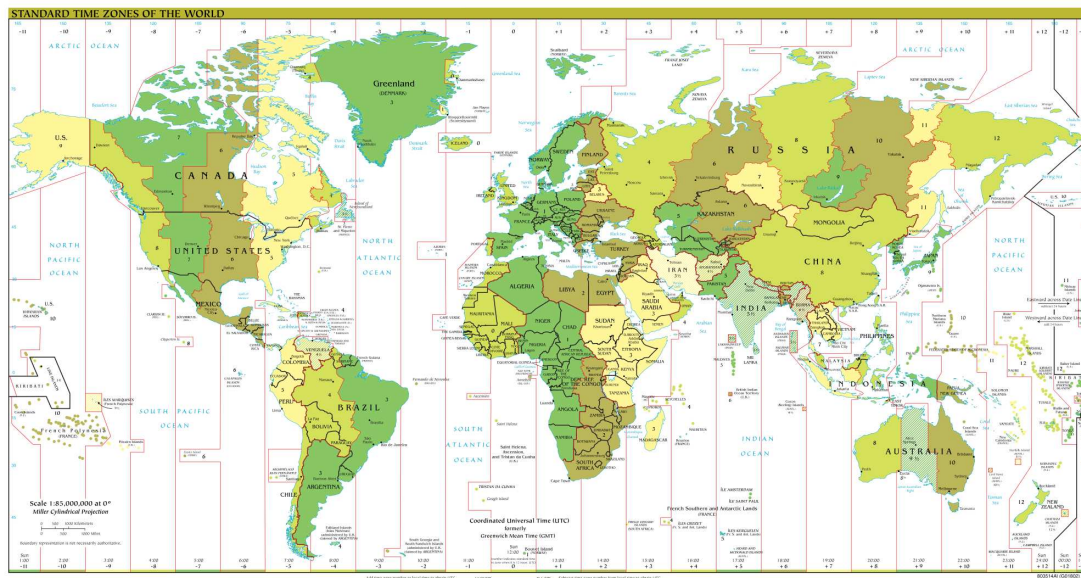
Každé místo na Zemi má svůj vlastní „místní čas“. Až do 19. století byl základem časomíry pravý místní sluneční čas, který byl určován slunečními hodinami. Od roku 1820 se začal užívat místní střední čas, který byl opraven o časovou rovnici. Nicméně s rychlým rozvojem dopravy a hlavně železnice nastal problém s různými existujícími časy. Začalo být nevýhodné mít tolik vlastních časů a proto byl zaveden jeden *železniční čas*, který odpovídal času hlavního města země. V našich zemích a v tehdejší celém Rakousku platil až do 1. října 1891 na železnicích čas pražský, ale i to byla časem shledáno jako nepraktické. Např. ve Spojených státech bylo v té době 53 železničních časů.

V roce 1870 přišel s návrhem zavedení pásmového času (obr. 76) Charles F. Dowd (1825–1904), ale teprve až v říjnu 1884 bylo rozhodnuto na světové konferenci ve Washingtonu, že povrch Země bude rozdělen podél poledníků na 24 pásem, kdy každé z nich bude mít velikost 15° zeměpisné délky. Uvnitř tohoto pásma bude platit stejný pásmový čas, čas v sousedních pásmech se bude lišit o hodinu. Základní (světový) čas bude v pásmu podél nultého greenwickského poledníku a k němu se budou vztahovat všechny ostatní časy. Světový koordinovaný čas je rovnoměrně plynoucí čas a ten je neustále porovnáván s časem rotačním, dojde-li k rozdílu, přidává se (či ubírá) 1 sekunda.

Náš střeoevropský čas platí od roku 1912. V období od konce března do konce října se navíc zavádí letní střeoevropský čas, který přidává další hodinu vůči světovému času. Vzhledem k tomu, že se nacházíme poblíž 15. poledníku, SEČ lépe odpovídá skutečnosti. Brno je oproti tomuto poledníku posunuto o 6 minut směrem na východ, takže východy i západy těles jsou upřesněny.

V praxi se hranice pásem přizpůsobují státním hranicím, respektive administrativnímu členění větších států, které pak mají více pásmových časů. Existují však i výjimky, kdy některé státy používají časy posunuté o půlhodiny (Kokosové ostrovy, Afghánistán, Indie) či dokonce 45 minut (Nepál). Velice zvláštní posta-

vení má 180 poledníků, přes který prochází časová hranice. Při překročení této čáry směrem na západ (což ovšem znamená ze západní polokoule na východní) se přechází z pásma UTC-12 do pásma UTC+12, takže platný čas se zvýší o 24 hodin, tzn. čas se nemění, ale datum se posune o jeden den vpřed. Při přechodu směrem na východ opačně. Blízkost časové hranice vedla Samou k tomu, že na konci roku 2011 se přesunuli z pásma UTC+12 na UTC-12. Tento přesun se provedl tak, že po čtvrtku 29.12. následovala rovnou sobota 31.12.2011. Důvod změny časového pásma a současně i změny mezinárodní datové hranice souvisí s napojením ekonomiky na Austrálii a Nový Zéland.



