

**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

# **Estudio de la transmisión de señales en sistemas estocásticos**

**María Florencia Carusela**

Director de Tesis: Dr. Lilia Romanelli

Lugar de Trabajo: Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General  
Sarmiento

Trabajo de Tesis para optar por el título de  
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área de Física

Junio 2006

*A la*  $\tilde{\theta V}$

# Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar la transmisión y almacenamiento de una señal periódica en arreglos de resonadores, explorando los efectos que tiene la propagación de la señal en un sistema estocástico. Se propone analizar y estudiar la respuesta completa (amplitud, fase, tiempos de residencia, etc) de distintos arreglos de osciladores bistables acoplados, cuando el sistema se halla bajo el régimen de *Resonancia Estocástica*.

*El estudio se realiza tanto numérica como experimentalmente, para los diferentes parámetros relevantes del sistema como la intensidad y retraso temporal en los acoplamientos entre unidades y la intensidad del ruido.*

*Palabras claves: Sistemas estocásticos, Resonancia Estocástica, Ruido.*

# Study of signal propagation in stochastic systems

## Abstract

The main goal of this work is to study transmission and storage of a periodic signal in arrays of oscillators, exploring the effects of this propagation in an stochastic system. We propose to study and analyze the whole response (amplitude, phase, residence time, etc) of different arrays of coupled bistable oscillators, when they are operating quite near the *Stochastic Resonance* regime.

Numerical and experimental studies are made for relevant parameters of the system as: coupling intensity, noise intensity and time delay within the couplings.

*Key Words: Stochastic Systems, Stochastic Resonance, Noise.*

# Indice

<b>1. Resonancia Estocástica</b> .....	6
1.1 Resonancia Estocástica en pocas palabras.....	7
1.2 Resonancia Estocástica y sus precursores.....	10
1.3 Origen de la Resonancia Estocástica.....	13
1.4 Caracterización de la Resonancia Estocástica.....	18
1.5 Sistemas Biestables continuos.....	31
<b>2. Modelo de Transmisión Neuronal</b> .....	
2.1 Introducción.....	41
2.2 Cadena Lineal de Osciladores.....	44
2.3 Conclusiones .....	53
<b>3. Modelo de almacenamiento de información</b> .....	
3.1 Introducción.....	54
3.2 Anillo de Osciladores.....	57
3.3 Conclusiones.....	67
<b>4. Observación experimental de la transmisión en una cadena</b> .....	68
4.1 Mediciones.....	72
4.2 Descripción del modelo teórico.....	79
4.3 Cadena de 4 ST.....	81
4.4 Conclusiones.....	84
<b>5. Estudio del comportamiento de la fase</b> .....	
5.1 Definición de fase.....	85
5.2 Caracterización de la diferencia de fase.....	89
5.3 Procesos estocásticos de punto.....	93
5.4 Diferencia de fase entre elementos.....	96
5.5 Difusión de fase efectiva y sincronización de fase.....	104
5.6 Conclusiones.....	110
<b>6. Discusión y Conclusiones</b> .....	113
<b>7. Referencias</b> .....	116
<b>8. Apéndice A</b> .....	122

# Capítulo 1

## Resonancia Estocástica

El ruido está generalmente asociado con una molestia presente, una corrupción que sufre el sistema, con algo que es irregular y no puede ser perfectamente controlado. Más aún, el ruido es virtualmente inevitable ya que es imposible aislar un sistema de su entorno: todos los sistemas están interactuando con reservorios térmicos los cuales son una fuente de la dinámica de sistemas con ruido. Aún a temperatura cero, cuando las fluctuaciones térmicas (clásicas) desaparecen, hay una interacción con reservorios de temperatura cero, que es una fuente de ruido cuántico. El acoplamiento de las no linealidades con el ruido origina un nuevo grupo de fenómenos, denominados *fenómenos inducidos por ruido*, donde el ruido desempeña un papel constructivo. Esta fenomenología ha sido estudiada tanto desde el punto de vista experimental como teórico, en sistemas extendidos o que presentan dependencia temporal.

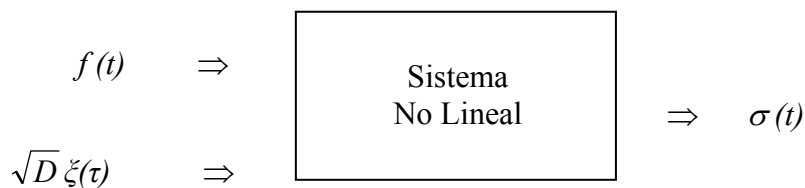
Entre estos fenómenos podemos mencionar:

1. En sistemas extendidos:
  - a. Dinámica de frentes, por ejemplo la propagación de frentes químicos en medios turbulentos donde el campo de velocidades actúa como una fuente de ruido.
  - b. Transiciones de fase de primer y segundo orden [9][55][65][87], inducidas por ruido, donde el aumento de ruido permite la transición de una fase desordenada a una ordenada.
  - c. Estructuras que existen únicamente en presencia de una fuente de ruido, y en cuya ausencia el sistema relaja a un estado homogéneo, ej: sistemas ópticos no lineales [80], sistemas químicos [81], flujos de Taylor-Couette [3].
2. Motores Brownianos, donde se produce un transporte unidireccional gracias a la conversión de las fluctuaciones en trabajo útil, y sus aplicaciones a la biología hace un aporte importante para modelar el movimiento de proteínas a lo largo de microtubos periódicos.
3. Resonancia Estocástica, como un fenómeno de umbral. Si colocamos una partícula clásica en un potencial doble simétrico con el sistema libre de ruido la partícula permanecerá donde fue “colocada” inicialmente, pero si acoplamos el sistema a un

baño térmico la partícula podrá saltar sobre la barrera de potencial. Si además excitamos el sistema con una señal armónica estos saltos podrán ocurrir periódicamente en el tiempo, dando lugar al fenómeno conocido como *Resonancia Estocástica*, cuyo mecanismo será explicado más adelante.

## 1.1 Resonancia Estocástica en pocas palabras...

Consideremos un sistema excitado por una componente o “señal”, a la que llamaremos  $f(t)$ , y otra componente o ruido térmico, denominada  $\xi(t)$ .



El rectángulo superior representa un sistema dinámico o un mapa excitado por un entrada, un operador integral o simplemente una función de la entrada. La señal  $f(t)$  puede ser una función determinística o estocástica; una elección típica es una función coseno(seno) del tipo  $f(t) = \varepsilon \cos(\omega t)$ .

En general, la salida consistirá en una señal correlacionada y una componente de ruido. En este trabajo, estudiaremos el sistema como un dispositivo de transmisión y almacenamiento de señales. Esto nos plantea los siguientes interrogantes:

1. ¿Cuán bien la señal de entrada  $f(t)$  es reproducida por la salida?  
 $\Rightarrow$  Intensidad de la señal de salida.
  
2. ¿Cuán bien puede la señal de salida ser separada de su componente ruidosa?  
 $\Rightarrow$  Relación señal- ruido

Hemos incluido ruido en la entrada (de hecho, este podría ser ruido *interno* inherente al sistema), de forma tal de preguntarnos la intensidad óptima de ruido en relación a la transmisión de la señal. Uno podría estar tentado a pensar que *la desaparición del ruido* es obviamente la respuesta correcta. Sin embargo, en una gran clase de sistemas no lineales esto *no es cierto*. Estos sistemas exhiben un aumento de la intensidad de la señal y de la relación señal-ruido para una intensidad de ruido *finita* y

*no nula*. Más aún, se observa que un ruido demasiado intenso destruye el efecto cooperativo, lo cual nos permite concluir que hay un nivel *óptimo y finito* de ruido  $D$  para el cual la intensidad de la señal de salida y la relación señal-ruido alcanzan sus máximos valores. Esto es a grandes rasgos el fenómeno denominado **Resonancia Estocástica** (RE).

El mecanismo de la RE puede ser fácilmente comprendido en un sistema con una barrera o umbral en el cual una señal *débil* determinista no puede evocar una respuesta finita en ausencia de ruido. Un ejemplo instructivo es el movimiento Browniano forzado periódicamente en un potencial biestable (ver figura 1). Aquí, la fuerza periódica y las fluctuaciones térmicas juegan el rol de señal y ruido respectivamente, mientras que las transiciones de un pozo a otro determinan la salida. No consideramos la dinámica de la partícula *dentro* el pozo porque en la mayoría de los casos el salto entre los pozos tiene mayor relevancia física, ej. las transiciones entre eras cálidas y frías en [4].

En el límite de alta fricción esta dinámica viene dada por la siguiente ecuación diferencial estocástica (luego de realizar un cambio de escala apropiado):

$$\dot{x} = -U'(x) + \varepsilon \cos(\omega t) + \sqrt{D} \zeta(t), \quad U(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

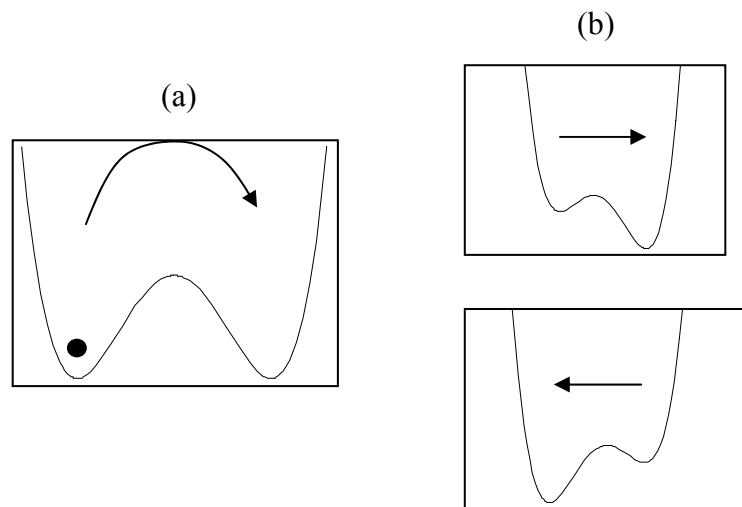


Figura 1 : Movimiento Browniano en un potencial de grado cuatro. Panel (a): El potencial  $U(x)$ . Panel (b): El potencial efectivo en diferentes instantes, ej. en  $t=0$  (arriba) y en  $t = \pi/\omega$  (debajo).



La fuerza  $U'(x)$  y la señal  $\varepsilon \cos(\omega t)$  pueden agruparse en una única fuerza que surja de un potencial dependiente del tiempo  $U(x) - \varepsilon \cos(\omega t)x$ . Para una señal débil ( $\varepsilon \ll 1$ ) y ruido nulo, la partícula oscila dentro de un pozo pero no se producen saltos al otro pozo. La salida es entonces esencialmente constante y no refleja la excitación periódica. La situación cambia si el ruido es finito. Los escapes de un pozo a otro se tornan posibles, más aún, debido a la asimetría dependiente del tiempo del potencial una de esas transiciones es favorecida para una fase determinada de la señal (a un dado tiempo). Consecuentemente, los eventos de salto estarán correlacionados con la señal de entrada (ver figura 2). Se esperaría que este efecto sea más pronunciado cuando el tiempo medio de transición (esto es, la inversa de la tasa de saltos) coincida con medio período externo. Esto puede expresarse como función de la frecuencia externa de la siguiente forma: ([4][26])

$$r_0(D) = \frac{\omega}{\pi} \quad (1.1)$$

La trayectoria  $x(t)$  se comportará de la siguiente forma: los eventos de salto están sincronizados a la señal pero con ocasionales caídas (dropouts) y transiciones aparentemente no correlacionadas durante el respectivo medio período “negativo” de la señal. Remarquemos que la relación de la ecuación (1.21) no es exacta ([24]), en particular, esta condición de resonancia es una aproximación válida sólo para variaciones de  $D$  a una dada frecuencia. La respuesta espectral al forzante externo, por ejemplo, presenta siempre una caída con el aumento de la frecuencia, lo que indica la naturaleza estadística de la resonancia estocástica.

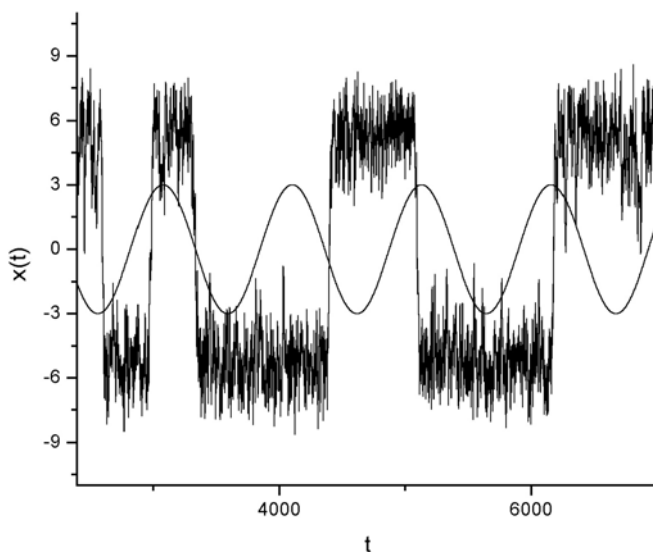


Figura 2 : Señal sinusoidal de entrada y salida (trayectoria  $x(t)$ ) del sistema.

## 1.2 Resonancia Estocástica y sus precursores

### El preludio de las edades de hielo

La Resonancia Estocástica fue descubierta por Benzi et. al. [4] y Nicolis [71], quienes introdujeron el nombre al tratar de buscar una explicación para los ciclos que dan cuenta de las eras de hielo sobre la Tierra. Hacia mediados de los 70 se pudo observar que los datos disponibles de la cantidad relativa de isótopo  $^{18}\text{O}$  en la foraminífera planctónica, y también algunos otros datos geológicos independientes que daban cuenta de cambios climáticos (edades de hielo), mostraban periodicidad con un período de aproximadamente 100.000 años ([42]). Asombrosamente este período es cercano a la variación de la excentricidad de la órbita de la Tierra. Como resultado de esto último, el poder de la radiación solar incidente en la Tierra (promediada sobre un período mayor a un año) presenta la misma variación, por lo cual Milankovitch ([42]) propuso como hipótesis que esta sería la posible causa de los cambios climáticos globales.

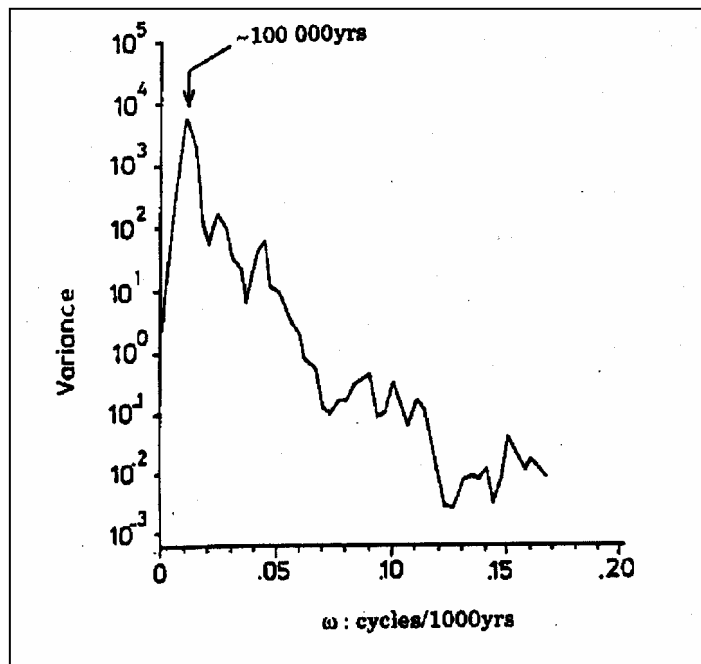


Figura 3: Espectro de la varianza de los cambios climáticos deducidos de los registros geológicos del volumen total de hielo sobre la Tierra desde un millón de años atrás. El pico en  $\omega=1$ ciclo/100000años sugiere que las edades de hielo tienen una ocurrencia periódica. ([70])

Nicolis y Benzi et. al. propusieron un modelo simple que explica tales efectos, en el cual el clima es descrito por una única variable, que puede ser pensada como la temperatura global del planeta  $T_e$ . La ecuación dinámica para esta variable, es una ecuación de balance energético:

$$C_e \frac{dT_e}{dt} = \mu P [1 - \alpha(T_e)] - \tilde{\sigma} T_e^4 \quad (1.2)$$

Aquí,  $P$  la potencia promedio de la radiación solar incidente,  $C_e$  el la capacidad térmica de la Tierra,  $\alpha(T)$  es el albedo promedio, y  $\sigma$  es la constante de Stefan promediada y renormalizada que describe el enfriamiento de la Tierra vía emisión infrarroja. El parámetro  $\mu$  caracteriza la excentricidad de la órbita terrestre. Esta tiene una dependencia periódica con el tiempo con un período de  $2\pi/\Omega = 10^5$  años,

$$\mu \equiv \mu(t) = 1 + A \cos \Omega t \quad (1.3)$$

La ecuación dinámica puede ser reescrita en la forma de una ecuación de movimiento de una partícula sobreamortiguada con la coordenada  $T_e$  en un potencial  $\Phi(T_e)$ :

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial T_e} \quad (1.4)$$

$$\Phi(T_e) = \int^{T_e} dT_e' C_e^{-1} ( -\mu P [1 - \alpha(T_e')] + \tilde{\sigma} T_e'^4 ) \quad (1.5)$$

Los estados estables del sistema corresponden a los mínimos de  $\Phi(T_e)$ . El modelo en la ecuación (1.2) puede ser relevante al problema de las edades de hielo, debido a que hay dos estados estables coexistiendo para  $\mu=1$ : uno con temperatura  $T_e=T_{e2}$ , para la cual el hemisferio norte está mayormente libre de hielo, y el otro con temperatura  $T_e=T_{e1}$ , para la cual una parte importante de dicho hemisferio está cubierto por hielo. En estos dos estados, la reflectividad de la Tierra, esto es, el valor del parámetro  $\alpha$  en la eq 1 es diferente, y por lo tanto ambos son auto-consistentes (cuando  $T_e=T_{e2} > T_{e1}$ , no hay hielo, menos energía se refleja y entonces la temperatura es mayor, en cambio si  $T_e=T_{e2} < T_{e1}$ , hay hielo, por lo tanto se refleja más energía y la temperatura es menor; la diferencia  $T_{e2} - T_{e1}$  es de aproximadamente 10K).

En el modelo de la ecuación (1.2), la alternancia entre estados ocurre, si la amplitud  $A$  de modulación del parámetro  $\mu$  es suficientemente grande, tal que si se verifica

$$|\mu - 1| \leq A$$

el sistema presenta un único estado estable. En otras palabras, cuando  $\mu$  varía periódicamente en el tiempo, el potencial  $\Phi$  cambia de forma tal que cada uno de los dos pozos desaparecen por vez, y el sistema es entonces forzado a saltar de uno a otro. Sin embargo, estimaciones muestran que la amplitud de modulación  $a$  relacionada con las oscilaciones en la excentricidad de la órbita terrestre no es lo suficientemente grande para proveer tales saltos deterministas.

Frente a este último hecho, Benzi et. al. y Nicolis, sugirieron que esta modulación podría estar mediada por fluctuaciones, las cuales tienen tiempos de correlación muy cortos, y son el resultado de las circulaciones atmosféricas y oceánicas, erupciones volcánicas (adicionando polvo a la atmósfera), etc. En el modelo más simple, estas fluctuaciones se introducen como ruido blanco que afecta la temperatura global, de forma tal que las ecuaciones (1.2) y (1.3) toman la forma:

$$\dot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} + \xi(t), \quad \langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$$

con

$$q \cong T_e, \quad U(q) = \Phi(q)$$

donde  $D$  es la intensidad característica del ruido, la cual debe ser pequeña para que las fluctuaciones de  $q$  en torno de los valores estables sean pequeñas comparadas con  $q_2 - q_1$ . Sin embargo a pesar de que el ruido es débil en promedio, podría ocurrir que ocasionalmente se produzcan saltos entre los estados estables. La probabilidad  $W_{mn}$  de saltar de un estado  $n$  a otro  $m$  ya había sido estimada por Kramers [45] :

$$W_{mn} = \pi^{-1} [U''(q_n)U''(q_s)]^{1/2} \exp(-\Delta U_n / D), \quad \Delta U_n = U(q_s) - U(q_n) \quad (1.6)$$

donde  $\Delta U_n$  es la profundidad de  $n$ -ésimo pozo de potencial relativo al valor correspondiente al mínimo local  $q_s$ . Si  $\mu=1$  las profundidades correspondientes a ambos estados  $m$  y  $n$  son aproximadamente iguales, como se supone en el modelo climático de la ec. 1, las poblaciones de los estados estables varían aleatoriamente en el tiempo, y sus valores promedios  $w_1$  y  $w_2$  son del mismo orden de magnitud:

$$w_1/w_2 = W_{21}/W_{12} \propto \exp[(\Delta U_1 - \Delta U_2) / D] \quad (1.7)$$

Se asume que la modulación temporal del potencial es lenta de forma tal que  $\Delta U_1$  y  $\Delta U_2$  oscilan en contrafase, y que medio período  $2\pi/\Omega$  uno de los pozos es relativamente más profundo que en la otra mitad. De esta forma los valores promedios de las poblaciones  $w_{1,2}$  oscilarán , produciéndose modulaciones periódicas de las

poblaciones para una intensidad de modulación que es mucho menor que la necesaria para cambiar de un potencial biestable a uno estable. Así una redistribución periódica de un sistema en estados estables como respuesta a estímulos periódicos se produce como consecuencia de la presencia del ruido. Benzi y Nicolis sugirieron esta idea como una posible explicación para la periodicidad de las eras de hielo.

## 1.3 Origen de la Resonancia Estocástica

### 1.3.1 Verificación experimental.

Desde que la resonancia estocástica fue propuesta como un posible mecanismo para la recurrencia de las edades de hielo ([4] [5] [71]), se han encontrado una gran variedad tanto de modelos teóricos como de experimentos en diversos campos de la ciencia. En las referencias [26] y [2] se presentan extensos reviews, mientras que otros más específicos se encuentran en los proceedings de conferencias sobre el tema ([64], [7]). Aquí, nos restringiremos a algunos ejemplos simples enfocando la discusión a aquellos puntos más importantes para este trabajo.

La primera evidencia experimental de la resonancia estocástica fue dada por Fauve y Heslot [22] quienes estudiaron la respuesta espectral de un dispositivo tipo Schmitt Trigger excitado por una señal periódica y ruido. El diagrama del circuito y la función transferencia se grafican en la figura 4.

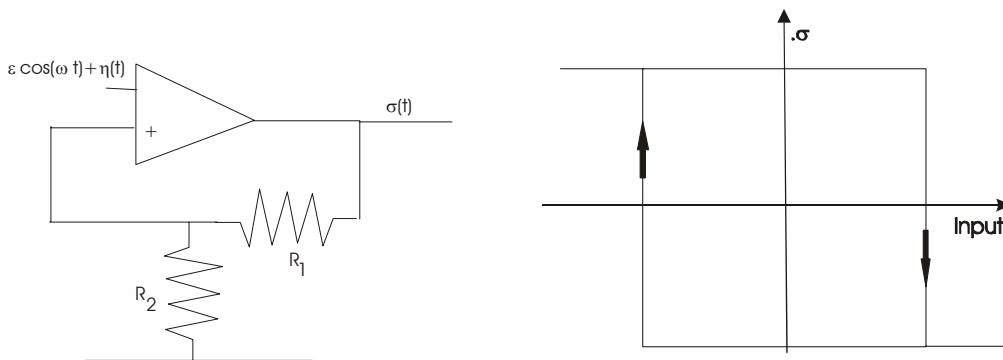


Figura 4. Izquierda: Diagrama del circuito Schmitt Trigger. Señal y ruido  $V(t) = \varepsilon \cos(\omega t) + \eta(t)$  se aplican a la terminal no inversora del amplificador operacional (AP) mientras que la salida del AOP es reinyectada en la terminal inversora vía un divisor de voltaje, i.e.,  $V_- = R_2 \sigma / (R_1 + R_2)$ . La salida del AOP  $\sigma(t)$  es  $+V_o$  o  $-V_o$  dependiendo del signo de la diferencia de sus dos entradas ( $V_+ - V_-$ ). Comenzando con  $V_- < V_+$  y  $\sigma = +V_o$ , este estado se mantiene estable mientras estas condiciones se mantienen. Cuando  $V_- > V_+$  el trigger cambia instantáneamente al otro estado  $\sigma = -V_o$  y se queda en él mientras  $V_- > V_+$ . En el panel derecho se muestra la función transferencia resultante mostrando la histéresis.

El dispositivo es para un limitado rango subumbral de entradas biestables y presenta histéresis. La salida  $\sigma(t)$  es discreta y alterna entre dos estados estables, como el caso de una partícula Browniana entre los dos pozos de un potencial, y tal como se mostró en el ejemplo de más arriba. Si la amplitud de la señal de entrada está por debajo de un cierto valor crítico, la señal que es débil no puede producir transiciones. Nuevamente una cantidad finita de ruido aumenta la probabilidad de eventos de salto que estarán sincronizados con la salida para un cierto nivel de ruido.

Estas características se observan muy claramente en el espectro de potencias ([22]). En la Figura 5 se observan cuatro espectros de potencia obtenidos a partir de una simulación numérica de un Schmitt Trigger ideal. El espectro consiste de un pico en la frecuencia externa superpuesto a un fondo continuo (background); por otra parte para mayores amplitudes de entrada también se observan picos en armónicos superiores. El alto del pico en relación al background de ruido (dado como el alto del pico dividido el “piso” de ruido en esa frecuencia en escala logarítmica) es mayor en el panel central y para un nivel de ruido intermedio. Para cuantificar esto consideramos el espectro teórico en el cual la parte espectral correspondiente al pico tiende a una función  $\delta$  porque el tiempo de observación es infinito:

$$S(\omega) = S_{bg}(\omega) + \frac{A_{out}}{2} [\delta(\omega - \omega_s) + \delta(\omega + \omega_s)] \quad (1.8)$$

La intensidad de salida es usualmente descripta por la amplificación espectral dada por el cociente entre la intensidad de salida y la de entrada:

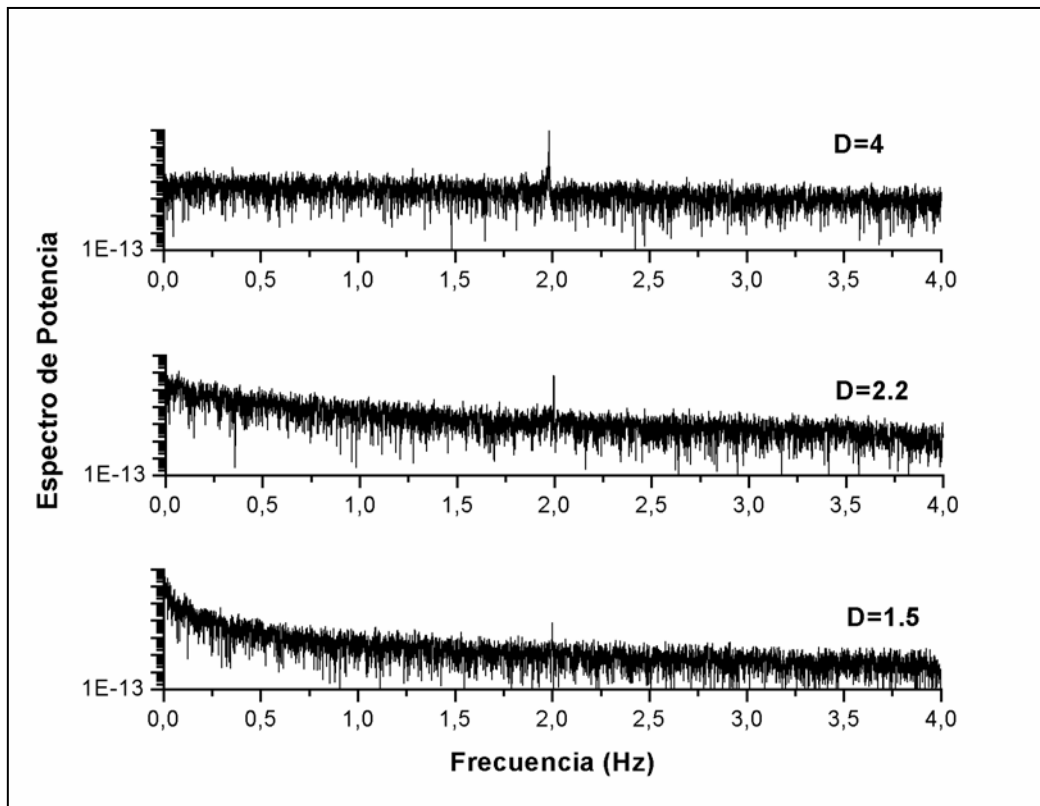
$$\eta = \frac{A_{out}}{A_{in}} \quad (1.9)$$

Una gran ventaja de esta función es que la misma no depende (al menos para señales débiles) de la amplitud de la entrada. Igualmente, se puede utilizar una variante a la relación señal-ruido, expresada en decibels, y que viene dada por

$$\text{SNR} = 10 \log \left( \frac{S(\omega_s)}{S_{bg}(\omega)} \right) \quad (1.10)$$

El Schmitt Trigger es uno de esos raros ejemplos de *RE* en sistemas dinámicos para el cual ambas cantidades en el caso de una señal débil puede ser calculada exactamente ([63]). Las curvas resultantes para el espectro de potencias se muestran en

la figura 5 y revelan un comportamiento dependiente de la intensidad del ruido, ya que el background contribuye con su propia dependencia con el ruido.



