Fundamentos de la teoría de espacios analíticos vía la geometría diferencial sintética

Zilber, Jorge Carlos

1987

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Tema de Tesis:

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE ESPACIOS ANALITICOS VIA LA GEOMETRIA DIFERENCIAL SINTETICA

Autor:

Jorge Carlos Zilber

Director de Tesis:

Dr. Eduardo J. Dubuc

Lugar de Trabajo:

Departamento de Matemáticas

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

1987

Agradecimientos

A mi esposa e hijas, sin cuya ayuda y comprensión no hubiera podido realizar este trabajo.

Al Dr. Eduardo J. Dubuc, por todo lo que me dio y me enseñó.

Al Dr. Angel R. Larotonda, quien en numerosas oportunidades me ayudó con todos los trámites referentes a esta tesis.

A Claudia Clemares, quien tipeó este trabajo logrando descifrar los verdaderos jeroglíficos que le presenté en mis manuscritos.

A Inés Baldatti, quien me ayudó especialmente en todo momento.

A todos los que me ayudaron con su comprensión y colaboración.

Introducción

El trabajo consiste en el desarrollo de la teoría de anillos analíticos iniciada en [4].

Un anillo analítico es esencialmente una C-álgebra A munida, para cada abierto U de $\mathbb{C}^n$, para todo n, de un conjunto de n-tuplas $A(U) \subset A^n$, donde quedan definidas "operaciones parciales", correspondientes a funciones holomorfas en U.

Los resultados fundamentales obtenidos en este trabajo son: la caracterización de anillos analíticos locales, en la categoría &ns de los conjuntos, la construcción explícita del topos clasificante de la teoría de anillos analíticos locales, y la construcción del espectro de un anillo analítico de presentación finita.

Respecto a la caracterización de anillos analíticos locales en &ns, se muestra que los anillos analíticos locales (vale decir que preservan cubrimientos) en &ns, son exactamente los que tienen un morfismo local (de anillos analíticos) en $\mathbb{C}$.

Con respecto al topos clasificante, se prueba que el topos clasificante de la teoría de anillos analíticos locales es el topos de haces sobre el sitio cuyos objetos son los modelos locales (ver [4] y [7]). Con la topología de Grothendieck dada por los cubrimientos abiertos.

Finalmente, se constituye el espectro de un anillo analítico de presentación finita en dos pasos, primero para los cocientes de $\mathcal{O}_n(U)$ y luego para los retractos de cocientes de $\mathcal{O}_n(U)$. Se prueba explícitamente que es espectro de $\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)$ es el modelo local asociado al ideal $(h_1,\ldots,h_k)$. A partir de este resultado se obtiene el espectro de un anillo analítico de presentación finita cualquiera. Otros resultados obtenidos son las propiedades universales del anillo de gérmenes de funciones holomorfas en un punto p, y los ceros de funciones holomorfas en un anillo analítico. Además, se formaliza la definición de modelo analítico de la geometría diferencial sintética, lo cual sienta las bases para futuras investigaciones.

Indice

CAPITULO I

Anillos analíticos

y

anillos analíticos locales.

Consideremos la categoría $\mathcal{C}$ de abiertos de $\mathbb{C}^n$ (para todo n) y funciones holomorfas.

Recordemos que si $f : U \to V$ y $g : W \to V$ son holomorfas, f y g son transversales cuando para cada $u \in U$, $\omega \in W$, tales que $f(u) = g(\omega) = x$, las imágenes de las aplicaciones tangentes $f_{*,u}$ y $g_{*,\omega}$ generan el espacio tangente a V en x.

Asimismo, si $h : U \to \mathbb{C}^k$ es holomorfa, h es independiente (o las componentes $h_1,\ldots,h_k : U \to \mathbb{C}$ son independientes), cuando para cada $p \in U$ tal que $h(p) = 0$, el rango de h en p es k. Notemos que $h_1,\ldots,h_k$ son independientes si y sólo si h y la función constante 0 son transversales.

Diremos que un diagrama en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[r, "f"'] & V \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado transversal, cuando es un producto fi brado en C y f y g son transversales.

Asimismo, un diagrama en C $E \longrightarrow U \overset{h}{\underset{0}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}^k$ es un egalizador independiente, cuando es un egalizador en C y las componentes de h son independientes.

Es fácil probar que si $A : C \to \mathcal{E}$ es un funtor, son equivalentes: (ver [4]) (*)

1) A preserva productos fibrados transversales y objeto terminal.
2) A preserva egalizadores independientes, productos finitos, objeto terminal e inclusiones abiertas.

1.1. <u>Definición</u>:

Sea $\mathcal{E}$ una categoría con límites finitos. Un funtor $A : C \to \mathcal{E}$ es un anillo analítico en $\mathcal{E}$ cuando satisface alguna de las condiciones equivalentes dadas en (*).

Un morfismo entre anillos analíticos es una transformación natural entre funtores. Vale decir que si A y B son anillos analíticos, un morfismo $\varphi : A \to B$ es tener para cada abierto U de $\mathbb{C}^n$ (para todo n), un flecha $\varphi_U : A(U) \to B(U)$ en $\mathcal{E}$, de modo tal que si $f : U \to V$ es holomorfa, entonces el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "A(f)"'] & B(U) \arrow[d, "B(f)"] \\ A(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & B(V) \end{tikzcd}$$

1.2. Observación:

Por abuso de notación, notaremos A en lugar de $A(\mathbb{C})$. Además, si $\varphi : A \to B$ es un morfismo, notaremos φ en lugar de $\varphi_{\mathbb{C}}$. Si U y V son abiertos en $\mathbb{C}^n$ y $V \subset U$, sea $i_{V,U} : V \to U$ la inclusión.

Si A es un anillo analítico en la categoría $\mathcal{E}ns$ de los conjuntos, como A preserva inclusiones abiertas, $A(i_{V,U}) : A(V) \to A(U)$ es un monomorfismo, o sea, en este caso, es inyectiva. Luego $A(V)$ queda identificado con un subconjunto de $A(U)$, al cual notaremos nuevamente $A(V)$. Se tendrá por lo tanto una inclusión $A(V) \hookrightarrow A(U)$. No haremos distinción entre los elementos de $A(V)$ y su imagen por $A(i_{V,U})$.

Si $f : U \to W$ es holomorfa, se tiene $f_{|V} : V \to W$ y resulta

$$A(f_{|V}) = A(f \circ i_{V,U}) = A(f) \circ A(i_{V,U})$$

Por lo tanto, identificando $A(V)$ con un subconjunto de $A(U)$, es

$$A(f_{|V}) = A(f)_{|A(V)}$$

además, si $\varphi : A \to B$ es un morfismo de anillos analíticos en &ns, se tiene el cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, hook] & B(V) \arrow[d, hook] \\ A(U) \arrow[r, "\varphi_U"] & B(U) \end{tikzcd}$$

con las correspondientes identificaciones, esto dice que si $a \in A(V)$, entonces $\varphi_U(a) = \varphi_V(a)$.

Ahora bien, $A(U)$ es un subconjunto de $A(\mathbb{C}^n) = A(\mathbb{C})^n = A^n$, y por lo tanto, $\varphi_U(a) = \varphi_{\mathbb{C}^n}(a)$. Pero si llamamos $\pi_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ a la proyección a la j-ésima coordenada, $(1 \leq j \leq n)$, se tiene el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "\varphi_{\mathbb{C}^n}"] \arrow[d, "A(\pi_j)"'] & B^n \arrow[d, "B(\pi_j)"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd}$$

aquí, con la identificación $A(\mathbb{C}^n) = A^n$, $A(\pi_j)$ es la proyección; lo mismo $B(\pi_j)$. Po lo tanto, esto dice que la j-ésima coordenada de $\varphi_{\mathbb{C}^n}(a)$ es $\varphi(a_j)$, donde a_j es la j-ésima coordenada de a. Por lo tanto:

$$\varphi_{\mathbb{C}^n}(a_1,\ldots,a_n) = (\varphi(a_1),\ldots,\varphi(a_n)),$$

vale decir, $\varphi_{C^n} = \varphi^n$. Por lo tanto, si φ y ψ son morfismos y $\varphi_{\mathbb{C}} = \psi_{\mathbb{C}}$, entonces $\varphi = \psi$.
Por lo tanto, para U abierto en $\mathbb{C}^n$ y $a \in A(U) \subset A^n$, es $\varphi_U(a) = (\varphi(a_1,\ldots,\varphi(a_n))$ si $a = (a_1,\ldots,a_n)$. En muchos casos notaremos φ^n en lugar de φ_U.

Finalmente, observemos que las operaciones en $\mathbb{C}$ inducen en A una estructura de $\mathbb{C}$-álgebra. Por lo tanto, un anillo analítico se puede pensar como una $\mathbb{C}$-álgebra con una estructura adicional de operaciones con dominio de definición en $A(U) \subset A^n$, para cada abierto U de $\mathbb{C}^n$; además, un morfismo $\varphi : A \to B$ resulta ser un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras.

1.3. Ejemplo.
Sea U un abierto fijo en $\mathbb{C}^n$. Llamaremos $\mathcal{O}_n(U)$ un anillo analítico de funciones holomorfas en U. Vale decir: si V es un abierto en $\mathbb{C}^m$,

$$(\mathcal{O}_n(U))(V) = \{ g : U \to V \quad \text{holomorfas} \}$$

y si $f : V \to W$ es holomorfa, definimos:

$$(\mathcal{O}_n(U))(f) : \mathcal{O}_n(U)(V) \to \mathcal{O}_n(U)(W) \quad \text{por:}$$

$$(\mathcal{O}_n(U)(f)(g) = f\circ g \quad \text{para} \quad g \in (\mathcal{O}_n(U))(V)$$

Es fácil ver que $\mathcal{O}_n(U)$ es un anillo analítico en $\&ns$ (ver [4]).

En realidad, $\mathcal{O}_n(U) : \mathcal{C} \to \&ns$ es el funtor representable por U. Por lo tanto, el lema de Yoneda (ver [6]) asegura que, dado un anillo analítico A en $\&ns$, hay una biyección entre el conjunto de morfismos de $\mathcal{O}_n(U) \to A$ y el conjunto $A(U)$. Vale decir, si $\varphi : \mathcal{O}_n(U) \to A$ es un morfismo de anillos analíticos, φ queda totalmente identificado con un elemento $a \in A(U)$. Según esta identificación, dado un abierto V en $\mathbb{C}^m$, $\varphi_V : (\mathcal{O}_n(U))(V) \to A(V)$ está dada por: $\varphi_V(f) = A(f)(a)$ para $f : U \to V$ holomorfa; además $a = \varphi_U(id_U) = \varphi^n(id_U)$.

Por lo tanto, si φ y ψ son morfismos de $\mathcal{O}_n(U) \to A$, tales que $\varphi_U(id_U) = \psi_U(id_U)$, entonces, $\varphi = \psi$, aquí, por supuesto, $id_U : U \to U$ indica la identidad de U.

1.4. Ejemplo.

Llamaremos $\mathbb{C}$ al anillo analítico en $\&ns$, dado por: $\mathbb{C}(U) = U$; $\mathbb{C}(f) = f$, vale decir, $\mathbb{C}$ es el funtor olvido.

Observemos entonces, que si $\varphi : \mathcal{O}_n(U) \to \mathbb{C}$ es un morfismo de anillos analíticos, φ queda identificado con un elemento $p \in U$, y es $\varphi_V(f) = f(p)$ para $f : U \to V$ holomor

fa. Por lo tanto, $\varphi = Ev_p$ es la evaluación en el punto p.
Notemos que $\mathbb{C} = \mathcal{O}_o(1)$.
Probaremos ahora un resultado que se usará más adelante:

1.5. Lema:
Sea A un anillo analítico, sean U y V abiertos de $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$ respectivamente, y sea $f : U \to V$ holomorfa. Sea W un abierto, $W \subset V$. Entonces

$$A(f)^{-1}(A(W)) = A(f^{-1}(W))$$

Demostración.
Basta considerar el siguiente producto fibrado transversal:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(W) \arrow[r] \arrow[d, hook] & W \arrow[d, hook] \\ U \arrow[r, "f"'] & V \end{tikzcd}$$

donde la flecha $f^{-1}(W) \to W$ se obtiene por restricción y correstricción de f.
Por lo tanto

$$\begin{tikzcd}
A(f^{-1}(W)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & A(W) \arrow[d, hook] \\
A(U) \arrow[r, "A(f)"'] & A(V)
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Esto dice que $A(f^{-1}(W)) = A(f)^{-1}(A(W))$.

1.6. <u>Lema</u>:

Los anillos analíticos preservan intersecciones finitas.

<u>Demostración</u>.

Basta probar que si U y V son abiertos en $\mathbb{C}^n$, entonces:

$$A(U \cap V) = A(U) \cap A(V)$$

Sea $i : U \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ la inclusión.

Por el lema 1.5, es:

$$A(i)^{-1}(A(V)) = A(i^{-1}(V))$$

Pero $i^{-1}(V) = U \cap V$ y $A(i)^{-1}(A(V)) = A(U) \cap A(V)$. Por lo tanto, $A(U \cap V) = A(U) \cap A(V)$.

1.7. <u>Definición</u>:

Sea $\pi : A \to B$ un morfismo de anillos analíticos en una categoría $\mathcal{E}$ con límites finitos. π se llama local, cuando para cada par de abiertos U y V en $\mathbb{C}^n$, con $V \subset U$, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A(V) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_V"'] & A(U) \arrow[d, "\pi_U"] \\ B(V) \arrow[r, hook] & B(U) \end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$. (1)

1.8. <u>Observación</u>.

Es claro que esto es equivalente a tomar directamente $U = \mathbb{C}^n$. Cuando $\mathcal{E} = \mathcal{E}ns$, la condición (1) es equivalente a que π_U satisface la condición:

"Para todo $a \in A(U)$ tal que $\pi_u(a) \in B(V)$, $a \in A(V)$"

Por lo tanto, un morfismo $\pi : A \to B$ de anillos analíticos en $\mathcal{E}ns$ es local si y sólo si, dado V abierto en $\mathbb{C}^n$ y $a \in A^n$ tal que $\pi_{\mathbb{C}^n}(a) \in B(V)$, entonces $a \in A(V)$.

1.9. <u>Lema</u>.

Sea V_o un abierto acotado no vacío en $\mathbb{C}$, sea A un anillo analítico y sea $\pi : A \to \mathbb{C}$ un morfismo de anillos analíticos. Supongamos que π satisface que si $a \in A$ y $\pi(a) \in V_o$, entonces $a \in A(V_o)$. Entonces, π es local.

<u>Demostración</u>.

Por la observación 1.8, hay que probar que si V es abierto en $\mathbb{C}^n$, $a \in A^n$ y $\pi_{\mathbb{C}^n}(a) \in V$, entonces $a \in A(V)$.

Sea $\beta \in V_o$, fijo, y sea $M > 0$ tal que $V_o \subset B(\beta, M)$, donde $B(\beta, M)$ indica la bola abierta en $\mathbb{C}$ de centro β y radio M. Sea V abierto en $\mathbb{C}^n$, $a \in A^n$ tal que $\pi_{\mathbb{C}^n}(a) \in V$. Sea $\alpha = \pi_{\mathbb{C}^n}(a)$. Como V es abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B(\alpha_1, r) \times \ldots \times B(\alpha_n, r) \subset V, \text{ donde } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

Sea $f_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f_j(z) = \frac{M}{R}(z_j - \alpha_j) + \beta, \quad 1 \leq j \leq n. \quad f_j \text{ es holomorfa.}$$

Por ser π morfismo de anillos analíticos, el cuadrado:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "A(f_j)"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{C}^n}"'] & A \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "f_j"] & \mathbb{C} \end{tikzcd} \qquad \text{conmuta.}$$

Por lo tanto,

$$\pi(A(f_j)(a)) = f_j(\pi_{\mathbb{C}^n}(a)) = f_j(\alpha) = \beta .$$

Entonces, $\pi(A(f_j)(a)) \in V_o$, y por hipótesis, se deduce que $A(f_j)(a) \in A(V_o)$, o sea $a \in A(f_j)^{-1}(A(V_o))$. Pero por el lema 1.5, $A(f_j)^{-1}(A(V_o)) = A(f_j^{-1}(V_o))$. Por lo tanto, $a \in A(f_j^{-1}(V_o))$ para todo j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Entonces, $a \in \bigcap_{j=1}^{n} A(f_j^{-1}(V_o))$.

Pero, por el lema 1.6, A preserva intersecciones finitas, y entonces

$$\bigcap_{j=1}^{n} A(f_j^{-1}(V_o)) = A(\bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(V_o))$$

Por lo tanto, $a \in A(\bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(V_o))$. Pero

$$f_j^{-1}(V_o) \subset f_j^{-1}(B(\beta,M)) =$$

$$= \{z \in \mathbb{C}^n / f_j(z) \in B(\beta,M)\} = \{z \in \mathbb{C}^n / |f_j(z)-\beta| < M\} =$$

$$= \{z \in \mathbb{C}^n / |\tfrac{M}{r}(z_j-\alpha_j)| < M\} = \{z \in \mathbb{C}^n / |z_j-\alpha_j| < R\}$$

$$(1 \leqslant j \leqslant n)$$

Por lo tanto:

$$\bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(V_o) \subset \bigcap_{j=1}^{n} \{z \in \mathbb{C}^n / |z_j-\alpha_j| < r\} =$$

$= \{ z \in \mathbb{C}^n / | z_j - \alpha_j | < r, \text{ para todo } j, \ 1 \leq j \leq n \}$

$= B(\alpha_1, r) \times B(\alpha_2, r) \times \ldots \times B(\alpha_n, r) \subset V.$

Como A preserva inclusiones abiertas, se deduce que

$$A\left(\bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(V_o) \right) \subset A(V)$$

Por lo tanto, $a \in A(V)$.

Esto concluye la prueba del lema 1.9.

1.10. Definición.

Un anillo analítico A en $\&$ preserva cubrimientos, cuando para cada cubrimiento $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de un abierto U, con U_α abierto, la familia: $A(U_\alpha) \hookrightarrow A(U)$ es epimorfa efectiva universal en $\&$. Cuando $\& = \&ns$, esto quiere decir, con las correspondientes identificaciones, que si $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, entonces $A(U) = \bigcup_{\alpha \in I} A(U_\alpha)$. Aquí, hay una inclusión que se verifica cualquiera sea el anillo analítico A, ya que $A(U_\alpha) \subset A(U)$ para $\alpha \in I$, y por lo tanto $\bigcup_{\alpha \in I} A(U_\alpha) \subset A(U)$.

1.11. Definición.

Un anillo analítico A se llama local cuando A preserva cubrimientos.

1.12. Observación.

Como la familia vacía cubre el conjunto vacío, se sigue que $A(\emptyset) = \emptyset$ (o bien, se podría haber tomado esto como parte de la definición).

1.13. Lema.

Sea A un anillo analítico en &ns tal que existe un morfismo local $\pi : A \to \mathbb{C}$. Entonces, A es un anillo analítico local.

Demostración.

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de abiertos en $\mathbb{C}^n$, y sea $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Sea $\pi : A \to \mathbb{C}$ local. Dado $a \in A(U)$, se tiene que $\pi_U(a) \in U$. Por lo tanto, existe $\alpha \in I$ tal que $\pi_U(a) \in U_\alpha$. Como π es local, se deduce que $a \in A(U_\alpha)$. Esto prueba que $A(U) \subset \bigcup_{\alpha \in I} A(U_\alpha)$. La otra inclusión vale para todo anillo analítico:

Para cada α, es $U_\alpha \subset U$; por lo tanto $A(U_\alpha) \subset A(U)$ $(\forall\, \alpha \in I)$ y entonces $\bigcup_{\alpha \in I} A(U_\alpha) \subset A(U)$ (además como $\pi_\phi : A(\phi) \to \phi$ entonces $A(\phi) = \phi$). esto prueba que A preserva cubrimientos.

1.14. Teorema.

Sea A un anillo analítico local en &ns. Entonces, existe

$\pi : A \to \mathbb{C}$ morfismo local.

Demostración.

Vamos a probar primero que A es un anillo algebraico local. En efecto, si $\mathbb{C}^* = \{ z \in \mathbb{C} / z \neq 0 \}$, por ser A un anillo analítico es $A(\mathbb{C}^*) = A^*$, el conjunto de elementos inversibles de A (ver [4]). Como $\mathbb{C} = \mathbb{C}^* \cup (1-\mathbb{C}^*)$ y A preserva cubrimientos, es $A = A(\mathbb{C}) = A(\mathbb{C}^*) \cup A(1-\mathbb{C}^*) = A^* \cup (1-A^*)$ (donde $A(1-\mathbb{C}^*) = 1-A(\mathbb{C}^*)$ por ser A un funtor). Por lo tanto, para todo $a \in A$, a es inversible o $1-a$ es inversible. Vamos a probar ahora que $0 \neq 1$ en A.

Sea $U = \{ z \in \mathbb{C} / |z| < \frac{1}{2} \}$; $V = \{ z \in \mathbb{C} / |z| > \frac{1}{2} \}$. Como A preserva intersecciones finitas (por 1.6), se tiene:

$$A(U) \cap A(V) = A(U \cap V) = A(\phi) = \phi \quad \text{(donde } A(\phi) = \phi \text{ por ser } A \text{ local)}$$

ahora bien, A es una $\mathbb{C}$-álgebra, donde cada $\alpha \in \mathbb{C}$ tiene una interpretación $\alpha_A \in A$, y es $\alpha_A = A(f)(1)$, donde f es la función consistente α. Por lo tanto, si $\alpha \in W$, W abierto en $\mathbb{C}$, pensando a $f : \mathbb{C} \to W$ (f es la función constante α), se tiene $A(f) : A \to A(W)$.

Entonces,

$$\alpha_A = A(f)(1) \in A(W)$$

Como $0 \in U$ y $1 \in V$, se deduce que $0_A \in A(U)$ y $1_A \in A(V)$, y como $A(U) \cap A(V) = \emptyset$, se tiene que $0_A \neq 1_A$, o sea $0 \neq 1$ en A. Esto prueba, entonces, que A es un anillo algebraico local. Vamos a probar ahora que el cuerpo residual de A es $\mathbb{C}$; o sea, que si I es el ideal maximal de A, entonces $A/_I \cong \mathbb{C}$. Recordemos que $I = \{a \in A/a$ no es inversible$\}$.
Para cada $p \in \mathbb{C}$, $r > 0$, notemos $B(p,r) = \{z \in \mathbb{C}/|z-p| < r\}$ la bola abierta de centro p y radio r.
Para cada $j \in \mathbb{N}$, es $\mathbb{C} = \bigcup_{p \in \mathbb{C}} B(p,\frac{1}{j})$, y como A preserva cubrimientos, es:

$$A = A(\mathbb{C}) = \bigcup_{p \in \mathbb{C}} A(B(p,\tfrac{1}{j}))$$

Por lo tanto, dado $a \in A$, $\exists\, \alpha_j \in \mathbb{C}$ tal que $a \in A(B(\alpha_j,\frac{1}{j}))$.
Como A es un anillo analítico, vale que:

$$a \in A(B(\alpha,r)) \quad \text{si y sólo si} \quad a-\alpha_A \in A(B(0,r)),$$

hecho que se obtiene usando la función $f(z) = z-\alpha$; por lo tanto,

$$a-\alpha_{j,A} \in A(B(0,\tfrac{1}{j})) \qquad (\forall j \in \mathbb{N}).$$

Para $j,k \in \mathbb{N}$, es: $\alpha_{j,A}-\alpha_{k,A} = (\alpha_{j,A}-a) + (a-\alpha_{k,A})$, donde $\alpha_{j,A}-a \in A(B(0,\frac{1}{j}))$ y $a-\alpha_{k,A} \in A(B(0,\frac{1}{k}))$ (se obtiene usando $f(z) = -z$). Ahora bien, en general, si $a_1 \in A(B(0,r_1))$ y

$a_2 \in A(B(0,r_2))$, entonces $a_1+a_2 \in A(B(0,r_1+r_2))$; en efecto, basta considerar $f(z_1,z_2) = z_1+z_2$; $f : B(0,r_1)\times B(0,r_2) \to$ $\to B(0,r_1+r_2)$. Es $A(f) : A(B(0,r_1))\times A(B(0,r_2)) \to A(B(0,r_1+r_2))$, y es $a_1+a_2 = A(f)(a_1,a_2)$. Por lo tanto, $a_1+a_2 \in$ $\in A(B(0,r_1+r_2))$. Aplicando este hecho, obtenemos que $(\alpha_j-\alpha_k)_A \in A(B(0,\frac{1}{j}+\frac{1}{k}))$. Vamos a probar ahora que, si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\alpha_A \in A(B(0,r))$, entonces $|\alpha| \leq r$. En efecto, si $|\alpha| > r$, sea $U = \{z \in \mathbb{C}/|z| > r\}$. Es: $A(U) \cap A(B(0,r)) = A(U \cap B(0,r)) =$ $= A(\emptyset) = \emptyset$. Como $\alpha \in U$, $\alpha_A \in A(U)$, y como $A(U) \cap A(B(0,r))$ $= \emptyset$, se deduce que $\alpha_A \notin A(B(0,r))$.

Usando este resultado, obtenemos que $|\alpha_j-\alpha_k| \leq \frac{1}{j}+\frac{1}{k}$.

Por lo tanto, la sucesión $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$; se deduce que existe $\alpha = \lim_{j\to\infty} \alpha_j$.

Vamos a probar que $a-\alpha_A \in A(B(0,\epsilon))$ para todo $\epsilon > 0$

$$a-\alpha_A = (a-\alpha_{j,A}) + (\alpha_{j,A}-\alpha_A) = (a-\alpha_{j,A}) + (\alpha_j-\alpha)_A$$

Sea $\epsilon > 0$. Existe $j_o \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha-\alpha_j| < \frac{\epsilon}{2}$ para $j \geq j_o$. Sea j_1 tal que $\frac{1}{j_1} < \frac{\epsilon}{2}$, y sea $j_2 = \max\{j_o,j_1\}$. Es:

$$a-\alpha_A = a-\alpha_{j_2,A} + (\alpha_{j_2}-\alpha)_A$$

aquí $a-\alpha_{j_2,A} \in A(B(0,\frac{1}{j_2}))$, pero $\frac{1}{j_2} \leq \frac{1}{j_1} < \frac{\epsilon}{2}$, por lo tanto $B(0,\frac{1}{j_2}) \subset B(0,\frac{\epsilon}{2})$ y $A(B(0,\frac{1}{j_2})) \subset A(B(0,\frac{\epsilon}{2}))$. Luego, $a-\alpha_{j_2,A} \in A(B(0,\frac{\epsilon}{2}))$. Como $j_2 \geqslant j_o$, es $|\alpha-\alpha_{j_2}| < \frac{\epsilon}{2}$, o sea $\alpha_{j_2}-\alpha \in B(0,\frac{\epsilon}{2})$; entonces $(\alpha_{j_2}-\alpha)_A \in A(B(0,\frac{\epsilon}{2}))$.

Deducimos entonces que $a-\alpha_A \in A(B(0,\epsilon))$.
Se probó, entonces, que para todo $a \in A$, $\exists\, \alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$a-\alpha_A \in A(B(0,\epsilon)) \quad \text{para todo} \quad \epsilon > 0.$$

Vamos a probar que $a-\alpha_A$ no es inversible en A. Esto se deducirá del hecho de que si $c \in A$ es inversible, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $c \notin A(B(0,\epsilon))$. En efecto: Sea c inversible en A y sea b su inverso en A; $b = c^{-1}$.

$\mathbb{C} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B(0,j)$ y como A preserva cubrimientos, es:

$A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A(B(0,j))$. Por lo tanto, $\exists\, j \in \mathbb{N}$ tal que

$b \in A(B(0,j))$. Consideremos $f(z) = \frac{1}{z}$, $f : \{z \in \mathbb{C}/0 < |z| < j\} \to \{\omega \in \mathbb{C}/|\omega| > \frac{1}{j}\}$, o sea: $f : \mathbb{C}^* \cap B(0,j) \to \{\omega \in \mathbb{C}/|\omega| > \frac{1}{j}\}$.

Es

$$A(f) : A^* \cap A(B(0,j)) \to A(\{\omega \in \mathbb{C}/|\omega| > \tfrac{1}{j}\});$$

Como $b \in A^* \cap A(B(0,j))$, es $A(f)(b) \in A(\{\omega \in \mathbb{C}/|\omega| > \frac{1}{j}\})$.

Pero $A(f)(b) = b^{-1} = c$. Por lo tanto,

$c \in A(\{\omega \in \mathbb{C} / |\omega| > \frac{1}{j}\})$, y como $A(\{\omega \in \mathbb{C}/|\omega| > \frac{1}{j}\}) \cap A(B(0,\frac{1}{j})) =$

$= A(\{\omega \in \mathbb{C}/|\omega| > \frac{1}{j}\} \cap B(0,\frac{1}{j})) = A(\emptyset) = \emptyset$, se deduce que

$c \notin A(B(0,\frac{1}{j}))$.

Aplicando este resultado a $a-\alpha_A$, se obtiene que $a-\alpha_A$ no es inversible en A. Por lo tanto, si I es el ideal maximal de A, $a-\alpha_A \in I$, o sea: $\bar{a} = \overline{\alpha_A}$ en $A_{/I}$.

Se probó entonces que para todo $a \in A$, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\bar{a} = \overline{\alpha_A}$ en $A_{/I}$.

Sea $\varphi : \mathbb{C} \to A_{/I}$, $\varphi(\alpha) = \overline{\alpha_A}$; obtenemos que φ es un epimorfismo.

Vamos a probar que φ es también un monomorfismo:

Si $\varphi(\alpha) = 0$, es $\overline{\alpha_A} = 0$; por lo tanto, $\alpha_A \in I$.

Si $\alpha \neq 0$, es $\alpha_A . (\frac{1}{\alpha})_A = (\alpha . \frac{1}{\alpha})_A = 1_A$; por lo tanto α_A es inversible; lo cual contradice el hecho de que $\alpha_A \in I$.

Por lo tanto, debe ser $\alpha = 0$; luego, φ es un monomorfismo.

Se probó entonces que φ es un isomorfismo y $A_{/I} \cong \mathbb{C}$.

Sea $\pi : A \to \mathbb{C}$ definido por: $\pi(a) = \varphi^{-1}(\bar{a})$. O sea, $\pi(a) = \alpha$ si y sólo si $\varphi(\alpha) = \bar{a}$, o sea $\overline{\alpha_A} = \bar{a}$, vale decir, que $\pi(a) = \alpha \Longleftrightarrow a-\alpha_A \in I$.

Por lo tanto, $\pi(a) = \alpha$, donde α es el único número complejo que verifica que $a-\alpha_A \in I$, o sea $a-\alpha_A$ no es inversible.

Por supuesto, $a-\alpha_A \in A(B(0,\epsilon))$ para todo $\epsilon > 0$, ya que como $\mathbb{C} = \mathbb{C}^* \cup B(0,\epsilon)$, es $A = A^* \cup A(B(0,\epsilon))$, y como $a-\alpha_A \notin A^*$, se deduce que $a-\alpha_A \in A(B(0,\epsilon))$.

Vamos a probar que π define un morfismo de anillos analíticos. Para ello, vamos a probar primero que si U es un abierto en $\mathbb{C}^n$ y $a = (a_1,\dots,a_n) \in A(U)$, entonces $\pi_{\mathbb{C}^n}(a) = (\pi(a_1),\dots,\pi(a_n)) \in U$.

Supongamos primero que $U \subset \mathbb{C}$. Hay que probar que si $a \in A(U)$, entonces $\alpha = \pi(a) \in U$.

Como U es abierto, U es la unión de bolas B_j, con $\bar{B}_j \subset U$;

$$U = \bigcup_{j\in J} B_j \ , \ \bar{B}_j \subset U, \ \ B_j = B(z_j,r_j)$$

Como A preserva cubrimientos, es $A(U) = \bigcup_{j\in J} A(B_j)$. Por lo tanto, como $a \in A(U)$, $\exists j \in J$ tal que $a \in A(B_j) = A(B(z_j,r_j))$ y luego, $a-z_{j,A} \in A(B(0,r_j))$. Además, $\alpha_A - a \in A(B(0,\epsilon))$ (para todo $\epsilon > 0$). Sumando, obtenemos que: $(\alpha-z_j)_A \in A(B(0,r_j+\epsilon))$, y por lo tanto, nuevamente, $|\alpha-z_j| \leq r_j+\epsilon$, y esto vale para todo $\epsilon > 0$. Se deduce que $|\alpha-z_j| \leq r_j$.

Por lo tanto, $\alpha \in \bar{B}_j$, y como $\bar{B}_j \subset U$, se obtiene que $\alpha \in U$.

Cuando U es abierto en $\mathbb{C}^n$, se puede escribir:

$$U = \bigcup_{j\in J} B_{j,1}\times\dots\times B_{j,n} \ , \text{ donde cada } B_{j,k} (1 \leq k \leq n)$$

es una bola abierta en $\mathbb{C}$, y $\overline{B_{j1}\times\ldots\times B_{jn}}\subset U$, para todo $j\in J$.

Como A preserva cubrimientos, es:

$$A(U) = \bigcup_{j\in J} A(B_{j,1}\times\ldots\times B_{j,n}) =$$

$$= \bigcup_{j\in J} A(B_{j,1})\times\ldots\times A(B_{j,n})$$

Como $a = (a_1,\ldots,a_n)\in A(U)$, existe $j\in J$ tal que $a\in A(B_{j1})\times\ldots\times A(B_{jn})$, o sea $a_k\in A(B_{j,k})$ $(1\leqslant k\leqslant n)$. Es:

$$\pi_{\mathbb{C}^n}(a) = (\pi(a_1),\ldots,\pi(a_n)) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Razonando exactamente igual al caso $n = 1$, se obtiene que $\alpha_k\in\overline{B_{j,k}}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$. Por lo tanto: $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in$ $\in\bar{B}_{j1}\times\ldots\times\overline{B_{jn}}\subset\overline{B_{j1}\times\ldots\times B_{jn}}\subset U$, o sea $\alpha\in U$.

Queda definido entonces, para cada U abierto en $\mathbb{C}^n$,

$$\pi_U : A(U) \to U \quad \text{por}$$

$$\pi_U(a) = (\pi(a_1),\ldots,\pi(a_n)) \quad \text{si} \quad a = (a_1,\ldots,a_n)\in A(U)\subset A^n.$$

Para probar que π es un morfismo de anillos analíticos, hay que probar que dada $f : U \to V$ holomorfa, (U abierto en

$\mathbb{C}^n$, V abierto en $\mathbb{C}^m$), el cuadrado:

$$\begin{tikzcd} A(U) \arrow[r, "A(f)"] \arrow[d, "\pi_U"'] & A(V) \arrow[d, "\pi_V"] \\ U \arrow[r, "f"] & V \end{tikzcd}$$ conmuta.

Supongamos que $V \subset \mathbb{C}$. Sea $a = (a_1,\ldots,a_n) \in A(U) \subset A^n$.

$\pi_U(a) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ con $\alpha_k = \pi(a_k)$, $(1 \leq k \leq n)$, y $\pi_U(a) \in U$.

Además, $a_k - \alpha_{k,A} \in A(B(0,\epsilon))$ para todo $\epsilon > 0$.

Sea $b = A(f)(a) \in A(V)$ y sea $\beta = \pi_V(b) = \pi(b)$ $(V \subset \mathbb{C})$.

Por definición, $\beta \in \mathbb{C}$ es el único número complejo que satisface

$$b - \beta_A \in A(B(0,\epsilon)) \quad \text{para todo} \quad \epsilon > 0.$$

Hay que probar que $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \beta$; basta probar, entonces, que $b - f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)_A \in A(B(0,\epsilon))$ para todo $\epsilon > 0$, o sea que:

$$A(f)(a) - f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)_A \in A(B(0,\epsilon)) \quad \text{para todo} \quad \epsilon > 0.$$

Sea $\epsilon > 0$. Por ser f contínua, $\exists\, \delta > 0$ tal que:

$$|z_1 - \alpha_1| < \delta, \ldots, |z_n - \alpha_n| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(\alpha)| < \epsilon$$

Como $a_k - \alpha_{k,A} \in A(B(0,r))$ para todo $r > 0$, se tiene que

$$a_k - \alpha_{k,A} \in A(B(0,\delta)), \text{ o sea } a_k \in A(B(\alpha_k,\delta)) \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

Por lo tanto, $a = (a_1,\ldots,a_n) \in A(B(\alpha_1,\delta)) \times \ldots \times A(B(\alpha_n,\delta)) =$
$= A(B(\alpha_1,\delta) \times \ldots \times B(\alpha_n,\delta))$.
Como $f : B(\alpha_1,\delta) \times \ldots \times B(\alpha_n,\delta) \rightarrow B(f(\alpha),\epsilon)$ y es:

$$A(f) : A(B(\alpha_1,\delta) \times \ldots \times B(\alpha_n,\delta)) \rightarrow A(B(f(\alpha),\epsilon)).$$

Por lo tanto, $A(f)(a) \in A(B(f(\alpha),\epsilon))$, y entonces

$$A(f)(a) - f(\alpha)_A \in A(B(0,\epsilon)).$$

Cuando V es abierto en $\mathbb{C}^m$, la demostración se remite al caso $m = 1$, haciéndola coordenada a coordenada.
Finalmente, veamos que π es local: hay que probar que si $a \in A^n$, U es abierto en $\mathbb{C}^n$ y $\pi_{\mathbb{C}^n}(a) \in U$, entonces $a \in A(U)$.
Sea $\alpha = \pi_{\mathbb{C}^n}(a) \in U$. Como U es abierto, entre $r > 0$ tal que

$$B(\alpha_1,r) \times \ldots \times B(\alpha_n,r) \subset U; \quad \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

Es $\alpha_k = \pi(a_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ y se sabe que $a_k - \alpha_{k,A} \in A(B(0,\epsilon))$ para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto, $a_k - \alpha_{k,A} \in A(B(0,r))$, y luego,

$a_k \in A(B(\alpha_k, r)) \quad (1 \leq k \leq n)$.

Luego

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \in A(B(\alpha_1, r)) \times \ldots \times A(B(\alpha_n, r)) =$$

$$= A(B(\alpha_1, r) \times \ldots \times B(\alpha_n, r)) \subset A(U).$$

Luego, $a \in A(U)$.

Queda probado, entonces que $\pi : A \to \mathbb{C}$ es un morfismo local de anillos analíticos.

1.5. Observación.

Es claro que si A y B son anillos analíticos, $\pi : A \to B$ es local y B preserva cubrimientos, entonces A preserva cubrimientos.

Esto ocurre, ya que si $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ es un cubrimiento abierto, entonces $B(U_\alpha) \hookrightarrow B(U)$ es epimorfa efectiva universal, y como π es local, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A(U_\alpha) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_{U_\alpha}"'] & A(U) \arrow[d, "\pi_U"] \\ B(U_\alpha) \arrow[r, hook] & B(U) \end{tikzcd}$$

es un pull-back, para cada $\alpha \in I$.

Por lo tanto, la familia $A(U_\alpha) \hookrightarrow A(U)$ es epimorfa efectiva universal, o sea: A preserva cubrimientos.

1.16. Ejemplo.

Sea $\mathcal{O}_{n,p}$ el anillo analítico de gérmenes en p de funciones holomorfas. Entonces $Ev_p : \mathcal{O}_{n,p} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un morfismo local de anillos analíticos. Por lo tanto, $\mathcal{O}_{n,p}$ es local. Para V abierto, $\mathcal{O}_{np}(V)$ es el conjunto de gérmenes de funciones holomorfas a valores en V, o equivalentemente, es el conjunto de gérmenes en p de funciones holomorfas f tales que $f(p) \in V$.

1.17. Ejemplo.

Sea ahora E un espacio topológico, y consideremos el topos $Sh(E)$ de haces sobre E. Sea $\mathbb{C}_E$ el haz de gérmenes de funciones continuas en E a valores complejos. Entonces $\mathbb{C}_E$ es un anillo analítico en $Sh(E)$, dado por: si U es abierto en $\mathbb{C}^n$,

$\mathbb{C}_E(U)$ es el haz de gérmenes de funciones continuas en E a valores en U. Vale decir, $\mathbb{C}_E(U)(H) = \text{continuas}(H,U)$, es el conjunto de funciones continuas de H en U, para H abierto, $H \subset E$. Se puede probar que $\mathbb{C}_E$ preserva cubrimientos (ver [4]).