Obrázek 76: Mapa časových pásem k březnu 2011 ([E41]).

4.21 Kalendář

Souhrnu pravidel, kterými se řídí počítání dnů v roce, se říká *kalendář*. První kalendáře vznikly již na počátku civilizace, což souviselo s každoročními záplavami v okolí velkých řek. Název je odvozen od latinského *calendae* - svátky novoluní, což byl v římském kalendáři první den v měsíci (kalendy). Ten den bylo svolání lidu (calare) knězem, aby mohl vyhlásit nový měsíc a zároveň všechny obeznámit, kolik bude mít měsíc dní. S tím také souvisí kniha dlužníků (calendarium), protože se ve starém Římě platily úroky z dluhů vždy první den v měsíci.

Základními jednotkami pro tvorbu kalendářů jsou *sluneční den*, který používají všechny kalendáře, dále synodický měsíc (lunární kalendáře) a tropický rok (365,2422 dnů). Sladěním různě dlouhých period pak můžeme kalendáře rozdělit na lunární, solární a lunisolární.

Nejstarší kalendáře byly kalendáři lunárními. Na Měsíci je velice názorně vidět střídání fází a uvědomíme-li si, že nejstarší civilizace byly v oblastech tropů a subtropů, kde se střídání ročních období tolik neprojevovalo, právě změna měsíčních

fázi byla dobrou časomírou. Rozdělením měsíčního cyklu vznikne přibližně sedmidenní týden, během kterého se přiřadily názvy dní hlavním nebeským tělesům a božstvům.

Solární kalendář je co do konstrukce obtížnější a je potřeba delšího časového období pro jeho sestavení. Během dne totiž nevíme, kde se Slunce na hvězdné obloze nachází. Pouze během slunečních zatmění tak můžeme zjistit aktuální pozici Slunce vůči hvězdám. Rok se dělí na čtyři roční období, která jsou oddělená rovnodennostmi a slunovraty.

První ze slunečních kalendářů byl kalendář egyptský, který vznikl přibližně ve 4. tisíciletí před naším letopočtem. Rok začínal, když Sirius vycházel v době letního slunovratu těsně před Sluncem (heliaktický východ) a v této době rovněž nastávaly životodárné záplavy řeky Nilu. Staroegyptský rok měl 3 období: záplava, setí a žně, který měly 4 měsíce po 30 dnech a každý měsíc měl 3 dekády (po 10 dnech). Na konci roku se pak vkládalo 5 dní (malý rok). V roce 238 př. n. l. vydal dekret král Ptolemaios III. Euergetés (246–222/221 př. n. l.), který po čtyřech letech přidával do malého roku jeden den navíc. K praktickému zavedení dekretu ale nedošlo, nicméně princip převzali v roce 46 Římané. Za 120 let tak vzrostla chyba začátku roku o celý měsíc a začátek roku se stále posouval na dřívější roční doby. Kromě Egypta byl solární kalendář užíván již ve 3. tisíciletí př. n. l. také u Babyloňanů a ve 2. tisíciletí př. n. l. v Číně.