*Figura 5: Espectro de potencia de un Schmitt Trigger ideal (resultados de una simulación numérica) excitado por una señal armónica y ruido blanco Gaussiano. La frecuencia excitatoria en todos los paneles es  $\omega = 2$  mientras que la intensidad del ruido se indica en cada panel.*

El espectro y las curvas de resonancia de la partícula Browniana forzada, como para cualquier otro sistema biestable, son similares con tal que la salida corresponda a dos estados filtrados (es decir eliminando el movimiento dentro de un pozo). También se observa que las cantidades que cuantifican la respuesta decrecen monótonamente con la frecuencia de la excitación. Esto es típico para sistemas biestables, sin embargo dos excepciones deben mencionarse: Si en un sistema biestable sólo la profundidad de uno de los mínimos del potencial es modulada, la *SNR* puede exhibir una dependencia no monótona con la frecuencia de excitación ([6]). La misma característica se observa para ciertos sistemas biestables acoplados globalmente ([31]).

Otra observación experimental de la resonancia estocástica fue hecha por Mc Namara et. al. [62] en un anillo láser bidireccional. Dicho láser es biestable y puede generar modos que se propagan en sentido horario y antihorario, con el auxilio de un modulador acústico-óptico. Este modulador se hallaba excitado por un ruido cuasi-blanco y por un voltaje sinusoidal, detectándose la intensidad de la radiación del láser en una dirección. En ausencia de la modulación periódica, la intensidad fluctuaba aleatoriamente en el tiempo. Cuando se aplicaba el voltaje sinusoidal y el ruido, el espectro de potencia presentaba un pico en la frecuencia del voltaje cuyo comportamiento con la intensidad del ruido respondía a la típica curva de la relación señal-ruido para la resonancia estocástica (ver Figura 6 )

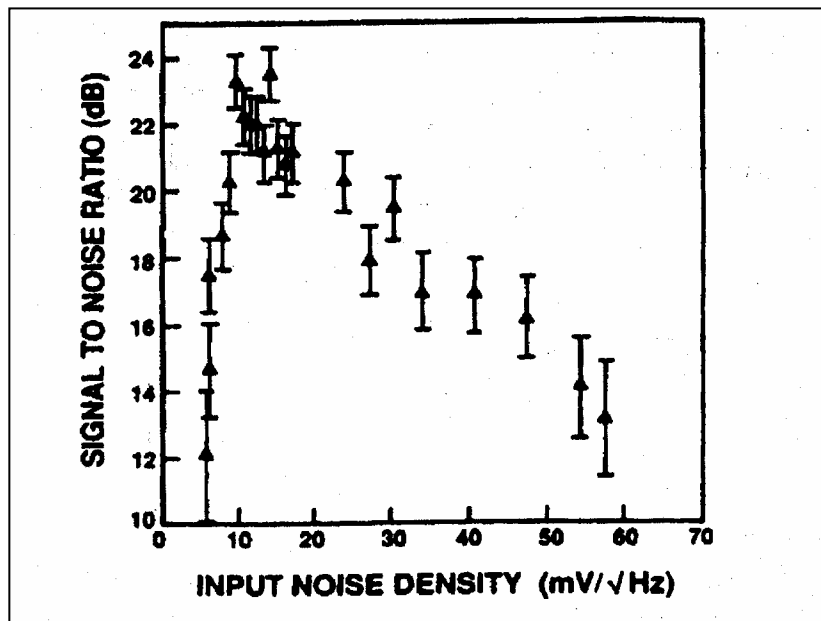


Figura 6 : Observación experimental de la resonancia estocástica en un anillo láser biestable. Con el agregado de un óptimo nivel de ruido la SNR aumenta en 11dB. ([88])

Con respecto a la descripción de la resonancia estocástica es importante mencionar que la misma no se restringe sólo a medidas espectrales. Se podrían usar también la función distribución de los tiempos de escape de un estado estable la cual presenta un perfil multimodal con picos en los múltiplos de medio período externo. Otras medidas que cuantifican la *RE* provienen de la teoría de información (ver por ej. [85] [68]) que en parte están simplemente relacionadas a medidas espectrales. También para caracterizar la *RE* producida a partir de una amplitud de entrada intensa la noción de sincronización resulta muy útil ([69]).



Es interesante observar que para que se produzca el fenómeno de *RE*, la señal no tiene necesariamente que ser aditiva y/o periódica ni la dinámica debe ser biestable. Se podría considerar, por ejemplo, un sistema con sólo una entrada tipo un ruido con una intensidad dependiente de una señal (ej.  $\sqrt{D(1+f(t))} \xi(t)$ ) en lugar de una señal aditiva y ruido de intensidad constante. Regulando la totalidad de la intensidad del ruido  $D$ , podemos observar resonancia estocástica si el sistema presenta una asimetría espacial como muestra Dykman et al. [19] para el movimiento Browniano en un potencial asimétrico biestable.

También se podría considerar un sistema donde la señal periódica es reemplazada por una entrada estocástica. Un ejemplo de esto es una señal con un ancho de línea espectral finito, por ejemplo, un ruido armónico como en Schimansky-Geier [67]. Más aún, también se podría utilizar una señal enteramente aperiódica ([11] [12]). Esta resonancia aperiódica puede ser cuantificada por la función de coherencia espectral ([66]) o por el coeficiente de correlación cruzada también llamado “*the power norm*” ([11] [12]).

Más aún, se puede encontrar *RE* en sistemas no biestables. El primer ejemplo fue el modelo de FitzHugh-Nagumo, modelo dinámica excitable ([53] [54] [55] [90]). La investigación en esta dirección fue estimulada por una serie de experimentos que demostraron que las neuronas sensorias podrían ser beneficiadas por el ruido en su capacidad para detectar señales débiles. Se realizaron una serie de investigaciones donde las neuronas sensoras del langostino ([15]), de la rata ([72]) y del sistema cercal del cangrejo ([48]) son estimulados con ruido externo y señales periódicas o aperiódicas. La relación señal-ruido o las medidas teóricas de información alcanzan un máximo cuando se aumenta el nivel de ruido. Hallazgos similares se hicieron en experimentos con “cortes” de cerebro de mamíferos ([34]), en husos musculares humanos ([14]) y en la sensación táctil humana ([13]). También se encontró un comportamiento resonante estocástico ([79]) para el “pez pala” o paddlefish cuando preda el zooplankton a partir de la detección de señales eléctricas débiles generadas por la presa. La tasa de captura puede incrementarse significativamente agregando ruido eléctrico desde el exterior. En la Ref [25] se presenta evidencia teórica de que en realidad el ruido requerido podría ser generado por un “fondo” de enjambre de plankton. Todos estos hechos muestran claramente la relevancia del fenómeno de resonancia estocástica en los sistemas biológicos.

## **1.4 Caracterización de la resonancia estocástica**

Hasta ahora hemos presentado las principales ideas físicas sobre la resonancia estocástica y su desarrollo histórico. En esta sección se definirán los principales observables que cuantifican este fenómeno, los cuales están motivados físicamente, son fácilmente mensurables y/o son de relevancia técnica. Por ejemplo en 1981, el artículo de Benzi et. al., génesis del estudio de la resonancia estocástica, la misma es cuantificada a partir de la intensidad del pico en el espectro de potencia. Los observables que se basen en un análisis a partir de dicho espectro son muy convenientes, tanto desde un punto de vista teórico como experimental, ya que tienen una interpretación directa y son mensurables con facilidad. En cambio, cuando uno se sumerge en las aplicaciones neurofisiológicas de la resonancia estocástica surge naturalmente otra medida, que es la distribución de intervalos de tiempo de eventos de activación, como los que se encuentran entre los sucesivos disparos neuronales o eventos relacionados con los sucesivos cruces de barrera de un dado potencial.

Siguiendo un desarrollo histórico del surgimiento y definición de estos observables, se comenzará discutiendo los cuantificadores más importantes de la resonancia estocástica que están basados en el espectro de potencia, cuyas propiedades serán presentadas para dos modelos genéricos: un sistema de dos estados modulado periódicamente y un sistema continuo de dos pozos.

### **1.4.1 Relación Señal Ruido**

#### **1.4.1.1 Aproximación de dos estados**

Para fijar ideas y retomando algunos conceptos ya mencionados, consideremos un sistema biestable con ruido y un forzante periódico. Consideramos que la partícula se halla sobreamortiguada, es decir que tenderá al reposo en uno de los dos pozos que se ubicarán en  $\pm c$ . Cuando el ruido externo sea pequeño la partícula estará la mayor parte del tiempo fluctuando en torno de  $\pm c$ , pudiendo hacer transiciones ocasionales al otro pozo. A medida que la intensidad del ruido ( $D$ ) aumenta, la tasa  $W$  a la cual estos saltos entre pozos se producen aumentará con  $D$ , muy rápido al principio, pero cuando

D ya es lo suficientemente grande para atravesar la barrera, W crecerá pero más lentamente. Para derivar las expresiones generales para el espectro de potencia, se debe antes tener una expresión para las tasas de transición W como función de los parámetros del sistema ( D, ε, etc). Este análisis se realizará dentro del límite adiabático, es decir cuando la frecuencia de excitación es mucho menor que algún tiempo de relajación  $\tau^{-1}$ , por ejemplo en el caso de un sistema biestable correspondería al tiempo para que la probabilidad de estar en un pozo alcance el equilibrio.

Consideremos la aproximación de variable dinámica discreta:  $x_{\pm}$  con probabilidad condicional  $n_{\pm}$  de estar en el estado  $\pm$ . Si la dinámica es continua entonces se puede definir:

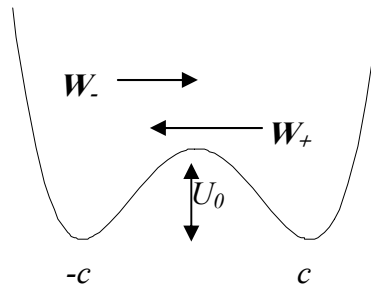
$$n_{-}(t|x_o, t_o) = 1 - n_{+}(t|x_o, t_o) = \int_{-\infty}^{x'} P(x, t | x_o, t_o) dx \quad (1.11)$$

donde  $x'$  es la localización del máximo de potencial que separa los dos pozos. En general cuando el potencial está sometido a una dada modulación periódica, la misma producirá oscilaciones en los mínimos y máximos que deberán ser tenidas en cuenta según el grado de aproximación del análisis que se esté llevando a cabo.

La ecuación dinámica para las probabilidades condicionales  $n_{\pm}$  es:

$$\frac{dn_{+}}{dt} = \frac{dn_{-}}{dt} = W_{-}(t)n_{-} - W_{+}(t)n_{+} = W_{-}(t) - [W_{-}(t) + W_{+}(t)] n_{+} \quad (1.12)$$

Donde  $W_{\pm}(t)$  es la siguiente tasa de transición:  $+ \rightarrow -$  ( $- \rightarrow +$ ), pudiendo ser una función periódica en el caso de que el forzante externo lo sea.



Si consideramos coeficientes dependientes (periódicos) en el tiempo, la solución de esta ecuación es:

$$n_{+}(t) = \frac{1}{g(t)} \left[ n_{+}(t_o) g(t_o) + \int_{t_o}^t W_{-}(t') g(t') dt \right]', \quad (1.13)$$

$$g(t) = \exp \left[ \int^t [W_{+}(t') + W_{-}(t')] dt \right]$$

En general  $W_{\pm}$  no es conocida por lo cual la integración de la ecuación anterior no siempre es posible. Sin embargo, una aproximación adecuada, es suponer que la forma funcional de su dependencia temporal es la misma que la de la modulación externa:

$$W_{\pm} = f(\mu + \kappa_o \cos \omega_s t) \quad (1.14)$$

Donde  $\mu$  es un parámetro adimensional que depende del cociente entre el alto del pozo y la intensidad del ruido y  $\kappa_o$  es intensidad de la modulación de  $\mu$ . Cuando  $\kappa_o$  es nulo se recupera la expresión conocida de las tasas de Kramers ( con  $f(x) = \exp(x)$  y  $a=4U_o/c^2$ ):

$$W_{\pm} = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \exp(2U_o / D) \quad (1.15)$$

Haciendo un desarrollo de la (1.14) para modulaciones pequeñas se obtiene:

$$W_+(t) + W_-(t) = A_o + A_2 \kappa^2 \cos^2 \omega_s t + \dots, \quad (1.16)$$

$$A_o = 2f(\mu), \quad A_n = 2 \frac{(1-)^n}{n!} \frac{d^n f}{d\kappa^n}(\mu)$$

Introduciendo la expresión (1.16) en la ecuación (1.12) e integrando se obtiene la expresión para la probabilidad dependiente del tiempo hasta el primer orden (reteniendo órdenes mayores se generarían mayores armónicos en el espectro observado, situación que no es de interés en este caso ya que estamos interesados en la respuesta lineal):

$$n_+(t|x_o, t_o) = \frac{1}{2} \left[ e^{-A_o(t-t_o)} \left[ 2\delta_{x_o, c} - I - \frac{A_1 \kappa_o \cos(\omega_s t_o - \phi)}{\sqrt{(A_o^2 + \omega_s^2)}} \right] + I + \frac{A_1 \kappa_o \cos(\omega_s t - \phi)}{\sqrt{(A_o^2 + \omega_s^2)}} \right] \quad (1.17)$$

donde

$$\phi = \tan^{-1} (\omega_s / A_o).$$

$$\delta_{x_o, c} = \begin{cases} 1 & \text{si } x(t_o) = + \\ 0 & \text{si } x(t_o) = - \end{cases}$$

$n_+(t|x_o, t_o)$  es la probabilidad condicional que  $x(t)$  esté en el estado + en el tiempo  $t$ , dado que estuvo en el tiempo  $t_o$  su posición fue  $x_o$ .

A partir de la ecuación (1.17) se puede calcular cualquier información estadística:

- La respuesta dependiente del tiempo al forzante periódico es:

$$\langle x(t) | x_o, t_o \rangle = \int x P(x, t | x_o, t_o) dx \quad (1.18)$$

con  $P(x, t | x_o, t_o) = n_+ \delta(x - x_+) + n_- \delta(x - x_-)$  la densidad de probabilidad. Esta respuesta en el límite asintótico  $t_o \rightarrow -\infty$  toma la siguiente forma:

$$\lim_{t_o \rightarrow -\infty} \langle x(t) | x_o, t_o \rangle = \langle x(t) \rangle_{as} = \frac{\varepsilon c^2}{D} \frac{2W_K}{\sqrt{4W_K^2 + \omega_s^2}} \cos[\omega_s t - \bar{\phi}(D)];$$

$$\bar{\phi}(D) = \arctan\left(\frac{\omega_s}{2W_K}\right) \quad (1.19)$$

Esta última representa el desfase entre la salida y la entrada periódica.

- La función de autocorrelación:

$$\langle x(t)x(t+\tau) | x_o, t_o \rangle = c^2 n_+(t+\tau | +c, t) n_+(t | x_o, t_o) - c^2 n_+(t+\tau | -c, t) n_-(t | x_o, t_o) \\ - c^2 n_-(t+\tau | +c, t) n_+(t | x_o, t_o) + c^2 n_-(t+\tau | -c, t) n_-(t | x_o, t_o) \quad (1.20)$$

Donde por ejemplo el término  $c^2 n_+(t+\tau | +c, t) n_+(t | x_o, t_o)$  representa el caso que en el tiempo  $t_o$  la partícula está a  $x_o$ , a tiempo  $t$  está en  $+c$ , y en  $t+\tau$  está en  $+c$ . Si tomamos el límite de  $t_o \rightarrow -\infty$ , la función de autocorrelación es:

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \lim_{t_o \rightarrow -\infty} \langle x(t)x(t+\tau) | x_o, t_o \rangle = \\ = c^2 e^{-A_o \tau} \left[ 1 - \frac{A_l^2 \kappa_o^2 \cos(\omega_s t - \phi)}{(A_o^2 + \omega_s^2)} \right] + \frac{c^2 A_l^2 \kappa_o^2 [\cos(\omega_s \tau) + \cos(\omega_s (2t + \tau) + 2\phi)]}{2(A_o^2 + \omega_s^2)} \quad (1.21)$$

Por qué estamos interesados en esta cantidad estadística? Porque la misma nos permite calcular otra cantidad estadística que es:

- El espectro de potencia, el cual se obtiene a partir de la transformada de Fourier de la función de autocorrelación.

Habitualmente, en especial en el trabajo experimental, cuando se desea calcular el espectro de potencias de un dado fenómeno, se dispone de un conjunto de series temporales para los tiempos  $t_1, t_2, \dots$ , se calcula el espectro de potencias de cada uno y luego se los promedia. A menos que se tome el recaudo de sincronizar las fases ( $\omega_s t_i - \phi$ ), los valores de  $t$  deben ser apropiadamente tratados como variables aleatorias, distribuidas uniformemente en el intervalo  $[0, 2\pi/\omega_s]$ . Por lo tanto al promediar los espectros de potencia tomados en tiempos al azar, debemos promediarlos sobre  $t$ :

$$\langle S(\Omega) \rangle_t = \frac{\omega_s}{2\pi} \int_0^{\omega_s/2\pi} \bar{S}(\Omega, t) dt \quad (1.22)$$

Apelando a la conmutación entre la transformada de Fourier y el promedio, calculamos primero el promedio sobre  $t$  en la función de autocorrelación:

$$\begin{aligned} \langle \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \rangle_t &= \frac{\omega_s}{2\pi} \int_0^{\omega_s/2\pi} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle dt = \\ &= c^2 e^{-A_o \tau} \left[ 1 - \frac{A_I^2 \kappa_o^2}{2(A_o^2 + \omega_s^2)} \right] + \frac{c^2 A_I^2 \kappa_o^2 [\cos(\omega_s \tau)]}{2(A_o^2 + \omega_s^2)} \end{aligned} \quad (1.23)$$

y luego calculamos el espectro de potencias:

$$\begin{aligned} \langle S(\Omega) \rangle_t &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \rangle_t e^{-i\Omega\tau} d\tau = \\ &= \left[ \frac{2c^2 A_o}{A_o^2 + \Omega^2} \right] \left[ 1 - \frac{A_I^2 \kappa_o^2}{2(A_o^2 + \omega_s^2)} \right] + \frac{\pi c^2 A_I^2 \kappa_o^2}{2(A_o^2 + \omega_s^2)} [\delta(\Omega - \omega_s) + \delta(\Omega + \omega_s)] \end{aligned} \quad (1.24)$$

Para que el espectro corresponda a promedio sobre los  $t$  positivos ( $\Omega$  positivas solamente) :

$$\langle S(\Omega) \rangle = \langle S(\Omega) \rangle_t + \langle S(-\Omega) \rangle_t = \underbrace{\left[ \frac{4c^2 A_o}{A_o^2 + \Omega^2} \right]}_{\text{I}} \underbrace{\left[ 1 - \frac{A_I^2 \kappa_o^2}{2(A_o^2 + \omega_s^2)} \right]}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{\pi c^2 A_I^2 \kappa_o^2}{(A_o^2 + \omega_s^2)} \delta(\Omega - \omega_s)}_{\text{III}} \quad (1.25)$$

Como se observa de la ecuación (1.25) el espectro se divide en dos partes: la primera constituida por los factores **I** y **II** y el segundo término por el **III**.

El término **III** corresponde a la salida de la señal, la cual es una función  $\delta$  ubicada en la frecuencia del forzante externo.

El factor **I** corresponde a la salida del ruido sin señal, el cual es una función Lorentziana centrada en  $\Omega=0$ . Este término está multiplicado por el factor **II** que es un factor de corrección que da cuenta del efecto de la señal sobre el ruido. Evidentemente si la amplitud de la señal externa es pequeña ( $A_I \approx 0$ ) este factor tiende a 1, como era de esperarse. Este factor representa el efecto de la reducción de la potencia del ruido, la cual es más importante cuando la señal es de baja frecuencia ( $\omega_s \ll A_o$ ) y gran amplitud. Es decir que el efecto de la señal es transferir potencia desde el fondo de ruido hacia el término **III**.

El modelo de dos estado utilizado en esta deducción es sólo una aproximación para los sistemas continuos, tipo el modelo de dos pozos, por lo tanto es de esperar que para éstos, la expresión obtenida para el espectro de potencias no se conserve totalmente.

#### 1.4.1.2 Sistemas continuos : Potencial cuártico

El modelo de dos estados puede ser considerado como una aproximación adiabática para cualquier sistema continuo biestable, dentro de los cuales, encontramos al potencial cuártico sobreamortiguado, el cual si está modulado periódicamente y sometido a ruido puede ser escrito, considerando  $U_I = \varepsilon c$ , como:

$$\dot{x} = -\partial_x U(x,t) + \sqrt{D} \xi(t)$$

con

$$U(x,t) = U_o \left[ -2 \left( \frac{x}{c} \right)^2 + \left( \frac{x}{c} \right)^4 \right] - U_I \left( \frac{x}{c} \right) \cos \omega_s t \quad (1.26)$$

En ausencia de modulación el tiempo medio principal para atravesar la barrera (*mean first passage time*) viene dado por el tiempo de Kramers:

$$\tau_K = W_K^{-1} = \frac{2\pi e^{2U_o/D}}{[U''(0)U''(c)]^{1/2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} e^{2U_o/D} \quad (1.27)$$

Esta expresión no contempla la modulación temporal, ya que la misma fue derivada bajo la hipótesis de que la densidad de probabilidad en un pozo está en equilibrio. Por lo tanto las tasas de Kramers modificadas son:

$$W_{\pm}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{[-2(U_o \pm U_1 \cos \omega_s t)/D]} \quad (1.28)$$

Para que esta expresión tenga validez, debe cumplirse la aproximación adiabática, es decir que la frecuencia externa debe ser mucho menor que  $W_K$ . A partir de las expresiones obtenidas para el caso de dos estados, podemos obtener las mismas para el sistema de dos pozos, siempre y cuando:

$$f(\mu + \kappa_o \cos \omega_s t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{[-2(\mu \pm \kappa_o \cos \omega_s t)/D]} \quad (1.29)$$

$$A_o = 2 f(\kappa = 0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} e^{-2U_o/D} = W_K$$

$$A_l = -2 \frac{df}{d\kappa}(\kappa = 0) = \frac{2\sqrt{2\pi}}{a} e^{-2U_o/D} = 2A_o$$

Donde

$$\begin{aligned} \mu &= U_o / D, \quad \kappa_o = U_1 / D = \varepsilon c / D \\ \langle S(\Omega) \rangle &= \left[ \frac{4c^2 a \sqrt{2}}{\pi} e^{-2U_o/D} \right] \left[ \frac{4c^2 a^2 \varepsilon^2}{\pi^2 D^2} e^{-4U_o/D} \right] + \frac{8c^4 a^2 \varepsilon^2}{\pi D^2} e^{-4U_o/D} \delta(\Omega - \omega_s) \\ &\quad \left[ \frac{2a^2}{\pi^2} e^{-4U_o/D} + \Omega^2 \right] \left[ \frac{2a^2}{\pi^2} e^{-4U_o/D} + \omega_s^2 \right] \end{aligned} \quad (1.30)$$

A partir de esta expresión la relación señal ruido (SNR) es:

$$SNR = \frac{\left[ \frac{\varepsilon^2 c^2 a \sqrt{2}}{D^2} e^{-2U_o/D} \right]}{\left[ \frac{4c^2 a^2 \varepsilon^2}{\pi^2 D^2} e^{-4U_o/D} \right] \left[ \frac{2a^2}{\pi^2} e^{-4U_o/D} + \omega_s^2 \right]} \quad (1.31)$$



El denominador de esta expresión representa la fracción del espectro total que se encuentra en el fondo ruidoso del mismo. En particular la fracción que resta a 1 es la fracción que se encuentra en la salida de la señal coherente. En general, la señal tiene sólo una pequeña fracción de la potencia total, en cuyo caso el SNR se reduce a:

$$SNR = \frac{\varepsilon^2 c^2 a \sqrt{2}}{D^2} e^{-2U_o/D} \quad (1.32)$$

Veamos distintos casos límite de la expresión dada en la ecuación (1.32)

- si  $D \ll U_o$ , la exponencial tiende a cero más rápidamente que el denominador, por lo tanto la  $SNR \rightarrow 0$ .
- Si  $D \gg U_o$  (dejando de ser válida las aproximaciones que se utilizaron en este modelo) la exponencial tiende a 1, pero el denominador tiende a cero más rápidamente, por lo tanto la  $SNR \rightarrow 0$  nuevamente.
- Entre estas dos situaciones límites existe un valor óptimo de ruido para el cual la SNR alcanza un valor máximo, el cual se encuentra en  $D \approx U_o$ .

El análisis anterior está referido al comportamiento de la SNR respecto del ruido, pero qué ocurre si estudiamos dicho comportamiento respecto de las variaciones de la frecuencia de la señal? Por razones de conveniencia utilizaremos en el análisis la frecuencia normalizada respecto de la tasa de salto de un pozo a otro en  $D = U_o$ :

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega_s}{W(D = U_o)} = \frac{\sqrt{2}\pi\omega_s e^2}{a} \quad (1.33)$$

Al igual que en el análisis anterior se encuentran diferentes regímenes:

- **Bajas frecuencias** ( $\tilde{\omega} < 1$ ): esta condición es acorde con los resultados presentados aquí para la potencia de la señal. Cuando la frecuencia es baja, la partícula tiene grandes posibilidades de saltar del pozo superior al inferior durante el medio ciclo externo. Sin embargo si el ruido es muy grande, existe una importante probabilidad de realizar un salto de vuelta al pozo menos estable, destruyendo los switcheos en fase producidos por la señal. Así podemos decir “resonancia” en el sentido de resonancia estocástica cuando se da la concordancia entre  $A_o(D)$  y  $\omega_s$ , que maximiza la potencia de la señal a bajas frecuencias.
- **Altas frecuencias** ( $\tilde{\omega} > 1$ ): la potencia de la señal presenta sólo un máximo no muy bien definido independiente de  $\tilde{\omega}$  en  $D = 2U_o$ , cayendo a medida que la frecuencia

aumenta. Esto se debe a que cada vez menos partículas encuentran el tiempo de saltar al pozo más estable durante cada medio ciclo. Aumentar  $D$  ayuda a incrementar la tasa de transición, pero cuando  $D > 2U_o$ , esto aumenta la oportunidad que tiene la partícula de ser “pateada” en un sentido antifase causando la disminución en la señal de salida. Por eso se suele decir que en este régimen, el máximo en la  $SNR$  deber ser pensado más como un compromiso entre la frecuencia y el ruido que en una resonancia.

