Problèmes de Mécanique Céleste

Luc Duriez

Luc.Duriez@univ-lille1.fr
http ://www.imcce.fr

Dernière révision le 10 avril 2007

Liste des problèmes

Avertissements et conseils

Le présent document donne les énoncés d'un certain nombre de problèmes de mécanique céleste qui ont été posés en devoir libre ou à l'examen aux étudiants de License de Mathématiques de l'USTL dans le cadre de l'enseignement optionnel de Mécanique céleste. La plupart de ces problèmes correspondent à des épreuves d'une durée de 4 heures pendant lesquelles la consultation du cours était autorisée.

Ils ont été classés ici dans l'ordre de la progresion naturelle du Cours de Mécanique céleste auquel il se réfère. On trouvera donc d'abord des problèmes sur le mouvement képlérien (chapitres 1 à 3), puis d'autres sur les perturbations d'orbite de satellites ou de sondes spatiales (chapitres 4 et 5), et enfin ceux relatifs au problème des N corps (chapitre 6) qui nécessitent généralement la connaissance des chapitres précédents.

On ne fournit pas les solutions, mais on indique éventuellement des pistes par des références au parties du cours concernées par chaque problème par une balise placée dans la marge et sur laquelle il suffit de cliquer pour accéder au cours correspondant. Pour revenir à l'énoncé du problème lorsqu'on est parti consulter le cours, il suffit de cliquer sur "Retour Doc" en bas de l'écran. C

Chaque problème est aussi accessible directement depuis la partie du cours pour lequel ce problème constitue une application (par une balise comme celle-ci) Le retour au cours s'effectue aussi par un clic sur "Retour Doc". Pb16

1. Mouvement képlérien et chute des corps à la surface de la Terre

Dans ce problème, la Terre est supposée sphérique de centre O, de rayon $R = 6370$ km et de masse M. Elle tourne sur elle-même à la vitesse angulaire ω de 1 tour en 23h 56m 4s. En notant K la constante de la gravitation universelle, la quantité KM vaut $398\,600\ 10^9$ m^{3}s^{-2}. On suppose en outre qu'un repère géocentrique de directions fixes est galiléen.

Questions préliminaires :

(a) Calculer en m/s la vitesse d'entraînement des points de la Terre situés à l'équateur à l'altitude zéro. C(1.15)

(b) Calculer en m/s la vitesse qu'aurait un satellite de la Terre sur une orbite circulaire de rayon R. C(3.84)

A un instant t_0, une masse ponctuelle A de masse m est abandonnée sans vitesse dans un repère lié à la Terre en un point situé à une altitude H à la verticale du point P de coordonnées géographiques λ (longitude) et ϕ (latitude). On considérera que A subit l'attraction gravitationnelle de la Terre, de module égal à $\frac{KMm}{r^2}$ où r représente la distance OA.

1 – On suppose tout d'abord que H est très petit devant R. Soit $Puvk$ le repère lié à la Terre tel que Pu soit tangent au petit cercle de latitude ϕ et dirigé vers l'Est, que Pv soit tangent en P au méridien et dirigé vers le Nord, et que Pk soit colinéaire à OP.

(a) En appelant x, y, z les coordonnées de A dans $Puvk$, écrire les équations du mouvement de A dans ce repère. On fera apparaître dans ces équations les quantités finies : $g_0 = \frac{KM}{R^2}$ et $c = \frac{\omega^2 R^3}{KM}$, ainsi que les quantités infiniment petites d'ordre 1 (du même ordre que $\varepsilon = \frac{H}{R}$) : C(1.34)

$$\frac{x}{R}, \quad \frac{y}{R}, \quad \frac{y}{R}, \quad \frac{\dot{x}}{\omega R}, \quad \frac{\dot{y}}{\omega R}, \quad \frac{\dot{z}}{\omega R}$$

(b) Développer les seconds membres de ces équations à l'ordre zéro et intégrer.

(c) Reporter cette solution d'ordre zéro dans les seconds membres des équations développées à l'ordre 1 et intégrer de nouveau. En déduire que le point A ne tombe pas verticalement mais subit une déviation vers l'Est et une autre vers le Sud.

(d) Application numérique : Evaluer ces déviations pour une chute de 150 m.

2 – On suppose désormais que H pourra être non petit devant le rayon de la Terre et on étudie la trajectoire *absolue* de A c'est-à-dire dans le repère géocentrique galiléen *non lié* au globe terrestre. La vitesse initiale de A est toujours supposée nulle dans un repère tournant avec la Terre.

(a) Montrer que la trajectoire de A est une conique de foyer O dont le point de départ est un sommet. Exprimer, en fonction de ϕ, l'altitude H pour laquelle cette trajectoire est un cercle, puis celle pour laquelle c'est une parabole. Evaluer dans ces deux cas le rapport $\frac{H}{R}$ pour $\phi = 0$, $\phi = 45°$ et $\phi = 90°$.

(b) Exprimer, en fonction de ϕ et H, l'énergie cinétique initiale de A, son énergie potentielle initiale et son énergie totale (on montrera que celle-ci est une constante h). Dans le cas où l'orbite de A est elliptique, en déduire les distances apogée et périgée. C(1.42)

(c) Application numérique : pour $\phi = 45°$ déterminer l'altitude de départ pour que la distance périgée soit égale à R.

3 – De ce mouvement absolu, on peut déduire le mouvement relatif de A dans un repère tournant avec la Terre.

(a) Dans le cas où la distance périgée est égale à R, déterminer les coordonnées (longitude et latitude) du point de chute sur la Terre. Quelles sont alors les déviations vers l'Est et vers le Sud ?

(b) Dans le cas général, partant d'une altitude H en un lieu de latitude ϕ, déterminer le temps que met le point A pour arriver à la distance R du centre de la Terre sur son orbite absolue et en déduire les déviations vers l'Est et vers le Sud du point de chute. C(3.24)

2. Développement des équations du mouvement képlérien au voisinage d'un mouvement circulaire

On considère deux masses ponctuelles O et P, de masses respectives m' et m, en interaction gravitationnelle. On étudie le mouvement relatif de P par rapport à O ; on note $\boldsymbol{r}$ et $\dot{\boldsymbol{r}}$ les vecteurs de position et vitesse relatives de P. On donne $\boldsymbol{r}_0$ et $\dot{\boldsymbol{r}}_0$, les position et vitesse de P à un instant initial.

1 – Quelles conditions doivent satisfaire $\boldsymbol{r}_0$ et $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ pour que le mouvement de P soit circulaire de centre O et de rayon a ? Que vaut alors le moyen mouvement n ? Exprimer la constante $C_0 = |\boldsymbol{r}_0 \wedge \dot{\boldsymbol{r}}_0|$ en fonction de a et de n. C(3.84)

2 – $\boldsymbol{r}_0$ et $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ conservant des modules identiques à ceux de la question 1, on suppose que l'angle entre $\boldsymbol{r}_0$ et $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ vaut $\pi/2 - \beta$, avec $\beta > 0$. Le mouvement est alors elliptique.

(a) En utilisant les résultats du cours, justifier cette affirmation et donner le demi-grand axe de cette ellipse et son moyen mouvement. Calculer la constante des aires C.

(b) En quelle position remarquable de l'ellipse se trouve le point P à l'instant initial ? En déduire l'excentricité de l'ellipse. Préciser la direction du péricentre, calculer l'anomalie vraie w_0 de P à l'instant initial, ainsi que les anomalies excentrique E_0 et moyenne M_0 à cet instant, puis l'instant de passage au péricentre.

Avec ces éléments d'orbite on pourrait calculer la position de P à tout autre instant, par exemple en résolvant numériquement l'équation de Kepler ou en utilisant les développements des coordonnées établis dans le cours en fonction de l'anomalie moyenne.

Au lieu de cela, on se propose ici de trouver des expressions de la distance r et de l'anomalie vraie w en fonction du temps, développées directement à partir des équations différentielles du mouvement. On suppose que les conditions initiales sont celles de la question 2, en considérant toutefois que β est un angle assez petit pour que l'on puisse développer une solution de ces équations au voisinage de la solution circulaire, par approximations successives rapidement convergentes. On suppose donc connus le demi-grand axe a, le moyen mouvement n et l'excentricité e du mouvement.

3 – Soient (r, w) des coordonnées polaires de P, de pôle O, dans le plan contenant $\boldsymbol{r}_0$ et $\dot{\boldsymbol{r}}_0$, telles qu'à l'instant initial on ait : $r_0 = a$ et $w_0 = \pi/2 + \beta$.

(a) Montrer qu'à cet instant, on a alors : $\dot{r}_0 = na \sin \beta$ et $\dot{w}_0 = n \cos \beta$. C(3.28)

(b) Ecrire les 2 équations différentielles du mouvement de P associées aux composantes radiale et orthoradiale de son accélération. En déduire les dérivées $\ddot{r}$ et $\dot{w}$ en fonction de r .

(c) On pose $r = a(1+\rho)$, $\dfrac{dM}{dt} = n$, $C = C_0(1+\eta)$ et $\varepsilon = w - M$, où a, n et C_0 sont les constantes du mouvement circulaire de la question 1, et où C est la constante des aires du mouvement elliptique. ρ et ε sont des fonctions de M que l'on va rechercher, et η est une constante que l'on exprimera en fonction de β. Les quantités ρ , ε et η sont des quantités petites d'ordre 1, tout comme β.

Montrer que les équations du mouvement prennent la forme suivante :

$$\frac{d^2\rho}{dM^2} = \frac{(1+\eta)^2}{(1+\rho)^3} - \frac{1}{(1+\rho)^2} \tag{1}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dM} = \frac{1+\eta}{(1+\rho)^2} - 1 \tag{2}$$

(d) A l'instant initial M vaut M_0 ; que valent alors $\rho(M_0)$, $\dfrac{d\rho}{dM}(M_0)$ et $\varepsilon(M_0)$?

(e) Développer les seconds membres de (1) et (2) suivant les puissances croissantes de ρ et de η ; on se limitera aux termes de degré global inférieur ou égal à 3.

4 – En posant $e = \sin\beta$, on veut rechercher une solution de ces équations développée sous la forme :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \rho(M) & = & e\,\rho_1(M) & + & e^2\,\rho_2(M) & +\cdots & + & e^p\,\rho_p(M) & +\cdots \\ \varepsilon(M) & = & e\,\varepsilon_1(M) & + & e^2\,\varepsilon_2(M) & +\cdots & + & e^p\,\varepsilon_p(M) & +\cdots \\ \eta & = & e\,\eta_1 & + & e^2\,\eta_2 & +\cdots & + & e^p\,\eta_p & +\cdots \end{array} \quad (3)$$

(a) Calculer les trois premiers coefficients η_1 , η_2 et η_3 .

(b) Développer les deux membres des équations obtenues en 3e suivant les puissances croisantes de e . On se limitera également au degré 3 en e .

Par identification des termes de même degré en e , en déduire les équations différentielles que doivent satisfaire ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , ε_1 , ε_2 et ε_3 .

Préciser l'ordre dans lequel il faut prendre ces équations pour les intégrer.

5 – Intégrer l'ensemble de ces équations. On veillera à tenir compte des conditions initiales qui doivent s'appliquer à chacune des quantités ρ_i , $\dfrac{d\rho_i}{dM}$ et ε_i (pour $i = 1,\ 2,\ 3$).

6 − En déduire le début du développement de ρ et de ε en série de Fourier de M.

Vérifier la valeur qu'ils donnent pour $M = 0$ et pour $M = \pi$. C(3.140)

Mettre ces développements sous la même forme que ceux obtenus dans le cours (en veillant notamment à leur parité vis-à-vis de l'anomalie moyenne M).

3. Mouvement képlérien dans un repère tournant

On considère deux points O et P de masses respectives M et m en interaction gravitationnelle suivant la loi de Newton. Dans ce problème, on se propose d'étudier certains aspects du mouvement relatif de P par rapport à O.

1 – On donne les vecteurs position et vitesse relative de P par rapport à O à un instant t_1 : $\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{r} = r_1\,\boldsymbol{u}_1$ et $\dot{\boldsymbol{r}} = \sqrt{K(M+m)/r_1}\,\boldsymbol{u}_2$ où r_1 est une constante positive et où $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ sont deux vecteurs unitaires faisant entre eux un angle noté α.

(a) Montrer que l'orbite de P est elliptique. Déterminer son demi-grand axe a et son excentricité e en fonction de r_1 et de α. Expliciter ensuite $\boldsymbol{e}$, le vecteur de Laplace. En déduire l'anomalie vraie w_1, puis l'anomalie excentrique E_1 et l'anomalie moyenne M_1 de P à l'instant t_1, et enfin le temps écoulé $t_1 - t_p$ depuis le dernier passage au péricentre. C(3.84b)

(b) Soit $R_0 = O\boldsymbol{i}_0\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{k}_0$ un repère de directions fixes. Calculer e, la longitude du nœud ascendant Ω, l'inclinaison i et l'argument du péricentre ω de l'orbite de P dans le cas où $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ ont pour composantes dans R_0 : C(3.92)

$$\boldsymbol{u}_1 = (0,\ 1,\ 0) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{u}_2 = (1/2,\ 1/2,\ \sqrt{2}/2)$$

Dans toute la suite, on suppose que le point P reste dans le plan fixe $O\boldsymbol{i}_0\boldsymbol{j}_0$ et on note $(x,\ y,\ 0)$ ses coordonnées dans R_0.

2 – Exprimer les équations différentielles que vérifient x et y en fonction du gradient en (x, y) d'une fonction $F(x, y)$ que l'on précisera.

Soit $R = O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}\boldsymbol{k}_0$ un repère en rotation uniforme autour de $O\boldsymbol{k}_0$, avec une vitesse angulaire donné n. On note $(X,\ Y,\ 0)$ les coordonnées de P dans R, et $\lambda = nt + \lambda_0$ l'angle dont a tourné R à l'instant t par rapport à R_0.

3 – Exprimer les équations différentielles vérifiées par X et Y, en fonction du gradient en (X, Y) de la fonction $F'(X, Y)$ définie par

$$F'(X,Y) = F(x(X,Y), y(X,Y)) + \frac{1}{2} n^2 (X^2 + Y^2)$$

4 – On pose $\rho^2 = X^2 + Y^2$. Pour quelle valeur de ρ le point P est-il en équilibre relatif dans le repère R (c'est-à-dire fixe dans ce repère) ?

Dans la suite, on note a la valeur de ρ correspondant à cet équilibre ; l'ensemble des positions d'équilibre possibles de P est donc un cercle de rayon a. On suppose maintenant que P est, à l'instant initial, au voisinage d'une de ces positions d'équilibre et pour cela on pose :

$$X = a(1 + \xi) \qquad \text{et} \qquad Y = a\eta$$

où ξ et η sont des quantités variables que l'on suppose être toutes deux infiniment petites d'ordre 1. On supposera que leurs dérivées première et seconde sont aussi des infiniment petits d'ordre 1. On se propose ainsi d'établir le mouvement P au voisinage du point de coordonnées $(a,\ 0,\ 0)$

5 – Montrer que les équation différentielles vérifiées par ξ et η peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\lambda^2} - 2\,\frac{d\eta}{d\lambda} &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \frac{d^2\eta}{d\lambda^2} + 2\,\frac{d\xi}{d\lambda} &= \frac{\partial U}{\partial \eta} \end{aligned}$$

où

$$U(\xi, \eta) = \frac{1}{n^2 a^2}\, F'(a(1 + \xi), a\eta) \tag{1}$$

6 – Montrer que la fonction U admet le développement suivant en puissances de ξ et de η, limité à l'ordre 4 par rapport à l'ensemble de ces variables :

$$U = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\xi^2 - \xi^3 + \frac{3}{2}\xi\eta^2 + \xi^4 - 3\xi^2\eta^2 + \frac{3}{8}\eta^4 \tag{2}$$

En déduire les développements limités à l'ordre 3 de $\dfrac{\partial U}{\partial \xi}$ et de $\dfrac{\partial U}{\partial \eta}$

7 – On cherche une solution développée ordre par ordre sous la forme :

$$\begin{aligned}\xi(\lambda) &= \xi_1(\lambda) + \xi_2(\lambda) + \xi_3(\lambda) + \cdots \\ \eta(\lambda) &= \eta_1(\lambda) + \eta_2(\lambda) + \eta_3(\lambda) + \cdots\end{aligned}$$

où les $\xi_i(\lambda)$ et $\eta_i(\lambda)$ sont des quantités infiniment petites d'ordre i.

En reportant cette solution formellement dans les équations (1) et (2), et en identifiant les quantités du même ordre, exprimer les équations différentielles que doivent vérifier successivement ξ_1 et η_1, puis ξ_2 et η_2, puis ξ_3 et η_3.

On devra trouver des expressions de la forme :

$$\frac{d^2\xi_i}{d\lambda^2} - 2\frac{d\eta_i}{d\lambda} - 3\xi_i = f_i(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_{i-1}, \eta_{i-1}) \tag{3}$$

$$\frac{d^2\eta_i}{d\lambda^2} + 2\frac{d\xi_i}{d\lambda} = g_i(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_{i-1}, \eta_{i-1}) \tag{4}$$

où f_i et g_i sont des polynômes ne comportant que des termes d'ordre i (sauf à l'ordre 1 où l'on a en particulier $f_1 = g_1 = 0$).

8 – Pour $i = 1$, intégrer une fois l'équation (4) en introduisant une constante d'intégration C_1 ; en déduire une équation différentielle ne dépendant plus que de ξ_1. Déterminer alors ξ_1 en fonction de λ et de 2 nouvelles constantes d'intégration A_1 et A_2. Déterminer enfin η_1 en fonction de λ et d'une quatrième constante d'intégration C_2.