Náš současný kalendář navazuje na kalendář římský, který Římané přejali od Babyloňanů. Začátky tohoto kalendáře jsou nejasné, podle legendy byl zakladatelem tohoto římského kalendáře Romulus v době, kdy založil Řím. Bylo to v roce 753 před naším letopočtem, ale pro Římany to byl rok nula. Zpočátku měl 10 očíslovaných měsíců se 304 dny o délkách 30 a 31 dní, rok začínal na jaře a končil v zimě. Měsíce získaly jména podle římských bohů a číslic, které označovaly jejich pořadí. V roce 713 př. n. l. Numa Pompilius (753–673 př. n. l.) přidal dva měsíce Januarius a Februarius na závěr roku. Toto přidání měsíců souviselo s tím, že si byl dobře vědom délky lunárního roku 355 dní, takže 57 dní rozdělil právě mezi měsíce leden a únor (měsíc s nešťastným počtem 28 dnů). Protože se rok lunární od tropického liší, bylo nutné tento rozdíl korigovat a proto se vkládaly ve čtyřletém cyklu extra měsíce zvané Mercedonius a to ve druhém roce cyklu mezi 23. a 24. únorem 23 dní a ve čtvrtém roce cyklu pak 22 dní. Tím se délka roku rovnala 366,25 dnům a rozdíl oproti hodnotě tropického roku se kumuloval. V roce 46 př. n. l. se Gaius Julius Caesar (100–44 př. n. l.) seznámil s egyptským kalendářem a pověřil alexandrijského astronoma Sosigena, aby vypracoval zjednodušenou verzi kalendáře. V té době byl již rozdíl mezi kalendářem a skutečností 90 dní. Jména měsíců zůstala stejná, jen se změnily jejich délky. Měsíc Mercedonius byl vypuštěn a v měsíci Februariu se vkládal přestupný den každé čtyři roky (opět mezi 23. a 24. únorem). Délka roku tak byla 365,25 dne, což je ovšem o 11 minut a 14 sekund déle než je délka roku tropického. Měsíc Quintilis byl pak přejmenován na počest Caesara, který se v něm narodil, na Iulius. Takto reformovaný kalendář začal platit nařízením Caesara v Římské říši od roku 45 př. n. l. Vlivem zmatků při zavádění byly omylem přidávány přestupné roky každý třetí rok, chyba byla odhalena až v roce 8 př. n. l. císařem Augustem, který ji napravil tím, že se až do roku 8 n. l. přestupné roky nezařazovaly a za jeho vlády se skutečně datování

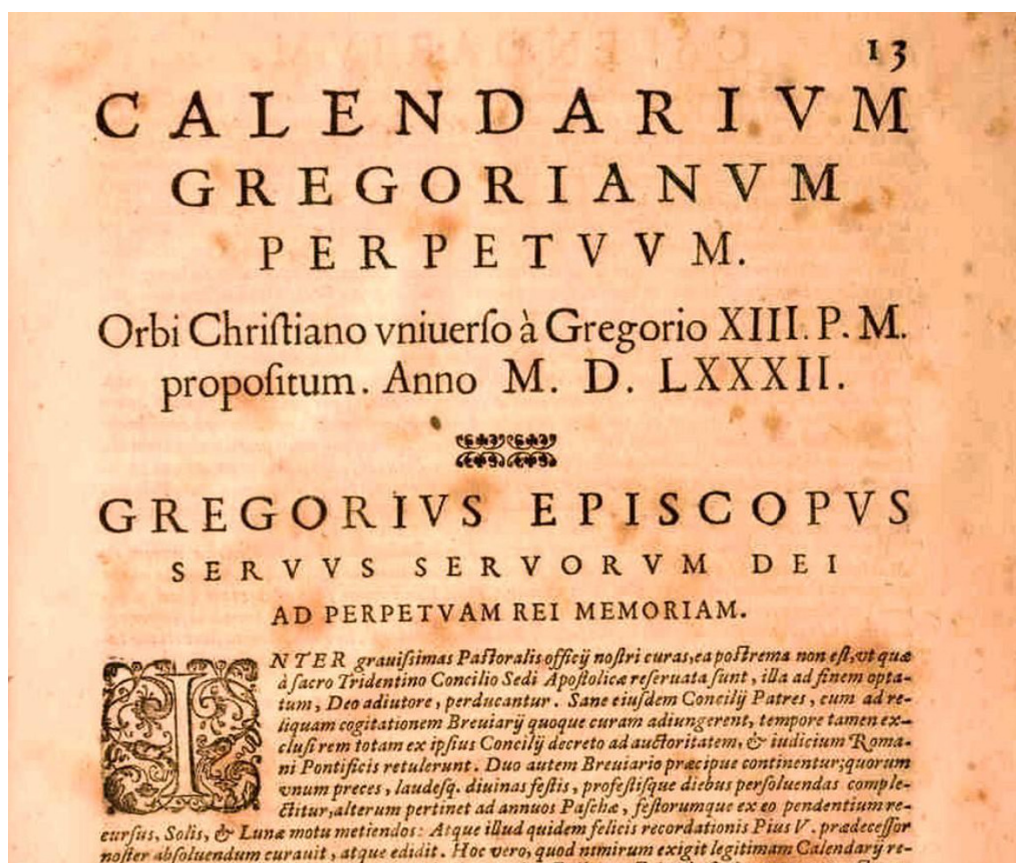
v celé Římské říši synchronizovalo. Na svou počest nechal v tomto roce změnit název měsíce Sextilis na Augustus.