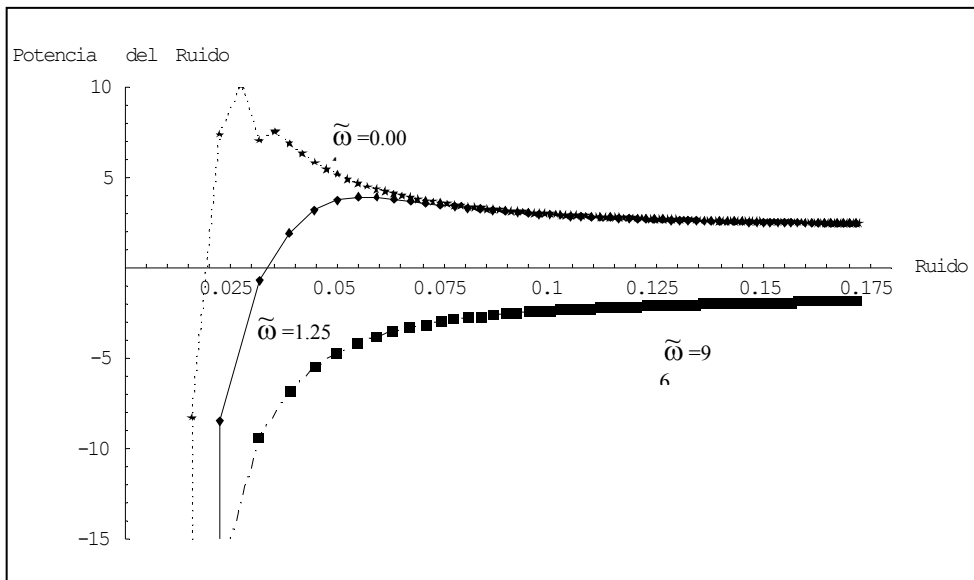
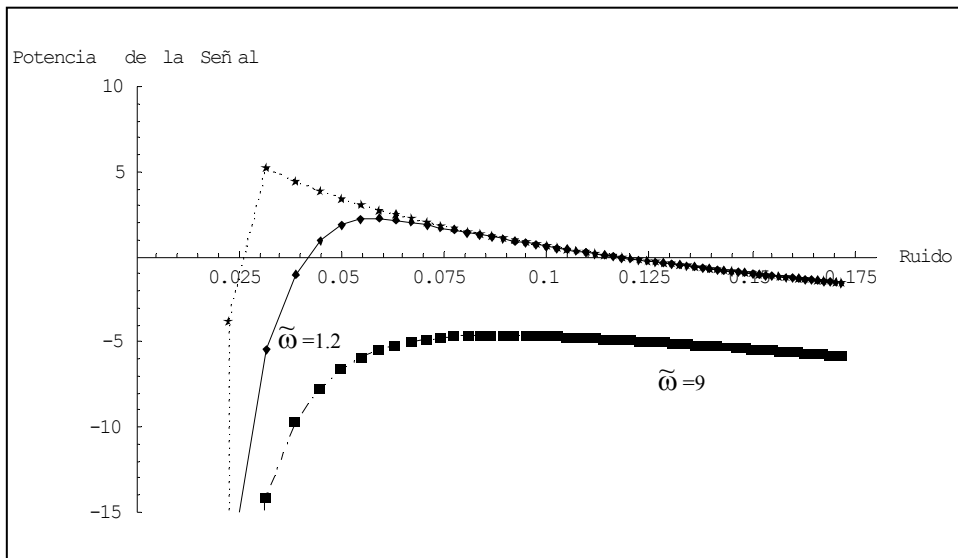


Figura 7: (Panel Superior) Potencia de salida teórica de la señal como función de la intensidad del ruido.

Figura 8: (Panel Inferior) Potencia de salida teórica del ruido como función de la intensidad del ruido.

En ambas figuras la línea de puntos corresponde a  $\tilde{\omega} = 4.10^{-4}$ , la línea completa a  $\tilde{\omega} = 1.25$ , y línea con rayas a  $\tilde{\omega} = 96$ .

Para valores de la intensidad de ruido tendiendo a cero ( $D \rightarrow 0$ ), la teoría predice que la SNR debería tender a cero también. Sin embargo es claro, a partir de la figura 9, que para el potencial de dos pozos diverge. Este efecto se puede entender de la siguiente manera: para ruidos muy pequeños, la partícula realiza muy pocos saltos entre pozos quedando prácticamente confinada en uno de ellos. La teoría asume que las partículas una vez que quedan confinadas en un pozo, se concentran en un único punto o uno de los dos estados posible, ignorándose, por lo tanto, toda posible dinámica de las mismas dentro del pozo.

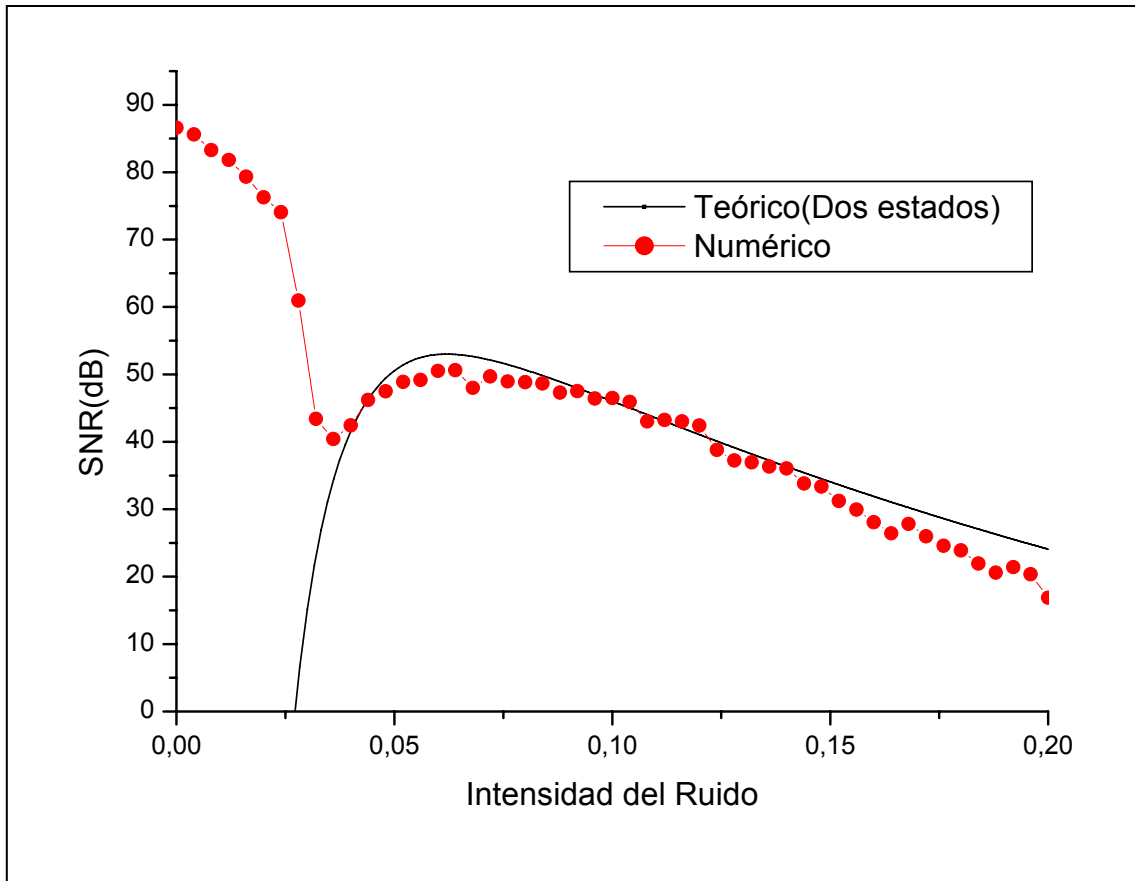


Figura 9; Relación señal ruido como función de la intensidad del ruido. La línea punteada corresponde a la salida numérica para el sistema continuo biestable y la línea completa corresponde a la expresión dada por la ecuación , para una frecuencia de  $\tilde{\omega} = 1.25$ .

*Aclaración:* La forma de campana de la relación señal ruido (como se muestra en la Figura 9) es un “huella dactilar” de la resonancia estocástica, aunque no es exclusivo de los sistemas biestables. Este tipo de comportamiento también se encuentra en sistemas

monoestables, donde se caracteriza como el valor medio del tiempo mínimo de escape en función del ruido, y en sistemas excitables. ([86] [33] [90]). Hay un fenómeno similar a la resonancia estocástica que ocurre en ausencia de una señal externa, y que se denomina *Resonancia Coherente* [93][94]. La misma se puede considerar como una de las tantas manifestaciones de la resonancia estocástica, si se entiende a ésta ampliamente como respuesta resonante del sistema ante la influencia de ruido.

### 1.4.2 Distribución de tiempos de residencia.

La dependencia resonante de la amplitud de salida con la intensidad del ruido dada en la ecuación (1.31) fue originalmente interpretada a partir de argumentos de sincronización ([3]). La respuesta en amplitud no presenta sincronización si la frecuencia externa  $\omega_s$  se aparta de la tasa de escape dada por la tasa de Kramers. Sin embargo, si se trata de reproducir experimentalmente la resonancia estocástica en sistemas reales, la experiencia muestra que el fenómeno de sincronización que ocurre si  $r_K \sim \omega_s$ , se puede lograr variando tanto  $D$  como  $\Omega$ .

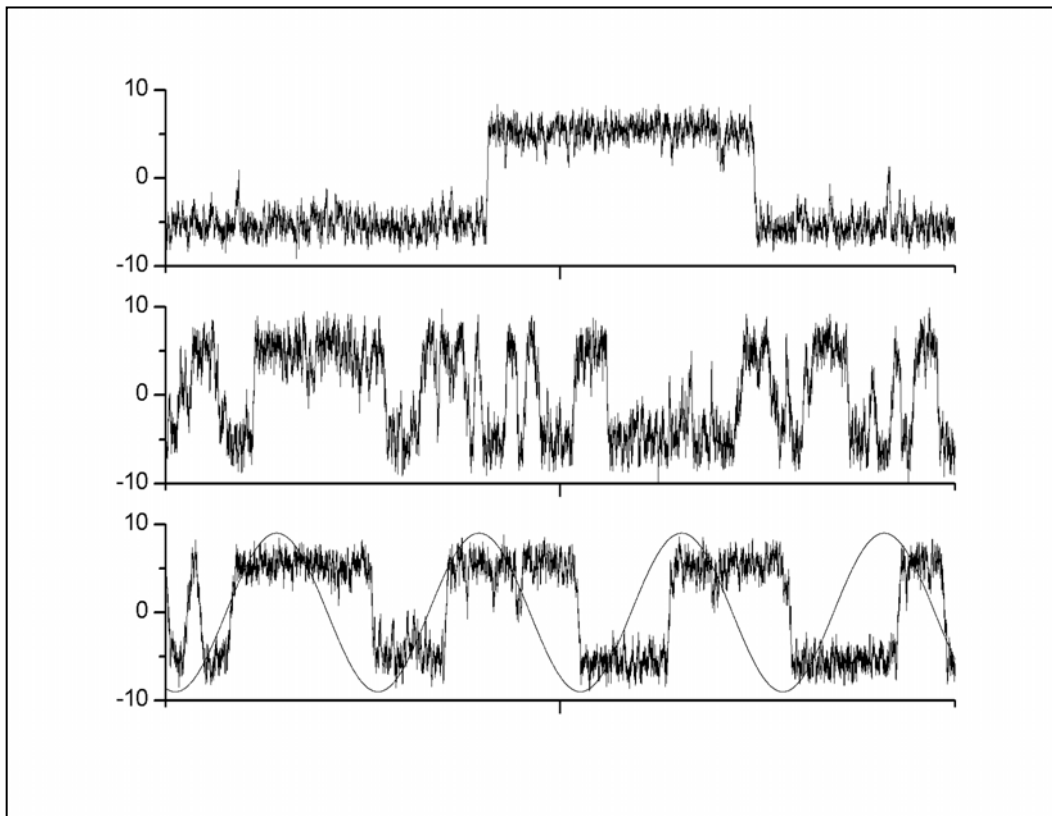


Figura 10 : Señal sinusoidal de entrada y salida (trayectoria  $x(t)$ ) del sistema. De abajo hacia arriba:  $D \approx D_{\text{óptim}}$ ,  $D > D_{\text{óptim}}$ , y  $D < D_{\text{óptim}}$ .

En la Figura 10 se observa que si la intensidad del ruido se incrementa atravesando el valor resonante, la señal de salida  $x(t)$  prácticamente se lockea con la modulante periódica de frecuencia fija. Resultados análogos se obtienen si se mantiene fija la amplitud del ruido  $D$  y se varía la frecuencia externa. Si la frecuencia es baja se presenta una asimetría de la señal de salida entre valores positivos y negativos. A valores mayores de la misma el efecto de la modulación temporal se promedia y la simetría pareciese restaurarse. A partir de estas consideraciones se puede caracterizar la resonancia estocástica como un fenómeno de sincronización, utilizando para ello la distribución de tiempos de residencia. La misma ha sido introducida como una herramienta muy útil por diversos autores ([30] [90] [91] [51] [27] ) y ha sido aplicada en diversas áreas de las ciencias naturales ([7] [52] [84] [10] [29] [57] [58] [82])

Una manera sencilla de comprender el mecanismo de la resonancia estocástica en un sistema biestable es mapeando el proceso continuo  $x(t)$  en un proceso estocástico de punto  $\{t_i\}$ . Para definir los mismos se hace lo siguiente:

- 1) se establecen dos niveles de cruce en  $x_{\pm} = \pm c$  con  $0 \leq c \leq x_{\min}$
- 2) se comienza la adquisición de datos en  $t_0$  cuando  $x(t)$  cruza por ejemplo  $x_-$  con derivada negativa ( $x(t_1) = -c; \dot{x}(t_1) < 0$ ) )
- 3) El tiempo subsiguiente se define cuando  $x(t)$  cruza por ejemplo  $x_+$  con derivada positiva ( $x(t_2) = c; \dot{x}(t_2) > 0$ ) ), y así siguiendo.

Una vez obtenidos los  $\{t_i\}$ , se define la cantidad  $T(i) = (t_i - t_{i-1})$  que representa los tiempos de residencia entre dos eventos de saltos sucesivos. No hay una forma sistemática de encontrar la distribución del proceso  $\{t_i\}$ . Para el sistema biestable, se ha demostrado que los intervalos *largos* de cruces sucesivos obedece a una estadística de tipo Poisson con una distribución exponencial (Papoulis 1965):

$$N(T) = \frac{1}{T_K} \exp(-T/T_K) \quad (1.34)$$

En particular esta distribución es una muy buena aproximación a la distribución de los tiempos medios del primer cruce (mean first passage time) entre los dos mínimos de un potencial biestable no modulado (Hänggi, Talkner, Borkovec 1990).

En cambio cuando hay modulación periódica se observan una serie de picos centrados en múltiplos impares del semi-período externo  $T_n = (n-1/2) \frac{2\pi}{\omega_{ex}}$ , con  $n=1,2,\dots$ . Se observa que el valor de los picos decrece exponencialmente con  $n$ . Cómo se explican

estos picos? El mejor tiempo para saltar de un pozo a otro es cuando el potencial relevante toma valor mínimo, estando este momento determinado por la modulación periódica. Si el sistema salta en este instante deberá esperar otro *medio período* para volver al pozo anterior, por lo tanto  $T_{\text{ext}} / 2$  es un tiempo preferido por el sistema para realizar los *switcheos*. Pero qué ocurre si el sistema “pierde esa oportunidad” de salto? Deberá entonces esperar un tiempo igual a  $3T_{\text{ext}} / 2$  para volver a saltar. Este tiempo corresponde al segundo pico de la distribución de tiempos de residencia. De esta forma se puede explicar la localización de los subsiguientes picos que se muestran en la Figura 11 Por otro lado el decaimiento exponencial de los mismos se debe a que las probabilidades de salto del sistema son estadísticamente independientes. Se podría argumentar que el valor del pico principal es una medida de la sincronización entre el forzante externo y el *switcheo* entre pozos. Si el tiempo de residencia del sistema en un pozo es mucho mayor que el semi-período externo, la distribución de tiempos de escape presentará muchos picos, donde el primero será pequeño. Si el tiempo de residencia es preferentemente  $T_{\text{ext}} / 2$  la distribución podrá presentar varios picos, pero el primero será marcadamente el más importante. Por lo tanto la condición de óptima sincronización se dará cuando el pico que presente la distribución en  $T_{\text{ext}} / 2$  tome un valor máximo.

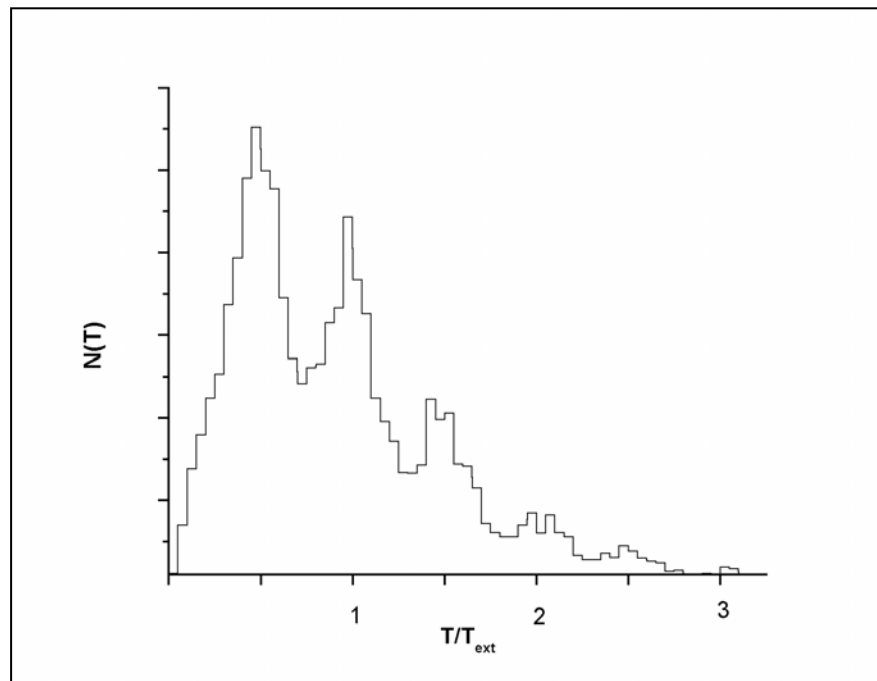


Figura 11 : Distribución de tiempos de residencia para un potencial biestable.

Es importante aclarar que esta distribución múltiplos de los tiempos de residencia no significa que el espectro de potencia presentará subarmónicos de la frecuencia externa, ya que los saltos en tiempos que son múltiplos impares del semiperíodo externo ocurren espaciados aleatoriamente en tiempo y por lo tanto no aparecen componentes espectrales definidas.

Zhou et. al. [92] y Löfstedt et. al. [50][51] calcularon la distribución de los tiempos de residencia  $N(T)$  para el modelo de dos estados, que a primer orden se obtiene:

$$N(T) = N_o \left[ 1 - (1/2)(\epsilon c / D)^2 \cos(\omega_s T) \right] r_K \exp(-r_K T) \quad (1.35)$$

donde

$$N_o^{-1} = 1 - \frac{(1/2)(\epsilon c / D)^2}{1 + \left( \frac{\omega_s}{r_K} \right)^2}$$

A partir de la figura se observa la estructura múltiplos de la expresión dada por la ecuación..., con  $T_n = (n-1/2)T_{\text{ext}}$ . Más aún, el valor del primer pico puede ser fácilmente calculado integrando la ecuación (1.35) sobre el intervalo

$T_n = [(1/2-\alpha), (1/2+\alpha)]T_{\text{ext}}$  con  $0 < \alpha \leq 1/4$ , obteniéndose un máximo para  $r_K \approx 2\omega_s$ .

## 1.5 Sistemas biestables continuos.

La descripción de la resonancia estocástica a partir de la aproximación de dos estados es limitada ya que la dinámica se reduce a un mecanismo de saltos entre dos estados metaestables solamente, despreciándose la dinámica de corto tiempo que ocurre en la cercanía del estado.

Una forma genérica de modelar la resonancia estocástica es considerar una partícula Browniana de masa  $m$  que se mueve en un potencial biestable  $V(x)$  y sujeta a una fuente de ruido termal  $\xi(t)$  de tipo Nyquist a temperatura  $T$ . Perturbamos la partícula con una fuerza periódica de amplitud  $A_o$  y frecuencia  $\Omega$ , quedando entonces la correspondiente ecuación de Langevin de la siguiente forma:

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} - V'(x) + m A_o \cos(\Omega t + \phi) + \sqrt{2m\gamma kT} \xi(t) \quad (1.36)$$

Donde  $\xi(t)$  denota ruido blanco Gaussiano con media cero y autocorrelación  $\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = \delta(t-s)$ . La descripción estadística equivalente para la densidad de probabilidad  $p(x, v = \dot{x}, t, \varphi)$  viene gobernada por la ecuación de Fokker-Planck bidimensional:

$$\frac{\partial p(x, v, t, \varphi)}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} [\gamma v + f(x) - A_o \cos(\Omega t + \varphi)] + \gamma D \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right\} p(x, v, t, \varphi) \quad (1.37)$$

donde  $f(x) = V'(x)/m$  y  $D = kT/m$  es el coeficiente de difusión. Para valores grandes del coeficiente de fricción  $\gamma$  se puede simplificar la dinámica a través de la eliminación adiabática de la velocidad ([60] [78] [35]) arribando a la ecuación de Langevin modulada periódicamente:

$$\gamma \dot{x} = f(x) + A_o \cos(\Omega t + \varphi) + \sqrt{2\gamma D} \xi(t)$$

En nuestro caso  $f(x)$  es de la forma:  $f(x) = (ax - bx^3)/m$ . Adimensionalizando las variables y parámetros, la ecuación de Fokker Planck toma la siguiente forma adimensional:

$$\frac{\partial p(x, t, \varphi)}{\partial t} = L(t)p(x, t, \varphi) \equiv [L_o + L_{ext}(t)]p(x, t, \varphi) \quad (1.38)$$

Donde el operador de Fokker Planck definido como  $L_o = -\frac{\partial}{\partial x}(x - x^3) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  describe la dinámica sin perturbar en el potencial bistable reescaleado  $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$  con una barrera de alto  $1/4$ . El operador correspondiente a la perturbación es de tipo gradiente:  $L_{ext} = -A_o \cos(\Omega t + \varphi) \frac{\partial}{\partial x}$ .

La dinámica browniana sobreamortiguada en (1.38) describe un proceso markoviano no estacionario que es invariante ante translaciones temporales discretas  $t \rightarrow t + T_{ext}$  pudiéndose aplicar el teorema de Floquet ([23] [56]) a la ecuación diferencial correspondiente. Para el operador periódico general de Fokker Planck,  $L(t) = L(t + T_{ext})$



se pueden obtener soluciones relevantes de Floquet del tipo  $p(X, t, \varphi) = \exp(-\mu t) p_\mu(X, t, \varphi)$  con autovalores de Floquet  $\mu$  y modos periódicos de Floquet  $p_\mu$  (autofunciones del operador). Este concepto derivado de la teoría de perturbaciones para las cantidades espectrales tales como los modos y autovalores de Floquet, es un método adecuado para estudiar las bases físicas que caracterizan la resonancia estocástica. Otro concepto que también es habitualmente utilizado con el mismo fin es el concepto de respuesta lineal, el cual emerge como una aplicación específica de la teoría de perturbaciones. Ambos conceptos han sido utilizados e investigados en numerosos estudios sobre resonancia estocástica ([61] [74] [19] [20] [21] [16] [40] [41] [43] [44] ). En lo que sigue me enfocaré en el concepto de respuesta lineal dentro del marco de la teoría de respuesta lineal, de cuyo estudio Kubo ([46] [47] ) fue pionero y luego extendido por Hänggi y Thomas ([39]) a una gran clase de procesos estocásticos que admiten estados estacionarios fuera del equilibrio térmico, como muchos de los encontrados en los sistemas químicos, biológicos y ópticos.

Sea  $x(t)$  un observable Markoviano unidimensional sometido a una perturbación periódica externa y débil. De acuerdo a Hänggi ([38] [39]) la respuesta en el límite de tiempos largos debido a una perturbación periódica (con fase inicial nula) es:

$$\langle x(t) \rangle_{as} = \langle x(t) \rangle_0 + \int_{-\infty}^t ds \chi(t-s) A_o \cos(\Omega s) \quad (1.39)$$

donde  $\langle x(t) \rangle_0$  corresponde al promedio promediado del proceso sin perturbar. El término  $\chi(t)$  se denomina la *función respuesta*

El operador correspondiente a la perturbación externa toma la forma general:  $L_{ext}(t) \equiv A_o \cos(\Omega t) \Gamma_{ext}$ , permitiendo expresar  $\chi(t)$  de la siguiente forma:

$$\chi(t) \equiv H(t) \iiint dx dy dz P_o(x, t | y, 0) x \Gamma_{ext}(y, z) p_o(z) \quad (1.40)$$

donde

$H(t)$  es la función de Heaviside,  $p_o(z)$  es la densidad de probabilidad estacionaria del proceso sin perturbar,  $P_o(x, t | y, 0)$  es la densidad de probabilidad condicional y  $\Gamma_{ext}(x, y)$  describe la perturbación en el operador maestro. La función respuesta dada en la ecuación (1.40) puede ser expresada a través del teorema de fluctuación, introduciendo

la fluctuación  $\xi(x(t))$  (que satisface  $\langle \xi(x(t)) \rangle_0 = 0$  y  $\delta x(t) = x(t) - \langle x(t) \rangle_0$ ), de la siguiente manera:

$$\chi(t) = -H(t) \frac{d}{dt} \langle \delta x(t) \xi(x(0)) \rangle_0 \quad (1.41)$$

Es decir que la función de respuesta lineal puede ser obtenida como la derivada temporal de la función de correlación estacionaria entre las fluctuaciones sin perturbar  $\xi(x(t))$  y  $\delta(x(t))$ . A partir de la representación espectral de la probabilidad condicional podemos expresar la ecuación anterior como:

$$\chi(t) = H(t) \sum_{n=1}^{\infty} g_n \lambda_n \exp(-\lambda_n t) \quad (1.42)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1.39) y luego transformando Fourier se obtiene:

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n \lambda_n}{\lambda_n + i\omega} \quad (1.43)$$

donde  $\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)$  es la transformada de Fourier de la función respuesta; representa la *susceptibilidad* del sistema y contiene toda la información de cómo el sistema responde a un forzante externo débil. La misma contiene la información de la amplitud de la señal y su desfase (*phase lag*) con respecto al forzante.

A partir de apropiados reemplazos, se puede entonces expresar el valor medio de la fluctuación  $\delta x(t)$  como:

$$\langle \delta x(t) \rangle = 2|M_1| \cos(\Omega t - \bar{\phi}) \quad (1.44)$$

$M_1$  es la amplitud espectral  $|M_1| = \frac{A_0}{2} |\chi(\Omega)|$  y  $\bar{\phi} = \arctan \left\{ \frac{\chi''(\Omega)}{\chi'(\Omega)} \right\}$  la fase positiva de

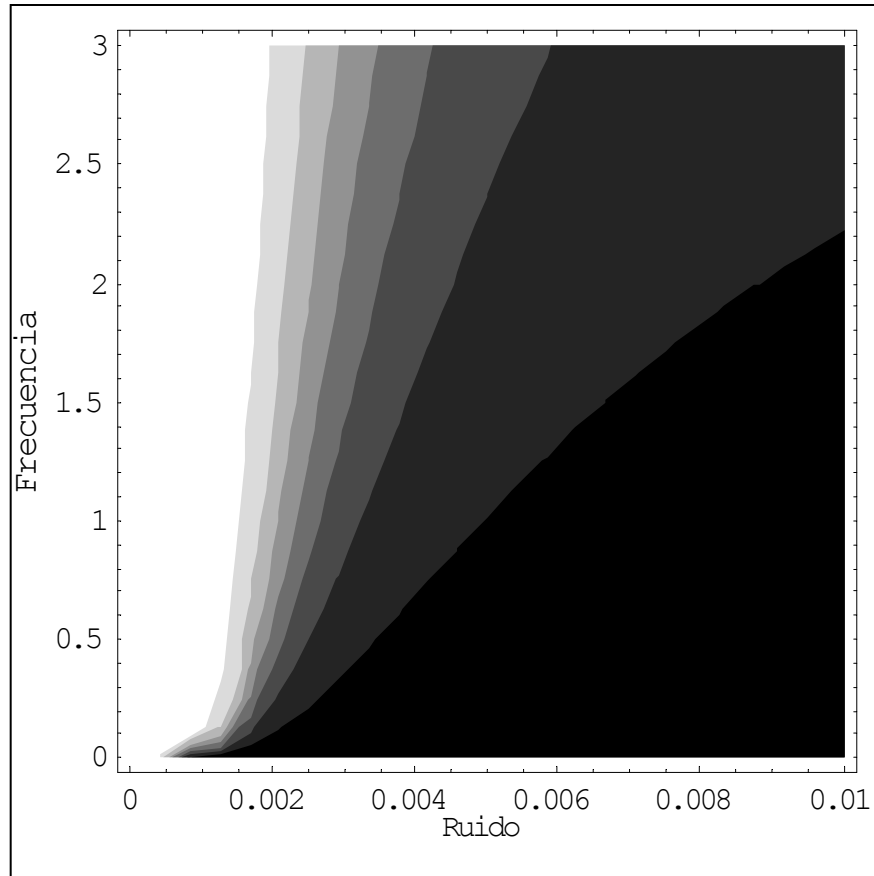
retardo.

Estos resultados son válidos para un sistema estacionario general estacionario no térmico.