Calculer C_1 et C_2 de façon à ce que η_1 ne comporte ni terme constant, ni terme polynomial en λ, mais seulement un terme trigonométrique en λ ; exprimer A_1 et A_2 de sorte qu'à $t = 0$ on ait :

$$[\xi_1(\lambda)]_{t=0} = -e \qquad \text{et} \qquad [\eta_1(\lambda)]_{t=0} = 0$$

où e est une constante positive supposée infiniment petite d'ordre 1 [ainsi, ξ_1 et η_1 pourront rester infiniment petits d'ordre 1, et, si dans la suite on choisit comme conditions initiales $\xi_i = 0$ et $\eta_i = 0$ pour $i \geq 2$, on aura finalement $X = a(1-e)$ et $Y = 0$ à $t = 0$].

9 – Reporter les solutions obtenues $\xi_1(\lambda)$ et $\eta_1(\lambda)$ dans les équations (3) et (4) pour $i = 2$ et intégrer ces équations comme à l'ordre 1, en déterminant les constantes d'intégration pour que η_2 ne comporte que des termes périodiques et pour qu'à $t = 0$ on ait $\xi_2 = 0$ et $\eta_2 = 0$. Procéder de la même façon pour résoudre les équations (3) et (4) pour $i = 3$.

La question 1 est indépendante des suivantes, et la question 8 peut être traitée en supposant acquise la question 7.

4. Méthode d'Hamilton-Jacobi appliquée au mouvement képlérien

On considère un point matériel P de masse m, mobile dans un plan fixe. Soient $O\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2$ un repère fixe lié à ce plan, et (x_1, x_2) les coordonnées cartésiennes de P dans ce repère. Le point P est soumis uniquement à une force qui dérive de la fonction de forces :

$$U(x_1, x_2) = \frac{\mu}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \qquad (\mu > 0)$$

1 – Calculer un lagrangien de ce système dynamique ; écrire les équations de Lagrange correspondantes. C(2.6)

2 – On note p_1 et p_2 les variables conjuguées respectives de x_1 et x_2. Calculer l'hamiltonien H correspondant ; exprimer les équations d'Hamilton ; s'il y a une intégrale première, explicitez-la. C(2.11)

3 – On fait le changement de variables : $(x_1, x_2, p_1, p_2) \mapsto (X_1, X_2, P_1, P_2)$ défini par :

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1^2 - X_2^2 \\ x_2 &= 2\,X_1 X_2 \\ p_1 &= (X_1 P_1 - X_2 P_2)/2\rho^2 \qquad \text{avec} \qquad \rho^2 = X_1^2 + X_2^2 \\ p_2 &= (X_1 P_2 + X_2 P_1)/2\rho^2 \end{aligned}$$

(a) Montrer que ce changement de variables est canonique. C8

(b) Montrer que le nouvel hamiltonien est alors :

$$H^* = \frac{1}{4(X_1^2 + X_2^2)} \left(\frac{1}{2m} (P_1^2 + P_2^2) - 4\mu \right)$$

(c) Montrer que H^* est constant ; on notera h sa valeur.

(d) Exprimer les équations d'Hamilton associées à H^*. Transformer ces équations de façon à y faire apparaître la constante h.

4 – On pose :

$$dt = 4\rho^2\, du \tag{1}$$

Montrer que les équations d'Hamilton précédentes peuvent alors s'écrire sous la forme canonique :

$$\frac{dX_j}{du} = \frac{\partial H_1}{\partial P_j} \qquad \text{et} \qquad \frac{dP_j}{du} = -\frac{\partial H_1}{\partial X_j} \tag{2}$$

où H_1 est la fonction : $H_1 = \frac{1}{2m}(P_1^2 + P_2^2) - 4h(X_1^2 + X_2^2)$

5 – Intégrer les équations (2) en fonstion de u, puis l'équation (1) définissant t en fonction de u (on distinguera les cas $h = 0$, $h > 0$ et $h < 0$).

6 – Dans le cas $h < 0$, reprendre l'intégration des équations (2) par la méthode d'Hamilton-Jacobi transposée au cas où u remplace t : On cherchera une fonction génératrice

$$G_1(X_1, X_2, \alpha_1, \alpha_2, u)$$

d'un changement de variables canoniques : C9.1

$$(X_1, X_2, P_1, P_2) \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$$

tel que le nouvel hamiltonien H_1^* soit nul ; on pourra poser $H_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ afin de rechercher une solution à variables séparées de la forme :

$$G_1 = F_1(X_1, \alpha_1, u) + F_2(X_2, \alpha_2, u)$$

Trouver F_1 et F_2, puis exprimer le changement de variables engendré par G_1 ; on doit retrouver une solution analogue à celle obtenue dans la question 5.

5. Orbites de transfert et assistance gravitationnelle

Partie I.

On considère un corps Q de masse m, attiré selon la loi de Newton par le Soleil S de masse M. A l'instant initial t_o, Q est situé à la distance r_o de S et possède la vitesse héliocentrique $\boldsymbol{v}_o$. On examine les trois situations suivantes :

1 – La vitesse $\boldsymbol{v}_o$ est celle d'un mouvement circulaire. Exprimer $\boldsymbol{v}_o$ en fonction de r_o et des masses. Dans la suite, cette vitesse circulaire sera désignée par $\boldsymbol{V}_{c0}$ et son module par V_{c0}.

2 – La vitesse $\boldsymbol{v}_o$ est un vecteur $\boldsymbol{V}_{c\beta}$ déduit de $\boldsymbol{V}_{c0}$ par une rotation d'angle β effectuée dans le plan du mouvement circulaire précédent. Montrer sans calcul que le demi-grand axe de l'orbite de Q vaut r_o. En déduire géométriquement l'anomalie vraie de Q à l'instant t_o, puis l'excentricité de l'orbite de Q et la durée écoulée à l'instant t_o depuis le dernier passage de Q au périhélie. Que deviennent ces résultats pour $\beta = \pi/2$? C(3.84b)

3 – La vitesse $\boldsymbol{v}_o$ est un vecteur égal à $\alpha\boldsymbol{V}_{c\beta}$, avec $0 < \alpha < \sqrt{2}$. Exprimer le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite de Q, en fonction de r_o, de α et de β. Déterminer ensuite l'anomalie vraie de Q à l'instant t_o (par son sinus et par son cosinus), et la durée écoulée à cet instant depuis le dernier passage de Q au périhélie. Montrer que les vitesses au périhélie et à l'aphélie ont pour module :

$$V = \frac{V_{c0}}{\alpha \cos\beta}\left(1 \pm \sqrt{1-\alpha^2(2-\alpha^2)\cos^2\beta}\right)$$

Partie II.

On considère maintenant, en plus du Soleil S de masse M, 2 corps ponctuels T et P de masses m et μ telles que $\mu \ll m \ll M$; on pourra alors négliger m devant M et μ devant m, et considérer que T et P suivent des mouvements képlériens héliocentriques indépendants tant qu'ils ne sont pas très voisins l'un de l'autre. Ils seront considérés comme très voisins l'un de l'autre dès que P entre dans la sphère d'influence de T elle-même supposée très petite par rapport à la distance de T au Soleil. En passant à la limite, on supposera en fait que T n'a d'influence sur P que lorsque P est confondu avec T : l'effet sur P consistera alors en un changement instantané de la direction de la vitesse relative de P par rapport à T, sans modification de son module ; cette déviation sera calculée par le formulaire du mouvement képlérien hyperbolique de foyer T, en faisant comme si P passait à une distance péricentrique r_m très petite mais non nulle, et en supposant que la vitesse asymptotique “à l'infini avant le choc” est la vitesse par rapport à T possédée par P lors de son arrivée en coïncidence avec T. On considérera enfin que tous les mouvements s'effectuent dans un même plan fixe. C

Dans le cadre de ces hypothèses, on se propose d'examiner diverses trajectoires de transfert d'une sonde spatiale entre la Terre et une planète : On cherche une trajectoire telle que la sonde, lancée depuis la Terre sur une certaine orbite, revienne une fois vers la Terre et s'en serve alors comme d'un tremplin gravitationnel pour être propulsée vers la planète visée.

Pour les applications numériques, T désignera la Terre et P la sonde spatiale ; on utilisera les données suivantes :

- vitesse circulaire en repère héliocentrique à 1 ua : $V_1 = 29,785$ km/s
- vitesse circulaire en repère géocentrique à 1 rayon terrestre : $v_1 = 7,905$ km/s

4 – L'orbite héliocentrique de T est circulaire de rayon r_o et de période T_o ; sa vitesse est donc $\mathbf{V}_{c0}$. A l'instant t_o, P et T sont confondus et P quitte T avec une vitesse héliocentrique $\boldsymbol{v}_o$ colinéaire à celle de T et de même sens ; P amorce alors une première orbite héliocentrique (O_1) et, pour que P revienne rencontrer T, on fait en sorte que

la période de (O_1) soit un multiple entier k de T_o.

(a) Déterminer $\boldsymbol{v}_o$ en fonction de k et de V_{c0} pour qu'il en soit ainsi. Calculer aussi les distances périhélique et aphélique et la vitesse héliocentrique de P au périhélie et à l'aphélie. Calculer enfin la vitesse relative de P par rapport à T lorsque P revient en coïncidence avec T au bout du temps kT_o.

(b) A la suite de ce retour en T, le point P amorce une autre orbite héliocentrique (O_2). Montrer que, quelle que soit la déviation subie (donc quel que soit r_m), le demi-grand axe de (O_2) est nécessairement plus petit que celui de (O_1). La vitesse héliocentrique au point de départ de cette nouvelle orbite peut être mise sous forme d'un vecteur $\alpha \boldsymbol{V}_{c\beta}$ (notations de la partie I). Déterminer α et β en fonction de k, V_{c0}, r_m et v_1.

(c) Application numérique : Pour $k = 2$, r_o = 1 ua et r_m = 1,05 rayon terrestre , calculer les valeurs du demi-grand axe et des distances périhélique et aphélique des deux orbites héliocentriques (O_1) et (O_2) (On pensera à utiliser les résultats de la partie I). Suite à ce retour de la sonde vers la Terre, l'action de la Terre permet-elle à la sonde d'atteindre ensuite l'orbite de Vénus ?

5 – L'orbite héliocentrique de T est toujours circulaire de rayon r_o et de période T_o. Comme précédemment, à l'instant t_o, P s'éloigne de T avec une vitesse héliocentrique $\boldsymbol{v}_o$ colinéaire à celle de T et de même sens, mais il amorce maintenant une orbite héliocentrique (O_3) de période T_3 légèrement supérieure au double de T_o. Le demi-grand axe de cette orbite est alors noté : $a_3 = \rho r_o$, avec $\rho > 2^{2/3}$. Sur une telle orbite, P ne rencontrera généralement plus le point T mais, grâce à une correction de trajectoire adéquate, on va modifier ultérieurement (O_3) en (O_4) pour faire revenir P vers T.

(a) Calculer, en fonction de ρ, de T_o et de V_{c0}, l'excentricité e_3 de l'orbite (O_3), le temps écoulé depuis t_o lorsque P arrive pour la première fois à l'aphélie de (O_3) et la vitesse V_{3aph} au passage en ce point.

C'est à l'aphélie de (O_3) qu'on effectue la correction de trajectoire : Une impulsion $\Delta \boldsymbol{V}$, opposée à $\boldsymbol{V}_{3aph}$, transforme (O_3) en (O_4), cette nouvelle orbite étant tangente à la précédente et sa période T_4 étant cette fois légèrement inférieure à T_3. Son demi-grand axe est noté : $a_4 = \sigma r_o$, avec $\sigma < \rho$. De cette façon, l'orbite (O_4) vient recouper l'orbite de T en 2 points I_1 et I_2. On supposera que P arrive pour la première fois en ces points aux instants respectifs t_1 et t_2 avec $t_2 > t_1$. On se propose de trouver l'équation devant être vérifiée par ρ et σ pour que P et T arrivent en même temps en l'un de ces points.

(b) Calculer, en fonction de ρ, de σ, de T_o et de V_{c0}, l'excentricité e_4 de (O_4), la vitesse V_{4aph} à l'aphélie, l'impulsion $\Delta \boldsymbol{V}$, les anomalies vraie et excentrique de P aux points I_1 et I_2.

(c) En déduire les durées $d_1 = t_1 - t_o$ et $d_2 = t_2 - t_o$ du trajet suivi par P depuis le départ jusqu'aux premiers passages aux points I_1 et I_2. En déduire aussi les durées d'_1 et d'_2 écoulées depuis t_o lorsque T passe pour la deuxième fois aux points I_1 et I_2. Vérifier que pour $\rho = 1,64$ et $\sigma = 1,57538094$, P et T se retrouvent en même temps en l'un de ces points.

(d) Calculer la vitesse relative de P par rapport à T au moment de cette rencontre (module et composantes radiale et orthoradiale). Faire l'application numérique pour $\rho = 1,64$ et $\sigma = 1,57538094$.

(e) Pour $\rho = 1,64$, $\sigma = 1,57538094$, et $r_m = 1,05$ rayon terrestre, calculer la vitesse héliocentrique de la sonde juste après cette rencontre avec T. En déduire le demi-grand axe et la distance aphélique de la nouvelle orbite héliocentrique (O_5) suivie désormais par la sonde. Quelles planètes la sonde peut-elle ainsi atteindre ?

(f) Comparer l'énergie que la sonde a dû fournir pour atteindre l'aphélie de (O_5) en suivant les orbites (O_3), (O_4) et (O_5), à l'énergie minimale qu'elle aurait dû fournir pour atteindre cette distance aphélique directement (c'est-à-dire sur une seule orbite képlérienne en partant de la Terre).

(g) Qu'y aurait-il de changé dans cette question 2 si, au lieu d'être circulaire, l'orbite de T était elliptique d'excentricité e_0, de période T_o et de distance périhélique r_o, les points P et T étant confondus à l'instant t_o, chacun au périhélie de leur orbite ?

Dans la partie II, les questions 1 et 2 sont indépendantes.

6. Assistance gravitationnelle de Jupiter pour la sonde Ulysse

On se propose d'examiner la possibilité d'envoyer une sonde spatiale dans un plan perpendiculaire à l'écliptique, permettant ainsi l'observation des zones polaires du Soleil (mission ULYSSE). Pour économiser l'énergie de lancement depuis l'orbite terrestre, on envoie d'abord la sonde passer tout près de Jupiter dont l'effet est de la faire "rebondir" dans une direction qui dépend des conditions de vitesse dans lesquelles elle s'est approchée de cette planète.

Dans tout le problème, on considèrera que la Terre décrit en 1 an une orbite circulaire de rayon $a_0 = 1$ ua, et que Jupiter décrit dans ce même plan (écliptique) et dans le même sens, une orbite circulaire de rayon $a_J = 5,202$ ua.

La masse des planètes étant très petite devant celle du Soleil, on peut considérer que le mouvement de la sonde est régi par la seule attraction solaire, sauf lorsqu'elle passe dans le voisinage immédiat des planètes ; ce voisinage, ou *sphère d'influence*, est la portion d'espace entourant chaque planète, à l'intérieur de laquelle les mouvements sont avantageusement décrits dans un repère lié à cette planète. On considérera que dans la sphère d'influence d'une planète, les mouvements ne sont dus qu'à l'attraction de cette planète. On négligera la durée du passage de la sonde dans la sphère d'influence d'une planète, mais on ne négligera pas le changement d'orientation du vecteur vitesse subi lors de ce passage. C

On aura besoin des seules données numériques suivantes :

- vitesse parabolique en repère héliocentrique à 1 ua : $V_0 = 42,122$ km/s
- vitesse parabolique en repère géocentrique à 1 rayon terrestre : $v_0 = 11,180$ km/s C(3.86)
- rapport des masses de la Terre et de Jupiter : $\mu = \dfrac{m_J}{m_T} = 317,94$
- rapport des rayons de la Terre et de Jupiter : $\rho = \dfrac{R_J}{R_T} = 11,194$

- rapport de a_J et R_J : $\frac{a_J}{R_J} = 10900$.

Pour chaque question, on exprimera d'abord les réponses en fonction de ces quantités ou de celles introduites dans le texte, et on terminera par l'application numérique.

1 – Quels sont, en km/s, les vitesses V_T et V_J de la Terre et de Jupiter ?

2 – On suppose tout d'abord qu'entre la Terre et Jupiter, la sonde parcourt une orbite (T_0) dite *orbite de Transfert*, elliptique, tangente extérieurement à l'orbite de la Terre, et intérieurement à celle de Jupiter (et coplanaire à ces deux orbites). Le sens de parcours sur (T_0) est le même que celui de la Terre ou de Jupiter sur leur orbite.

(a) Déterminer, pour cette orbite de transfert, le demi-grand axe $a_{(T_0)}$, l'excentricité $e_{(T_0)}$, la période de révolution $P_{(T_0)}$, les vitesses au périhélie (c'est-à-dire au voisinage de la Terre), et à l'aphélie (au voisinage de Jupiter).

(b) En déduire la vitesse relative de la sonde par rapport à la Terre ou à Jupiter lorsqu'elle est au voisinage de l'une ou de l'autre de ces planètes.

3 – L'orbite de transfert est maintenant (T_1), exactement coplanaire à l'écliptique et tangente extérieurement à l'orbite terrestre, mais avec une distance aphélique très légèrement différente de a_J et valant $a_J(1+\varepsilon)$. Ainsi, le passage de la sonde à l'aphélie a lieu (ou aurait lieu en l'absence de perturbation par Jupiter) sur la ligne Soleil-Jupiter, un peu en deçà ou au delà de Jupiter. Dans ces conditions, le passage de la sonde dans la sphère d'influence de Jupiter s'effectue sur une orbite jovicentrique hyperbolique, coplanaire aux orbites précédentes, de foyer Jupiter, et dont une asymptote est perpendiculaire à la direction Soleil-Jupiter et située à la distance $b = \varepsilon a_J$ de Jupiter. La vitesse d'entrée sur cette orbite : $\overrightarrow{V_\infty^{(0)}}$, est la vitesse relative de la question 2 - b) à laquelle s'ajoute une petite correction provenant de b.

(a) Déterminer cette correction en fonction de ε ; on pourra pour cela effectuer un développement de la vitesse aphélique limité à l'ordre 1 en ε. Faire l'application numérique avec $\varepsilon = 10^{-3}$.