Romulus měsíc (počet dnů)	Numa Pompilius měsíc (počet dnů)	Julius Ceasar měsíc (počet dnů)
Martius (31)	Martius (31)	Martius (31)
Aprilis (30)	Aprilis (29)	Aprilis (30)
Maius (31)	Maius (31)	Maius (31)
Iunius (30)	Iunius (29)	Iunius (30)
Quintilis (31)	Quintilis (31)	Iulius (31)
Sextilis (31)	Sextilis (29)	Sextilis (31)
September (30)	September (29)	September (30)
October (31)	October (31)	October (31)
November (30)	November (29)	November (30)
December (30)	December (29)	December (31)
—	Ianuarus (29)	Ianuarus (31)
—	Februarius (28+22/23)	Februarius (28/29)

Tabulka 8: Názvy měsíců a počet dní v různých římských kalendářích.

Záhy po nástupu křesťanství se církevní představitelé museli vypořádat s otázkou, kdy mají slavit Velikonoce. Roku 325 n. l. se shodli, že Velikou noc budou slavit vždy první neděli po prvním úplňku následujícím po dni jarní rovnodennosti, který toho roku připadl na 21. březen. Uplynulo několik století a problém Velikonoc bylo nutné řešit znovu. Rozdíl jednoho dne se mezi délkou juliánského a tropického rokem projeví po 128 letech, v polovině šestnáctého století se den jarní rovnodennosti podle juliánského kalendáře vzdálil od 21. března již o dní deset. Jarní rovnodennost se tak přesunula do dřívějších kalendářních dat. Chyba juliánského kalendáře byla odhalena již ve 14. století, snažily se ji vyřešit i koncily. Katolická církev proto oslovila papeže Řehoře XIII., aby zjednal nápravu. V roce 1575 předložil matematik a lékař *Ciro Luigi Giglio* (1510–1576) návrh nového kalendáře, který byl schválen 24. února 1582. Protože mělo být vynecháno najednou 10 dní, čekalo se s jejich vynecháním až do doby, kdy v liturgickém kalendáři je počet přeskočených významných svátků nejmenší. Reforma měla proto být provedena bezprostředně po svátku sv. Františka, připadajícím na čtvrtek 4. října 1582. Následující den měl být považován za pátek 15. října 1582. Nebýt této korekce, kalendář by se ještě více opožďoval oproti skutečným změnám ročních období. **Papežská bula** také stanovila, že každý poslední rok století bude přestupný jen tehdy, bude-li dělitelný číslem 400. Pravidla pro přestupné roky jsou následující

- je-li letopočet dělitelný 4, pak jde o rok přestupný s 366 dny (odpovídá délce tropického roku 365,250 0),
- je-li letopočet dělitelný 100, pak nejde o rok přestupný a má 365 dní (odpovídá délce tropického roku 365,240 0),
- je-li letopočet dělitelný 400, pak jde o rok přestupný s 366 dny (odpovídá délce tropického roku 365,242 5).



Obrázek 77: Papežská bula Řehoře XIII ze dne 24. února 1582, která opravovala nepřesnost juliánského kalendáře a zavedla kalendář gregoriánský [E42].

V Čechách začal gregoriánský kalendář platit od 6/17. 1. 1584, na Moravě pak od 3/14. 10. 1584. Juliánský kalendář nadále používá pravoslavná církev, takže vánoční svátky se slaví např. v Rusku až po 1. lednu.

Kalendářů je celá řada, zde se zmíníme o kalendáři židovském a islámském. Židovský kalendář je kalendářem lunisolárním, tzn. že měsíce jsou počítány podle fází Měsíce a roky podle Slunce. Letopočet se datuje od stvoření světa, všechny měsíce začínají novem. Od starověku je každý začínající měsíc vyhlášován na základě pozorování. Současný židovský kalendář je neměnný od 10. století. Běžný rok má 12 měsíců, které trvají 30 nebo 29 dní. Roky tak mohou mít 353, 354 nebo 355 dní. Protože se lunární rok a sluneční liší, vkládá se sedmkrát za 19 let přestupný 13. měsíc o délce 30 dní. Přestupný rok pak může mít 383, 384 a 385 dní.

Islámský (muslimský) kalendář byl zaveden chalífou Umarem roku 637. Jeho počátek byl stanoven na rok 622 (hidžra), kdy odešel Mohammed z Mekky do Mediny. Islámský kalendář je lunárním kalendářem, má dvanáct měsíců o délce střídavě 30 a 29 dnů. Normální rok má délku 354 dní, přestupný pak 355 dní, který je zařazován po dvou nebo po jednom obyčejném roku v cyklu třiceti tří let. Za tuto dobu se rozdíl letopočtu mezi islámským a gregoriánským kalendářem snížil o jedna.