Para un proceso de Markov-Gaussiano modulado periódicamente sólo contribuyen los términos  $m=\pm 1$  y  $m=0$  en la ecuación (1.43), obteniéndose entonces a partir de la función de respuesta  $\chi(t)$ , que  $\bar{\phi} = \bar{\phi}_1$ . Despreciando los términos correspondientes a la dinámica dentro del pozo ( $n \geq 2$ ), y haciendo una aproximación exponencial para la fase, se obtiene: ([71] [61] [28])

$$\bar{\phi} = \arctan\left(\frac{\Omega}{2r_k}\right) \quad (1.45)$$

En la Figura 12 se presenta un gráfico de las curvas de nivel de  $\bar{\phi}$  correspondientes a esta ecuación, en función del ruido y la frecuencia. Se observa que la misma decrece monótonicamente desde  $\pi/2$  en  $D^+=0$  ( $\Omega \rightarrow 0$ ), hasta cero cuando  $D \rightarrow \infty$ , resultado equivalente al obtenido en la aproximación de dos estados.



*Figura 12: Curvas de nivel para el corrimiento de la fase en función del ruido y la frecuencia en la aproximación lineal. El nivel blanco corresponde a  $\pi/2$ , decreciendo hasta el valor 0 para el nivel de color negro.*

La inclusión de los término correspondientes a la dinámica dentro del pozo cambia este comportamiento monótonico en una curva con un máximo, mientras la amplitud del forzante sea pequeña ([17] [18] [19] [29]), resultado consistente con la teoría de respuesta lineal. Cuando la intensidad del ruido es pequeña, la influencia de la

dinámica dentro del pozo es suprimida en el retardo de la fase. Es decir que en el régimen de validez de la aproximación de respuesta lineal, el máximo en  $\bar{\phi}$  marca una separación entre regímenes dominados por la dinámica entre y dentro de los pozos. Además, y esto es importante aclararlo, el máximo no está físicamente relacionado con el que caracteriza la resonancia estocástica, ya que esta tiene su origen en un efecto de *sincronización* entre la escala temporal asociada a la dinámica entre pozos y al período del modulante externo, que actúa como un “reloj”. En cambio el máximo en  $\bar{\phi}$  vs la intensidad del ruido (para frecuencias y amplitudes pequeñas, ya que sino deja de valer la aproximación de respuesta lineal), se debe a una *competencia* entre las dinámicas entre y dentro de los pozos, y no debe confundirse con la señal de resonancia estocástica.

### 1.5.1 Distribución de tiempos de residencia

La distribución de tiempos de residencia (DTR) ofrece otra posibilidad para caracterizar la resonancia estocástica ([30] [91] [92]). Cuando no hay un forzante externo, la DTR se define como la distribución de tiempos que le toma al sistema escapar de un pozo, la cual es independiente del punto inicial para ruidos débiles. Cuando hay modulación periódica, la DTR dependen de la fase inicial de la misma, convirtiéndose en una DTR condicional.

La DTR se define a partir de la distribución de intervalos de tiempo  $\Delta_n$  entre dos eventos de salto consecutivos. Una de las estrategias para encontrar la DTR es computar primero la DTR condicional y luego promediar sobre la distribución de fases de switcheo  $\phi = \Omega t$ , para lo cual la modulación temporal del potencial debe ser lenta en comparación con la relajación dentro del pozo (aproximación adiabática  $\rightarrow$  aproximación de dos estados) ([91][92]).

El punto de partida para calcular DTR condicional  $\rho_e(t)$  fuera del pozo negativo es la ecuación para la tasa instantánea para la población en dicho pozo  $n_-(t, \phi)$ :

$$\dot{n}_-(t, \phi) = -r_+(\Omega t + \phi) n_-(t, \phi) \quad (1.46)$$

La tasa  $r_+$  cuasiestacionaria denota la tasa de transición adiabática para el potencial :

$$V_{ad}(x, t) = x^4 / 2 - x^2 / 2 - A_o x \cos(\Omega t + \phi) \quad (1.47)$$

Suponiendo una condición inicial  $n_-(0, \varphi) = 1$ ,  $A_o$  pequeño y la *aproximación adiabática* en las tasas de Kramers se obtiene:

$$r_+(\Omega t + \varphi) = \frac{I}{2\pi} \sqrt{|V_{ad}''(x_b)V_{ad}''(x_m)|} \exp\left(-\frac{\Delta V_-(\Omega t + \varphi)}{D}\right) \quad (1.48)$$

donde  $\Delta V_-(\Omega t + \varphi)$  es el alto de la barrera y  $V_{ad}''(x_b)$  y  $V_{ad}''(x_m)$  las curvaturas del potencial adiabático en el máximo y en el mínimo. Para pequeñas amplitudes del forzante dicha expresión se puede aproximar a:

$$r_+(\Omega t + \varphi) \approx r_K \left[ 1 + \frac{3}{4} A_o \cos(\Omega t + \varphi) \right] \exp\left[ \frac{A_o}{D} \cos(\Omega t + \varphi) \right] \quad (1.49)$$

A partir de esta teoría adiabática y despreciando las correcciones en el prefactor debido al forzante, se recuperan las tasas  $W_{\pm}$  del modelo de dos estados.

La DTR condicional puede ser entonces escrita como:

$$\rho_e(t, \varphi) = -\dot{n}_-(t, \varphi) = r_+(\Omega t + \varphi) \exp\left(-\frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega t} r_+(\theta, \varphi) d\theta\right) \quad (1.50)$$

Para calcular la DTR, es necesario encontrar una expresión  $Y_-(\phi)$  que de cuenta del salto de fase al saltar del pozo negativo. Para frecuencias  $\Omega \ll r_K$  no hay una fase preferida, por lo tanto  $Y_-(\phi) = 1/(2\pi)$ . Para frecuencias mayores Abramowitz-Stegun [1] proponen una aproximación dada por:

$$Y_{\pm}(\phi) = \frac{1}{2\pi I_o(A_o/D)} \exp\left(\pm \frac{A_o}{D} \cos(\phi)\right) \quad (1.51)$$

con  $I_o(x)$  la función de Bessel modificada. Por lo tanto la DTR para el potencial simétrico biestable queda:

$$N(T) = \langle N(t, \varphi) \rangle = \int_0^{2\pi} \left[ Y_-(\varphi) r_+(\Omega t + \varphi) \exp\left(-\frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega t} r_+(\theta, \varphi) d\theta\right) \right] d\varphi \quad (1.52)$$

Desarrollando la ecuación (1.52) a primer orden en  $A_o/D$

$$N(T) = N_o \left[ 1 - (1/2)(A_o x_m / D)^2 \cos(\Omega T) \right] r_K \exp(-r_K T) \quad (1.53)$$

$$N_o^{-1} = 1 - \frac{(1/2)(A_o x_m / D)^2}{1 + \left(\frac{\Omega}{r_K}\right)^2}$$

se reobtiene la expresión dada en la ecuación (1.35)

En la Figura 13 se grafica  $N(T)$  para valores de ruido por debajo, próximo y mayor que el valor óptimo.

Para cuantificar el valor del pico  $n$ -ésimo de  $N(T)$ , ubicado en  $T_n = (n - 1/2)T_\Omega$ , se estima el área bajo la curva correspondiente a cada pico:

$$(1.54) \quad P_n = \int_{T_n - \alpha t_\Omega}^{T_n + \alpha t_\Omega} N(t) dt$$

con  $n=1,2,\dots$  y  $0 \leq \alpha \leq 1/4$ . Este pico da cuenta del tiempo para cruzar la barrera después de  $n-1$  períodos, y no le corresponde ninguna componente espectral subarmónica en el espectro de potencias. En el régimen de validez de la ecuación (1.53), el fondo de la distribución es despreciable y el valor del pico sólo será función del cociente  $r_K/\Omega$ . Por lo tanto, el pico  $P_n$  alcanzará un máximo cuando la frecuencia externa cumpla la condición  $\nu_n = (n - 1/2)r_K$  o dejando la misma fija y variando adecuadamente la intensidad del ruido (ver Figura 13).

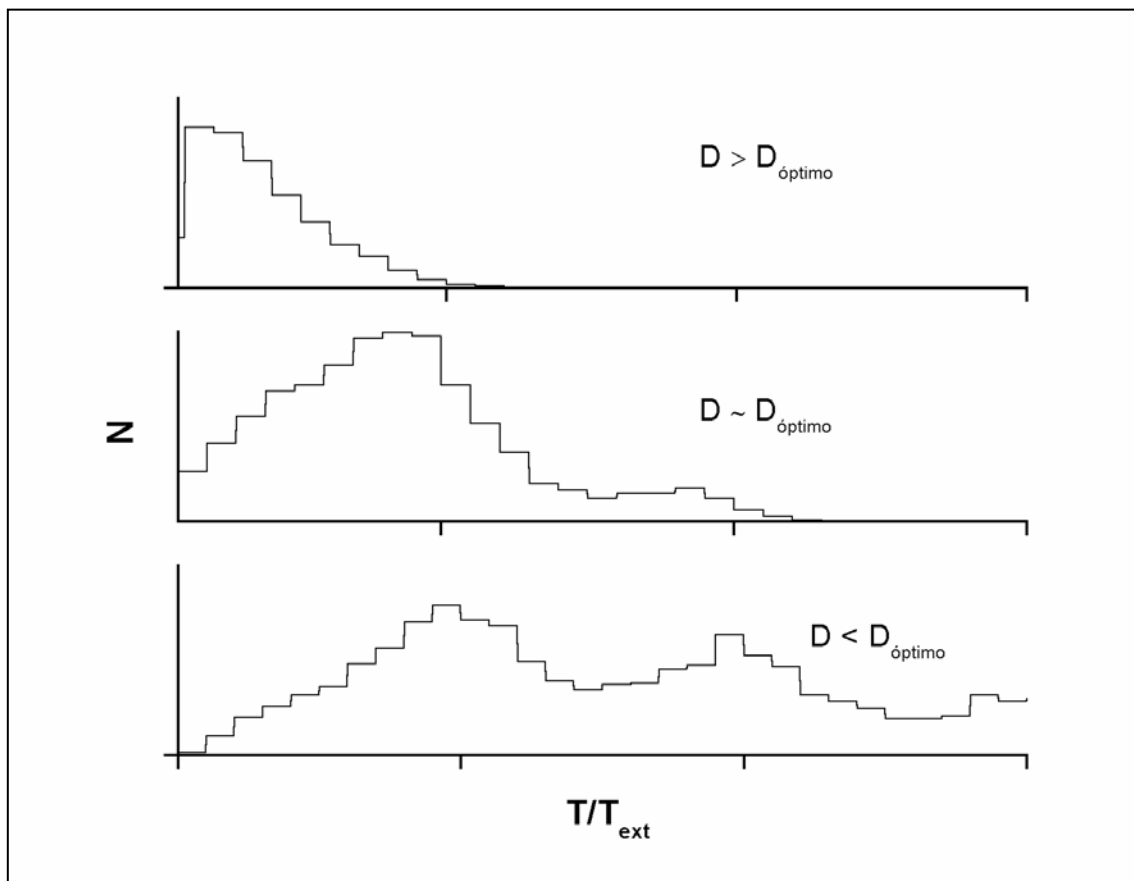


Figura 11 : Distribución de tiempos de residencia  $N(T)$  para el potencial cuártico en función de  $T/T_{ex}$ . La intensidad del ruido ( en unidades de  $U_o$  ) aumenta de abajo hacia arriba manteniendo la frecuencia externa constante.

De esta forma la resonancia estocástica puede ser pensada como un mecanismo de sincronización [27]. Sin embargo es importante aclarar que aunque  $P_1$  presenta un máximo con la frecuencia, el mecanismo subyacente no es una resonancia en el sentido de los sistemas dinámicos. Mientras que una resonancia dinámica es debida a la interacción de dos grados de libertad con sus escalas temporales coincidentes, el origen del pico  $P_1$  se debe únicamente a la coincidencia de dos escalas temporales.

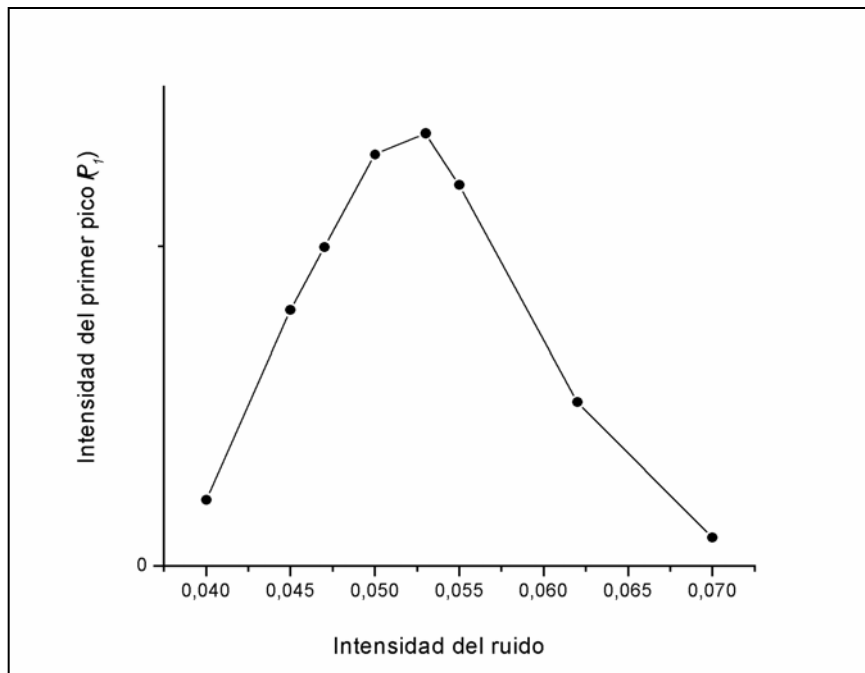


Figura 13 :  $P_1$  versus la intensidad del ruido ( en unidades de  $U_0$ )

A manera de resumen: en este capítulo se ha introducido el concepto de resonancia estocástica, su origen, mecanismo y diversos cuantificadores de la misma, los cuales serán utilizados en los siguientes capítulos de este trabajo.

## Organización del Trabajo

Hemos estructurado la tesis de la siguiente manera:

- En el capítulo 2 presentaremos un estudio numérico sobre la posibilidad de transmisión de una señal periódica en un arreglo lineal de osciladores y su tolerancia respecto a las fallas.
- En el capítulo 3 estudiaremos la transmisión de dicha señal en un arreglo con condiciones periódicas de contorno, y analizaremos numéricamente la posibilidad de que dicho dispositivo funcione como una mímica de memoria de corto plazo.
- El capítulo 4 estará dedicado al estudio experimental de la transmisión de una señal periódica. Para ello presentaremos el diseño y caracterización del dispositivo experimental utilizado.
- En el capítulo 5 analizaremos numéricamente el comportamiento de la diferencia y sincronización de fase entre unidades en ambos tipos de arreglos (cadena abierta y con condiciones periódicas de contorno)
- Finalmente en el capítulo 6 expondremos las conclusiones y posibles extensiones de este trabajo.



# Capítulo 2

## Modelo de transmisión neuronal

### 2.1 Introducción

Como ya se mencionó en la introducción, el fenómeno de resonancia estocástica fue esencialmente reconocido y analizado en sistemas dinámicos del tipo biestable. Luego su estudio se extendió a sistemas monoestables y, dentro de esta categoría, a los sistemas excitables o de umbral. Un importante prototipo experimental que generalmente se sugiere para este tipo de sistemas es la neurona. Las neuronas en el cerebro están acopladas o “engarzadas” en un entramado de operaciones, muy complejo pero eficiente, para el procesamiento de señales que es un objeto continuo de investigación. En este sentido, es importante elucidar si la resonancia estocástica entra en juego en los procesos neurofisiológicos referidos a la transmisión neuronal y de qué forma lo hace. Con este objetivo se pueden realizar diferentes modelos a partir de distintos sistemas que permitan simular este fenómeno para así poder analizarlo en detalle. Esto requiere considerar arreglos de uno o más elementos acoplados con diferentes topologías, donde cada uno simule el comportamiento de una o varias neuronas en el “entramado neuronal”. Por ejemplo, para el caso de una única neurona, las señales que las estimulan y que provienen del medio exterior que pueden interpretarse como entradas análogas, como en el caso de las neuronas sensoras periféricas. En estudios relacionados con la respuesta de este tipo de neuronas a dicho tipo de estímulo, se la somete a señales análogas, i.e. una entrada coherente que usualmente es una función senoidal, y un ruido continuo, usualmente Gaussiano y blanco. Estas condiciones han sido estudiadas en modelos neuronales con un carácter excitable monoestable [5][21], y también en otros modelos en donde un sistema biestable puede reproducir las propiedades de una neurona [6][22], entre ellos la respuesta neuronal en forma de espigas (*spikes*) o *tren de spikes* [8][9][12]. Estos trenes de spikes son los que acarrearán la información involucrada en los procesos cognitivos.

En otras circunstancias, los trenes de spikes tienen el status de ruido, el cual resulta de estadios estocásticos que pueden dominar en la respuesta neuronal o en la actividad endógena de las neuronas que actúan como marcapasos, debido a un reloj molecular que controla el ritmo circadiano [23]

El punto principal a partir del cual se desarrollaron los primeros estudios analíticos y numéricos sobre la importancia de la resonancia estocástica en los procesos neuronales, fue la semejanza existente entre los histogramas de los tiempos entre espigas (*inter-spike*) de las neuronas excitadas y las distribuciones de los tiempos de residencia de los modelos de sistemas de osciladores biestables con ruido donde las dos configuraciones estables corresponden a los estados de reposo y activación del axón [3-5]. A partir de experimentos muy variados y delicados que permitieron registrar la respuesta de una única neurona excitada por un estímulo periódico y diferentes niveles de ruido, se logró observar la resonancia estocástica en neuronas [6][7]. Entre ellos cabe mencionar la demostración experimental de la resonancia estocástica en neuronas sensoras que fuera realizada por el equipo de Moss., a partir de la respuesta de un célula neuronal mecanorreceptora del cangrejo, la cual fue estimulada por una combinación de movimientos periódicos y aleatorios [7].

Se han realizado simulaciones numéricas masivas[10][12] y varios estudios analíticos en modelos continuos, como es el caso de [11], para modelar y comprender el proceso de transmisión neuronal. A partir de estos trabajos se observó que el sistema presenta una creciente respuesta colectiva, asociado con un proceso de sincronización debido a la Resonancia Estocástica de un único elemento para una adecuada intensidad del ruido y del acoplamiento local entre los “ resonadores estocásticos”.

Entre las muchas características relevantes que tiene el acoplamiento neuronal neuronal podemos mencionar las siguientes:

- Es robusto y tolerante a las fallas (*fault tolerance*). El cerebro tiene capacidad para la llamada *degradación grácil*. A nivel neuronal, el cerebro continúa funcionando cuando pierde grandes cantidades de células nerviosas como resultado del envejecimiento normal o de traumatismos, sin afectar su performance significativamente.
- La *direccionalidad* del acoplamiento neuronal.
- Puede operar con información difusa, probabilística, ruidosa o inconsistente.
- Es flexible y adaptable: se puede ajustar a un nuevo entorno “aprendiendo”.

Estas características han motivado el presente trabajo, es decir, presentar un modelo sencillo para comprender la transmisión unidireccional de información, la tolerancia a

las fallas y el fenómeno de almacenamiento de la información o memoria a partir de bucles reverberantes neuronales.

Con respecto al primero de ellos ha sido tenido en cuenta en la vasta variedad de modelos de redes neuronales artificiales [19] y en los denominados modelos tipo integrated-and-fire [14], es decir aquellos sistemas que al superar algún valor umbral producen una activación o disparo.

Este trabajo de tesis, surge como una alternativa de modelización de procesos de transmisión de señales entre neuronas. A partir de los trabajos mencionados en párrafos anteriores, tanto los de carácter numérico, pero especialmente los basados en evidencias experimentales, se ha propuesto un modelo de transmisión unidireccional de un dado estímulo en una cadena de neuronas, donde las mismas se simulan a partir de osciladores biestables. La relevancia de la resonancia estocástica en la transmisión a lo largo de una línea donde los elementos del arreglo se hallan acoplados bidireccionalmente, ha sido experimentalmente analizada en [17] y, también en este trabajo de tesis donde los elementos se acoplan unidireccionalmente, condición más adecuada para modelizar una línea de transmisión neuronal. También se ha discutido este fenómeno numéricamente en [14][15] y en la presente tesis. El rol de un ruido aditivo no correlacionado es efectivamente mejorar la transmisión de la señal a lo largo de la cadena de osciladores biestables acoplados unidireccionalmente como ya lo demostraran Zhang et. al. [20] y Perazzo et. al [24] . En dichos trabajo los autores muestran que en ciertos casos y bajo determinadas condiciones, se puede lograr la transmisión de una señal esencialmente no amortiguada debido a una acción combinada de un ruido y una señal inyectada al sistema. La distinción fundamental entre ambos trabajos es la motivación que conduce a la realización del modelo: la idea subyacente en la utilización del modelo por Perazzo et.al. es considerarlo como un modelo tipo integrated-and-fire y estudiar la dinámica del sistema en tiempos que son más largos que los períodos típicos entre disparos, teniendo en cuenta características propias de los procesos neurofisiológicos como la tolerancia a los defectos.

En Ref. [18] se muestra que un efecto similar se puede encontrar en arreglos uni y bi-dimensionales formados por osciladores biestables pero acoplados bidireccionalmente. Aún en estos casos, se encuentra que un ruido moderado ayuda a que se produzca la sincronización de las oscilaciones y por lo tanto la transmisión a lo largo de la línea o red. Todos estos autores estudiaron la robustez de este fenómeno en sistemas genéricos y simples, es decir modelos numérico de cadenas de osciladores con acoplamientos a primeros vecinos en una o dos direcciones, dándole el nombre de

*Propagación incrementada por ruido* o *Noise Enhanced Propagation (NEP)*. Este es visto por los autores como una extensión importante, no trivial y genérica de la resonancia estocástica, un fenómeno cooperativo que involucra señal, ruido, no linealidad y acoplamiento, importante en procesos biofísicos y bioquímicos, especialmente redes neuronales y que podría ser explotado en comunicaciones y tecnologías de detección, obteniendo leyes de escala para optimizar la *NEP*, poniendo especial atención que su caso se halla libre de la posibilidad de un “efecto dominó” que se halla presente en los arreglos de las Ref [13] y [14].

Con respecto al segundo aspecto del acoplamiento neuronal que he mencionado y que no puede ignorarse: su *fault tolerance* o tolerancia a los defectos, Perazzo et. al. [24], proponen un modelo simple con el objetivo de explorar esta característica. Este modelo busca desarrollar una mímica de la transmisión sináptica entre neuronas en situaciones en donde alguna neurona se halla dañada o “muerta”, hecho que se modela privando de ruido térmico a algún elemento de la cadena y estudiando la aparición del régimen de transmisión en el espacio de los parámetros relevantes del sistema. En una sección posterior presentaremos el análisis de la respuesta del sistema bajo esta condición.

## **2.2 Modelo de transmisión neuronal : Cadena Lineal de Osciladores.**

Con los sistemas acoplados en una dirección, un problema interesante es de qué forma los sitios más alejados del sistema reponden a una excitación aplicada en un sitio cercano. En particular, es interesante estudiar cómo una señal inyectada al primer sitio de un sistema, se transmite en el medio. Más aún, el medio podría estar sujeto a ruido, y entonces uno podría preguntarse cómo el ruido puede influir sobre el proceso de transmisión de la señal. Es entonces significativo preguntarse si se puede encontrar un comportamiento tipo Resonancia Estocástica en el problema de la transmisión, y cómo este comportamiento influencia la propagación de la señal.

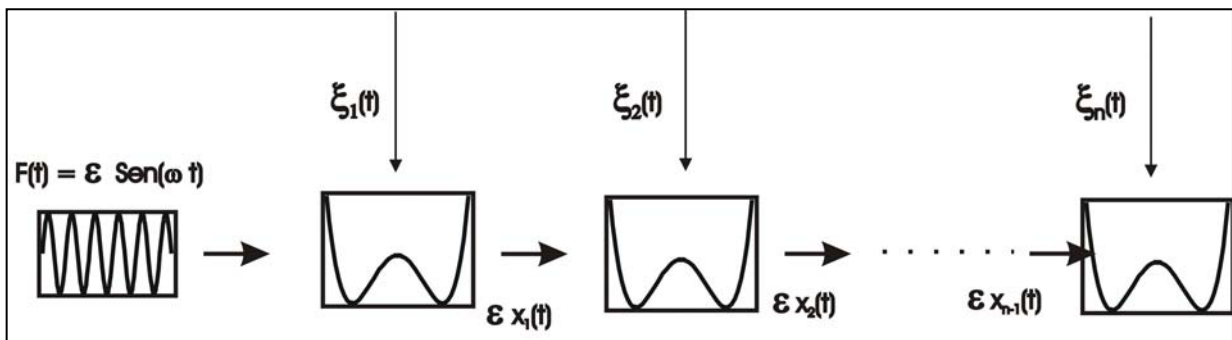
Para esto consideramos una propagación unidireccional de una señal periódica de pequeña amplitud y baja frecuencia, a lo largo de una cadena de osciladores biestables asimétricamente acoplados, cada uno sometido a un ruido externo aditivo y con los parámetros típicos del problema acordes a los de MacNamara et al. [1]. Vamos a

asumir que los osciladores no lineales operan en un régimen sobreamortiguado, por tanto se desprecia el término de inercia, en cuyo límite la ecuación de movimiento de una partícula forzada queda:

$$\dot{x} = -\partial_x U(x, t) \quad (2.1)$$

En todo momento se asume que los estados neuronales “activos” y de “reposo” son igualmente estables. Es necesario aclarar que cuando se considera una neurona *activa*, se quiere significar que el tren de spikes está siendo transmitido a lo largo del axón, para luego excitar la siguiente neurona de la línea. La eficacia sináptica se representa por el parámetro  $\varepsilon'$  que cuantifica el acoplamiento entre un oscilador y el siguiente en la línea. El ruido gaussiano con el cual cada oscilador es alimentado da cuenta de las excitaciones aleatorias del medio al cual cada neurona responde.

El siguiente gráfico muestra una representación esquemática del sistema:



Expresando esto matemáticamente: sea  $x_n$  la amplitud del oscilador  $n$ -ésimo, con  $n=1, \dots, N$ , siendo  $N$  el número total de elementos en la cadena. Sea  $V(x_n)$  un potencial cuártico usual con mínimo  $U_0$  ubicados en  $x = \pm c$ . Este potencial es de particular interés porque representa el sistema biestable más simple para una variable continua.

$$U(x) = -U_0 \left( \frac{x}{c} \right)^2 \left( 2 - \left( \frac{x}{c} \right)^2 \right) \quad (2.2)$$

Si cada oscilador está sometido a un forzante externo  $F_n^{dr}$ , el potencial toma la forma:

$$U(x_n, t) = U(x_n) - \left( \frac{x_n}{c} \right) F_n^{dr} \quad (2.3)$$

donde para el caso de la cadena lineal mencionada, podemos expresar  $F_n^{dr}$  como:

$$F_n^{dr} = \begin{cases} \varepsilon \cos(\omega t) & \text{si } n=1 \\ \frac{\varepsilon'}{c} x_{n-1}(t) & \text{si } n>1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Se han elegido las unidades de forma tal que el coeficiente  $\gamma$  para la dinámica dentro del pozo es 1, y todas las amplitudes están medidas en unidades de  $c$ . Las dos constantes de acoplamiento  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$  en la eq. (4) tienen las mismas dimensiones que  $\dot{x}$ . En este modelo se ha omitido cualquier tiempo de retardo en el acoplamiento ya que en esta topología no introduce ningún ingrediente conceptual relevante. Además se asume que todos los osciladores están en presencia de fuentes de ruido Gaussiano no correlacionado, es decir que se verifica que:

$$\begin{aligned} \langle G_n(t) \rangle &= 0 \\ \langle G_i(t) G_j(t') \rangle &= \delta_{ij} \delta(t-t') \end{aligned} \quad (2.5)$$

$G_n(t)$  con densidad de potencia espectral unitaria, acoplado con intensidad  $\sqrt{D}$ . El set de ecuaciones de movimiento acopladas es entonces:

$$\dot{x}_n + \frac{dV}{dx_n} = F_n^{dr} + \sqrt{D} G_n(t) \quad (2.6)$$

Se ha integrado este conjunto de ecuaciones adoptando los siguientes valores para los parámetros característicos:

$$U_o = 256 \quad ; \quad c = 4\sqrt{2} \quad ; \quad \omega_{ex} = 0.39\pi$$

La amplitud de entrada se fija en un nivel subumbral de  $\varepsilon = 8$ . En otras simulaciones numéricas se han variado el valor de estos parámetros encontrándose resultados similares. Por esta razón se ha elegido mantener durante todo este trabajo estos valores fijos para estas constantes que no incluiremos en el conjuntos de parámetros relevantes del sistema.