Supongamos ahora que U es un abierto en $\mathbb{C}^n$, y $h_1,\dots,h_k$ son funciones holomorfas en U. Sea $E = z(h_1,\dots,h_k)$ el conjunto de ceros comunes de $h_1,\dots,h_k$, vale decir, $E = \{p \in U / h_i(p) = 0,\ 1 \leq i \leq k\}$.

Consideremos a E con la topología de subespacio de U.
Sea $\mathcal{O}_E$ el haz sobre E, cuya fibra en un punto $p \in E$ es $\mathcal{O}_{n,p}/(h_{1p},\dots,h_{kp})$, donde $(h_{1p},\dots,h_{kp})$ es el ideal generado por $h_{1p},\dots,h_{kp}$, que son los gérmenes de p de $h_1,\dots,h_k$, respectivamente.
Si S es una sección de $\mathcal{O}_E$ sobre un abierto H, $H \subset E$, entonces para cada $p \in H$, existe un entorno abierto V de p en U y una función holomorfa f en V, tal que:
$S(x) = \bar{f}_x$ para todo $x \in V \cap E$, donde f_x es el gérmen de f en x, y $\bar{f}_x$ indica la clase de f_x según el ideal generado por $h_{1x},\dots,h_{kx}$ en $\mathcal{O}_{n,x}$.
Queda bien definido $VS(p)$ (el "valor de S en p") por $VS(p) = f(p)$, ya que si $\bar{g}_p = \bar{f}_p$, entonces $g_p - f_p$ $(h_{1p},\dots,h_{kp})$; por lo tanto, en un entorno de p, es $g-f = \Sigma\alpha_i h_i$, con α_i holomorfa en ese entorno.
Evaluando en p, y teniendo en cuenta que $p \in E = z(h_1,\dots,h_k)$, se obtiene que $g(p) = f(p)$.
Esto define una función continua $VS : H \to \mathbb{C}$.
Para W abierto en $\mathbb{C}^m$, definimos $\mathcal{O}_E(W)$ como el haz tal que:

$$\mathcal{O}_E(W)(H) = \left\{ \begin{array}{l} (S_1,\dots,S_m)/S_i \text{ es una sección de } \mathcal{O}_E \text{ en } H \\ \text{y } (VS_1(x),\dots,VS_m(x)) \in W \text{ para todo } x \in H \end{array} \right\}$$

Se puede probar que $\mathcal{O}_E$ es un anillo analítico en Sh(E). (Ver [4]).
Además, se tiene un morfismo de anillos analíticos $\pi : \mathcal{O}_E \to \mathbb{C}_E$ dado por:
para W abierto en $\mathbb{C}^m$, $\pi_W : \mathcal{O}_E(W) \to \mathbb{C}_E(W)$ es el morfismo de haces definido por:

$$\pi_{W,H}(S_1,\ldots,S_m) = (VS_1,\ldots,VS_m) \text{ para } H \subset E \text{ abierto.}$$

Aquí, como $(S_1,\ldots,S_m) \in \mathcal{O}_E(W)(H)$, $(VS_1,\ldots,VS_m)$ es una función continua de $H \to W$.
Es fácil ver que π es local. Como C_E preserva cubrimientos, por 1.15, se deduce que $\mathcal{O}_E$ preserva cubrimientos.

1.18. <u>Observación</u>.
Se puede probar que si E es un espacio topológico y A es un anillo analítico en Sh(E) que preserva cubrimientos, entonces existe $\theta : A \to \mathbb{C}_E$ morfismo local.
La idea de la demostración es considerar, para cada $p \in E$, la fibra A_p del haz A. A_p resulta ser un anillo analítico en &ns, y del hecho de que A preserva cubrimientos, se deduce que A_p preserva cubrimientos.
Luego, por el teorema 1.14, existe $\pi_p : A_p \to \mathbb{C}$ morfismo local.
Se prueba que esta colección $\{\pi_p\}_{p \in E}$ define una función

continua $h : A \to \mathbb{C}$ (aquí A está pensado como espacio etal), y, finalmente, para cada $x \in A$ (el espacio etal), se toma el $p \in E$ tal que $x \in A_p$, se toma un entorno de x donde la proyección $A \to E$ sea un homeomorfismo, con una inversa S definida en un abierto $H \subset E$, y se define $g = h \circ s$, $g : H \to \mathbb{C}$ continua. Finalmente se toma $\theta(x)$ = germen en p de $g = g_p$; y se prueba que $\theta : A \to \mathbb{C}_E$ define un morfismo local de anillos analíticos en $Sh(E)$.

1.19. Observación.

Sea $\mathcal{A}$ la categoría de anillos analíticos en &ns.
Entonces $\mathcal{A}$ tiene límites finitos y colímites filtrantes, y ambos se calculan "punto a punto". (ver [4]).
Diremos que un anillo analítico A es de presentación finita si el funtor representable por A preserva colímites filtrantes. Notaremos $\mathcal{A}_{pf}$ a la categoría de anillos analíticos en &ns de presentación finita.
Por una construcción categórica general, se sabe que A es de presentación finita si y sólo si A es un retracto de un cociente de $\mathcal{O}_n(U)$; vale decir, existe U abierto en $\mathbb{C}^n$, $h_1,\dots,h_k$ holomorfas en U y $\omega : \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k) \longrightarrow A$ retracción (o sea, existe $v : A \longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k) \longrightarrow A$ tal que $\omega v = id_A$). Aquí, el cociente $\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k)$

está dado por la propiedad universal:

1) Existe $r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k)$ (llamada la proyección al cociente), tal que $r(h_i) = 0$ para $1 \leqslant i \leqslant k$.

2) Si B es un anillo analítico y $\varphi : \mathcal{O}_n(U) \to B$ tal que $\varphi(h_i) = 0$ para $1 \leqslant i \leqslant k$, entonces existe una única

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k) \longrightarrow B \quad \text{tal que} \quad \tilde{\varphi} r = \varphi$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_n(U) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k) \arrow[dl, dashed, "\exists!\tilde{\varphi}"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

φ está dado por un elemento $b \in B(U)$, es $\varphi(f) = B(f)(b)$ para $f \in \mathcal{O}_n(U)$. Por lo tanto, la condición $\varphi(h_i) = 0$ se escribe:

$$B(h_i)(b) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

1.20. <u>Definimos</u>:

$$Z_B(h_1,\ldots,h_k) = \{\, b\in B(U)/B(h_i)(b) = 0 \quad \text{para} \quad 1\leq i\leq k \,\}$$

el conjunto de ceros de $h_1,\ldots,h_k$ en B.

Por lo tanto, la condición $\varphi(h_i) = 0$, $1\leq i\leq k$, se escribe:

$$b\in Z_B(h_1,\ldots,h_k)$$

De la definición de $\mathcal{O}_n(U)_{/(h_1,\ldots,h_k)}$ se deduce que hay una biyección entre $[\,\mathcal{O}_n(U)_{/(h_1,\ldots,h_k)}, B]$ (el conjunto de morfismos de $\mathcal{O}_n(U)_{/(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow B$) y el conjunto de morfismos $\varphi : \mathcal{O}_n(U) \to B$ tales que $\varphi(h_i) = 0$. Por lo tanto, hay una biyección

$$[\,\mathcal{O}_n(U)_{/(h_1,\ldots,h_k)}, B] \;\tilde{=}\; Z_B(h_1,\ldots,h_k)$$

1.21. Observación.

Consideremos la categoría dual A^{op}_{pf} .

Sea $i = C \to A^{op}_{pf}$; $i(U) = \overline{\mathcal{O}_n(U)}$. Entonces, i es un anillo analítico en A^{op}_{pf} (ver [4]).

Por la teoría general se conoce que se tiene la siguiente propiedad universal:

si $B: C \to \&$ es un anillo analítico en una categoría $\&$ con límites finitos, entonces existe un único funtor $F : A^{op}_{pf} \longrightarrow \&$ que preserva límites finitos tal que $Fi = B$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "i"] \arrow[d, "B"'] & A_{pf}^{op} \arrow[dl, dashed, "\exists ! F"] \\ \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

En el caso $\mathcal{E} = \mathcal{E}ns$, F está dado por $F(\bar{A}) = [A,B]$ y por una construcción categórica general, esto se generaliza a cualquier categoría $\mathcal{E}$ con límites finitos.

CAPITULO II

Gérmenes y ceros de funciones holomorfas.

En esta sección estudiaremos las propiedades del anillo analítico $\mathcal{O}_{np}$ de gérmenes en p de funciones holomorfas ($p \in \mathbb{C}^n$).

2.1. Lema.

1) Sean U y V abiertos en $\mathbb{C}^n$ tales que $U \supset V$. Entonces, el morfismo de restricción $\mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \mathcal{O}_n(V)$ es un epimorfismo de la categoría de anillos analíticos.

2) Sea $p \in U$, U abierto en $\mathbb{C}^n$. Entonces el morfismo canónico: $\mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{n,p}$ es un epimorfismo de la categoría de anillos analíticos.

Demostración.

1). Sea $\rho : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \mathcal{O}_n(V)$ el morfismo de restricción y sean $\mathcal{O}_n(V) \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} A$ morfismos tales que $\varphi\rho = \psi\rho$.

Por ser φ y ψ morfismos, los cuadrados:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_n(V)(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, hook] & A(V) \arrow[d, hook] \\
\mathcal{O}_n(V)(U) \arrow[r, "\varphi_U"] & A(U)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_n(V)(V) \arrow[r, "\psi_V"] \arrow[d, hook] & A(V) \arrow[d, hook] \\
\mathcal{O}_n(V)(U) \arrow[r, "\psi_U"] & A(U)
\end{tikzcd}$$

conmutan.

aplicando a id_V, se obtiene:

$$\varphi_V(id_V) = \varphi_U(i_{V,U}) = \varphi_U(\rho_U(id_U)) = (\varphi\rho)_u(id_V)$$

$$\psi_V(id_V) = \psi_U(i_{V,U}) = \psi_U(\rho_U(id_U)) = (\psi\rho)_U(id_U)$$

Pero como $\varphi\rho = \psi\rho$, se obtiene que $\varphi_V(id_V) = \psi_V(id_V)$. Por lo tanto, el lema de Yoneda asegura que $\varphi = \psi$. Esto prueba que ρ es un epimorfismo.

2) Sea ahora $r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{n,p}$ el morfismo canónico, y sean $\mathcal{O}_{np} \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} A$ morfismos tales que $\varphi r = \psi r$.

Sea $\alpha \in \mathcal{O}_{n,p}$. Existe V abierto en $\mathbb{C}^n$, con $p \in V$, $V \subset U$, y existe $g \in \mathcal{O}_n(V)$ tal que $\alpha = g_p$ = germen de g en p.
Sean $\rho : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \mathcal{O}_n(V)$ el morfismo de restricción,

$$r' \quad \mathcal{O}_n(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{n,p} \quad \text{el canónico.}$$

Es claro que $r'\rho = r$. Por lo tanto:

$$(\varphi r')\rho = \varphi(r'\rho) = \varphi r = \psi r = \psi(r'\rho) = (\psi r')\rho.$$

ahora bien, por 1), ρ es un epimorfismo. Se deduce entonces que $\varphi r' = \psi r'$,
Aplicando a g, se obtiene: $\varphi(r'(g)) = \psi(r'(g))$, o sea, (teniendo en cuenta que $r'(g) = g_p = \alpha$):

$$\varphi(\alpha) = \psi(\alpha).$$

Esto prueba que $\varphi = \psi$.
Por lo tanto, r es un epimorfismo.

2.2. <u>Lema</u>:
Sea U abierto en $\mathbb{C}^n$ y sea $p \in U$. Consideremos el diagrama:

Sea a el elemento que define $\varphi(a = \varphi_U(id_U))$. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que exista $\tilde{\varphi}: \mathcal{O}_{n,p} \to A$ que verifique $\tilde{\varphi} r = \varphi$, es que $a \in A(V)$ para todo entorno abierto V de p. Además, si esto ocurre, $\tilde{\varphi}$ es única.

Demostración.

Supongamos que existe $\tilde{\varphi}: \mathcal{O}_{n,p} \longrightarrow A$ tal que $\tilde{\varphi} r = \varphi$.
Sea $\alpha = r_U(id_U)$, $\alpha \in \mathcal{O}_{n,p}(U)$, vamos a probar que $\alpha \in \mathcal{O}_{n,p}(V)$ para todo entorno abierto V de p.

Sea V abierto tal que $p \in V$. Se puede suponer que $V \subset U$.
Entonces α = germen en p de id_U = germen en p de id_V.
Pero $id_V : V \to V$ toma valores en V. Por lo tanto, (germen en p de id_V) $\in \mathcal{O}_{n,p}(V)$, o sea $\alpha \in \mathcal{O}_{n,p}(V)$.
Por lo tanto, dado V abierto tal que $p \in V \subset U$, se verifica:

$$a = \varphi_U(id_U) = (\tilde{\varphi} r)_U(id_U) = \tilde{\varphi}_U(r_U(id_U)) = \tilde{\varphi}_U(\alpha)$$

Pero como $\alpha \in \mathcal{O}_{n,p}(V)$, es $\tilde{\varphi}_U(\alpha) = \tilde{\varphi}_V(\alpha)$.

Entonces $a = \tilde{\varphi}_V(\alpha)$ con $\tilde{\varphi}_V : \mathcal{O}_{n,p}(V) \longrightarrow A(V)$.

Por lo tanto, $a \in A(V)$.

Recíprocamente, supongamos que $a \in A(V)$ para todo entorno abierto V de p.

Vamos a definir $\tilde{\varphi} \quad \mathcal{O}_{np} \rightarrow A$.

Sea $\beta \in \mathcal{O}_{n,p}$. Es β = germen de f en p, para cierta $f \in \mathcal{O}_n(V)$, donde V es un entorno abierto de p, y se puede suponer que $V \subset U$. Se define: $\tilde{\varphi}(\beta) = A(f)(a)$.

Recordemos que $A(f) : A(V) \longrightarrow A$ y que, por hipótesis, $a \in A(V)$ veamos que $\tilde{\varphi}$ está bien definida:

Supongamos que β = germen de g en p, con $g \in \mathcal{O}_n(W)$, W abierto, $p \in W$.

Como germen de f en p = germen de g en p, existe X entorno abierto de p tal que $f_{|X} = g_{|X}$. De nuevo, por hipótesis, $a \in A(X)$. Por lo tanto,

$$A(f)(a) = A(f_{|X})(a)$$

$$A(g)(a) = A(g_{|X})(a)$$

y como $f_{|X} = g_{|X}$, se obtiene que

$$A(f)(a) = A(g)(a).$$

Esto define $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_{n,p} \longrightarrow A$. Por supuesto, $\tilde{\varphi}_{\mathbb{C}^m} : \mathcal{O}^m_{n,p} \rightarrow A^m$

se define $\tilde{\varphi}_{\mathbb{C}^m}(\beta_1,\dots,\beta_m) = (\tilde{\varphi}(\beta_1),\dots,\tilde{\varphi}(\beta_m))$.

Vamos a probar que se tiene un morfismo de anillos analíticos:

Hay que probar primero que si $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_m) \in \mathcal{O}_{n,p}(W)$, con W abierto en $\mathbb{C}^m$, entonces $\tilde{\varphi}_{\mathbb{C}^m}(\beta) \in A(W)$. Como $\beta \in \mathcal{O}_{n,p}(W)$, $\exists f: V \to W$ holomorfa, con V entorno abierto de p, tal que β = germen de f en p. Si $f = (f_1,\dots,f_m)$, será:

β_i = germen de f_i en p, $f_i : V \to \mathbb{C}$ holomorfa.

Es:

$$\tilde{\varphi}_{\mathbb{C}^m}(\beta) = (\tilde{\varphi}(\beta_1),\dots,\tilde{\varphi}(\beta_m)) = (A(f_1)(a),\dots,A(f_m)(a)) =$$

$$= A(f)(a). \quad (1)$$

Como $f : V \to W$, es $A(f) : A(V) \to A(W)$. Por lo tanto, $A(f)(a) \in A(W)$, o sea $\tilde{\varphi}_{\mathbb{C}^m}(\beta) \in A(W)$.

Hay que probar ahora que si $g : X \to W$ es holomorfa (X abierto en $\mathbb{C}^m$, W abierto en $\mathbb{C}^s$) entonces el cuadrado:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{n,p}(X) & \xrightarrow{\mathcal{O}_{np}(g)} & \mathcal{O}_{np}(W) \\ \downarrow \tilde{\varphi}_X & & \downarrow \tilde{\varphi}_W \\ A(X) & \xrightarrow[A(g)]{} & A(W) \end{array}$$

conmuta.

Sea $\beta \in \mathcal{O}_{np}(X)$. Por lo tanto, $\exists\, f : V \to X$ holomorfa, con V entorno abierto de p, tal que β = germen de f en p. Entonces, es $\mathcal{O}_{np}(g)(\beta)$ = germen de $(g_\circ f)$ en p, y resulta,

$$\tilde{\varphi}_W(\mathcal{O}_{np}(g)(\beta)) = \tilde{\varphi}_W(\text{germen de } g_\circ f \text{ en } p) =$$

$$= \tilde{\varphi}_{\mathbb{C}^s}(\text{germen de } g_\circ f \text{ en } p).$$

Pero según lo visto en (1), es:

$$\tilde{\varphi}_{\mathbb{C}^s}(\text{germen de } g_\circ f \text{ en } p) = A(g_\circ f)(a).$$

Por lo tanto:

$$\tilde{\varphi}_W(\mathcal{O}_{np}(g)(\beta)) = A(g_\circ f)(a) = (A(g)_\circ A(f))(a) =$$

$$= A(g)(A(f)(a)) = A(g)(\tilde{\varphi}_X(\beta)).$$

Esto prueba que el cuadrado es conmutativo, y por lo tanto, $\tilde{\varphi}$ es un morfismo de anillos analíticos.

Finalmente,

$$(\tilde{\varphi} r)(f) = \tilde{\varphi}(r(f)) = \tilde{\varphi}(\text{germen de } f \text{ en } p) =$$

$$= A(f)(a) = \varphi(f) \quad \text{para toda } f \in \mathcal{O}_n(U).$$

Por lo tanto: $\quad \tilde{\varphi} r = \varphi$.

Además, es claro que $\tilde{\varphi}$ es única pues, por el lema 2.1, se sabe que r es un epimorfismo.

2.3. Corolario.

$\mathcal{O}_{n,p}$ es el anillo analítico que resuelve el problema universal de "mandar f a todos los entornos de $f(p)$". Más explícitamente:

1) $r : \mathcal{O}_n(U) \to \mathcal{O}_{np}$ verifica que si $f : U \to \mathbb{C}^m$ es holomorfa, entonces $r_{\mathbb{C}^m}(f) \in \mathcal{O}_{np}(X)$ para todo entorno abierto X de $f(p)$.

2) Si $\varphi : \mathcal{O}_n(U) \to A$ verifica que "si $f : U \to \mathbb{C}^m$ es holomorfa, entonces $\varphi_{\mathbb{C}^m}(f) \in A(X)$ para todo entorno abierto X de $f(p)$", entonces existe un única $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_{np} \to A$ tal que $\tilde{\varphi} r = \varphi$.

Demostración.

1) $r_{\mathbb{C}^m}(f) = (r(f_1),\ldots,r(f_m)) = (f_{1,p},\ldots,f_{m,p})$.

Sea X un entorno abierto de $f(p)$. Como f es continua, existe V entorno abierto de p, $V \subset U$, tal que $f(V) \subset X$.

Sea $g = f_{|V}$, $g : V \to X$.

Por lo tanto,

$$r_{\mathbb{C}^m}(f) = (f_{1p},\ldots,f_{m,p}) = (g_{1p},\ldots,g_{m,p})$$

y como g toma valores en X, $(g_{1p},\ldots,g_{mp}) \in \mathcal{O}_{n,p}(X)$.

2) Sea $a = \varphi_U(id_U)$ el elemento que define φ. $a \in A(U)$.
Sea X un entorno abierto de p, $X \subset U$.
Sea $i : U \to \mathbb{C}^n$ la inclusión.
Entonces $i(p) = p \in X$. Por lo tanto, por hipótesis, $\varphi_{\mathbb{C}^n}(i) \in A(X)$. Pero por ser φ morfismo de anillos analíticos,
$\varphi_{\mathbb{C}^n}(i) = \varphi_U(id_U) = a$.
Por lo tanto, $a \in A(X)$.
Esto prueba que $a \in A(X)$ para todo X entorno abierto de p.
Por lo tanto, por el lema 2.2, existe una única $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_{np} \to A$ tal que $\tilde{\varphi}\, r = \varphi$.

2.4. Observación.

En 2), basta pedir que $\varphi(f) \in A(X)$ para todo entorno abierto X de $f(p)$, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa, y usar las coordenadas $z_i : U \to \mathbb{C}$.

2.5. Corolario.

Sea $\alpha_o \in \mathbb{C}$. $\mathcal{O}_{np}$ es el anillo analítico que resuelve el problema universal de "mandar a todos los entornos de α_o las funciones holomorfas tales que $f(p) = \alpha_o$", más explícitamente:

1) $r : \mathcal{O}_n(U) \to \mathcal{O}_{n,p}$ verifica que si $f(p) = \alpha_o$, enton-

ces $r(f) \in \mathcal{O}_{n,p}(V)$ para todo entorno abierto V de α_o.

2) Si $\varphi : \mathcal{O}_n(U) \to A$ satisface que si "$f \in \mathcal{O}_n(U)$ es tal que $f(p) = \alpha_o$, entonces $\varphi(f) \in A(V)$ para todo entorno abierto V de α_o", existe una única $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_{n,p} \to A$ tal que $\tilde{\varphi} r = \varphi$.

<u>Demostración</u>

1) Si $f(p) = \alpha_o$ entonces dado V entorno abierto de α_o, $f(p) \in V$. Luego, por 1) del Corolario 2.3, se deduce que $r(f) \in \mathcal{O}_{n,p}(V)$.

2) Sea $a = \varphi_U(id_U)$ el elemento que define φ.
Sea $f_j(z) = z_j - p_j + \alpha_o$; $f_j : U \to \mathbb{C}$ holomorfa; como $f_j(p) = \alpha_o$, por hipótesis se tiene que

$$\varphi(f_j) \in A(V) \quad \text{para todo entorno abierto } V \text{ de } \alpha_o.$$

Ahora bien: $\varphi(f_j) = A(f_j)(a) = a_j - p_j + \alpha_o$. Por lo tanto, $a_j - f_j + \alpha_o \in A(V)$ para todo entorno V de α_o. (aquí, p_j y α_o están pensados en la $\mathbb{C}$-álgebra A).
Resulta claro entonces que

$$a_j \in A(V - \alpha_o + p_j) \quad \text{para todo entorno abierto } V \text{ de } \alpha_o.$$

O sea: $a_j \in A(W)$ para todo entorno abierto W de p_j. $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Sea ahora X un entorno cualquiera de p, abierto. Existen $X_1, \ldots, X_n$, entornos de $p_1, \ldots, p_n$, respectivamente, tales que $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \subset X$.

Se tiene que $a_j \in A(X_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Por lo tanto,

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \in A(X_1) \times \ldots \times A(X_n) = A(X_1 \times \ldots \times X_n) \subset A(X).$$

Luego, se probó que $a \in A(X)$ para todo entorno X de p. Luego, por el lema 2.2, existe una única $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_{n,p} \to A$ tal que $\tilde{\varphi} r = \varphi$.

2.6. <u>Observación</u>.

En el caso de los anillos C^∞ (ver [2]), el anillo C^∞_p tiene la propiedad universal de invertir todas las f tales que $f(p) \neq 0$. Esto se puede enunciar así: sea $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$; si $\varphi : C^\infty(U) \to A$ (A un anillo C^∞) verifica que $\varphi(f) \in A(\mathbb{R}^*)$ (o sea, $\varphi(f) \in A^*$, conjunto de elementos inversibles de A) para toda $f \in C^\infty(U)$ tal que $f(p) \in \mathbb{R}^*$ (o sea $f(p) \neq 0$) entonces existe una única $\tilde{\varphi} : C^\infty_{n,p} \to A$ tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} C^{\infty}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & C^{\infty}_{n,p} \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\ A & \end{tikzcd}$$

En el caso analítico, tenemos el siguiente resultado:

2.7. Corolario.

Sea X_o un abierto acotado no vacío en $\mathbb{C}$, fijo. Entonces $\mathcal{O}_{np}$ es el anillo analítico que resuelve el proeblema universal de "mandar a X_o todas las funciones holomorfas tales que $f(p) \in X_o$", más explícitamente:

1) $r : \mathcal{O}_n(U) \to \mathcal{O}_{np}$ verifica que $\forall f \in \mathcal{O}_n(U)$ tal que $f(p) \in X_o$, entonces $r(f) \in \mathcal{O}_{n,p}(X_o)$.

2) Si $\varphi : \mathcal{O}_n(U) \to A$ verifica que $\varphi(f) \in A(X_o)$ para toda $f \in \mathcal{O}_n(U)$ tal que $f(p) \in X_o$, entonces existe una única $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_{np} \to A$ tal que $\tilde{\varphi} r = \varphi$.

Demostración:

1) Es por lo ya probado en 1) del Corolario 2.3.

2) Sea $\omega_o \in X_o$ fijo. Como X_o es acotado, existe $M > 0$ tal que $X_o \subset B(\omega_o, M)$, donde $B(\omega_o, M)$ es la bola abierta

de centro en ω_o y radio M.

Sea $a = \varphi_U(id_U)$ el elemento que define φ. $a \in A(U)$.

Sea ahora V un entorno abierto de p, $p = (p_1, \ldots, p_n)$

Existe $\lambda > 0$ tal que $B(p_1, \lambda) \times \ldots \times B(p_n, \lambda) \subset V$.

Sea

$$f_j : U \to \mathbb{C} \quad (1 \leq j \leq n), \quad f_j(z) = \frac{M}{\lambda}(z_j - p_j) + \omega_o.$$

Se verifica que:

$$f_j^{-1}(X_o) \subset f_j^{-1}(B(\omega_o, M)) = \{ z \in U / |f_j(z) - \omega_o| < M \} =$$

$$= \{ z \in U / |\frac{M}{\lambda}(z_j - p_j)| < M \} = \{ z \in U / |z_j - p_j| < \lambda \} .$$

Por lo tanto

$$\bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(X_o) \subset \bigcap_{j=1}^{n} \{ z \in U / |z_j - p_j| < \lambda \} =$$

$$= \{ z \in U / |z_1 - p_1| < \lambda, \ldots, |z_n - p_n| < \lambda \} \subset V \qquad (1)$$

además, $f_j(p) = \omega_o \in X_o$. Por lo tanto, por hipótesis,

$$\varphi(f_j) \in A(X_o), \text{ o sea } A(f_j)(a) \in A(X_o).$$

Luego, $a \in A(f_j)^{-1}(A(X_o))$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Pero por el lema 1.5, $A(f_j)^{-1}(A(X_o)) = A(f_j^{-1}(X_o))$. Luego $a \in A(f_j^{-1}(X_o))$ $(\forall j,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$.

Entonces $a \in \bigcap_{j=1}^{n} A(f_j^{-1}(X_o))$. Como A es un anillo analítico, A respeta intersecciones finitas. Se deduce entonces que $a \in A(\bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(X_o))$, y entonces, por (1), $a \in A(V)$.

Por lo tanto, se probó que $a \in A(V)$ para todo entorno abierto V de p. Por lo tanto, por el lema 2.2, existe una única $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_{np} \to A$ tal que $\tilde{\varphi} r = \varphi$.

2.8. El lema de factorización.

Vamos a estudiar ahora otra propiedad del anillo de gérmenes. Recordemos que dado U abierto en $\mathbb{C}^n$, $h_1, \ldots, h_k$ holomorfa en U y $q \in U$, el cociente $\mathcal{O}_{n,q}/(h_{1,q}, \ldots, h_{k,q})$ de anillos analíticos se calcula como un cociente de anillos (ver [4]), y por lo tanto, la proyección al cociente $\mathcal{O}_{n,q} \to \mathcal{O}_{n,q}/(h_{1q}, \ldots, h_{kq})$ es suryectiva. (1).

Vamos a establecer el lema de factorización de un morfismo $\varphi : \mathcal{O}_n(U)/(h_1, \ldots, h_k) \longrightarrow B$, cuando B es un anillo analítico local.

Recordemos que el lema de factorización dice que todo morfismo $\varphi : A \to B$ de anillos analíticos tiene una factorización inicial $A \xrightarrow{\psi} D \xrightarrow{\lambda} B$, $\varphi = \lambda\psi$ con λ

local, que verifica que para toda otra factorización

$A \xrightarrow{\psi'} D' \xrightarrow{\lambda'} B$ con λ' local, existe una única

$\tau : D \longrightarrow D'$ tal que $\tau\psi = \psi'$ y $\lambda'\tau = \lambda$; y además, τ es local.

Sea entonces $\varphi : \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k) \longrightarrow B$, donde B es un anillo analítico local.

Por 1.14 se sabe que existe $\pi : B \to \mathbb{C}$ morfismo local de anillos analíticos.

Sean $r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)$ la proyección al cociente y $\rho : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{n,p}$ el morfismo canónico.

$\varphi r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow B$ está dado por un elemento $b \in B(U)$.

$b = (\varphi r)_U(id_U)$ y $(\varphi r)(f) = B(f)(b)$ para $f \in \mathcal{O}_n(U)$.

Por otra parte, $\pi\varphi r : \mathcal{O}_n(U) \to \mathbb{C}$ está dada por un elemento $p \in U$; $p = (\pi\varphi r)_U(id_U) = \pi_U((\varphi r)_U(id_U)) = \pi_U(b)$ y es $(\pi\varphi r)(f) = f(p)$ para $f \in \mathcal{O}_n(U)$.

Sea X entorno abierto de p, $X \subset U$. Como $\pi_U(b) = p$, entonces $\pi_U(b) \in X$; luego, por ser π local, se deduce que $b \in B(X)$.

Por lo tanto, se probó que $b \in B(X)$ para todo entorno abierto X de p (2). Por lo tanto, por 2.2 se deduce que existe una única $\gamma : \mathcal{O}_{n,p} \to B$ tal que $\dot{\gamma}\rho = \varphi r$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_n(U) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\varphi r"'] & \mathcal{O}_{n,p} \arrow[dl, dashed, "\exists!\gamma"] \\ B & \end{tikzcd}$$

además, según la construcción explícita de γ , es:

γ (germen de f en p) = $B(f)(b)$ para f holomorfa en un entorno de p

Pero:

$$(\gamma\rho)(h_i) = (\varphi r)(h_i) = \varphi(r(h_i)) = \varphi(0) = 0$$

o sea $\gamma(h_{i,p}) = 0. \quad (1 \leq i \leq k).$

Sea $\tilde{r} : \mathcal{O}_{n,p} \to \mathcal{O}_{n,p}/(h_{1p},\ldots,h_{kp})$ la proyección al cociente.

Se deduce que existe una única $\tilde{\gamma} : \mathcal{O}_{n,p}/(h_{1p},\ldots,h_{kp}) \longrightarrow B$ tal que $\tilde{\gamma}\tilde{r} = \gamma$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{n,p} \arrow[r, "\tilde{r}"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathcal{O}_{np}/(h_{1p},\ldots,h_{kp}) \arrow[dl, dashed, "\exists!\tilde{\gamma}"] \\ B & \end{tikzcd}$$

además, se tiene $\tilde{r}\rho : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{np}/(h_{1p},\ldots,h_{kp})$ que verifica: $(\tilde{r}\rho)(h_i) = \tilde{r}(h_{i,p}) = 0$, por lo tanto

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_n(U) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\tilde{r}\rho"'] & \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k) \arrow[dl, dashed, "\exists!\tilde{\rho}"] \\
\mathcal{O}_{np}/(h_{1p},\ldots,h_{kp}) &
\end{tikzcd}$$

se deduce que existe un único $\tilde{\rho} : \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k) \longrightarrow$

$\longrightarrow \mathcal{O}_{np}/(h_{1p},\ldots,h_{kp})$ tal que $\tilde{\rho}r = \tilde{r}\rho$.

Vamos a probar ahora que $\varphi = \tilde{\gamma}\tilde{\rho}$.

En efecto:

$$(\tilde{\gamma}\tilde{\rho})r = \tilde{\gamma}(\tilde{\rho}r) = \tilde{\gamma}(\tilde{r}\rho) = (\tilde{\gamma}\tilde{r})\rho = \gamma\rho = \varphi r,$$

y por lo tanto, por ser r un epimorfismo, se deduce que

$$\tilde{\gamma}\tilde{\rho} = \varphi$$

Por lo tanto, se tiene una factorización de φ:

$$\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k) \xrightarrow{\tilde{\rho}} \mathcal{O}_{n,p}/(h_{1p},\ldots,h_{kp}) \xrightarrow{\tilde{\gamma}} B$$

Vamos a probar ahora que $\tilde{\gamma}$ es local.

Consideremos, para ello, el morfismo: $\mathcal{O}_{np} \xrightarrow{ev_p} \mathbb{C}$.

Se sabe, por supuesto, que ev_p es local. Además, si $f \in \mathcal{O}_n(U)$, es:

$$ev_p(\rho(f)) = ev_p(f_p) = f(p) = (\pi\varphi r)(f).$$

Por lo tanto, $\pi \varphi r = ev_p \rho$.

Entonces,

$$(\pi\tilde{\gamma}\tilde{r})\rho = (\pi\tilde{\gamma})(\tilde{r}\rho) = (\pi\tilde{\gamma})(\tilde{\rho}r) =$$

$$= \pi(\tilde{\gamma}\tilde{\rho})r = \pi\varphi r = ev_p \rho$$

ahora bien, por 2.1, ρ es un epimorfismo.

Se deduce entonces que $\pi \tilde{\gamma} \tilde{r} = ev_p$. (3)

Sea ahora $z \in \mathcal{O}_{n,p}/(h_{1p},\ldots,h_{kp})$ y supongamos que $\tilde{\gamma}(z) \in B(V)$, donde V es un abierto en $\mathbb{C}$. Para probar que $\tilde{\gamma}$ es local, habrá que probar (por 1.8) que $z \in (\mathcal{O}_{np}/(h_{1p},\ldots,h_{kp}))(V)$.

Por ser $\tilde{r}$ suryectiva (por 1), existe $\alpha \in \mathcal{O}_{n,p}$ tal que $z = \tilde{r}(\alpha)$. Por lo tanto:

$$\tilde{\gamma}(\tilde{r}(\alpha)) = \tilde{\gamma}(z) \in B(V).$$

Ahora, por ser π un morfismo de anillos analíticos, se tiene que

$$\pi(\tilde{\gamma}\tilde{r}(\alpha)) \in V; \text{ o sea, por}(3)\ ,$$

$$ev_p(\alpha) \in V.$$

Como ev_p es local, se deduce que $\alpha \in \mathcal{O}_{np}(V)$, y como $\tilde{r}$ es un morfismo de anillos analíticos, $\tilde{r}(\alpha) \in (\mathcal{O}_{np/(h_{1p},\ldots,h_{kp})})(V)$, o sea $z \in (\mathcal{O}_{n,p/(h_{1p},\ldots,h_{kp})})(V)$.

Esto prueba que $\tilde{\gamma}$ es local. Por lo tanto se tiene una factorización de φ :

$$\mathcal{O}_n(U)_{/(h_1,\ldots,h_k)} \xrightarrow{\tilde{\rho}} \mathcal{O}_{n,p/(h_{1p},\ldots,h_{kp})} \xrightarrow{\tilde{\gamma}} B$$

Con $\tilde{\gamma}$ local.

Vamos a probar ahora que esta es una factorización inicial, o sea que si

$$\mathcal{O}_n(U)_{/(h_1,\ldots,h_k)} \xrightarrow{\psi} D \xrightarrow{\eta} B$$

es una factorización de $\varphi(\eta\psi = \varphi)$ con η local, entonces existe una única $\tau : \mathcal{O}_{np/(h_{1p},\ldots,h_{kp})} \longrightarrow D$ tal que

$$\begin{cases} \tau\tilde{\rho} = \psi \\ \eta\tau = \tilde{\gamma} \end{cases}\ , \text{ y además, } \tau \text{ es local.}$$

En efecto, consideremos $\psi r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow D$, que estará dada por un elemento $d \in D(U)$; es $d = (\psi r)_U(id_U)$.
Por lo tanto:

$$\eta_U(d) = \eta_U((\psi r)_U(id_U)) = (\eta\psi)_U(r_U(id_U)) =$$

$$= \varphi_U(r_U(id_U)) = (\varphi r)_U(id_U) = b.$$

O sea, $\eta_U(d) = b.$

Sea ahora X un entorno abierto de p, $X \subset U$. Por (1), se sabe que $b \in B(X)$.
Por lo tanto $\eta_U(d) = b \in B(X)$, y por ser η local, se deduce que $d \in D(X)$.
Por lo tanto, $d \in D(X)$ para todo entorno abierto X de p.
Se deduce entonces, por 2.2, que existe un único ℓ,

$$\ell : \mathcal{O}_{n,p} \longrightarrow D \quad \text{tal que} \quad \ell\rho = \psi r.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_n(U) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\psi r"'] & \mathcal{O}_{n,p} \arrow[dl, dashed, "\exists ! \ell"] \\
D &
\end{tikzcd}$$

además, $\ell(h_{i,p}) = \ell(\rho(h_i)) = (\psi r)(h_i) = \psi(0) = 0$, para $1 \leqslant i \leqslant k$.

Por lo tanto, se deduce que existe un único

$\tau : \mathcal{O}_{np}/(h_{1p},\ldots,h_{kp}) \longrightarrow D$ tal que $\tau\tilde{r} = \ell$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{n,p} \arrow[r, "\tilde{r}"] \arrow[d, "\ell"'] & \mathcal{O}_{n,p}/(h_{1p},\ldots,h_{kp}) \arrow[dl, dashed, "\exists!\tau"] \\
D &
\end{tikzcd}$$

Se verifica que:

$$(\tau\tilde{\rho})r = \tau(\tilde{\rho}r) = \tau(\tilde{r}\rho) = (\tau\tilde{r})\rho = \ell\rho = \psi r$$

y por ser r un epimorfismo, se deduce que $\tau\tilde{\rho} = \psi$.

Además,

$$(\eta\tau)(\tilde{r}\rho) = (\eta\tau)(\tilde{\rho}r) = \eta(\tau\tilde{\rho})r = (\eta\psi)r =$$

$$= \varphi r = \gamma\rho = (\tilde{\gamma}\tilde{r})\rho = \tilde{\gamma}(\tilde{r}\rho)$$

y como $\tilde{r}\rho$ es un epimorfismo (pues $\tilde{r}$ y ρ son epimorfismos) se deduce que $\eta\tau = \tilde{\gamma}$.

Se verifica facilmente la unicidad, ya que si τ' es otra flecha, entonces $\tau'\tilde{\rho} = \tau\tilde{\rho}$.

Por lo tanto, como $\tilde{\rho}r = \tilde{r}\rho$, se obtiene $\tau'(\tilde{r}\rho) = \tau(\tilde{r}\rho)$ y como $\tilde{r}\rho$ es un epimorfismo, $\tau = \tau'$.

Además, como $\eta\tau = \tilde{\gamma}$ y $\tilde{\gamma}$ es local, se deduce inmediatamente que τ es local.

Queda probado entonces que la factorización de φ :

$$\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k) \xrightarrow{\tilde{\rho}} \mathcal{O}_{n,p}/(h_{1p},\ldots,h_{kp}) \xrightarrow{\tilde{\gamma}} B$$

es inicial.

Sobre los ceros de funciones holomorfas en un anillo analítico.

2.9. Definición.

Sean $h_1,\dots,h_k$ funciones holomorfas sobre un abierto U de $\mathbb{C}^n$, $h_i : U \to \mathbb{C}$ y sea A un anillo analítico a valores en una categoría $\mathcal{E}$ con límites finitos. Se define $Z_A(h_1,\dots,h_k)$ (los ceros en A de $h_1,\dots,h_k$) como el egalizador en $\mathcal{E}$ de:

$$A(U) \underset{A(0)}{\overset{A(h)}{\rightrightarrows}} A^k$$

donde $h : U \to \mathbb{C}^k$ es $h = (h_1,\dots,h_k)$; $0 : U \to \mathbb{C}^k$.