Pro výpočet kalendáře je nutné mít jako podklad tzv. kalendářní data - *sluneční kruh, měsíční cyklus, římský počet, epakta, nedělní písmeno a datum Velikonoc.*

Sluneční kruh (sluneční cyklus) je perioda, po jejímž uplynutí připadají vždy dny v týdnu na stejná data. Obyčejný rok má 52 týdnů po 7 dnech a 1 den navíc. Jestliže v určitém obyčejném roce připadne 1. ledna na pondělí, pak v následujícím roce připadá 1. ledna na úterý, v dalším pak na středu. Pokud bychom nezaváděli přestupné roky, připadaly by vždy po sedmi letech stejné dny v týdnu na určitá stejná data. V gregoriánském kalendáři je však každý čtvrtý rok rokem přestupným, proto připadají dny v týdnu na stejná data až po 4 krát 7 letech, tj. 28 letech. Počátek této periody byl položen do roku 9 před naším letopočtem, který byl přestupný a začínal pondělím.

Číslo slunečního kruhu pro určitý rok nabývá hodnot mezi 1 a 28 a zjistíme ho tak, že k letopočtu přičteme 9 a dělíme 28. Zbytek udává hledanou hodnotu slunečního kruhu. Např. pro rok 2021

$$(2021 + 9) : 28 = 72,5 \implies 0,5 \cdot 28 = 14. \quad (252)$$

Sluneční cyklus postupuje kalendářem plynule a stejným rokům je přiřazeno stejné číslo jak v juliánském, tak i v gregoriánském kalendáři.

Měsíční cyklus, nazývaný též zlatým počtem Metonovým, je 19letá perioda, která probíhá plynule kalendářem podobně jako cyklus sluneční. Po 19 letech připadají vždy přibližně tytéž fáze Měsíce na stejná kalendářní data. Je to dáno tím, že synodický měsíc trvá v průměru 29,530 588 2 dnů, což znamená, že 235 synodických měsíců je rovno 6 939,688 227 dnům. Tato doba je přibližně rovna 6 939,75 dnům, což je 19 juliánských roků po 365,25 dnech. V cyklu však mohou nastat odchylky, protože se mění délka synodického měsíce od 29,25 do 29,83 dnů jako následek změn měsíční dráhy. Pořadí roku v měsíčním cyklu se nazývá *zlaté číslo*. Roku 0 našeho letopočtu je přiřazeno zlaté číslo 1. Pro rok 2021 tedy máme

$$(2021 + 1) : 19 = 106,4211 \implies 0,4211 \cdot 19 = 8. \quad (253)$$

Římský počet neboli indikce je perioda patnáctiletá. Nevychází z žádných astronomických dějů, v pozdním období Římské říše měla význam pouze administrativní. Je však součástí juliánské periody, kterou v roce 1583 navrhl Joseph Justus Scaliger (1540–1609) pro počítání v periodách $28 \cdot 19 \cdot 15$ let. Výsledná perioda odpovídá 7 980 rokům a počítá se od určitého počátečního data, bez dělení na roky (pouze dny). Jako počáteční bylo stanoveno datum 1. ledna roku 4713 př. n. l. (neboli rok -4712), kdy všechny periody měly hodnotu 1. Jedna perioda zahrnuje 2 914 695 dní. Juliánské datum tedy umožňuje zjistit dny v týdnu, číslo slunečního kruhu, zlaté číslo a indikci. Když dělíme juliánské datum příslušného dne ke 12. hodině světového času UT (celočíslnou část JD) číslem 7, zbytek určí o jaký den se jedná. Když se rovná zbytek nule, dnem je pondělí, jedné odpovídá úterý, 2 = středa, 3 = čtvrtek, 4 = pátek, 5 = sobota a 6 = neděle. Když dělíme juliánské datum číslem 28, 19 anebo 15, dostaneme jako zbytek číslo slunečního kruhu, zlaté číslo anebo indikci (římský počet). Juliánské datování se praktikuje zejména v astronomii (např. zjišťování periodických jevů), ale je nutné používat heliocentrické juliánské datum. Juliánské datum lze vypočítat ze známého juliánského data pro půlnoc příslušného dne jako

$$JD = JD(0 \text{ UT}) + (H - 12)/24 + M/1440 + S/86\,400. \quad (254)$$

Na 1. ledna 2021 v 0h UT připadlo juliánské datum 2 459 215,5 dne. Chceme-li vypočítat juliánské datum z data kalendářního, můžeme využít vztahů (Meeus 1998)

$$JD = [365,25(Y + 4716)] + [30,6001(N + 1)] + D + B - 1524,5 \quad (255)$$

kde $[a]$ vyjadřuje celou část čísla a , tedy nejbližší menší celé číslo. Pro rok a měsíc platí následující vztahy

$$M < 3 \implies N = M + 12, Y = R - 1 \quad \text{nebo} \quad M \geq 3 \implies N = M, Y = R, \quad (256)$$

kde D je občanský den, M je měsíc a R je rok. Parametry A a B získáme jako

$$A = \left[\frac{Y}{100} \right] \quad B = 2 - A + \left[\frac{A}{4} \right]. \quad (257)$$