On négligera cette correction dans toute la suite, de sorte que la vitesse d'entrée sur l'orbite hyperbolique est, quelque soit b, la vitesse relative de la question 2 - b).

(b) Déterminer la vitesse de sortie $\overrightarrow{V_\infty^{(1)}}$ par son module et par l'angle de déviation δ qu'elle fait avec la vitesse d'entrée. On exprimera cette déviation en fonction de r_m (distance minimum du survol de Jupiter), de v_0, de ρ et de μ. En déduire que, pratiquement, la déviation ne peut pas dépasser $158°$ environ. Exprimer une relation permettant de calculer b en fonction de r_m et de δ, et calculer b lorsque $r_m = R_J$. C(3.88)

(c) Entre quelles limites est compris le module de la vitesse de la sonde *en repère héliocentrique* après le survol de Jupiter ?

(d) Entre quelles limites est comprise *en repère héliocentrique* la déviation de la sonde provoquée par ce survol ?

(e) La vitesse acquise par la sonde peut-elle être suffisante pour qu'elle soit éjectée du système solaire ? Sinon, jusqu'à quelle distance du Soleil peut-elle aller ?

4 – On considère maintenant une orbite de transfert (T_2) dont la distance aphélique est exactement égale à a_J (comme (T_0)), mais (T_2) n'est plus coplanaire aux orbites de la Terre et de Jupiter, de sorte que le passage de la sonde à l'aphélie se produit un peu "au-dessus" ou "en-dessous" de Jupiter (survol des calottes polaires de Jupiter). On désigne encore par b la distance à laquelle passerait la sonde au-dessus ou en-dessous plan orbital de Jupiter si elle n'était pas perturbée par lui. La ligne des nœuds de cette orbite sur l'ecliptique est perpendiculaire à la direction Soleil-Jupiter et son inclinaison sur l'écliptique vaut alors sensiblement b/a_J.

On peut considérer que l'orbite (T_2) est issue d'une transformation de l'orbite (T_0) : Lorsque la sonde passe, sur (T_0), à l'anomalie vraie $w = 90°$, on lui donne une petite impulsion $\overrightarrow{\Delta V}$ perpendiculairement à la direction

Soleil-sonde et hors du plan de (T_0), mais ajustée de façon à conserver le module de la vitesse ; cela revient à “plier” (T_0) autour de la direction Soleil-sonde, sans modifier la distance aphélique.

Lorsque, à l’aphélie de (T_2), la sonde pénètre dans la sphère d’influence de Jupiter, elle décrit, en repère jovicentrique, une orbite hyperbolique de foyer Jupiter, avec la même vitesse d’entrée $\overrightarrow{V_\infty^{(0)}}$ qu’avec (T_0), mais le plan de cette orbite est maintenant perpendiculaire à la direction Soleil-Jupiter. La déviation dans ce plan est toujours limitée aux $158°$.

(a) Préciser, en module et direction, les limites de la vitesse héliocentrique de la sonde après le survol de Jupiter.

(b) Après ce survol, la sonde décrit autour du Soleil une nouvelle orbite képlerienne (T') ayant une certaine inclinaison i par rapport à l’écliptique. Quelle est la valeur maximale de i ? A quelle déviation δ en repère jovicentrique correspont-elle ? Pour quelle valeur $\bar{b}$ de b obtient-on cette inclinaison maximale ?

(c) Montrer que pour avoir $i = 90°$, il faudrait que $\overrightarrow{V_\infty^{(0)}}$ soit supérieur ou égal en module à V_J.

(d) Déterminer l’impulsion $\overrightarrow{\Delta V}$ qu’il faut donner à la sonde pour transformer (T_0) en une orbite (T_2) dont l’aphélie est situé à la distance $\bar{b}$ au dessus du plan de l’orbite de Jupiter.

5 – Pour obtenir l’inclinaison de $90°$, on adopte finalement une orbite de transfert (T_3) parabolique, tangente à l’orbite terrestre et quasi-coplanaire à l’écliptique.

(a) Calculer la vitesse héliocentrique de la sonde à la distance a_J (module, composantes radiale selon la direction Soleil-sonde et orthoradiale).

(b) Calculer la vitesse jovicentrique d’entrée $\overrightarrow{V_\infty^{(0)}}$ de la sonde dans la sphère d’influence de Jupiter (module, composantes radiale selon Soleil-sonde et orthoradiale).

(c) Après une trajectoire jovicentrique de la sonde dans un certain plan, la vitesse jovicentrique de sortie $\overrightarrow{V_\infty^{(1)}}$ a même module qu'à l'entrée, et peut se décomposer en 3 composantes v_1, v_2, v_3 (radiale selon Soleil-sonde, orthoradiale dans le plan de l'orbite de Jupiter et orthoradiale perpendiculairement à ce plan). Il correspond à cette vitesse de sortie une vitesse héliocentrique à trois composantes : v_1', v_2', v_3' .

Dans le cas où $v_1' = v_2' = 0$, la nouvelle orbite héliocentrique (T') a la disposition cherchée ($i = 90°$). Calculer v_3' dans ce cas.

En déduire les caractéristiques de l'orbite (T') , notamment la distance à laquelle la sonde passe "au dessus" des zones polaires du Soleil.

Les questions 3, 4 et 5 sont indépendantes.

7. Envoi d'une sonde vers Vénus

On considère que la Terre et Vénus décrivent autour du Soleil des orbites circulaires et coplanaires, de rayons respectifs a_t et a_v. Leurs masses sont très petites devant celle du Soleil mais très grandes devant celle de la sonde. On appelle (T) et (V) les sphères d'influence respectives de la Terre et de Vénus. Le mouvement de la sonde sera considéré comme keplérien héliocentrique à l'extérieur de ces sphères d'influence, et comme keplérien planétocentrique à l'intérieur de celles-ci. On négligera la durée du passage de la sonde dans (T) et (V), mais on ne négligera pas les changements de vitesse (ou déviations) occasionnés par l'approche de ces planètes. C

On aura besoin des seules données numériques suivantes :

- $a_t = 1$ UA et $a_v = 0,72$ UA ; période de la Terre autour du Soleil : 1 an
- Vitesse circulaire héliocentrique à 1 UA : $V_t = 29,8$ km/s C(3.84)
- Vitesse circulaire géocentrique à 1 rayon terrestre : $v_0 = 7,88$ km/s
- Rapport des masses de Vénus et de la Terre : $\dfrac{m_v}{m_t} = 0,813$
- Rapport des rayons de Vénus et de la Terre : $\dfrac{R_v}{R_t} = 0,947$, avec $R_t = 6370$ km

1 – Au départ de la Terre, à la sortie de (T), on donne à la sonde la vitesse minimale, parallèle à celle de la Terre, suffisante pour atteindre l'orbite de Vénus. On demande :

(a) la vitesse héliocentrique de la sonde à la sortie de (T) et à l'entrée de (V),

(b) le temps mis par la sonde pour aller de la Terre à Vénus, ainsi que les positions relatives de la Terre, de Vénus et du Soleil au moment du lancement de la sonde et au moment de son arrivée près de Vénus,

(c) la vitesse de la sonde par rapport à Vénus à l'entrée de (V).

2 – On désire que la sonde, après son survol de Vénus, ait une orbite héliocentrique elliptique dont la période soit exactement 9/10 de celle de Vénus. On demande :

(a) le demi-grand axe de cette nouvelle orbite héliocentrique, la vitesse héliocentrique de la sonde à la sortie de (V) en module et en direction (angle que fait cette vitesse avec celle de Vénus), puis l'excentricité et les nouvelles distances périhéliques et aphéliques [on pensera à représenter vectoriellement la composition des vitesses à l'entrée et à la sortie de (V)],

(b) la déviation du vecteur vitesse de la sonde par rapport à Vénus durant la traversée de (V) et l'altitude minimale atteinte lors du survol de Vénus,

(c) au bout de combien de temps la sonde pourra-t-elle passer de nouveau au voisinage de Vénus ? Si, lors de ce nouveau survol, la sonde passe exactement à la même altitude minimale qu'au premier passage, quels seront le demi-grand axe et les distances périhéliques et aphéliques de l'orbite héliocentrique consécutive ?

8. Perturbations d'un satellite par le frottement atmosphérique

On considère le système isolé constitué d'un satellite S de masse m, en orbite autour de la Terre supposée sphérique de centre O, de masse M, de rayon R et entourée d'une atmosphère possédant aussi la symétrie sphérique : En un point situé à la distance r de O, la masse volumique ρ ne dépend que de r et, dans l'atmosphère, elle suit la loi : C(5.27)

$$\rho(r) = \rho_0 \exp[-k(r - r_0)] \qquad \text{où } \rho_0, r_0 \text{ et } k \text{ sont des constantes positives.}$$

L'effet du frottement atmosphérique sur S est modélisé par l'accélération suivante :

$$\boldsymbol{F} = -\alpha \dot{\boldsymbol{r}} = -b\rho(r)|\dot{\boldsymbol{r}}|^2\, \boldsymbol{t} \qquad \text{où } b \text{ est une constante positive}$$

Dans ces expressions, $\boldsymbol{r}$ est le vecteur $\boldsymbol{OS}$ et r son module, et $\boldsymbol{t}$ est le vecteur unitaire de la vitesse $\dot{\boldsymbol{r}}$ de S. C(4.38)

1 – Etablir, en la justifiant, l'équation différentielle vectorielle du mouvement relatif de S autour de O.

2 – Dans toute la suite, on considérera que m/M est une quantité négligeable et remplacée par zéro, et l'on pose $\mu = KM$ où K est la constante de la gravitation universelle. On se propose d'établir certaines caractéristiques du mouvement keplérien osculateur de S sous l'effet du frottement atmosphérique. On a obtenu en cours les équations donnant les variations des "constantes" képlériennes h et $\boldsymbol{e} = e\,\boldsymbol{u}_0$ en fonction de la perturbation $\boldsymbol{F}$; avec $\boldsymbol{F} = -\alpha\,\dot{\boldsymbol{r}}$, elles s'écrivent :

$$\frac{dh}{dt} = -\alpha\,|\dot{\boldsymbol{r}}|^2$$
$$\mu\,\frac{d\boldsymbol{e}}{dt} = -2\alpha\left(|\dot{\boldsymbol{r}}|^2\,\boldsymbol{r} - r\dot{r}\,\dot{\boldsymbol{r}}\right)$$

En utilisant le formulaire du mouvement képlérien elliptique, en déduire que les équations aux variations pour le demi-grand axe a et l'excentricité e peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = -2\alpha\frac{2a-r}{r}$$
$$\frac{de}{dt} = -2\alpha\frac{a(1-e^2)}{r}\cos E$$

où E est l'anomalie excentrique du mouvement képlérien osculateur.

3 – On effectue le changement de variables : $n\,dt = \frac{r}{a}\,dE$ où n est le moyen mouvement osculateur.

Exprimer $\frac{da}{dE}$ et $\frac{de}{dE}$. En déduire que si q et Q sont respectivement les distances du périgée et de l'apogée, leurs dérivées par rapport à E sont égales à :

$$\frac{dq}{dE} = -2\,\frac{\alpha}{n}\,q\,(1-\cos E) \qquad \text{et} \qquad \frac{dQ}{dE} = -2\,\frac{\alpha}{n}\,Q\,(1+\cos E)$$

En remplaçant α par son expression en fonction de b, ρ et $|\dot{\boldsymbol{r}}|$, montrer qu'on obtient : C(5.28)

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dE} &= -2ba\rho_0\exp[-k(a-r_0)]\,q\,(1-\cos E)\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}\,\exp(kae\cos E)\\ \frac{dQ}{dE} &= -2ba\rho_0\exp[-k(a-r_0)]\,Q\,(1+\cos E)\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}\,\exp(kae\cos E)\end{aligned} \qquad (1)$$

On suppose que $ba\rho_0$ est une quantité très petite, de sorte que les variations de a, e, q et Q sont elles-mêmes très petites. Alors, on peut considérer que dans les seconds membres des équations (1), ces variables sont des constantes pendant tout le temps où E varie de 0 à 2π. Le développement de ces seconds membres en série de

Fourier de la variable E possède un terme indépendant de E qui permet d'évaluer l'amplitude des variations Δq et ΔQ subies par q et Q sur un tour d'orbite :

$$\Delta q = \int_0^{2\pi} \left(\frac{dq}{dE}\right) dE \qquad \text{et} \qquad \Delta Q = \int_0^{2\pi} \left(\frac{dQ}{dE}\right) dE$$

On suppose en outre que l'excentricité est suffisamment petite pour que l'on puisse développer les seconds membres de (1) en puissances de e et ne conserver que les termes de degré inférieur ou égal à 1.

4 – Effectuer ces développements de façon à exprimer Δq et ΔQ en fonction des fonctions de Bessel J_0 et J_1, sachant que, pour c réel, on a : C(3.116a)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \exp(c\cos E)\, \cos^n E\, dE = \begin{cases} J_0(ic) & \text{si } n = 0 \qquad \text{où} \qquad i = \sqrt{-1} \\ \frac{1}{i} J_1(ic) & \text{si } n = 1 \\ J_0(ic) - \frac{1}{ic} J_1(ic) & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

<u>Application numérique</u> : Le satellite est une sphère de 1 m de rayon et a une masse de 100 kg, de sorte que b vaut $\frac{\pi}{100}$ m^2/kg ($b = \frac{1}{2} C_D \frac{A}{m}$ avec $C_D = 2$, *cf.* cours). A l'instant initial, le périgée de S est à 300 km d'altitude et l'apogée à 700 km (on prendra R égal au rayon équatorial donné dans le cours). Au périgée et à l'apogée, la masse volumique de l'atmosphère vaut respectivement : $\rho_1 = 5.\ 10^{-11}\ \mathrm{kg/m^3}$ et $\rho_2 = 2.\ 10^{-13}\ \mathrm{kg/m^3}$

5 – Calculer a et e, puis ρ_0 et k en prenant $r_0 = q$. Vérifier que $ba\rho_0$ est bien une quantité très petite.

6 – Calculer Δq et ΔQ sachant que pour $c = 2{,}760\,730$, on a :

$$J_0(ic) = 4{,}029\,935 \qquad \text{et} \qquad J_1(ic) = 3{,}186\,121\, i$$

9. Perturbations d'un satellite par le J_2 de la Terre

On se propose de construire et d'intégrer les équations du mouvement d'un satellite artificiel, dans le cas où son orbite keplérienne osculatrice reste dans le voisinage d'un cercle lui-même proche du plan équatorial de la Terre. On veut donc exprimer ces équations dans des variables adaptées aux faibles excentricités et aux faibles inclinaisons. Dans tout ce problème, les notations utilisées sont celles du cours.

Partie A : Construction de quelques développements du mouvement képlérien elliptique.

On considère un point S animé d'un mouvement képlérien elliptique de foyer O de demi-grand axe a et d'excentricité e. Dans toute la suite, on supposera que l'excentricité est suffisamment faible pour que l'on puisse limiter les développements au degré 2 en e (degré 2 inclus). On connait le développement en série de Fourier de la quantité a/r : C(3.117)

$$\frac{a}{r} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2J_k(ke)\ \cos kM$$

A1. A l'aide du développement des fonctions de Bessel $J_k(x)$ en série entière de x, exprimer $\frac{a}{r}$ sous forme d'un développement limité au degré 2 en excentricité. C(3.121)

A2. En posant : $X = e\ \exp\sqrt{-1}M$ et $\bar{X} = e\ \exp-\sqrt{-1}M$, en déduire une expression de $\frac{a}{r}$ sous forme d'un polynôme en X et $\bar{X}$, de degré 2 par rapport à l'ensemble de ces variables. C(3.145)

A3. A partir de la loi des aires : $r^2dw = na^2\sqrt{1-e^2}\,dt$, déduire de (A2) une expression de $\dfrac{dw}{dM}$ sous forme d'un polynôme de degré 2 en X et $\bar{X}$. Par intégration, en déduire ensuite $\sqrt{-1}(w-M)$ sous forme d'un polynôme de degré 2 en X et $\bar{X}$.

A4. En utilisant le développement limité de la fonction exponentielle au voisinage de zéro, exprimer $\theta = \exp\sqrt{-1}(w-M)$ sous forme d'un polynôme de degré 2 en X et $\bar{X}$. On devra trouver : C(6.50)

$$\exp\sqrt{-1}(w-M) = 1 + X - \bar{X} + \frac{9}{8}X^2 - \frac{1}{8}\bar{X}^2 - X\bar{X}$$

A5. Déduire des calculs précédents, les développements de $\left(\frac{a}{r}\right)^3$ et de $\left(\frac{a}{r}\right)^3\theta^2$ sous forme de polynômes de degré 2 en X et $\bar{X}$. C(3.146)

Partie B : Développement du potentiel d'un corps sphéroïdal.

On considère une Terre sphéroïdale de centre O, de masse m et de rayon équatorial R. Soit R_o un repère principal d'inertie de la Terre. Le satellite S est repéré dans R_o par des coordonnées sphériques r (distance au point O), λ (longitude), ϕ (latitude).