2.10. Teorema.

En las hipótesis de la definición anterior, si V es un abierto tal que $Z(h_1,\dots,h_k) \subset V \subset U$, (donde $Z(h_1,\dots,h_k) = \{x \in U / h_i(x) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$), entonces $Z_A(h_1,\dots,h_k)$ es un subobjeto de $A(V)$.

Además se verifica que:

si $Z_A(h_1,\dots,h_k) \overset{i}{\hookrightarrow} A(U) \underset{A(0)}{\overset{A(h)}{\rightrightarrows}} A^k$; (o sea si i es la flecha de egalizador), y si $Z_A(h_1,\dots,h_k) \overset{p}{\hookrightarrow} A(V)$, entonces la composición:

$$Z_A(h_1,\dots,h_k) \xhookrightarrow{p} A(V) \xhookrightarrow{\text{natural}} A(U)$$

es $\quad Z_A(h_1,\dots,h_k) \xhookrightarrow{i} A(U)$;

o sea $\quad A(i_{V,U})p = i.$

Demostración.

Se puede suponer que $V \neq U$ (si $V = U$ no hay nada que probar).

Sea $g : U \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(z) = |h(z)| + \operatorname{dist}(z, U-V) \quad \text{para} \quad z \in U.$$

donde $\operatorname{dist}(Z,U-V) = \inf_{x \in U-V} d(z,x)$ (y $U-V \neq \emptyset$ pues $V \subset U$, $V \neq U$)

g es una gunción continua que satisface:

1) $g(z) > 0$ para todo $z \in U$.

En efecto, si $z \in V$, como V es abierto, $\operatorname{dist}(z,U-V) > 0$; y si $z \in U-V$, como $V \supset Z(h_1,\dots,h_k)$, se deduce que $z \notin Z(h_1,\dots,h_k)$. Por lo tanto, $\exists j$, $1 \leq j \leq k$ tal que $h_j(z) \neq 0$. Por lo tanto, como $h(z) = (h_1(z),\dots,h_j(z),\dots$ $\dots,h_k(z))$, es $h(z) \neq 0$. Luego $|h(z)| > 0$.

2) $g_{|U-V} = |h_{|U-V}|$ o sea, en $U-V$, $g = |h|$.

3) $g_{|V} > |h_{|V}|$ o sea, en V, $g > |h|$. En efecto, si $z \in V$, como V es abierto, $\mathrm{dist}(z, U-V) > 0$.

Sea

$$U_1 = \{(z,\omega)/z \in U,\ \omega \in \mathbb{C}^k \text{ , y } |\omega| < g(z)\}\ .$$

Como g es continua, U_1 es abierto, $U_1 \subset U \times \mathbb{C}^k$.

Sea $\ell : V \to U_1$ dada por: $\ell(z) = (z, h(z))$ $(z \in V)$ (Si $z \in V$, entonces $|h(z)| < g(z)$; por lo tanto, $(z,h(z)) \in U_1$) y sea $t : U_1 \to \mathbb{C}^k$, $t(z,\omega) = h(z) - \omega$.

Vamos a probar que $V \xrightarrow{\ell} U_1 \overset{t}{\underset{0}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}^k$ es un egalizador.

4) $t\ell = 0$, pues $t(\ell(z)) = t(z,h(z)) = h(z)-h(z) = 0$.

5) Sea $(z,\omega) \in U_1$ tal que $t(z,\omega) = 0$; o sea: $h(z)-\omega = 0$ $\Rightarrow \omega = h(z)$.

Como $(z,\omega) \in U_1$ y $\omega = h(z) \Rightarrow (z,h(z)) \in U_1 \Rightarrow |h(z)| < g(z)$. Por lo tanto, $z \in V$, y por supuesto, $\ell(z) = (z,h(z))$ (por 2) y 3)).

Por lo tanto, se probó que $V \xrightarrow{\ell} U_1 \overset{t}{\underset{0}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}^k$ es egalizador; como t y 0 son funciones independientes (la matriz Jacobiana de t, pensada como transformación lineal $\mathbb{C}^{n+k} \to \mathbb{C}^k$ es un epimorfismo, pues las derivadas respecto de las variables ω ya dan la identidad), y A es un anillo analítico, A respeta egalizadores de funciones independientes.

Por lo tanto:

$$A(V) \xrightarrow{A(\ell)} A(U_1) \underset{A(0)}{\overset{A(t)}{\rightrightarrows}} A^k$$

es un egalizador en $\mathcal{E}$ (aquí, $0 : U_1 \to \mathbb{C}^k$).

Sea $m : U \to U_1$ dada por $m(z) = (z,0)$.

($(z,0) \in U_1$ pues $g(z) > 0 \quad \forall z \in U$, por 1)).

Se tienen $A(m) : A(U) \to A(U_1)$

$$i : Z_A(h_1,\ldots,h_k) \to A(U)$$

Sea $\varphi = A(m)\, i : Z_A(h_1,\ldots,h_k) \to A(U_1)$, vamos a probar que $A(t)\varphi = A(0)\varphi$. $(0 : U_1 \to \mathbb{C}^k)$

$$A(t)\varphi = A(t)(A(m)i) = (A(t)A(m))i = A(tm)i$$

Pero $(tm)(z) = t(z,0) = h(z)-0 = h(z) \quad \forall z \in U$.

Por lo tanto, $tm = h$. Luego

$$A(t)\varphi = A(h)i$$

Pero por ser i la flecha de egolizador entre $A(h)$ y $A(0)$, es:

$$A(h)i = A(0)i \quad \text{donde aquí, } 0 : U \to \mathbb{C}^k$$

Por lo tanto, $A(t)\varphi = A(0)i$.

Pero $0 : U \to \mathbb{C}^k$ es la composición: $U \xrightarrow[m]{} U_1 \xrightarrow[0]{} \mathbb{C}^k$.

Por lo tanto,

$$A(t)\varphi = A(0)i = A(0m)i = (A(0)A(m))i =$$

$$= A(0)(A(m)i) = A(0)\varphi.$$

Se tiene entonces:

$$\begin{tikzcd}
 & Z_A(h_1,\ldots,h_k) \arrow[dl, dashed, "\exists ! p"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\
A(V) \arrow[r, "A(\ell)"'] & A(U_1) \arrow[r, shift left, "A(t)"] \arrow[r, shift right, "A(0)"'] & A^k
\end{tikzcd}$$

y por ser $A(V)$ el egalizador, se deduce entonces que existe una única $p : Z_A(h_1,\ldots,h_k) \longrightarrow A(V)$ tal que $A(\ell)p = \varphi$. Vamos a probar que p es un monomorfismo. Pra ello, basta ver que $A(\ell)p$ es un monomorfismo. Pero: $A(\ell)p = \varphi = A(m)i$, donde i es un monomorfismo.

Por lo tanto, basta ver que $A(m)$ es un monomorfismo.

Sea $s : U_1 \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+k}$ la inclusión, y sea $m' = sm$. Es $A(m') = A(s)A(m)$ y nuevamente, para probar que $A(m)$ es un monomorfismo, basta ver que $A(m') : A(u) \longrightarrow A^{n+k}$ es un monomorfismo.

Sea $\pi_1 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^n$ la proyección. Es claro que $\pi_1 m' : U \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ es la inclusión. Por lo tanto, $A(\pi_1 m') = A(\pi_1)A(m')$ es un monomorfismo. Luego, $A(m')$ es un monomorfismo.

Por lo tanto, p es un monomorfismo y $Z_A(h_1,\ldots,h_k)$ es un subobjeto de $A(V)$.

Finalmente, se ve sin mayores dificultades que

$$A(i_{V,U})p = i.$$

CAPITULO III

El topos clasificante de anillo analítico local

3.1. Definición.

En esta sección vamos a considerar la categoría P de los pares (U,h), donde U es abierto en $\mathbb{C}^n$ (para algún n) y $h : U \to \mathbb{C}^k$ es holomorfa (para algún k). Notaremos $h_1,\dots,h_k$ a las coordenadas de h y $h = (h_1,\dots,h_k)$. Como siempre, $Z(h_1,\dots,h_k)$ indicará el conjunto de ceros comunes a $h_1,\dots,h_k$, o sea: $Z(h_1,\dots,h_k) = \{ x \in U$ tales que $h_1(x) = \dots = h_k(x) = 0 \}$

Dado $V \subset \mathbb{C}^m$ abierto, y $g : V \to \mathbb{C}^r$ holomorfa, $g = (g_1,\dots,g_r)$, una flecha en P de $(U,h) \longrightarrow (V,g)$ es por definición, una colección $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ de funciones holomorfas, $f_\alpha : U_\alpha \to V$, donde $U_\alpha \subset U$ es abierto, y $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \supset Z(h_1,\dots,h_k)$, que satisface las siguientes condiciones: (como siempre, f_x indica el germen de f en x).

1) $\forall \alpha \in I$, $\forall x \in U_\alpha \cap (Z(h_1,\dots,h_k))$, $\forall j$, $1 \leq j \leq r$,

$(g_j f_\alpha)_x \in (h_{1,x},\dots,h_{k,x})$ (ideal generado por $h_{1x},\dots,h_{kx}$ en $\mathcal{O}_{n,x}$).

2) $\forall\ x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap Z(h_1,\dots,h_k)$, $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$.

3) $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap Z(h_1,\dots,h_k)$ y para t holomorfa en un entorno de $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$, $(tf_\alpha)_x - (tf_\beta)_x \in (h_{1,x}\dots,h_{k,x})$.

Dos de tales colecciones: $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$, $(f_{\alpha'})_{\alpha'\in j}$ se consideran equivalentes cuando

1') $\forall x\in U_\alpha \cap U_{\alpha'} \cap Z(h_1,\dots,h_k)$, $f_\alpha(x) = f_{\alpha'}(x)$ $(\alpha \in I,\ \alpha'\in j)$

2') $\forall x \in U_\alpha \cap U_{\alpha'} \cap Z(h_1,\dots,h_k)$ y $\forall t$ holomorfa en un entorno de $f_\alpha(x) = f_{\alpha'}(x)$, $(tf_\alpha)_x - (tf_{\alpha'})_x \in (h_{1,x},\dots,h_{k,x})$ $(\alpha \in I,\ \alpha'\in j)$.

Las flechas de P son tales colecciones (cocientadas por esa relación de equivalencia).

3.2. Observación.

En la definición de flecha en P de $(U,h) \longrightarrow (V,g)$, en las propiedades 3) y 2'), basta que se cumplan para $t = z_i$ $(1 \leq i \leq m)$, donde $z_i : V \to \mathbb{C}$ son las proyecciones. Esto se obtiene facilmente por el lema de Hadamard local (ver [4]).

3.3. Observación

Una flecha en P de $(U,h) \longrightarrow (V,g)$ equivale a un morfismo de espacios A.- anillados $(E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow (F,\mathcal{O}_F)$, donde $E = Z(h_1,\dots,h_k)$; $F = Z(g_1,\dots,g_r)$. (ver [4] y 1.17).

En efecto dada un flecha en P de $(U,h) \longrightarrow (V,g)$, dada por una colección $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ que satisface 1), 2) y 3), es fácil ver que esta colección determina una función continua $f : E \to F$, y para $x \in E$ se define $\phi_x : \mathcal{O}_{F,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{E,x}$ por

$$\phi_x(\overline{t_{f(x)}}) = (\overline{tf_\alpha})_x \quad \text{si} \quad x \in U_\alpha.$$

se puede probar que esto está bien definido, y que dos colecciones equivalentes $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$; $(f_{\alpha'})_{\alpha'\in j}$ determinan el mismo par

$$(f,\phi) : (E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow (F,\mathcal{O}_F)$$

Recíprocamente, toda flecha $(E,\mathcal{O}_E) \xrightarrow{(f,\phi)} (F,\mathcal{O}_F)$ de espacios A.-anillados está dada por una colección $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ (ver [4]), donde $f_\alpha : U_\alpha \to V$ es holomorfa, $E \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \subset U$, tal que para todo $x \in E \cap U_\alpha$ es $f_\alpha(x) = f(x)$, y el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_{m,f(x)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{F,f(x)} \\
{\scriptstyle f_\alpha^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_x} \\
\mathcal{O}_{n,x} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{E,x}
\end{array}$$

conmuta, donde las flechas horizontales son las proyecciones a los respectivos cocientes.

Esto dice que para t holomorfa en un entorno de $f(x)$ es

$$\overline{(tf_\alpha)_x}^{(\text{según } h_i)} = \phi_x(\overline{t_{f(x)}})^{(\text{según } g_i)}$$

Tomando $t = g_i$, el miembro derecho es $\phi_q(0) = 0$, entonces

$$\overline{(g_i f_\alpha)_x}^{(\text{según } h_i)} = 0$$

Luego, $(g_i f_\alpha)_x \in (h_{1x},\ldots,h_{kx})$; es también $f_\alpha(x) = f_\beta(x) = f(x)$ si $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap E$; y además,

$$\overline{(tf_\alpha)}_x = \phi_x(\overline{t_{f(x)}})$$

$$\overline{(tf_\beta)}_x = \phi_x(\overline{t_{f(x)}}) \quad \text{si} \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap E.$$

Por lo tanto, $\overline{(tf_\alpha)}_x = \overline{(tf_\beta)}_x$ y $(tf_\alpha)_x - (tf_\beta)_x \in$ $\in (h_{1x},\ldots,h_{kx})$. Esto dice que la colección $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ define una flecha en P.

Estas asignaciones son unversas una de la otra; esto termina de probar la equivalencia entre las flechas en P y los correspondientes morfismos de espacios A-anillados.

Sea $\mathcal{C}$ la categoría de abiertos de $\mathbb{C}^n$ $(\forall n)$ y funciones holomorfas. Se tiene el funtor $A : \mathcal{C} \to P$ dado por $A(U) = (U,0)$, y si $f : U \to V$ es holomorfa, entonces $A(f)$ $(U,0) \to (V,0)$ es el morfismo canónico en P deducido de f.

3.4. <u>Proposición</u>.

Sea $\mathcal{E}$ una categoría con límites finitos y sea B un anillo analítico local en $\mathcal{E}$. Entonces, existe un funtor $p : P \to \mathcal{E}$ tal que $pA = B$. Explícitamente:

$$p(U,h) = Z_B(h_1,\dots,h_k)$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"'] & P \arrow[dl, dashed, "\exists p"] \\ \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

<u>Demostración</u>.

Recordemos que $Z_B(h_1,\dots,h_k)$ es el siguiente egalizador en $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} Z_B(h_1,\dots,h_k) \arrow[r, hook, "i"] & B(U) \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B^k \end{tikzcd}$$

donde: $h : U \to \mathbb{C}^k$, $h = (h_1,\dots,h_k)$.

Sea $f : (U,h) \longrightarrow (V,g)$ dada por una colección $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$, $f_\alpha : U_\alpha \to V$, que satisface 1), 2) y 3). Vamos a definir:

$$p(f) : Z_B(h_1,\ldots,h_k) \longrightarrow Z_B(g_1,\ldots,g_r)$$

Sea $\tilde{U} = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Se tiene que $Z(h_1,\ldots,k_k) \subset \tilde{U} \subset U$.

Sea $i_\alpha : B(U_\alpha) \hookrightarrow B(U)$ la "inclusión" (donde $i_\alpha : U_\alpha \to \tilde{U}$ es la inclusión de abiertos).

Por el teorema 2.10 , se tiene que $Z_B(h_1,\ldots,h_k)$ es un subobjeto de $B(\tilde{U})$, mas explícitamente, se tiene:

$j : Z_B(h_1,\ldots,h_k) \hookrightarrow B(\tilde{U})$ que satisface que si

$t : B(\tilde{U}) \hookrightarrow B(U)$ es la "inclusión", (donde $t : \tilde{U} \to U$ es la inclusión de abiertos), entonces

$$tj = i.$$

Para cada $\alpha \in I$, se tiene el egalizador:

$$Z_B(h_{1|U_\alpha},\ldots,h_{k|U_\alpha}) \overset{j}{\hookrightarrow} B(U_\alpha) \overset{h_{|U_\alpha}}{\underset{0}{\rightrightarrows}} B^k$$

Sea $r_\alpha : U_\alpha \hookrightarrow U$ la inclusión. Se tiene: $r_\alpha : B(U_\alpha) \hookrightarrow B(U)$. Es $ti_\alpha = r_\alpha$.

Se tiene:

$$\begin{tikzcd}
 & Z_B(h_{1|U_\alpha} \ldots h_{k|U_\alpha}) \arrow[dl, dashed, "\exists\,!\, m_\alpha"'] \arrow[d, hook, "r_\alpha j_\alpha"] & \\
Z_B(h_1,\ldots,h_k) \arrow[r, hook, "i"'] & B(U) \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B^k
\end{tikzcd}$$

que verifica:

$$h(r_\alpha j_\alpha) = (hr_\alpha)j_\alpha = h_{|U_\alpha} j_\alpha = 0$$

Por lo tanto, existe un único $m_\alpha : Z_B(h_{1|U_\alpha},\ldots,h_{k|U_\alpha}) \longrightarrow$
$\longrightarrow Z_B(h_1,\ldots,h_k)$ tal que $im_\alpha = r_\alpha j_\alpha$.

Se verifica sin dificultad que el siguiente diagrama es un pull-back en $\mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd}
Z_B(h_{1|U_\alpha},\ldots,h_{k|U_\alpha}) \arrow[r, "m_\alpha"] \arrow[d, hook, "j_\alpha"] & Z_B(h_1,\ldots,h_k) \arrow[d, hook, "j"] \\
B(U_\alpha) \arrow[r, "i_\alpha"'] & B(\tilde{U})
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, como B preserva cubrimientos, y $\tilde{U} = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$, la familia $B(U_\alpha) \overset{i_\alpha}{\hookrightarrow} B(\tilde{U})$ es epimorfa efectiva universal en $\mathcal{E}$; y como

$$\begin{tikzcd} Z_B(h_{1|U_\alpha},\dots,h_{k|U_\alpha}) \arrow[r, "m_\alpha"] \arrow[d, hook, "j_\alpha"] & Z_B(h_1,\dots,h_k) \arrow[d, hook, "j"] \\ B(U_\alpha) \arrow[r, hook, "i_\alpha"'] & B(\tilde{U}_\alpha) \end{tikzcd}$$

es el pull-back, se deduce que la familia:

$$Z_B(h_{1|U_\alpha},\dots,h_{k|U_\alpha}) \xrightarrow{m_\alpha} Z_B(h_1,\dots,h_k)$$

es epimorfa efectiva en $\mathcal{E}$ (es claro también que m_α es monomorfismo. Consideremos ahora la familia:

$$Z_B(h_{1|U_\alpha},\dots,h_{k|U_\alpha}) \xrightarrow{f_\alpha j_\alpha} B(V) \qquad (\alpha \in I)$$

vamos a probar que esta familia es compatible, o sea que $f_\alpha j_\alpha$ y $f_\beta j_\beta$ "coinciden" en la intersección. Luego, esta familia inducirá una flecha $Z_B(h_1,\dots,h_k) \longrightarrow B(V)$. Finalmente, vamos a probar que esta flecha se factoriza por $Z_B(g_1,\dots,g_r)$.

Veamos entonces que la familia $f_\alpha j_\alpha$ $(\alpha \in I)$ es compatible. De nuevo, es facil ver que

$$\begin{array}{ccc}
Z_B(h_{1|U_\alpha \cap U_\beta}, \ldots, h_{k|U_\alpha \cap U_\beta}) & \hookrightarrow & Z_B(h_{1|U_\alpha}, \ldots, h_{k|U_\alpha}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
Z_B(h_{1|U_\beta}, \ldots, h_{k|U_\beta}) & \hookrightarrow & Z_B(h_1, \ldots, h_k)
\end{array}$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$.

Por lo tanto, si llamamos $u_{\alpha\beta} : Z_B(h_{1|U_\alpha \cap U_\beta}, \ldots$ $\ldots, h_{k|U_\alpha \cap U_\beta}) \hookrightarrow B(U_\alpha \cap U_\beta)$ al egalizador, para probar que $(f_\alpha j_\alpha)_{\alpha \in I}$ es compatible, habrá que ver que

$f_{\alpha|U_\alpha \cap U_\beta} u_{\alpha\beta} = f_{\beta|U_\alpha \cap U_\beta} u_{\alpha\beta}$ para $\alpha, \beta \in I$. (1)

Ahora bien, por la propiedad 3) de la familia $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$, aplicada a $t = z_i$ las coordenadas $(1 \leqslant i \leqslant m)$, se sabe que

$$(f_{\alpha,i})_x - (f_{\beta,i})_x \in (h_{1x}, \ldots, h_{k,x}) \quad \text{para} \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap$$
$$\cap Z(h_1, \ldots, h_k)$$

Por lo tanto, existe un entorno abierto V_x de x, $V_x \subset$ $\subset U_\alpha \cap U_\beta$, tal que en V_x es: $f_{\alpha,i} - f_{\beta,i} = \sum_{j=1}^{k} C_j^i h_j$, con C_j^i holomorfa en V_x. (2)

Se tiene entonces que $Z(h_{1|U_\alpha \cap U_\beta}, \ldots, h_{k|U_\alpha \cap U_\beta}) \subset \bigcup_x V_x \subset$ $\subset U_\alpha \cap U_\beta$ y nuevamente, por el teorema 2.10, se sabe que $Z_B(h_{1|U_\alpha \cap U_\beta}, \ldots, h_{k|U_\alpha \cap U_\beta})$ es un subobjeto de $B(\bigcup_x V_x)$. Sea $\tilde{V} = \bigcup_x V_x$. Como B preserva cubrimientos, la familia:

$$B(V_x) \xhookrightarrow[(x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap Z(h_1, \ldots, h_k))]{} B(\tilde{V}) \quad \text{es epimorfa efectiva}$$

universal, y usando nuevamente que

$$\begin{tikzcd}
Z_B(h_{1|V_x}, \ldots, h_{k|V_x}) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Z_B(h_{1|U_\alpha \cap U_\beta}, \ldots, h_{k|U_\alpha \cap U_\beta}) \arrow[d, hook] \\
B(V_x) \arrow[r, hook] & B(\tilde{V})
\end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$, se obtiene que la familia

$$Z_B(h_{1|V_x}, \ldots, h_{k|V_x}) \hookrightarrow Z_B(h_{1|U_\alpha \cap U_\beta}, \ldots, h_{k|U_\alpha \cap U_\beta})$$

es epimorfa efectiva en $\mathcal{E}$. $(x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap Z(h_1, \ldots, h_k))$.

Por lo tanto, para probar (1), es claro que basta ver que

$$f_{\alpha|V_x} \, s_x = f_{\beta|V_x} \, s_x \quad \text{para todo} \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap Z(h_1, \ldots, h_k),$$

donde $S_x : Z_B(h_{1|V_x}, \ldots, h_{k|V_x}) \hookrightarrow B(V_x)$ es el egalizador. Pero por (2) es $f_{\alpha|V_x} - f_{\beta|V_x} = \sum_{j=1}^{k} h_{j|V_x} C_j$ en $B(V_x)$. Por lo tanto, $(f_{\alpha|V_x} S_x) - (f_{\beta|V_x} S_x) =$

$$= \sum_{j=1}^{k} ((h_{j|V_x})S_x).(C_j S_x).$$

Pero por definición de S_x, es $h_{j|V_x} S_x = 0$ para $1 \leqslant j \leqslant k$.

Luego, $f_{\alpha|V_x} S_x = f_{\beta|V_x} S_x$.

Esto prueba que la familia $f_\alpha j_\alpha$ $(\alpha \in I)$ es compatible. Por lo tanto, como $Z_B(h_{1|U_\alpha}, \ldots, h_{k|U_\alpha}) \xhookrightarrow{m_\alpha} Z_B(h_1,,,.h_k)$ $(\alpha \in I)$ es epimorfa efectiva en $\mathcal{E}$, se deduce que existe una única $\tau : Z_B(h_1, \ldots, h_k) \longrightarrow B(V)$ tal que $\tau m_\alpha = f_\alpha j_\alpha$ $(\forall \alpha \in I)$.

Se observa que la misma demostración que se hizo para probar que la familia $f_\alpha j_\alpha$ $(\alpha \in I)$ es compatible, sirve para probar que si se tiene una familia $(f_{\alpha'})_{\alpha' \in j}$ equivalente a la dada, entonces la familia $(f_{\alpha'} j_{\alpha'})_{\alpha' \in j}$ induce la misma flecha τ que la familia $(f_\alpha j_\alpha)_{\alpha \in I}$ (ya que $f_\alpha j_\alpha$ y $f_{\alpha'} j_{\alpha'}$ "coincidirán en las intersecciones").

Se tiene ahora

$$\begin{tikzcd}
 & Z_B(h_1,\dots,h_k) \arrow[d, "\tau"] & \\
Z_B(g_1,\dots,g_r) \arrow[r, hook, "\tilde{i}"'] & B(V) \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B^r
\end{tikzcd}$$

vamos a probar que $g\tau = 0$; para ello, basta ver que para todo $\alpha \in I$, $(g\tau)m_\alpha = 0$, ya que la familia $Z_B(h_{1|U_\alpha}, \dots h_{k|U_\alpha}) \xhookrightarrow{m_\alpha} Z_B(h_1,\dots,h_k)$ es epimorfa efectiva.

Sea $\alpha \in I$, fijo. De nuevo, para cada $x \in U_\alpha \cap Z(h_1,\dots,h_k)$, existe V_x entorno abierto de x, $V_x \subset U_\alpha$, tal que $g_i f_{\alpha|V_x} = \sum_{\lambda=1}^{r} d_\lambda^i \, h_{\lambda|V_x}$, con d_λ^i holomorfa en V_x. (3)

(Por la propiedad 1) de la familia f_α), y nuevamente, como $Z(h_{1|U_\alpha},\dots,h_{k|U_\alpha}) \subset \bigcup_x V_x \subset U_\alpha$, entonces $Z_B(h_{1|U_\alpha},\dots,h_{k|U_\alpha})$ es un subobjeto de $B(\bigcup_x V_x)$ $(x \in U_\alpha \cap Z(h_1,\dots,h_k))$.

Como la familia $B(V_x) \longrightarrow B(\bigcup_x V_x)$ $(x \in U_\alpha \cap Z(h_1,\dots,h_k))$ es epimorfa efectiva universal, se obtiene por pull-back que

$$Z_B(h_{1|V_x},\dots,h_{k|V_x}) \xhookrightarrow{\ell_x} Z_B(h_{1|U_\alpha},\dots,h_{k|U_\alpha})$$

es epimorfa efectiva $(x \in U_\alpha \cap Z(h_1,\dots,h_k))$

aquí, ℓ_x es la flecha que verifica $j_\alpha \ell_x = z_x S_x$ donde

$z_x : B(V_x) \hookrightarrow B(U_\alpha)$ es la inclusión, y

$$S_x : Z_B(h_{1|V_x}, \dots, h_{k|V_x}) \hookrightarrow B(V_x) \text{ es el egalizador.}$$

Para probar que $(g\tau)m_\alpha = 0$, $(g\tau)m_\alpha : Z_B(h_{1|U_\alpha}, \dots, h_{k|U_\alpha}) \longrightarrow B^r$ basta ver que, para todo $x \in U_\alpha \cap Z(h_1, \dots, h_k)$, $(g\tau)m_\alpha \ell_x = 0$.

$$(g\tau)m_\alpha \ell_x = g(\tau m_\alpha)\ell_x = g(f_\alpha j_\alpha)\ell_x = (gf_\alpha)(j_\alpha \ell_x) =$$

$$= (gf_\alpha) z_x S_x = g(f_\alpha z_x) S_x = (gf_{\alpha|V_x}) S_x = \quad \text{(por 3)}$$

$$= \left(\sum_{\lambda=1}^{r} h_{\lambda|V_x} . d_\lambda \right) S_x = \sum_{\lambda=1}^{r} (h_{\lambda|V_x} S_x) . (d_\lambda S_x) .$$

Pero

$$Z_B(h_{1|V_x}, \dots, h_{k|V_x}) \xhookrightarrow{S_x} B(V_x) \underset{0}{\overset{h_{|V_x}}{\rightrightarrows}} B^k$$

es egalizador.

Por lo tanto, $h_{|V_x} S_x = 0$ y entonces, $h_{\lambda|V_x} S_x = 0 \quad \forall \lambda$;

Luego, $(g\tau)m_\alpha \ell_x = 0 \quad (\forall x)$.

Esto termina de probar que $g\tau = 0$.

Se tiene:

$$\begin{tikzcd}
 & Z_B(h_1,\ldots,h_k) \arrow[dl, dashed, "\exists !\, \tilde{\tau}"'] \arrow[d, "\tau"] & \\
Z_B(g_1,\ldots,g_r) \arrow[r, hook, "\tilde{i}"'] & B(V) \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B^r
\end{tikzcd}$$

Con $g\tau = 0$ y $Z_B(g_1,\ldots,g_r)$ el egalizador.
Por lo tanto, se deduce que existe una única

$$\tilde{\tau} : Z_B(h_1,\ldots,h_k) \to Z_B(g_1,\ldots,g_r) \quad \text{tal que} \quad \tilde{i}\,\tilde{\tau} = \tau.$$

Se define entonces $p(f) = \tilde{\tau}$.
Es inmediato verificar que p es un funtor. Además, $p(A(U)) = p(U,0) = Z_B(0) = B(U)$; y resulta además inmediato que "$p(A(f)) = B(f)$" para f holomorfa, $f : U \to V$.
Por lo tanto, $pA = B$.
Esto concluye la prueba de la proposición.

3.5. <u>Observación</u>.
Tiene sentido ahora, pensar que si $(E,\mathcal{O}_E)$ es un modelo especial, (ver [4]),
entonces queda bien definido $p(E,\mathcal{O}_E)$; ya que si $(E,\mathcal{O}_E)$ tiene dos presentaciones (U,h) y (V,g), entonces se

tienen flechas $(U,h) \underset{m}{\overset{f}{\rightleftarrows}} (V,g)$ de espacios A-anillados.

tales que $mf = id_{(U,h)}$; $fm = id_{(V,g)}$

Pero, por la observación 3.3, f y m son flechas en P.

Aplicando entonces el funtor p, se obtiene que:

$$p(m)p(f) = id_{p(U,h)} \; ; \; p(f)p(m) = id_{p(V,g)}$$

Por lo tanto $p(U,h)$ es isomorfo a $p(V,g)$ en $\mathcal{E}$ y entonces $p(E,\mathcal{O}_E)$ no depende de la presentación de E.

Sea $\mathcal{L}$ el sitio de los modelos locales (ver [4]) con la topología de Grothendieck dada por los cubrimientos abiertos. Sea A el anillo analítico en $\mathcal{L}$, dado por $A(U) = (U,\mathcal{O}_U)$ para U abierto en $\mathbb{C}^n$; vale decir $A = (\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}})$. (ver [4]).

3.6. Teorema.

Sea $\mathcal{E}$ un topos de grothendieck y B un anillo analítico local en $\mathcal{E}$. Entonces, existe un único funtor $p : \mathcal{L} \to \mathcal{E}$ que preserva límites finitos y es punto del sitio $\mathcal{L}$, tal que $pA = B$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"'] & \mathcal{L} \arrow[dl, dashed, "\exists ! p"] \\
\& &
\end{tikzcd}
$$

<u>Demostración.</u>

Por la observación 3.5, si E es un modelo especial, $E = Z(h_1,\ldots,h_k)$, entonces $p(E,\mathcal{O}_E) = Z_B(h_1,\ldots,h_k)$ está bien definido, y además: p es un funtor de la categoría de los modelos especiales en $\&$.

Sea ahora $(E,\mathcal{O}_E)$ un modelo local, dado por un haz de ideales coherente $\mathcal{I}$ en $\mathcal{O}_U$, con $E \subset U$. El hecho de que $\mathcal{I}$ sea coherente significa que existe un cubrimiento de E, $E = \bigcup_{i\in I} E_i$, donde cada E_i es un modelo espacial, $E_i = Z(h_1^{(i)},\ldots,h_{k_i}^{(i)})$, con $h_j^{(i)}$ holomorfa en un abierto $U_i \subset U$ y $E_i = E \cap U_i$.

Además, para cada $x \in E_i$, $\mathcal{I}_x$ está generado por $(h_{1,x}^{(i)},\ldots,h_{k_i,x}^{(i)})$.

Se define $p(E,\mathcal{O}_E) = \bigcup_{i\in I} p(E_i,\mathcal{O}_{E_i})$ vamos a probar que esta definición no depende de la elección del cubrimiento $E = \bigcup_{i\in I} E_i$.

En efecto, sea $E = \bigcup_{j\in J} F_j$, con $F_j = Z(g_1^{(j)},\ldots,g_{k_j}^{(j)})$,

g_r^j holomorfa en V_j abierto, $V_j \subset U$ y $F_j = E \cap V_j$. Además para cada $x \in F_j$ I_x está generado por $(g_{1,x}^{(j)}, \ldots$ $\ldots, g_{k_{j,x}}^{(j)})$. Sea $j \in J$, fijo. Para cada $x \in F_j$, se tiene $x \in E = \bigcup_{i \in I} E_i$.

Se toma entonces un $i_x \in I$ tal que $x \in E_{i_x}$. Se tiene:

$$I_x = (h_{1,x}^{(i_x)}, \ldots, h_{k_{i_x},x}^{(i_x)}) = (g_{1,x}^{(j)}, \ldots, g_{k_j,x}^{(j)})$$

Por lo tanto, existe un entorno abierto W_x de x, $W_x \subset$ $\subset U_{i_x} \cap V_j$, tal que, en W_x es:

$$h_s^{(i_x)} = \sum_{r=1}^{k_j} C_r^{s,x} \; g_r^{(j)} \quad \text{con } C_r^{s,x} \text{ holomorfa en } W_x$$

$$(1 \leqslant I \leqslant k_{i_x}) \qquad (1)$$

Sea $W = \bigcup_{x \in F_j} W_x$; W es abierto, $W \subset V_j$, y además:

$$W \supset F_j = Z(g_1^{(j)}, \ldots, g_{k_j}^{(j)})$$

Por lo tanto, por el teorema 2.10, se tiene que $Z_B(g_1^{(j)},$ $\ldots, g_{k_j}^{(j)})$ es uns subobjeto de $B(W)$.

O sea: la composición $Z_B(g_1^{(j)}, \ldots, g_{k_j}^{(j)}) \hookrightarrow B(W) \hookrightarrow B(V_j)$ es la flecha del egalizador $Z_B(g_1^{(j)}, \ldots, g_{k_j}^{(j)}) \hookrightarrow B(V_j)$.

Como B respeta cubrimientos, la familia $B(W_x) \xhookrightarrow[(x\in F_j)]{} B(W)$

es epimorfa efectiva universal.

Al igual que en la proposición 3.4 es fácil ver que

$$\begin{tikzcd}
Z_B(g^{(j)}_{1|W_x},\ldots,g^{(j)}_{k_j|W_x}) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Z_B(g^{(j)}_1,\ldots,g^{(j)}_{k_j}) \arrow[d, hook] \\
B(W_x) \arrow[r, hook] & B(W)
\end{tikzcd}$$

es un pull-back en & , y por lo tanto, la familia

$$Z_B(g^{(j)}_{1|W_x},\ldots,g^{(j)}_{k_j|W_x}) \xhookrightarrow[(x\in F_j)]{} Z_B(g^{(j)}_1,\ldots,g^{(j)}_{k_j})$$

es epimorfa efectiva (universal) en &.

Se tiene:

$$\begin{tikzcd}
Z_B(g^{(j)}_{1|W_x},\ldots,g^{(j)}_{k_j|W_x}) \arrow[r, hook, "i_x"] & B(W_x) \arrow[r, shift left, "(g^{(j)}_{1|W_x},\ldots,g^{(j)}_{k_j|w_x})"] \arrow[r, shift right, "0"'] \arrow[d, hook, "\tau_x"] & B^{k_j} \\
Z_B(h^{(i_x)}_1,\ldots,h^{(i_x)}_{k_{i_x}}) \arrow[r, hook, "\gamma_x"] & B(U_{i_x}) \arrow[r, shift left, "(h^{(i_x)}_1,\ldots,h^{(i_x)}_{k_{i_x}})"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B^{k_{i_x}}
\end{tikzcd}$$

Además, para $1 \leq s \leq k_{i_x}$, es:

$$h_s^{(i_x)}(\tau_x i_x) = (h_s^{(i_x)} \tau_x) i_x = h_{s|W_x}^{(i_x)} i_x = \quad \text{(por 1)}$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{k_j} C_r^{s,x} . g_{r|W_x}^{(j)} \right) i_x = \sum_{r=1}^{k_j} (C_r^{s,x} i_x) . (g_{r|W_x}^{(j)} i_x) = 0$$

ya que $g_r^{(j)} i_x = 0 \ \forall r$, $1 \leq r \leq k_j$, por ser i_x la flecha de egalizador.

Se deduce entonces, por ser $Z_B(h_1^{(i_x)}, \ldots, h_{k_{i_x}}^{(i_x)})$ el egalizador, que existe una única $\beta_x : Z_B(g_{1|W_x}^{(j)}, \ldots, g_{k_j|W_x}^{(j)}) \longrightarrow$ $\longrightarrow Z_B(h_1^{(i_x)}, \ldots, h_{k_{i_x}}^{(i_x)})$ tal que $\gamma_x \beta_x = \tau_x i_x$.

Es claro que γ_x es un monomorfismo; por lo tanto, $Z_B(g_{1|W_x}^{(j)}, \ldots, g_{k_j|W_x}^{(j)})$ es un subobjeto de $Z_B(h_1^{(i_x)}, \ldots, h_{k_{i_x}}^{(i_x)})$ para cada $x \in F_j$.

Como $Z_B(h_1^{(i_x)}, \ldots, h_{k_{i_x}}^{(i_x)}) = p(E_{i_x}, \mathcal{O}_{E_{i_x}})$ con $i_x \in I$, se obtiene que $Z_B(g_{1|W_x}^{(j)}, \ldots, g_{k_j|W_x}^{(j)})$ es un subobjeto de $\bigcup_{i \in I} p(E_i, \mathcal{O}_{E_i})$ para cada $x \in F_j$.

El hecho de que $Z_B(g_{1|W_x}^{(j)},\ldots,g_{k_j|W_x}^{(j)}) \xhookrightarrow[(x \in F_j)]{} Z_B(g_1^{(j)},$

$\ldots,g_{k_j}^{(j)})$ sea epimorfa efectiva (universal), dice que $\bigcup_{x \in F_j} Z_B(g_{1|W_x}^{(j)},\ldots,g_{k_j|W_x}^{(j)}) = Z_B(g_1^{(j)},\ldots,g_{k_j}^{(j)})$ y por lo tanto, como $Z_B(g_{1|W_x}^{(j)},\ldots,g_{k_j|W_x}^{(j)})$ es un subobjeto de $\bigcup_{i \in I} p(E_i,\mathcal{O}_{E_i})$ se obtiene que $Z_B(g_1^{(j)},\ldots,g_{k_j}^{(j)})$ es un subobjeto de $\bigcup_{i \in I} p(E_i,\mathcal{O}_{E_i})$ y como $p(F_j,\mathcal{O}_{F_j}) = Z_B(g_1^{(j)},\ldots$ $\ldots, g_{k_j}^{(j)})$, se ha probado que, $p(F_j,\mathcal{O}_{F_j})$ es un subobjeto de $\bigcup_{i \in I} p(E_i,\mathcal{O}_{E_i})$ para todo $j \in J$. Por lo tanto, $\bigcup_{j \in J} p(F_j,\mathcal{O}_{F_j})$ es un subobjeto de $\bigcup_{i \in I} p(E_i,\mathcal{O}_{E_i})$.