Para describir la transmisión de la señal calculamos y comparamos la SNR (como fue definida en la ecuación (1.10) de cada sitio. Los parámetros  $D$  (que se elige expresarlo en unidades de  $U_o$ , que es el alto del pozo) y  $\varepsilon'$  son de control. Con el objeto de calcular la relación señal-ruido para cada elementos, hemos calculado los espectros de potencia promediando los mismos sobre un conjunto de condiciones iniciales aleatorias suficientes para descartar las fluctuaciones de fondo e independizar el resultado de la fase inicial y hemos descartado el transitorio. Para realizar las

simulaciones numéricas se ha tomado un tiempo de integración suficientemente largo tal que:  $T_{int\,eg} > 200 \, 2\pi / \omega_{ex}$ , para garantizar que efectivamente la SNR corresponde a la señal de salida.

### 2.2.1 Caso I: Sin ruido

Primero se estudia la transmisión sin ruido,  $D=0$ . Como ejemplo de esta situación, en la Figura 1, se grafica la SNR en función del sitio, calculada a partir de la expresión (1.10), para distintos ruidos en una cadena  $N=16$  y distintos valores de la amplitud de la señal coherente.

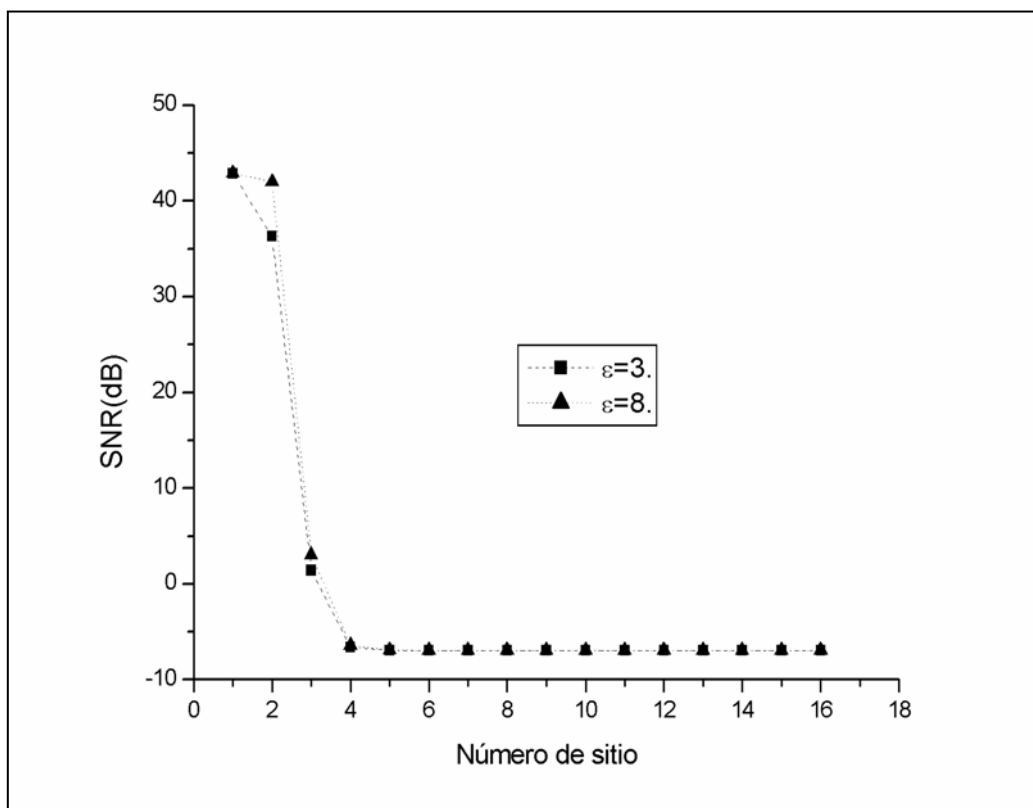


Figura 1 : Relación señal-ruido para una cadena de 16 osciladores sin ruido y para dos valores  $\varepsilon$  diferentes de la amplitud del forzante periódico.

Como se observa en todos los casos, la SNR se hace despreciable a partir de unos pocos sitios, esto es la señal sólo puede transmitirse una “ corta” distancia, y esto es independiente de la precisión de trabajo. Dicho de otra manera, para este nivel de ruido

la transmisión es local y decae exponencialmente de sitio a sitio, según se muestra en la Figura 1 ([20]). Por lo tanto, el decaimiento de la SNR verifica:

$$SNR(n) = R(n) = R(0) \exp(-n / \lambda) \quad (2.7)$$

con  $n \geq 1$ , y  $\lambda$  es una longitud típica de decaimiento que provee una estimación de la efectividad de la línea de transmisión. Dicho valor puede ser estimado a través de un adecuado ajuste lineal de las curvas. Por ejemplo para los casos presentados en la Figura 1 se obtiene un valor de  $\lambda$  entre 1 y 2, indicando que la señal no logra propagarse más allá de los primeros nodos. Como vemos aunque exista acoplamiento entre elementos ( $\varepsilon' = 60$ ), el mismo es subumbral, por lo tanto es imprescindible la presencia conjunta del ruido en el proceso.

### 2.2.2 Caso II: Con ruido

Ahora estudiaremos la influencia del ruido en el proceso de transmisión. En las Figuras subsiguientes se muestra el mismo análisis anterior pero aquí hemos fijado  $\varepsilon = 8$ . En la Figura 2 se muestran los espectros de potencia correspondiente a tres elementos de una cadena con acoplamiento instantáneo con una intensidad de ruido cercano al óptimo de resonancia y un nivel de acoplamiento subumbral. Como se puede ver la altura del pico correspondiente a la componente espectral de la señal coherente mantiene su valor a lo largo de la línea. Por lo tanto se produce una transmisión con muy poca atenuación, a diferencia de la Figura 3 donde claramente se observa la degradación de la componente espectral externa.

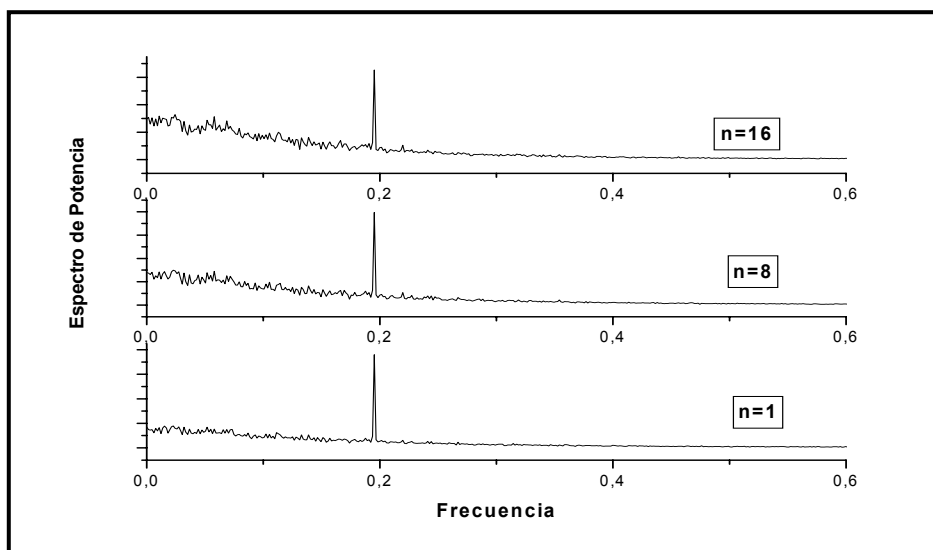


Figura 2 : Espectros de potencias correspondientes a los elementos  $n=1$ ,  $n=8$  y  $n=16$  de una línea con 16 osciladores (de abajo hacia arriba), en la condición de resonancia, es decir  $D = 0.06U_o$  y para  $\varepsilon' = 65$ .



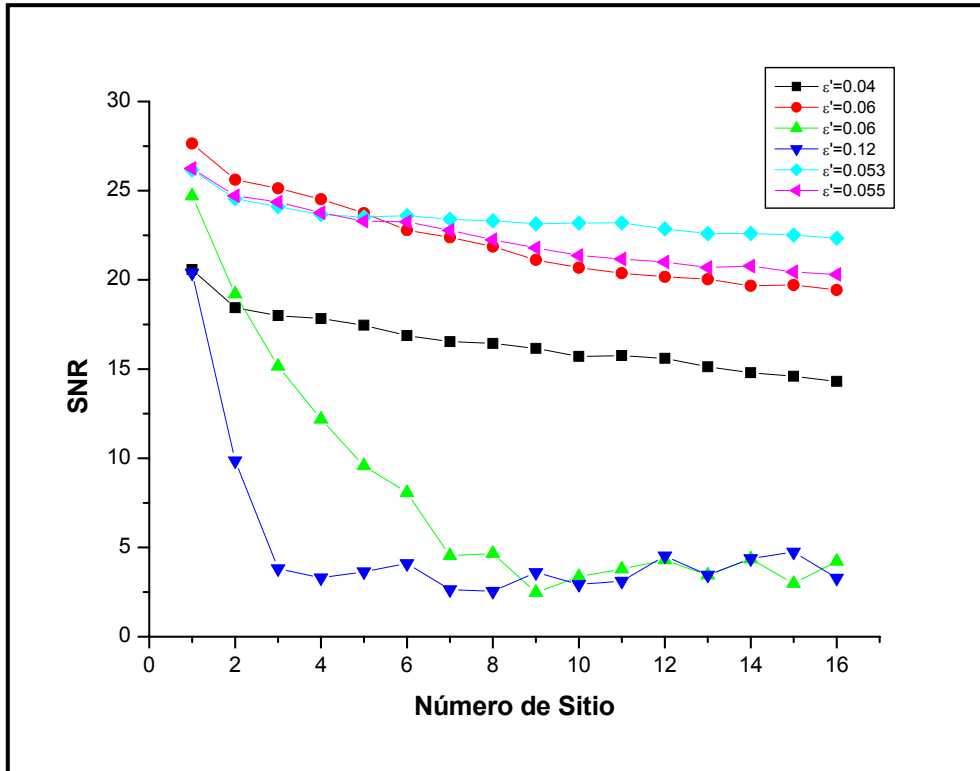


Figura 3 : Cociente señal-ruido en función del sitio para una cadena con  $N=16$ ,  $\epsilon'=65$  y diferentes intensidades de ruido. Se observa que el ruido apropiado puede aumentar la eficiencia de la transmisión.

La Figura 4 muestra las curvas de nivel de  $\lambda$  para diferentes valores de ruido y acoplamiento  $\epsilon' \geq 50$ . Para valores de  $\epsilon' < 50$ , debido a que el acoplamiento es muy débil, aunque tomemos diferentes valores de la intensidad de ruido, no son suficientes para establecer una transmisión asistida con una dada frecuencia. Podríamos decir que estamos en presencia de un régimen para el cual la cadena es frágil frente al ruido. La mejor respuesta se produce para  $D \approx 0.05 U_o$  y  $\epsilon' \geq 60$ : la línea muestra un régimen de transición con una atenuación menor que 1 dB.

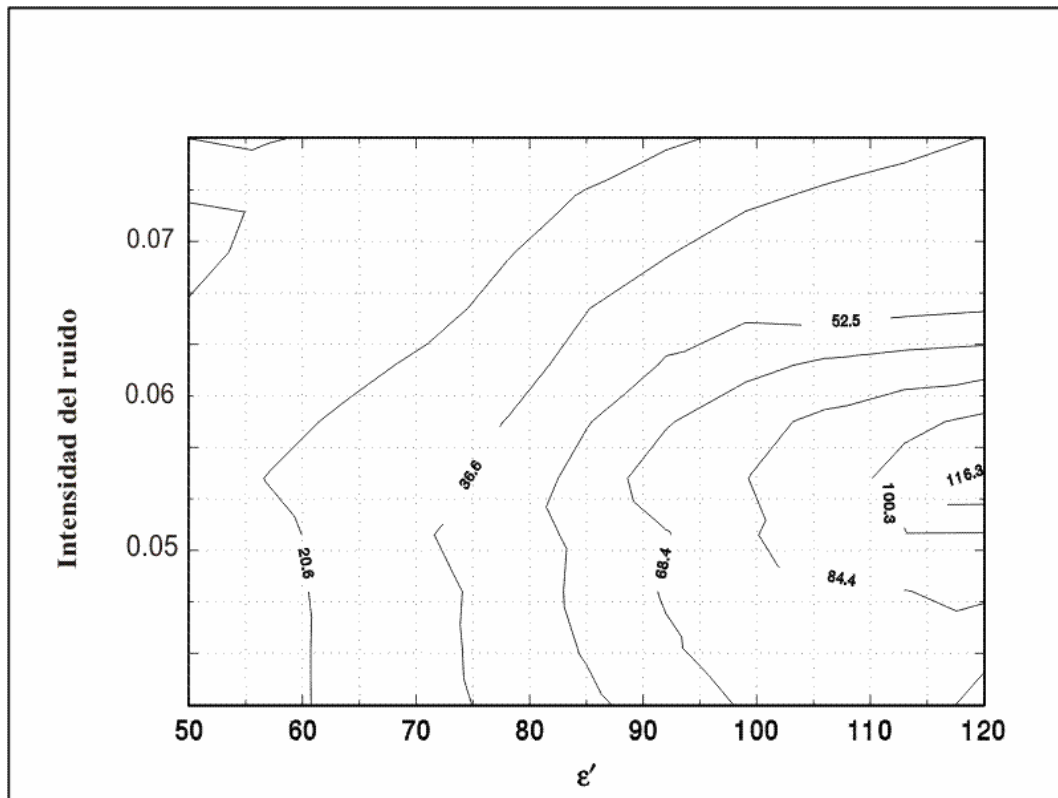


Figura 4: Curvas de nivel de la longitud de decaimiento  $\lambda$  como función del acoplamiento y de la intensidad de ruido  $D$  (en unidades de  $U_0$ ). El valor de  $\lambda$  es estimado en cada caso a través de una regresión lineal de  $\Delta_n$  como función de  $n$  en una cadena de 20 osciladores.

Como se observa en esta figura, es posible evitar el efecto destructivo que un ruido intenso produce en la transmisión pagando el costo de un mayor valor en el acoplamiento. Un aumento del valor de  $\epsilon'$  transforma progresivamente el conjunto de osciladores en una cadena donde los mismos se acoplan ahora más rígidamente. El efecto de la transición hacia ese régimen sin embargo es no uniforme: hay un valor óptimo de ruido  $D \approx 0.05 U_0$  para el cual se alcanza el régimen de transmisión sobreamortiguada para valores menores de  $\epsilon'$ , pudiéndose ser considerado como un tipo de “tuneleo estocástico”. Debajo de este valor no se produce transmisión ya que no se inyecta suficiente energía para producir la oscilación coherente de cada oscilador del arreglo. Por encima de este valor, los valores de  $\epsilon'$  requeridos para contrarrestar el crecimiento de la intensidad del ruido, crecen con  $D$  más rápidamente. Para evaluar este último hecho se estudia cómo depende  $D$  del valor crítico  $\epsilon'_{cr}$  para el cual  $\Delta_{20}$  tiene

algún valor predeterminado y que permita una buena transmisión, ej. 1dB. En un ajuste numérico se observa que  $\log(\epsilon'_{cr})$  escala aproximadamente como  $2D/3$ .

La línea de transmisión aquí considerada transmite una señal porque se “alimenta” con ruido cada uno de sus sitios. En lugar de perturbar, una cantidad moderada de ruido ayuda a la transmisión. Esto puede ser también comprobado si interrumpimos la cadena, esto es dejamos de alimentar con ruido uno de los elementos de la misma. En la Figura 3 se muestra la  $SNR$  a lo largo de la línea para un ruido  $D \approx 0.056 U_o$  y diferentes valores del acoplamiento para una cadena de  $N=20$ . Elegimos al azar un oscilador y eliminamos su ruido aditivo. Se observa que la transmisión logra superar la presencia de un oscilador “muerto”, es decir sin mostrar un daño apreciable, por encima de un valor umbral del acoplamiento  $\epsilon'_{th}$ . Para los parámetros con los que se han elegido, este valor umbral es  $\epsilon'_{th} \approx 63$ . Este valor está bastante bien definido ya que para valores del acoplamiento fuera de una ventana delgada centrada en  $\epsilon'_{th}$  la transmisión cambia abruptamente la atenuación, siendo además notablemente menor que el que se requiere para restaurar la propagación en una cadena libre de defectos para  $D > 0.053 U_o$ . Los resultados numéricos muestran que  $\epsilon'_{th}$  es una función que varía muy lentamente con la amplitud del ruido y cae en una región del espacio de los parámetros lejos del límite de acoplamiento intenso. La *tolerancia a los defectos* puede ser atribuida al acoplamiento entre los consecutivos elementos de la cadena, magnificada por las fuentes de ruido externas como en el caso de la resonancias estocástica para un único elemento.

Con el objeto de tener una visión global del efecto combinado de  $D$  y  $\epsilon'$ , se analizan las correlaciones espacio-temporales de los osciladores de la cadena. En el gráfico, un píxel negro/blanco indica que el oscilador correspondiente se halla en el pozo izquierdo/derecho. Como la distancia a lo largo de la línea se mide en el eje y de cada gráfico, una buena transmisión se refleja como patrones o bandas verticales. El patrón se distribuye de dos maneras: por un lado, el ruido que excita cada oscilador hace que los pixels negros y blancos aparezcan alternativamente en bandas de color opuesto. Esto se observa más frecuentemente a medida que  $D$  aumenta en los sucesivos gráficos hacia la derecha. Por otro lado, la ausencia de ruido en el décimo oscilador estorba la adecuada transmisión línea abajo. Los gráficos en la esquina izquierda inferior muestran una buena transmisión sólo hasta el décimo oscilador. Cuando la intensidad del ruido es

baja, los siguientes elementos de la línea se mantienen en cualquiera de los dos pozos por períodos más largos. Para valores mayores de  $D$  los osciladores saltan de un lado al otro sin lograr sincronización (línea inferior del gráfico). La transmisión se reestablece en los gráficos de la esquina superior izquierda. El valor de  $\varepsilon'$  se ha aumentado por encima de  $\varepsilon'_{th} \approx 63$  y consecuentemente la discontinuidad en  $n=10$  ha desaparecido completamente. La línea divisoria en  $n=10$  es claramente visible en todo el rango  $0.046U_o \leq D \leq 0.078U_o$  y  $\varepsilon' \leq 63$ . Para valores de  $D$  mayores, el valor de  $\varepsilon'_{th}$  requerido para tener una perfecta transmisión es ligeramente mayor (ver por ejemplo el gráfico correspondiente a  $\varepsilon'=64$  y  $D=0.067U_o$  o  $0.078U_o$ ). Sin embargo, en esta fase la transmisión está bastante comprometida aún en los segmentos de la línea que no tienen interrupciones, hecho que se observa a partir de la casi desaparición de los patrones de bandas verticales en la esquina superior derecha.

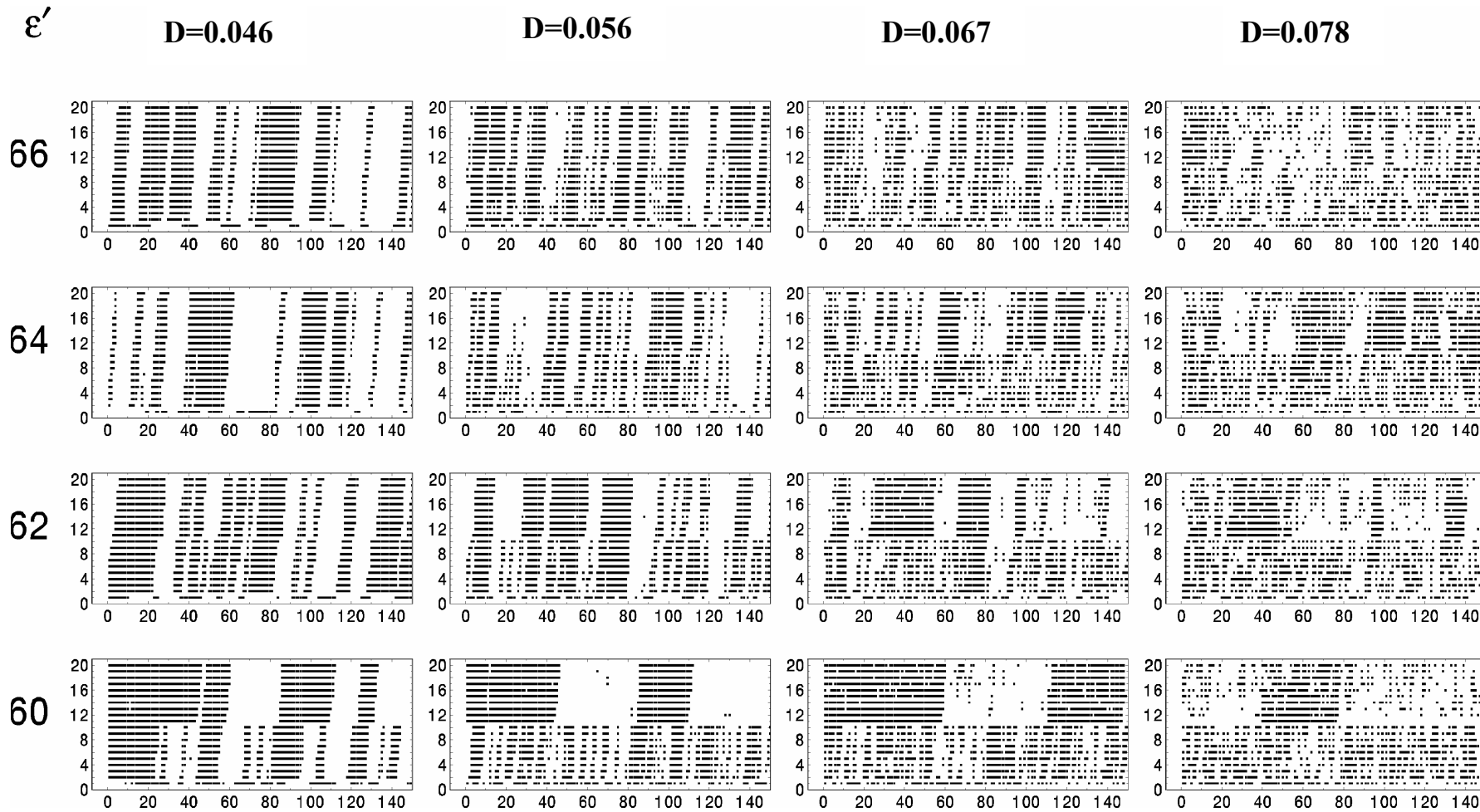


Figura 5 : Correlaciones espacio-temporales en una cadena de 20 osciladores donde al décimo se le priva de ruido aditivo. Para cada gráfico, el tiempo se indica en las abscisas (cada unidad corresponde a 200 pasos de integración), mientras que el número de oscilador se indica en las ordenadas. La intensidad de ruido  $D$  (en unidades de  $U_0$ ) se indica en la parte superior de cada columna y la intensidad del acoplamiento  $\epsilon'$  a la izquierda de cada fila.

## 2.3 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se ha considerado una mímica de la transmisión neuronal a través de links sinápticos. Las simulaciones involucraron dos parámetros libres: la intensidad de un acoplamiento asimétrico y de una fuente de ruido. El primero juega el rol de la eficiencia sináptica, mientras que el segundo representa la intensidad de un estímulo térmico del medio. Una mejor transmisión siempre se alcanza en el límite obvio de grandes valores de acoplamientos, es decir cuando la cadena se comporta como una cadena fuertemente acoplada o rígida. Sin embargo este caso no es interesante, sino aquél para el cual podamos encontrar el rango de valores intermedios de  $\varepsilon'$  donde el sistema se mantenga subumbral y sea entonces necesario el efecto cooperativo del ruido para producir la transmisión. Se encontró un rango de valores de  $D$  en donde se produce un tipo de “tuneleo estocástico”, es decir un intervalo de intensidades de ruido, que no dependen del valor de  $\varepsilon'$ , en la cual se alcanza una muy buena transmisión para menores eficiencias sinápticas.

La relevancia del estímulo térmico para mantener la transmisión se pone de manifiesto cuando la misma se interrumpe al privar de ruido a uno de los elementos de la cadena. A pesar de ello, la interrupción puede ser superada si el acoplamiento supera un valor crítico, produciéndose entonces un grado de tolerancia a los defectos en la línea de transmisión, característica conocida en los procesos neuronales. Ese valor crítico se determina claramente y se encuentra lejos de la zona correspondiente al límite de acoplamiento rígido. La existencia de este valor crítico junto con un cambio adaptativo de las eficacias sinápticas abre la posibilidad de modelar la progresiva estabilización de los patrones de transmisión de las excitaciones neuronales. Un ejemplo de esto último podría ser considerar “sinapsis Hebbianas”, que usa un mecanismo fuertemente interactivo, altamente local y dependiente del tiempo para aumentar o disminuir selectivamente la eficiencia como función de la correlación entre las actividades pre y post sinápticas.

## Capítulo 3

# Modelo de almacenamiento de información

### 3.1 Introducción

La posibilidad de almacenar patrones o información provenientes del medio exterior es un fenómeno que ocurre en una gran cantidad de sistemas biológicos y especialmente en el sistema neuronal. Entre ellos la memoria humana que es un sistema de almacenamiento y recuperación de la información, información por supuesto, obtenida mediante nuestros sentidos para su análisis posterior. Esto ha llevado a que los filósofos hayan especulado sobre la memoria al menos durante dos mil años, aunque la investigación científica se inició recién hace sólo unos cien años. Actualmente el estudio de este maravilloso sistema es abordado desde varias disciplinas como la psicología, neurofisiología, neuroquímica, física, para mencionar algunas. En particular, esta última busca formular modelos, más o menos sofisticados, que permitan comprender y explicar las observaciones experimentales sobre los distintos tipos de memoria. Y en esta búsqueda de modelos se encontrará un amplio espectro de enfoques que van desde los sistemas excitables, biestables, redes neuronales computacionales, etc.

Por ejemplo, se ha estudiado que las redes neuronales que evolucionan hacia un atractor estable actúan, entre otras cosas, como contenedoras de memorias de un cierto patrón, proceso que requiere de la transmisión de la información a lo largo del sistema, a través de las sinapsis químicas o eléctricas. Se ha observado experimentalmente que existen tiempos distintos de activación de la sinapsis (sinapsis rápidas y lentas), como por ejemplo el que requieren las conexiones sinápticas denominadas de tiempo largo, y que corresponden a sinapsis con retardo o lentificadas, es decir que transmiten una señal después de un tiempo  $\tau$  [7][8]. Estas han sido identificadas en los procesos de almacenaje, invocación, generación y/o aprendizaje de patrones. Existe una vasta literatura de modelado de estos procesos en el marco de las redes neuronales computacionales, como los modelos de Hopfield entre otros [9][10][11], donde se presentan cadenas de neuronas en las cuales se conectan los extremos de la misma (condiciones periódicas de contorno) para producir un ciclo límite que posibilite el

reconocimiento o aprendizaje del patrón, a partir de conexiones adaptativas (Hebbianas) entre links. Otra manera posible pero diferente en el cual se pueden describir estos mismos procesos, y en particular el almacenamiento, es dentro del marco del análisis de la Resonancia Estocástica, donde las unidades que representan las neuronas son los osciladores, los tiempos de retardo en las sinapsis se modelan con acoplamientos con retraso y la retroalimentación en la red se introduce a partir de las condiciones de contorno.

En la introducción se ya ha mencionado la relevancia de la Resonancia Estocástica en la transmisión de señales entre neuronas, proceso que se ha modelizado a partir de una cadena de elementos biestables [5][6] que representan las neuronas, acoplamientos direccionales para las sinapsis, y ruido Gaussiano externo para las excitaciones (térmicas) aleatorias del medio al cual las neuronas responden.

El problema de la transmisión sustentada por ruido está también relacionado con la Resonancia Estocástica *espacio-temporal* ([1][2][3]). Esta situación se encuentra, por ejemplo, cuando se genera un frente de ondas espacialmente extendido en un medio subexcitable que está estimulado por ruido Gaussiano no correlacionado y/o con amplitud distribuida espacialmente. Si la dispersión del ruido es ajustado apropiadamente, el frente de onda propaga con una menor atenuación que en ausencia de ruido. El modelo que tratamos puede ser considerado un modelo de juguete para comprender este fenómeno porque involucra la propagación de una señal incrementada por ruido en un sistema espacialmente extendido con condiciones periódicas de contorno, posibilitando que se produzca una onda viajera en el sistema.