B1. Donner, sans démonstration, l'expression du développement en harmoniques sphériques du potentiel de gravitation d'une telle Terre au point S, exprimé en fonction des coordonnées sphériques de S. Ce développement est désigné dans la suite par $U(S)$. C(4.30)

B2. Exprimer $\sin\phi$ en fonction de l'inclinaison i de l'orbite de S, et de l'angle $\omega + w$ que fait la direction OS avec le nœud ascendant. C(5.30)

B3. On pose :

$$L = \Omega + \omega + M = \varpi + M$$

$$Z = \sin\frac{i}{2}\exp\sqrt{-1}(L-\Omega) \qquad \text{et} \qquad \bar{Z} = \sin\frac{i}{2}\exp-\sqrt{-1}(L-\Omega)$$

Déduire de (B2.) qu'on a :

$$\sqrt{-1}\sin\phi = (Z\theta - \bar{Z}\bar{\theta})\sqrt{1 - Z\bar{Z}}$$

B4. En utilisant les résultats du (A), montrer que la partie perturbatrice du potentiel $U(S)$, développée jusqu'aux termes de degré 2 en excentricité et inclinaison et limitée au terme en J_2, se met sous la forme : C(5.53)

$$U_1(S) = Km\, J_2\,\frac{R^2}{a^3}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(X + \bar{X}) + \frac{9}{8}(X^2 + \bar{X}^2) + \frac{3}{4}X\bar{X} + \frac{3}{2}(Z^2 + \bar{Z}^2) - 3Z\bar{Z}\right)$$

B5. On pose : $x = e\ \exp\sqrt{-1}\varpi$ et $z = \sin\frac{i}{2}\ \exp\sqrt{-1}\Omega$. On désigne encore par $\bar{x}$ et $\bar{z}$ les conjugués de x et de z. Exprimer X, $\bar{X}$, Z et $\bar{Z}$ en fonction de ces variables et de L. En déduire $U_1(S)$ exprimé en fonction des 6 variables : a, x, $\bar{x}$, z, $\bar{z}$ et L.

Partie C : Equations du mouvement en variables a, x, $\bar{x}$, z, $\bar{z}$ et L.

On prendra dans le cours les équations de Lagrange exprimées pour ces variables. C(5.52)

C1. Calculer les variations $\frac{da}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{dL}{dt}$ en limitant leurs expressions aux termes de degrés 0 et 1 par rapport à l'ensemble des variables x, $\bar{x}$, z et $\bar{z}$. Déterminer aussi l'équation donnant les variations du moyen mouvement n. C22.1.2

C2. Effectuer sur ces équations le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} a &= a_o(t) + \Delta a(a_o, x_o, \bar{x}_o, L_o) \\ x &= x_o(t) + \Delta x(a_o, x_o, \bar{x}_o, L_o) \\ z &= z_o(t) + \Delta z(a_o, z_o, \bar{z}_o, L_o) \\ L &= L_o(t) + \Delta L(a_o, x_o, \bar{x}_o, L_o) \end{aligned}$$

On supposera que Δa, Δx, Δz et ΔL sont des fonctions infiniment petites du premier ordre en J_2, tandis que a_o, x_o, z_o et L_o sont des fonctions du temps, d'ordre zéro en J_2 car elles dépendent avant tout des constantes arbitraires qu'on introduira plus tard en intégrant les équations. On développera les seconds membres des équations au voisinage de a_o, x_o, z_o et L_o, et on ne conservera, dans les deux membres de chaque équation, que des termes d'ordre 0 et 1 en J_2.

C3. Dans les seconds membres de ces équations, on remarque que certains termes dépendent de L_o : Ce sont les termes périodiques. Ceux qui n'en dépendent pas sont qualifiés de termes séculaires. En identifiant les variations $\frac{da_o}{dt}$, $\frac{dx_o}{dt}$, $\frac{dz_o}{dt}$ et $\frac{dL_o}{dt}$ aux termes séculaires des seconds membres des équations établies en (C2), on obtient des équations de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{da_o}{dt} &= 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a_o(t) = a_{oo} = \text{ constante} \\ \frac{dx_o}{dt} &= \sqrt{-1}\omega_1 x_o \\ \frac{dz_o}{dt} &= \sqrt{-1}\omega_2 z_o \\ \frac{dL_o}{dt} &= n_{oo} + \omega_3 = N = \text{ constante} \end{aligned}$$

où n_{oo} est une constante reliée à a_{oo} par la loi de Kepler : $n_{oo}^2 a_{oo}^3 = Km$.

(a) Donner ω_1, ω_2 et ω_3 en fonction de a_{oo} de n_{oo} de J_2 et de R.

(b) Avec les valeurs de Km, de J_2 et de R prises dans le cours, calculer a_{oo} pour que N soit égal à 1 tour en 12 heures.

(c) Calculer les valeurs de ω_1 et ω_2 pour cette valeur de a_{oo}, puis les périodes correspondantes.

(d) Intégrer les équations donnant x_o et z_o. On déterminera les constantes d'intégration en supposant qu'à l'instant $t = 0$, on a $e = \|x_o\| = 0,02$ et $\sin\frac{i}{2} = \|z_o\| = 0,015$ tandis que $\varpi = \arg(x_o) = 20°$ et $\Omega = \arg(z_o) = 135°$.

C4. Dans les équations établies en (C2), identifier les variations $\frac{d\Delta a}{dt}$, $\frac{d\Delta x}{dt}$, $\frac{d\Delta z}{dt}$ et $\frac{d\Delta L}{dt}$ aux termes périodiques présents dans les seconds membres correspondants. Tenant compte des solutions obtenues en (C3), calculer ensuite Δa, Δx, Δz et ΔL en fonction du temps.

10. Orbite héliosynchrone pour le satellite SPOT

Toutes les données numériques non précisées dans le texte du problème et nécessaires à sa solution, sont à prendre dans le cours. Les notations sont aussi celles du cours.

On se propose ici d'examiner quelques aspects du mouvement du satellite SPOT, et notamment l'héliosynchronisme de son orbite. Dans tout ce problème, pour les applications numériques, on prendra le demi-grand axe de l'orbite de SPOT égal à 7000 km.

1 – Dans l'hypothèse d'une Terre sphérique, déterminer la période de révolution et le moyen mouvement d'un satellite de la Terre, en fonction du demi-grand axe de son orbite. Calculer ces deux quantités pour le satellite SPOT.

2 – On considère que, dans toute la suite, la Terre a la forme d'un sphéroïde aplati et on suppose que, dans cette question, on limite le développement de son potentiel de gravitation au terme en J_2.

(a) Donner, sans démonstration, l'expression d'ordre 1 en J_2, de la partie séculaire de la fonction perturbatrice, notée $< U_{J_2} >$, exprimée en fonction des éléments orbitaux a, e et i. C(5.55)

(b) En déduire l'expression des variations séculaires des éléments a, e, i et Ω. C(5.79)

(c) Calculer l'inclinaison moyenne sur l'équateur que doit avoir l'orbite du satellite SPOT, pour que le mouvement séculaire du nœud de son orbite s'effectue dans le sens direct, à raison de 1 tour en 365.2563 jours (orbite héliosynchrone). On supposera pour cela que l'excentricité moyenne de l'orbite du satellite est nulle. C(5.84)

3 – On suppose que, dans cette question, le développement du potentiel de la Terre est limité aux termes en J_2 et J_4.

(a) Montrer que le terme en J_4 de ce développement, engendre un terme séculaire, noté $< U_{J_4} >$, égal à : C(5.58)

$$< U_{J_4} >= -Km\, J_4\, \frac{R^4}{a^5} \left\{ \left(\frac{105}{64} \sin^4 i - \frac{15}{8} \sin^2 i + \frac{3}{8} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) + \left(-\frac{35}{16} \sin^4 i + \frac{15}{8} \sin^2 i \right) \frac{3}{4} e^2 \cos 2\omega \right\} (1 - e^2)^{-7/2}$$

Dans cette expression, ω est l'argument du péricentre. Pour l'obtenir, on pourra calculer la valeur moyenne par rapport à M (anomalie moyenne), des quantités $\left(\frac{a}{r}\right)^n \sin pw$ et $\left(\frac{a}{r}\right)^n \cos pw$ (où w est l'anomalie vraie) pour les quelques valeurs de n et de p qui interviennent dans le terme en J_4. On pensera à effectuer l'intégration sur w plutôt que sur M. C(5.56)

(b) En déduire l'expression de la contribution du J_4 au mouvement séculaire du nœud de l'orbite du satellite.

(c) Tenant compte des contributions du J_2 et du J_4 à ce mouvement, redéterminer l'inclinaison moyenne de l'orbite de SPOT de façon à ce que son orbite soit héliosynchrone. On pourra déterminer cette inclinaison par itérations, en partant de la valeur obtenue en 2c. On supposera encore que l'excentricité moyenne de l'orbite est nulle.

4 – Dans cette question, on limite le développement du potentiel de la Terre à sa partie képlérienne et on considère que la perturbation du satellite SPOT est uniquement due au frottement atmosphérique. On suppose que l'accélération perturbatrice due à ce frottement est de la forme :

$$\gamma_f = -\alpha V^2 \boldsymbol{u}$$

où $\boldsymbol{V}$ est la vitesse képlérienne osculatrice du satellite, V son module et $\boldsymbol{u}$ son vecteur unitaire. α est un paramètre physique et, dans les applications numériques, on prendra $\alpha = 10^{-13} m^{-1}$. C(4.38)

(a) Le frottement atmosphérique ainsi modélisé modifie-t-il le plan orbital du satellite ? Justifiez votre réponse.

(b) Montrer que le demi-grand axe varie suivant l'expression :

$$\frac{da}{dt} = -2na^2\alpha\left(\frac{1+e^2+2e\cos w}{1-e^2}\right)^{3/2}$$

On pourra utiliser l'expression des variations de a issue directement des variations de l'intégrale première de l'énergie. C(5.18)

(c) En déduire les variations séculaires du demi-grand axe et du moyen mouvement du satellite SPOT. Faire l'application numérique en considérant que l'excentricité est nulle. De combien de mètres varie le demi-grand axe du satellite SPOT en un tour d'orbite ?

(d) Ces variations séculaires s'écrivent : $a = a_0(1+\beta_1 t)$ et $n = n_0(1+\beta_2 t)$. Du fait de ces variations, on ne peut plus avoir une orbite héliosynchrone avec une inclinaison moyenne strictement constante. En remplaçant a et n par $a_0(1+\beta_1 t)$ et $n_0(1+\beta_2 t)$ dans l'expression qui a permis, en 2c, de calculer l'inclinaison de l'orbite héliosynchrone, déterminer cette inclinaison sous la forme d'un développement limité : $i = i_0 + i_1 t$, où i_0 est l'inclinaison trouvée en 2c, et où i_1 est une quantité à déterminer. On considérera toujours que l'excentricité est nulle.

5 – Dans cette question, on s'intéresse maintenant aux perturbations du satellite SPOT par le Soleil. On suppose que l'orbite du satellite est héliosynchrone, circulaire, inclinée sur l'équateur de l'angle i déterminé en 2c (mouvement du nœud dû au terme en J_2). On suppose en outre que l'orbite géocentrique du Soleil est circulaire, de rayon a', et située dans le plan équatorial de la Terre. Enfin, la période de révolution du Soleil est égale à 365.2563 jours

(a) En utilisant les équations du problème des trois corps, montrer que la fonction perturbatrice du satellite due au Soleil peut être réduite à l'expression : C(6.45)

$$U_S = \frac{K}{a'} \left\{ \left(\frac{a}{a'}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) + O\left((a/a')^3\right) \right\}$$

où θ désigne l'angle entre les directions géocentriques du Soleil et du satellite. On y a supposé aussi que la masse du Soleil vaut 1. C(6.48)

(b) On donne : $\cos\theta = \cos^2\frac{i}{2}\cos(L-L') + \sin^2\frac{i}{2}\cos(L+L'-2\Omega)$, où i et Ω sont l'inclinaison et le nœud de l'orbite du satellite sur l'équateur, et où L et L' sont les longitudes moyennes du satellite et du Soleil.

Montrer que la partie séculaire de U_S (partie indépendante de la longitude moyenne L du satellite) est donnée par l'expression :

$$< U_S >= K\frac{3a^2}{4a'^3}\left(\cos^4\frac{i}{2} + \sin^4\frac{i}{2} + 2\cos^2\frac{i}{2}\sin^2\frac{i}{2}\cos(2L'-2\Omega) - \frac{2}{3}\right)$$

(c) En déduire la contribution du Soleil au mouvement séculaire du nœud du satellite.

Comment doit être placé le nœud de l'orbite du satellite par rapport au Soleil pour que cette contribution soit nulle ? Calculer la valeur de cette contribution lorsque Ω est égal à $L'+\pi/4$. La prise en compte de cette contribution modifie-t-elle sensiblement la valeur de l'inclinaison de l'orbite héliosynchrone telle qu'elle a été calculée en 2c ?

11. Perturbations de l'orbite du satellite HIPPARCOS

On se propose d'étudier quelques particularités du mouvement d' HIPPARCOS. Ce satellite devait être placé sur une orbite géostationaire, mais, à cause de la défaillance de son moteur d'apogée, il se trouve "coïncé" sur une orbite de transfert dont les caractéristiques sont : altitudes respectives du périgée et de l'apogée : $h_{min} = 540$ km et $h_{max} = 35900$ km, inclinaison sur l'équateur : $i = 6°, 8$.

1 – Dans cette question préliminaire, on suppose que la Terre est sphérique de rayon $R = 6378$ km, et que sa constante d'attraction μ vaut 398600 km^3.s^{-2}.

(a) Déterminer le demi-grand axe a, la période T et l'excentricité e de l'orbite actuelle d'HIPPARCOS. C(3.12)

(b) Déterminer la durée de chaque passage du satellite à une altitude inférieure à une quantité donnée h. Faire l'application numérique avec $h = 1000$ km. C(3.24)

2 – Dans cette question, on étudie les impulsions instantanées qu'il aurait fallu donner à HIPPARCOS pour rendre géostationnaire son orbite. La Terre est encore supposée sphérique.

(a) Soit ω l'angle entre la direction du nœud ascendant de l'orbite sur l'équateur et celle du périgée. En quels points de son orbite doit se trouver le satellite pour qu'une certaine impulsion $\overrightarrow{\Delta_1 V}$ donnée à cet instant puisse rendre l'orbite coplanaire à l'équateur. Donner une condition devant alors être vérifiée par la nouvelle vitesse : $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{\Delta_1 V}$. Calculer en ces points et en fonction de ω, la distance r du satellite au centre de la Terre, et les composantes radiale et orthoradiale de sa vitesse $\overrightarrow{V}$, juste avant de donner l'impulsion.

(b) Déterminer $\overrightarrow{\Delta_1 V}$ de façon à ce que l'ancienne et la nouvelle orbite aient même demi-grand axe. Exprimer $\overrightarrow{\Delta_1 V}$ dans la base locale $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{k}$ du mouvement képlérien suivi par le satellite juste avant l'impulsion. Pour C(3.83)

quelle valeur de ω le module de cette impulsion est-il minimal ? Calculer numériquement les composantes du $\overrightarrow{\Delta_1 V}$ correspondant à ce minimum.

(c) L'orbite étant maintenant supposée coplanaire à l'équateur, avec même demi-grand axe et même excentricité qu'en 1a, en quels points de l'orbite peut-on donner au satellite une certaine impulsion $\overrightarrow{\Delta_2 V}$ de façon à rendre l'orbite géostationnaire. Calculer le vecteur $\overrightarrow{\Delta_2 V}$ correspondant. On considérera pour ce calcul que la Terre tourne sur elle-même en 86160 s.

3 – Dans cette question, on considère que la Terre, toujours sphérique, est entourée d'une atmosphère dont la masse volumique ρ décroît avec l'altitude selon la loi :

$$\rho(r) = \rho_\pi \exp(-\alpha(r-q))$$

où ρ_π et α sont deux constantes positives et $r-q$ l'altitude au dessus du périgée. HIPPARCOS subit alors une accélération due au frottement atmosphérique, dont l'expression est de la forme : $\gamma_f = -C\rho V^2 \boldsymbol{u}_1$, où C est une constante positive, V le module de la vitesse du satellite sur son orbite géocentrique et $\boldsymbol{u}_1$ le vecteur unitaire de cette vitesse.

(a) Montrer que le plan de l'orbite du satellite n'est pas perturbé par cette accélération.

(b) Montrer que les variations du demi-grand axe sont données par l'équation : C(5.18)

$$\frac{d\sqrt{a}}{dt} = -\sqrt{\mu}\, C\rho(r) \left(\frac{2a-r}{r}\right)^{3/2}$$

(c) Du fait de la très forte excentricité de l'orbite d'HIPPARCOS, les effets du frottement atmosphérique ne sont sensibles que dans le voisinage du périgée, c'est-à-dire, d'après 1b, pendant une très courte durée.

En développant le rayon vecteur képlérien en série de Taylor au voisinage d'un instant initial t_o quelconque, montrer tout d'abord que l'on peut écrire :

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_o \left(1 - \frac{\mu}{2r_o^3}(t-t_o)^2 + \frac{\mu\dot{r}_o}{2r_o^4}(t-t_o)^3\right) + \dot{\boldsymbol{r}}_o\,(t-t_o)\left(1 - \frac{\mu}{6r_o^3}(t-t_o)^2\right) + o((t-t_o)^4)$$

où $\boldsymbol{r}_o$ et $\dot{\boldsymbol{r}}_o$ sont les vecteurs position et vitesse à l'instant t_o.

Appliquer cette relation au cas où t_o représente l'instant de passage au périgée et, en introduisant la petite quantité $u = (t-t_o)/T$, en déduire que la distance r peut alors s'exprimer en fonction du temps, sous la forme :

$$r(t) = q\left[1 + \frac{2\pi^2 e}{(1-e)^3}\,u^2 + o(u^4)\right]$$

(d) En déduire $d\sqrt{a}/dt$ au voisinage du périgée, exprimé en fonction du temps sous forme d'un développement en puissances de u limité au degré 2. Intégrer cette équation entre les instants $t_o - \delta t$ et $t_o + \delta t$. On supposera pour cela que l'excentricité est constante. Faire l'application numérique avec $\delta t = 400$ s, et les valeurs des constantes : $C = 10^{-3}$ m^2.kg^{-1}, $\rho_\pi = 2\times 10^{-10}$ kg.m^{-3} et $\alpha = 0,01$ km^{-1}. En déduire la variation subie par le demi-grand axe à chaque passage au périgée.

4 – Dans cette question, la Terre est considérée comme un sphéroïde, de rayon équatorial R et de constante μ (mêmes valeurs qu'en 1). On développe son potentiel de gravitation en harmoniques sphériques, mais on limite ce développement au seul terme en J_2.