De manera análoga, se prueba que $\bigcup_{i \in I} p(E_i,\mathcal{O}_{E_i})$ es un subobjeto de $\bigcup_{j \in J} p(F_j,\mathcal{O}_{F_j})$. Podemos decir entonces que:

1) Cada $p(F_j,\mathcal{O}_{F_j})$ es un subobjeto de $\bigcup_{i \in I} p(E_i,\mathcal{O}_{E_i})$

2) si $X \in \mathcal{E}$ es un objeto tal que cada $p(F_j,\mathcal{O}_{F_j})$ es subobjeto de X, entonces $\bigcup_{j \in J} p(F_j,\mathcal{O}_{F_j})$ es subobjeto de X, y como $\bigcup_{i \in I} p(E_i,\mathcal{O}_{E_i})$ es subobjeto de $\bigcup_{j \in J} p(F_j,\mathcal{O}_{F_j})$ entonces $\bigcup_{i \in I} p(E_i,\mathcal{O}_{E_i})$ es subobjeto de X.

1) y 2) dicen que $\bigcup_{i\in I} p(E_i,\mathcal{O}_{E_i}) = \bigcup_{j\in J} p(F_j,\mathcal{O}_{F_j})$.

Esto termina de probar que $p(E,\mathcal{O}_E)$ está bien definido.

Sean ahora $(E,\mathcal{O}_E)$, $(F,\mathcal{O}_F)$ modelos locales y

$$(f,\phi) : (E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow (F,\mathcal{O}_F)$$

vamos a definir

$$p(f,\phi) : p(E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow p(F,\mathcal{O}_F)$$

Escribiendo $F = \bigcup_{i\in I} F_i$, con F_i modelos especiales, y teniendo en cuenta que $f : E \longrightarrow F$ es continua, es $f^{-1}(F_i)$ abierto en E. Por lo tanto, $f^{-1}(F_i)$ es un modelo local, y se puede escribir:

$$f^{-1}(F_i) = \bigcup_{j\in J_i} E_j \quad \text{con } E_j \text{ modelo especial.}$$

Entonces

$$E = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(F_i) = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} E_j .$$

Podemos escribir entonces:

$E = \bigcup_{j \in J} E_j$; E_j modelo especial; y para cada $j \in J$,

$\exists i_j \in I$ tal que $E_j \in f^{-1}(F_{ij})$.

Se tiene entonces:

$$(E_j, \mathcal{O}_{E_j}) \xrightarrow{(f|_{E_j},\, \phi|_{f^*(\mathcal{O}_{F_{ij}})})} (F_{ij}, \mathcal{O}_{F_{ij}})$$

flecha entre modelos especiales.

Por lo tanto, se tiene:

$$p(E_j, \mathcal{O}_{E_j}) \xrightarrow{p(f|_{E_j},\, \phi|_{f^*(\mathcal{O}_{F_{ij}})})} p(F_{ij}, \mathcal{O}_{F_{ij}}) \hookrightarrow p(F, \mathcal{O}_F)$$

componiendo, se tienen flechas:

$$p(E_j, \mathcal{O}_{E_j}) \longrightarrow p(F, \mathcal{O}_F).$$

Vamos a probar que esta familia de flechas es compatible; (o sea que coindicen en las intersecciones).

Es obvio que

$$p(E_j, \mathcal{O}_{E_j}) \cap p(E_\lambda, \mathcal{O}_{E_\lambda}) =$$

$$Z_B(h_1^{(j)},\dots,h_{k_j}^{(j)}) \cap Z_B(h_1^{(\lambda)},\dots,h_{k_\lambda}^{(\lambda)}) =$$

$$= Z_B(h_{1|U_j\cap U_\lambda}^{(j)},\dots,h_{k_j|U_j\cap U_\lambda}^{(j)},h_{1|U_j\cap U_\lambda}^{(\lambda)},\dots,h_{k_\lambda|U_j\cap U_\lambda}^{(\lambda)})$$

Recordando las definiciones de $p(f_{|E_j},\phi_{|f^*(\mathcal{O}_{F_{ij}})})$, $p(f_{|E_\lambda},\phi_{|f^*(\mathcal{O}_{F_{i_\lambda}})})$, habrá que probar que si (f,ϕ) está dada por f_α en un abierto $U_\alpha \subset U$, y está dada por f_β es un abierto $U_\beta \subset U_\lambda$, entonces, la composición:

$$Z_B(h_{1|U_j\cap U_\lambda}^{(j)},\dots,h_{k_j|U_j\cap U_\lambda}^{(j)},h_{1|U_j\cap U_\lambda}^{(\lambda)},\dots,h_{k_\lambda|U_j\cap U_\lambda}^{(\lambda)}) \cap$$

$$\cap B(U_\alpha\cap U_\beta) \hookrightarrow B(U_\alpha\cap U_\beta) \hookrightarrow B(U_\alpha) \xrightarrow{f_\alpha} B(V)$$

es la misma flecha que la composición:

$$Z_B(h_{1|U_j\cap U_\lambda}^{(j)},h_{k_j|U_j\cap U_\lambda}^{(j)},h_{1|U_j\cap U_\lambda}^{(\lambda)},\dots,h_{k_\lambda|U_j\cap U_\lambda}^{(\lambda)}) \cap$$

$$\cap B(U_\alpha\cap U_\beta) \hookrightarrow B(U_\alpha\cap U_\beta) \hookrightarrow B(U_\beta) \xrightarrow{f_\beta} B(V)$$

En efecto:

para $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap E \subset U_j \cap U_\lambda \cap E = E_j \cap E_\lambda$ es:

$$I_x = (h^{(\lambda)}_{1,x},\ldots,h^{(\lambda)}_{k_{\lambda,x}}) = (h^{(j)}_{1,x},\ldots,h^{(j)}_{k_{j,x}}),$$

y es $f(x) \in F_{i_j} \cap F_{i_\lambda}$ donde

$$F_{i_j} = Z(g_1^{(i_j)},\ldots,g_{k_{i_j}}^{(i_j)})$$

$$F_{i_\lambda} = Z(g_1^{(i_\lambda)},\ldots,g_{k_{i_\lambda}}^{(i_\lambda)}).$$

El modelo local F está dado por un haz de ideales coherentes M, y se tendrá

$$(g^{(i_j)}_{1,f(x)},\ldots,g^{(i_j)}_{k_{i_j},f(x)}) =$$

$$= (g^{(i_\lambda)}_{1,f(x)},\ldots,g^{(i_\lambda)}_{k_{i_\lambda},f(x)}) = M_{f(x)}$$

f_α y f_β verifican que, para t holomorfa en un entorno de $f(x)$

$$\phi_x(\overline{t_{f(x)}}\, g_r^{(i_j)}) = (\overline{tf_\alpha})_x\, h_r^{(j)}$$

$$\phi_x(\overline{t_{f(x)}}^{\,g_r^{(i_\lambda)}}) = (\overline{tf_\beta})_x^{h_r^{(\lambda)}}$$

teniendo en cuenta que el ideal generado en $f(x)$ por los gérmenes de las $g_r^{(i_j)}$ y de las $g_r^{(i_\lambda)}$ es el mismo , se obtiene que:

$$(\overline{tf_\alpha})_x^{h_r^{(j)}} = (\overline{tf_\beta})_x^{h_r^{(\lambda)}}$$ para t holomorfa en un entorno de $f(x)$

y usando que el ideal generado por los $h_r^{(j)}$ y los $h_r^{(\lambda)}$ en x es el mismo ideal I_x , podemos poner:

$$(\overline{tf_\alpha})_x^{h_r^{(j)}} = (tf_\beta)_x^{h_r^{(j)}}$$ para t holomorfa en un entorno de $f(x)$.

Tomando $t = z_1, \ldots, , t = z_m$ las coordenadas, y llamando

$$f_\alpha = (f_{\alpha,1}, \ldots, f_{\alpha,m}) \ ; \ f_\beta = (f_{\beta,1}, \ldots, f_{\beta,m})$$

se obtiene que

$$(\overline{f_{\alpha,s}})^{h_r^{(j)}} = (\overline{f_{\beta,s}})^{h_r^{(j)}} \qquad (1 \leq s \leq m).$$

Por lo tanto existe un entorno $W_x^{(s)}$ de x, $W_x^{(s)} \subset U_\alpha \subset U_\beta$, y funciones holomorfas $C_r^{(s)}$ en $W_x^{(s)}$, tales que

$$f_{\alpha,s} - f_{\beta,s} = \sum_{r=1}^{k_j} C_r^{(s)} \; h_r^{(j)} \quad \text{en} \quad W_x^{(s)} \qquad (1 \leqslant s \leqslant m)$$

tomando $W_x = W_x^{(1)} \cap \ldots \cap W_x^{(m)}$ entorno de x, se concluye que en W_x,

$$f_{\alpha,s} - f_{\beta,s} = \sum_{r=1}^{k_j} C_r^{(s)} \; h_r^{(j)}$$

finalmente, llamando $C_r = (C_r^{(1)}, \ldots, C_r^{(m)})$, se obtiene que

$$f_\alpha - f_\beta = \sum_{r=1}^{k_j} h_r^{(j)} \; C_r \quad \text{en} \quad W_x \quad \text{entorno de} \quad x.$$

Usando que, como siempre

$$Z_B(h_{1|W_x}^{(j)}, \ldots, h_{k_j|W_x}^{(j)}) \xhookrightarrow[(x \in U_\alpha \cap U_\beta \in E)]{}$$

$$\hookrightarrow Z_B(h_{1|U_\alpha \cap U_\beta}^{(j)}, \ldots, h_{k_j|U_\alpha \cap U_\beta}^{(j)})$$

es epimorfa efectiva en &, y que

$$Z_B(h^{(j)}_{1|U_j\cap U_\lambda},\dots,h^{(j)}_{k_j|U_j\cap U_\lambda},h^{(\lambda)}_{1|U_j\cap U_\lambda},\dots,h^{(\lambda)}_{k_\lambda|U_j\cap U_\lambda})$$

$$\cap\ B(U_\alpha\cap U_\beta) =$$

$$= Z_B(h^{(j)}_{1|U_\alpha\cap U_\beta},\dots,h^{(j)}_{k_j|U_\alpha\cap U_\beta},h^{(\lambda)}_{1|U_\alpha\cap U_\beta},\dots,h^{(\lambda)}_{k_\lambda|U_\alpha\cap U_\beta}) =$$

$$= Z_B(h^{(j)}_{1|U_\alpha\cap U_\beta},\dots,h^{(j)}_{k_j|U_\alpha\cap U_\beta})$$

(ya que los $h^{(j)}_i$ y los $h^{(\lambda)}_i$ generan el mismo ideal en cada punto), lo que hay que probar es que f_α y f_β coinciden en $Z_B(h^{(j)}_{1|W_x},\dots,h^{(j)}_{k_j|W_x})$ (para $x\in U_\alpha\cap U_\beta\cap E$).

Se tiene:

$$Z_B(h^{(j)}_{1|W_x},\dots,h^{(j)}_{k_j|W_x}) \xhookrightarrow{i_x} B(W_x) \underset{0}{\overset{(h^{(j)}_{1|W_x},\dots,h^{(j)}_{k_j|W_x})}{\rightrightarrows}} B^{k_j}.$$

En $B(W_x)$ es:

$$f_{\alpha|W_x} - f_{\beta|W_x} = \sum_{r=1}^{k_j} h^{(j)}_{r|W_x}\ C_r$$

Por lo tanto, $f_{\alpha|W_x} i_x - f_{\beta|W_x} i_x = \sum_{r=1}^{k_j} (h^{(j)}_{k|W_x} i_x)(C_r i_x) = 0$

ya que por ser el egalizador, $h^{(j)}_{r|W_x} i_x = 0 \quad \forall r,\ 1 \leqslant r \leqslant k_j$.

Esto prueba que f_α y f_β coinciden en $Z_B(h^{(j)}_{1|W_x}, \ldots$

$\ldots, h^{(j)}_{k_j|W_x})$.

Por lo tanto, la familia

$$p(E_j, \mathcal{O}_{E_j}) \longrightarrow p(F, \mathcal{O}_F) \quad \text{es compatible}$$

$$(p(E_j, \mathcal{O}_{E_j}) \xrightarrow{p(f|_{E_j}, \phi| f^*(\mathcal{O}_{F_{ij}})} p(F_{ij}, \mathcal{O}_{F_{ij}}) \overset{z_j}{\hookrightarrow} p(F, \mathcal{O}_F)$$

y define, entonces, una única flecha

$$: p(E, \mathcal{O}_E) \longrightarrow p(F, \mathcal{O}_F)$$

$\tau = p(f,\phi)$ está caracterizada por: si $p(E_j, \mathcal{O}_{E_j}) \overset{s_j}{\hookrightarrow}$

$\hookrightarrow p(F, \mathcal{O}_F)$ entonces, $\tau S_j = z_j p(f|_{E_j}, \phi| f^*(\mathcal{O}_{F_{ij}}))$

Análogamente a la prueba de que la familia anterior era compatible, se prueba que esta flecha $p(F, \mathcal{O}_E) \to p(F, \mathcal{O}_F)$ no depende de la elección de las E_i ni de los F_j. Resulta también claro que p es un funtor, y de nuevo, como en la observación 3.5 , $p(E,\mathcal{O}_E)$ no depende de la presentación de E.

Vamos a probar que p respeta límites finitos. Basta ver que p respeta egalizadores, productos finitos y objeto terminal.

Sean

$$(E,\mathcal{O}_E) \underset{(g,\psi)}{\overset{(f,\phi)}{\rightrightarrows}} (F,\mathcal{O}_F) \qquad \begin{array}{l} E \subset U \text{ dado por } \mathcal{I}. \\ F \subset \mathbb{C}^m \end{array}$$

El egalizador en la categoría $\mathcal{L}$ de estas flechas es $(E',\mathcal{O}_{E'})$ donde $E' = \{x \in E / f(x) = g(x)\}$ es el modelo local dado por el siguiente haz de ideales $\mathcal{I}'$: (ver [4]).

Para cada $x \in E'$, sea $U_x \subset U$ abierto, con $x \in U_x$, tal que en U_x , (f,ϕ) y (g,ψ) están dados, respectivamente, por f_α y g_β Achicando U_x se puede suponer que $U_x \cap E$ es un modelo especial dado por $(h_1,\ldots,h_{k_x})$, y se define $\mathcal{I}'_x$ como el ideal generado por:

$$(h_{1,x},\ldots,h_{k_x,x},(f_{\alpha,1}-g_{\beta,1})_x,\ldots,(f_{\alpha,m}-g_{\beta,m})_x)$$

Se puede escribir entonces:

$$E' = \bigcup_{i \in I} E'_i \text{ , } E'_i \text{ modelo especial; } E'_i = U_i \cap E';$$

$$E = \bigcup_{i \in I} E_i$$

$$E_i' = Z(h_1^{(i)},\dots,h_{k_i}^{(i)},f_1^{(i)}-g_1^{(i)},\dots,f_m^{(i)}-g_m^{(i)})$$

donde $f^{(1)}$ y $g^{(1)}$ son "extensiones", en U_i, de f y g, respectivamente, y donde $Z(h_1^{(i)},\dots,h_{k_i}^{(i)}) = U_i \cap E = E_i$. Se tiene

$$(E',\mathcal{O}_{E'}) \xhookrightarrow{(j,id)} (E,\mathcal{O}_E) \underset{(g,\psi)}{\overset{(f,\phi)}{\rightrightarrows}} (F,\mathcal{O}_F)$$

donde $j : E' \to E$ es la inclusión, que es el egalizador. Como p es un funtor, se tiene:

$$p(E',\mathcal{O}_{E'}) \xhookrightarrow{p(j,id)} p(E,\mathcal{O}_E) \underset{p(g,\psi)}{\overset{p(f,\phi)}{\rightrightarrows}} p(F,\mathcal{O}_F)$$

y hay que probar que esto es un egalizador en $\mathcal{E}$.

Sea $X \in \mathcal{E}$ un objeto, y sea $\theta : X \longrightarrow p(E,\mathcal{O}_E)$ tal que $p(f,\phi)\,\theta = p(g,\psi)\,\theta$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "\theta"] & \\
f(E',\mathcal{O}_{E'}) \arrow[r, hook, "p(j,id)"'] & p(E,\mathcal{O}_E) \arrow[r, shift left, "p(f,\phi)"] \arrow[r, shift right, "p(g,\psi)"'] & p(F,\mathcal{O}_F)
\end{tikzcd}$$

Para cada $i \in I$, sea $p(E_i,\mathcal{O}_{E_i}) \xhookrightarrow{j_i} p(E,\mathcal{O}_E)$, y consideremos el pull-back

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, hook, "m"] \arrow[d, "\theta_i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p-back}"] & X \arrow[d, "\theta"] \\
p(E_i,\mathcal{O}_{E_i}) \arrow[r, hook, "j_i"'] & p(E,\mathcal{O}_E)
\end{tikzcd}$$

Se tiene que

$$(p(f,\phi)j_i)\theta_i = p(f,\phi)(j_i\theta_i) = p(f,\phi)(\theta m_i) =$$

$$= (p(f,\phi)\theta)m_i = (p(g,\psi)\theta)m_i = f(g,\psi)(\theta m_i) =$$

$$= p(g,\psi)(j_i\theta_i) = (p(g,\psi)j_i)\theta_i \qquad (2)$$

Por otra parte, la inclusión $E_i' \subset E_i$ induce un morfismo

$$p(E_i',\mathcal{O}_{E_i'}) \xrightarrow{\ r_i\ } p(E_i,\mathcal{O}_{E_i})$$

Es

$$E_i' = Z(h_1^{(i)},\dots,h_{k_i}^{(i)},f_1^{(i)}-g_1^{(i)},\dots,f_m^{(i)}-g_m^{(i)})$$

y

$$p(E_i',\mathcal{O}_{E_i'}) = Z_B(h_1^{(i)},\dots,h_{k_i}^{(i)},f^{(i)}-g_1^{(i)},\dots,f_m^{(i)}-g_m^{(i)})$$

es el egalizador:

$$p(E_i',\mathcal{O}_{E'}) \overset{s_i}{\hookrightarrow} B(U_i) \overset{(h_1^{(i)},\dots,h_{k_i}^{(i)},f_1^{(i)}-g_1^{(i)},\dots,f_m^{(i)}-g_m^{(i)})}{\underset{0}{\rightrightarrows}} B^{k_i+m}$$

a su vez, es $p(E_i,\mathcal{O}_{E_i}) = Z_B(h_1^{(i)},\dots,h_{k_i}^{(i)})$ es el egaliza dor

$$p(E_i,\mathcal{O}_{E_i}) \overset{t_i}{\hookrightarrow} B(U_i) \overset{(h_1^{(i)},\dots,h_{k_i}^{(i)})}{\underset{0}{\rightrightarrows}} B^{k_i}$$

y por definición, r_i es el único morfismo que satisface $t_i r_i = s_i$.

Se tiene: $t_i\theta_i : X_i \longrightarrow B(U_i)$

Es claro que $h_r^{(i)}(t_i, \theta_i) = 0$, y a partir de (2) se prueba que $(f_r^{(i)}-g_r^{(i)})t_i\theta_i = 0 \quad \forall r.$

Por lo tanto

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[dl, dashed, "\exists!\theta'_i"'] \arrow[d, "t_i\theta_i"] & \\ p(E'_i,\mathcal{O}_{E'_i}) \arrow[r, hook, "s_i"'] & B(U_i) \arrow[r, shift left, "(h_1^{(i)},\dots,h_{k_i}^{(i)},f_1^{(i)}-g_1^{(i)},\dots,f_m^{(i)}-g_m^{(i)})"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B^{k_i+m} \end{tikzcd}$$

se deduce que existe una única $\theta'_i : X_i \longrightarrow p(E'_i,\mathcal{O}_{E'_i})$ tal que $s_i\theta'_i = t_i\theta_i$.

Por otra parte, se tiene $p(E'_i,\mathcal{O}_{E'_i}) \xhookrightarrow{u_i} p(E',\mathcal{O}_{E'})$ que verifica $f(j,id)u_i = j_i r_i$. Componiendo, se tiene:

$$u_i\theta'_i : X_i \longrightarrow p(E',\mathcal{O}_{E'})$$

Como $p(E,\mathcal{O}_E) = \bigcup_{i\in I} p(E_i,\mathcal{O}_{E_i})$, la familia

$$p(E_i,\mathcal{O}_{E_i}) \xhookrightarrow{j_i} p(E,\mathcal{O}_E)$$

es epimorfa efectiva en el topos de Grothendieck $\mathcal{E}$. Por lo tanto, es epimorfa efectiva universal, y como

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, hook, "m_i"] \arrow[d, "\theta_i"'] & X \arrow[d, "\theta"] \\ p(E_i,\mathcal{O}_{E_i}) \arrow[r, hook, "j_i"'] & p(E,\mathcal{O}_E) \end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$,

se deduce que la familia $X_i \xhookrightarrow{m_i} X$ $(i\in I)$ es epimorfa efectiva en $\mathcal{E}$; además, es facil ver que la familia $(u_i\theta_i')_{i\in I}$, $u_i\theta_i' : X_i \longrightarrow p(E',\mathcal{O}_{E'})$ es compatible (o sea, coindicen en las intersecciones), y por lo tanto, se deduce que existe un única $\tau : X \longrightarrow p(E',\mathcal{O}_{E'})$ tal que $\tau m_i = u_i\theta_i' \quad \forall i\in I$.

Se verifica sin inconvenientes que $p(j,id)\tau = \theta$.
Además, como $p(j,id)$ es un monomorfismo, τ es única con esta propiedad. Por lo tanto, queda probado que existe una única $\tau : X \longrightarrow p(E',\mathcal{O}_{E'})$ tal que $p(j,id)\tau = \theta$. Esto muestra que $p(E',\mathcal{O}_{E'})$ es el egalizador en $\mathcal{E}$ de $p(E,\mathcal{O}_E) \rightrightarrows p(F,\mathcal{O}_F)$.

Vamos a probar ahora que p preserva productos finitos:
Sean $(E_1,\mathcal{O}_{E_1})$ y $(E_2,\mathcal{O}_{E_2})\in\mathcal{L}$, $\mathcal{O}_{E_1}$ dado por I_1 en $\mathcal{O}_{U_1}$, $\mathcal{O}_{E_2}$ dado por I_2 en $\mathcal{O}_{U_2}$. El producto $(E_1,\mathcal{O}_{E_1})\times(E_2,\mathcal{O}_{E_2})$ en $\mathcal{L}$ es $(E,\mathcal{O}_E)$, donde $E = E_1\times E_2 \subset U_1\times U_2$,

y $\mathcal{O}_E$ está dado por el siguiente ideal I :

Para $x \in E$, $x = (x_1,x_2)$; $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$; será

$$I_{1,x_1} = (h_{1,x_1},\dots,h_{k_1,x_1});$$

$$I_{2,x_2} = (g_{1,x_2},\dots,g_{k_2,x_2})$$

Entonces es $I_x = (\tilde{h}_{1,x},\dots,\tilde{h}_{k_1,x},\tilde{g}_{1,x},\dots,\tilde{g}_{k_2,x})$ donde

$$\tilde{h}_r(q_1,q_2) = h_r(q_1) \qquad (q_1,q_2) \in U_1 \times U_2 \ , \ 1 \leq r \leq k_1$$

$$\tilde{g}_r(q_1,q_2) = g_r(q_2) \qquad (q_1,q_2) \in U_1 \times U_2 \ , \ 1 \leq r \leq k_2$$

(alderedor de (x_1,x_2))

Sean

$$(E,\mathcal{O}_E) \xrightarrow{\ell_1} (E_1,\mathcal{O}_{E_1})$$

$$(E,\mathcal{O}_E) \xrightarrow{\ell_2} (E_2,\mathcal{O}_{E_2})$$

las proyecciones

Para probar que $p(E,\mathcal{O}_E) = p(E_1,\mathcal{O}_{E_1}) \times p(E_2,\mathcal{O}_{E_2})$ en $\mathcal{E}$, ha̲brá que probar que dado $X \in \mathcal{E}$ con flechas

$$X \xrightarrow{\varphi_1} p(E_1,\mathcal{O}_{E_1})$$

$$X \xrightarrow{\varphi_2} p(E_2,\mathcal{O}_{E_2})$$

entonces existe un única $\varphi : X \longrightarrow p(E,\mathcal{O}_E)$ tal que

$$\begin{cases} p(\ell_1)\varphi = \varphi_1 \\ p(\ell_2)\varphi = \varphi_2 \end{cases}$$

Podemos escribir $E = \bigcup\limits_{i \in I} E_i$; E_i modelo especial, con $E_i = E_{i_1} \times E_{i_2}$ donde

$E_{i_1} \subset E_1$ es un modelo especial, $E_{i_2} \subset E_2$ es un modelo especial.

Consideremos los pull-back

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi'_1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p-back}"] & X \arrow[d, "\varphi_1"] \\ p(E_{i_1},\mathcal{O}_{E_{i_1}}) \arrow[r, hook] & p(E_1,\mathcal{O}_{E_1}) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X_{12} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi'_2"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p-back}"] & X \arrow[d, "\varphi_2"] \\ p(E_{i_2},\mathcal{O}_{E_2}) \arrow[r, hook] & p(E_2,\mathcal{O}_{E_2}) \end{tikzcd}$$

Sea $X_i = X_{i_1} \cap X_{i_2}$. Se tiene:

$$X_i \hookrightarrow X_{i_1} \xhookrightarrow{\varphi'_1} p(E_{i_1}, \mathcal{O}_{E_{i_1}}) \hookrightarrow B(U_{i_1})$$

$$X_i \hookrightarrow X_{i_2} \xhookrightarrow{\varphi'_2} p(E_{i_2}, \mathcal{O}_{E_{i_2}}) \hookrightarrow B(U_{i_2})$$

Pero como B es un anillo analítico, B respeta productos finitos. Por lo tanto, si $U_i = U_{i_1} \times U_{i_2}$, es $B(U_i) = B(U_{i_1}) \times B(U_{i_2})$. Por lo tanto, se induce una flecha $X_i \longrightarrow B(U_i)$, y es facil observar que esta flecha está egalizada por $\tilde{h}_r$ y por $\tilde{g}_r$ con 0.

Entonces, queda inducida una flecha

$$X_i \longrightarrow p(E_i, \mathcal{O}_{E_i}) = Z_B(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_{k_{i_1}}, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{k_{i_2}})$$

Componiendo con la inclusión

$$p(E_i, \mathcal{O}_{E_i}) \hookrightarrow p(E, \mathcal{O}_E) \quad ,$$

queda definida una flecha:

$$X_i \longrightarrow p(E, \mathcal{O}_E) \qquad (i \in I)$$

Como antes, del hecho de que $p(E_{i_1},\mathcal{O}_{E_{i_1}}) \xhookrightarrow[(i_1\in I_1)]{} p(E_1,\mathcal{O}_{E_1})$ sea epimorfa efectiva (universal) en $\mathcal{E}$, se deduce por pull-backs que

$$X_{1 1} \xhookrightarrow[(i_1\in I_1)]{} X \quad \text{es epimorfa efectiva en } \mathcal{E}.$$

Análogamente

$$X_{1 2} \xhookrightarrow[(i_2\in I_2)]{} X \quad \text{es epimorfa efectiva en } \mathcal{E}.$$

Por lo tanto, como $I = I_1 \times I_2$ la familia

$$X_i = X_{i_1} \cap X_{i_2} \xhookrightarrow[i\in I]{} X \quad \text{es epimorfa efectiva en } \mathcal{E}.$$

y como la familia $X_i \longrightarrow p(E,\mathcal{O}_E)$ es compatible, se deduce una flecha $X \xrightarrow{\varphi} p(E,\mathcal{O}_E)$ que es la flecha buscada.

Veamos que p respeta objeto terminal:

El objeto terminal de la categoría de modelos locales es $(1,\mathcal{O}_1)$; donde $1 = \mathbb{C}^0$ es el punto.

La función $0 : \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}$ es tal que $\mathbb{C}^0 = Z(0)$ Por lo tanto, $p(1,\mathcal{O}_1) = Z_B(0)$ es el egalizador

$$Z_B(0) \hookrightarrow B(\mathbb{C}^0) \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} B$$

Por lo tanto, $Z_B(0) = B(\mathbb{C}^o)$.

Pero $\mathbb{C}^o$ es el objeto terminal de la categoría C de abiertos de $\mathbb{C}^n$, con n variando, y funciones holomorfas. Como B es un anillo analítico, B preserva objeto terminal, y, por lo tanto, $B(\mathbb{C}^o)$ es el objeto terminal de $\&$, o sea $Z_B(0) = p(1, \mathcal{O}_1)$ es el objeto terminal de $\&$.

Esto termina de probar que p respeta límites finitos. Vamos a probar ahora que p es un punto del sitio $\mathcal{L}$.

Hay que probar que si $(E, \mathcal{O}_E)$ es un modelo local y $E = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ modelos locales (abiertos en E), entonces $p(E, \mathcal{O}_E) = \bigcup_{\alpha \in I} p(E_\alpha, \mathcal{O}_{E_\alpha})$.

Cada E_α es una unión de modelos especiales

$$E_\alpha = \bigcup_{\beta \in I_\alpha} E_\beta$$

Por lo tanto, $E = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} \bigcup_{\beta \in I_\alpha} E_\beta$

Entonces, podemos escribir:

$$E = \bigcup_{\beta \in J} E_\beta \quad \text{donde, para cada } \beta \in J, \exists \alpha \in I / E_\beta \subset E_\alpha,$$

y cada E_β es un modelo especial.

Por definición,

$$p(E, \mathcal{O}_E) = \bigcup_{\beta \in J} p(E_\beta, \mathcal{O}_{E_\beta})$$

Pero como cada $\beta \in J$, $\exists \alpha \in I / E_\beta \subset E_\alpha$; es $p(E_\beta, \mathcal{O}_{E_\beta}) \hookrightarrow$ $\hookrightarrow p(E_\alpha, \mathcal{O}_{E_\alpha})$. Por lo tanto, $p(E, \mathcal{O}_E) \hookrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} p(E_\alpha, \mathcal{O}_{E_\alpha})$ y entonces

$$p(E, \mathcal{O}_E) = \bigcup_\alpha p(E_\alpha, \mathcal{O}_{E_\alpha})$$

Veamos que $pA = B$.

$p(A(U)) = p(U, \mathcal{O}_U)$; como $(U, \mathcal{O}_U)$ es el modelo especial dado por $h \equiv 0$; $h : U \to \mathbb{C}$, entonces:

$$p(U, \mathcal{O}_U) = Z_B(0)$$

o sea, $p(U, \mathcal{O}_U)$ es el egalizador:

$$p(U, \mathcal{O}_U) = Z_B(0) \hookrightarrow B(U) \overset{0}{\underset{0}{\rightrightarrows}} B$$

Por lo tanto, $p(U, \mathcal{O}_U) = B(U)$.

Veamos ahora, finalmente, que p es único.

Sea $p_1 : \mathcal{L} \to \mathcal{E}$ punto del sitio $\mathcal{L}$ que respeta límites finitos, tal que $p_1 A = B$. Se tiene:

$$p_1(U, \mathcal{O}_U) = p_1(A(U)) = B(U) = p(A(U)) = P(U, \mathcal{O}_U)$$

para U abierto en $\mathbb{C}^n$.

Si $(E,\mathcal{O}_E)$ es un modelo especial, $E \subset U$, $E = Z(h_1,\ldots,h_k)$, entonces (ver [4]),

$$(E,\mathcal{O}_E) \hookrightarrow (U,\mathcal{O}_U) \underset{(0,0^*)}{\overset{(h,h^*)}{\rightrightarrows}} (\mathbb{C}^k,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^k})$$

es un egalizador en el sitio de los modelos locales.

Como p_1 respeta límites finitos, entonces respeta egalizadores.

Se deduce entonces que:

$$p_1(E,\mathcal{O}_E) \hookrightarrow p_1(U,\mathcal{O}_U) \underset{p_1(0,0^*)}{\overset{p_1(h,h^*)}{\rightrightarrows}} p_1(\mathbb{C}^k,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^k})$$

es egalizador en $\mathcal{E}$.

Donde

$$p_1(U,\mathcal{O}_U) = B(U)$$

$$p_1(\mathbb{C}^k,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^k}) = B(\mathbb{C}^k) = B^k$$

$$p_1(h,h^*) = p_1(A(h)) = (p_1A)(h) = B(h) = \text{"}h\text{"}$$

$$p_1(0,0^*) = B(0) = \text{"}0\text{"}$$

Por lo tanto,

$$p_1(E,\mathcal{O}_E) \hookrightarrow B(U) \underset{0}{\overset{h}{\rightrightarrows}} B^k$$

es egalizador.

Entonces, $p_1(E,\mathcal{O}_E) = Z_B(h_1,\ldots,h_k) = p(E,\mathcal{O}_E)$ (E especial).

Finalmente, si E es local; $E = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ con E_α especial.

Como p_1 es punto del sitio $\mathcal{L}$ y $(E_\alpha,\mathcal{O}_{E_\alpha}) \xrightarrow[(\alpha \in I)]{} (E,\mathcal{O}_E)$ es un cubrimiento en el sitio $\mathcal{L}$, se deduce que:

$$p_1(E,\mathcal{O}_E) = \bigcup_{\alpha \in I} p_1(E_\alpha,\mathcal{O}_{E_\alpha})$$

Como E_α es especial, ya se sabe que $p_1(E_\alpha,\mathcal{O}_{E_\alpha}) = p(E_\alpha,\mathcal{O}_{E_\alpha})$.

Por lo tanto, $p_1(E,\mathcal{O}_E) = \bigcup_{\alpha \in I} p(E_\alpha,\mathcal{O}_{E_\alpha}) = p(E,\mathcal{O}_E)$, donde la última igualdad vale por definición de p. Esto termina de probar el teorema.

3.7. Observación.

Consideremos el topos $\widetilde{\mathcal{L}}$ de haces sobre el sitio $\mathcal{L}$, cuya topología está dada por los cubrimientos abiertos. Es facil ver que esta topología es subcanónica. Se tiene entonces $\mathcal{L} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{L}}$. Considerando la composición $\mathcal{C} \xrightarrow{A} \mathcal{L} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}}$, a la cual llamaremos nuevamente A, se puede probar a partir del teorema, que dado un anillo analítico local B en un topos de Grothendieck $\mathcal{E}$, existe un único $p^* : \tilde{\mathcal{L}} \to \mathcal{E}$ funtor que preserva colímites cualesquiera y límites finitos tal que $p^*A = B$ (ver[1])

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"'] & \tilde{\mathcal{L}} \arrow[dl, dashed, "\exists!\, p^*"] \\ \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

Esto dice que $\tilde{\mathcal{L}}$ es el topos clasificante de anillo analítico local.

CAPITULO IV

Anillos analíticos de presentación finita

4.1. Observación.

Sea $(X,\mathcal{O}_X)$ un modelo local y U un abierto en $\mathbb{C}^n$. Es facil ver que hay una biyección:

$$\Gamma(X,\mathcal{O}_X(U)) \cong [(X,\mathcal{O}_X),(U,\mathcal{O}_U)]$$

(ver [4]).

Teniendo en cuenta que:

$$\Gamma(X,\mathcal{O}_X(U)) = \Gamma(X,\mathcal{O}_X)(U),$$

y que por el lema de Yoneda, es:

$$\Gamma(X,\mathcal{O}_X)(U) \cong [\mathcal{O}_n(U),\Gamma(X,\mathcal{O}_X)] .$$

obtenemos una biyección:

$$[\mathcal{O}_n(U),\Gamma(X,\mathcal{O}_X)] \cong [(X,\mathcal{O}_X),(U,\mathcal{O}_U)]$$

Vamos a probar ahora una generalización del resultado anterior.

4.2. Lema:

Sea $(X,\mathcal{O}_X)$ un modelo local, sea U abierto en $\mathbb{C}^n$ y $h_1, \ldots, h_k$ holomorfas en U. Entonces, hay una biyección natural

$$[\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k), \Gamma(X,\mathcal{O}_X)] = [(X,\mathcal{O}_X),(E,\mathcal{O}_E)]$$

donde $E = Z(h_1,\ldots,h_k)$ (ver [4]).

4.3. Observación.

La naturalidad significa que si para cada $\varphi : \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ llamamos $\hat{\varphi}$ a la correspondiente flecha, $\hat{\varphi} : (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (E,\mathcal{O}_E)$, y si $\psi : \mathcal{O}_m(V)/(\ell_1,\ldots,\ell_k) \longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)$ es un morfismo de anillos analíticos, entonces

$$\widehat{\varphi\psi} = i(\bar{\psi})\hat{\varphi}$$

aquí, $i : \mathcal{A}^{op}_{pf} \longrightarrow \mathcal{L}$ es el funtor que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}^{op}_{pf} \arrow[dl, dashed, "i"] \\
\mathcal{L} &
\end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{C} \to \mathcal{L}$ es el anillo analítico dado por:

$W \to (W, \mathcal{O}_W)$ para W abierto (ver 1.2).

Se sabe que $i(\overline{\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)}) = (E, \mathcal{O}_E)$ y que $i(\overline{\mathcal{O}_m(V)/(\ell_1,\ldots,\ell_k)}) = (F, \mathcal{O}_F)$ (pues i preserva límites finitos), donde $F = Z(\ell_1,\ldots,\ell_q)$.

<u>Demostración del lema</u>.

1) Construcción de la biyección.

Se tiene el siguiente egalizador en $\mathcal{L}$ (ver [4])

$$(E, \mathcal{O}_E) \hookrightarrow (U, \mathcal{O}_U) \underset{(0,0^*)}{\overset{(h,h^*)}{\rightrightarrows}} (\mathbb{C}^k, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^k})$$

Por lo tanto, un morfismo $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (E, \mathcal{O}_E)$ en $\mathcal{L}$ equivale a un morfismo $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (U, \mathcal{O}_U)$ tal que $(h,h^*)\varphi = (0,0^*)\varphi$ (1).

Será $\varphi = (f,\phi)$ donde $f : X \to U$ es continua y $\phi : f^*\mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_X$.

Por la observación (4.1), φ equivale a $s \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)(U)$. Explícitamente, $s = (s_1,\ldots,s_n)$ con $s_i(x) = \phi_x(Z_{i,f(x)})$ $(1 \leq i \leq n)$, donde Z_i son las coordenadas (ver [4]).

Por (1) es:

$$hf = 0 \quad y \quad \phi_x h^*_{f(x)} = \phi_x 0^*_{f(x)} \qquad (2)$$

(para $x \in X$). Aquí, $h^*_p : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^k,h(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{U,p}$ para $p \in U$. Y lo mismo con 0^*.

Por lo tanto, para $x \in X$, $h^*_{f(x)} : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^k,0} \to \mathcal{O}_{U,f(x)}$ (pues $h(f(x)) = 0$), y lo mismo con $0^*_{f(x)}$. Aplicando la igualdad (2) a las coordenadas $\omega_1,\ldots,\omega_k$ de $\mathbb{C}^k$, obtenemos:

$$\phi_x(h_{i,f(x)}) = 0 \text{ en } \mathcal{O}_{X,x} \qquad (1 \leq i \leq k)$$

Ahora bien, dado $x \in X$ fijo, se sabe que existe un entorno W de x y una extensión local holomorfa $\tilde{f}$ de f en W, tal que $\phi_{x'}(t_{f(x')}) = \overline{(t\tilde{f})}_{x'}$ para t holomorfa en un entorno de $f(x')$, $x' \in X \cap W$ (ver [4]). Por lo tanto es:

$$s_i(x') = \phi_{x'}(Z_{i,f(x')}) = \overline{(Z_i\tilde{f})}_{x'} = \overline{\tilde{f}_{i,x'}}$$

y entonces $s(x') = \overline{\tilde{f}_{x'}}$ para $x' \in X \cap W$. O sea, s está dada por $\tilde{f}$ alrededor de x.

Por lo tanto, para $1 \leqslant i \leqslant k$, $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)(h_i) : \Gamma(X,\mathcal{O}_X)(U) \longrightarrow$ $\longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ verifica que:

$$((\Gamma(X,\mathcal{O}_X)(h_i))(s))(x) = \overline{(h_i\tilde{f})_x} = \phi_x(h_{i,f(x)}) = 0$$

Se tiene entonces que $\Gamma((X,\mathcal{O}_X)(h_i))\ (s) = 0$ para $1 \leqslant i \leqslant k$, y por lo tanto, $s \in Z_{\Gamma(X,\mathcal{O}_X)}(h_1,\ldots,h_k)$. Por lo tanto, s equivale a un morfismo $\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ (ver 1.20).