En este capítulo enfocaremos el estudio hacia la posibilidad de encontrar excitaciones reverberantes en sistemas extendidos como una consecuencia del mismo mecanismo de transmisión que el que opera en una cadena abierta. El esquema intuitivo es el siguiente: se asume que el primer oscilador de la cadena está excitado por una fuerza externa débil y periódica y que también hay ruido aditivo Gaussiano alimentando los distintos elementos. Si el oscilador está en el régimen de Resonancia Estocástica, se producirá un aumento de las transiciones periódicas. El siguiente oscilador en la cadena es entonces excitado por esta señal y es esperable que también realice oscilaciones similares de gran amplitud. En la sección anterior se mostró que existe un régimen en el cual el ruido es esencial para propagar la señal de un link al siguiente. Si ahora la cadena se cierra sobre sí misma, existe la posibilidad que una onda viajera se forme en el sistema, estableciéndose entonces las bases de excitaciones reverberantes en el sistema sustentadas por ruido aún largos tiempos después que el forzante periódico externo se elimina.



## 3.2 Modelo de almacenamiento de información: Anillo de Osciladores.

Consideramos una línea de transmisión construida por  $N$  osciladores biestables, de tal forma que cada nodo alimente al siguiente con una señal que es proporcional a su amplitud de oscilación. Si además imponemos condiciones de contorno periódicas, de manera tal que la línea se “cierre sobre sí misma”, es decir convirtiendo su topología en un anillo, el elemento  $N$ -ésimo alimentará al primer oscilador. Al igual que en el modelo anterior, la evolución temporal del sistema es descrita por el conjunto de ecuaciones dada por

$$\dot{x}_n + \frac{dV}{dx_n} = F_n^{dr} + \sqrt{D} G_n(t) \quad (3.1)$$

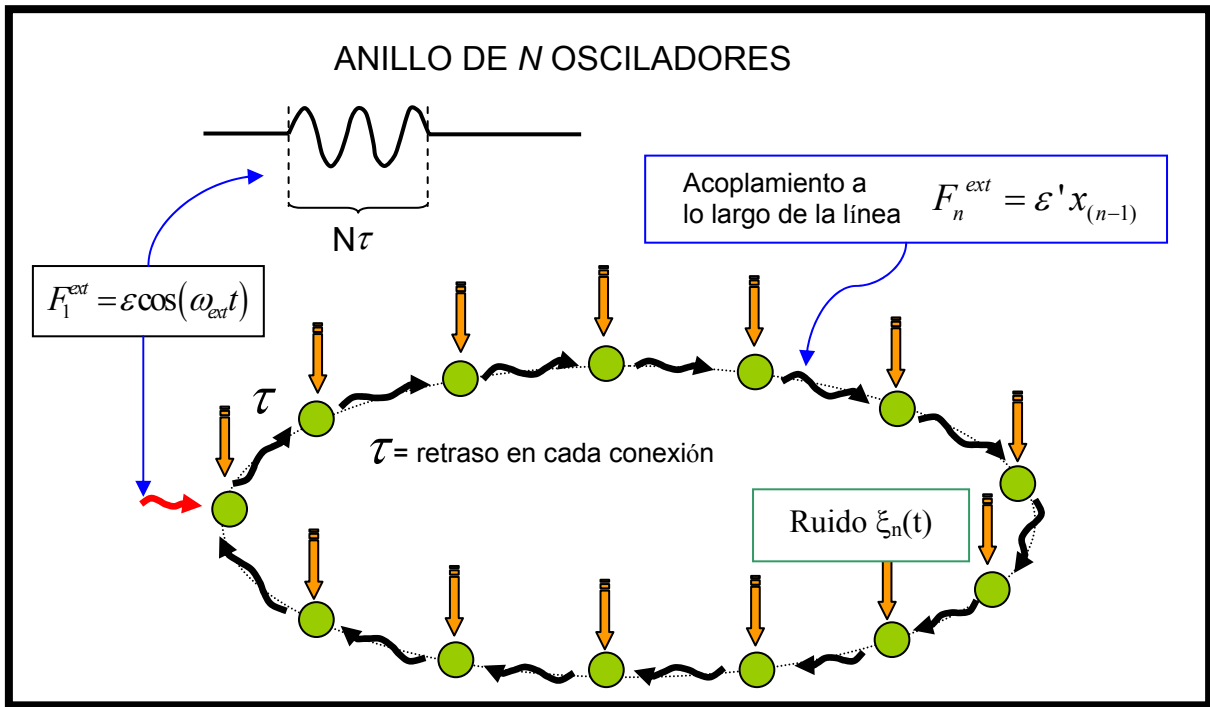
donde  $x_n$  es la amplitud del oscilador  $n$ -ésimo y  $V(x_n)$  el potencial biestable. El forzante  $F_n^{dr}$  en la ecuación (3.1) es proporcional a la amplitud del oscilador precedente en el anillo, *excepto* para aquel al que le hemos asignado arbitrariamente  $n=1$ , siendo el que está excitado por un forzante periódico externo. Se asume también que existe un retraso temporal fijo  $\tau$  entre la señal que sale de un elemento y la inyectada en el siguiente, de forma tal que a la señal le toma  $N\tau$  unidades de tiempo “recorrer” los  $N$  links del anillo. Cuando la del primer elemento es reemplazado por la excitación proveniente del  $N$ -ésimo (último), cerrándose de esta manera la cadena de excitaciones mutuas.

Podemos entonces escribir esto de la siguiente forma:

$$F_n^{dr}(t) = \begin{cases} \varepsilon \cos(\omega_{ex} t) & \text{para } n=1 \text{ y } 0 < t < N\tau \\ \varepsilon' x_N(t-\tau)/c & \text{para } n=1 \text{ y } t > N\tau \\ \varepsilon' x_{n-1}(t-\tau)/c & \text{para } n > 1 \text{ y } t > (n-1)\tau \end{cases} \quad (3.2)$$

donde el índice  $n$  corre cíclicamente entre  $1$  y  $N$ . Al escribir las ecuaciones de este modelo, hemos asumido que todos los osciladores son iguales y con coeficiente de amortiguamiento unitario. Además, la amplitud de las oscilaciones se miden en unidades del “ancho” del pozo  $c$  del potencial cuártico.

Representando gráficamente este sistema :



Como en el modelo anterior, los parámetros físicos del problema son: la amplitud del ruido  $D$ , la profundidad del pozo  $U_o$ , la separación entre los pozos  $c$ , los acoplamientos  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$ , el tiempo de retraso  $\tau$ , y la frecuencia del forzante  $\omega_{ex}$ .

Los parámetros  $\varepsilon'$  y  $\tau$  caracterizan la transmisión. El último parámetro además determina la entrada de energía proveniente del estímulo periódico externo y que se inyecta en el sistema durante un tiempo  $N\tau$ . Debido a esto se debe elegir  $\tau$  de forma tal que  $N\tau \ll 2\pi/\omega_{ex}$ . Los parámetros  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$  especifican el acoplamiento de los osciladores a sus respectivos estímulos y son mutuamente independientes. Sin embargo uno debería tener en cuenta que  $\varepsilon' > \varepsilon$  por consideraciones energéticas: la potencia inyectada en las oscilaciones de gran amplitud debe provenir principalmente del ruido externo. En el acoplamiento con la señal periódica externa, la potencia está concentrada en la frecuencia  $\omega_{ex}$ . El acoplamiento entre osciladores involucra por lo tanto un estímulo ruidoso y por lo tanto la potencia se halla distribuida en el total del espectro.

Debido a que no estamos en presencia de un régimen estacionario, la señal se transmite a lo del dispositivo estableciéndose una onda viajera auto-sustentada que se propaga a lo largo del anillo. Este proceso está sostenido principalmente por el ruido, el cual juega dos roles contradictorios: por un lado produce el aumento de las oscilaciones en cada link, lo cual hace posible la transmisión, que en el caso de las condiciones de contorno periódicas se traduce en almacenamiento de información; pero por el otro, hace que la señal se corrompa progresivamente una vez que cesa la inyección de energía en el sistema.

En este sistema se pueden observar que hay dos escalas temporales involucradas. Una de ellas, corresponde a un tiempo característico menor, y está relacionada con el intervalo (infinitesimal) entre estímulos individuales estocásticos. El otro tiempo característico está dado por el período  $T = 2\pi/\omega_{\text{ex}}$  del forzante externo. Este segundo tiempo es mucho mayor que el primero pero es menor que el retraso  $\tau$ , que es del mismo orden de magnitud que  $N\tau$ , el cual es el tiempo requerido por la señal para recorrer una vuelta del dispositivo. Obviamente, esto último restringe el análisis a anillos de unos “pocos” osciladores. El caso límite opuesto, es decir  $N$  muy grande, se puede analizar como la cadena abierta que ha sido considerada anteriormente. En este último caso,  $\tau$  pierde cualquier relevancia física.

Este modelo contiene varias constantes características con dimensiones de tiempo, por ejemplo:  $c^2/U_o$ ,  $c^2/D$ ,  $c/\varepsilon$  y  $c/\varepsilon'$ . Analicemos cada una de ellas:

- $c^2/U_o \rightarrow$  está relacionada a los tiempos de Kramers (ver Ref [4]), es decir con el tiempo típico promedio requerido para escapar de uno de los pozos del potencial, denominado en la literatura *mean first passage time*. Esta estimación se hace bajo la suposición que la densidad de probabilidad en cada uno de los pozos de potencial está en equilibrio. Para satisfacer esta condición se requiere que  $T_{\text{ex}} \gg c^2/U_o$ .
- $c^2/D \rightarrow$  Recordemos que los valores de  $D$  están dados en unidades de  $U_o$ , por lo tanto esta constante de tiempo es del orden o a lo sumo un orden de magnitud menor que la anterior, porque se asume que el sistema opera cercano al régimen de Resonancia Estocástica.
- $c/\varepsilon \rightarrow$  puede interpretarse físicamente como un tiempo típico requerido para viajar una distancia igual al ancho del pozo bajo la influencia del estímulo periódico externo.
- $c/\varepsilon' \rightarrow$  juega un rol similar al anterior, si el forzante externo es reemplazado por la señal del oscilador precedente en la cadena.

Sin embargo, mientras la señal no sufra un amortiguamiento apreciable en intervalos menores a  $N\tau$ , se puede definir una escala de tiempo aún mayor relacionada con un tiempo de atenuación típico  $T_{\text{mem}}$ . En este caso, el anillo puede ser pensado como un dispositivo de almacenamiento que almacena un bit de

información. Este bit indica la presencia o ausencia de estímulo externo para tiempos del orden de  $T_{mem}$ . Es obvio que este tiempo típico de decaimiento, si se expresa en unidades de  $\tau$  también tiene el significado de una longitud de decaimiento como se discutió en el sistema anterior.

Con el objetivo de estimar empíricamente  $T_{mem}$ , se ha integrado las ecuaciones (3.1) y (3.2). Para ello, al igual que el caso anterior, se ha elegido un paso de integración  $dt = T_{ex}/1024$ . Los parámetros característicos del sistema, coinciden con los del sistema anterior, esto es:

$$U_o = 256 \quad ; \quad c = 4\sqrt{2} \quad ; \quad \omega_{ex} = 0.39\pi \quad ; \quad \varepsilon = 8$$

Se han realizado numerosas simulaciones numéricas para distintos anillos con diferentes número de links y tiempos de retardo  $\tau$ . Se continúa manteniendo la intensidad de ruido  $D$  y el acoplamiento  $\varepsilon'$  como parámetros libres. Como que ambos gobiernan las propiedades de la transmisión en la cadena abierta de osciladores se espera que también determinen el valor de  $T_{mem}$ .

Para la estimación del  $T_{mem}$ , se ha evaluado la densidad espectral de potencia del primer oscilador durante  $L$  vueltas de la señal viajera, realizando un promedio sobre un ensamble adecuado de 100 condiciones iniciales aproximadamente con el objeto de despreciar las fluctuaciones.

Para analizar la transmisión en el caso de la cadena lineal, se obtuvo la  $SNR$  a partir de la respuesta del oscilador durante el tiempo total de integración. Este procedimiento funciona para ese caso ya que el estímulo externo está activo durante todo dicho tiempo. Pero qué ocurre en el caso del anillo? Para llevar a cabo un análisis similar de este modelo, debe tenerse en cuenta que el estímulo externo tiene ahora una duración finita menor que el tiempo de integración y por lo tanto nuestro análisis debe tomar en cuenta estas dos etapas en la respuesta del sistema. Debido a esto último, para estudiar la transmisión se estudia la  $SNR$  pero calculada a partir de transformadas de Fourier “ventaneadas”, también llamadas transformadas tipo Gabor. Estas ventanas tienen una duración correspondiente a una vuelta, es decir  $N\tau$ , y esto es consistente con la suposición de que la señal no sufre una degradación apreciable en ese intervalo. Formalizando este procedimiento y con el objetivo de estudiar la degradación, calculamos la transformada de Fourier ventaneada, según se detalla en el Apéndice A.

Los resultados de este análisis se presentan gráficamente a partir de un gráfico de curvas de nivel (*contour plot*) de la densidad espectral de potencia. Para realizar el mismo, se graficaron los diferentes espectros de potencia correspondientes a las ventanas de Fourier, las cuales se desplazan en tiempos de duración  $\tau/2$ . Con este

procedimiento se busca estudiar la localización temporal de la frecuencia, como se muestra en la siguiente figura:

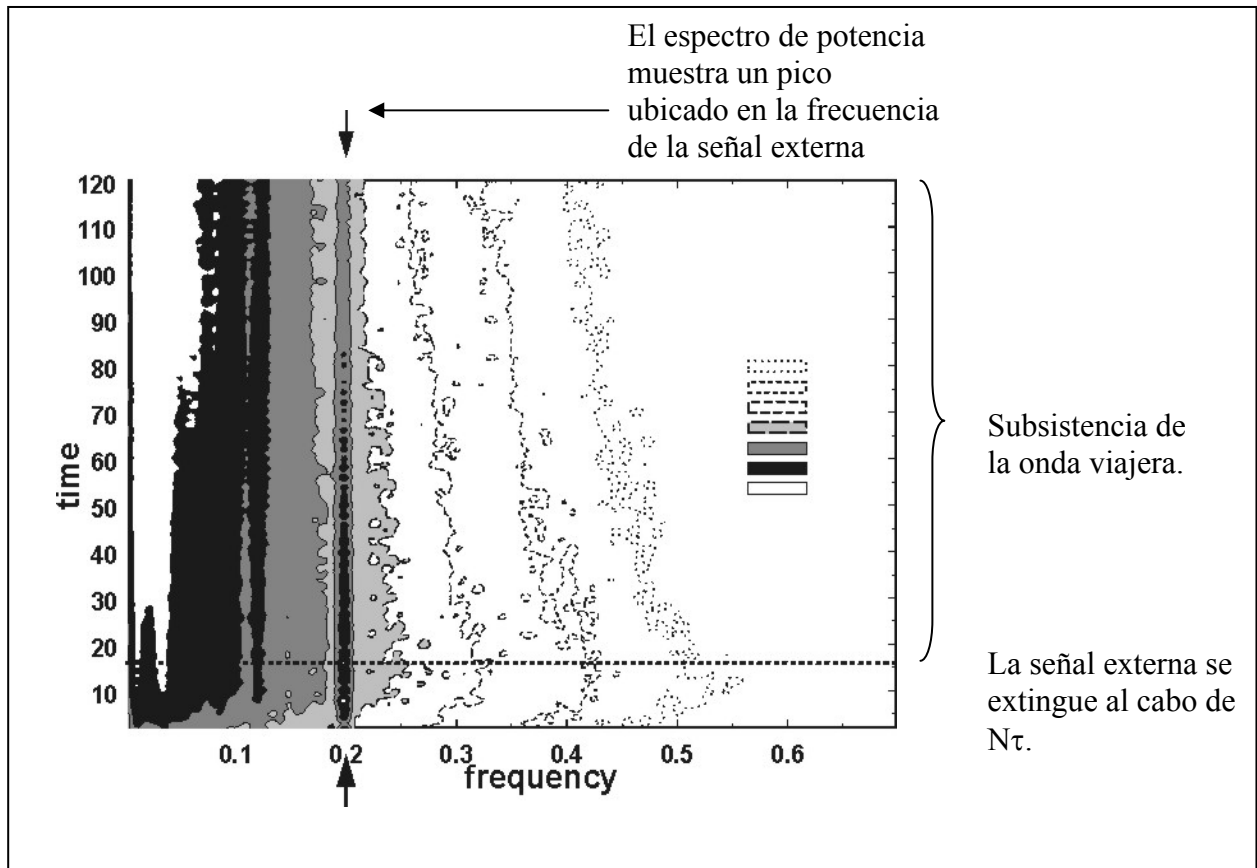


Figura 1 : Gráfico de curvas de nivel de la densidad espectral de potencia dependiente del tiempo obtenida con la transformada de Fourier ventaneada en un anillo con  $N=16$  links, durante 8 vueltas completas. El tiempo está expresado en unidades de  $\tau$ , que en este caso es de  $8T_{ex}$  (i.e., 8192 pasos de integración). Los valores más pequeños de la densidad espectral de potencia se muestran sólo con las líneas de contorno, mientras los valores mayores están sombreados con diferentes niveles de gris. El máximo valor está representado con blanco. La cresta asociado a la onda viajera está localizado en la misma frecuencia que el estímulo externo y es indicado con flechas. La línea punteada indica el instante en el cual dicho estímulo es apagado. La amplitud del ruido es  $D=0.053$  y  $\varepsilon'=80$ .

Como se ve en la figura 1 la ocurrencia de una onda viajera con transiciones aumentadas como en la Resonancia Estocástica, se pueden ver a partir de la presencia de una sucesión de crestas localizadas en el valor de la frecuencia externa y paralelo al eje temporal. Dicho en otras palabras, estamos estudiando la localización temporal de la frecuencia externa. Como se observa, la cresta es significativamente más larga que  $N\tau$ ,

evidenciando la existencia de una onda viajera remanente aún en el momento en el cual se apaga el forzante externo.

La corrupción que produce el ruido se puede apreciar no solo por el hecho de que esta cresta se torna menos prominente, sino también porque el gráfico toma mayores valores en el rango de las bajas frecuencias (extremo noroeste del gráfico correspondiente a la componente continua del espectro) , además de un aumento en los niveles del fondo espectral para tiempos mayores.

La importancia que adquiere el ruido en el proceso de sostener esta onda viajera se verifica, al igual que para el caso de la cadena abierta, privando de ruido a uno de los links. Al igual que en el caso de la línea, se encuentra que existe un valor subumbral crítico del acoplamiento  $\varepsilon_{cr} \approx 65$  debajo del cual la onda viajera se destruye. Por encima de este valor la transmisión se reestablece.

Debajo de este valor crítico la transmisión está dominada por el ruido, mientras que por encima la misma está dominada en forma creciente por el valor de acoplamiento entre elementos.

Con el objetivo de obtener una visión cuantitativa del proceso de almacenamiento y atenuación de la señal en el dispositivo se debe analizar qué le ocurre a la señal en su propagación a lo largo del dispositivo, teniendo en cuenta las condiciones periódicas de contorno. Una forma adecuada de hacerlo es analizar el comportamiento de la  $SNR$  como función del número de vueltas que viaja la señal a lo largo del anillo. Para cuantificar este fenómeno definimos los siguientes coeficientes de atenuación (donde para simplificar hemos notado con  $R$  a la  $SNR$ ):

$$A_{in} = \frac{[R(1) - R(2)]_{dB}}{[R(1)]_{dB}} \quad (3.3)$$

$$A_{st} = \frac{[R(2) - R(2 + \Delta L)]_{dB}}{\Delta L [R(2)]_{dB}} \quad (3.4)$$

En las ecuaciones (3.3) y (3.4),  $R(L)$  indica la relación señal-ruido correspondiente a la vuelta número  $L$  para el primer oscilador. La notación  $[\dots]_{dB}$  indica que las cantidades que se indica entre los brackets están medidas en decibeles.

El coeficiente  $A_{in}$  se ha definido de forma tal que cuantifique la pérdida relativa en el  $SNR$  de la primera vuelta a la segunda. Este coeficiente compara la  $SNR$  mientras el sistema está siendo excitado (es decir en la primera vuelta) con el valor correspondiente *inmediatamente después* de que la información ha sido almacenada (segunda vuelta). Este coeficiente mide qué atenuación sufre la señal en el proceso.

Sin embargo nuestro interés está centrado en el proceso de almacenamiento. Por lo tanto, para cuantificar la calidad del almacenamiento, definimos otro coeficiente que hemos llamado  $A_{st}$ , que determina la pérdida relativa promedio en la  $SNR$  por vuelta si consideramos  $\Delta L$  vueltas. Esta estimación se realiza *una vez* que la información se ha almacenado en el sistema. En la figura 2 se grafican estos coeficientes como función de la intensidad del ruido local  $D$  para un acoplamiento cercano al óptimo. Los mismos se expresan en porcentajes.

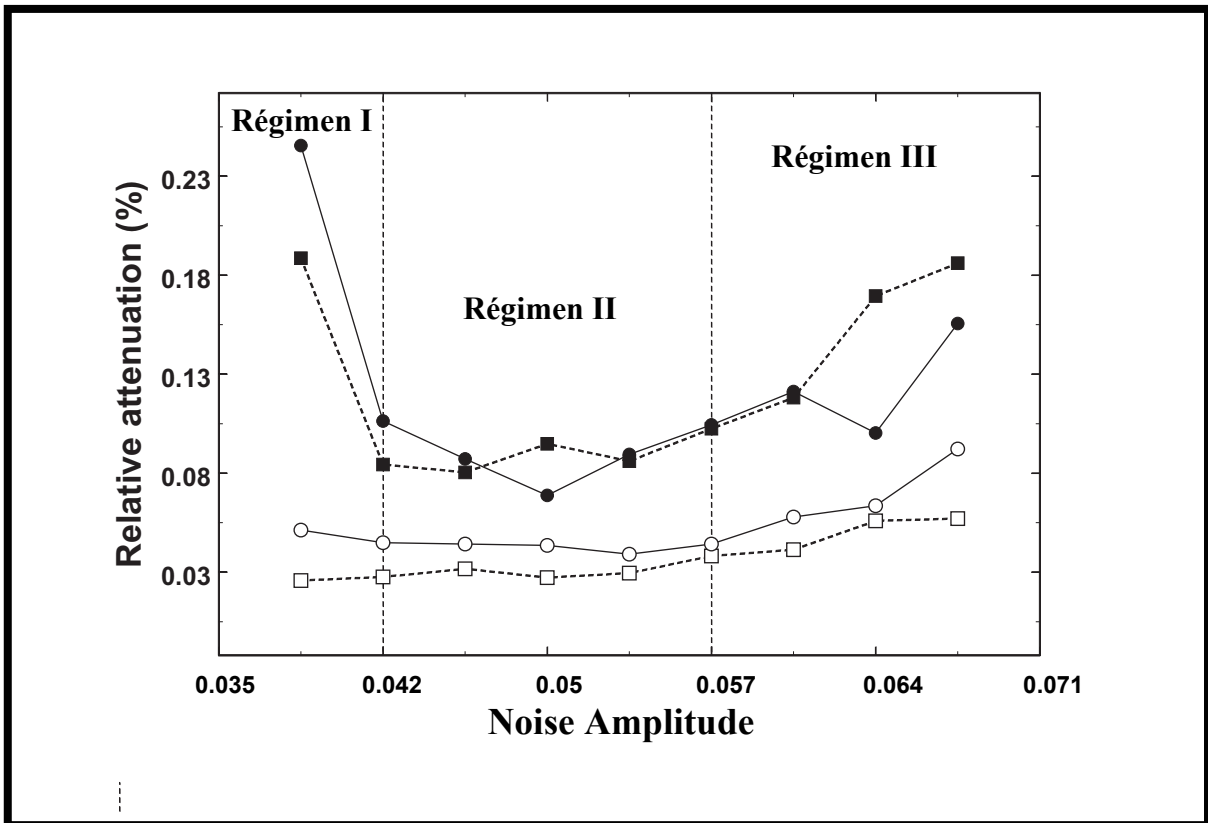


Figura 2 : Los coeficientes  $A_{in}$  (símbolos negros) y  $A_{st}$  (símbolos blancos) se grafican como funciones de  $D$ . Los círculos corresponden a  $\varepsilon'=80$  y los cuadrados a  $\varepsilon'=75$ . El anillo está formado por  $N=8$  nodos, y la señal lo recorre 8 vueltas. El retardo temporal  $\tau$  corresponde a  $16T_{ex}$ . Las dos líneas punteadas verticales limitan la región de buen almacenamiento.

Para evaluar las ecuaciones (3.3) y (3.4) se ha considerado un anillo de ocho osciladores y se han realizado numerosas integraciones involucrando 4, 8, y 16 vueltas completas del anillo. Esto corresponde a tiempos de retraso  $\tau$  en el acoplamiento de 32768, 16384, 8192. Para que los resultados obtenidos para distintos valores de  $N$  y tiempo de retardo sean realmente comparables, se ha debido chequear que las pérdidas

de la  $SNR$  sean consistentes entre sí y que la pérdida relativa por vuelta es independiente del valor de  $\Delta L$ . Para lograr esto se tuvo la precaución de mantener fija la cantidad de energía inyectada al sistema mediante el forzante periódico, es decir en todas las simulaciones se mantuvo constante el parámetro  $N\tau$ . Los valores que se grafican en la figura corresponden a valores de estas integraciones promediados sobre 100 condiciones iniciales.

En lo que respecta al efecto del ruido, el sistema presenta tres tipos de regímenes, los cuales se observan en la figura 2 :

- *Régimen I:* corresponde a valores de ruido en el intervalo  $D \lesssim 0.042$ . Para estos niveles de ruido reducido, no se logra en absoluto almacenamiento de la señal, de hecho no se produce transmisión alguna de la componente espectral externa de la señal. Esto queda de manifiesto por el alto valor de  $A_{in}$ , es decir se produce una gran atenuación de la  $SNR$  al extinguirse el forzante periódico. Con respecto al valor poco significativo que toma  $A_{st}$  podría erróneamente considerarse que se debe a un proceso de almacenamiento, pero en realidad se debe a una  $SNR$  nula para la frecuencia externa.
- *Régimen II:* un segundo comportamiento del sistema notablemente diferente al anterior ocurre para valores intermedios de la intensidad del ruido, aquellos comprendidos en el intervalo  $0.042 \lesssim D \lesssim 0.057$ . En este caso tanto  $A_{in}$  como  $A_{st}$  son bajos y muy similares entre sí, indicando que la componente espectral de la señal externa que ha sido inyectada en el sistema, logra sobrevivir por un tiempo largo en el mismo con muy poca atenuación. Esto hace que a este régimen se lo pueda denominar “*régimen de almacenamiento*”. El valor óptimo de  $D \approx 0.053$ . La demarcación de este intervalo se realiza determinando para qué rango de valores de  $D$ , tanto  $A_{in}$  como  $A_{st}$  permanecen casi constantes y pequeños.
- *Régimen III:* Para mayores niveles de ruido ( $0.057 \lesssim D$ ) ambos coeficientes crecen considerablemente, indicando que el sistema se halla fuera del régimen de Resonancia Estocástica, donde el ruido juega un rol altamente destructivo. Comienza a aumentar la corrupción que sufre la señal externa, no siendo ya posible sostener oscilaciones periódicas magnificadas ni la transmisión o almacenamiento debido a la gran atenuación que sufre la componente espectral externa.

A partir de la clasificación anterior se han determinados los posibles regímenes del sistema y los rangos de los parámetros en donde se los encuentra. En este punto se vuelve entonces importante caracterizar en mayor profundidad el régimen que nos



interesa en particular y que hemos llamado de *almacenamiento*. Para ello se elige definir una escala temporal de decaimiento  $T_{mem}$ , asumiendo que el  $SNR$  de entrada sufre un decaimiento exponencial durante las siguientes vueltas, esto es:

$$R(t) \sim R(L=1) e^{-t/T_{mem}} \quad (3.5)$$

con  $t=N\tau L$ . De esta forma podemos escribir:

$$\frac{T_{mem}}{N\tau} = \frac{L}{[R(1) - R(L)]_{dB}} \quad (3.6)$$

Una justificación de esta expresión es que en el régimen de almacenamiento y para valores moderados de  $\varepsilon'$ , los gráficos de  $R(L)$  (en dB) en función del número de vuelta  $L$  muestran un comportamiento bastante lineal. Según las expresiones (3.3) y (3.4), se observa que  $T_{mem}$  no está relacionado en forma separada a  $A_{st}$  o a  $A_{in}$ , sino a un promedio de ambos.