(a) Donner l'expression de la fonction perturbatrice U_1 correspondante, en fonction des coordonnées sphériques r, ϕ et λ d'HIPPARCOS, puis en fonction de r, a, i, ω et w (anomalie vraie). Pourquoi n'a-t-on pas le droit ici de développer U_1 en puissances de l'excentricité ? C(5.53)

(b) Calculer le terme constant du développement de Fourier de U_1 en anomalie moyenne M, en fonction de a, i et e, et en évitant de développer en puissances de l'excentricité. En déduire les variations séculaires des éléments ω et Ω de l'orbite d'HIPPARCOS. Calculer numériquement ces variations (on prendra $J_2 = 0,00108$). Avec quelle période la direction de l'apogée revient-elle en coïncidence avec celle d'un des nœuds ? Que peut-on en déduire concernant la possibilité de réaliser la manœuvre évoquée dans la question 2a ? C(5.55)

5 – Dans cette question, on s'intéresse maintenant aux perturbations d'HIPPARCOS par la Lune. On suppose que l'orbite géocentrique de la Lune est circulaire, de rayon a', située dans le plan équatorial de la Terre et parcourue en $27,3215$ jours.

(a) En utilisant les équations du problème des trois corps, montrer que la fonction perturbatrice du satellite due à la Lune peut être réduite à l'expression : C(6.45)

$$U_L = \frac{Km}{a'}\left\{\left(\frac{r}{a'}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) + o\left((r/a')^3\right)\right\}$$

où θ désigne l'angle entre les directions géocentriques du Soleil et du satellite. La masse m de la Lune vaut la fraction 1/81,4 de celle de la Terre. C(6.48)

(b) Montrer que l'on a :

$$\cos\theta = \cos^2\frac{i}{2}\cos(\varpi + w - L') + \sin^2\frac{i}{2}\cos(\varpi + w + L' - 2\Omega)$$

où i, ϖ et Ω sont l'inclinaison et les longitudes du périgée et du nœud de l'orbite du satellite sur l'équateur, où w est l'anomalie vraie du satellite et où L' est la longitude moyenne de la Lune. C(6.56)

(c) Montrer que dans le développement en série de Fourier de U_L par rapport à l'anomalie moyenne M, le terme constant (indépendant de M et de L') est donné par l'expression suivante (on pensera à intégrer par rapport à l'anomalie excentrique E au lieu de M) :

$$< U_L >= Km\frac{3a^2}{4a'^3}\left[\left(\cos^4\frac{i}{2}+\sin^4\frac{i}{2}-\frac{2}{3}\right)\left(1+\frac{3e^2}{2}\right)+5e^2\cos^2\frac{i}{2}\sin^2\frac{i}{2}\cos 2\omega\right]$$

(d) En déduire les perturbations séculaires du nœud et du périgée de l'orbite d'HIPPARCOS sous l'influence de la Lune.

Les questions 3, 4 et 5 sont indépendantes.

12. Deux exemples de mouvements d'un satellite artificiel de Mars

On se propose d'examiner deux configurations particulières concernant un éventuel satellite artificiel placé en orbite autour de la planète Mars. Cette planète ici est considérée comme un solide de masse m, de centre de masse O, et tournant sur lui-même autour d'un axe $O\boldsymbol{k}_0$ de direction fixe avec une vitesse angulaire constante ω_0 égale à 1 tour en 24h 37m 22s,7. On désigne par $R = O\boldsymbol{ijk}_0$ un repère lié à la planète, et par $R_0 = O\boldsymbol{i}_0\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{k}_0$ un repère de directions fixes. On repère les points de l'espace par des coordonnées sphériques (r, λ, φ) dans le repère R lié à Mars, ou (r, α, δ) dans le repère R_0 ; on a alors notamment : $\alpha = \omega_0 t + \lambda$. La constante $\mu = Km$ représentant l'attraction gravitationnelle de Mars vaut $4,282\,82\ 10^{13}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}$.

On négligera l'influence du Soleil sur Mars et sur ses satellites, et on pourra ainsi considérer que le repère R_0 est galiléen.

Partie I : mouvement stationnaire d'un satellite de Mars

Il s'agit d'une situation dans laquelle le satellite reste fixe dans un repère lié à la planète Mars (comme les satellites géostationnaires dans le cas de la Terre).

1 – La planète Mars étant ici supposée de forme sphérique, déterminer où il faudrait placer le satellite et avec quelle vitesse pour qu'il soit stationnaire. Calculer la distance correspondante du satellite au point O.

2 – Mars est maintenant un sphéroïde d'axe $O\boldsymbol{k}_0$ et de rayon équatorial $a_e = 3\,397,2$km.

(a) Donner, sans démonstration, l'expression du développement du potentiel de gravitation de Mars en un point P, en fonction des coordonnées sphériques de P dans les repères R et R_0.

(b) Exprimer les composantes, en coordonnées sphériques, du vecteur accélération de P par rapport à R_0 ; identifier ces composantes à celles issues du champ de gravitation de Mars.

(c) Montrer que si le satellite est lancé initialement dans le plan équatorial de Mars, avec un vecteur vitesse lui-même contenu dans ce plan, la trajectoire du satellite reste dans ce plan.

(d) Avec quelle vitesse faut-il lancer le satellite dans ce plan pour que sa trajectoire soit circulaire de rayon ρ ?

(e) Pour quelle valeur de ρ un tel satellite est-il stationnaire ? Calculer cette valeur en limitant le développement du potentiel au terme en J_2 (on utilisera la valeur : $J_2 = 0,001\,964$).

3 – En fait, Mars n'est pas exactement un sphéroïde : On considère dans cette question et la suivante, que le développement de son potentiel de gravitation est donné par l'expression suivante, dans le repère R lié à Mars : C(4.35)

$$U(P) = \frac{Km}{r}\left[1 - J_2 \frac{a_e^2}{r^2}\left(\tfrac{3}{2}\sin^2\varphi - \tfrac{1}{2}\right) + 3J_{22}\frac{a_e^2}{r^2}\cos^2\varphi\cos(2\lambda - 2\lambda_{22})\right]$$

(a) Calculer les composantes de l'accélération de P par rapport à R_0. C(4.36)

(b) En déduire les valeurs de r, λ et φ pour lesquelles un satellite placé en P avec une vitesse convenable, décrit une orbite circulaire en restant stationnaire à la longitude λ. Comparer ces valeurs de r aux précédentes évaluations (on utilisera les valeurs : $J_{22} = 0,000\,063\,13$ et $\lambda_{22} = 75^\circ\!,3$).

4 – On suppose désormais que le mouvement du satellite s'effectue dans le plan équatorial de Mars ($\varphi = 0$). Le mouvement du satellite dans R_0 est représenté, au voisinage du mouvement stationnaire, par les éléments osculateurs a, L, e et ϖ (notations du cours). Le développement de la fonction perturbatrice du satellite en fonction de ces éléments osculateurs est alors donné par l'expression suivante, valable dans le cas d'une excentricité infiniment

petite :

$$U_1 = Km\,\frac{a_e^2}{a^3}\,\{\tfrac{1}{2}J_2\,(1+\tfrac{3}{2}e^2+3e\cos(L-\varpi)+\tfrac{9}{2}e^2\cos(2L-2\varpi))$$
$$+\,3J_{22}\,\cos(2L-2\omega_0 t-2\lambda_{22})\}$$

Dans cette expression, les termes en $(L-\varpi)$ ou en $(2L-2\varpi)$ sont à courte période tandis qu'au voisinage du mouvement stationnaire, ceux en $(2L-2\omega_0 t-2\lambda_{22})$ ont une période beaucoup plus longue.

(a) Montrer qu'en ne prenant dans U_1 que les termes séculaires et à longue période de plus bas degré en excentricité, les variations correspondantes du demi-grand axe et de la longitude moyenne sont données par les équations : C(5.51)

$$\frac{1}{a}\,\frac{da}{dt} = -12n\,J_{22}\,\frac{a_e^2}{a^2}\,\sin(2L-2\omega_0 t-2\lambda_{22})$$
$$\frac{dL}{dt} = n+n\,\frac{a_e^2}{a^2}\,[3J_2+18J_{22}\,\cos(2L-2\omega_0 t-2\lambda_{22})]$$

(b) Un mouvement stationnaire (ou synchrone) à la verticale du point de longitude λ_0 est défini par la condition : $L=\omega_0 t+\lambda_0$. Retrouver que les positions d'équilibre stationnaire sont données par $\lambda_0=\lambda_{22}+k\pi/2$.

(c) En posant : $L=\omega_0 t+\lambda_0+q$ et $n=\omega_0(1+p)$, on introduit deux nouvelles variables p et q remplaçant a et L (en notant a_s le demi-grand axe synchrone vérifiant $\omega_0^2 a_s^3 = Km = n^2 a^3$, on a aussi : $a=a_s(1+p)^{-2/3}$). Exprimer les équations donnant $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$. Vérifier qu'elles admettent la solution $p=p_0$ constant et $q=0$, correspondant à un mouvement stationnaire. Calculer a_s et les valeurs possibles de p_0 correspondant aux différentes valeurs de λ_0.

(d) En cherchant une solution voisine : $p=p_0+\Delta p$ et $q=0+\Delta q$ où Δp et Δq sont des quantités petites, montrer que l'on peut se ramener à l'équation du second ordre :

$$\frac{d^2\Delta q}{dt^2} - 18\omega_0^2\,\frac{a_e^2}{a_s^2}\,J_{22}\,(1+p_0)^{10/3}\,\sin 2(\Delta q + k\frac{\pi}{2}) = 0$$

En linéarisant cette équation, exprimer les variations de Δq en fonction du temps. Déterminer lesquelles des positions d'équilibre stationnaire sont stables, c'est-à-dire correspondent à des petites oscillations autour d'une position d'équilibre. Calculer la période de ces petites oscillations dans les cas stables.

Partie II : mouvement héliosynchrone d'un satellite de Mars

Il s'agit d'une situation dans laquelle le plan de l'orbite osculatrice du satellite de Mars tourne en moyenne à raison d'un tour en $686{,}9798$ jours (période sidérale de Mars autour du Soleil)

On considère que le développement en harmoniques sphériques du potentiel de gravitation perturbateur de la planète Mars est limité aux seuls termes en J_2 et en J_3 ; pour Mars, on a $J_3 = 0,000\,036$ soit près de 2% de la valeur de J_2 donnée plus haut. Une façon d'exprimer ce potentiel en fonction des éléments d'orbite d'un satellite, consiste à développer chacun de ces termes en série de Fourier par rapport à l'anomalie moyenne M ; une telle série comporte une partie moyenne (indépendante de M), qu'on appelle ici partie séculaire.

1 – Donner, sans démonstration, l'expression exacte de la partie séculaire du terme en J_2, en fonction des éléments osculateurs a, e et i de l'orbite d'un satellite. En déduire qu'en limitant la fonction perturbatrice à cette partie séculaire en J_2, ces 3 éléments osculateurs sont constants, tandis que les éléments Ω, ω et M sont des fonctions linéaires de t.

C(5.79)

2 – Exprimer les vitesses angulaires moyennes n_Ω et n_ω du noeud et du péricentre. Calculer la valeur qu'il faut donner à l'inclinaison du plan orbital sur l'équateur de Mars, pour que le noeud tourne dans le sens direct à raison d'un tour en $686{,}9798$ jours ; on fera ce calcul pour une orbite d'excentricité égale à $0{,}1$ et de demi-grand axe égal à $3\,550$km. Calculer la valeur correspondante de n_ω. C(5.83)

3 – Exprimer le terme en J_3 en fonction des coordonnées sphériques r et φ du satellite. Exprimer ensuite $\sin\varphi$ en fonction des éléments i, ω et w. Montrer enfin que la partie séculaire du terme en J_3 vaut :

$$\overline{U}_{J_3} = -Km\,J_3\,\frac{a_e^3}{a^4}\,\frac{e}{(1-e^2)^{5/2}}\,\left(\tfrac{15}{8}\sin^3 i - \tfrac{3}{2}\sin i\right)\,\sin\omega$$

4 – Appliquer les équations de Lagrange à cette partie séculaire en J_3. En déduire que seul a demeure constant, tandis que les autres éléments admettent maintenant des variations périodiques. Calculer l'amplitude de ces variations en supposant, pour intégrer ces équations, que leurs seconds membres sont donnés en fonction du temps grâce à la solution issue de la partie séculaire en J_2 trouvée dans la question 1. On utilisera les données numériques de la question 2. C(5.79)

On rappelle les formules classiques :

$$\sin^3 a = \tfrac{3}{4}\sin a - \tfrac{1}{4}\sin 3a \qquad \text{et} \qquad \cos^3 a = \tfrac{3}{4}\cos a + \tfrac{1}{4}\cos 3a$$

Les parties 1 et 2 sont indépendantes l'une de l'autre, mais on ira prendre dans la partie 1 les valeurs numériques de J_2 et a_e utiles pour traiter la partie 2.

13. Problème des 3 corps : sphère d'influence d'une planète

On considère le système des 3 corps constitué du Soleil S, de masse 1, d'une planète P, de masse m, et d'un planétoïde Q de masse μ négligeable (on prendra $\mu = 0$). On note $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{\rho}$ et $\overrightarrow{\Delta}$ les vecteurs respectifs $\overrightarrow{SP}$, $\overrightarrow{SQ}$ et $\overrightarrow{PQ}$; r, ρ et Δ sont les modules respectifs de ces vecteurs.

1 – Quelle est la nature du mouvement héliocentrique de P ?

2 – Ecrire l'équation du mouvement héliocentrique de Q. On la mettra sous forme d'une somme d'une accélération képlerienne $\overrightarrow{A_0}$ et d'une accélération perturbatrice $\overrightarrow{A_1}$. C(6.17)

3 – Ecrire l'équation du mouvement planétocentrique de Q. On la mettra également sous forme d'une somme d'un terme képlerien $\overrightarrow{B_0}$ et d'un terme perturbateur $\overrightarrow{B_1}$. C(6.18)

4 – La *Sphère d'influence* d'une planète est définie comme étant le volume contenant la planète, à l'intérieur duquel on a : $\dfrac{|\overrightarrow{B_1}|}{|\overrightarrow{B_0}|} \leq \dfrac{|\overrightarrow{A_1}|}{|\overrightarrow{A_0}|}$. L'égalité de ces deux rapports définit une surface (Σ) qu'on se propose de déterminer ; pour cela, on pose : $u = \frac{\Delta}{r}$ et $\phi = \mathrm{angle}(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ})$.

(a) Montrer que l'on a :

$$|\overrightarrow{A_1}| = \frac{Km}{\Delta^2}\left(1 - 2\,u^2\,\cos\phi + u^4\right)^{1/2}$$

et

$$|\overrightarrow{B_1}| = \frac{K}{r^2}\,\frac{\left[1 + (1 - 2\,u\,\cos\phi + u^2)^2 - 2\,(1 - u\,\cos\phi)\,\sqrt{1 - 2\,u\,\cos\phi + u^2}\right]^{1/2}}{1 - 2\,u\,\cos\phi + u^2}$$

Pour obtenir $|\overrightarrow{B_1}|$, on pourra d'abord évaluer ρ^2 et $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\rho}$ en fonction de r, Δ et ϕ.

(b) En déduire, en fonction de m, u et ϕ, les rapports $\dfrac{|\overrightarrow{B_1}|}{|\overrightarrow{B_0}|}$ et $\dfrac{|\overrightarrow{A_1}|}{|\overrightarrow{A_0}|}$, puis l'équation de la surface (Σ), qu'on mettra sous la forme :

$$m^2 = f(u, \phi)$$

5 – Si m est petit devant 1, il apparaît que, sur (Σ), u est également petit ;

(a) montrer que le développement de $f(u, \phi)$ selon les puissances de u, limité à son terme de plus bas degré vaut : $u^5\,(1 + 3\,\cos^2\phi)^{1/2}$ C(6.38)

(b) En déduire que (Σ) est sensiblement sphérique.

(c) Calculer la valeur commune des rapports $\dfrac{|\overrightarrow{B_1}|}{|\overrightarrow{B_0}|}$ et $\dfrac{|\overrightarrow{A_1}|}{|\overrightarrow{A_0}|}$ lorsque le point Q est sur (Σ), au premier ordre significatif en m.

6 – m étant désormais quelconque, on s'intéresse au point M de (Σ) situé sur la droite SP, entre S et P (correspondant à $\phi = 0$).

Montrer que la valeur de u correspondant à ce point est donnée par l'équation :

$$m^2 = \left(\frac{u}{1-u}\right)^5 \frac{2-u}{1+u}$$

7 – Il existe d'autre part, entre S et P, un point L (point de Lagrange) tel que si Q est placé en L avec une vitesse convenable, son mouvement héliocentrique est homothétique de celui de P, avec le Soleil comme centre d'homothétie. On cherche à montrer l'existence d'une telle solution au problème des trois corps, et à situer le point L.

(a) Particulariser l'équation donnant
$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\rho}}{\mathrm{d}t^2}$$
obtenue en 2), dans le cas où Q est homothétique de P ; on a alors $\overrightarrow{\rho} = (1-u)\,\overrightarrow{r}$, u étant une constante. C(6.20)

(b) L'équation du mouvement de P est :
$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{K(1+m)\,\overrightarrow{r}}{r^3}$$
Avec $\overrightarrow{\rho} = (1-u)\,\overrightarrow{r}$, en déduire une autre expression de $\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\rho}}{\mathrm{d}t^2}$.

(c) Par identification de ces deux expressions de $\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\rho}}{\mathrm{d}t^2}$ on obtient l'équation :
$$m = \left(\frac{u}{1-u}\right)^3 \frac{3-3u+u^2}{1+u+u^2}$$
qui définit la position de L. Que peut-on dire de la position de L par rapport au point M de la question 6), notamment lorsque m est petit ?

14. Problème des 3 corps : coordonnées de Jacobi, application à la Lune

On considère un système isolé composé de 3 corps ponctuels P_0, P_1 et P_2, de masses m_0, m_1 et m_2, en interaction gravitationnelle.