Recíprocamente, un morfismo $\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$, equivale a un elemento $s \in Z_{\Gamma(X,\mathcal{O}_X)}(h_1,\ldots,h_k) \subset \Gamma(X,\mathcal{O}_X)(U)$

$s \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)(U)$ equivale a un morfismo $\varphi = (f,\phi)$ $(X,\mathcal{O}_X) \rightarrow$ $\rightarrow (U,\mathcal{O}_U)$.

Explícitamente, $f(x) = Vs(x)$ para $x \in X$, donde Vs indica el valor de la sección s en x, y $\phi_x(z_{i,f(x)}) = s_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (ver [4]). Por lo tanto, si s está dada por $\tilde{f}$ alrededor de $x \in X$, y t es holomorfa alrededor de $f(x)$, es:

$$\phi_x(t_{f(x)}) = \overline{(t\tilde{f})_x} \qquad (3)$$

Ahora bien, como $s \in Z_{\Gamma(X,\mathcal{O}_X)}(h_1,\dots,h_k)$ es

$$0 = ((\Gamma(X,\mathcal{O}_X)(h_j))(s)(x) = \overline{(h_j\tilde{f})}_x \qquad (1\leqslant j\leqslant k)$$

Esto dice que $(h_j\tilde{f})_x \in \mathcal{I}_x$, donde $\mathcal{I}$ es el haz de ideales cuyos ceros dan X. Por lo tanto, $h_j\tilde{f}(x) = 0$. $(1 \leqslant j \leqslant k)$ o sea, $hf(x) = 0$.

Vamos a probar ahora que para g holomorfa en un entorno del 0 en $\mathbb{C}^k$,

$$(gh\tilde{f})_x - (g(0))_x \in \mathcal{I}_x ,$$

donde $gh\tilde{f}$ está definida en un entorno de x (pues $h\tilde{f}(x) = 0$), y $g(0)$ indica la función constante igual a $g(0)$.

En efecto, en un entorno del 0 en $\mathbb{C}^k$, se puede escribir

$$g(\omega) - g(0) = \sum_{j=1}^{k} \omega_j.\gamma_j(\omega) \quad \text{con } \gamma_j \text{ holomorfa.}$$

Por lo tanto, para x' en un entorno de x en el espacio ambiente, es:

$$g(h\tilde{f}(x'))-g(0) = \sum_{j=1}^{k} (h_j\tilde{f})(x').\gamma_j(h\tilde{f}(x'))$$

Por lo tanto,

$$(gh\tilde{f})_x - (g(0))_x \in ((h_1\tilde{f})_x, \ldots, (h_k\tilde{f})_x)$$

que es el ideal generado por $(h_1\tilde{f})_x, \ldots, (h_k\tilde{f})_x$.
Pero como $(h_j\tilde{f})_x \in I_x$, se deduce que

$$(gh\tilde{f})_x - (g(0))_x \in I_x .$$

Por lo tanto,

$$\overline{(gh\tilde{f})_x} = \overline{(g(0))_x} .$$

Por lo tanto, si ahora se piensa a $g(0)$ como una función constante definida en $\mathbb{C}^n$, se obtiene, por (3) que:

$$\phi_x((gh)_{f(x)}) = \phi_x((g(0))_{f(x)})$$

o sea:

$$\phi_x(h^*_{f(x)}(g_o)) = \phi_x(f^*_{f(x)}(g_o))$$

Por lo tanto, $\phi_x h^*_{f(x)} = \phi_x 0^*_{f(x)}$

Además, hemos visto que $hf = 0$.

Esto dice que $(hh^*)(f,\phi) = (0,0^*)(f,\phi)$, o sea que el morfismo $\varphi : (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (U,\mathcal{O}_U)$ está egalizado por (hh^*) y

(00*), y por lo tanto, φ equivale a un morfismo de $(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (E,\mathcal{O}_E)$.

Es facil ver que estas aplicaciones dan la biyección requerida.

2) Demostración de la naturalidad.

Para ello, debemos probar el siguiente lema previo.

4.4. Lema.

Sea

$$\psi : \mathcal{O}_m(V)/_{(\ell_1,\ldots,\ell_q)} \longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}$$

un morfismo de anillos analíticos.

Sea $\epsilon : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ el morfismo canónico. (ϵ satisface que $\epsilon r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ es el morfismo canónico, donde $r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)$ es la proyección al cociente).

Por la biyección establecida en 1), $\epsilon\psi$ equivale a un morfismo $\widehat{\epsilon\psi} : (E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow (F,\mathcal{O}_F)$.

Entonces,

$$\widehat{\epsilon\psi} = i(\bar{\psi}) \quad . \quad \text{(ver 4.3)}$$

Demostración.

Sea $B : \mathcal{C} \to \mathcal{L}$ el anillo analítico dado por

$$W \longmapsto (W, \mathcal{O}_W)$$

Sea $Y : \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{E}ns^{(\mathcal{L}^{op})}$ el funtor de Yoneda. Se tiene: $YB : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}ns^{(\mathcal{L}^{op})}$ y como Y preserva limites finitos, YB es un anillo analítico en $\mathcal{E}ns^{(\mathcal{L}^{op})}$ Por lo tanto, existe un único $\tilde{i} : \mathcal{A}_{pf}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}ns^{(\mathcal{L}^{op})}$ tal que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, "YB"'] & \mathcal{A}_{pf}^{op} \arrow[dl, dashed, "\exists! \tilde{i}"] \\
\mathcal{E}ns^{(\mathcal{L}^{op})} &
\end{tikzcd}$$

Recordemos la construcción de $\tilde{i}$.

Para $(X, \mathcal{O}_X) \in \mathcal{L}$ consideremos la composición

$$\mathcal{C} \xrightarrow{YB} \mathcal{E}ns^{(\mathcal{L}^{op})} \xrightarrow{Ev_{(X, \mathcal{O}_X)}} \mathcal{E}ns$$

Este es el anillo analítico en $\mathcal{E}ns$ dada por:

$$W \longmapsto [(X, \mathcal{O}_X), (W, \mathcal{O}_W)] \ .$$

Notaremos $B_{(X,\mathcal{O}_X)}$ a este anillo analítico, vale decir $B_{(X,\mathcal{O}_X)}(W) = [\ (X,\mathcal{O}_X),(W,\mathcal{O}_W)]$. Sea $G_A \in \mathcal{E}ns^{(\mathcal{L}^{op})}$ $(A \in \mathcal{A}_{pf})$ donde $G_A(X,\mathcal{O}_X) = [A,B_{(X,\mathcal{O}_X)}]$.

Es facil ver que G_A es un funtor continuamente ya que una flecha en $\mathcal{L}$ $(X,\mathcal{O}_X) \to (X'\mathcal{O}_{X'})$ da lugar, claramente, a un morfismo de anillos analíticos $B_{(X',\mathcal{O}_{X'})} \longrightarrow B_{(X,\mathcal{O}_X)}$ y por lo tanto a una flecha:

$$[A,B_{(X',\mathcal{O}_{X'})}] \longrightarrow [A,B_{(X,\mathcal{O}_X)}]$$

Dada $\lambda : \bar{A} \longrightarrow \bar{A}_1$, o sea $\lambda : A_1 \longrightarrow A$, se tiene, para ca_da $(X,\mathcal{O}_X) \in \mathcal{L}$, una flecha:

$$[A,B_{(X,\mathcal{O}_X)}] \xrightarrow{\lambda^*_{(X,\mathcal{O}_X)}} [A_1,B_{(X,\mathcal{O}_X)}]$$

dada por componer con λ .

Es facil ver que esto define una transformación natural

$$\lambda^* : G_A \longrightarrow G_{A_1}$$

Luego, se usaba que para todo $A \in \mathcal{A}^{op}_{pf}$, G_A es un funtor representable, y eso define i : vale decir, G_A es el funtor representable por $i(\bar{A})$, o sea $Yi(\bar{A}) = G_A$.

En el caso

$$\psi : \mathcal{O}_m(V)/(\ell_1,\ldots,\ell_q) \longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)$$

vamos a mostrar explícitamente que

$$G_{\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)} \cong [\ \ ,(E,\mathcal{O}_E)]$$

Consideremos $r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)$ la proyección al cociente, $h^* : \mathcal{O}_k(\mathbb{C}^k) \longrightarrow \mathcal{O}_n(U)$.

Es inmediato ver que

$$G_{\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)} \xrightarrow{r^*} G_{\mathcal{O}_n(U)} \underset{0^*}{\overset{h^*}{\rightrightarrows}} G_{\mathcal{O}_k(\mathbb{C}^k)}$$

es un egalizador (se ve "punto a punto") en $\mathcal{E}ns^{(\mathcal{L}^{op})}$

Pero

$$G_{\mathcal{O}_n(U)}(X,\mathcal{O}_X) = [\ \mathcal{O}_n(U),\ B_{(X,\mathcal{O}_X)}\ ] \cong B_{(X,\mathcal{O}_X)}(U) =$$

$$= [\,(X,\mathcal{O}_X),(U,\mathcal{O}_U)\,] \quad \text{para} \quad (X,\mathcal{O}_X) \in \mathcal{L}.$$

Es facil ver que esto define un isomorfismo

$$G_{\mathcal{O}_n(U)} \xrightarrow{\cong} [\ \ ,(U,\mathcal{O}_U)]$$

cuya inversa $[\ \ ,(U,\mathcal{O}_U)] \to G_{\mathcal{O}_n(U)}$ está dada por el elemento α_o de $G_{\mathcal{O}_n(U)}(U,\mathcal{O}_U) = [\ \mathcal{O}_n(U), B_{(U,\mathcal{O}_U)}]$ y $\alpha_o(f) = = (f,f^*)$ para $f \in \mathcal{O}_n(U)$.

Entonces

$$G_{\mathcal{O}_n(U)} \cong [\ \ ,(U,\mathcal{O}_U)]$$

$$G_{\mathcal{O}_k(\mathbb{C}^k)} \cong [\ \ ,(\mathbb{C}^k,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^k})]$$

y como el egalizador

$$[\ \ ,(U,\mathcal{O}_U)] \rightrightarrows [\ \ ,(\mathbb{C}^k,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^k})] \quad \text{es} \quad [\ \ ,(E,\mathcal{O}_E)]$$

(pues $(E,\mathcal{O}_E)$ es el egalizador en $\mathcal{L}$ de $(U,\mathcal{O}_U) \underset{(0,0^*)}{\overset{(hh^*)}{\rightrightarrows}} (\mathbb{C}^k,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^k}))$ se obtiene que

$$G_{\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)} \cong [\ \ ,(E,\mathcal{O}_E)] .$$

Llamemos $G_{\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)} \xrightarrow[\cong]{T} [\ \ ,(E,\mathcal{O}_E)]$. Explícitamente, para $\alpha \in G_{\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)}(X,\mathcal{O}_X) =$

$= [\ \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)\ ,\ B_{(X,\mathcal{O}_X)}\ ]$

$T_{(X,\mathcal{O}_X)}(\alpha) : (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (E,\mathcal{O}_E)$ es tal que si $(E,\mathcal{O}_E) \hookrightarrow$

$\xhookrightarrow{i(\bar{r})} (U,\mathcal{O}_U)$ es la inclusión, entonces

$i(\bar{r})T_{(X,\mathcal{O}_X)}(\alpha) = (\alpha r)_U(id_U)$.

Aquí, $(\alpha r)_U(id_U) \in B_{(X,\mathcal{O}_X)}(U,\mathcal{O}_U) = [\,(X,\mathcal{O}_X),(U,\mathcal{O}_U)]$.

La inversa T^{-1} está dada por: para $\lambda : (X,\mathcal{O}_X) \to (E,\mathcal{O}_E)$

$$T^{-1}_{(X,\mathcal{O}_X)}(\lambda) = \alpha \in [\,\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\dots,h_k)}, B_{(X,\mathcal{O}_X)}]$$

donde $(\alpha r)_U(id_U) = i(\bar{r})\lambda \in B_{(X,\mathcal{O}_X)}(U) = [\,(X,\mathcal{O}_X),(U,\mathcal{O}_U)]$

Por lo tanto, $(\alpha r)(f) = B_{(X,\mathcal{O}_X)}(f)(i(\bar{r})\lambda) = (ff^*)i(\bar{r})\lambda$

para $f \in \mathcal{O}_n(U)$.

Por definición de $\tilde{i}$, es $\tilde{i}(\overline{\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\dots,h_k)}}) = [\quad,(E,\mathcal{O}_E)]$;

$\tilde{i}(\overline{\mathcal{O}_m(V)/_{(\ell_1,\dots,\ell_q)}}) = [\quad,(F,\mathcal{O}_F)]$.

Además, si $D : G_{\mathcal{O}_m(V)/_{(\ell_1,\dots,\ell_q)}} \xrightarrow{\ \tilde{=}\ } [\quad,(F,\mathcal{O}_F)]$ es el correspondiente isomorfismo, entonces $\tilde{i}(\bar{\psi})$ es la composición

$$[\quad,(E,\mathcal{O}_E)] \xrightarrow{T^{-1}} G_{\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\dots,h_k)}} \xrightarrow{\psi^*} G_{\mathcal{O}_m(V)/_{(\ell_1,\dots,\ell_q)}} \xrightarrow{D} [\quad,(F,\mathcal{O}_F)]$$

o sea $\tilde{i}(\bar{\psi}) = D\psi^{*}T^{-1} : [\ \ ,(E,\mathcal{O}_E)] \to [\ \ ,(F,\mathcal{O}_F)]$. Finalmente $i(\bar{\psi}) : (E,\mathcal{O}_E) \to (F,\mathcal{O}_F)$ es tal que corresponde a $\tilde{i}(\bar{\psi}) : [\ \ ,(E,\mathcal{O}_E)] \to [\ \ ,(F,\mathcal{O}_F)]$; vale decir $i(\bar{\psi}) = \tilde{i}(\bar{\psi})_{(E,\mathcal{O}_E)}(id_{(E,\mathcal{O}_E)})$. Por lo tanto,

$$i(\bar{\psi}) = (D\psi^{*}\ T^{-1})_{(E,\mathcal{O}_E)}(id_{(E,\mathcal{O}_E)}) \qquad (1)$$

Por definición, es $T^{-1}_{(E,\mathcal{O}_E)}(id_{(E,\mathcal{O}_E)}) = \alpha$ donde

$\alpha : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow B_{(E,\mathcal{O}_E)}$ es tal que

$(\alpha r)_U(id_U) = i(\bar{r}) \in B_{(E,\mathcal{O}_E)}(U) = [(E,\mathcal{O}_E),(U,\mathcal{O}_U)]$. Por lo tanto, $(\alpha r)(f) = (ff^{*})i(\bar{r})$ para $f \in \mathcal{O}_n(U)$. Por lo tanto, por (1) es:

$$i(\bar{\psi}) = D_{(E,\mathcal{O}_E)}(\psi^{*}_{(E,\mathcal{O}_E)}(\alpha)) = D_{(E,\mathcal{O}_E)}(\alpha\psi) \qquad (2)$$

Sea $j : (F,\mathcal{O}_F) \hookrightarrow (V,\mathcal{O}_V)$ la inclusión. Por definición de D, es $j\,D_{(E,\mathcal{O}_E)}(\alpha\psi) = (\alpha\psi r_1)_V(id_V)$. Por lo tanto, por (2) es:

$$ji(\bar{\psi}) = (\alpha\psi r_1)_V(id_V) \qquad (3)$$

Consideremos para $p \in E$ los morfismos:

$$\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \xrightarrow{\chi_p} \mathcal{O}_{n,p}/_{(h_{1p},\ldots,h_{kp})}$$

$$\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \xrightarrow{Ev_p} \mathbb{C}$$

Se define:

$$\eta : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow B_{(E,\mathcal{O}_E)} \quad \text{por:}$$

si W es abierto, $\eta_W(a) \in B_{(E,\mathcal{O}_E)}(W)$ (para $a \in \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots$ $\ldots,h_k)(W))$ o sea $\eta_W(a)$ $(E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow (W,\mathcal{O}_W)$ queda defi̲nida por: $\eta_W(a) = (g,\phi)$ donde

$$\begin{cases} g(p) = (Ev_p)_W(a) \\ \phi_p(Z_{i,g(p)}) = \chi_p(a_i) \quad \text{donde} \end{cases} \qquad a = (a_1,\ldots,a_t)$$

$z_1,\ldots,z_t$ las coordenadas.

Es fácil ver que η es un morfismo de anillos analíticos; además, $\eta\, r(f) = (g,\phi)$ donde $(f \in \mathcal{O}_n(U))$

$$g(p) = Ev_p(r(f)) = f(p)$$

$$\phi_p(Z_{g(p)}) = \chi_p(r(f)) = \bar{f}_p \qquad \text{para} \quad p \in E.$$

Esto dice que $(g,\phi) : (E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow (\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ es la composición

$$(E,\mathcal{O}_E) \hookrightarrow (U,\mathcal{O}_U) \xrightarrow{(f,f^*)} (\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}})$$

Por lo tanto, $\eta = \alpha$.

Entonces , por (3) es:

$$ji(\bar{\psi}) = (\eta\psi r_1)_V(id_V) = \eta_V(a)$$

donde

$$a = (\psi r_1)_V(id_V) \in \mathcal{O}_n(U)_{/(h_1,\ldots,h_k)}(V)$$

vale decir que:

$$ji(\bar{\psi}) = (g,\phi) : (E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow (V,\mathcal{O}_V)$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{ll} g(p) = Ev_p(a) & \\ \phi_p(Z_{i,g(p)}) = \chi_p(a_i) & 1 \leq i \leq m \\ a = (\psi r_1)_V(id_V) & \qquad\qquad (4) \end{array} \right.$$

Por otra parte se tiene

$$j\widehat{\epsilon\psi} \qquad (E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow (V,\mathcal{O}_V).$$

Como j es un monomorfismo, para probar el lema basta ver que $ji(\overline{\psi}) = j\widehat{\epsilon\psi}$

Por (4.1) se sabe que $j\widehat{\epsilon\psi}$ equivale al morfismo $\mathcal{O}_m(V) \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ dado por $(\epsilon\psi r_1)_V(id_V) \in \Gamma(E,\mathcal{O}_E)(V)$ y (g,ϕ) equivale a un morfismo $\mathcal{O}_m(V) \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ dado por $s \in \Gamma(E,\mathcal{O}_E)(V)$, donde $s_i(p) = \phi_p(Z_{i,g(p)})$. Por lo tanto, para probar el lema basta ver que

$$s = (\epsilon\psi r_1)_V(id_V)$$

Es $s_i(p) = \phi_p(Z_{i,g(p)}) = \chi_p(a_i)$ (por (4)). Por lo tanto

$$s(p) = (\chi_p)_V(a) = (\chi_p)_V((\psi r_1)_V(id_V))$$

Por lo tanto, debemos probar que

$$(\chi_p)_V((\psi r_1)_V(id_V)) = \epsilon_V((\psi r_1)_V(id_V))(p)$$

o sea que $(\chi_p)_V(a) = ((\epsilon_V)(a))(p)$.

Consideremos

$$Ev_p \ : \quad \Gamma(E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow \mathcal{O}_{np}/(h_{1p},\ldots,h_{kp})$$

Ev_p es un morfismo de anillos analíticos.
Debemos probar que $(\chi_p)_V(a) = (Ev_p)_V(\epsilon_V(a))$. Para ello, vamos a ver, directamente, que $\chi_p = Ev_p\ \epsilon$
Por definición de χ_p es $(\chi_p r)(f) = \bar{f}_p$ para $f \in \mathcal{O}_n(U)$ y por definición de ϵ, es $\epsilon\, r(f)$ = sección global dada por f. Por lo tanto, $Ev_p(\epsilon\, r(f)) = Ev_p$ (sección global dada por f) $= \bar{f}_p$ Esto prueba que $\chi_p r = Ev_p\ \epsilon\ r$, y como r es un epimorfismo, se deduce que $\chi_p = Ev_p\ \epsilon$
Esto concluye la prueba del lema (4.4).
Estamos ahora en condiciones de concluir la demostracion de la naturalidad.
Sea entonces

$$\psi : \mathcal{O}_m(V)/(\ell_1,\ldots,\ell_q) \longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)$$

y sea $\varphi : \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$, donde $(X,\mathcal{O}_X) \in \mathcal{L}$.
Sea $\theta = \varphi\psi$. Debemos probar que $\hat{\theta} = i(\bar{\psi})\,\hat{\varphi}$ φ equivale a una sección $s \in Z_{\Gamma(X,\mathcal{O}_X)}(h_1,\ldots,h_k) \subset \Gamma(X,\mathcal{O}_X)(U)$.
Explícitamente, $s = (\varphi r)_U(id_U)$ donde $r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow$

$\longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}$ es la proyección al cociente.

Por lo tanto, por el lema de Yoneda, es $(\varphi r)(t) =$

$= \Gamma(X,\mathcal{O}_X)(t)(s)$ para $t \in \mathcal{O}_n(U)$. (1). Además, es

$\hat{\varphi} = (\text{Val } s, \phi)$ donde Val s es el valor de la sección s;

Como $s \in Z_{\Gamma(X,\mathcal{O}_X)}(h_1,\ldots,h_k)$, hemos visto que s toma valores en E, vale decir, podemos pensar

$$\text{Val } s : X \longrightarrow E.$$

Análogamente, $\theta : \mathcal{O}_m(V)/_{(\ell_1,\ldots,\ell_q)} \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ equivale a un elemento $\sigma \in Z_{\Gamma(X,\mathcal{O}_X)}(\ell_1,\ldots,\ell_q) \subset \Gamma(X,\mathcal{O}_X)(V)$. Explícitamente, $\sigma = (\theta\rho)_V(id_V)$, donde $\rho : \mathcal{O}_m(V) \to \mathcal{O}_m(V)/_{(\ell_1,\ldots,\ell_q)}$ es la proyección al cociente. Por Yoneda, es:

$$(\theta\rho)(t) = (\Gamma(X,\mathcal{O}_X)(t))(\sigma) \qquad (2).$$

Como $\theta = \varphi\psi$, es:

$$\sigma = \varphi_V((\psi\rho)_V(id_V)). \quad (*)$$

Además, es $\hat{\theta} = (\text{Val } \sigma, \eta)$ donde Val σ se puede pensar de $X \longrightarrow F$. Finalmente, $i(\bar{\psi}) = (\tau,\lambda)$; aquí, $\tau : E \to F$ está dada por:

para $p \in E = Z(h_1,\ldots,h_k) \subset U$, se considera $Ev_p : \mathcal{O}_n(U) \to \mathbb{C}$ que por supuesto se factoriza:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_n(U) \arrow[r, "r"] \arrow[d] & \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k) \arrow[dl, dashed, "\widetilde{Ev}_p"] \\ \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

Se considera

$$\widetilde{Ev}_p\, \psi : \mathcal{O}_m(V)/(\ell_1,\ldots,\ell_q) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

que por supuesto, equivale a un elemento $p' \in F = Z(\ell_1,\ldots$ $\ldots,\ell_q)$. Explícitamente, $p' = (\widetilde{Ev}_p\psi\rho)_V(id_V)$, y es $\tau(p) = p'$. Para probar que $\hat{\theta} = i(\bar{\psi})\,\hat{\varphi}$, vamos a probar primero que

$$\mathrm{Val}\,\sigma = \tau \circ \mathrm{Val}\, s.$$

Sea $x \in X$, y sea $p' = \tau(\mathrm{Val}\, s(x))$, o sea,

$$p' = (\widetilde{Ev}_p\psi\rho)_V(id_V)$$

donde $p = \mathrm{Val}\ s(x)$; es decir

$$p' = (\widetilde{\mathrm{Ev}}_{\mathrm{Val}\ s(x)}\psi\rho)_V(\mathrm{id}_V).$$

Por lo tanto, hay que probar que

$$(\widetilde{\mathrm{Ev}}_{\mathrm{Val}\ s(x)}\psi\rho)_V(\mathrm{id}_V) = \mathrm{Val}\ \sigma(x);$$

Teniendo en cuenta que, $\sigma = \varphi_V((\psi\rho)_V(\mathrm{id}_V))$ (ver *), hay que probar que

$$(\widetilde{\mathrm{Ev}}_{\mathrm{Val}\ s(x)})_V((\psi\rho)_V(\mathrm{id}_V)) = \mathrm{Val}(\varphi_V((\psi\rho)_V(\mathrm{id}_V)))(x)$$

Sea $a = (\psi\rho)_V(\mathrm{id}_V) \in (\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k))(V)$. Demos probar entonces, que

$$(\widetilde{\mathrm{Ev}}_{\mathrm{Val}\ s(x)})_V(a) = \mathrm{Val}(\varphi_V(a))(x)$$

Como $V \in \mathbb{C}^m$, $a = (a_1,\ldots,a_m)$, $a_i \in \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)$ teniendo en cuenta que $\widetilde{\mathrm{Ev}}_{\mathrm{Val}\ s(x)}$ y φ son morfismos de anillos analíticos, es:

$$(\widetilde{\mathrm{Ev}}_{\mathrm{Val}\ s(x)})_V(a) = (\widetilde{\mathrm{Ev}}_{\mathrm{Val}\ s(x)}(a_1),\ldots,\widetilde{\mathrm{Ev}}_{\mathrm{Val}\ s(x)}(a_m))$$

$$\mathrm{Val}(\varphi_V(a))(x) = \mathrm{Val}(\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_m))(x) =$$

$$= (\mathrm{Val}(\varphi(a_1))(x),\dots,\mathrm{Val}(\varphi(a_m))(x))$$

Por lo tanto, hay que probar que:

$$\widetilde{\mathrm{Ev}}_{\mathrm{Val}\ s(x)}(a_i) = \mathrm{Val}(\varphi(a_i))(x), \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Vamos a probar directamente que para todo $b \in \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots$ $\dots,h_k)$

$$\widetilde{\mathrm{Ev}}_{\mathrm{Val}\ s(x)}(b) = \mathrm{Val}(\varphi(b))(x).$$

Consideremos Val_x (valor en x); $\mathrm{Val}_x : \Gamma(X,\mathcal{O}_X) \to \mathbb{C}$ es un morfismo de anillos analíticos. Por lo tanto, todo se reduce a probar que $\widetilde{\mathrm{Ev}}_{\mathrm{Val}\ s(x)} = \mathrm{Val}_x \circ \varphi$, como morfismos de anillos analíticos, de $\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k) \longrightarrow \mathbb{C}$. Como $r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k)$ es un epimorfismo, basta ver que $\widetilde{\mathrm{Ev}}_{\mathrm{Val}\ s(x)}\, r = \mathrm{Val}_x\ \varphi r$. Pero por definición de $\widetilde{\mathrm{Ev}}_{\mathrm{Val}\ s(x)}$, es : $\widetilde{\mathrm{Ev}}_{\mathrm{Val}\ s(x)} r = \mathrm{Ev}_{\mathrm{Val}\ s(x)}$

Por lo tanto, debemos probar que:

$$\mathrm{Ev}_{\mathrm{Val}\ s(x)} = \mathrm{Val}_x\, \varphi\ r.$$

Sea $t \in \mathcal{O}_n(U)$; ($t : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa).
Es, por (1), $(\varphi r)(t) = (\Gamma(X, \mathcal{O}_X)(t))$ (5).

Ahora bien, si $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)(U)$ está dado alrededor de x por una función g, a valores en U, entonces, $(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)(t))(s)$ está dada alrededor de x por $t_\circ g$. Por lo tanto, es:

$$\mathrm{Val}\ s(x) = g(x)$$

y

$$\mathrm{Val}((\Gamma(X, \mathcal{O}_X)(t))(s))(x) =$$

$$= t(g(x)) = t(\mathrm{Val}\ s(x)).$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Val}((\varphi r)(t))(x) = t(\mathrm{Val}\ s(x)),$$

o sea:

$$\mathrm{Val}_X(\varphi r)(t) = \mathrm{Ev}_{\mathrm{Val}\ s(x)}(t).$$

Esto prueba que $\mathrm{Val}_x\ \varphi\ r = \mathrm{Ev}_{\mathrm{Val}\ s(x)}$; por lo tanto, hemos probado que $\mathrm{Val}\ \sigma = \tau_\circ \mathrm{Val}\ s$.

Observemos que si $\epsilon : \mathcal{O}_n(U)/(h_1, \ldots., h_k) \longrightarrow \Gamma(E, \mathcal{O}_E)$ es el morfismo canónico, entonces, por el lema 4.4,

$$\epsilon\psi \; : \; \mathcal{O}_m(V)/(\ell_1,\ldots,\ell_q) \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E) \quad \text{equivale a}$$

$$i(\bar{\psi}) \;=\; (\tau,\lambda) \;\; (E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow (F,\mathcal{O}_F).$$

Esto dice que si $\beta = (\epsilon\psi\rho)_V(id_V) \in \Gamma(E,\mathcal{O}_E)(V)$, entonces $\tau = \mathrm{Val}\ \beta$, y si para $p \in E$, β está dada alrededor de p por f, entonces

$$\lambda_p(\bar{t}_{\tau(p)}) = (\overline{t_\circ f})_p \qquad (3)$$

para t holomorfa en un entorno de $\tau(p)$ (aquí, $t_\circ f$ está definida en un entorno de p, ya que $f(p) = \mathrm{Val}\ \beta(p) = \tau(p)$ y t es holomorfa en un entorno de $\tau(p)$).

Observemos además que, por el lema de Yoneda, es:

$$(\epsilon\psi\rho)(t) = (\Gamma(E,\mathcal{O}_E)(t))\ (\beta) \qquad (4)$$

Para terminar de probar que $\hat{\theta} = i(\bar{\psi})\hat{\varphi}$, hay que probar que, para $x \in X$,

$$\eta_x = \phi_x \ \ \lambda_{\mathrm{Val}\ s(x)} \; : \; \mathcal{O}_{F,\tau(\mathrm{Val}\ s(x))} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

(teniendo en cuenta que ya se probó que τ (Val s(x)) = = Val $\sigma(x)$).

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots h_k) \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\varphi"] & \Gamma(E,\mathcal{O}_E) \arrow[r, "Ev_{Val\ s(x)}"] & \mathcal{O}_{E,Val\ s(x)} \arrow[d, "\phi_x"] \\
\Gamma(X,\mathcal{O}_X) \arrow[rr, "Ev_x"] & & \mathcal{O}_{X,x}
\end{tikzcd}$$

Vamos a probar que es conmutativo. Teniendo en cuenta que r es un epimorfismo, basta ver que $\phi_x\, Ev_{Val\ s(x)}\, \epsilon\, r = Ev_X\, \varphi\, r$. Sea $t \in \mathcal{O}_n(U); x \in r(t)$ es la sección global dada por t. Por lo tanto, hay que probar que

$$\phi_x(\overline{t}_{Val\ s(x)}) = ((\varphi r)(t))(x)$$

donde — indica la clase según del ideal $(h_{1,Val\ s(x)}, \dots, h_{k,Val\ s(x)})$.

Pero, por (1), es $\varphi r(t) = (\Gamma(X,\mathcal{O}_X)(t))(s)$.

Pero si s está dada alrededor de x por una función holomorfa g a valores en U, entonces $(\Gamma(X,\mathcal{O}_X)(t))(s)$ está dada por $t_\circ g$ alrededor de x.

Por lo tanto, $((\varphi r)(t))(x) = (\Gamma(X,\mathcal{O}_X)(t)(s))(x) = (\overline{t_\circ g})_x$

Pero por definición de $\hat{\varphi}$, es $\phi_x(\overline{t_{\mathrm{Val}\ s(x)}}) = (\overline{t_\circ g})_x$ si S está dada por g alrededor de x. Por lo tanto, es

$$\phi_x(\overline{t}_{\mathrm{Val}\ s(x)}) = ((\varphi r)(t))(x).$$

Queda probado que el diagrama es conmutativo, o sea que

$$\phi_x\, Ev_{\mathrm{Val}\ s(x)}\, \epsilon = Ev_x\, \varphi$$

Por lo tanto,

$$\phi_x\, Ev_{\mathrm{Val}\ s(x)}\, \epsilon\psi = Ev_x\, \varphi\psi = Ev_x\ \theta . \qquad (5)$$

Sea ahora $\epsilon' : \mathcal{O}_m(V)_{/(\ell_1,\ldots,\ell_q)} \longrightarrow \Gamma(F,\mathcal{O}_F)$ el morfismo canónico, y sea el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_m(V)_{/(\ell_1,\ldots,\ell_q)} \arrow[r, "\epsilon'"] \arrow[d, "\theta"] & \Gamma(F,\mathcal{O}_F) \arrow[r, "Ev_{\mathrm{Val}\ \sigma(x)}"] & \mathcal{O}_{F,\mathrm{Val}\ \sigma(x)} \arrow[d, "\eta_x"] \\
\Gamma(X,\mathcal{O}_X) \arrow[rr, "Ev_x"'] & & \mathcal{O}_{X,x}
\end{tikzcd}$$

Este diagrama también es conmutativo. En efecto, teniendo en cuenta que ρ es un epimorfismo, basta ver que

$\eta_x \, Ev_{Val\ \sigma(x)} \epsilon' \rho = Ev_x \, \theta \, \rho$

Sea $t \in \mathcal{O}_m(V)$; $\epsilon'\rho(t)$ es la sección global dada por t.

Por lo tanto, hay que probar que

$$\eta_x(\bar{t}_{Val\ \sigma(x)}) = ((\theta\rho)(t))(x).$$

Pero por (2) es:

$$(\theta\rho)(t) = (\Gamma(X,\mathcal{O}_X)(t))(\sigma).$$

Pero si σ está dada por d alrededor de x, entonces $(\Gamma(X,\mathcal{O}_X)(t))(\sigma)$ está dada por $t_\circ d$ alrededor de x. Por lo tanto,

$$((\theta\rho)(t))(x) = ((\Gamma(X,\mathcal{O}_X)(t))(\sigma))(x) = (\overline{t_\circ d})_x$$

Pero por definición de $\hat{\theta}$, es: $\eta_x(\bar{t}_{Val\ \sigma(x)}) = (\overline{t_\circ d})_x$ si σ está dada por d alrededor de x.

Esto prueba que el diagrama es conmutativo, o sea que:

$$\eta_x \, Ev_{Val\ \sigma(x)} \, \epsilon' = Ev_x \, \theta \qquad (6)$$

De (5) y (6), se obtiene entonces:

$$\phi_x \, Ev_{Val\ s(x)} \epsilon \psi = \eta_x \, Ev_{Val\ \sigma(x)} \epsilon' .$$

Por lo tanto,

$$\phi_x \, Ev_{Val\ s(x)} \epsilon \psi\rho = \eta_x \, Ev_{Val\ \sigma(x)} \epsilon'\rho .$$

Recordemos que $\epsilon'\rho : \mathcal{O}_m(V) \longrightarrow \Gamma(F, \mathcal{O}_F)$ es el morfismo canónico. Por lo tanto, obtenemos que para $t \in \mathcal{O}_m(V)$, es:

$$\phi_x((\epsilon\psi\rho)(t)(Val\ s(x))) = \eta_x(\bar{t}_{Val\ \sigma(x)}) \qquad (7)$$

Pero por (4) es $(\epsilon\psi\rho)(t) = (\Gamma(E, \mathcal{O}_E)(t))(\beta)$. Ahora bien, si β está dada por f alrededor del punto $p = Val\ s(x)$, $(p \in E)$, entonces $(\Gamma(E, \mathcal{O}_E)(t))(\beta)$ está dada por $t \circ f$ alrededor de p. Por lo tanto

$$(\epsilon\psi\rho)(t)(Val\ s(x)) =$$

$$= ((\Gamma(E, \mathcal{O}_E)(t))(\beta))(Val\ s(x)) =$$

$$= (\overline{t \circ f})_{Val\ s(x)}$$

Pero por (3), $\lambda_p : \mathcal{O}_{F,\mathrm{Val}\ \beta(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{E,p}$ satisface que, (como β está dado por f alrededor de p), $\lambda_p(\bar{t}_{\mathrm{Val}\ \beta(p)}) =$ $= (\overline{t_\circ f})_p = (\overline{t_\circ f})_{\mathrm{Val}\ s(x)}$. Por lo tanto, es:

$$(\epsilon\psi\rho)(t)(\mathrm{Val}\ s(x)) = \lambda_p(\bar{t}_{\mathrm{Val}\ \beta(p)})$$

donde $p = \mathrm{Val}\ s(x)$.

Por lo tanto, en (7), obtenemos reeemplazando, que:

$$\phi_x(\lambda_{\mathrm{Val}\ s(x)}(\bar{t}_{\mathrm{Val}\ \beta(\mathrm{Val}\ s(x))})) = \eta_x(\bar{t}_{\mathrm{Val}\ \sigma(x)})$$

Pero como $\mathrm{Val}\ \beta = \tau$, es $\mathrm{Val}\ \beta(\mathrm{Val}\ s(x)) = \tau(\mathrm{Val}\ s(x)) =$ $= \mathrm{Val}\ \sigma(x)$. Por lo tanto,

$$(\phi_x \circ \lambda_{\mathrm{Val}\ s(x)})(\bar{t}_{\mathrm{Val}\ \sigma(x)}) = \eta_x(\bar{t}_{\mathrm{Val}\ \sigma(x)})$$

para $t \in \mathcal{O}_m(V)$.

Consideremos ahora $j : \mathcal{O}_m(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{m,\mathrm{Val}\ \sigma(x)}$ el morfismo canónico ("germen en $\mathrm{Val}\ \sigma(x)$"). Por 2.1, j es un epimorfismo de la categoría de anillos analíticos en &ns.

Sea

$$u : \mathcal{O}_{m,\mathrm{Val}\ \sigma(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{m,\mathrm{Val}\ \sigma(x)} \Big/ (\ell_{1,\mathrm{Val}\ \sigma(x)}, \ldots, \ell_{q,\mathrm{Val}\ \sigma(x)}) =$$

$$= \mathcal{O}_{F,\mathrm{Val}\ \sigma(x)}$$

la proyección al cociente. u es un epimorfismo. Se tiene entonces:

$$\phi_x \lambda_{\mathrm{Val}\ s(x)}((uj)(t)) = \eta_x((uj)(t)) \quad \text{para} \quad t \in \mathcal{O}_m(V)$$

Por lo tanto, $\phi_x \lambda_{\mathrm{Val}\ s(x)}\ uj = \eta_x\ uj$.

Como uj es un epimorfismo (pues u y j son epimorfismos) se obtiene

$$\phi_x \lambda_{\mathrm{Val}\ s(x)} = \eta_x$$

Esto termina la prueba de la naturalidad.

4.5. <u>Observación</u>.

Sea A un anillo analítico de presentación finita.

Por (1.19), se sabe que A es un retracto de un cociente.

Vale decir, existe $\omega : \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k) \longrightarrow A$ retracción, donde U es un abierto en $\mathbb{C}^n$ y $h_1,\ldots,h_k \in \mathcal{O}_n(U)$. Por lo tanto, existe $v : A \to \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)$ tal que $\omega v =$ $= id_A$. Es fácil ver que

$$A \xrightarrow{v} \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \overset{id}{\underset{v\omega}{\rightrightarrows}} \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}$$

es un egalizador, y que

$$\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \overset{id}{\underset{v\omega}{\rightrightarrows}} \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \xrightarrow{\omega} A$$

es un coegalizador.

Sea $i : \mathcal{A}_{pf}^{op} \to \mathcal{L}$ el funtor que hace conmutat

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}_{pf}^{op} \arrow[dl, dashed, "i"] \\ \mathcal{L} & \end{tikzcd}$$

Por preservación de límites finitos, obtenemos que:

$i(\bar{A})$ es el egalizador en $\mathcal{L}$:

$$i(\bar{A}) \xhookrightarrow{i(\bar{\omega})} (E,\mathcal{O}_E) \overset{id}{\underset{i(\overline{v\omega})}{\rightrightarrows}} (E,\mathcal{O}_E)$$

Notaremos $i(\bar{A}) = (X_A, \mathcal{O}_{X_A}) \in \mathcal{L}$; $i(\overline{v\omega}) = (f,\phi)$.

Vamos a probar ahora que hay una biyección

$$X_A \cong [A, \mathbb{C}]$$

Sea $x \in X_A$. Por lo tanto, $x \in E$ y $f(x) = x$

$$(X_A = \{x \in E / f(x) = x\}). \quad \text{Como} \quad E = Z(h_1, \ldots, h_k).$$

$x \in E$ equivale a un morfismo $\varphi : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Se tiene $\varphi v \omega \quad \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow \mathbb{C}$, que equivale a un punto $y \in E$; por definición es $f(x) = y$. Como $f(x) = x$, se deduce que $x = y$, o sea que $\varphi v \omega = \varphi$.