Pro 1. ledna 2021 tak máme $A = 20$, $B = -13$, $D = 1$, $N = 13$ a $Y = 2020$. Po dosazení do rovnice 255 dostaneme

$$JD = [365,25(2020 + 4716)] + [30,6001(13 + 1)] + 1 - 13 - 1524,5 = 2459215,5. \quad (258)$$

V současné době se také můžeme setkat s modifikovaným juliánským datem MJD, které zavedli pracovníci Smithsonianké astrofyzikální observatoře v USA pro zmenšení počtu číslic v JD. Modifikované juliánské datum začalo 17. listopadu 1858 ($JD = 2400000,5$) a platí

$$MJD = JD - 2400000,5. \quad (259)$$

Termínem *epakta* se označuje stáří cyklického měsíce 1. ledna daného roku. Cyklický měsíc vychází z církevních kalendářních počtů, kde se délka synodického měsíce zaokrouhluje na 30 dnů. Zatímco juliánský rok je o 10,882942 dní delší než 12 synodických měsíců, zaokrouhluje se v kalendářních počtech tento rozdíl na 11 dní. Pokud tedy mělo epakta 1. ledna určitého roku hodnotu 0 (nov), pak prvního ledna následujícího roku má hodnotu 11, poté 22 a v dalším roce pak $(33 - 30) = 3$ a dále pak 14 atd. Aby se vyrovnal rozdíl mezi skutečnou a zaokrouhlenou hodnotou synodického měsíce, přičítáme k začátku nové periody 12 dnů místo jedenácti, takže stáří je opět 0. Toto zvýšení stáří Měsíce nazýváme skokem cyklického měsíce, jím se dosáhne shody mezi cyklickým měsícem a slunečním rokem. V juliánském kalendáři je možné ke každému zlatému číslu přiřadit určitou epaktu, v gregoriánském kalendáři je vztah komplikovanější. Epakta má periodu 19 let a slouží k výpočtu velikonoční neděle. V juliánském kalendáři je pro výpočet epakty použit velice jednoduchý vztah

$$\text{epakta} = (11 \times \text{zlaté číslo})/30. \quad (260)$$

Desetinná část výsledku se vynásobí číslem 30. Výsledek ale může být i nula. Ve starověku však nebylo zvykem považovat nulový počet za číslo, proto v případě, že epakta vyšlo jako nula, brali hodnotu jako 30. Protože Zlatých čísel je jen 19, i epakta může nabývat v juliánském kalendáři jen 19 hodnot. V gregoriánském kalendáři již může mít epakta ale hodnot 30.

Pro výpočet epakty v gregoriánském kalendáři musíme nejprve vypočítat *sluneční opravu*, která mám říká, ve kterém století je daný rok. V tomto výpočtu století začíná takzvaným *centenárním rokem*, který končí dvěma nulami (např. 2000), století končí dvěma devítkami (např. 1999), což je oproti běžnému pojmu století posun o jeden rok. Rozdíl mezi gregoriánským a juliánským kalendářem je v přestupném roku, který je v juliánském kalendáři vždy co 4 roky. V kalendáři gregoriánském nejsou přestupné roky, pro které platí, že jsou dělitelné beze zbytku číslem 100 ale ne číslem 400 (např. rok 2100). Sluneční oprava je

$$\text{\textcircled{S}}\text{oprava} = [3 \times (\text{století} - 16)/4], \quad (261)$$

což pro 21. století dává hodnotu sluneční opravy rovnu 3 (odečítá se ve vzorci 263). Ještě je potřeba uvážit i 19letý cyklus měsíčních fází, kde ale po dokončení cyklu přichází fáze o 1,5 hodiny dříve (chyba 1 dne po 300 letech). Kalendářní komise se proto rozhodla, že se v cyklu po 2500 letech provede osmkrát tzv. *měsíční oprava*, což vychází v průměru jednou za 312,5 roku (dělá se pouze v centrálních letech). Měsíční oprava je dána jako

$$\text{\textcircled{C}}\text{oprava} = [8 \times (\text{století} - 15)/25], \quad (262)$$

což pro 21. století znamená hodnotu +1. Vzorec pro výpočet epakty v gregoriánském kalendáři tedy je

$$\text{epakta} = \text{juliánská epakta} - 10 - \text{\textcircled{S}}\text{oprava} + \text{\textcircled{C}}\text{oprava}. \quad (263)$$

Po dosazení dostaneme v roce 2021 hodnotu gregoriánské epakty rovnu 16.