Dans la suite, pour toute fonction scalaire des points P_i, calculable en fonction de vecteurs $\overrightarrow{\rho_i}$ qui repèrent P_i dans un certain repère : $\Phi(P_0, P_1, P_2) \equiv \Phi(\overrightarrow{\rho_0}, \overrightarrow{\rho_1}, \overrightarrow{\rho_2})$, on notera $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \overrightarrow{\rho_k}}$ le gradient de Φ au point P_k dans ce repère, c'est-à-dire le vecteur de composantes $(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_k}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_k})$ où (x_k, y_k, z_k) sont les composantes de $\overrightarrow{\rho_k}$ dans ce repère.

Soient G le centre de masses du système des 3 corps, R_0 un repère galiléen d'origine G, et K la constante de gravitation. On note $\overrightarrow{\rho_i}$ les vecteurs $\overrightarrow{GP_i}$, de composantes (x_i, y_i, z_i) dans ce repère, pour $i = 0, 1, 2$.

1 – Ecrire la relation existant entre les $\overrightarrow{\rho_i}$.

2 – Exprimer l'énergie potentielle des 3 corps sous forme d'une fonction scalaire des vecteurs $\overrightarrow{\rho_i}$ notée : $U(\overrightarrow{\rho_0}, \overrightarrow{\rho_1}, \overrightarrow{\rho_2})$.

A quoi s'identifient les gradients $\dfrac{\partial U}{\partial \overrightarrow{\rho_0}}, \dfrac{\partial U}{\partial \overrightarrow{\rho_1}}, \dfrac{\partial U}{\partial \overrightarrow{\rho_2}}$? Justifier votre réponse.

3 – On définit les mouvements relatifs suivants : le mouvement de P_1 est rapporté à un repère R_1 d'origine P_0, et celui de P_2 à un repère R_2 d'origine G_1 , centre de masses de P_0 et de P_1. Ces deux repères sont en translation par rapport à R_0.

On note $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{G_1P_2}$, et r_1 et r_2 leurs modules.

C_{jacobi}

(a) Les vecteurs $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$ et $\overrightarrow{P_1P_2}$ s'expriment, soit en fonction des $\overrightarrow{\rho_i}$ $_{(i=0,1,2)}$, soit en fonction des $\overrightarrow{r_j}$ $_{(j=1,2)}$. En déduire $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$ en fonction de $\overrightarrow{\rho_0}$, $\overrightarrow{\rho_1}$ et $\overrightarrow{\rho_2}$.

(b) Soit Φ une fonction scalaire des vecteurs $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$ et $\overrightarrow{P_1P_2}$; Φ peut être considérée comme fonction des vecteurs $\overrightarrow{\rho_0}, \overrightarrow{\rho_1}, \overrightarrow{\rho_2}$, ou comme fonction des vecteurs $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$.

Calculer, pour $i = 0, 1, 2$, les gradients $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \overrightarrow{\rho_i}}$ aux points P_i dans R_0, en fonction des gradients $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \overrightarrow{r_1}}$ en P_1 dans R_1 et $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \overrightarrow{r_2}}$ en P_2 dans R_2.

(c) Montrer que les équations du mouvement relatif de P_1 dans R_1 et celui de P_2 dans R_2 peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{m_0\, m_1}{m_0 + m_1}\,\ddot{\overrightarrow{r_1}} = -\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r_1}} \qquad \frac{(m_0 + m_1)\, m_2}{m_0 + m_1 + m_2}\,\ddot{\overrightarrow{r_2}} = -\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r_2}}$$

avec

$$U = -\left(\frac{K m_0\, m_1}{\|\overrightarrow{r_1}\|} + \frac{K m_0\, m_2}{\left\| \overrightarrow{r_2} + \dfrac{m_1}{m_0 + m_1}\overrightarrow{r_1} \right\|} + \frac{K m_1\, m_2}{\left\| \overrightarrow{r_2} - \dfrac{m_0}{m_0 + m_1}\overrightarrow{r_1} \right\|} \right)$$

où $\|\overrightarrow{x}\|$ désigne le scalaire $\sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}}$

4 – On suppose que P_0 représente la Terre, P_1 la Lune et P_2 le Soleil. On a alors $m_2 = 1$ et m_0 et m_1 sont très petits devant m_2. Le rapport $\frac{r_1}{r_2}$ est lui aussi toujours petit devant l'unité. Soit θ l'angle entre $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{G_1P_2}$. Notons que les repères R_1 et R_2 sont bien adaptés au problème du mouvement géocentrique de la Lune car, dans la théorie du mouvement des planètes, c'est le mouvement du barycentre Terre-Lune autour du Soleil qui est connu plutôt que celui de la Terre seule.

(a) En développant U selon les puissances croissantes de $\frac{r_1}{r_2}$ jusqu'au degré voulu, montrer que les équations du mouvement prennent la forme :

$$\ddot{\overrightarrow{r_1}} = \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{r_1}} \left(\frac{K(m_0+m_1)}{r_1} + U_1 \right) \qquad \ddot{\overrightarrow{r_2}} = \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{r_2}} \left(\frac{K(m_0+m_1+m_2)}{r_2} + U_2 \right)$$

avec

$$U_1 = K\, m_2 \left[\frac{r_1^2}{r_2^3} \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} \right) + \frac{m_0 - m_1}{m_0 + m_1} \frac{r_1^3}{r_2^4} \left(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta \right) \right]$$

$$U_2 = \frac{K\, m_0\, m_1\, (m_0+m_1+m_2)}{(m_0+m_1)^2} \frac{r_1^2}{r_2^3} \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} \right)$$

Remarque : Le terme U_2 manifeste l'influence perturbatrice du système Terre-Lune sur le mouvement osculateur du Soleil autour de G_1 , (mouvement défini par le terme $K\,(m_0+m_1+m_2)/r_2$), ou inversement sur le mouvement osculateur du barycentre Terre-Lune autour du Soleil.

Avec les valeurs numériques : $r_1 \approx 380.\,10^3$ km, $r_2 \approx 150.\,10^6$ km, $m_1 = m_0/81,3$, comparer l'ordre de grandeur des 2 termes de U_1 à celui de U_2.

(b) Montrer que la partie séculaire de U_2 vaut :

$$n_2^2\, a_1^2 \frac{m_0\, m_1}{(m_0+m_1)^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\sin^2 i \right) \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 + \frac{3}{2} e_2^2 + O(e^4) \right)$$

où n_2 et a_1 sont le moyen mouvement du Soleil et le demi-grand axe de l'orbite lunaire, où i représente l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire sur l'écliptique, et où e_1 et e_2 sont les excentricités respectives de l'orbite géocentrique de la Lune et de l'orbite barycentrique du Soleil. On pourra calculer cette partie séculaire, d'abord pour des orbites circulaires inclinées, puis pour des orbites coplanaires excentrées, et faire le produit de ces deux résultats limités à l'ordre 2.

En déduire la partie séculaire du premier terme de U_1 .

(c) En applicant les équations de Lagrange, en déduire la perturbation séculaire du nœud de l'orbite lunaire, et celle de la longitude du périgée de l'orbite barycentrique du Soleil. C(5.51)

Avec les moyens mouvements n_1= 1 tour en 27 jours, et n_2= 1 tour par an, avec les demi-grands axes a_1= 384000 km et a_2= 149,6 10^6 km, avec l'inclinaison $i = 5°, 129$ et les excentricités $e_1 = 0, 0549$ et $e_2 = 0, 0163$, calculer ces perturbations séculaires en secondes de degré par an.

15. Problème restreint des 3 corps : planétoïde autour d'une étoile double

On considère un couple d'étoiles doubles assimilable à 2 points matériels E et E', de masses respectives m et m', en interaction gravitationnelle. Soient O leur centre de masse, ρ et ρ' les distances OE et OE'. Ces deux corps tournent dans un plan fixe et soit $O\vec{i}\,\vec{j}$ un repère orthonormé galiléen de ce plan. On suppose que les mouvements absolus de E et E' dans ce plan sont circulaires, de centre O et de rayons ρ et ρ' ; on note a_0 la distance EE' et n_0 la vitesse angulaire des deux corps. La direction du vecteur $\overrightarrow{OE}$ est repérée dans $O\vec{i}\,\vec{j}$ par l'angle $\alpha = (O\vec{i}, \overrightarrow{OE}) = n_0\, t$.

1 – Exprimer ρ, ρ' et n_0 en fonction de a_0 et des masses.

2 – Exprimer $U(r, \theta)$, potentiel de gravitation des masses m et m' en un point P du plan $O\vec{i}\,\vec{j}$, en fonction des coordonnées polaires (r, θ) de P dans ce repère, et en fonction des quantités ρ, ρ' et α qui repèrent les points E et E' dans ce plan.

3 – Développer ce potentiel en polynômes de Legendre en considérant que les rapports $\frac{\rho}{r}$ et $\frac{\rho'}{r}$ sont des infiniments petits d'ordre 1. On limitera ce développement aux termes d'ordre 3 inclus. C(4.19)

4 – Montrer que ce développement peut être réduit à l'expression :

$$U(r, \theta) = U_0 + U_2 + U_3$$

avec :

$$U_0 = \frac{K(m+m')}{r}$$
$$U_2 = \frac{Kmm'}{m+m'}\frac{a_0^2}{r^3}\left(\tfrac{3}{2}\cos^2(\theta-\alpha)-\tfrac{1}{2}\right)$$
$$U_3 = \frac{Kmm'(m'-m)}{(m+m')^2}\frac{a_0^3}{r^4}\left(\tfrac{5}{2}\cos^3(\theta-\alpha)-\tfrac{3}{2}\cos(\theta-\alpha)\right)$$

Dans toute la suite, on négligera le terme U_3. On suppose désormais que le point P est un planétoïde de masse μ très petite, qui subit l'attraction des 2 étoiles mais qui ne perturbe pas le mouvement circulaire de celles-ci. On suppose encore que le mouvement de P s'effectue dans le plan $O\vec{i}\,\vec{j}$, à une distance r suffisamment grande devant a_0 pour que $U = U_0 + U_2$ représente convenablement le potentiel de gravitation des 2 étoiles au point P.

5 – Calculer les composantes radiale et orthoradiale de la force de gravitation exercée sur P [c'est-à-dire composantes dans la base locale des coordonnées polaires (r, θ)].

6 – Le potentiel de gravitation étant la somme d'une partie képlérienne U_0, et d'une partie perturbatrice U_2, on considère qu'à chaque instant, le mouvement de P est représenté par un mouvement képlérien osculateur de foyer O et situé dans le plan $O\vec{i}\,\vec{j}$; ce mouvement osculateur est supposé elliptique, de demi-grand axe a, de excentricité e (supposée petite), de longitude du péricentre ϖ, de longitude moyenne L ; on note aussi respectivement w et $M = L - \varpi$ les anomalies vraie et moyenne de P ; on a alors : $\theta = \varpi + w = L + (w - M)$. On introduit encore les variables complexes

$$X = e\,\exp\sqrt{-1}\,M = e\,\exp\sqrt{-1}\,(L-\varpi) \qquad \text{et} \qquad \bar{X} \qquad \text{conjugué de } X$$

On donne enfin les développements de $\frac{a}{r}$ et de l'équation du centre $(w - M)$, limités au degré 2 en excentricité :

$$\frac{a}{r} = 1 + e\ \cos M + e^2\ \cos 2M$$
$$w - M = 2e\ \sin M + \tfrac{5}{4}\, e^2\ \sin 2M$$

(a) Exprimer les développements limités au degré 2, de $\frac{a}{r}$ et de $(w - M)$ en fonction des variables X et $\bar{X}$, puis construire ceux de $(\frac{a}{r})^3$ et de $(\frac{a}{r})^3 \exp\sqrt{-1}\,2(w - M)$, exprimés dans ces mêmes variables. C(3.145)

(b) En déduire que le développement de U_2 peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} U_2 = \frac{Kmm'}{m+m'}\frac{a_0^2}{a^3}\Big[&\tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{3}{2}(X+\bar{X}) + \tfrac{9}{4}(X^2+\bar{X}^2) + \tfrac{3}{2}X\bar{X}) \\ &+ \tfrac{3}{8}(1 + \tfrac{7}{2}X - \tfrac{1}{2}\bar{X} + \tfrac{17}{2}X^2 - \tfrac{5}{2}X\bar{X})\ \exp\sqrt{-1}\,(2L - 2\alpha) \\ &+ \tfrac{3}{8}(1 + \tfrac{7}{2}\bar{X} - \tfrac{1}{2}X + \tfrac{17}{2}\bar{X}^2 - \tfrac{5}{2}X\bar{X})\ \exp -\sqrt{-1}\,(2L - 2\alpha)\Big] \end{aligned}$$

soit encore, finalement :

$$\begin{aligned} U_2 = \frac{Kmm'}{m+m'}\frac{a_0^2}{a^3}\Big[&\tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{3}{2}e^2 + 3e\ \cos(L-\varpi) + \tfrac{9}{2}e^2\ \cos(2L-2\varpi)) \\ &+ \tfrac{3}{4}((1 - \tfrac{5}{2}e^2)\cos(2L-2\alpha) + \tfrac{7}{2}e\ \cos(3L-2\alpha-\varpi) \\ &- \tfrac{1}{2}e\ \cos(L-2\alpha+\varpi) + \tfrac{17}{2}e^2\ \cos(4L-2\alpha-2\varpi))\Big] \end{aligned}$$

7 – Le mouvement du planétoïde peut être représenté par le lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta},t) = \frac{1}{2}\mu\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{K\mu(m+m')}{r} + \frac{K\mu mm'}{m+m'}\frac{a_0^2}{r^3}\,(\tfrac{3}{2}\cos^2(\theta - n_0 t) - \tfrac{1}{2})$$

(a) Expliquer brièvement la signification des divers termes présents dans ce lagrangien.

(b) Exprimer les équations d'Euler-Lagrange relatives aux variables r et θ. C(2.6)

(c) Posant $p_r = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}$ et $p_\theta = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$, on définit l'hamiltonien $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L}$$

Exprimer $\mathcal{H}$ en fonction des variables canoniques $(r, \theta, p_r, p_\theta)$, puis écrire les équations canoniques d'Hamilton correspondantes. C(2.9)

8 — On considère maintenant l'hamiltonien réduit ou “moyenné” :

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - f(r)$$

où

$$f(r) = \frac{K\mu(m+m')}{r} + \frac{1}{4}\,\frac{K\mu m m'}{m+m'}\,\frac{a_0^2}{r^3} \tag{1}$$

Appliquer la méthode d'Hamilton-Jacobi à cet hamiltonien, c'est-à-dire, expliciter le changement de variables canoniques que l'on peut engendrer à partir d'une fonction génératrice $G_2(r, \theta, \beta_1, \beta_2, t)$, qu'il faudra déterminer de telle sorte qu'avec les nouvelles variables $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, le nouvel hamiltonien soit nul. On pourra se contenter d'exprimer G_2 en fonction de $f(r)$, sans remplacer $f(r)$ par son expression (1) ; on explicitera le changement de variables, mais on ne cherchera pas à intégrer les fonctions intégrales dont il dépend. C(2.35)

Les questions 5, 6, 7 et 8 sont indépendantes les unes des autres.

16. Perturbations à très longues périodes du couple Jupiter-Saturne

On considère le système des 3 corps constitué du Soleil, de masse 1, et des planètes Jupiter et Saturne, de masses respectives $m_j = 1/1047,355$ et $m_s = 1/3498,5$. Ces trois corps sont assimilés à des masses ponctuelles, désignées respectivement par O, J et S , qui s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton. On note K la constante de la gravitation universelle.

On représente le mouvement *héliocentrique* de ces planètes par des éléments osculateurs, notés respectivement ($a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \varpi_j, L_j)$ et $(a_s, e_s, i_s, \Omega_s, \varpi_s, L_s)$ [les notations sont celles du cours].

On se propose de mettre en évidence quelques unes des perturbations à très longues périodes de ces éléments.

1 – Exprimer les moyens mouvements osculateurs n_j et n_s correspondant à ce mouvement, en fonction des demi-grands axes et des masses.

En adoptant les valeurs $n_j = 299'', 1487$ par jour et $n_s = 120'', 1543$ par jour, calculer, en unités astronomiques, les demi-grands axes correspondants (on adoptera pour K la valeur qui convient le mieux à ces unités (cf. annexe 1)).

2 – La perturbation du mouvement osculateur de Jupiter (due à Saturne) dérive d'une fonction perturbatrice U_j ; de même celle de Saturne (due à Jupiter) dérive d'une fonction perturbatrice U_s.

Exprimer U_j et U_s , en fonction des masses et des vecteurs $\overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{SJ}$ ou de leur module . C(6.45)

Pour obtenir les variations des éléments osculateurs au moyen des équations de Lagrange, il faut exprimer U_j et U_s en fonction des éléments osculateurs des 2 planètes. On trouvera pour cela en annexe les développements limités de (a'/Δ) et de $(r/a)(a'/r')^2 \cos\theta$, qui reprennent sous une forme légèrement condensée et avec les notations du cours, les développements donnés dans le cours. C(6.69)

C(6.90a)

L'application de la méthode de LeVerrier, limitée à l'ordre 1 des masses, conduit à rechercher chaque élément osculateur σ sous la forme $\sigma = \bar{\sigma} + \tilde{\sigma}$, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{llll} a_j = \bar{a}_j + \tilde{a}_j \ , & e_j = \bar{e}_j + \tilde{e}_j \ , & \cdots & L_j = \bar{L}_j + \tilde{L}_j \\ a_s = \bar{a}_s + \tilde{a}_s \ , & e_s = \bar{e}_s + \tilde{e}_s \ , & \cdots & L_s = \bar{L}_s + \tilde{L}_s \end{array}$$

$\tilde{\sigma}$ représente l'ensemble des termes périodiques à courtes périodes de σ et $\bar{\sigma}$ représente la partie constante et séculaire de σ.