Se define $T : X_A \longrightarrow [A, \mathbb{C}]$ por

$$T(x) = \varphi v \quad (\text{donde } x \in E \text{ equivale a } \varphi : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow \mathbb{C}).$$

T es inyectiva:

Si $x_1, x_2 \in X_A$ son tales que definen $\varphi_1 : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\varphi_2 : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $\varphi_1 v = \varphi_2 v$, entonces $\varphi_1 v \omega = \varphi_2 v \omega$. Pero como hemos visto, $\varphi_1 v \omega = \varphi_1$ y $\varphi_2 v \omega = \varphi_2$. Por lo tanto, $\varphi_1 = \varphi_2$ y luego,

$x_1 = x_2$.

T es suryectiva:

Sea $\alpha : A \to \mathbb{C}$; se tiene $\alpha\omega : \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k) \longrightarrow \mathbb{C}$, que equivale a un elemento $x \in E$. Sea $\varphi = \alpha\omega$.

Se tiene $\varphi v\omega : \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k) \longrightarrow \mathbb{C}$ que equivale a un elemento $y \in E$; por definición es $f(x) = y$.

Pero $\varphi v \omega = (\alpha\omega) v\omega = \alpha(\omega v)\omega = \alpha\, id_A \omega = \alpha\omega = \varphi$. Por lo tanto, $x = y$, o sea $f(x) = x$. Esto prueba que $x \in X_A$.

Además, $T(x) = \varphi v = (\alpha\omega) v = \alpha(\omega v) = \alpha\, id_A = \alpha$.

Sea ahora B un anillo analítico. Vamos a definir

$$f_B : Z_B(h_1,\dots,h_k) \longrightarrow Z_B(h_1,\dots,h_k)$$

Dado $b \in Z_B(h_1,\dots,h_k) \subset B(U)$, b equivale a un morfismo

$$\varphi : \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k) \longrightarrow B \qquad \text{se tiene}$$

$$\varphi v\omega : \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k) \longrightarrow B,$$

que equivale a un elemento $c \in Z_B(h_1,\dots,h_k)$.

Se define $f_B(b) = c$.

El resultado obtenido anteriormente se generaliza, o sea, hay una biyección

$$[A,B] \cong \{ b \in Z_B(h_1,\dots,h_k) / f_B(b) = b \} .$$

En efecto, dado $b \in Z_B(h_1,\dots,h_k)$ tal que $f_B(b) = b$, b equivale a un morfismo $\varphi : \mathcal{O}_n(U)_{/(h_1,\dots,h_k)} \longrightarrow B$, y $f_B(b) = b$ dice, exactamente, que $\varphi v \omega = \varphi$; se tiene $\varphi v : A \to B$ y se define $T(b) = \varphi v$ Exactamente igual que antes, se prueba que T es una biyección. Observese que esta biyección establece auntomáticamente una biyección

$$[A,B] \cong \{ \varphi : \mathcal{O}_n(U)_{/(h_1,\dots,h_k)} \longrightarrow B / \varphi v \omega = \varphi \} \quad (1)$$

4.6. <u>Observación</u>.

Al igual que antes, queda establecida una biyección natuaral:

$$[A,\Gamma(X,\mathcal{O}_X)] \cong [(X,\mathcal{O}_X)(X_A,\mathcal{O}_{X_A})] \quad ((X,\mathcal{O}_X) \in \mathcal{L}).$$

donde la naturalidad significa que si B es un anillo analítico de presentación finita, $\psi : B \longrightarrow A$ es un morfismo de anillos analíticos y $\varphi : A \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$, etonces

$$\widehat{\varphi\psi} = i(\overline{\psi})\hat{\varphi}$$

Este resultado se obtiene a partir de la biyección natural ya establecida para el caso de los cocientes, usando (1).

Modelos Analíticos de la Geometría Diferencial Sintética

4.7. Definición.

Sea $\mathcal{M}$ la categoría de las variedades analíticas complejas. Un modelo analítico de la geometría diferencial sintética es una categoría $\mathcal{E}$ con límites finitos munida de un funtor $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$ tal que P es plenamente fiel, manda cubrimientos abiertos en familias epimorfas efectivas universales en $\mathcal{E}$, preserva productos fibrados transversales y $P(\mathbb{C})$ es un objeto anillo de tipo línea (ver [3]).

Vamos a probar que $\widetilde{\mathcal{L}}$ (el topos de haces sobre el sitio de los modelos locales con cubrimientos abiertos) es un modelo analítico de la geometría diferencial sintética.

Sea $P : \mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{L}}$ el siguiente funtor: para $M \in \mathcal{M}$ y $(X,\mathcal{O}_X) \in \widetilde{\mathcal{L}}$, definimos

$$P(M)(X,\mathcal{O}_X) = [(X,\mathcal{O}_X),(M,\mathcal{O}_M)]$$

donde $\mathcal{O}_M$ es el haz de gérmenes de funciones holomorfas sobre M, y consideramos los morfismos de espacios A-anillados de $(X,\mathcal{O}_X)$ en $(M,\mathcal{O}_M)$ (es facil ver que $\mathcal{O}_M$ es un anillo analítico a valores en $Sh(M)$).

Se verifica sin dificultad que $P(M)$ es un funtor, $P(M)$ $\mathcal{L}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ y que, mas aún, $P(M)$ es un haz sobre el sitio $\mathcal{L}$, o sea $P(M) \in \tilde{\mathcal{L}}$.

Además, para $g : M_1 \to M_2$ holomorfa, $(M_1, M_2 \in \mathcal{M})$ se define $P(g) : P(M_1) \to P(M_2)$ por la fórmula:

$$P(g)_{(X,\mathcal{O}_X)}(\varphi) = (g,g^*)\varphi$$

para $(X,\mathcal{O}_X) \in \mathcal{L}$ y $\varphi : (X,\mathcal{O}_X) \to (M_1,\mathcal{O}_{M_1})$, (donde $(g,g^*) : (M_1,\mathcal{O}_{M_1}) \to (M_2,\mathcal{O}_{M_2})$ es el morfismo de espacios A-anillados deducido a partir de g).

Es facil ver que $P(g)$ es una transformación natural entre funtores. Por lo tanto, queda definido el funtor

$$P : \mathcal{M} \to \tilde{\mathcal{L}}$$

veamos que P es plenamente fiel:

Sea $\tau : P(M_1) \to P(M_2)$ un morfismo de haces (transformación natural entre funtores).

Como M_1 es una variedad analítica compleja (de dimensión

compleja n), hay un cubrimiento abierto M_α $(\alpha \in I)$ de M_1 tal que cada M_α es biholomorfo a un abierto U_α de $\mathbb{C}^n$. Por lo tanto, $(M_\alpha, \mathcal{O}_{M_\alpha}) \cong (U_\alpha, \mathcal{O}_{U_\alpha})$ es un modelo local.
Por lo tanto, se tiene $\tau_{(M_\alpha, \mathcal{O}_{M_\alpha})} : P(M_1)(M_\alpha, \mathcal{O}_{M_\alpha}) \longrightarrow$ $\longrightarrow P(M_2)(M_\alpha, \mathcal{O}_{M_\alpha})$. Sea $i_\alpha : (M_\alpha, \mathcal{O}_{M_\alpha}) \hookrightarrow (M_1, \mathcal{O}_{M_1})$ la inclusión, y sea

$$\varphi_\alpha = \tau_{(M_\alpha, \mathcal{O}_{M_\alpha})}(i_\alpha) \ ; \quad \varphi_\alpha : (M_\alpha, \mathcal{O}_{M_\alpha}) \to (M_2, \mathcal{O}_{M_2})$$

$\varphi_2 = (g_\alpha, \phi_\alpha)$ con $g_\alpha : M_\alpha \to M_2$. Es facil ver que, usando que τ es una transformación natural entre funtores, que $g_{\alpha / M_\alpha \cap M_\beta} = g_{\beta / M_\alpha \cap M_\beta}$ y por lo tanto definen una $g : M_1 \to M_2$; además es facil ver que cada g_α es holomorfa, y por lo tanto $g : M_1 \to M_2$ es holomorfa.
Finalmente, se prueba sin dificultad que $P(g) = \tau$ Por lo tanto, P es plenamente fiel.
Es inmediato que P cumple con las otras condiciones: preservar cubrimientos abiertos y productos fibrados transversales.
Finalmente, $P(\mathbb{C})$ es un objeto anillo de tipo línea: en efecto, es $P(\mathbb{C}) = [\quad, (\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})] \in \tilde{\mathcal{L}}$ es claramente un objeto anillo; además, se tiene el egalizador

$$(0,\mathcal{O}_{0/z^2}) \hookrightarrow (\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}}) \underset{(0,0^*)}{\overset{(z^2,z^{2*})}{\rightrightarrows}} (\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}})$$

y se verifica que

$$(\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}})^{(0,\mathcal{O}_{0/z^2})} = (\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}})\times(\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}}),$$

(o sea, $(\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ es de tipo línea). En efecto, si $(X,\mathcal{O}_X)\in\mathcal{L}$, se tiene

$$[(X,\mathcal{O}_X),(\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}})^{(0,\mathcal{O}_{0/z^2})}] \cong [(X,\mathcal{O}_X)\times(\{0\},\mathcal{O}_{0/z^2}),\ (\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}})]$$

$$=[(X',\mathcal{O}_{X'}),(\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}})]$$

donde $X' = X\times\{0\}$, y $\mathcal{O}_{X',(p,0)} = \mathcal{O}_{X,p}\otimes\mathcal{O}_{0/z^2}$, donde $\otimes$ indica el coproducto de anillos analíticos (ver [4]). Por 4.1 es:

$$[(X',\mathcal{O}_{X'}),(\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}})] = \Gamma(X',\mathcal{O}_{X'})$$

y $[(X,\mathcal{O}_X),(\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}})\times(\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}})] = [(X,\mathcal{O}_X),(\mathbb{C}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})] =$

$$= \Gamma(X, \mathcal{O}_X(\mathbb{C}^2)).$$

Como $X' = X \times \{0\} \cong X$, basta ver que $\mathcal{O}_X(\mathbb{C}^2) \cong \mathcal{O}_{X'}$ como haces sobre X.

La fibra de $\mathcal{O}_{X'}$ en p es $\mathcal{O}_{X,p} \otimes \mathcal{O}_{0/Z^2} = \mathcal{O}_{X,p}[\epsilon]$, donde $\mathcal{O}_{X,p}[\epsilon] = \{a+b\epsilon\ ,\ a,b \in \mathcal{O}_{X,p}\}$. Como conjunto, es $\mathcal{O}_{X,p}[\epsilon] = \mathcal{O}_{X,p} \times \mathcal{O}_{X,p} = (\mathcal{O}_X(\mathbb{C}^2))_p$, y resulta claro que $\mathcal{O}_X(\mathbb{C}^2) \cong \mathcal{O}_{X'}$ como haces sobre X. Por lo tanto, $(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ es de tipo línea, y se deduce inmediatamente que $P(\mathbb{C})$ es de tipo línea.

CAPITULO V

Espectro de un anillo analítico de presentación finita

En esta sección vamos a calcular el espectro de un cociente $\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)$.

Recordemos que el espectro de un anillo analítico A en $\mathcal{E}$ns, es un topos de Grothendieck S_A junto con un anillo analítico local Spec A en S_A, y un morfismo $\Delta^*A \longrightarrow$ Spec A, tal que, para todo topos de Grothendieck $\mathcal{E}$ y todo anillo analítico B en $\mathcal{E}$ local, junto con un morfismo $\Delta^*A \longrightarrow B$ existe un único par (p^*,π), donde p^* es la imagen inversa de un morfismo geométrico, $p^* : S_A \longrightarrow \mathcal{E}$, y $\pi : p^*\text{Spec } A \longrightarrow B$ es un morfismo local de anillos analíticos, tal que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}ns \arrow[rr, "\Delta^*_{\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "\Delta^*"'] & & \mathcal{E} \\
& S_A \arrow[ur, "p^*"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Delta^*_{\mathcal{E}}A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \\
& p^*\text{Spec } A \arrow[ur, dashed, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

conmutan.

5.1. <u>Observación</u>.

Aquí, Δ^* es el haz constante en S_A , $\Delta^*_{\mathcal{E}}$ es el haz constante en $\mathcal{E}$; y el morfismo $\Delta^* A \longrightarrow \mathrm{Spec}\ A$ da lugar a un morfismo $p^*(\Delta^* A) \longrightarrow p^*(\mathrm{Spec}\ A)$ o sea de $\Delta^*_{\mathcal{E}}\ A \longrightarrow p^*\mathrm{Spec}\ A$.

Se observa que, en este caso, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}ns \arrow[rr, "\Delta^*_{\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "\Delta^*"'] & & \mathcal{E} \\ & S_A \arrow[ur, dashed, "p^*"'] & \end{tikzcd}$$

siempre conmuta, ya que existe un único morfismo $\mathcal{E}ns \to \mathcal{E}$ y es, por supuesto, el "haz constante". Dicho en otras palabras, hay un único morfismo geométrico $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}ns$, cuya imágen directa es "secciones globales" y su imagen inversa es $\Delta^*_{\mathcal{E}}$.

Sea U un abierto en $\mathbb{C}^n$, sean $h_1,\ldots,h_k$ holomorfas en U. Notaremos $E = Z(h_1,\ldots,h_k) \subset U$.

Se tiene el anillo analítico local $\mathcal{O}_E$ en $\mathrm{Sh}(E)$, (ver 1.17).

5.2. <u>Teorema</u>.

El espectro de $\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)$ es el topos de Grothendieck $Sh(E)$ junto con el anillo analítico $\mathcal{O}_E$ en $Sh(E)$, concretamente:

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}) = \mathcal{O}_E$$

<u>Demostración</u>.

Como siempre, indicaremos $\Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ a las secciones globales del haz $\mathcal{O}_E$ sobre E. Se tiene el morfismo $\rho : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$. Dada f holomorfa en U, $\rho(f)$ es la sección global del haz $\mathcal{O}_E$ dada por la función f. ρ es un morfismo de anillos analítcos y $\rho(h_i) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Notaremos

$$r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k)$$

la proyección al cociente. Se tiene entonces:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_n(U) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k) \arrow[dl, dashed, "\exists!\varphi"] \\
\Gamma(E,\mathcal{O}_E) &
\end{tikzcd}$$

que, por definición del cociente, existe una única $\varphi : \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k) \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ morfismo de anillos analíticos tal que $\varphi r = \rho$.

Por supuesto, $\varphi : \mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k) \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ equivale a un morfismo $\Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k)) \longrightarrow \mathcal{O}_E$ al cual notaremos también φ. Se tiene entonces el morfismo de anillos analíticos en $Sh(E)$, $\varphi : \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k)) \longrightarrow \mathcal{O}_E$.

Sea B un anillo analítico local en un topos de Gronthendieck $\mathcal{E}$ y sea $\lambda : \Delta^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k)) \longrightarrow B$ un morfismo de anillos analíticos en $\mathcal{E}$.

Hay que probar que existe un único (ψ^*,π), $\psi^* : Sh(E) \longrightarrow \mathcal{E}$ imagen inversa de un morfismo geométrico, $\pi : \psi^*\mathcal{O}_E \longrightarrow B$ morfismo local de anillos analíticos, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Delta^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\dots,h_k)) \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\psi^*(\varphi)"'] & & B \\
& \psi^*\mathcal{O}_E \arrow[ur, dashed, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, o sea que $\pi\varphi^*(\varphi) = \lambda$

Como $\mathcal{E}$ es un topos de Grothendieck, $\mathcal{E}$ es equivalente a $\widetilde{\mathcal{D}}$, el topos de haces sobre un cierto sitio $\mathcal{D}$. Sea 1 el objeto terminal de $\mathcal{D}$.

El morfismo λ equivale a un morfismo

$$\lambda : \mathcal{O}_n(U)_{/(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow \Gamma(B) = B(1).$$

Se tiene entonces: $\lambda r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow B(1)$ que verifica $(\lambda r)(h_i) = \lambda(r(h_i)) = \lambda(0) = 0$ en $B(1)$.

Por el lema de Yoneda, λr equivale a un elemento en $B(1)(U)$, al cual llamaremos "λ", y que satisface, por supuesto, que $(B(1)(h_i))(\text{"}\lambda\text{"}) = 0$.

Teniendo en cuenta que $B(1)(U) = B(U)(1)$, el elemento "λ" $\in B(U)(1)$, equivale, por el lema de Yoneda, a un morfismo "λ" $: 1 \longrightarrow B(U)$, donde ahora 1 es el objeto terminal de $\mathcal{E}$. Pensando $h_i : B(U) \longrightarrow B$ morfismo en $\mathcal{E}$, se obtiene inmediatamente que $h_i\text{"}\lambda\text{"} = 0$.

Se tiene entonces:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, dashed, "\text{"}\lambda\text{"}"'] \arrow[d, "\text{"}\lambda\text{"}"] & \\
Z_B(h_1,\ldots,h_k) \arrow[r, hook, "i"'] & B(U) \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B^k
\end{tikzcd}$$

donde $h = (h_1,\ldots,h_k)$

donde $Z_B(h_1,\ldots,h_k)$ es el egalizador en $\mathcal{E}$ de h y 0.
Como $h"\lambda" = 0$, se deduce que existe un único morfismo $1 \longrightarrow Z_B(h_1,\ldots,h_k)$, al cual llamaremos de nuevo " λ " que hace conmutar el diagrama.

Por lo tanto, se puede pensar $"\lambda" : 1 \longrightarrow Z_B(h_1,\ldots,h_k)$; donde 1 es el objeto terminal de $\mathcal{E}$.

Vamos a definir ahora un funtor $\psi : \mathcal{O}(E) \longrightarrow \mathcal{E}$, donde $\mathcal{O}(E)$ es el sitio de los abiertos de E con la topología de Grothendieck dada por los cubrimientos abiertos.

Para cada H abierto de E, sea $H = V \cap E$ con V abierto $V \subset U$.

Se puede probar fácilmente que si también $H = V_1 \cap E$ con V_1 abierto, $V_1 \subset U$, entonces $Z_B(h_{1|V},\ldots,h_{k|V}) = Z_B(h_{1|V_1},\ldots,h_{k|V_1})$, pues, en realidad, ambos coinciden con $Z_B(h_{1|V\cap V_1},\ldots,h_{k|V\cap V_1})$. Tiene sentido definir entonces $\psi(H)$ como el siguiente pull-back en $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd}
\psi(H) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\text{"}\lambda\text{"}"] \\
Z_B(h_{1|V},\ldots,h_{k|V}) \arrow[r, hook, "i_V"'] & Z_B(h_1,\ldots,h_k)
\end{tikzcd}$$

donde i_V es la "inclusión" natural entre los egalizadores: es decir, si

$$\begin{tikzcd}
Z_B(h_1,\ldots,h_k) \arrow[r, hook, "i"] & B(U) \\
Z_B(h_{1|V},\ldots,h_{k|V}) \arrow[r, hook, "j_V"] & B(V) \arrow[u, hook, "i_{V,U}"']
\end{tikzcd}$$

son las flechas de egalizadores, y si $i_{V,U}$ es la inclusión de V en U, entonces i_V es la única flecha que verifica $ii_V = i_{V,U}\, j_V$ donde aquí se piensa

$$i_{V,U} : B(V) \longrightarrow B(U).$$

Teniendo en cuenta que las flechas de $\mathcal{O}(E)$ son las inclusiones, hay que definir, dada una inclusión $i' : H_1 \longrightarrow H_2$, ($H_1$ y H_2 abiertos en E, $H_1 \subset H_2$) una flecha $\psi(i')$ $\psi(H_1) \longrightarrow \psi(H_2)$. Será $H_1 = V_1 \cap E$, $H_2 = V_2 \cap E$ con V_1 y V_2 abiertos en U. Se puede suponer que $V_1 \subset V_2$ (pues $H_1 = (V_1 \cap V_2) \cap E$).

Se tienen los pull-backs en $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd}
\psi(H_1) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "m_1"'] & 1 \arrow[d, "\text{"}\lambda\text{"}"] \\
Z_B(h_{1|V_1}, \ldots, h_{k|V_1}) \arrow[r, hook, "i_{V_1}"'] & Z_B(h_1, \ldots, h_k)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\psi(H_2) \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "m_2"'] & 1 \arrow[d, "\text{"}\lambda\text{"}"] \\
Z_B(h_{1|V_2}, \ldots, h_{k|V_2}) \arrow[r, hook, "i_{V_2}"'] & Z_B(h_1, \ldots, h_k)
\end{tikzcd}$$

De nuevo, se tiene una"inclusión" $j : Z_B(h_{1|V_1}, \ldots, h_{k|V_1}) \hookrightarrow Z_B(h_{1|V_2}, \ldots, h_{k|V_2})$ que verifica que, si

$$Z_B(h_{1|V_1}, \ldots, h_{k|V_1}) \xhookrightarrow{j_{V_1}} B(V_1)$$

$$Z_B(h_{1|V_2},\ldots,h_{k|V_2}) \xrightarrow{j_{V_2}} B(V_2)$$

son las flechas de egalizadores, entonces $j_{V_2}j = i_{V_1,V_2}j_{V_1}$ donde se piensa $i_{V_1,V_2} : B(V_1) \hookrightarrow V(B_2)$.

Se tiene

$$\begin{tikzcd}
\psi(H_1) \arrow[dr, dashed, "!\tau"'] \arrow[drr, bend left, "u_1"] \arrow[ddr, bend right, "jm_1"'] & & \\
& \psi(H_2) \arrow[r] \arrow[d, "m_2"] \arrow[dr, phantom, "\text{pull-back}"] & 1 \arrow[d, "\text{"}\lambda\text{"}"] \\
& Z_B(h_{1|V_2},\ldots,h_{k|V_2}) \arrow[r, hook, "i_{V_2}"'] & Z_B(h_1,\ldots,h_k)
\end{tikzcd}$$

vamos a probar que $i_{V_2}j = i_{V_1}$.

Recordemos que i_{V_1} y i_{V_2} verifican, por definición, que

$$i\ i_{V_1} = i_{V_1,U}\ j_{V_1} \qquad (2)$$

$$i\ i_{V_2} = i_{V_2,U}\ j_{V_2} \qquad (3)$$

Por lo tanto,

$$i(i_{V_2}j) = (i\ i_{V_2})j = (i_{V_2U}j_{V_2})j =$$

$$i_{V_2U}(j_{V_2}j) = i_{V_2U}(i_{V_1V_2}j_{V_1}) = (i_{V_2,U}i_{V_1,V_2})j_{V_1} =$$

$$= i_{V_1,U}j_{V_1} = i\ i_{V_1}\ ;$$

y como i es un monomorfismo, se deduce que

$$i_{V_2}j = i_{V_1}$$

Por lo tanto, en (1), es

$$i_{V_2}(jm_1) = (i_{V_2}j)m_1 = i_{V_1}m_1 = \text{"}\lambda\text{"}u_1$$

Se deduce entonces que existe un único $\tau : \psi(H_1) \longrightarrow \psi(H_2)$ tal que

$$\begin{cases} m_2\tau = jm_1 \\ u_2\tau = u_1 \end{cases}$$

Se define, entonces:

$$\psi(i') = \tau\ .$$

Es fácil ver que ψ es un funtor.

Vamos a probar que ψ respeta límites finitos. Basta ver que ψ respeta pull-backs y objeto terminal.

Un pull-back en $o(E)$ es una intersección: $H_1 \cap H_2$.

Por lo tanto, hay que probar que

$$\begin{tikzcd}
\psi(H_1 \cap H_2) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & \psi(H_1) \arrow[d] \\
\psi(H_2) \arrow[r] & \psi(E)
\end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$.

Sea $X \in \mathcal{E}$, y sean α y β flechas que hacen conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\
& \psi(H_1 \cap H_2) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & \psi(H_1) \arrow[d] \\
& \psi(H_2) \arrow[r] & \psi(E)
\end{tikzcd}$$

$H_1 = V_1 \cap E$; $H_2 = V_2 \cap E$ con V_1 y V_2 abiertos en U.
Por el teorema 3.6, existe un único $B^* : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{E}$ que preserva límites finitos y es un punto del sitio $\mathcal{L}$ tal que $B^*A = B$; donde $A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{L}$ es $A(U) = (U, \mathcal{O}_U)$, y $\mathcal{L}$ es el sitio de los modelos locales.

Es

$$H_1 = Z(h_{1|V_1}, \ldots, h_{k|V_1}) \;;$$

$$H_2 = Z(h_{1|V_2}, \ldots, h_{k|V_2}) \;;$$

$$H_1 \cap H_2 = Z(h_{1|V_1 \cap V_2}, \ldots, h_{k|V_1 \cap V_2}) \;;$$

$$E = Z(h_1, \ldots, h_k).$$

Se tiene el siguiente pull-back en $\mathcal{L}$

$$\begin{tikzcd} H_1 \cap H_2 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & H_1 \arrow[d, hook] \\ H_2 \arrow[r, hook] & E \end{tikzcd}$$

Como B^* preserva límites finitos, preserva pull-backs y es $B^*(H_1) = Z_B(h_{1|V_1}, \ldots, h_{k|V_1})$; $B^*(H_2) = Z_B(h_{1|V_2}, \ldots, h_{k|V_2})$;

$B^*(H_1 \cap H_2) = Z_B(h_{1|V_1 \cap V_2}, \ldots, h_{k|V_1 \cap V_2})$; $B^*(E) = Z_B(h_1, \ldots$
$\ldots, h_k)$. Por lo tanto

$$\begin{tikzcd}
Z_B(h_{1|V_1 \cap V_2}, \ldots, h_{k|V_1 \cap V_2}) \arrow[r, hook, "r_1"] \arrow[d, hook, "r_2"'] & Z_B(h_{1|V_1}, \ldots, h_{k|V_1}) \arrow[d, hook, "i_{V_1}"] \\
Z_B(h_{1|V_2}, \ldots, h_{k|V_2}) \arrow[r, hook, "i_{V_2}"'] & Z_B(h_1, \ldots, h_k)
\end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$.

A su vez, se tienen los pull-backs en $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd}
\psi(H_1) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "m_1"'] & 1 \arrow[d, "\text{"}\lambda\text{"}"] \\
Z_B(h_{1|V_1}, \ldots, h_{k|V_1}) \arrow[r, hook, "i_{V_1}"'] & Z_B(h_1, \ldots, h_k)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\psi(H_2) \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "m_2"'] & 1 \arrow[d, "\text{"}\lambda\text{"}"] \\
Z_B(h_{1|V_2},\dots,h_{k|V_2}) \arrow[r, hook, "i_{V_2}"'] & Z_B(h_1,\dots,h_k)
\end{tikzcd}$$

Se tienen:

$$m_1\alpha : X \longrightarrow Z_B(h_{1|V_1},\dots,h_{k|V_1})$$

$$m_2\alpha : X \longrightarrow Z_B(h_{1|V_2},\dots,h_{k|V_2})$$

que verifican:

$$\begin{aligned}
i_{V_1}(m_1\alpha) &= (i_{V_1}m_1)\alpha = (\text{"}\lambda\text{"}u_1)\alpha = \text{"}\lambda\text{"}(u_1\alpha) \\
i_{V_2}(m_2\beta) &= (i_{V_2}m_2)\beta = (\text{"}\lambda\text{"}u_2)\beta = \text{"}\lambda\text{"}(u_2\beta)
\end{aligned} \qquad (4)$$

Pero

$u_1\alpha : X \to 1$

; por lo tanto, $u_1\alpha = u_2\beta$

$u_2\beta : X \to 1$

Se deduce entonces, de (4) que $i_{V_1}(m_1\alpha) = i_{V_2}(m_2\beta)$.

Se tiene entonces

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\exists!\phi"] \arrow[drr, bend left, "m_1\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "m_2\beta"'] & & \\
& Z_B(h_{1|V_1\cap V_2},\ldots,h_{k|V_1\cap V_2}) \arrow[r, hook, "r_1"] \arrow[d, "r_2"] \arrow[dr, phantom, "\begin{array}{c}\text{p-back}\\ \text{en } \&.\end{array}"] & Z_B(h_{1|V_1},\ldots,h_{k|V_1}) \arrow[d, "i_{V_1}"] \\
& Z_B(h_{1|V_2},\ldots,h_{k|V_2}) \arrow[r, hook, "i_{V_2}"'] & Z_B(h_1,\ldots,h_k)
\end{tikzcd}$$

Se deduce, por lo tanto, que existe una única $\phi : X \longrightarrow$

$\longrightarrow Z_B(h_{1|V_1\cap V_2},\ldots,h_{k|V_1\cap V_2})$ tal que

$$\begin{cases} r_1\phi = m_1\alpha \\ r_2\phi = m_2\beta \end{cases}$$

Sea $v : X \to 1$ la única flecha. Es $v = u_1\alpha = u_2\beta$.

Se tiene:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\exists ! \gamma"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "\phi"'] & & \\
& \psi(H_1 \cap H_2) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p-back en } \& ."] & 1 \arrow[d, "``\lambda"'"] \\
& Z_B(h_{1|V_1 \cap V_2}, \dots, h_{k|V_1 \cap V_2}) \arrow[r, hook, "p"'] & Z_B(h_1, \dots, h_k)
\end{tikzcd}$$

donde $p\phi = (i_{V_1} r_1)\phi = i_{V_1}(r_1\phi) = i_{V_1}(m_1\alpha) = (i_{V_1} m_1)\alpha =$

$= (``\lambda" u_1)\alpha = ``\lambda"(u_1\alpha) = ``\lambda" v.$

Se deduce entonces que existe una única $\gamma : X \longrightarrow \psi(H_1 \cap H_2)$ tal que

$$\begin{cases} u\gamma = v \\ m\gamma = \phi \end{cases}$$

Ahora bien, se verifica, por definición de a y b, que:

$$m_1 a = r_1 m \; ; \qquad m_2 b = r_2 m.$$

Por lo tanto,

$$m_1(a\gamma) = (m_1 a)\gamma = (r_1 m)\gamma = r_1(m\gamma) = r_1\phi = m_1\alpha$$

$$m_2(b\gamma) = (m_2 b)\gamma = (r_2 m)\gamma = r_2(m\gamma) = r_2\phi = m_2\beta$$

además, $u_1(a\gamma)$ y $u_1\alpha$ son flechas $X \longrightarrow 1$. Entonces $u_1(a\gamma) = u_1\alpha$; y análogamente, $u_2(b\gamma)$ y $u_2\beta$: $X \longrightarrow 1$; y entonces $u_2(b\gamma) = u_2\beta$ Podemos escribir entonces:

$$\begin{cases} m_1(a\gamma) = m_1\alpha \\ u_1(a\gamma) = u_1\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2(b\gamma) = m_2\beta \\ u_2(b\gamma) = u_2\beta \end{cases}$$

Por lo tanto, siendo $a\gamma$ y $\alpha : X \longrightarrow \psi(H_1)$, se deduce, por la unidad de las flechas que llegan a un pull-back, que $a\gamma = \alpha$. Análogamente,

$$b\gamma = \beta .$$

Por lo tanto, hasta aquí se probó que existe $\gamma : X \longrightarrow \psi(H_1 \cap H_2)$ tal que

$$\begin{cases} a\,\gamma = \alpha \\ b\,\gamma = \beta \end{cases}$$

Vamos a probar que γ es única.

Sea $\gamma' : X \longrightarrow \psi(H_1 \cap H_2)$ tal que

$$\begin{cases} a\gamma' = \alpha \\ b\gamma' = \beta \end{cases}$$

Se tiene: $m\gamma' : X \longrightarrow Z_B(h_{1|V_1 \cap V_2}, \ldots, h_{k|V_1 \cap V_2})$, que verifica:

$$r_1(m\gamma') = (r_1 m)\gamma' = (m_1 a)\gamma' = m_1(a\gamma') = m_1\alpha$$

$$r_2(m\gamma') = (r_2 m)\gamma' = (m_2 b)\gamma' = m_2(b\gamma') = m_2\beta$$

Por lo tanto, por unicidad de ϕ, se deduce que $m\gamma' = \phi$.
Se tiene también $u\gamma'$ y $v : X \longrightarrow 1$. Por lo tanto, $u\gamma' = v$.
Entonces, $\gamma' : X \longrightarrow \psi(H_1 \cap H_2)$ verifica:

$$\begin{cases} u\gamma' = v \\ m\gamma' = \phi \end{cases}$$

Se deduce, enotnces, por definición de γ, que $\gamma' = \gamma$.
Esto termina de probar que

$$\begin{tikzcd} \psi(H_1 \cap H_2) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & \psi(H_1) \arrow[d] \\ \psi(H_2) \arrow[r] & \psi(E) \end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$.

Por lo tanto, ψ preserva pull-backs.

El objeto terminal de la categoría $\mathcal{O}(E)$ es E, y por definición se tiene un pull-back en $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} \psi(E) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\text{"}\lambda\text{"}"] \\ Z_B(h_1,\ldots,h_k) \arrow[r, "id"'] & Z_B(h_1,\ldots,h_k) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\psi(E) = 1$ es el objeto terminal de $\mathcal{E}$. Se probó entonces, que ψ preserva objeto terminal. Con esto queda probado que ψ respeta límites finitos.

Vamos a probar ahora que ψ es un punto del sitio $\mathcal{O}(E)$; o sea, que si H_α es abierto en E , $(\alpha \in I)$ y $H = \bigcup_{\alpha \in I} H_\alpha$, entonces la familia $\psi(H_\alpha) \longrightarrow \psi(H)$ es epimorfa efectiva en $\mathcal{E}$. Aquí, es $H_\alpha = V_\alpha \cap E$ con V_α abierto en U; y se tiene:

$$H = \bigcup_{\alpha \in I} H_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (V_\alpha \cap E) = \left(\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha\right) \cap E$$

Sea $V = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ $\quad V$ es abierto en U y $H = V \cap E$.

Como B preserva cubrimientos, la familia

$$B(V_\alpha) \xrightarrow{i_{V_\alpha, V}} B(V)$$

es epimorfa efectiva universal en $\mathcal{E}$.

Consideremos el pull-back en $\mathcal{L}$, la categoría de modelos locales:

$$\begin{array}{ccc} (H_\alpha, \mathcal{O}_{H_\alpha}) & \hookrightarrow & (H, \mathcal{O}_H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (V_\alpha, \mathcal{O}_{V_\alpha}) & \hookrightarrow & (V, \mathcal{O}_V) \end{array} \qquad (H_\alpha = H \cap V_\alpha)$$

Aplicando B^*, obtenemos, usando que

$$H_\alpha = Z(h_{1|V_\alpha}, \ldots, h_{k|V_\alpha}),$$

$$H = Z(h_{1|V},\ldots,h_{k|V})$$

que

$$\begin{tikzcd}
Z_B(h_{1|V_\alpha},\ldots,h_{k|V_\alpha}) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Z_B(h_{1|V},\ldots,h_{k|V}) \arrow[d, hook] \\
B(V_\alpha) \arrow[r] & B(V)
\end{tikzcd}$$

es un pull-back en & , y como $B(V_\alpha) \longrightarrow B(V)$ es epimorfa efectiva universal en & , se deduce que la familia

$$Z_B(h_{1|V_\alpha},\ldots,h_{k|V_\alpha}) \overset{j_\alpha}{\hookrightarrow} Z_B(h_{1|V},\ldots,h_{k|V})$$

es epimorfa efectiva (universal) en &.

Vamos a probar ahora que

$$\begin{tikzcd}
\psi(H_\alpha) \arrow[r, "\tau_\alpha"] \arrow[d, "m_\alpha"'] & \psi(H) \arrow[d, "m"] \\
Z_B(h_{1|V_\alpha},\ldots,h_{k|V_\alpha}) \arrow[r, hook, "j_\alpha"'] & Z_B(h_{1|V},\ldots,h_{k|V})
\end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$.

Por definición de τ_α , se verifica que $m\tau_\alpha = j_\alpha m_\alpha$.

Supongamos que se tiene:

$$\begin{cases} a : X \longrightarrow Z_B(h_{1|V_\alpha}, \ldots, h_{k|V_\alpha}) ; \\ b : X \longrightarrow \psi(H) \end{cases}$$

tales que $j_\alpha a = mb$.

Se tienen los pull-backs en $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} \psi(H_\alpha) \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[d, "m_\alpha"'] & 1 \arrow[d, "\text{"}\lambda\text{"}"] \\ Z_B(h_{1|V_\alpha}, \ldots, h_{k|V_\alpha}) \arrow[r, hook, "i_\alpha"'] & Z_B(h_1, \ldots, h_k) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \psi(H) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "m"'] & 1 \arrow[d, "\text{"}\lambda\text{"}"] \\ Z_B(h_{1|V}, \ldots, h_{k|V}) \arrow[r, hook, "i_V"'] & Z_B(h_1, \ldots, h_k) \end{tikzcd}$$

y se tiene:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\exists!\,\theta"] \arrow[drr, bend left, "y"] \arrow[ddr, bend right, "a"'] & & \\
& \psi(H_\alpha) \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[d, "m_\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p-back}"] & 1 \arrow[d, "\text{"}\lambda\text{"}"] \\
& Z_B(h_{1|V_\alpha},\ldots,h_{k|V_\alpha}) \arrow[r, hook, "i_V"'] & Z_B(h_1,\ldots,h_k)
\end{tikzcd}$$

donde $y : X \to 1$ es la única flecha. Por lo tanto, $y = ub$. Se verifica que:

$$i_\alpha a = (i_V j_\alpha) a = i_V (j_\alpha a) = i_V (mb) =$$

$$= (i_V m) b = (\text{"}\lambda\text{"} u) b = \text{"}\lambda\text{"} (ub) = \text{"}\lambda\text{"} y.$$

Por lo tanto, se deduce que existe una única $\theta : X \to \psi(H_\alpha)$ tal que

$$\begin{cases} m_\alpha \theta = a \\ u_\alpha \theta = y \end{cases}$$

vamos a probar que $\tau_\alpha \theta = b$. Se tiene:

$$m(\tau_\alpha\theta) = (m\tau_\alpha)\theta = (j_\alpha m_\alpha)\theta = j_\alpha(m_\alpha\theta) = j_\alpha a = mb.$$

Por otra parte, $u(\tau_\alpha\theta)$, $ub : X \longrightarrow 1$; entonces,

$$u(\tau_\alpha\theta) = ub.$$

Se tiene entonces que:

$$m(\tau_\alpha\theta) = mb$$

$$u(\tau_\alpha\theta) = ub,$$

siendo $\tau_\alpha\theta$, $b : X \longrightarrow \psi(H)$, y siendo

$$\begin{tikzcd} \psi(H) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "m"'] & 1 \arrow[d, "\text{"}\lambda\text{"}"] \\ Z_B(h_1,\dots,h_k) \arrow[r, hook, "i_V"'] & Z_B(h_1,\dots,h_k) \end{tikzcd}$$ un pull-back.

Se deduce entonces que $\tau_\alpha\theta = b$.

Luego, $\theta : X \longrightarrow \psi(H_\alpha)$ verifica:

$$\begin{cases} m_\alpha \theta = a \\ \tau_\alpha \theta = b. \end{cases}$$

Vamos a probar que θ es única con esta propiedad:

Sea $\theta' : X \longrightarrow \psi(H_\alpha)$ tal que

$$\begin{cases} m_\alpha \theta' = a \\ \tau_\alpha \theta' = b \end{cases}$$

Se tiene $u_\alpha \theta' : X \longrightarrow 1$. Por lo tanto, $u_\alpha \theta' = y$.

Por lo tanto, θ' verifica:

$$\begin{cases} m_\alpha \theta' = a \\ u_\alpha \theta' = y \end{cases}$$

Se deduce entonces, por la definición de θ, que $\theta' = \theta$.

Por lo tanto, se probó que existe una única $\theta : X \longrightarrow \psi(H_\alpha)$ tal que

$$\begin{cases} m_\alpha \theta = a \\ \tau_\alpha \theta = b \end{cases}$$

Esto prueba que

$$\begin{tikzcd}
\psi(H_\alpha) \arrow[r, "\tau_\alpha"] \arrow[d, "m_\alpha"'] & \psi(H) \arrow[d, "m"] \\
Z_B(h_{1|V_\alpha},\dots,h_{k|V_\alpha}) \arrow[r, hook, "j_\alpha"'] & Z_B(h_{1|V},\dots,h_{k|V})
\end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\&$. (para cada $\alpha \in I$).