Nedělní písmeno se používá k určení, jaký den v týdnu připadá na určité datum. Prvnímu lednu přiřadíme písmeno A, 2. lednu B, 3. lednu C atd., až 7. lednu G, 8. lednu A atd. Písmeno, které v určitém roce připadá vždy na neděli, nazýváme nedělním písmenem. Pokud je rok přestupný, platí dvě nedělní písmena, od začátku roku do přestupného dne první a od přestupného dne do konce roku písmeno druhé. Podle nedělních písmen lze snadno stanovit kalendář pro příslušný rok. V roce 2021 platí nedělní písmeno C. Datum Velikonoc se mění rámcově podle pravidla, že velikonoční neděle je první nedělí po úplňku cyklického měsíce, který nastal 21. března nebo později. Podle Velikonoc se určují data ostatních pohyblivých svátků. V juliánském a gregoriánském kalendáři se datum velikonoční neděle vypočítá podle Gaussova pravidla. Označme T letopočet, a zbytek po dělení $T/19$, b zbytek po dělení $T/4$, c zbytek po dělení $T/7$ a d zbytek po dělení $(19a + m)/30$ a e zbytek po dělení $(2b + 4c + 6d + n)/7$, kde m a n jsou konstanty pro juliánský kalendář ($m = 15$ a $n = 6$) a pro kalendář gregoriánský ($m = 24$ a $n = 5$), které platí pro roky 1900 až 2099. Velikonoční neděle pak bude $(22 + d + e)$ března nebo $(d + e - 9)$ dubna. Z tohoto pravidla jsou však výjimky, aby velikonoční neděle nenastala příliš pozdě. Ve 20. století to jsou roky 1954 a 1981. V roce 2021 nastává velikonoční neděle 4. dubna, protože

$$a = 7, \quad b = 1, \quad c = 5, \quad d = 7 \quad \text{a} \quad e = 6 \implies (7 + 6 - 9) = 4, \quad (264)$$

protože datum $(22 + 7 + 6)$ pro březen není možné.

Rok 2020 odpovídá [E43]

- a) roku 6733 Scaligerovy juliánské periody. Rok 6733 začíná 14. ledna 2020 gregoriánského kalendáře.
- b) rokům 7528/7529 mladší byzantské éry. Rok 7529 začíná 14. září 2020.
- c) rokům 5780/5781 židovské éry. Rok 5780 začíná 30. září 2019, je nepřestupný, trvá 355 dní a končí 18. září 2020. Rok 5781 začíná 19. září 2020, je nepřestupný, trvá 353 dní a končí 6. září 2021.
- d) rokům 2795/2796 olympiád, a to 3. a 4. roku 699. olympiády. Rok 2796 začíná 14. července 2020 (dle gregoriánského kalendáře).
- e) roku 2773 ab Urbe condita (a.U.c. – od založení Říma). Začíná jako juliánský rok 14. ledna.
- f) rokům 1441/1442 muslimské éry Hidžry. Rok 1441 má 354 dní, začíná 1. září 2019 a končí 19. srpna 2020. Rok 1442 trvá 355 dní a končí 9. srpna 2021. Ramadán v roce 1441 začíná 24. dubna 2020 a končí 22. května 2020.
- g) 1. a 2. roku japonské éry Reiwa. Éra začala 1. května 2019 s nástupem japonského císaře Naruhita.
- h) rokům 1736/1737 Diokleciánovy éry (koptský kalendář). Rok 1736 trvá 365 dní, začíná 12. září 2019 a končí 10. září 2020. Rok 1737 trvá 365 dní, začíná 11. září 2020 a končí 10. září 2021.

DOPLŇUJÍCÍ LITERATURA

Guth V., Link F., Mohr J. M., Šternberk B. 1954, *Astronomie I*, NČAV, Praha, 664 stran

Judge M. 2012, *The Dance of Time: The Origins of the Calendar*, Arcade Publishing, New York, 264 stran

Poynting J. H. 1913, *The Earth: Its Shape, Size, Weight and Spin*, Cambridge University Press, Cambridge, 150 stran

Richards E. G. 1998, *Mapping Time: The Calendar and Its History*, Oxford University Press, New York, 464 stran