On peut considérer que les termes périodiques sont donnés par les équations de Lagrange appliquées à la partie périodique de U_j et de U_s (dépendant explicitement des longitudes moyennes), tandis que les termes constants et séculaires résultent de ces mêmes équations appliquées aux parties séculaires $\bar{U}_j$ et $\bar{U}_s$ de U_j et de U_s (c'est-à-dire les autres termes).

3 – En utilisant les développements donnés dans l'annexe 2, exprimer les parties séculaires $\bar{U}_j$ et $\bar{U}_s$ jusqu'au degré 2 inclus en excentricités et inclinaisons (à la place des notations du cours, on introduira les notations de ce problème, de sorte que $\bar{U}_j$ et $\bar{U}_s$ soient exprimés en fonction de $\bar{a}_j$, $\bar{a}_s$, $\bar{n}_j$, $\bar{n}_s$, $\bar{e}_j$, $\bar{e}_s$, $\bar{i}_j$, $\bar{i}_s$, $\bar{\Omega}_j$, $\bar{\Omega}_s$, $\bar{\varpi}_j$, $\bar{\varpi}_s$ et des masses). C(6.91)

Que peut-on dire de $\bar{a}_j$ et de $\bar{a}_s$? C(5.51)

4 – Montrer que si les plans d'orbite de Jupiter et de Saturne sont confondus (ce qui revient à adopter les valeurs $\bar{i}_j = \bar{i}_s$ et $\bar{\Omega}_j = \bar{\Omega}_s$), alors $\bar{U}_j$ et $\bar{U}_s$ sont des fonctions ne dépendant ni des inclinaisons ni des longitudes des nœuds.

(a) En est-il de même des fonctions U_j et U_s ? Pourquoi ?

(b) Que peut-on en déduire pour le mouvement de ces plans d'orbite ?

5 – En application des équations de Lagrange, exprimer

$$\frac{d\bar{e}_j}{dt}, \qquad \bar{e}_j\,\frac{d\bar{\varpi}_j}{dt}, \qquad \frac{d\bar{e}_s}{dt}, \qquad \bar{e}_s\,\frac{d\bar{\varpi}_s}{dt}$$

en fonction de ces éléments eux-mêmes (on limitera les seconds membres aux termes de degré 1 par rapport à $\bar{e}_j$, $\bar{e}_s$, $\bar{i}_j$ et $\bar{i}_s$). C(5.51)

6 – En déduire qu'avec les notations suivantes :

$$p_j = \bar{e}_j \sin\bar{\varpi}_j \qquad q_j = \bar{e}_j \cos\bar{\varpi}_j \qquad \text{puis} \qquad x_j = q_j + \sqrt{-1}p_j$$
$$p_s = \bar{e}_s \sin\bar{\varpi}_s \qquad q_s = \bar{e}_s \cos\bar{\varpi}_s \qquad \text{puis} \qquad x_s = q_s + \sqrt{-1}p_s$$

les variables x_j et x_s vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \sqrt{-1}\,\bar{n}_j\,\frac{m_s}{1+m_j}\,\alpha\,(Ax_j + Bx_s) \\ \frac{dx_s}{dt} &= \sqrt{-1}\,\bar{n}_s\,\frac{m_j}{1+m_s}\,(Bx_j + Ax_s) \end{aligned} \tag{1}$$

où $\alpha = \bar{a}_j/\bar{a}_s$ et où A et B sont des coefficients, constants comme α, calculables à partir des expressions suivantes (obtenues en évaluant les $A_i^{(k)}$ définis dans l'annexe 2 par identification avec la page 215 du cours) : C(6.168)

$$\begin{aligned} A &= 4\,\varphi_{1,2}^{(0)}(\alpha) + 3\,\varphi_{1,1}^{(0)}(\alpha) \\ B &= -2\,\varphi_{1,2}^{(1)}(\alpha) - \frac{5}{2}\,\varphi_{1,1}^{(1)}(\alpha) \end{aligned}$$

7 – Pour $\alpha = 0,54450045$ (correspondant aux valeurs de a_j et de a_s calculées dans la question 1), on donne les

valeurs suivantes :

$$\varphi_{1,2}^{(0)}(\alpha) = 0,025650909 \qquad \varphi_{1,1}^{(0)}(\alpha) = 0,109777233$$
$$\varphi_{1,2}^{(1)}(\alpha) = 0,024089071 \qquad \varphi_{1,1}^{(1)}(\alpha) = 0,093505423$$

(a) En déduire les valeurs numériques des coefficients du système différentiel linéaire (1).

(b) Intégrer ce système en recherchant pour x_j et x_s une solution sous forme de termes périodiques ; on montrera notamment que les valeurs propres de la matrice de ce système linéaire sont les fréquences de ces termes périodiques. C(6.169)

(c) Calculer ces valeurs propres et les périodes correspondantes (que l'on devra trouver supérieures à 50 000 ans). Pla2.3

(d) Sachant qu'au 1er Janvier 1900 , on a les valeurs :

$$\bar{e}_j = 0,04833475 \qquad \bar{\varpi}_j = 12^o 43' 15'', 50$$
$$\bar{e}_s = 0,05589231 \qquad \bar{\varpi}_s = 91^o 05' 53'', 57$$

calculer les constantes d'intégration de la solution, puis les amplitudes des termes à très longues périodes des solutions x_j et x_s .

(e) En déduire les valeurs extrêmes que peuvent atteindre les excentricités de Jupiter et de Saturne.

Annexe 1

La constante de la gravitation universelle K est donnée par : $\sqrt{K} = 0,01720209895$ soit encore : $\sqrt{K} = 3548'', 1876069651 = 0°, 985607668601425$

L'unité de masse est celle du Soleil, l'unité de temps est le jour et l'unité de distance est l'unité astronomique.

Annexe 2

Développements de la partie indirecte de la fonction perturbatrice du problème des 3 corps, limités au degré 2 en excentricités et inclinaisons (notations du cours (6.69)) :

$$\begin{aligned}
\frac{r}{a}\,\frac{a'^2}{r'^2}\cos\theta = {} & \cos(L-L') + \frac{1}{2}\,e\,[\cos(2L-L'-\varpi) - 3\cos(L'-\varpi)] \\
& + 2\,e'\,\cos(L-2L'+\varpi') \\
& + \frac{1}{8}\,e^2\,[-4\cos(L-L') + \cos(L+L'-2\varpi) + 3\cos(3L-L'-2\varpi)] \\
& + \frac{1}{8}\,e'^2\,[-4\cos(L-L') + \cos(L+L'-2\varpi') + 27\cos(L-3L'+2\varpi')] \\
& + ee'\,[\cos(2L-2L'-\varpi+\varpi') - 3\cos(2L'-\varpi-\varpi')] \\
& + \sin^2(i/2)\,[-\cos(L-L') + \cos(L+L'-2\Omega)] \\
& + \sin^2(i'/2)\,[-\cos(L-L') + \cos(L+L'-2\Omega')] \\
& + 2\,\sin(i/2)\sin(i'/2)\,[\cos(L-L'-\Omega+\Omega') - \cos(L+L'-\Omega-\Omega')]
\end{aligned}$$

Développements de la partie directe de la fonction perturbatrice du problème des 3 corps, limités au degré 2 en excentricités et inclinaisons (voir : (6.90))

$$
\begin{aligned}
\frac{a'}{\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \{ & [A_1^{(k)} + (e^2 + e'^2) A_2^{(k)}] \cos k(L - L') \\
& + e\,[A_3^{(k)} \cos((k+1)L - kL' - \varpi) + A_4^{(k)} \cos((k-1)L - kL' + \varpi)] \\
& + e'\,[A_5^{(k)} \cos(kL - (k-1)L' - \varpi') + A_6^{(k)} \cos(kL - (k+1)L' + \varpi')] \\
& + e^2\,[A_7^{(k)} \cos((k+2)L - kL' - 2\varpi) + A_8^{(k)} \cos((k-2)L - kL' + 2\varpi)] \\
& + e'^2\,[A_9^{(k)} \cos(kL - (k-2)L' - 2\varpi') + A_{10}^{(k)} \cos(kL - (k+2)L' + 2\varpi')] \\
& + ee'\,[A_{11}^{(k)} \cos((k+1)L - (k-1)L' - \varpi - \varpi') + A_{12}^{(k)} \cos((k-1)L - (k+1)L' + \varpi + \varpi') \\
& \qquad + A_{13}^{(k)} \cos((k+1)(L - L') - \varpi + \varpi') + A_{14}^{(k)} \cos((k-1)(L - L') + \varpi - \varpi')] \\
& - [\sin^2(i/2) + \sin^2(i'/2)]\, A_{15}^{(k)}\, [\cos(k-1)(L - L') + \cos(k+1)(L - L')] \\
& + \sin^2(i/2)\, A_{15}^{(k)}\, [\cos((k-1)L - (k+1)L' + 2\Omega) + \cos((k+1)L - (k-1)L' - 2\Omega)] \\
& + \sin^2(i'/2)\, A_{15}^{(k)}\, [\cos((k-1)L - (k+1)L' + 2\Omega') + \cos((k+1)L - (k-1)L' - 2\Omega')] \\
& + 2\sin(i/2)\sin(i'/2)\, A_{15}^{(k)}\, [\cos((k-1)(L - L') + \Omega - \Omega') + \cos((k+1)(L - L') - \Omega + \Omega') \\
& \qquad\qquad - \cos((k-1)L - (k+1)L' + \Omega + \Omega') - \cos((k+1)L - (k-1)L' - \Omega - \Omega')] \}
\end{aligned}
$$

Les $A_i^{(k)}$ sont des fonctions de $\alpha (= a/a')$ que l'on identifiera en fonction des $\varphi_{n,m}^{(k)}$ explicitées dans le cours en (6.83).

17. Perturbations des satellites de Saturne

On s'intéresse dans ce problème aux satellites de Saturne. On considère que cette planète est un sphéroïde aplati de centre O, de masse M, de rayon équatorial a_e et on limite son potentiel perturbateur au seul terme en J_2. Soit $R_o = O\overrightarrow{i}_0\overrightarrow{j}_0\overrightarrow{k}_0$ un repère saturnicentrique, avec $O\overrightarrow{k}_0$ porté par l'axe de révolution de la planète et $O\overrightarrow{i}_0\overrightarrow{j}_0$ dans son plan équatorial ; on suppose que les axes $O\overrightarrow{i}_0$, $O\overrightarrow{j}_0$ et $O\overrightarrow{k}_0$ sont de directions fixes. On repère un satellite S de Saturne par son rayon-vecteur $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OS}$, ou par des coordonnées sphériques (r, α, δ) dans R_o, ou par des éléments d'orbite osculateurs saturnicentriques $(a, e, i, \Omega, \varpi, L)$ dans R_o (notations du cours). C(3.46)

1 – On considère dans cette question que Saturne et ses satellites forment un système isolé, et que chaque satellite a une masse négligeable devant M.

(a) Donner sans démonstration le potentiel de gravitation de Saturne sur un satellite, en fonction des coordonnées sphériques de ce satellite. Préciser quelle est la partie perturbatrice de ce potentiel. Ecrire l'équation différentielle que doit vérifier le vecteur $\overrightarrow{r}$. Exprimer la troisième loi de Kepler vérifiée par le mouvement osculateur. C(4.30)

(b) On suppose que l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite de ce satellite sont très petites. C(5.62)
Extraire du cours une expression du potentiel perturbateur en fonction des éléments $(a, e, i, \Omega, \varpi, L)$, développée en puissances de e et de $\sin i$ et limitée aux termes de degré inférieur ou égal à 2 par rapport à l'ensemble des variables $(e,\ \sin i)$.

(c) On définit les variables complexes z et ζ : $z = e \exp \sqrt{-1}\varpi$ et $\zeta = \sin \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1}\Omega$
et soient $\bar{z}$ et $\bar{\zeta}$ leurs conjuguées.
Exprimer le développement trouvé en 1-b en fonction des variables $(a, z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta}, L)$.

(d) Montrer que la partie séculaire de ce potentiel vaut :

$$\bar{U}_{J_2} = \frac{KM}{a} J_2 \frac{a_e^2}{a^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} z\bar{z} - 3\zeta\bar{\zeta} \right) \qquad (1)$$

Appliquer à $\bar{U}_{J_2}$ les équations de Lagrange relatives aux variables (a, z, ζ, L). On développera les seconds membres de ces équations en puissances de $(z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta})$ et on les limitera aux termes de degré 0 et 1 par rapport à l'ensemble de ces variables. C(5.55) C(5.52)

Intégrer ces équations. On trouvera notamment que les points représentatifs de z et ζ dans le plan complexe décrivent chacun un cercle d'un mouvement uniforme dont on exprimera la période en fonction de n, J_2 et a_e/a (où n est relié à a par la troisième loi de Kepler).

(e) Application numérique : Calculer, en années, la période de variation de z et de ζ pour les satellites Rhéa et Titan dont les orbites respectives vérifient :

$$\begin{array}{rlcrl} a = & 527\,202 \text{ km} & \text{et} & n & = 79,690\,047 \text{ degrés par jour} \\ a' = & 1\,221\,876 \text{ km} & \text{et} & n' & = 22,576\,678 \text{ degrés par jour} \end{array}$$

On prendra dans le cours les valeurs du J_2 et de a_e concernant Saturne. Dans la suite, on notera z' et ζ' les variables relatives à Titan.

2 – On considère dans cette question que Saturne tourne autour du Soleil, de masse $M_\odot$, sur une orbite circulaire de rayon $r_\odot$. On peut aussi dire que le Soleil décrit autour de Saturne une orbite circulaire de même rayon. On suppose que cette orbite saturnicentrique du Soleil est située dans le plan équatorial de Saturne. Les satellites de Saturne sont toujours considérés comme ayant une masse négligeable, mais ils sont maintenant perturbés par le Soleil.

(a) Montrer que, en ne tenant pas compte des perturbations par J_2, le mouvement saturnicentrique du satellite S est donné par l'équation :

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = \overrightarrow{grad}_S\left\{\frac{KM}{r} + KM_\odot\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r\,\cos\theta}{r_\odot^2}\right)\right\}$$

Δ représente la distance du satellite au Soleil, $\overrightarrow{r}_\odot$ est le vecteur joignant Saturne au Soleil, $r_\odot$ son module et θ l'angle entre $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{r}_\odot$. C(6.45)

(b) $r_\odot$ est toujours très grand devant r. Montrer que le développement du potentiel perturbateur en puissances de $\frac{r}{r_\odot}$ peut être réduit à l'expression :

$$U_\odot = \frac{KM_\odot}{r_\odot}\,\frac{r^2}{r_\odot^2}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

(c) On donne : $\cos\theta = \cos^2\frac{i}{2}\cos(\ell - L_\odot) + \sin^2\frac{i}{2}\cos(\ell + L_\odot - 2\Omega)$ C(6.56)
où $\ell = L + (w - M)$ est la longitude vraie du satellite [$(w - M)$ est "l'équation du centre"], et où $L_\odot$ est la longitude moyenne du Soleil dans son mouvement saturnicentrique.
Exprimer le carré de $\cos\theta$ en fonction d'arguments de la forme $k_1\ell + k_2L_\odot + k_3\Omega$, puis en extraire la partie indépendante de $L_\odot$, notée $\langle\!\langle\cos^2\theta\rangle\!\rangle$.
Posant : $Y = \sin\frac{i}{2}\exp\sqrt{-1}(L - \Omega)$ et $\bar{Y}$ son conjugué, exprimer $\langle\!\langle\cos^2\theta\rangle\!\rangle$ en fonction de Y et de $\bar{Y}$, et développer cette expression en puissances de ces variables (on limitera ce développement aux termes de degré inférieur ou égal à 2 par rapport à l'ensemble de ces variables).

(d) Posant $X = e \exp\sqrt{-1}\, M = e \exp\sqrt{-1}\,(L - \varpi)$ et $\bar{X}$ son conjugué, on donne les développements limités :

$$\frac{r}{a} = 1 - \frac{1}{2}(X + \bar{X}) - \frac{1}{4}(X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2)$$
$$\exp\sqrt{-1}\,(w - M) = 1 + \quad (X - \bar{X}) + \frac{1}{8}(9X^2 - 8X\bar{X} - \bar{X}^2)$$

Exprimer $\frac{r^2}{a^2}\left(\frac{3}{2}\langle\langle\cos^2\theta\rangle\rangle - \frac{1}{2}\right)$ sous forme d'un développement en puissances de X, $\bar{X}$, Y et $\bar{Y}$; on le limitera aux termes de degré inférieur ou égal à 2 par rapport à l'ensemble de ces variables.

(e) Opérant le changement de variables : $X = \bar{z} \exp\sqrt{-1}\, L$ et $Y = \bar{\zeta} \exp\sqrt{-1}\, L$, montrer que la partie séculaire de $U_\odot$ (indépendante de L), limitée au degré 2, a pour expression :

$$\bar{U}_\odot = \frac{KM_\odot}{r_\odot}\frac{a^2}{r_\odot^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}z\bar{z} - \frac{3}{2}\zeta\bar{\zeta}\right) \tag{2}$$

(f) Appliquer à $(\bar{U}_{J_2} + \bar{U}_\odot)$ les équations de Lagrange relatives à z et à ζ ; on limitera leurs seconds membres aux termes de degré 0 et 1 par rapport à l'ensemble des variables $(z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta})$.
Intégrer ces équations.