Por lo tanto, como la familia:

$$Z_B(h_{1|V_\alpha},\dots,h_{k|V_\alpha}) \xhookrightarrow[j_\alpha]{} Z_B(h_{1|V},\dots,h_{k|V})$$

es epimorfa efectiva universal en $\&$, se deduce que la familia:

$$\psi(H_\alpha) \xrightarrow{\tau_\alpha} \psi(H)$$

es epimorfa efectiva (universal) en $\&$.

Esto prueba que ψ es un punto del sitio $\mathcal{O}(E)$, que preserva límites finitos.

Por lo tanto $\psi: \mathcal{O}(E) \longrightarrow \&$, se extiende (por preservación de colímites) a un $\psi^* : \widetilde{\mathcal{O}(E)} = Sh(E) \longrightarrow \&$ que preserva colímites cualesquiera y límites finitos (ver [1]).

Vamos ahora a definir $\bar{\pi} : \psi^* \mathcal{O}_E \longrightarrow B$ morfismo local de anillos analíticos.

Recordemos que para cada W abierto en C^m, $m \geqslant 0$, $\mathcal{O}_E(W)$ es el haz sobre E, cuyas secciones sobre un abierto H en E son las m-uplas $(S_1,\ldots,S_m)$, donde cada S_i es una sección de $\mathcal{O}_E$ sobre H, tales que para $x \in H$, $(VS_1(x),\ldots,VS_m(x)) \in W$; aquí $VS_i(x)$ indica el valor de la sección S_i en x. Por el lema de Yoneda, es:

$$\mathcal{O}_E(W) = \operatorname*{colim}_{[\ ,H] \xrightarrow{S} \mathcal{O}_E(W)} [\ ,H]$$

y es por definición de ψ^*:

$$\psi^*(\mathcal{O}_E(W)) = \operatorname*{colim}_{[\ ,H] \xrightarrow{S} \mathcal{O}_E(W)} \psi(H)$$

Este colímite se toma sobre la categoría de las secciones s del haz $\mathcal{O}_E(W)$; y una flecha $s \rightarrow t$,

$$s : [\ ,H] \rightarrow \mathcal{O}_E(W)$$

$$t : [\ ,H'] \rightarrow \mathcal{O}_E(W)$$

es una flecha en $o(E)$ de $H \longrightarrow H'$, o sea una inclusión $i : H \hookrightarrow H'$, tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
[\ ,H] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "s"'] & [\ ,H'] \arrow[dl, "t"] \\
\mathcal{O}_E(W) &
\end{tikzcd}$$

conmuta

Esto dice que, si se piensa a s como sección en H de $\mathcal{O}_E(W)$, y a t como sección en H' de $\mathcal{O}_E(W)$, que $t_{/H} = s$.

Vamos a definir ahora, para cada $s : [\ ,H] \to \mathcal{O}_E(W)$ un morfismo $\gamma_s : \psi(H) \longrightarrow B(W)$. Esta colección de flechas γ_s, inducirá un morfismo $\psi^*(\mathcal{O}_E(W)) \longrightarrow B(W)$, que será π_W.

Sea entonces $s : [\ ,H] \longrightarrow \mathcal{O}_E(W)$. s equivale a un elemento de $\mathcal{O}_E(W)(H)$, o sea, a una sección s del haz $\mathcal{O}_E(W)$ sobre H. $H = V \cap E$.

Vale decir, $s \in \Gamma(H, \mathcal{O}_H(W))$.

Por la observación 4.1 se puede pensar $s : (H, \mathcal{O}_H) \longrightarrow (W, \mathcal{O}_W)$ flecha en $\mathcal{L}$. Y se tiene entonces

$$B^*s : B^*(H, \mathcal{O}_H) \longrightarrow B(W)$$

Como $B^*(H, \mathcal{O}_H) = Z_B(h_{1|V}, \dots, h_{k|V})$

se tiene entonces

$$B^*s \; : \; Z_B(h_{1|V},\ldots,h_{k|V}) \longrightarrow B(W)$$

además, se tiene el pull-back:

$$\begin{tikzcd} \psi(H) \arrow[r] \arrow[d, "m_H"'] & 1 \arrow[d, "\text{"}\lambda\text{"}"] \\ Z_B(h_{1|V},\ldots,h_{k|V}) \arrow[r, hook] & Z_B(h_1,\ldots,h_k) \end{tikzcd}$$

Se define:

$$\gamma_s = (B^*s)m_H$$

$$\gamma_s \; : \; \psi(H) \longrightarrow B(W).$$

Vamos a probar que dados $H \subset H'$ abiertos en E, dada $t : [\;\;,H'] \to \mathcal{O}_E(W)$ y $s = t_{/H}$, entonces:

$$\gamma_t \psi(i_{H,H'}) = \gamma_s \qquad\qquad i_{H,H'} \; : \; H \hookrightarrow H'$$

Pensando a $i_{H,H'} \; : \; (H,\mathcal{O}_H) \hookrightarrow (H',\mathcal{O}_{H'})$, se tiene que

$$B^*(i_{H,H'}) \; : \; Z_B(h_{1|V},\ldots,h_{k|V}) \hookrightarrow Z_B(h_{1|V'},\ldots,h_{k|V'})$$

es la inclusión canónica; donde $H = V \cap E$; $H' = V' \cap E$.

Se tiene entonces que la composición:

$$(H, \mathcal{O}_H) \xhookrightarrow{i_{H,H'}} (H', \mathcal{O}_{H'}) \xhookrightarrow{\quad t \quad} (W, \mathcal{O}_W)$$

es $s : (H, \mathcal{O}_H) \longrightarrow (W, \mathcal{O}_W)$ (pues $t_{/H} = s$).

Por lo tanto, $B^*s = B^*(t)B^*(i_{H,H'})$.

Como vimos, $B^*(i_{H,H'}) = j : Z_B(h_{1|V}, \ldots, h_{k|V}) \hookrightarrow Z_B(h_{1|V'}, \ldots, h_{k|V'})$ es la inclusión canónica j, o sea:

$$B^*s = B^*(t)j.$$

Componiendo con $m_H : \psi(H) \longrightarrow Z_B(h_{1|V}, \ldots, h_{k|V})$, se obtiene:

$$B^*(s)m_H = B^*(t)(jm_H)$$

Sea $\tau = \psi(i_{H,H'})$. Por definición, τ satisface: $m_{H'}\tau = jm_H$. Se tiene entonces:

$$B^*(s)m_H = B^*(t)(m_{H'}\tau) = (B^*(t)m_{H'})\tau .$$

Teniendo en cuenta que $\gamma_s = B^*(s)m_H$; $\gamma_t = B^*(t)m_{H'}$, se obtiene $\gamma_s = \gamma_t \tau$ o sea $\gamma_s = \gamma_t \psi(i_{H,H'})$.

Por lo tanto, por ser

$$\psi^*(\mathcal{O}_E(W)) = \operatorname*{colim}_{[\ ,H] \xrightarrow{s} \mathcal{O}_E(W)} \psi(H) ,$$

si llamamos $\beta_s : \psi(H) \longrightarrow \psi^*(\mathcal{O}_E(W))$ a la flecha natural al colímite, se deduce que existe una única π_W,

$$\pi_W : \psi^*(\mathcal{O}_E(W)) \longrightarrow B(W) \quad \text{tal que}$$

$$\pi_W \beta_s = \gamma_s \quad \text{para toda} \quad s : [\ ,H] \to \mathcal{O}_E(W)$$

queda definida entonces, para cada W abierto en $\mathbb{C}^m$, $m \geq 0$, una flecha:

$$\pi_W : \psi^*\mathcal{O}_E(W) \longrightarrow B(W) .$$

Vamos a probar ahora que esta colección π_W (W abierto en $\mathbb{C}^m$, $m \geq 0$) define un morfismo de anillos analíticos $\pi : \psi^*\mathcal{O}_E \longrightarrow B$. Hay que probar que si W_1 es abierto en $\mathbb{C}^{m_1}$, W_2 abierto en $\mathbb{C}^{m_2}$, y $f : W_1 \longrightarrow W_2$ holomorfa, entonces el cuadrado:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\psi^* \mathcal{O}_E(W_1) \arrow[r, "\pi_{W_1}"] \arrow[d, "\psi^*(f^*)"'] & B(W_1) \arrow[d, "B(f)"] \\
\psi^* \mathcal{O}_E(W_2) \arrow[r, "\pi_{W_2}"] & B(W_2)
\end{tikzcd}$$ conmuta;

donde $f^* : \mathcal{O}_E(W_1) \longrightarrow \mathcal{O}_E(W_2)$ es el morfismo de haces deducido a partir de f.

Sea $s : [\ ,H] \to \mathcal{O}_E(W_1)$ y sea $\beta_s : \psi(H) \longrightarrow \psi^*\mathcal{O}_E(W_1)$ la flecha natural al colímite.

Para probar que $B(f)\pi_{W_1} = \pi_{W_2}\psi^*(f^*)$, siendo flechas que salen de un colímite, basta ver que para toda $s : [\ ,H] \longrightarrow \mathcal{O}_E(W_1)$, se verifica:

$$(B(f)\pi_{W_1})\beta_s = (\pi_{W_2}\psi^*(f^*))\beta_s.$$

Se tiene $f^*_H : \mathcal{O}_E(W_1)(H) \longrightarrow \mathcal{O}_E(W_2)(H)$; sea $t = f^*_H(s)$;

$t \in \mathcal{O}_E(W_2)(H)$, o sea $t : [\ ,H] \to \mathcal{O}_E(W_2)$.

Sea

$\delta_t : \psi(H) \longrightarrow \psi^*(\mathcal{O}_E(W_2))$ la flecha natural al colímite.

Por definición de $\psi^*(f^*)$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\psi(H) \arrow[r, "\beta_s"] \arrow[dr, "\delta_t"'] & \psi^*\mathcal{O}_E(W_1) \arrow[d, "\psi^*(f^*)"] \\
& \psi^*\mathcal{O}_E(W_2)
\end{tikzcd}$$ conmuta.

ya que por definición, $\psi^*(f^*)$ es la única flecha tal que,

$$\psi^*(f^*)\beta_s = \delta_t \quad \text{para todo } s, \text{ donde } t = f_H^*(s)).$$

Además, por definición de π_{W_1} y π_{W_2}, se verifica:

$$\pi_{W_1}\beta_s = \gamma_s = B^*(s)m_H$$

$$\pi_{W_2}\delta_t = \tilde{\gamma}_t = B^*(t)m_H$$

Se tiene entonces que:

$$(B(f)\pi_{W_1})\beta_s = B(f)(\pi_{W_1}\beta_s) = B(f)(B^*(s)m_H) =$$

$$= (B(f)B^*(s))m_H . \qquad (5)$$

Pensando $\quad t : (H, \mathcal{O}_H) \longrightarrow (W_2, \mathcal{O}_{W_2})$;

$$s : (H, \mathcal{O}_H) \longrightarrow (W_1, \mathcal{O}_{W_1});$$

$$(f,f^*) : (W_1, \mathcal{O}_{W_1}) \longrightarrow (W_2, \mathcal{O}_{W_2});$$

se tiene que: $t = (f,f^*)s$ y por lo tanto

$$B^*t = B^*(f,f^*)B^*s = B(f)B^*(s)$$

se deduce entonces, de (5), que:

$$(B(f)\pi_{W_1})\beta_s = B^*(t)m_H = \tilde{\gamma}_t = \pi_{W_2}\delta_t =$$

$$= \pi_{W_2}(\psi^*(f^*)\beta_s) = (\pi_{W_2}\psi^*(f^*))\beta_s.$$

Esto termina de probar que $\pi : \psi^*\mathcal{O}_E \longrightarrow B$, dado por la colección π_W, es un morfismo de anillos analíticos en &

Vamos a probar ahora que π es local:

Sea W un abierto en $\mathbb{C}^m$. Hay que probar que:

$$\begin{tikzcd} \psi^*(\mathcal{O}_E(W)) \arrow[r, "\pi_W"] \arrow[d, hook, "\psi^*(i^*)"'] & B(W) \arrow[d, hook, "B(i)"] \\ \psi^*(\mathcal{O}_E^m) \arrow[r, "\pi_{\mathbb{C}^m}"'] & B^m \end{tikzcd}$$

es un pull-back en & .

donde $i : W \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ es la inclusión.

Este cuadrado es conmutativo por ser π morfismo de anillos analíticos.

Sea $s : [\ ,H] \to \mathcal{O}_E^m$ una sección del haz $\mathcal{O}_E^m$, donde $H = V \cap E$ con V abierto en U.

s induce una función continua "valor de s", al la cual notaremos Vs.

$$Vs : H \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

Sea $H' = \{ x \in H$ tales que $Vs(x) \in W \}$.

H' es abierto en H, $H' = V' \cap E$ con V' abierto en U, $V' \subset V$.

Pensando $s : (H, \mathcal{O}_H) \longrightarrow (\mathbb{C}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m})$ y restringiendo a H', se obtiene:

$$\tilde{s} : (H', \mathcal{O}_{H'}) \longrightarrow (W, \mathcal{O}_W)$$

Resulta claro que

$$\begin{tikzcd}
(H', \mathcal{O}_{H'}) \arrow[r, "\tilde{s}"] \arrow[d, hook] & (W, \mathcal{O}_W) \arrow[d, hook] \\
(H, \mathcal{O}_H) \arrow[r, "s"] & (\mathbb{C}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m})
\end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\mathcal{L}$,

y como $B^* : \mathcal{L} \to \mathcal{E}$ preserva límites finitos, se obtiene que:

$$\begin{tikzcd}
Z_B(h_{1|V'},\dots,h_{k|V'}) \arrow[r, "B^*(\tilde{s})"] \arrow[d, hook, "j"] & B(W) \arrow[d, hook, "B(i)"] \\
Z_B(h_{1|V},\dots,h_{k|V}) \arrow[r, "B^*(s)"] & B^m
\end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$.

Además, es fácil ver que

$$\begin{tikzcd}
\psi(H') \arrow[r, "m_{H'}"] \arrow[d, hook, "\tau"'] & Z_B(h_{1|V'},\dots,h_{k|V'}) \arrow[d, hook, "j"] \\
\psi(H) \arrow[r, "m_H"] & Z_B(h_{1|V},\dots,h_{k|V})
\end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$.

Por lo tanto , se obtiene, juntando estos pull-backs, que:

$$\begin{tikzcd}
\psi(H') \arrow[rr, "B^*(\tilde{s})m_{H'}"] \arrow[d, hook, "\tau"'] & & B(W) \arrow[d, hook, "B(i)"] \\
\psi(H) \arrow[rr, "B^*(s)m_H"] & & B^m
\end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$.

(6)

Recordemos además, que si llamamos:

$$\delta_s : \psi(H) \longrightarrow \psi^*(\mathcal{O}_E^m)$$

$$\delta_{\tilde{s}} : \psi(H') \longrightarrow \psi^*\mathcal{O}_E(W)$$

a las flechas naturales a los colímites, entonces, por definición de π, es:

$$\begin{cases} \pi_{\mathbb{C}^m}\, \delta_s = \gamma_s = B^*(s)m_H \\ \pi_W\, \delta_s = \gamma_{\tilde{s}} = B^*(\tilde{s})m_{H'} \end{cases}$$

ahora ya estamos en condiciones de probar que π es local:

Sea $X \in \mathcal{E}$, y sean

$$\begin{cases} a : X \longrightarrow \psi^*(\mathcal{O}_E^m) \\ b : X \longrightarrow B(W) \end{cases}$$

tales que $B(i)b = \pi_{\mathbb{C}^m} a$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, bend left, "b"] \arrow[ddr, bend right, "a"'] & & & \\
& \psi^* \mathcal{O}_E(W) \arrow[rr, "\pi_W"'] \arrow[d, hook, "\psi^*(i^*)"'] & & B(W) \arrow[d, hook, "B(i)"] \\
& \psi^*(\mathcal{O}_E^m) \arrow[rr, "\pi_{\mathbb{C}^m}"'] & & B^m
\end{tikzcd}$$

Hay que probar que existe una única $c : X \longrightarrow \psi^*(\mathcal{O}_E(W))$ tal que

$$\begin{cases} \pi_W c = b \\ \psi^*(i^*) c = a \end{cases}$$

Para cada $s : [\ ,H\ ] \longrightarrow \mathcal{O}_E^m$ sección del haz $\mathcal{O}_E^m$ sobre H, sea X_s el siguiente pull-back en & :

$$\begin{tikzcd}
X_s \arrow[r, "d_s"] \arrow[d, "a_s"'] & X \arrow[d, "a"] \\
\psi(H) \arrow[r, "\delta_s"'] & \psi^*(\mathcal{O}_E^m)
\end{tikzcd}$$

Por ser $\psi^*(\mathcal{O}_E^m) = \operatorname*{colim}_{s:[\ ,H]\to \mathcal{O}_E^m} \psi(H)$, la familia:

$\psi(H) \xrightarrow{\delta_s} \psi^*(\mathcal{O}_E^m)$ es epimorfa en $\mathcal{E}$, y como $\mathcal{E}$ es un topos de Grothendieck, es epimorfa efectiva universal. Se deduce entonces que la familia:

$$X_s \xrightarrow{d_s} X$$ es epimorfa efectiva en $\mathcal{E}$.

Sean H' y $\tilde{s}$ como antes; se tiene:

$$(B^*(s)m_H)a_s = (\pi_{\mathbb{C}^m}\delta_s)a_s = \pi_{\mathbb{C}^m}(\delta_s a_s) = \pi_{\mathbb{C}^m}(ad_s) =$$

$$= (\pi_{\mathbb{C}^m}a)d_s = (B(i)b)ds = B(i)(bd_s)$$

Se deduce entonces, por (6), que existe una única $c_s : X_s \longrightarrow \psi(H')$ tal que

$$\begin{cases} (B^*(\tilde{s})m_{H'})c_s = bd_s \\ \tau c_s = a_s \end{cases}$$

Se tiene ahora la familia:

$$X_s \xrightarrow{\delta_{\tilde{s}}\ c_s} \psi^*\mathcal{O}_E(W)$$

Es fácil ver que esta familia es compatible (con respecto a $X_s \longrightarrow X$), y por lo tanto, como $X_s \xrightarrow{d_s} X$ es epimorfa efectiva, se deduce que existe una única $c : X \to \psi^* \mathcal{O}_E(W)$ tal que

$$cd_s = \delta_{\tilde{\tilde{s}}}\, c_s \quad \text{para todo} \quad s : [\ \ ,H] \to \mathcal{O}_E^m$$

vamos a probar que:

$$\begin{cases} \pi_W c = b \\ \psi^*(i^*)c = a \end{cases}$$

y que c es única con esta propiedad.

$\pi_W c$, $b : X \longrightarrow B(W)$ verifican que

$$(\pi_W c)ds = \pi_W(cd_s) = \pi_W(\delta_{\tilde{\tilde{s}}} c_s) = (\pi_W \delta_{\tilde{\tilde{s}}}) c_s =$$

$$= (B^*(\tilde{s})m_{H'})c_s = bd_s \ . \ (\text{para todo} \quad s : [\ \ ,H] \longrightarrow$$

$\longrightarrow \mathcal{O}_E^m$), y por ser $X_s \xrightarrow{d_s} X$ epimorfa, se deduce que $\pi_W c = b$.

Análogamente,

$$(\psi^*(i^*)c)d_s = \psi^*(i^*)(cd_s) = \psi^*(i^*)(\delta_{\tilde{\tilde{s}}} c_s) =$$

$$= (\psi^*(i^*)\delta_{\tilde{S}})c_S = (\delta_S\tau)c_S = \delta_S(\tau c_S) =$$

$$= \delta_S a_S = ad_S$$

y por lo tanto, $\psi^*(i^*)c = a$.

(Se observa aquí que $\psi^*(i^*)\delta_{\tilde{S}} = \delta_S\tau$ por definición de $\psi^*(i^*)$.).

Veamos la unicidad:

Sea $c' : X \longrightarrow \psi^*\mathcal{O}_E(W)$ tal que $\begin{cases} \pi_W c' = b \\ \psi^*(i^*)c' = a \end{cases}$

Como $\psi^*(i^*)$ es un monomorfismo y $\psi^*(i)c' = a = \psi^*(i^*)c$, se deduce que $c' = c$.

Esto termina de probar que π es local.

Hasta ahora se tiene:

$\psi^* : Sh(E) \longrightarrow \mathcal{E}$ que preserva colímites cualesquiera y límites finitos

$\pi : \psi^*\mathcal{O}_E \longrightarrow B$ morfismo local de anillos analíticos.

Vamos a probar ahora que $\pi\psi^*(\varphi) = \lambda$, donde:

$$\varphi : \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}) \longrightarrow \mathcal{O}_E$$

$$\psi^*\varphi : \Delta^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}) \longrightarrow \psi^*\mathcal{O}_E.$$

Recordemos que φ equivale al morfismo φ $\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots$ $\ldots,h_k) \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ dado por $\varphi r = \rho$, donde $r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}$ es la proyección al cociente, y $\rho : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ es el morfismo canónico.

r se puede pensar como una flecha $r : \Delta^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_n(U)) \longrightarrow$ $\longrightarrow \Delta^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)})$ y como $r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}$ es un epimorfismo, entonces también $r : \Delta^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_n(U)) \longrightarrow \Delta^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)})$ es un epimorfismo.

Por lo tanto, para probar que $\pi\psi^*(\varphi) = \lambda$, basta ver que

$$(\pi\psi^*(\varphi))r = \lambda r.$$

Como $\Delta^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_n(U)) = \psi^*(\Delta^*(\mathcal{O}_n(U)))$ y como

$$\Delta^*\mathcal{O}_n(U) = \operatorname*{colim}_{[\ ,H] \xrightarrow{\beta} \Delta^*(\mathcal{O}_n(U))} [\ ,H] ,$$

entonces:

$$\Delta^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_n(U)) = \psi^*(\Delta^*(\mathcal{O}_n(U))) = \operatorname*{colim}_{[\ ,H] \xrightarrow{\beta} \Delta^*(\mathcal{O}_n(U))} \psi(H)$$

Por lo tanto, para probar que $(\pi\psi^*(\varphi))r = \lambda\ r$, basta ver que, para toda $\beta : [\ \ ,H] \to \Delta^*(\mathcal{O}_n(U))$, se verifica:

$$(\pi\psi^*(\varphi))r\psi^*(\beta) = \lambda r\psi^*(\beta),$$

donde

$$\psi^*(\beta) \qquad \psi(H) \longrightarrow \psi^*(\Delta^*(\mathcal{O}_n(U))) = \Delta^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_n(U))$$

es la flecha natural al colímite.

$\beta : [\ \ , H] \to \Delta^*(\mathcal{O}_n(U))$ equivale a un elemento
$f \in \Delta^*(\mathcal{O}_n(U))(H) = \mathcal{O}_n(U)$; o sea, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa.
Y β es la composición

$$[\ \ ,H] \longrightarrow 1 \xrightarrow{\text{"f"}} \Delta^*(\mathcal{O}_n(U))$$

Como ψ^* preserva límites finitos, preserva objeto terminal.
Por lo tanto, $\psi^*(1) = 1$ y entonces, $\psi^*(\beta)$ es la composición:

$$\psi(H) \xrightarrow{u} 1 \xrightarrow{\text{"f"}} \Delta^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_n(U))$$

donde ahora 1 es el objeto terminal de $\mathcal{E}$ y "f" es la flecha canónica deducida a partir de f.
O sea:

$$\psi^*(\beta) = "f"u$$

Se tiene $r"f" : 1 \longrightarrow \Delta^*_{\&}(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}$ Esta flecha es lo mismo que considerar $r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,..,h_k)}$ y como $f \in \mathcal{O}_n(U)$, $r(f) \in \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}$, y se deduce a partir de $r(f)$, una flecha: $"r(f)" : 1 \longrightarrow \Delta^*_{\&}(\mathcal{O}_n(U)/(h_1,\ldots,h_k))$, o sea,

$$r"f" = "r(f)".$$

Por lo tanto,

$$r\psi^*(\beta) = r("f"u) = (r"f")u = "r(f)"u$$

Por lo tanto, hay que probar que:

$$\pi\psi^*(\varphi)"r(f)"u = \lambda"r(f)"u$$

Sea $\alpha = r(f)$ $\alpha \in \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}$

Hay que probar que:

$$\psi\pi^*(\varphi)"\alpha"u = \lambda"\alpha"u . \qquad (7)$$

aquí, $\alpha = r(f)$ y $"\alpha" : 1 \longrightarrow \Delta^*_{\hat{a}}(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)})$.

Es

$$\Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}) = \operatorname*{colim}_{[\ ,H] \xrightarrow{\alpha} \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)})} [\ ,H] ,$$

$$\psi^*\Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}) = \operatorname*{colim}_{[\ ,H] \xrightarrow{\alpha} \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)})} \psi(H)$$

Pensando $\alpha : [\ ,H\ ] \to \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)})$ y llamando

$t_\alpha : \psi(H) \longrightarrow \psi^*(\Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}))$ a la flecha natural

al colímite $(t_\alpha = \psi^*(\alpha)$; $\alpha : [\ ,H\ ] \to \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)})$)

es, $\psi^*(\varphi)t_\alpha = \psi^*(\varphi)\psi^*(\alpha) = \psi^*(\varphi\alpha)$.

Sea $s = \varphi\alpha : [\ , H\ ] \to \mathcal{O}_E$

Pero

$$\mathcal{O}_E = \operatorname*{colim}_{[\ ,H] \xrightarrow{s} \mathcal{O}_E} [\ ,H] \quad \text{y} \quad \psi^*\mathcal{O}_E = \operatorname*{colim}_{[\ ,H] \xrightarrow{s} \mathcal{O}_E} \psi(H) ,$$

y la flecha natural al colímite, $\beta_s : \psi(H) \longrightarrow \psi^*\mathcal{O}_E$ es tal que $\beta_s = \psi^*(s)$.

Entonces, se tiene:

$$\psi^*(\varphi)t_\alpha = \psi^*(s) = \beta_s .$$

Ahora bien, como $\alpha : [\ ,H] \longrightarrow \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\dots,h_k)})$ es la composición $[\ ,H] \to 1 \xrightarrow{"\alpha"} \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\dots,h_k)})$ entonces $\psi^*(\alpha)$ es la composición:

$$\psi(H) \xrightarrow{u} 1 \xrightarrow{"\alpha"} \Delta^*_{\&}(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\dots,h_k)})$$

(pues $"\alpha" : 1 \longrightarrow \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\dots,h_k)})$ es $"\alpha" = \Delta^*\alpha$ luego,

$$\psi^*("\alpha") = (\psi^*\Delta^*)\alpha = \Delta^*_{\&}(\alpha) = "\alpha").$$

O sea:

$$t_\alpha = \psi^*(\alpha) = "\alpha"u.$$

Por lo tanto:

$$\psi^*(\varphi)"\alpha"u = \psi^*(\varphi)t_\alpha = \beta_s$$

Entonces:

$$\psi^*(\varphi)"\alpha"u = \pi\beta_s$$

Pero por definición de π, es

$$\pi\beta_s = \gamma_s = B^*(s)m_H.$$

Se tiene entonces, que $\pi\psi^*(\varphi)"\alpha"u = B^*(s)m_H$.

En resumen, el miembro izquierdo de (7) es:

$$B^*(s)m_H$$

donde $s = \varphi\alpha : [\ ,H] \longrightarrow \mathcal{O}_E$.

Por otra parte,

$$1 \xrightarrow{"\alpha"} \Delta^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}) \xrightarrow{\lambda} B$$

es

$$1 \xrightarrow{"\lambda(\alpha)"} B$$

donde

$$\lambda : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow B_1 = B(1)$$

y $\lambda(\alpha) \in B_1$ equivale a $"\lambda(\alpha)" : 1 \longrightarrow B$.

Por lo tanto, el miembro derecho de (7) es $"\lambda(\alpha)"u$. Por lo tanto, hay que probar que

$$B^*(s)m_H = "\lambda(\alpha)"u \qquad (8)$$

donde $\alpha = r(f)$

$s = \varphi\alpha$.

$$\alpha : [\ ,H] \to \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\dots,h_k)})$$

$$\varphi : \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\dots,h_k)}) \longrightarrow \mathcal{O}_E$$

y es claro que $\varphi\alpha = \varphi(\alpha)_{/H}$; donde ahora, $\alpha \in \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\dots}$ $_{\dots,h_k)}$; $\varphi : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\dots,h_k)} \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ y $\varphi(\alpha) \in \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ es una sección global del haz $\mathcal{O}_E$.

O sea,

$$s = \varphi(\alpha)_{/H}\ .$$

Por lo tanto, pensando $s : (H,\mathcal{O}_H) \longrightarrow (\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}})$, s es la composición

$$(H,\mathcal{O}_H) \xhookrightarrow{\ i\ } (E,\mathcal{O}_E) \xrightarrow{\ \varphi(\alpha)\ } (\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}})$$

o sea, $s = \varphi(\alpha)i$. Por lo tanto, $B^*(s) = B^*(\varphi(\alpha))B^*(i)$.

Pero

$$B^*(i) : Z_B(h_{1|V},\dots,h_{k|V}) \hookrightarrow Z_B(h_1,\dots,h_k) \quad (H = V \cap E)$$

es el morfismo canónico j_V.

Entonces:

$$B^*(s)m_H = B^*(\varphi(\alpha))(j_V m_H).$$

Recordemos que

$$\begin{tikzcd} \psi(H) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "m_H"'] & 1 \arrow[d, "\text{"}\lambda\text{"}"] \\ Z_B(h_{1|V}, \ldots, h_{k|V}) \arrow[r, hook, "j_V"'] & Z_B(h_1, \ldots, h_k) \end{tikzcd}$$

es un pull-back en & .

Por lo tanto, $B^*(s)m_H = (B^*(\varphi(\alpha))\text{"}\lambda\text{"})u$.

Por lo tanto, para probar (8), basta ver que:

$$B^*(\varphi(\alpha))\text{"}\lambda\text{"} = \text{"}\lambda(\alpha)\text{"} \qquad (9)$$

Es:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(r(f)) = \rho(f)$$

donde $\rho(f)$ es la sección global del haz $\mathcal{O}_E$ dada por $f \in \mathcal{O}_n(U)$; (ya que $\varphi r = \rho$).

Pensando $\rho(f) : (E, \mathcal{O}_E) \longrightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$, $\rho(f)$ es la composición

$$(E, \mathcal{O}_E) \xhookrightarrow{i} (U, \mathcal{O}_U) \xrightarrow{(f, f^*)} (\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$$

o sea,

$$\rho(f) = (f,f^*)i \quad ; \text{ por lo tanto:}$$

$$B^*(\varphi(\alpha)) = B^*(\rho(f)) = B^*(f,f^*)B^*(i) = B(f)B^*(i)$$

donde $B^*(i) : Z_B(h_1,\ldots,h_k) \hookrightarrow B(U)$ es la flecha natural de egalizador

$$Bf : B(U) \longrightarrow B.$$

Por otra parte, $\lambda(\alpha) = (\lambda r)(f)$, con $\lambda r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow B_1$. Pero, λr equivale a $"\lambda" \in B_1(U)$, o si se quiere a $"\lambda" : 1 \longrightarrow B(U)$, que a su vez define $"\lambda" : 1 \to Z_B(h_1,\ldots$ $\ldots,h_k)$.

(Recordar que

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\text{"}\lambda\text{"}"'] \arrow[dr, "\text{"}\lambda\text{"}"] & \\ Z_B(h_1,\ldots,h_k) \arrow[rr, hook, "B^*(i)"'] & & B(U) \end{tikzcd}$$

).

Por lo tanto

$$B^*(\varphi(\alpha))"\lambda" = B(f)(B^*(i)"\lambda") = B(f)"\lambda"$$

donde ahora, $"\lambda" : 1 \longrightarrow B(U)$.

Pero $"\lambda" : 1 \longrightarrow B(U)$, provenía de considerar

$$\lambda r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow B_1 \quad \text{, o sea}$$

$$\lambda r \in B_1(U) \text{, o sea} \quad \lambda r : 1 \longrightarrow B(U)$$

o sea, por definición, era $"\lambda" = "\lambda r"$ (recordar def de $"\lambda"$ al principio del teorema).

Se obtiene entonces que

$$B^*(\varphi(\alpha))"\lambda" = B(f)"\lambda r" \quad \text{con} \quad \lambda r : 1 \longrightarrow B(U)$$

además, $\lambda(\alpha) = (\lambda r)(f) = B_1(f)(\lambda r)$ donde $\lambda r : \mathcal{O}_n(U) \rightarrow B_1$ o $\lambda r \in B_1(U)$.

Por lo tanto, para probar (9), basta probar que

$$B(f)"\lambda r" = "B_1(f)(\lambda r)"$$

Sea $\omega = \lambda r$; $\omega \in B_1(U)$, o bien $"\omega" : 1 \longrightarrow B(U)$

$$B(f) : B(U) \longrightarrow B$$

Hay que probar que

$$B(f)"\omega" = "B_1(f)(\omega)"$$

$B(f)"\omega" : 1 \longrightarrow B$ está dada por el elemento: ("Lema de Yoneda")

$$(B(f)"\omega")_1(id_1) = B(f)_1("\omega"_1(id_1)) = B(f)_1(\omega) =$$

$$= B_1(f)(\omega)$$

que es justamente, el elemento que define $"B_1(f)(\omega)"$.
Esto prueba que

$$B(f)"\omega" = "B_1(f)(\omega)"$$

Esto termina de probar que $\pi\psi^*(\varphi) = \lambda$.
Vamos a probar ahora la unicidad de (ψ^*, π).
Sea

$\psi_1^* : Sh(E) \longrightarrow \mathcal{E}$ (imagen inversa de un morfismo geométrico)

$' : \psi_1^* \mathcal{O}_E \longrightarrow B$ (morfismo local de anillos analíticos)

tal que $\pi' \psi_1^*(\varphi) = \lambda$.
Se puede probar sin dificultad el siguiente hecho general:
Sean B_1 y B_2 anillos analíticos en una cierta categoría $\mathcal{E}$ con límites finitos, y sea $\eta : B_1 \longrightarrow B_2$ morfismo de anillos analíticos.

Sea U abierto en $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 0$, y $h_1,\dots,h_k$ holomorfas en U. Sea $E = Z(h_1,\dots,h_k)$.

Entonces, existe una única flecha $\eta_E : Z_{B_1}(h_1,\dots,h_k) \longrightarrow$ $\longrightarrow Z_{B_2}(h_1,\dots,h_k)$ tal que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
Z_{B_1}(h_1,\dots,h_k) \arrow[r, hook, "i_1"'] \arrow[d, dashed, "\eta_E"] & B_1(U) \arrow[d, "\eta_U"] \\
Z_{B_2}(h_1,\dots,h_k) \arrow[r, hook, "i_2"'] & B_2(U)
\end{tikzcd} \qquad \text{conmuta.} \qquad (10)$$

además, si η es local, y H es abierto en E, $H = V \cap E$ con V abierto, $V \subset U$, el cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
Z_{B_1}(h_{1|V},\dots,h_{k|V}) \arrow[r, hook, "j_1"] \arrow[d, "\eta_H"] & Z_{B_1}(h_1,\dots,h_k) \arrow[d, "\eta_E"] \\
Z_{B_2}(h_{1|V},\dots,h_{k|V}) \arrow[r, hook, "j_2"] & Z_{B_2}(h_1,\dots,h_k)
\end{tikzcd} \qquad (11)$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$.

Continuamos ahora con la prueba de la unicidad de (ψ^*,π).

Se tiene $\pi' : \psi_1^* \mathcal{O}_E \longrightarrow B$ morfismo local de anillos analíticos.

Se tiene que, por (11)

$$
\begin{tikzcd}
Z_{\psi_1^*\mathcal{O}_E}(h_{1|V},\dots,h_{k|V}) \arrow[r, hook, "j_1"] \arrow[d, "\pi'_H"] & Z_{\psi_1^*\mathcal{O}_E}(h_1,\dots,h_k) \arrow[d, "\pi'_E"] \\
Z_B(h_{1|V},\dots,h_{k|V}) \arrow[r, hook, "j_2"] & Z_B(h_1,\dots,h_k)
\end{tikzcd}
\qquad (12)
$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$.

Ahora bien, $id_U : U \longrightarrow U$, induce una sección global del haz $\mathcal{O}_E(U)$, a la cual llamamos $id : [\ \ ,E\,] \to \mathcal{O}_E(U)$.

Se tiene

$$
\begin{tikzcd}
 & {[\ \ ,E\,]} \arrow[dl, dashed, "\exists !\, id^*"'] \arrow[d, "id"] & \\
Z_{\mathcal{O}_E}(h_1,\dots,h_k) \arrow[r, hook, "q"'] & \mathcal{O}_E(U) \arrow[r, shift left, "(h_1,\dots,h_k)"] \arrow[r, shift right, "0"'] & \mathcal{O}_E^k
\end{tikzcd}
$$

egalizador.

donde $h_j id : [\ ,E] \longrightarrow \mathcal{O}_E$ es la sección global del haz $\mathcal{O}_E$ dada por h_j. Por lo tanto, $h_j id = 0$.
Se deduce entonces que existe una única $id^* : [\ ,E] \to Z_{\mathcal{O}_E}(h_1, \ldots, h_k)$ tal que $q\, id^* = id$.

Análogamente, si $Z_{\mathcal{O}_E}(h_{1|V}, \ldots, h_{k|V}) \overset{q_1}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_E(V)$, y si $\widetilde{id} : [\ ,H] \to \mathcal{O}_E(V)$ es la sección en H del haz $\mathcal{O}_E(V)$ dado por la $id_V : V \to V$ $(H = V \cap E)$, se deduce que existe una única:

$$\widetilde{id}^* : [\ ,H] \longrightarrow Z_{\mathcal{O}_E}(h_{1|V}, \ldots, h_{k|V}) \quad \text{tal que}$$

$$q_1\, \widetilde{id}^* = \widetilde{id}.$$

Se puede ver que

$$\begin{tikzcd}
{[\ ,H]} \arrow[r, "\text{única}"] \arrow[d, "\widetilde{id}^*"] & {[\ ,E] = 1} \arrow[d, "id^*"] \\
Z_{\mathcal{O}_E}(h_{1|V}, \ldots, h_{k|V}) \arrow[r, hook, "i"'] & Z_{\mathcal{O}_E}(h_1, \ldots, h_k)
\end{tikzcd}$$

es un pull-back en $Sh(E)$.

Aplicando ψ_1^* que preserva límites finitos, y por lo tanto preserva pull-backs y objeto terminal, se obtiene que:

$$\begin{array}{ccc}
\psi_1^*(H) & \xrightarrow{\text{única}} & 1 \text{ (objeto terminal de } \mathcal{E}) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \psi_1^*(\widetilde{id}^*)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \psi_1^*(id^*)} \\
\psi_1^*(Z_{\mathcal{O}_E}(h_{1|V},\ldots,h_{k|V}) & \hookrightarrow & \psi_1^*(Z_{\mathcal{O}_E}(h_1,\ldots,h_k))
\end{array}$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$.

Como $$Z_{\mathcal{O}_E}(h_{1|V},\ldots,h_{k|V}) \hookrightarrow \mathcal{O}_E(V) \overset{(h_{1|V},\ldots,h_{k|V})}{\underset{0}{\rightrightarrows}} \mathcal{O}_E^k$$

es egalizador y ψ_1^* preserva límites finitos, (por lo tanto preserva egalizadores), se obtiene aplicando ψ_1^* , que:

$$\psi_1^*(Z_{\mathcal{O}_E}(h_{1|V},\ldots,h_{k|V}) \hookrightarrow \psi_1^*\mathcal{O}_E(V) \overset{(h_{1|V},\ldots,h_{k|V})}{\underset{0}{\rightrightarrows}} \psi_1^*\mathcal{O}_E^k$$

es un egalizador en $\mathcal{E}$.

Por lo tanto,

$$\psi_1^*(Z_{\mathcal{O}_E}(h_{1|V},\ldots,h_{k|V})) = Z_{\psi_1^*\mathcal{O}_E}(h_{1|V},\ldots,h_{k|V}).$$

Análogamente, $\psi_1^*(Z_{\mathcal{O}_E}(h_1,\dots,h_k)) = Z_{\psi_1^*\mathcal{O}_E}(h_1,\dots,h_k)$.