Literatura

- Aristoteles 350 BC, *On the Heavens - Book II*, Pub: 1994–2000, trans. by J. L. Stocks
- Burša M. 1995, *Earth, Moon, and Planets*, **69**, 1, 51–63
- Cox A. N. 2000, *Allen's astrophysical quantities, 4th ed.*, New York: AIP Press, Springer
- Fotheringham, J.K. 1908, *The Observatory*, **31**, 399–402
- Murray, H.; Crawford, J. and Gordon, P. 1836, *An Historical and Descriptive Account of China*, Edinburgh: Oliver & Boyd, Tweeddale court. and Simpkin, Marshall & comp., London, 470 stran
- Moritz H. 2000, *Journal of Geodesy*, **74**, 128–133
- Jáchim F. 2003, *Jak viděli vesmír*, Rubico, Olomouc, 272 stran
- Laskar, J.; Fienga, A.; Gastineau, M.; Manche, H. 2011, *A&A*, **532**, A89
- Polyakhova, Ye. N. 1974, *Collection of problems on the dynamics of a point in a central force field*, Leningrad University Press, Leningrad, 1-145
- Meeus, J. 1998, *Astronomical Algorithms*, Willmann-Bell, Inc., Richmond, second edition, 477 stran
- Seidelmann P. K. 2006, *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, Univeristy of Science Book, Sausalito, 752 stran
- Štefl V. 2011, *Čs. čas. fyz*, **61**, 1
- Tiersten M.S. & Soodak H. 2000, *Am. J. Phy.*, **68**, 129
- U.S. Naval Observatory; H.M. Nautical Almanac Office 1989, *The Astronomical Almanac for the Year 1990*, p. B18, ISBN 978-0-11-886934-8.

Elektronické zdroje :

- [E1] <https://www.lonelyplanet.com/articles/stonehenge-stones-origin>
- [E2] http://www.astropis.cz/Rocniky/txt1999_34.pdf
- [E3] http://it.wikipedia.org/wiki/File:Anasazi_Supernova_Petrographs.jpg
- [E4] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Anaxagoras_Lebiedzki_Rahl.jpg
- [E5] http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Aristoteles_Louvre.jpg
- [E6] <http://www.cz-milka.net/digifotogalerie/2010-05-27-2010-05-30-velka-britanie-londyn/>
- [E7] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bb/Saggitarius_objekty.JPG
- [E8] http://apod.nasa.gov/apod/image/1012/StartrailsViking_heden.jpg
- [E9] <https://ssd.jpl.nasa.gov/>
- [E10] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d1/Zodiac_woodcut.png
- [E11] <http://eclipse.gsfc.nasa.gov/eclipse.html>
- [E12] <http://apod.nasa.gov/apod/ap100613.html>
- [E13] <http://www.astrovm.cz/cz/na-obloze/ukazy/zatmeni-slunce-4-1-2011.html>
- [E14] http://xjubier.free.fr/en/site_pages/Solar_Eclipses.html
- [E15] <http://ircamera.as.arizona.edu/NatSci102/NatSci/lectures/tycho.htm>
- [E16] http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Draha_druzice2.jpg
- [E17] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/88/Lagrange_points.jpg
- [E18] <http://hvezdy.astro.cz/dvojhvezdy/47-vyvoj-tesnych-dvojhvezd>
- [E19] <http://sciencythoughts.blogspot.com/2011/07/2010-tk-earths-trojan-asteroid.html>
- [E20] <http://map.gsfc.nasa.gov/media/990528/990528.jpg>
- [E21] <http://members.wolfram.com/jeffb/visualization/lagrange.shtml>
- [E22] https://archive.org/details/nasa_techdoc_19750015561/page/n113/mode/2up
- [E23] http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:P%C5%82ywy_morskie.svg
- [E24] <http://en.wikipedia.org/wiki/File:L-Triangulierung.png>
- [E25] http://www-app2.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace//results/grav/g003_eigen-cg01c.html
- [E26] <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/06/Two-types-of-latitude.png>
- [E27] <http://www.msnuceus.org/membership/html/jh/earth/atmosphere/images/coriolis.gif>
- [E28] <http://www.panoramio.com/photo/7139055>
- [E29] https://en.wikipedia.org/wiki/Day_length_fluctuations
- [E30] <http://stjarnhimlen.se/comp/time.html>
- [E31] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Stellar_aberration.JPG
- [E32] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4e/Precession_and_seasons.jpg
- [E33] <http://en.wikipedia.org/wiki/File:MilankovitchCyclesOrbitandCores.png>
- [E34] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Precession_S.gif
- [E35] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Earth_precession.svg
- [E36] <http://www.flickr.com/photos/englishheritage/5330640864/>
- [E37] <http://hpiers.obspm.fr/>
- [E38] <http://astro.mff.cuni.cz/mira/sh/sh.php>
- [E39] <http://apod.nasa.gov/apod/ap081221.html>
- [E40] <http://apod.nasa.gov/apod/ap061230.html>
- [E41] <http://time-time.net/times/time-zones/world-time-zones.php>
- [E42] https://www.encyclopediavirginia.org/media_player?mets_filename=evr3878mets.xml
- [E43] http://rocenka.observatory.cz/2020/kalendar_a_cas.html