(g) Application numérique : Calculer la nouvelle période de variation de z et de ζ pour les satellites Rhéa et Titan, sachant que l'on a :

$$r_\odot = 1,4294\ 10^9 \text{ km} \qquad \text{et} \qquad \frac{M_\odot}{M} = 3498,5$$

3 – On considère maintenant que les satellites de Saturne n'ont plus une masse négligeable et qu'ils se perturbent mutuellement. On s'intéresse plus particulièrement aux deux satellites Rhéa et Titan dont les masses respectives

sont :

$$\frac{m}{M} = 4,40\ 10^{-6} \qquad \text{et} \qquad \frac{m'}{M} = 236,64\ 10^{-6}$$

On peut montrer que la partie séculaire du potentiel perturbateur de Titan sur Rhéa est de la forme :

$$\bar{U}_{titan} = \frac{Km'}{a'}\left(A_0 + A_1(z\bar{z} + z'\bar{z}') + A_2(z\bar{z}' + \bar{z}z')\right)$$

On a limité ici le développement du potentiel aux seuls termes dépendant des excentricités et de degré inférieur ou égal à 2. A_0, A_1 et A_2 sont des constantes sans dimension dépendant du rapport des demi-grands axes et égales à : C(6.92)

$$A_0 = 1,052\,151\,213 \qquad A_1 = 0,102\,891\,149 \qquad A_2 = -0,054\,120\,362$$

La partie séculaire du potentiel perturbateur de Rhéa sur Titan ne diffère que par la masse qui est en facteur :

$$\bar{U}_{rhea} = \frac{Km}{a'}\left(A_0 + A_1(z\bar{z} + z'\bar{z}') + A_2(z\bar{z}' + \bar{z}z')\right)$$

(a) Appliquer à $(\bar{U}_{J_2} + \bar{U}_\odot + \bar{U}_{titan})$ l'équation de Lagrange relative à la variable z de Rhéa.

(b) Appliquer de même à $(\bar{U}'_{J_2} + \bar{U}'_\odot + \bar{U}_{rhea})$ l'équation de Lagrange relative à la variable z' de Titan (où $\bar{U}'_{J_2}$ et $\bar{U}'_\odot$ sont les expressions (1) et (2) relatives à Titan, c'est-à-dire où l'on a remplacé a, z et ζ par a', z' et ζ' respectivement).

Dans ces deux équations on limitera les seconds membres aux termes de degré 1 par rapport aux variables z et z'. Dans l'équation relative à un satellite, on pensera à remplacer K par son expression tirée de la troisième loi de Kepler relative à ce satellite : $K = n^2a^3/(M+m)$ ou $K = n'^2a'^3/(M+m')$.

(c) Intégrer ce système d'équations linéaires en recherchant pour z et z' une solution sous forme de termes périodiques ; on pourra exprimer ce système sous forme matricielle en posant : $V = \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}$; on montrera notamment que les valeurs propres de la matrice de ce système sont les fréquences de ces termes périodiques. C(6.168)

(d) Application numérique : Calculer ces valeurs propres et les périodes correspondantes.

18. Perturbations solaires d'un satellite de la Terre

On se propose d'étudier quelques aspects du mouvement géocentrique d'un satellite de la Terre perturbé par le Soleil. On se place pour cela dans le cadre d'un modèle de trois corps ponctuels (ou sphériques) dans lequel le satellite S, la Terre T et le Soleil S' ont pour masses respectives μ, m et M avec $\mu \ll m \ll M$; on note $\vec{r}$, $\vec{r'}$ et $\vec{\Delta}$ les vecteurs respectifs $\overrightarrow{TS}$, $\overrightarrow{TS'}$ et $\overrightarrow{SS'}$, de modules r, r' et Δ ; on désigne par θ l'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{r'}$, et par K la constante de la gravitation universelle.

On supposera que la masse μ du satellite est negligeable, de sorte que l'intéraction Terre-Soleil est purement képlérienne ; on pourra donc considérer que dans un repère géocentrique de directions fixes R_o, le Soleil décrit autour de la Terre une orbite képlérienne fixe dont le plan est l'écliptique et dont les éléments sont, avec les notations du cours : a', e', ϖ', i', Ω' et $L' = n't + L'_o$ (on supposera que $i' = 0$ et $\Omega' = 0$, et qu'ainsi le plan fondamental du repère R_o est l'écliptique). Pour les applications numériques on prendra : a'=1 ua, $e' = 0,0167$, n'=1 tour par an et $M/m = 330000$.

1 – Exprimer la constante K en fonction des éléments du Soleil et des masses.

2 – Exprimer les équations différentielles vectorielles du mouvement absolu de S et de T. En déduire l'équation différentielle vectorielle du mouvement géocentrique de S. Transformer cette equation de façon à y faire apparaître le gradient en S d'un potentiel képlérien et celui d'un potentiel perturbateur U. On exprimera ces potentiels en fonction de K, r, r', Δ, θ et des masses. C(6.1) C(6.45)

Comment serait modifiée cette équation si la Terre, au lieu d'être sphérique, avait la symétrie sphéroïdale ?

3 – Dans toute la suite on supposera que la Terre est sphérique et qu'ainsi le satellite est perturbé seulement par le Soleil. La distance r étant supposée très petite devant r', on pourra développer les fonctions de r/r' en séries

entières de r/r' qui soient rapidement convergentes.

(a) Exprimer $1/\Delta$ sous forme du produit de $1/r'$ par une fonction de r/r' et de θ. Développer cette fonction en puissances de r/r'.

(b) En limitant ce développement aux termes de degré inférieur ou égal à 3, montrer que le développement du potentiel perturbateur U peut se réduire à l'expression suivante :

$$U = \frac{n'^2 a'^3}{M+m}\left[\frac{r^2}{r'^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) + \frac{r^3}{r'^4}\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right)\right] \tag{1}$$

C(6.48)

4 – On suppose dans toute la suite que le plan de l'orbite osculatrice du satellite est confondu avec l'écliptique ; ses éléments osculateurs dans R_o sont notés a, e, ϖ et $L = nt + L_o$. On donne les termes suivants du développement de U en fonction des éléments orbitaux du satellite et du Soleil (ce n'est pas un développement de U limité au degré 2 en excentricités car il manque certains termes de degré 1 et 2, mais les termes donnés sont parmi les plus significatifs dans le cas du mouvement de la Lune) :

$$\begin{aligned} U \approx \frac{n'^2 a^2}{M+m}\Bigg[&\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos(2L-2L') - \frac{1}{2}\,e\,\cos(L-\varpi) \\ &- \frac{9}{4}\,e\,\cos(L-2L'+\varpi) + \frac{3}{4}\,e\,\cos(3L-2L'-\varpi) + \frac{3}{4}\,e'\,\cos(L'-\varpi') \\ &+ \frac{3}{8}\,e^2 + \frac{15}{8}\,e^2\,\cos(2L'-2\varpi) + \frac{3}{8}\,e'^2 + \frac{3}{8}\,\frac{a}{a'}\cos(L-L') \\ &+ \frac{5}{8}\,\frac{a}{a'}\cos(3L-3L') - \frac{15}{16}\,\frac{a}{a'}\,e\,\cos(L'-\varpi) - \frac{15}{16}\,\frac{a}{a'}\,ee'\,\cos(\varpi-\varpi')\Bigg] \end{aligned}$$

(a) Montrer que les termes indépendants des excentricités correspondent bien à l'expression (1) de U dans le cas où les orbites du satellite et du Soleil sont circulaires.

(b) Montrer que, compte tenu des degrés en e et e' conservés dans le développement de U, les équations de Lagrange du satellite peuvent ici se réduire aux suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial U}{\partial L} \\
\frac{dL}{dt} &= n - \frac{2}{na}\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{e}{2na^2}\frac{\partial U}{\partial e} \\
\frac{de}{dt} &= -\frac{1}{na^2 e}\frac{\partial U}{\partial \varpi} - \frac{e}{2na^2}\frac{\partial U}{\partial L} \\
\frac{d\varpi}{dt} &= \frac{1}{na^2 e}\frac{\partial U}{\partial e}
\end{aligned}$$

C(5.51)

(c) Calculer les seconds membres de ces équations. On séparera bien dans ces seconds membres la partie "séculaire" (indépendante des variables angulaires L, L', ϖ et ϖ'), de la partie "périodique" (dépendant de ces variables).

5 – On cherche à ces équations une solution de la forme : $a = \bar{a}+\tilde{a}$, $n = \bar{n}+\tilde{n}$, $e = \bar{e}+\tilde{e}$, $\varpi = \bar{\varpi}+\tilde{\varpi}$, $L = \bar{L}+\tilde{L}$. Les variables $\bar{a}$ et $\bar{n}$ sont supposées reliées comme a et n par la troisième loi de Kepler : $n^2a^3 = \bar{n}^2\bar{a}^3 = Km$. On suppose en outre que $\tilde{a}$, $\tilde{n}$, $\tilde{e}$, $\tilde{\varpi}$ et $\tilde{L}$ sont des infiniment petits d'ordre 1 devant respectivement $\bar{a}$, $\bar{n}$, $\bar{e}$, $\bar{\varpi}$ et $\bar{L}$, ce qui permet de développer toute fonction de a, n, e, ϖ et L en série de Taylor au voisinage de $\bar{a}$, $\bar{n}$, $\bar{e}$, $\bar{\varpi}$ et $\bar{L}$.

(a) Montrer qu'à des quantités d'ordre 2 près, on peut écrire : $\tilde{n} = -\frac{3}{2}\frac{\bar{n}}{\bar{a}}\tilde{a}$.

C(5.96)

(b) En réduisant les équations à leur partie séculaire et en supposant tout d'abord $\tilde{a} = 0$, $\tilde{n} = 0$, $\tilde{e} = 0$, $\tilde{\varpi} = 0$ et $\tilde{L} = 0$, trouver les solutions de ces équations, c'est-à-dire $\bar{a}$, $\bar{e}$, $\bar{\varpi}$ et $\bar{L}$. On introduira le petit paramètre : $\varepsilon = (n'/\bar{n})^2$ et les constantes d'intégration arbitraires nécessaires.

(c) Exprimer $\frac{d\tilde{a}}{dt}$, $\frac{d\tilde{e}}{dt}$, $\frac{d\tilde{\varpi}}{dt}$ et $\frac{d\tilde{L}}{dt}$ à l'ordre 1 en ε ; on pourra montrer que ces expressions représentent la partie périodique des équations initiales dans laquelle on a simplement remplacé les variables a, n, e, ϖ et L respectivement par $\bar{a}$, $\bar{n}$, $\bar{e}$, $\bar{\varpi}$ et $\bar{L}$.

(d) Intégrer ces équations. Certains dénominateurs dans cette solution dépendent de ε ; on les développera en puissances de ε et on ne gardera dans la solution que les termes d'ordre 1 en ε. Commenter ces solutions, en indiquant notamment quels sont les termes dont la période est longue par rapport à la période de révolution du satellite. Calculer numériquement l'amplitude de ces termes à longue période pour un satellite "géostationnaire" ($\bar{n}$=1 tour par jour) ayant une excentricité de $0,001$.

6 – On s'intéresse maintenant à l'effet des perturbations périodiques des éléments osculateurs ($\tilde{a}$, $\tilde{e}$, $\tilde{\varpi}$, $\tilde{L}$) sur les coordonnées polaires (r, ℓ) du satellite dans le plan de l'écliptique. Comme on a obtenu seulement la première approximation de ces perturbations périodiques, on peut se limiter à l'expression suivante de r et de ℓ en fonction des éléments osculateurs :

$$r = a(1 - e\cos(L - \varpi))$$
$$\ell = L + 2e\sin(L - \varpi)$$

On doit alors remplacer dans ces expressions a par $\bar{a} + \tilde{a}$, e par $\bar{e} + \tilde{e}$, ... *etc.*

(a) Développer ces expressions de r et de ℓ en séries de Taylor au voisinage de ($\bar{a}$, $\bar{e}$, $\bar{\varpi}$, $\bar{L}$), limitée aux termes de degrés 0 et 1 en ($\tilde{a}$, $\tilde{e}$, $\tilde{\varpi}$, $\tilde{L}$).

(b) En déduire les variations périodiques $\tilde{r}$ et $\tilde{\ell}$ de r et ℓ en fonction de $\tilde{a}$, $\tilde{e}$, $\tilde{\varpi}$ et $\tilde{L}$.

7 – Dans la théorie de la Lune, certaines de ces *inégalités* sont désignées par les noms suivants :

(a) La **variation** est l'inégalité périodique des coordonnées dont l'argument est $2\bar{L} - 2L'$.

Montrer qu'elle provient de $\tilde{a}$ et $\tilde{L}$ par l'intermédiaire du terme de U : $\frac{3}{4}\frac{n'^2a^2}{M+m}\cos(2L - 2L')$, et de $\tilde{e}$ et $\tilde{\varpi}$ par l'intermédiaire des termes de U : $\frac{n'^2a^2}{M+m}(-\frac{9}{4}e\,\cos(L - 2L' + \varpi) + \frac{3}{4}e\,\cos(3L - 2L' - \varpi))$

Calculer la variation dans $\tilde{r}$ et $\tilde{\ell}$. Vérifier qu'elle est d'ordre 1 en ε.

(b) L'**évection** est l'inégalité périodique des coordonnées dont l'argument est $\bar{L} - 2L' + \bar{\varpi}$.

De quels termes de U provient-elle ?

Montrer que le plus important d'entre eux est : $\frac{15}{8}\frac{n'^2a^2}{M+m}e^2\,\cos(2L' - 2\varpi)$

Calculer l'évection dans $\tilde{r}$ et $\tilde{\ell}$. Quel est son ordre en ε et en excentricité ?

(c) L'**équation annuelle** est l'inégalité d'argument $L' - \varpi'$. De quels termes de U provient-elle ?

Montrer que dans $\tilde{\ell}$, le plus important est : $\frac{3}{4}\frac{n'^2a^2}{M+m}e'\,\cos(L' - \varpi')$; quel est son ordre en ε et en excentricité ?

Montrer que dans $\tilde{r}$, cette inégalité est d'ordre 1 en ε et 1 en excentricité.

Calculer l'équation annuelle dans $\tilde{\ell}$.

(d) L'**inégalité parallactique** est celle ayant en facteur $\frac{a}{a'}$ et en argument $\bar{L} - L'$.

De quels termes de U provient-elle ? Quel est le plus important ? Calculer l'inégalité parallactique dans $\tilde{r}$ et $\tilde{\ell}$. quel est son ordre en ε et en excentricité ?

19. Changements de variables canoniques : crochets de Poisson

On considère un système matériel décrit par n variables indépendantes q_i et dont l'énergie cinétique dans un repère galiléen est $T(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n)$. On suppose que ce système est soumis à un ensemble de forces, les unes dérivant d'une fonction de forces $U(q_1, \cdots, q_n)$, les autres, de nature quelconque, étant simplement représentées par n composantes de forces généralisées : $\Phi_i(q_1, \cdots, q_n)$.

1 – En appliquant le principe des travaux virtuels, exprimer les équations de Lagrange du mouvement de P. C(2.3)

2 – L représentant le lagrangien $T + U$, on définit les variables p_i conjuguées des q_i :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

puis l'hamiltonien :

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i\, \dot{q}_i - L$$

Montrer que les équations donnant les expressions des $\dot{q}_i$ et $\dot{p}_i$ sont des équations d'Hamilton généralisées (de la forme des équations (1) ci-dessous, avec certains des seconds membres dépendant des Φ_i). Expliciter H. C(2.11)

Soit plus généralement un système matériel représenté par $2n$ variables canoniquement conjuguées $q_1, \cdots, q_n$, $p_1, \cdots, p_n$ satisfaisant aux équations suivantes, dites *équations d'Hamilton généralisées* :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} - Q_i \qquad \text{et} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + P_i \qquad \text{pour} \qquad i = 1 \cdots n \tag{1}$$

où $H(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ est un hamiltonien indépendant du temps et où les Q_i et P_i sont des composantes de forces appelées *forces canoniques* (fonctions également des $2n$ variables q_i et p_i).

Si f et g sont deux fonctions dérivables des $2n$ variables $q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n$, on définit le *crochet de Poisson* de ces 2 deux fonctions, noté $\{f, g\}$, par l'expression :

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right)$$

3 – Soit $u(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ une fonction des solutions q_i et p_i des équations (1). Montrer que l'on a alors :

$$\frac{du}{dt} = \{u, H\} - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} Q_j - \frac{\partial u}{\partial p_j} P_j \right)$$

On considère la transformation ou changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, y-1, y_2, \cdots, y_n) \qquad \text{pour} \qquad i = 1 \cdots n \\ p_i &= g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, y-1, y_2, \cdots, y_n) \qquad \text{pour} \qquad i = 1 \cdots n \end{aligned} \tag{2}$$

où les f_i et g_i sont $2n$ fonctions de $2n$ nouvelles variables $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$. En remplaçant dans H les variables q_i et p_i par leur expression (2), on obtient une fonction H^* :

$$H^*(x_1, x_2, \cdots, x_n, y-1, y_2, \cdots, y_n) = H(f_1(x_1, \cdots, y_n), \cdots, g_n(x_1, \cdots, y_n))$$

4 – Montrer, par dérivation des équations (2), que si les variables x_j et y_j vérifient les équations :

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial y_j} - X_j \qquad \text{et} \qquad \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_j} + Y_j \qquad \text{pour} \qquad i = 1 \cdots n \tag{3}$$

où les X_j et Y_j sont définis par :

$$X_j = \sum_{k=1}^{n} \left(Q_k \frac{\partial g_k}{\partial y_j} + P_k \frac{\partial f_k}{\partial y_j} \right) \qquad \text{et} \qquad Y_j = \sum_{k=1}^{n} \left(Q_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j} + P_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right) \tag{4}$$

alors les variables q_i et p_i vérifient les équations suivantes pour $i = 1 \cdots n$:

$$\frac{dq_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left[\{f_i, f_k\} \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} - P_k \right) + \{f_i, g_k\} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} - Q_k \right) \right]$$
$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left[\{g_i, f_k\} \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} - P_k \right) + \{g_i, g_k\} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} - Q_k \right) \right]$$

5 – En déduire les conditions que doivent vérifier les crochets de Poisson dans ces expressions pour que les équations (3) et (4) fournissent la solution des équations (1) transformées par (2). Par extension du cas où les Q_k et P_k sont tous nuls, on dira alors que la transformation (2) est canonique, le système (1) étant transformé en (3) (lorsque les P_k et Q_k sont tous nuls, on pourrait montrer que ces conditions sont équivalentes à celles vues en cours avec les crochets de Lagrange). C(2.18)

Table des matières