Se tiene entonces que:

$$\begin{tikzcd}
\psi_1^*(H) \arrow[rr, "\text{única}"] \arrow[d, "\tilde{\psi}_1^*(id^*)"] & & 1 \arrow[d, "\psi_1^*(id^*)"] \\
Z_{\psi_1^*\mathcal{O}_E}(h_{1|V},\dots,h_{k|V}) \arrow[rr, hook, "j_1=\psi_1^*(i)"'] & & Z_{\psi_1^*\mathcal{O}_E}(h_1,\dots,h_k)
\end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$.

Juntándolo con el pull-back (12), se obtiene que:

$$\begin{tikzcd}
\psi_1^*(H) \arrow[rr, "\text{única}"] \arrow[d, "\pi'_H\psi_1^*(\widetilde{id}^*)"] & & 1 \arrow[d, "\pi'_E\psi_1^*(id^*)"] \\
Z_B(h_{1|V},\dots,h_{k|V}) \arrow[rr, hook, "j_2"'] & & Z_B(h_1,\dots,h_k)
\end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$.

Vamos a probar que $\pi'_E\ \psi^*_1(id^*) = "\lambda"$; $"\lambda" : 1 \longrightarrow Z_B(h_1,\ldots$ $\ldots,h_k)$. Recordemos que

$$\begin{tikzcd}
Z_{\psi^*_1\mathcal{O}_E}(h_1,\ldots,h_k) \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "\pi'_E"] & \psi^*_1\mathcal{O}_E(U) \arrow[d, "\pi'_U"] \\
Z_B(h_1,\ldots,h_k) \arrow[r, hook, "i_2"] & B(U)
\end{tikzcd} \qquad \text{conmuta}$$

y que $i_2"\lambda" = "\lambda" : 1 \longrightarrow B(U)$.

Por lo tanto:

$$i_2(\pi''_E\psi^*_1(id^*)) = (i_2\pi'_E)\,\psi^*_1(id^*) = (\pi'_U i_1)\,\psi^*_1(id^*) =$$

$$= (\pi'_U\psi^*_1(q))\,\psi^*_1(id^*) = \pi'_U\psi^*_1(q\ id^*) = \pi'_U\ \psi^*_1(id) \qquad (13)$$

(donde $\psi^*_1(q) = i_1$ por ser $\psi^*_1(Z_{\mathcal{O}_E}(h_1,\ldots,h_k)) =$

$= Z_{\psi^*_1\ \mathcal{O}_E}(h_1,\ldots,h_k))$.

Recordemos que $\rho_U(id_U) \in \Gamma(E,\mathcal{O}_E)(U)$ es la sección global del haz $\mathcal{O}_E(U)$ dada por id_U ; o sea, $\rho_U(id_U) = id$.

$id : [\ \ ,E] \rightarrow \mathcal{O}_E(U)$.

Se tiene $\psi_1^*(\mathrm{id}) : 1 \longrightarrow \psi_1^* \mathcal{O}_E(U)$, que verifica:

$$(\psi_1^*(\mathrm{id}))_1(\mathrm{id}_1) = (\psi_1^*(\rho_U(\mathrm{id}_U)))_1(\mathrm{id}_1) = (\varphi r = \rho) =$$

$$= (\psi_1^*(\varphi_U(r_U(\mathrm{id}_U))))_1(\mathrm{id}_1) = (\psi_1^*\varphi_U)_1(r_U(\mathrm{id}_U)) =$$

$$= (\psi_1^*\varphi)_{1,U}\ (r_U(\mathrm{id}_U)).$$

Aplicando π' a ambos miembros se obtiene:

$$\pi'_{1,U}((\psi_1^*(\mathrm{id}))_1(\mathrm{id}_1)) = \pi'_{1,U}((\psi_1^*\varphi)_{1,U}(r_U(\mathrm{id}_U)))$$

Se sabe que $\pi'\psi_1^*(\varphi) = \lambda$.
Por lo tanto,

$$\pi'_1(\psi_1^*\varphi)_1 = \lambda \qquad \lambda : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow B_1$$

Entonces:

$$\pi'_1(\psi_1^*\varphi)_1 r = \lambda r = \lambda : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow B_1$$

y por lo tanto:

$$\pi'_{1,U}(\psi_1^*\varphi)_{1,U}(r_U(\mathrm{id}_U)) = \lambda_U(\mathrm{id}_U) = \lambda \in B_1(U)$$

Se obtiene entonces que:

$$\pi'_{1,U}(\psi_1^*(id)_1(id_1)) = \lambda \in B_1(U) \quad , \text{ o sea}$$

$$(\pi'_U\psi_1^*(id))_1(id_1) = \lambda \in B_1(U);$$

de donde se deduce obviamente, que

$$\pi'_U\psi_1^*(id) = "\lambda" : 1 \longrightarrow B(U)$$

Por lo tanto, por (13) se tiene que:

$$i_2(\pi'_E\psi_1^*(id^*)) = \pi'_U\psi_1^*(id^*) = "\lambda" : 1 \longrightarrow B(U)$$

o sea:

$$i_2(\pi'_E\psi_1^*(id^*)) = i_2"\lambda"$$

donde ahora $"\lambda" : 1 \longrightarrow Z_B(h_1,\dots,h_k)$.

Como i_2 es un monomorfismo, se deduce que:

$$\pi'_E\psi_1^*(id^*) = "\lambda"$$

Se tiene entonces que:

$$\begin{tikzcd}
\psi_1(H) = \psi_1^*(H) \arrow[r, "\text{única}"] \arrow[d, "\pi'_H \psi_1^*(\widetilde{id}^*)"'] & 1 \arrow[d, "\text{"}\lambda\text{"}"] \\
Z_B(h_{1|V}, \ldots, h_{k|V}) \arrow[r, hook, "j_2"'] & Z_B(h_1, \ldots, h_k)
\end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\mathcal{E}$.

Recordando la definición de $\psi(H)$, se obtiene que $\psi_1(H) = \psi(H)$ en $\mathcal{E}$ (para $H \subset E$). Ahora bien, por preservación de colímites, se deduce inmediatamente que

$$\psi_1^* = \psi^* \quad (\text{y también } \ m_H = \pi'_H \psi_1^*(\widetilde{id}^*))$$

Vamos a probar que $\pi' = \pi$.

Sea W abierto en $\mathbb{C}^m$. Por definición, π_W es la única flecha tal que $\pi_W \, \delta_s = \gamma_s$ para toda sección $s : [\ ,H] \to \mathcal{O}_E(W)$, $\delta_s : \psi(H) \to \psi^* \mathcal{O}_E(W)$ es la flecha natural al colímite, y es $\delta_s = \psi^*(s)$.

Además,

$$\gamma_s = B^*(s) m_H = B^*(s)(\pi'_H \psi_1^*(\widetilde{id}^*)) =$$

$$= (B^*(s)\pi'_H)\,\psi_1^*(\widetilde{id}^*)$$

Es fácil ver que

$$\begin{tikzcd} Z_{\psi_1^* \mathcal{O}_E}(h_{1|V},\ldots,h_{k|V}) \arrow[r, "(\psi_1^*\mathcal{O}_E)^*(s)"'] \arrow[d, "\pi'_H"] & (\psi_1^*\mathcal{O}_E)(W) \arrow[d, "\pi'_W"] \\ Z_B(h_{1|V},\ldots,h_{k|V}) \arrow[r, "B^*s"'] & B(W) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Donde $\psi_1^*\mathcal{O}_E$ preserva cubrimientos ya que $\mathcal{O}_E$ preserva cubrimientos, ψ_1^* también y por lo tanto tiene sentido $(\psi_1^*\mathcal{O}_E)^*(s))$.

Se tiene entonces que:

$$\gamma_s = (\pi'_W(\psi_1^*\mathcal{O}_E)^*(s))\psi_1^*(\widetilde{id}^*) =$$

$$= \pi'_W((\psi_1^*\mathcal{O}_E)^*(s)\psi_1^*(\widetilde{id}^*)) = \text{(usando que } \psi_1 = \psi\text{),,}$$

$$= \pi'_W((\psi^*\mathcal{O}_E)^*(s)\psi^*(\widetilde{id}^*)) = \pi'_W(\psi^*(\mathcal{O}_E^*(s))\psi^*(\widetilde{id}^*)) =$$

$$= \pi'_W\psi^*(\mathcal{O}_E^*(s)\widetilde{id}^*) \qquad (14)$$

Se tiene $s : (H,\mathcal{O}_H) \longrightarrow (W,\mathcal{O}_W)$, y como $\mathcal{O}_E$ preserva cubrimientos, se tiene

$$\mathcal{O}_E^*(s) : Z_{\mathcal{O}_E}(h_{1|V},\ldots,h_{k|V}) \longrightarrow \mathcal{O}_E(W)$$

además

$$\widetilde{id}^* : [\ ,H] \longrightarrow Z_{\mathcal{O}_E}(h_{1|V},\ldots,h_{k|V})$$

Supongamos que la sección s viene dada en V_α por $f_\alpha : V_\alpha \longrightarrow W$, con $V \supset \bigcup_\alpha V_\alpha \supset H$ $(H = V \cap E)$.
Se tiene que

$$Z_{\mathcal{O}_E}(h_{1|V_\alpha},\ldots,h_{k|V_\alpha}) \xhookrightarrow{a_\alpha} Z_{\mathcal{O}_E}(h_{1|V},\ldots,h_{k|V})$$

es epimorfa efectiva en $Sh(E)$; además, la familia:

$$Z_{\mathcal{O}_E}(h_{1|V},\ldots,h_{k|V}) \xhookrightarrow{b_\alpha} \mathcal{O}_E(V_\alpha) \xhookrightarrow{f_\alpha} \mathcal{O}_E(W)$$

es compatible, y entonces existe una única $\tau : Z_{\mathcal{O}_E}(h_{1|V},\ldots$ $\ldots,h_{k|V}) \longrightarrow \mathcal{O}_E(W)$ tal que $\tau a_\alpha = f_\alpha b_\alpha \ \forall \alpha$. Por definición, es $\mathcal{O}_E^*(s) = \tau$.
Sea $H_\alpha = H \cap V_\alpha$.
Es claro que

$$\tilde{id}^*/_{[\ ,H]} = a_\alpha \tilde{id}^*_\alpha ,$$

o sea que,

$$\begin{tikzcd}
{[\ ,H_\alpha]} \arrow[r] \arrow[d, "id^*"] & {[\ ,H]} \arrow[d, "\tilde{id}^*"] \\
Z_{\mathcal{O}_E}(h_{1|V_\alpha},\dots,h_{k|V_\alpha}) \arrow[r, hook] & Z_{\mathcal{O}_E}(h_{1|V},\dots,h_{k|V})
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Se tiene:

$$\mathcal{O}^*_S(s)\ \tilde{id}^*/_{[\ ,H_\alpha]} = \mathcal{O}^*_E(s)(a_\alpha \tilde{id}^*_\alpha) =$$

$$= (\mathcal{O}^*_E(s)a_\alpha)\tilde{id}^*_\alpha = (\tau a_\alpha)\tilde{id}^*_\alpha =$$

$$= (f_\alpha b_\alpha)\tilde{id}^*_\alpha = f_\alpha(b_\alpha \tilde{id}^*_\alpha) = f_\alpha \tilde{id}_\alpha$$

donde $\tilde{id}_\alpha : [\ ,H_\alpha] \to \mathcal{O}_E(V_\alpha)$.

Por lo tanto, $f_\alpha \tilde{id}_\alpha : [\ ,H_\alpha] \to \mathcal{O}_E(W)$ es la sección de $\mathcal{O}_E(W)$ en H_α dada por f_α. O sea: $f_\alpha \tilde{id}_\alpha = S/_{[\ ,H_\alpha]}$: $[\ ,H_\alpha] \to \mathcal{O}_E(W)$.

Esto prueba que $\mathcal{O}_E^*(s)\widetilde{id}^*/_{[\ ,H_\alpha]} = s/_{[\ ,H_\alpha]}$ (para todo α) y como $H = \cup_\alpha H_\alpha$, se deduce que

$$\mathcal{O}_E^*(s)\widetilde{id}^* = s$$

Por lo tanto, por (14) se tiene:

$$\gamma_s = \pi'_W \psi^*(s) = \pi'_W \delta_s \quad \text{para toda sección } s.$$

Por lo tanto, por definición de π_W, se obtiene que $\pi'_W = \pi_W$ (para W abierto en $\mathbb{C}^m$, $m \geq 0$).

Esto termina de probar que $\pi' = \pi$.

Queda probado el teorema 5.2.

Vamos a calcular ahora el espectro de un retracto de un cociente.

Sea A un retracto de un cociente. Se tiene una retracción $\omega : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow A$; y sea $v : A \longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}$ tal que $\omega v = id_A$. Recordemos (ver 4.5) que $(X_A, \mathcal{O}_{X_A})$ es el egalizador en $\mathcal{L}$ de $(E,\mathcal{O}_E) \underset{id}{\overset{i(\overline{v\omega})}{\rightrightarrows}} (E,\mathcal{O}_E)$.

5.3. <u>Proposición</u>.

El espectro de A es el topos de Grothendieck $Sh(X_A)$ junto con el anillo analítico $\mathcal{O}_{X_A}$ en $Sh(X_A)$.

Demostración

Sean:

$$i(\bar{\omega}) = (i,\phi) : (X_A, \mathcal{O}_{X_A}) \hookrightarrow (E, \mathcal{O}_E)$$

$$i(\bar{v}) = (g,\eta) \quad (E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow (X_A, \mathcal{O}_{X_A})$$

Sea $\varphi_o : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ el morfismo canónico, $(\varphi_o r(t)$ es la sección global dada por $t)$, y sea

$\tau : \Gamma(E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow \Gamma(X_A, \mathcal{O}_{X_A})$ dada por "proyectar el cociente"

vale decir, si $s \in \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ está dada por f alrededor de un punto $i(x)$, con $x \in X_A$, entonces $\tau(s)$ está dada por f alrededor de x. O sea $\tau(s)(x) = \overline{f_x}$ si $s(i(x)) = = \overline{f_{i(x)}}$ (donde $\bar{f}_x$ indica la clase de f_x según el ideal que define $\mathcal{O}_{X_A,x}$ y $\bar{f}_{i(x)}$ indica la clase de $f_{(i(x))}$ según $(h_{1,x},\ldots,h_{k,x})$).

Observemos que $\tau\varphi_o : \mathcal{O}_n(U)/_{\overline{(h)}} \longrightarrow \Gamma(X_A,\mathcal{O}_{X_A})$ es tal que $\tau\varphi_o r(t)$ es la sección global de $\mathcal{O}_{X_A}$ dada por t.

Por lo tanto, $(\tau\varphi_o r)_U(id_U) \in \Gamma(X_A,\mathcal{O}_{X_A})(U)$ es la sección global dada por id_U.

Sea $\varphi = \tau\varphi_o v : A \to \Gamma(X_A,\mathcal{O}_{X_A})$.

φ equivale, por supuesto a un morfismo $\Delta^*A \to \mathcal{O}_{X_A}$, al cual llamaremos también φ, donde Δ^*A es el haz constante. Por ser $(\tau\varphi_o r)_U(id_U)$ la sección global de $\mathcal{O}_{X_A}$ dada por id_U,

$$((\tau\varphi_o r)_U(id_U) \in \Gamma(X_A,\mathcal{O}_{X_A})(U)),$$

equivale a la inclusión $(X_A,\mathcal{O}_{X_A}) \hookrightarrow (U,\mathcal{O}_U)$, se obtiene que $\widehat{\tau\varphi_o}$ es la inclusión $(X_A,\mathcal{O}_{X_A}) \hookrightarrow (E,\mathcal{O}_E)$ o sea: $\widehat{\tau\varphi_o} = i(\bar{\omega})$.

Por lo tanto, por 4.2

$$\widehat{\tau\varphi_o v\omega} = i(\overline{v\omega})\widehat{\tau\varphi_o} = i(\overline{v\omega})\ i(\bar{\omega}) =$$

$$= i(\bar{\omega}\bar{v})i(\bar{\omega}) = i(\bar{\omega})(i(\bar{v})i(\bar{\omega})) = i(\bar{\omega})i(\overline{v\omega}) =$$

$$= i(\bar{\omega})i(\overline{\omega v}) = i(\bar{\omega})i(\overline{id}_A) = i(\bar{\omega})i(id_{\bar{A}}) =$$

$$= i(\bar{\omega})id_{(X_A,\mathcal{O}_{X_A})} = i(\bar{\omega}) = \widehat{\tau\varphi_o}$$

Por lo tanto, $\tau\varphi_o v\omega = \tau\varphi_o$, o sea $\varphi\omega = \tau\varphi_o$.

Sea B un anillo analítico local en un topos de Grothendieck $\mathcal{E}$, junto con un morfismo $\lambda : \Delta^*A \to B$.

Hay que probar que existe un único par (q^*,π), donde $q^* : Sh(X_A) \to \mathcal{E}$ es la imagen inversa de un morfismo geométrico, $\pi : q^*\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow B$ es local, tales que $\pi q^*(\varphi) = \lambda$.

λ equivale a un morfismo $\lambda : A \longrightarrow \Gamma B$.

Sea $\lambda_o = \lambda\omega : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\dots,h_k)} \longrightarrow \Gamma B$.

Por ser $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\dots,h_k)}) = \mathcal{O}_E$ (por 5.2), junto con

$\varphi_o : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\dots,h_k)} \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ existe un único par

(p^*,θ); $p^* : Sh(E) \longrightarrow \mathcal{E}$ imagen inversa de un morfismo geométrico, $\theta : p^*\mathcal{O}_E \longrightarrow B$ local, tal que $\theta p^*(\varphi_o) = \lambda_o$.

Se tiene $i(\bar{v}) = (g,\eta)$ $(E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow (X_A,\mathcal{O}_{X_A})$, donde

$g : E \longrightarrow X_A$ es continua. Por lo tanto, se tiene

$g^* : Sh(X_A) \longrightarrow Sh(E)$; además, $\eta : g^*\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow \mathcal{O}_E$ (o sea, para cada $p \in E$, $\eta_p : \mathcal{O}_{X_A,g(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{E,p}$).

Además, η preserva el "valor" de las secciones (ver [4]) lo cual dice que $\eta_p : \mathcal{O}_{X_A,g(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{E,p}$ es local, para cada $p \in E$.

Es fácil ver entonces que, $\eta : g^*\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow \mathcal{O}_E$ es local, y como p^* preserva límites finitos, $p^*\eta : p^*(g^*\mathcal{O}_{X_A}) \longrightarrow p^*\mathcal{O}_E$ es local.

Se tiene entonces que $\theta p^*\eta = p^*(g^*\mathcal{O}_{X_A}) \longrightarrow B$ es local.

Sean $q^* = p^*g^* : Sh(X_A) \longrightarrow \mathcal{E}$ (imagen inversa de un morfismo geométrico), $\pi = \theta p^*(\eta) : q^*\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow B$, morfismo local de anillos analíticos.

Vamos a probar que $\pi\, q^*(\varphi) = \lambda$.

En efecto:

$$\pi q^*(\varphi) = (\theta p^*(\eta))p^*(g^*(\varphi)) = \theta\ p^*(\eta g^*(\varphi)) \qquad (1)$$

vamos a calcular $\eta g^*(\varphi)$ aquí, $\varphi : \Delta^*A \longrightarrow \mathcal{O}_{X_A}$, por lo tanto, $g^*\varphi : \Delta^*A \longrightarrow g^*\mathcal{O}_{X_A}$ $(g^*\Delta^* = \Delta^*)$. Entonces $\eta g^*\varphi : \Delta^*A \longrightarrow \mathcal{O}_E$ equivale a un morfismo:

$$\xi : A \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$$

Dado $a \in A$, es $\varphi(a) \in \Gamma(X_A,\mathcal{O}_{X_A})$.

Pensando $g^*\varphi : A \longrightarrow \Gamma(E,g^*\mathcal{O}_{X_A})$ y es, para $p \in E$,

$$((g^*\varphi)(a))(p) = \varphi(a)(g(p)) \qquad (a \in A)$$

Además, se puede pensar

$$\eta : \Gamma(E,g^*\mathcal{O}_{X_A}) \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E) \qquad \text{dada por:}$$

$$(\eta(s))(p) = \eta_p(s(p)) \qquad (p \in E,\ s \in \Gamma(E,g^*\mathcal{O}_{X_A})).$$

Esta composición: $\eta g^{*}\varphi$ es ξ .

Por lo tanto, es

$$(\xi(a))(p) = \eta_p((g^{*}\varphi(a))(p)) = \eta_p(\varphi(a)(g(p)))$$

Vamos a probar que $\xi = \varphi_o v : A \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$.

Como $\omega r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow A$ es un epimorfismo, basta ver que

$$\xi\omega r = \varphi_o v\omega r : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$$

Pero $(\xi\omega r(t))(p) = \eta_p((\varphi\omega r(t))(g(p)))$. Como $\varphi\omega = \tau\varphi_o$, es $\varphi\omega r(t) = \tau\varphi_o r(t)$ = sección global de $(X_A,\mathcal{O}_{X_A})$ dada por t.

Por lo tanto,

$$(\xi\omega\ r(t))(p) = \eta_p(\bar{t}_{g(p)})$$

Luego, hay que probar que $(\varphi_o v\omega r)(t)(p) = \eta_p(\bar{t}_{g(p)})$ para $t \in \mathcal{O}_n(U)$, $p \in E$.

En efecto, observemos que $\widehat{\varphi_o v} = i(\bar{v})\hat{\varphi}_o$ (por 4.6).

Pero $\hat{\varphi}_o : (E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow (E,\mathcal{O}_E)$ está dada por $(\varphi_o r)_U(id_U)$, que es la sección global dada por id_U. Por lo tanto, $\hat{\varphi}_o = id_{(E,\mathcal{O}_E)}$ y entonces $\widehat{\varphi_o v} = i(\bar{v}) = (g,\eta)$; por lo tanto,

$(\varphi_o v \omega r)_U(id_U) \in \Gamma(E,\mathcal{O}_E)(U)$, equivale a la flecha:

$$(E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow (U,\mathcal{O}_U), \quad \text{que es la composición:}$$

$$(E,\mathcal{O}_E) \xrightarrow{(g,\eta)} (X_A,\mathcal{O}_{X_A}) \hookrightarrow (U,\mathcal{O}_U)$$

Por lo tanto, para $p \in E$, si $\tilde{g}$ es una extensión local de g alrededor de p tal que $\eta_{p'}(\bar{t}_{g(p')}) = \overline{(tg)}_{p'}$ (para p' en E alrededor de p), es:

$$((\varphi_o v \omega r)_U(id_U))(p') = \overline{\tilde{g}_{p'}} \ .$$

Entonces, por el lema de Yoneda, es:

$$(\varphi_o v \omega r)(t) = (\Gamma(E,\mathcal{O}_E)(t))((\varphi_o v \omega r)_U(id_U))$$

y por lo tanto:

$$(\varphi_o v \omega r)(t)(p) = \overline{(t\tilde{g})}_p = \eta_p(\bar{t}_{g(p)})$$

queda probado entonces que $\xi = \varphi_o v$

Por lo tanto, en (1) es:

$$\pi q^*(\varphi) = \theta p^*(\eta g^*(\varphi)) = \theta p^*(\xi) = \theta p^*(\varphi_o v) =$$

$$= \theta p^*(\varphi_o) p^*(v) = \lambda_o p^*(v) = \lambda\omega\, p^*(v)$$

aquí, $p^* : Sh(E) \longrightarrow \mathcal{E}$ y es

$$v : \Delta^*A \longrightarrow \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)})$$

Como $p^*\Delta^* = \Delta^*$, es $p^*(v) : \Delta^*A \longrightarrow \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)})$
donde ahora Δ^* es el haz constante (en $\mathcal{E}$).

Por lo tanto, $p^*v = p^*\Delta^*v = \Delta^*v$, equivale a $v : A \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}$.

Por lo tanto:

$$\pi q^*(\varphi) = \lambda\omega\, p^*(v), \text{ equivale a } \lambda\omega v = \lambda\ id_A = \lambda .$$

o sea, $\pi q^*(\varphi) = \lambda$.

Vamos ahora a probar la unicidad.

Sean

$q_1^* : Sh(X_A) \longrightarrow \mathcal{E}$ imagen inversa de un morfismo geométrico

$\pi_1 : q_1^*\mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow B$ morfismo local de anillos analíticos.

tales que $\pi_1 q^*(\varphi) = \lambda$.

Consideremos $i : X_A \hookrightarrow E$. Se tiene $i^* : Sh(E) \longrightarrow Sh(X_A)$.

Sean:

$$p_1^* = q_1^* i^* : Sh(E) \longrightarrow \mathcal{E} \quad \text{imagen inversa de un morfismo geométrico.}$$

Recordemos que es: $i(\bar{\omega}) = (i,\phi) \quad (X_A, \mathcal{O}_{X_A}) \longrightarrow (E, \mathcal{O}_E)$; y sea: $\theta_1 : \pi_1 q_1^* \phi$. Como $\phi : i^*\mathcal{O}_E \longrightarrow \mathcal{O}_{X_A}$ es local (al igual que η), y q_1^* preserva límites finitos, $q_1^* \phi$: $q_1^* i^* \mathcal{O}_E \longrightarrow q_1^* \mathcal{O}_{X_A}$ es local y es $q_1^* i^* \mathcal{O}_E = p_1^* \mathcal{O}_E$. Se tiene entonces que:

$$\theta_1 : p_1^* \mathcal{O}_E \to B \quad \text{es local.}$$

Vamos a probar que $\theta_1\, p_1^*(\varphi_o) = \lambda_o$.

Es:

$$\theta_1 p_1^*(\varphi_o) = (\pi_1 q_1^*(\phi))\; q_1^*(i^*(\varphi_o)) = \pi_1 q_1^*(\phi\, i^*(\varphi_o)) \qquad (2)$$

Se tiene $\phi i^*(\varphi_o) \quad \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_A}$, que equivale a un morfismo $\gamma : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow \Gamma(X_A, \mathcal{O}_{X_A})$.

Para $b \in \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}$, es $\varphi_o(b) \in \Gamma(E, \mathcal{O}_E)$. Por lo tanto $\varphi_o(b)$ define una sección de s en $i^*\mathcal{O}_E$, dada por: $s(x) = (\varphi_o(b))(i(x))$ para $x \in X_A$; finalmente, pensando $\phi : \Gamma(X_A, i^*\mathcal{O}_E) \longrightarrow \Gamma(X_A, \mathcal{O}_{X_A})$, dada por:

$$(\phi(s))(x) = \phi_x(s(x)) \qquad (\phi_x : (i^*\mathcal{O}_E)_x = \mathcal{O}_{E,i(x)} \to \mathcal{O}_{X_A,x})$$

se obtiene que esta composición es γ . Vale decir:

$$(\gamma(b))(x) = \phi_x(s(x)) = \phi_x(\varphi_o(b)(i(x))).$$

Pero claramente, $\tau : \Gamma(E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow \Gamma(X_A, \mathcal{O}_{X_A})$ verifica que

$$\tau(\sigma)(x) = \phi_x(\sigma(i(x)) \quad \text{para } \sigma \in \Gamma(E,\mathcal{O}_E),\ x \in X_A.$$

Por lo tanto, $\gamma(b)(x) = \tau\ (\varphi_o(b))(x)$ para $x \in X_A$, $b \in \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}$.

Esto prueba que $\gamma = \tau\varphi_o$ Por lo tanto: $\phi\ i^*(\varphi_o)$ equivale al morfismo $\tau\varphi_o : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow \Gamma(X_A, \mathcal{O}_{X_A})$.

Por lo tanto, en (2), obtenemos:

$$\theta_1 p_1^*(\varphi_o) = \pi_1 q_1^*(\tau\varphi_o) = \pi_1 q_1^*(\varphi\omega) =$$

$$= \pi_1 q^*(\varphi) q_1^*(\omega) = \lambda\ q_1^*(\omega)$$

Pero $\omega : \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \longrightarrow A$ equivale a

$$\omega : \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}) \longrightarrow \Delta^*A$$

y es:

$$q_1^*\,\omega : \Delta^*(\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}) \longrightarrow \Delta^*A$$

$$q_1^*\Delta^* = \Delta^* \quad (\text{en } Sh(\mathcal{E}))$$

y $\quad q_1^*\omega = q_1^*\Delta^*\omega = \Delta^*\omega = \omega$ o sea, $q_1^*\omega$ equivale a ω.

Por lo tanto, $\theta_1 p_1^*(\varphi_o) = \lambda\omega = \lambda_o$.

Luego, por la unicidad de (p^*,θ), se obtiene que $p_1^* = p^*$ y $\theta_1 = \theta$.

Por lo tanto:

$$p^* = p_1^* = q_1^* i^* \qquad \theta = \theta_1 = \pi_1 q_1^*(\varphi)$$

Por lo tanto:

$$q^* = p^*g^* = q_1^*i^*g^* = q_1^*(gi)^*$$

Pero $\quad i(\bar{v})i(\bar{\omega}) = i(\bar{v}\bar{\omega}) = i(\widehat{\omega v}) = id_{(X_A,\mathcal{O}_{X_A})}$, o sea:

$$(g,\eta)\circ(i,\phi) = id_{(X_A, \mathcal{O}_{X_A})}$$

Por lo tanto, $gi = id_{X_A}$ y entonces $(gi)^* = id_{Sh(X_A)}$. Se deduce entonces que $q^* = q_1^*$.

Además, es $\theta = \pi_1 q_1^*(\varphi) = \pi_1 q^*(\varphi)$. Por lo tanto:

$$\pi_1 q^*(\phi) p^*(\eta) = \theta\ p^*(\eta) = \pi \qquad (3)$$

Se tiene:

$$p^* = p_1^* = q_1^* i^* = q^* i^* = (p^* g^*) i^* = p^* g^* i^* = q^* i^*$$

Por lo tanto:

$$q^*\phi p^*\eta = q^*(\phi) q^*(i^*\eta) = q^*(\phi i^*(\eta)) \qquad (4)$$

Pero: $\phi i^*(\eta) : i^*(\mathcal{O}_{X_A}) = \mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_A}$ está dada por:

Para $x \in X_A$, es $(i^*\eta)_x = \eta_{i(x)}$; entonces $(\phi i^*(\eta))_x$ es la composición

$$\mathcal{O}_{X_A,x} \xrightarrow{\eta_{i(x)}} \mathcal{O}_{E,i(x)} \xrightarrow{\phi_x} \mathcal{O}_{X_A,x}$$

Como $(g,\eta)(i\phi) = \mathrm{id}_{(X_A,\mathcal{O}_{X_A})}$, se obtiene que

$$\phi_x \eta_{i(x)} = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{X_A,x}} \quad \text{para} \quad x \in X_A .$$

Entonces, $(\phi i^*(\eta))_x = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{X_A,x}}$ para $x \in X_A$. Por lo tanto: $\phi i^*(\eta) = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{X_A}}$ Obtenemos entonces, por (4), que:

$$q^*(\phi)p^*(\eta) = q^*(\phi i^*(\eta)) = q^*(\mathrm{id}_{\mathcal{O}_{X_A}}) = \mathrm{id}_{q^*(\mathcal{O}_{X_A})}$$

Por lo tanto, por (3), obtenemos que:

$$\pi = \pi_1 q^*(\phi)p^*(\eta) = \pi_1 .$$

Esto termina la prueba de la proposición 5.3.

5.4. Observación.

Consideremos en $\mathcal{A}^{op}_{pf}$, la categoría dual de anillos analíticos de presentación finita, la siguiente topología de Grothendieck:

$$\bar{A}_\alpha \xrightarrow[(\alpha \in I)]{} \bar{A} \in \mathrm{cov}(\bar{A})$$

si y sólo si existe un cubrimiento abierto U_α $(\alpha \in I)$ de un abierto U y existen push-outs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_n(U_\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A_\alpha \end{array} \qquad \text{para cada } \alpha \in I$$

Se desconoce si esta topología es subcanónica, vale decir, si las familias $\bar{A}_\alpha \to \bar{A}$ son epimorfas efectivas. Se puede ver que esto equivale a que si $A \in \mathcal{A}_{pf}$, entonces

$$A \cong \Gamma(X_A, \mathcal{O}_{X_A})$$

Esto diría, por ejemplo, que $\mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} \cong \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$, lo cual, en general se desconoce. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado, obtenido en colaboración con A. Dickenstein y C. Sessa.

Cuando un objeto $A \in \mathcal{A}_{pf}$ tiene una presentación, vale decir $A = \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)}$, tal que $E = Z(h_1,\ldots,h_k)$ tiene una base de entornos Stein (ver [5]), entonces se puede probar que $A = \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$. En primer lugar, es facil ver que si se toma un abierto U_o Stein tal que

$U \supset U_o \supset E$, entonces $A = \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1|_{U_o},\dots,h_k|_{U_o})}$; vale decir, se puede suponer directamente que U es Stein.

Sea $\varphi : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow B$ tal que $\varphi(h_i) = 0$, $1 \leq i \leq k$. Sea $\rho : \mathcal{O}_n(U) \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ el morfismo canónico; vamos a probar que existe una única $\tilde{\varphi} : \Gamma(E,\mathcal{O}_E) \longrightarrow B$ tal que $\tilde{\varphi}\rho = \varphi$.

Esto dirá que $\Gamma(E,\mathcal{O}_E) = \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\dots,h_k)}$ Para $s \in \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$, existe $f \in \mathcal{O}_n(U)$ tal que $\rho(f) = s$, (por ser U Stein) y se define $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(f)$.

Esto está bien definido, ya que si $s = \rho(g)$ con $g \in \mathcal{O}_n(U)$, entonces $\rho(f-g) = 0$, vale decir $f_p - g_p \in (h_{1p},\dots,h_{kp})$ para todo $p \in E$.

Por lo tanto, por ser U Stein, se deduce que

$$f-g \in (h_1,\dots,h_k)$$

y como $\varphi(h_i) = 0$, se obtiene que

$$\varphi(f-g) = 0, \quad \text{o sea} \quad \varphi(f) = \varphi(g).$$

Además se puede probar que si $s \in \Gamma(E,\mathcal{O}_E)(W)$, con W abierto en $\mathbb{C}$, entonces $\tilde{\varphi}(s) \in B(W)$.

En efecto, $s = \rho(f)$ para cierta $f \in \mathcal{O}_n(U)$, y como

$s \in \Gamma(E,\mathcal{O}_E)(W)$, se obtiene que $f(E) \subset W$. Luego, existe un abierto V tal que $E \subset V \subset U$, tal que $f(V) \subset W$. (por ser f continua).

Por el lema de Yoneda, existe $b \in B(U)$ tal que $\varphi(t) = B(t)(b)$ para $t \in \mathcal{O}_n(U)$. Como $\varphi(h_i) = 0$, es $B(h_i)(b) = 0$ $(1 \leq i \leq k)$, vale decir $b \in Z_B(h_1,\ldots,h_k)$. Pero por (2.10), $Z_B(h_1,\ldots,h_k) \subset B(V)$. Por lo tanto, $b \in B(V)$, y como $f(V) \subset W$, se puede pensar $f_{|V} : V \to W$ y es $\varphi(f) = B(f)(b) = B(f_{|V})(b)$. Como $B(f_{|V}) : B(V) \longrightarrow B(W)$, se obtiene que $\varphi(f) \in B(W)$, o sea $\tilde{\varphi}(s) \in B(W)$.

Finalmente, se define $\tilde{\varphi}_W$, para $W \subset \mathbb{C}^n$ del mismo modo; queda por probar que $\tilde{\varphi}$ es un morfismo de anillos analíticos:

Sea $g : W \to \mathbb{C}$ holomorfa; supongamos que $W \subset \mathbb{C}$ es abierto, hay que probar que

$$\begin{tikzcd} \Gamma(E,\mathcal{O}_E)(W) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\tilde{\varphi}_W"] & \Gamma(E,\mathcal{O}_E) \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\ B(W) \arrow[r, "B(g)"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $s \in \Gamma(E,\mathcal{O}_E)(W)$; sera $s = \rho(f)$ con $f \in \mathcal{O}_n(U)$, y de nuevo, $f(E) \subset W$, y por lo tanto existe V abierto tal que $E \subset V \subset U$, tal que $f(V) \subset W$.

Es $g^*(s) = \rho'(g \circ f_{|V})$ donde $\rho' : \mathcal{O}_n(V) \to \Gamma(E, \mathcal{O}_E)$ es el morfismo canónico. Por otra parte, existe $t \in \mathcal{O}_n(U)$ tal que $g^*(s) = \rho(t)$ y por definición es $\varphi(g^*(s)) = \varphi(t) =$ $= B(t)(b)$, además, $\tilde{\varphi}_W(s) = \varphi(f) = B(f)(b)$, y por lo tanto,

$$B(g)(\tilde{\varphi}(s)) = B(g)(B(f)(b)) = B(g)(B(f_{|V})(b)) =$$

$$= B(g \circ f_{|V})(b).$$

Por lo tanto, hay que probar que $B(t)(b) = B(g \circ f_{|V})(b)$. Como por hipótesis, E tiene una base de entornos Stein, existe un abierto V_o Stein tal que $E \subset V_o \subset V$, y de nuevo, por (2.10), $b \in B(V_o)$. Por lo tanto, es:

$$B(t)(b) = B(t_{|V_o})(b);$$

$$B(g \circ f_{|V})(b) = B(g \circ f_{|V_o})(b)$$

Además,

$$g^*(s) = \rho'(g \circ f_{|V}) = \rho''(g \circ f_{|V_o})$$

$$g^*(s) = \rho(t) = \rho''(t_{|V_o})$$

donde $\rho'' : \mathcal{O}_n(V_o) \rightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E)$ es el morfismo canónico.
Por lo tanto, $\rho''(g_\circ f_{|V_o}) = \rho''(t_{|V_o})$, lo cual dice que para todo $p \in E$, $(g_\circ f_{|V_o})_p - (t_{|V_o})_p \in (h_{1p},\ldots,h_{kp})$, como V_o es Stein, se deduce que $g_\circ f_{|V_o} - t_{|V_o} \in (h_{1|V_o},\ldots,h_{k|V_o})$, o sea, $g_\circ f_{|V_o} - t_{|V_o} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, h_{i|V_o}$ con $\alpha_i \in \mathcal{O}_n(V_o)$.
Evaluando en b y teniendo en cuenta que $B(h_{i|V_o})(b) = B(h_i)(b) = 0$, se obtiene que $B(g_\circ f_{|V_o})(b) = B(t_{|V_o})(b)$.
Esto prueba que $\tilde{\varphi}$ es un morfismo de anillos analíticos. Es claro que $\tilde{\varphi}\rho = \varphi$ y que $\tilde{\varphi}$ es única con esta propiedad, pues ρ es suryectiva.
Entonces, se probó que

$$\Gamma(E,\mathcal{O}_E) = \mathcal{O}_n(U)/_{(h_1,\ldots,h_k)} = A$$

Pero sabemos por (5.2), que Spec $A = \mathcal{O}_E$; vale decir, en este caso, se obtiene:

$$\Gamma(\text{Sepc } A) = A.$$

Jorge Zilber   Eduardo J. Dubuc

Referencias

[1] ARTIN, M; GROTHENDIECK, A; VERDIER, J.L. (S.G.A.4) , "Théorie des topos et cohomologie étale des schemes", Springer LNM 269(1972).

[2] BUNGE, M and DUBUC, E. "Archimedian local C^∞-rings and models of synthetic differential geometry", Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle Categóriques, Vol. XXVII - 3 - 3° trimestre (1986).

[3] DUBUC, E. "Sur les models de la geometrie differentiel le synthetique", Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle, Vol. XX - 3 - (1979).

[4] DUBUC, E. and TAUBIN, G. "Analytic rings", Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle, Vol. XXIV - 3 - (1983).

[5] GRAUERT, H. and REMMERT, R. "Theory of Stein spaces", Berlin, Springer (Grundlehren Mathematischen Wissens-Chaften, V. 236)(1979).

[6] Mac Lane, S. "Categories for the working mathematics", Springer-Verlag,

[7] MALGRANGE, B. "Analytic Spaces", Monographie 17 de L'enseignement Math., Geneve, (1968).