En la figura 3 se muestra un gráfico con curvas de niveles de  $T_{mem}$  expresados en unidades de  $N\tau$  (o lo que es equivalente en cantidad de vueltas), como función de  $\varepsilon'$  y  $D$ . El patrón general que se muestra en dicha figura es similar al correspondiente a la longitud de correlación para el caso de una cadena abierta de osciladores. Esto es debido a que ambos tienen una significancia física similar a pesar que refieren a diferentes tipos de sistemas. La diferencia principal, más allá de la topología, radica en el hecho que en el caso de la cadena abierta el sistema es estacionario, ya que el forzante externo está permanentemente activado. En cambio el proceso presente corresponde a un proceso que sufre un decaimiento temporal, porque aquí sí se lo apaga luego de que la señal recorre una vuelta y por lo tanto la misma está siendo progresivamente atenuada.

Se ha entonces determinado qué valores de  $\varepsilon'$  corresponden a la situación de una señal forzante menor que la perturbación producida por el ruido, hallando que  $\varepsilon' < \varepsilon$  como era de esperar. Claramente la amplitud de ruido óptima depende de  $\varepsilon'$  porque este acoplamiento magnifica ambos: la señal (cuasi) periódica del oscilador precedente y el ruido sobreimpuesto. Para valores de ruido muy bajos no hay almacenamiento, porque el oscilador forzante no se halla en condición de Resonancia Estocástica. Para valores muy bajos de  $\varepsilon'$ , el almacenamiento no es satisfactorio porque los osciladores se hallan casi desacoplados. Además es de esperar, que el almacenamiento también se halle limitado por grandes valores de ruido, independientes del valor de  $\varepsilon'$ .

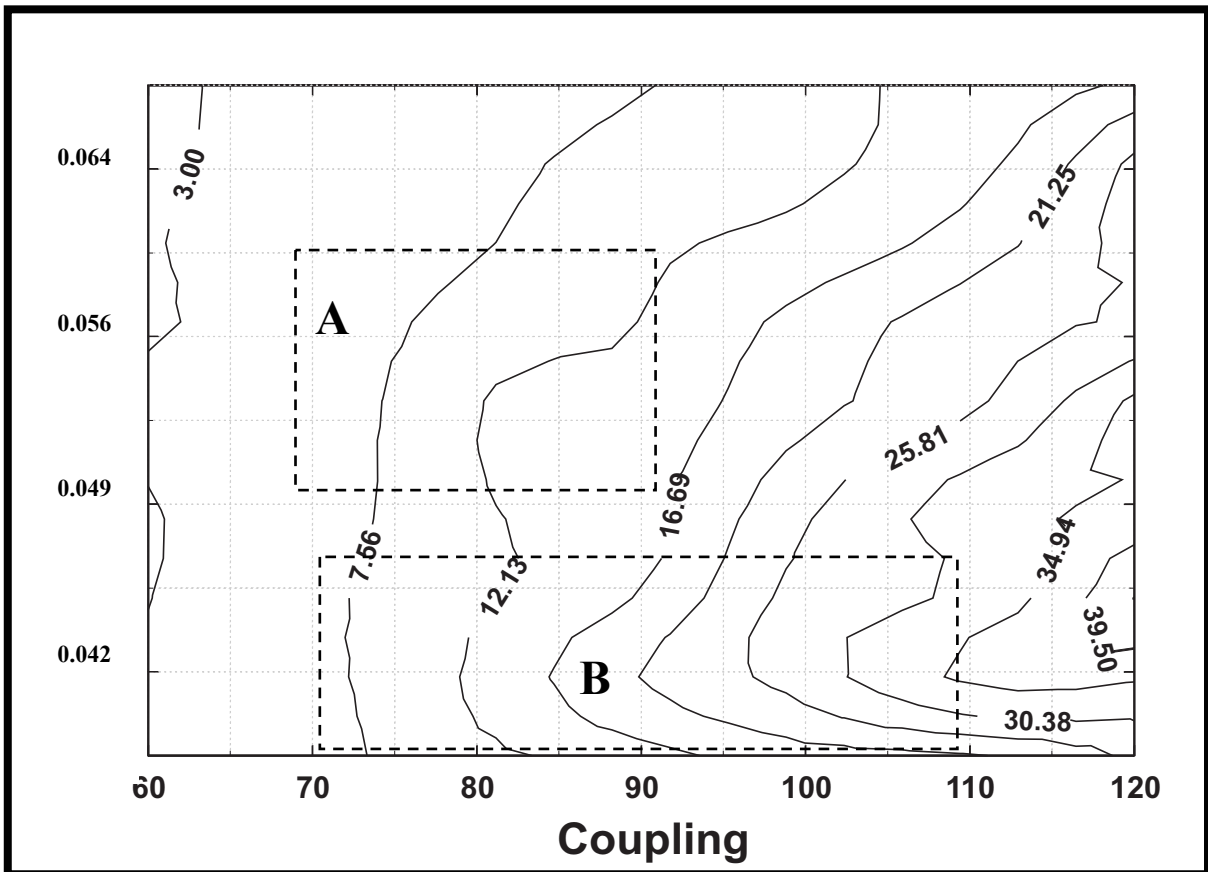


Figura 3 : Curvas de nivel de  $T_{mem}$  como función de  $D$  y  $\varepsilon'$ . Las valores de  $T_{mem}$  están dados en unidades de  $N\tau$ . El anillo está formado por  $N=8$  links. El retraso temporal  $\tau$  corresponde a  $16T_{ex}$ . Para la explicación de los recuadros A y B remitirse al texto.

En la figura 3 se han indicado dos zonas con los recuadros A y B para explicar y comparar el comportamiento del sistema en dos regiones diferentes del espacio de los parámetros. En el recuadro A el sistema se halla en lo que se ha denominado *Régimen II*.

Para las intensidades de ruido correspondiente a esta zona, se observa que para valores subumbrales del acoplamiento existe un amplio rango óptimo de ruido, que incluye la sección de la curva de nivel 7.88 incluida en el recuadro B, y para el cual la señal se almacena en el dispositivo durante varias vueltas. Si se aumenta gradualmente el valor del acoplamiento la zona indicada como A desaparece y se logra disminuir el valor de ruido para que ocurra el almacenamiento, pero a costa de “rigidizar” la cadena (acoplamientos intensos). Por qué entonces sólo interesa el *Régimen II* en la zona A, como el de almacenamiento? Porque aunque dicho fenómeno se produce tanto en A

como en B, la segunda corresponde a una situación que podríamos considerar casi trivial (transmisión asistida sólo por el acoplamiento), en cambio en la zona A se requiere el compromiso de ambos parámetros frente a una situación subumbral y con ruido más intenso.

### **3.2 Conclusiones del capítulo.**

Aquí se ha mostrado la posibilidad que un estímulo externo y periódico en el tiempo persista como una onda viajera en un sistema extendido que está sometido a ruido. El proceso físico subyacente en este fenómeno de almacenamiento de corto plazo es la Resonancia Estocástica. La presencia del ruido externo es esencial para mantener la información almacenada, una vez que ha ingresado al sistema, durante un tiempo bastante mayor al cual el sistema estuvo sometido al estímulo periódico. El tiempo de almacenaje durante el cual la amplitud de la onda viajera ha caído a una dada fracción de su valor inicial puede ser mucho mayor que el tiempo de retardo en la transmisión a lo largo de la cadena o de la duración de los estímulos.

El tiempo de almacenaje es un compromiso entre la intensidad de un acoplamiento direccional entre osciladores y la amplitud del ruido externo. El hecho de que todos los links de la cadena operen en el régimen de Resonancia Estocástica posibilita un acoplamiento más débil.

Más allá de las posibles aplicaciones prácticas, este dispositivo es un ejemplo de un mecanismo posible por el cual la información del medio puede dejar trazas reverberantes en bucles neuronales del sistema nervioso central. Desde la sugerencia que ya hiciera David Hartley en 1749, se ha argumentado repetidas veces que la memoria de muy corto tiempo podría ser representada por dichos patrones excitatorios. Si el estímulo persiste lo suficiente, los bucles neuronales reverberantes de corto tiempo podrían estabilizarse a través de mecanismos Hebbianos, dando lugar a alteraciones sinápticas permanentes que correspondan a memoria impresa en el sistema, la cual sería de tiempo largo.

## Capítulo 4

# Observación experimental de la transmisión en una cadena lineal

Como ya se ha mencionado en capítulos previos, el estudio de la resonancia estocástica y la propagación de ondas en medios continuos o discretos, uni o bidimensionales, y los efectos resultantes del ruido en los sistemas biológicos [15-16] y excitables [17-20] atrae gran interés debido al rol que juega el mismo para sostener o producir, por ejemplo, la propagación de señales en tejidos neuronales y otros medios biológicos excitables.

Entre los trabajos *experimentales* más relevantes podemos mencionar la propagación no lineal de ondas observadas por Kádár et al. [8] en un medio químico continuo subexcitable producidas por una reacción de Belusov-Zhabotinsky fotosensitiva ; la modelización hecha por Löcher et al. [9] de propagación de ondas en tejidos cardíacos a partir de un arreglo de resonadores electrónicos acoplados.

La respuesta de los sistemas dinámicos no lineales en presencia de fluctuaciones puede convenientemente simularse y realizarse en forma experimental en circuitos electrónicos cuando se combinan la dinámica rápida, esto es fenómenos del orden del KHz al MHz, con métodos adecuados para monitorear las variables relevantes. Así el objetivo principal de este capítulo es observar *experimentalmente* la propagación de una señal periódica en un medio continuo formado por un arreglo de elementos biestables, cuando la propagación está asistida por ruido y sustentada en el fenómeno de resonancia estocástica, comparando y corroborando luego los resultados cualitativos obtenidos numéricamente en capítulos anteriores. Para ello se comenzó con el estudio de la Resonancia Estocástica en un sistema biestable sencillo, denominado Schmitt Trigger (ST), el cual es una muy buena mímica del modelo utilizado en este trabajo, si no consideramos la dinámica que el sistema desarrolla dentro de cada pozo. Las primeras observaciones [1] experimentales de la resonancia estocástica fueron de hecho, realizadas con un ST excitado electrónicamente con una fuente ac. Un sistema ST biestable [2] es un sistema con umbral que no tiene una Resonancia Estocástica real, en el sentido en que no se produce una resonancia intrínseca (es decir su respuesta es independiente de la frecuencia). En realidad, la amplificación debida al ruido producida

en un ST debe ser considerada, más que como resonancia estocástica, como un efecto tipo *dihtering*, el cual es muy bien conocido en los conversores analógico-digital [3]. Sin embargo y sin perder esto de vista, los sistemas con umbrales, ya sean considerados individualmente o como unidades básicas acopladas, capturarán adecuadamente las principales características físicas de la resonancia estocástica, en una amplia gama de sistemas biestables.

Como ya se mencionara en la introducción de este trabajo, los ST son dispositivos que pueden considerarse como un sistema biestable que opera entre dos estados  $+V$  y  $-V$ , con  $u_1$  y  $u_2$  los umbrales superiores e inferiores respectivamente, es decir, cuando se supera el valor  $u_1$  el sistema se halla en el estado  $+V$  y cuando se está por debajo de  $u_2$  el sistema se halla en  $-V$ . El ST es alimentado por una señal coherente de amplitud  $\varepsilon$ , frecuencia  $f_0$  más un ruido gaussiano blanco de media  $(u_1 + u_2) / 2$  y desviación estándar  $\sigma$ .

La Figura 1 muestra un esquema del setup experimental utilizado en este trabajo.

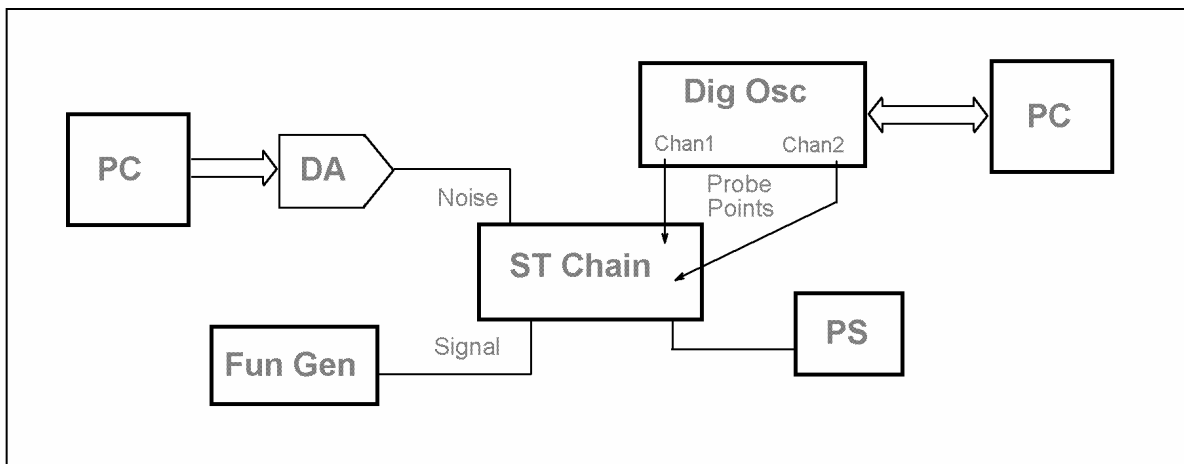


Figura 1 : Dispositivo experimental de un arreglo de Schmitt Triggers.

Especificaciones de los elementos del dispositivo experimental de la Figura 1:

**ST Chain:** tarjeta de prueba de un ST.

**Dig Osc:** Osciloscopio Digital Hewlett Packard HP 5451A 1Gsa/s, 250 MHz.

**PS:** Unidad de potencia de DC. (Top Ward dual tracking DC Power Suply.)

**Fun Gen:** Generador de funciones y barrido ( BKPrecision 3030 Swep/Function Generator)

**DA:** Convertidor Analógico-Digital (Digital to Analog Converter with Current Source Output) con nivel de precisión de 12bits.

**PC:** Computadora Personal.

Como señal coherente de entrada se utilizó una señal senoidal de 100 mV de amplitud, que no es suficiente para activar el ST, y una frecuencia de 30Hz (Fun Gen). El ruido inyectado en el sistema se generó con una señal ingresada a la tarjeta de prueba (ST) desde una PC, la cual era una corriente entre 0 mA y 1 mA correspondiente a la generación de números entre 0 y 4095 con una distribución gaussiana centrada en 2048 y con desviación estándar. Se trabajó con una fuente partida de +5 V y -5 V, obteniéndose una tensión de saturación de los amplificadores operacionales de +3.5 V y -3.5 V, respectivamente. Con estos valores de alimentación los umbrales inferior y superior del ST fueron 0.16 V y 1.98 V, respectivamente (Para determinar estos valores se monitorea en paralelo la salida de los op-amps (*Amplificadores Operacionales*) analógicos y la salida de los ST, hallando para qué voltaje del op-amp se produce un “disparo” del ST). Los distintos puntos de prueba de la tarjeta se midieron con un osciloscopio digital Hewlett Packard de 2 canales, 8000 datos por canal, controlado por computadora. Es importante aclarar que pese a que en nuestro modelo el ruido inyectado al sistema es gaussiano no correlacionado  $\langle G_i(t) G_j(t') \rangle = \delta_{i,j} \delta_{t,t'}$ , en la implementación experimental del mismo se ha diseñado un a fuente de ruido global, es decir que toma el mismo valor para todas las unidades, perdiéndose la condición de no correlacionado entre unidades, aunque sí se mantiene su distribución gaussiana:  $\langle G_i(t) G_j(t') \rangle = \delta_{t,t'}$ . Esto se debió principalmente a inconvenientes con la disponibilidad de instrumental.

En la Figura 2 se muestra el circuito correspondiente al primer elemento de la cadena. En el mismo se detalla la función que cumple cada uno de sus componentes en el mismo.

La señal senoidal proveniente de un generador de funciones es sumada al ruido mediante el sumador IC1a. La corriente de ruido generada por la PC es convertida a tensión por el amplificador de transconductancia IC1b, sumándosele un nivel de DC de offset y luego se la amplifica, IC1c y IC1d. El nivel de offset adicionado permite centrar la señal de ruido entre los umbrales de cada ST, cercano a 1V.

Los amplificadores operacionales IC2a-c, entre cada uno de los ST, IC3a-d, actúan como sumadores de ganancia unitaria para el ruido y atenuadores e inversores para las salidas de los ST. La necesidad de invertir la señal viene de la naturaleza inversora de las compuertas NAND (NOT AND). Para determinar el acoplamiento o, lo que es lo mismo, el valor de atenuación, definimos el coeficiente de atenuación AF como el cociente  $33K/R$ . Por lo tanto utilizando diferentes valores de R se obtienen diferentes AF para las distintas mediciones.

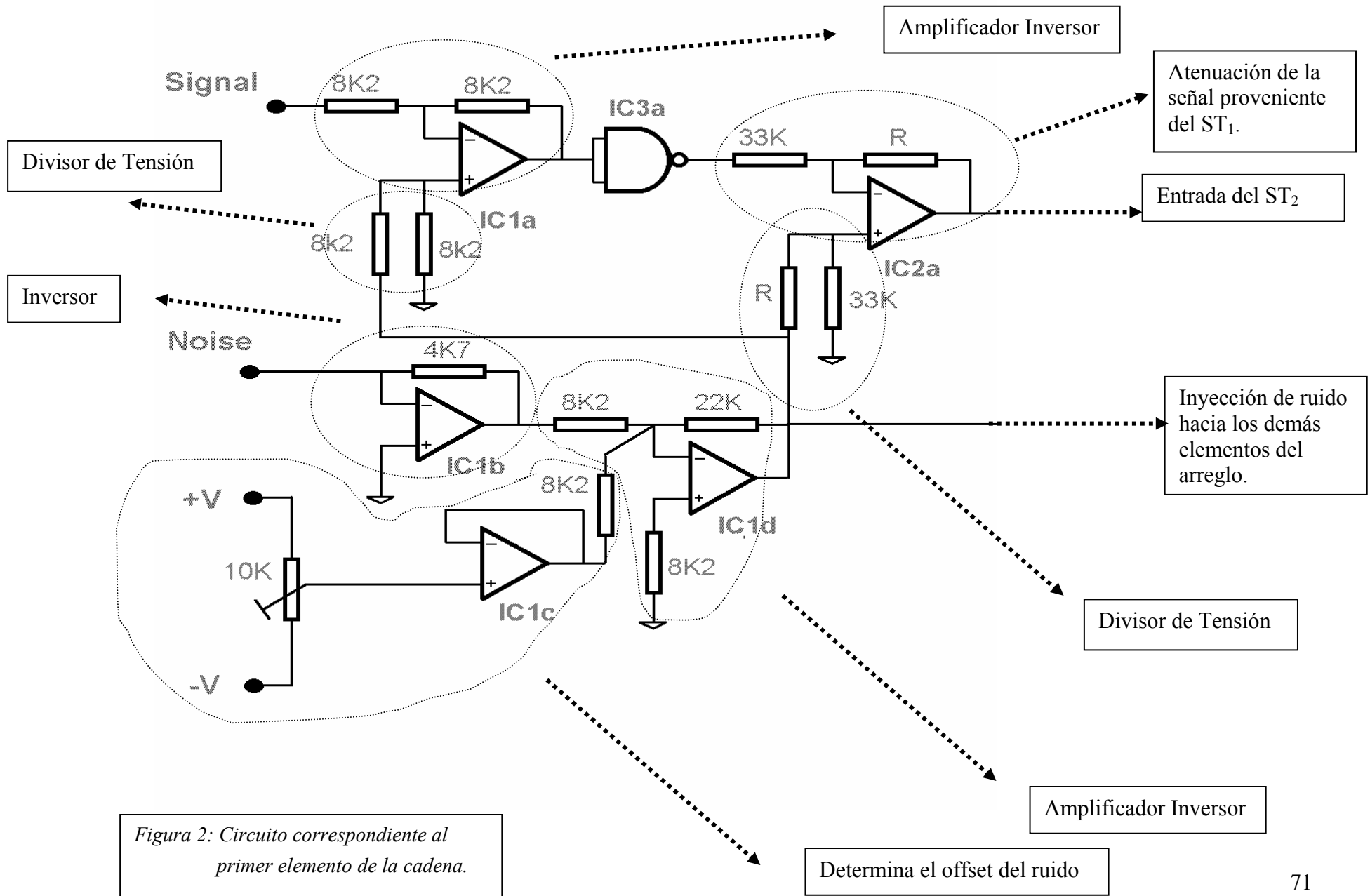


Figura 2: Circuito correspondiente al primer elemento de la cadena.

## 4.1 Mediciones

### 4.1.1 Caracterización del ruido

Como un primer paso en el proceso de medición se necesitó caracterizar y calibrar el ruido gaussiano. Dicho ruido, como ya se mencionó en un párrafo anterior, se generó con una PC y debido a que los opamps saturan para valores de salida cercanos a la tensión de alimentación, era de esperar que la distribución asociada al ruido fuera una gaussiana truncada para valores mayores o menores que determinados límites. Por esto se midió la tensión en la salida del IC1d para 15 valores distintos de ruido entre 0.25 y 2.6 Vrms cubriendo así un orden de magnitud en la variación de amplitud. De cada medición se obtuvo la función de distribución acumulada de valores de tensión del ruido la cual se ajustó con la siguiente función:

$$z(v) = \begin{cases} 0 & v < V_{min} \\ \frac{N}{2} [1 + \text{Erf}(\frac{v-\mu}{\sqrt{2}\sigma})] & V_{min} < v < V_{max} \\ N & V_{max} < v \end{cases} \quad (4.1)$$

siendo  $v$  el voltaje de salida,  $N=8000$  el número total de datos (permitidos por el canal del osciloscopio),  $\mu$  y  $\sigma$  el valor medio y la desviación estándar de la distribución respectivamente.

Los valores de saturación mínimo y máximo son  $V_{min} = -3.5$  V y  $V_{max} = 3.5$  V respectivamente. El inset de la Figura 3 muestra la distribución acumulada no normalizada medida y el ajuste teórico superpuesto, correspondiente a una de las mediciones. De los ajustes se obtuvieron los valores de  $\mu$  y  $\sigma$  observándose una excelente correlación entre el ruido generado por la PC y el ruido medido.



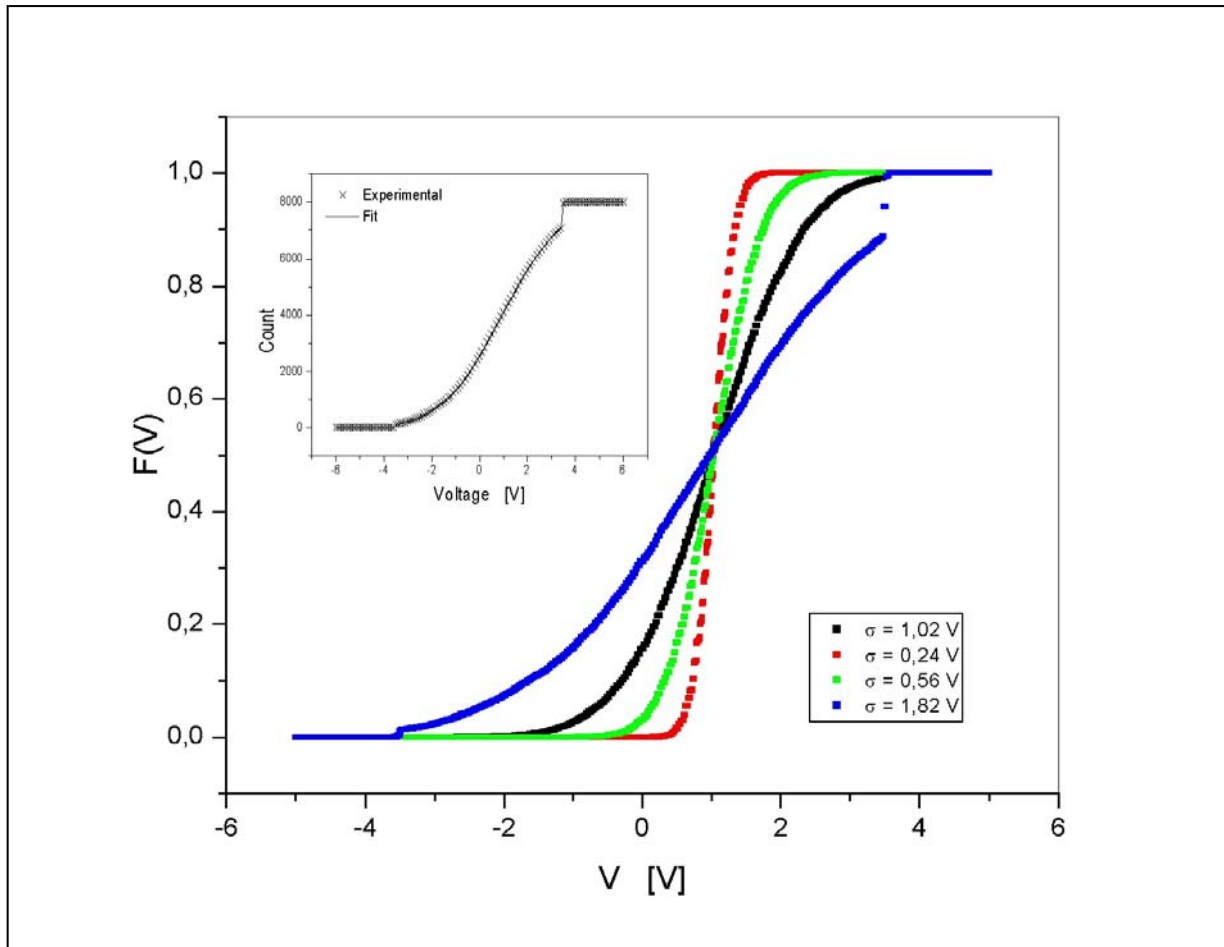
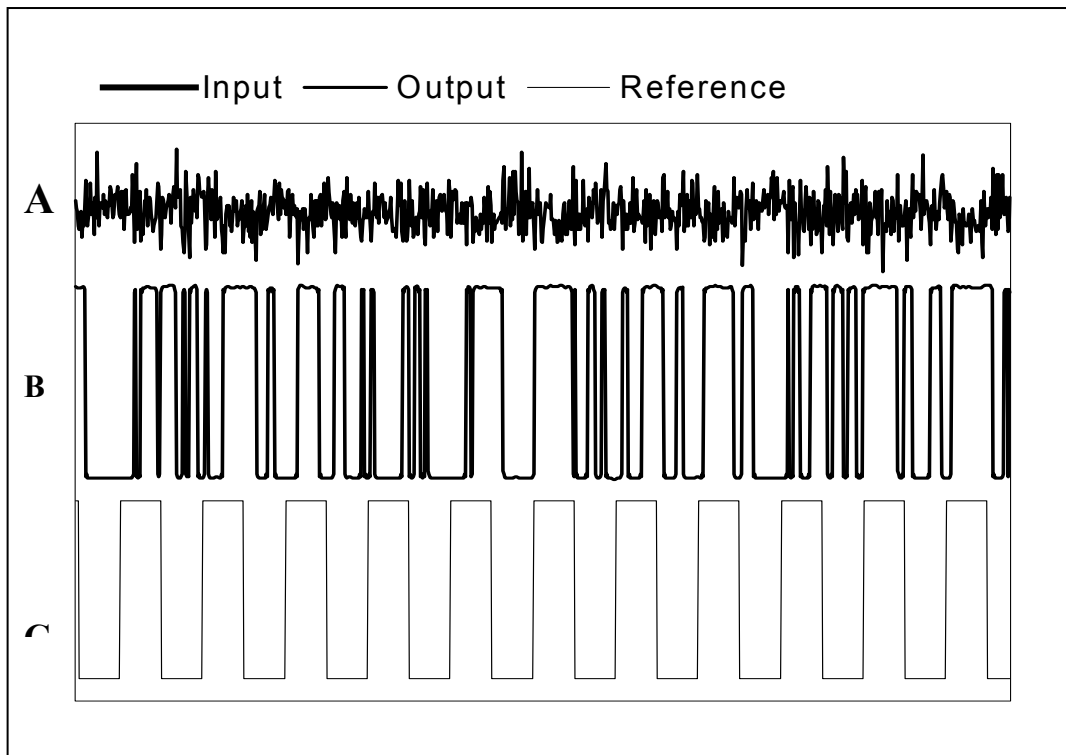


Figura 3: Distribución acumulada medida normalizada para distintos valores de la desviación estándar. En el inset se muestra la distribución no normalizada medida para  $s=1.82V$  y, superpuesto, el ajuste obtenido con la ecuación 1.

### 4.1.2 Caracterización de un Schmitt Trigger

Con el fin de observar y caracterizar el fenómeno de resonancia estocástica en el primer ST se varió el ruido gaussiano en 15 valores distintos en el rango de 0.25 y 2.6Vrms ( Vrms: unidad de voltaje eficaz) , manteniendo fija la amplitud de la señal senoidal en 100 mV (diez veces menor que el valor del umbral del ST). Para cada uno de los 15 valores se midió en cada canal del osciloscopio la entrada y la salida del primer Schmitt Trigger, IC3a, repitiéndose 50 veces cada medición de forma de obtener una buena estadística. De cada medición se obtuvieron dos matrices de 50 por 8000, esto es, 50 repeticiones de 8000 datos por cada canal.

A partir de las series temporales se obtuvieron los espectros de frecuencia correspondientes utilizando la transformada de Fourier. La Figura 4 muestra una ampliación de una de las series temporales medidas. La Figura 5 muestra los espectros de entrada y salida para una de las mediciones.



*Figure 4: Series temporales de entrada, salida y de referencia medida a la entrada y a la salida del ST. La serie **A** corresponde a la señal más el ruido, la **B** corresponde a la salida del primer ST, y la serie **C** corresponde a una señal de referencia cuadrada de frecuencia  $\omega_o$ .*

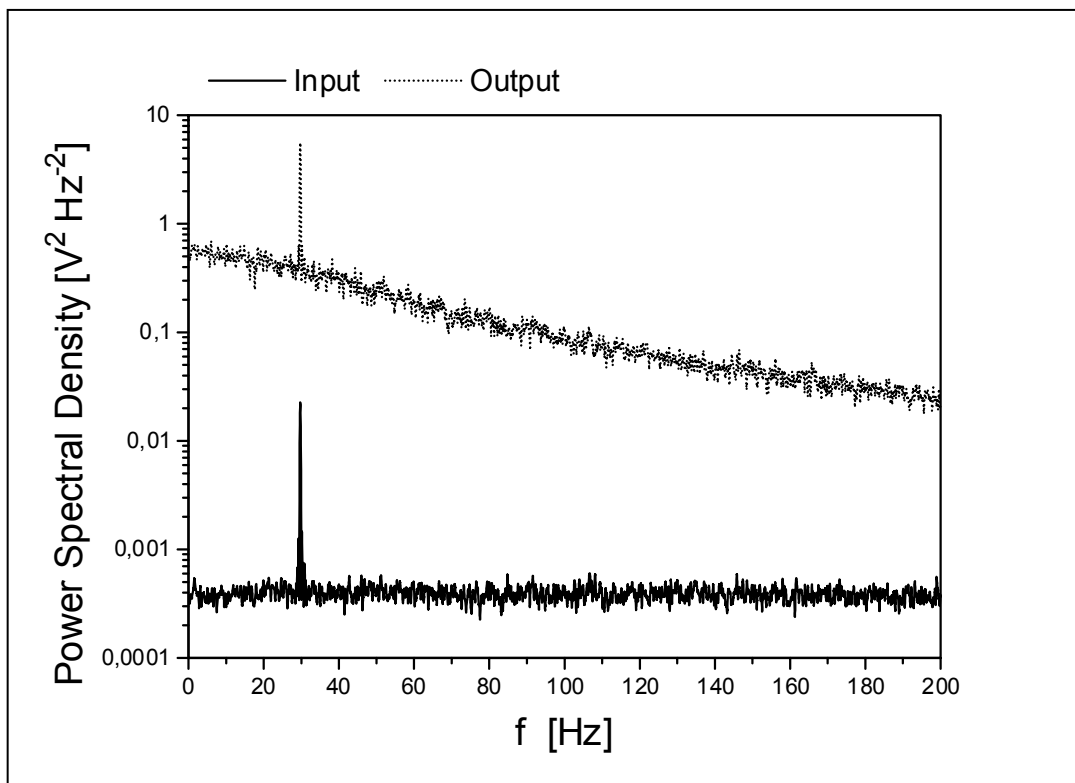


Figura 5: Densidad de la Potencia espectral típica medida a la entrada y a la salida del ST.

La Figura 6 muestra un zoom de la zona del pico asociado a la señal coherente observándose el pico claramente. Se observa que el sistema amplifica la señal coherente y limita el ancho de banda del ruido.

Dado que el pico de la señal coherente tiene asociada la función  $Sinc(x) = Sen(x)/x$ , y que el semi-ancho de esta función viene dado por la frecuencia de sampling  $F_s$  dividida por la cantidad de datos  $N$ , el máximo de la Sinc ocurrirá en la frecuencia correspondiente, sólo si la frecuencia del generador es un número entero de veces dicho semiancho, lo que es casi imposible debido al carácter asincrónico de la base de tiempo del osciloscopio y el oscilador del generador de funciones. Para solucionar este inconveniente se aplicó un algoritmo diseñado especialmente para sortear esta dificultad [6], el cual básicamente calcula varias FFT para distintos valores de  $N$ , modificándolo en un cierto porcentaje mínimo reconstruyendo así la función Sinc.

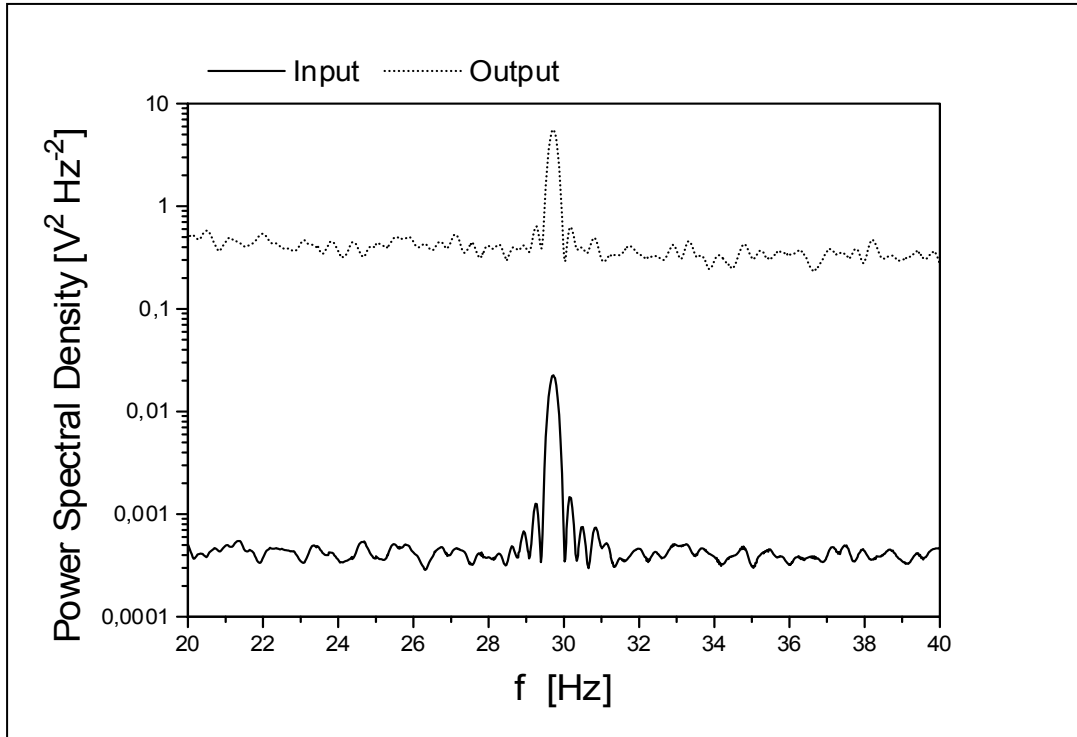


Figura 6: Zoom de la Figura anterior donde se observa en detalle el pico de la señal coherente.

A partir del pico del espectro, respecto de la línea de base correspondiente al ruido, se calculó la amplitud de la señal armónica equivalente asociada a dicho punto. Con estos valores se definió la ganancia del sistema,  $\Gamma$ , como el cociente entre la amplitud de salida y la de entrada. La Figura 7 muestra dicha ganancia al variar el ruido de entrada. También se superpuso el resultado de una serie de simulaciones numéricas en las mismas condiciones que las experiencias y la función teórica dada por la siguiente expresión:

$$\Gamma(\sigma) = \frac{V}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{e^{-\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \text{Erf}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)^2 + \left(\frac{2\pi f_0}{F_s}\right)^2}} \quad (4.2)$$

Siendo  $V=5$  V el módulo de la tensión de alimentación,  $\theta=1$  V, la semidiferencia entre los umbrales superior e inferior del ST,  $f_0=30$  Hz la frecuencia de la señal coherente, y  $\sigma$  el valor de tensión Vrms del ruido de entrada o lo que es lo mismo, la desviación estándar de la distribución gaussiana. En una una sección posterior se mostrará cómo se obtuvo esta expresión. La Figura 7 muestra la ganancia de la señal coherente obtenida

experimentalmente, a partir de una simulación numérica y la que se obtiene por el modelo teórico dada por la ecuación (4.2)

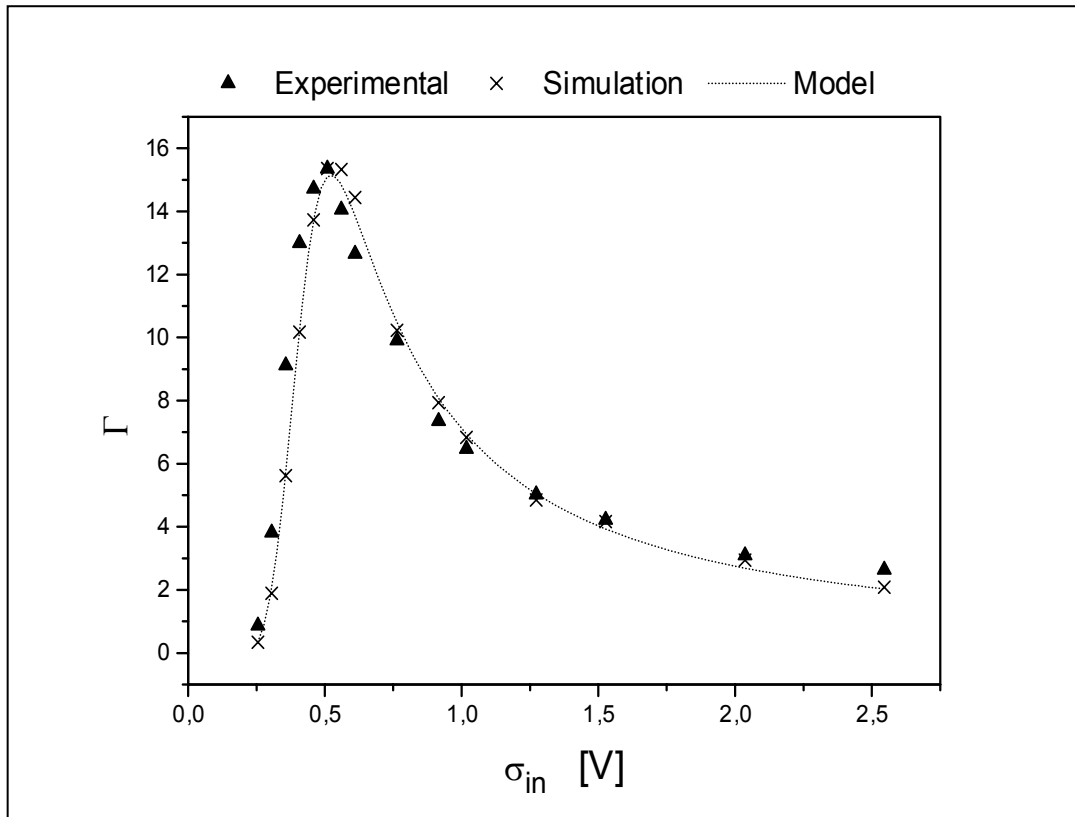


Figura 7: Ganancia de la señal coherente obtenida experimentalmente, a partir de la simulación y la dada por el modelo.

Otro aspecto interesante de analizar a partir de las series temporales medidas es la correlación cruzada entre la entrada y la salida, y la relación de fase entre las mismas. La Figura 8 muestra un zoom de la señal de correlación cruzada entrada-salida y la correspondiente autocorrelación de la señal de entrada pudiendo observarse así el desfase.

La función correlación cruzada entre una señal de entrada periódica y una señal de salida también periódica pero desfasada respecto de la primera viene dada por la siguiente expresión :

$$C(t) = \frac{\xi_{in}\xi_{out}T}{2} \left[ (1 - |t|/T) \cos(\omega_0 t + \phi) - \sin(\omega_0(T - |t|)) \cos(2\omega_0 t + \omega_0 T + \phi) / \omega_0 T \right] \quad (4.3)$$

donde  $\xi_{in}$  y  $\xi_{out}$ , las amplitudes de las señales coherentes de entrada y salida, respectivamente,  $T = 8000/F_s$ , el tiempo total de sampling y  $F_s$  frecuencia de sampling,

$\omega_0 = 2\pi f_0$ , la frecuencia de la señal coherente y  $\phi$ , la diferencia de fase buscada. El ajuste se realizó descartando los valores correspondientes al tiempo de correlación entre la entrada y la salida, alrededor de los primeros 40 ms.

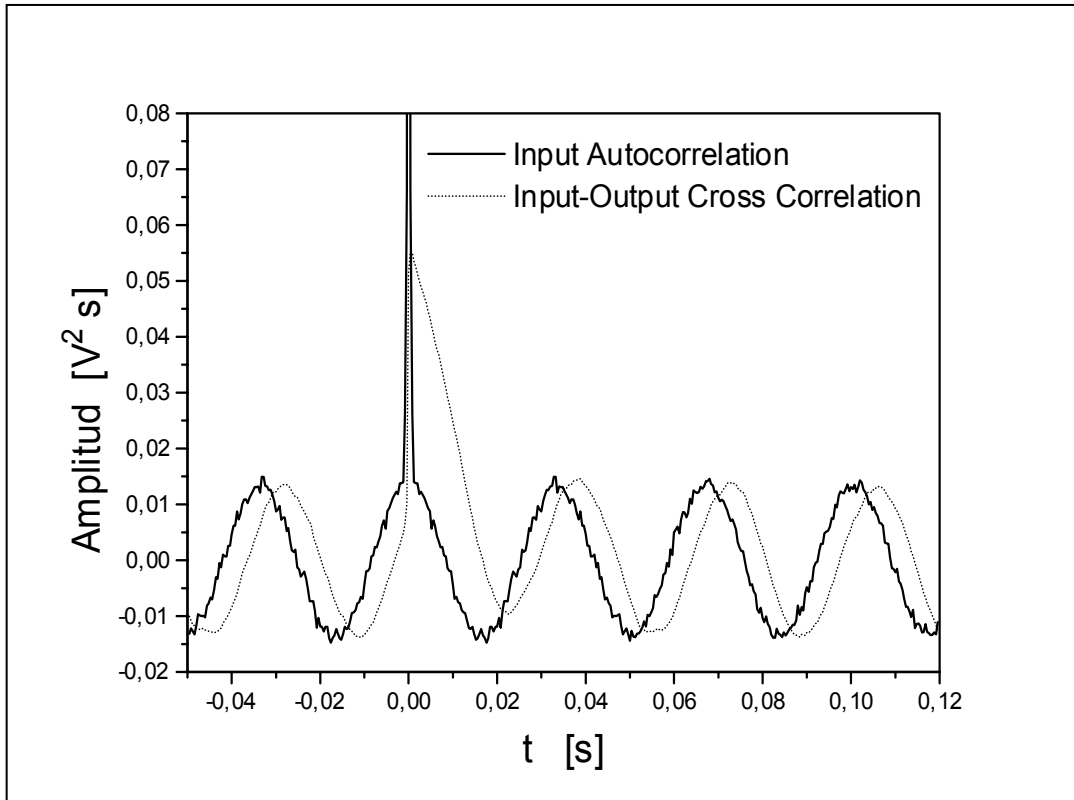


Figura 8: Correlación cruzada y autocorrelación.

Así, la diferencia de fase se obtuvo a partir de ajustar la función de correlación cruzada con la ecuación (4.3). La Figura 9 muestra dicha diferencia de fase experimental al variar el ruido de entrada. Nuevamente se superpuso el resultado de las simulaciones numéricas y la función obtenida del modelo. En este caso se observa una muy buena correlación entre el modelo y la simulación pero una ligera diferencia sistemática en los resultados obtenidos de las mediciones. Es importante notar que no se utilizó ningún parámetro de ajuste.

La expresión obtenida con el modelos es:

$$\phi(\sigma) = -A \tan \left[ \frac{2\pi f_0 / F_s}{1 - \text{Erf} \left( \frac{\theta}{\sqrt{2}\sigma} \right)} \right] \quad (4.4)$$

donde  $\text{Erf}(x)$  denota la Función Error usual.

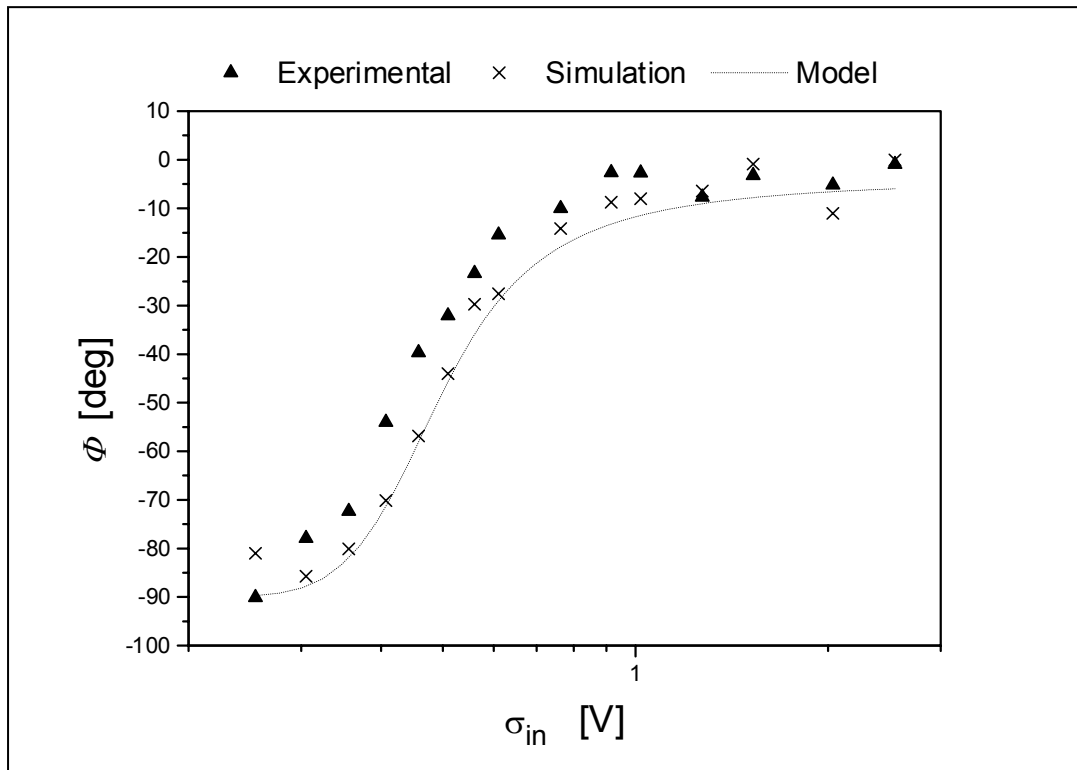


Figura 9: Diferencia de fase entre entrada y salida experimental, simulada y la dada por el modelo en función del ruido de entrada.

## 4.2 Descripción del Modelo Teórico

Un ST es un dispositivo de dos estados ( $+V$  y  $-V$ ) con histéresis, que puede ser diseñado fácilmente a partir de un amplificador operacional ( op-amps ) con feedback positivo. Si el voltaje de entrada  $V_i$  es menor que un cierto valor umbral  $u_1$ , el voltaje de salida toma un valor constante  $v_o = -V$ . Si aumentamos  $V_i$  por encima de  $u_1$ , el voltaje de salida se mantiene negativo hasta tanto  $V_i$  sea mayor (en módulo) que un segundo umbral  $u_2$ , con  $u_1 < u_2$ , donde “salta” a  $v_o = +V$ . Viceversa, la transición de la salida de  $V \rightarrow -V$  ocurre en  $V_i = u_1$ . La amplitud del ciclo de histéresis viene dado por  $u_1 - u_2$ . El fenómeno de resonancia estocástica surge a partir de la modulación periódica del centro del ciclo de histéresis alrededor del valor medio  $(u_1 - u_2) / 2$ . Esta modulación trae una

$$x(t) \rightarrow v_o(t)$$

reminiscencia al “vuelco” periódico de los pozos del modelo de potencial biestable. A partir de este último se puede ver que:

Debido a la histéresis este es un proceso Markoviano, donde el estado del sistema en un tiempo  $t_{n+1}$  dependerá del estado en un instante previo  $t_n$ . Entonces para modelar esta dinámica, debemos tener en cuenta que existe la probabilidad  $P_1$  que el estado de salida sea  $+V$  y la probabilidad  $P_2$  que sea  $-V$ , de forma tal que  $P_1 + P_2 = 1$ . Si consideramos que la probabilidad  $P_1$  de que la salida esté en el estado  $+V$  al tiempo  $t = (n+1)F_s$ , dependerá del estado en el instante anterior  $t = n F_s$ , y será la suma de dos situaciones: que ocurra la transición  $-V \rightarrow V$  dado que el sistema estaba en  $-V$ , o que no ocurra la transición  $V \rightarrow -V$  dado que el sistema estaba en  $V$ .

Escribiendo las probabilidades  $P_i$  (con  $i=1,2$ ) y suponiendo ruido gaussiano centrado entre los umbrales se obtiene la ecuación dinámica para la probabilidad  $P_1$ :

$$\frac{dP}{dt} = \alpha - \gamma P \quad (4.5)$$

Siendo

$$\alpha = \frac{F_s}{2} [1 - \text{Erf}(\frac{\theta - e(t)}{\sqrt{2}\sigma})]$$

$$\gamma = F_s [1 - \frac{1}{2} \text{Erf}(\frac{\theta - e(t)}{\sqrt{2}\sigma}) - \frac{1}{2} \text{Erf}(\frac{\theta + e(t)}{\sqrt{2}\sigma})]$$

Siendo  $e(t)$  la señal coherente,  $\sigma$  el valor eficaz del ruido,  $q = (u_1 - u_2) / 2$  el umbral centrado y  $F_s$  la frecuencia de muestreo del sistema de digitalización. Considerando que la amplitud de  $e(t)$  es mucho menor que el valor del umbral se puede eliminar la dependencia temporal de  $\gamma$  e integrar analíticamente obteniéndose:

$$P(t) = \frac{1}{2} + (P(0) - \frac{1}{2}) + \frac{\omega}{\omega^2 + \gamma^2} \frac{e_0 F_s}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{e_0^2}{2\sigma^2}} e^{-\gamma t} + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \frac{e_0 F_s}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{e_0^2}{2\sigma^2}} \sin(\omega t + \phi) \quad (4.6)$$

siendo  $e_0$  la amplitud de la señal coherente.

El segundo término da cuenta del comportamiento transitorio del sistema, mientras que el tercero corresponde a la solución de estado estacionario. El valor medio del estado de salida, luego del transitorio, se obtiene a partir de la probabilidad de estado estacionario:

$$\langle y(t) \rangle = V(2P(t) - 1) = \Gamma(\sigma) e_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (4.7)$$

correspondiente a una señal coherente de la misma frecuencia que la de la entrada, con un factor de ganancia,  $\Gamma(\sigma)$ , y un desfazaje  $\phi$ .



$$\Gamma(\sigma) = \frac{V}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{e^{-\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \text{Erf}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)^2 + \left(\frac{2\pi f_0}{F_s}\right)^2}} \quad (4.8)$$

$$\text{Tan}(\phi) = -\frac{\omega/F_s}{1 - \text{Erf}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}\sigma}\right)} \quad (4.9)$$

### 4.3 Cadena de Schmitt Triggers

En un trabajo previo Rowe et al. [7] estudiaron la propagación sostenida y aumentada por ruido en una cadena de 4 ST acoplados unidireccionalmente pero con una implementación experimental de la línea diferente a la nuestra. Sin embargo, la diferencia fundamental entre nuestros trabajos radica en el rol de la excitación externa. En nuestro dispositivo sólo el primer ST está sometido a la misma, mientras que en el trabajo de Rowe et al. *todos* los nodos del arreglo son sometidos a la modulación periódica. Esta distinción cobra importancia cuando lo que se está tratando de modelar es una cadena de transmisión, en cuyo caso la hipótesis del trabajo de Rowe carecería de sentido. Como un comentario agregado sobre el trabajo de Rowe, es destacable mencionar la poca claridad del mismo en la descripción del setup, por ejemplo cómo es la atenuación entre nodos, cómo se obtuvo la señal de ruido y su ancho de banda, etc.

Volviendo a nuestro trabajo, a partir de la caracterización del ruido y de una unidad ST se han acoplado unidireccionalmente 4 unidades ST, de forma tal que la salida del  $ST_i$  alimenta a la unidad  $ST_{(i+1)}$ . La Figura 10 muestra el circuito desarrollado para llevar a cabo este estudio. Este dispositivo no es más que una secuencia unidireccional de la implementación presentada en la Figura 2, donde el acoplamiento entre las unidades se produce vía amplificadores operacionales analógicos (op-amp).

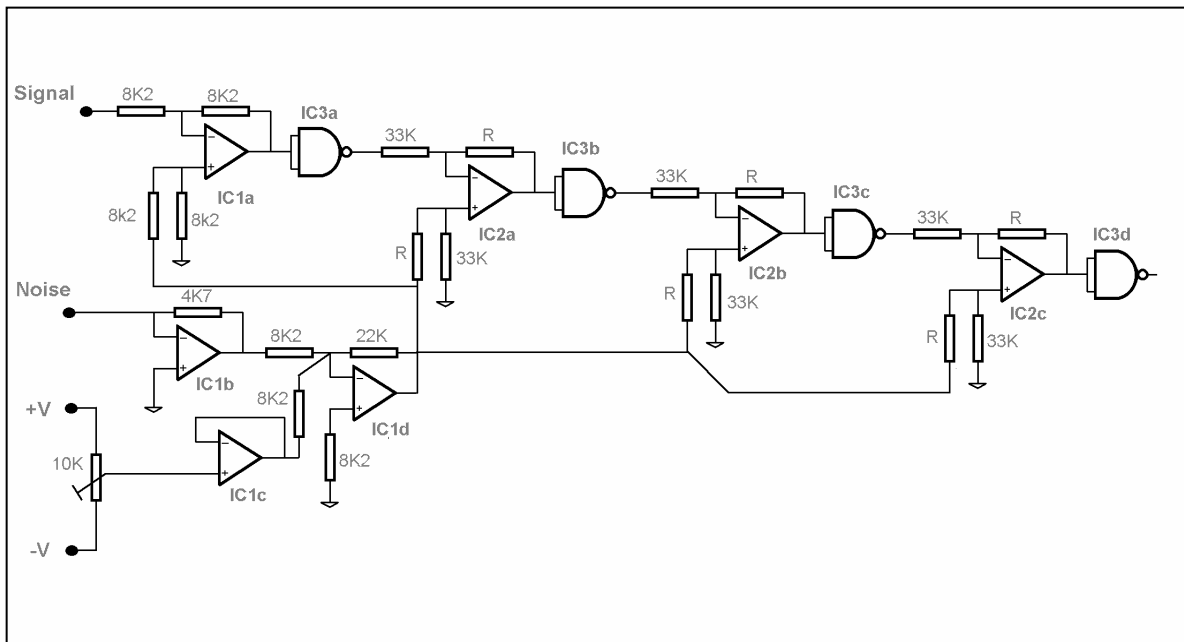


Figura 10: Diagrama circuital de la tarjeta de prueba con los 4 ST.

IC1, IC2: LM324. Quad Differential Inputs Operational Amplifiers.

IC3: MC14093B Quad 2-Input NAND Schmitt Trigger.

En la Figura 11 se presenta la Amplitud Relativa de cada unidad para distintos factores de atenuación. Definimos Amplitud Relativa como el cociente entre la amplitud del pico resonante del  $ST_i$  ( $i = 2,3,4$ ) con respecto al pico correspondiente del primer ST, único excitado con el estímulo periódico. Cabe aclarar que la amplitud de salida de un ST se calcula como el alto del pico del espectro de potencias en un entorno de la frecuencia resonante, respecto del fondo ruidoso del espectro en dicho entorno.

Se realizaron mediciones para tres factores de atenuación (AF) : 22, 37 y 106, cuando la intensidad del ruido del primer elemento está cercano al valor óptimo de 0.5 Vrms. Estos tres valores de AF corresponden a las siguientes niveles de ruido para los siguientes elementos: 0.47 Vrms, 0.485 Vrms y 0.495 Vrms respectivamente. Es importante notar que en la forma que el circuito fue diseñado, al establecer un valor de AF, queda automáticamente fijado el valor de la atenuación en el ruido.

Como se puede observar de la Figura 11 la amplitud relativa muestra una degradación de la señal correspondiente a  $\omega_0$ , cuando la misma se propaga a lo largo de la línea. Como puede observarse para un  $AF=22$  la degradación es menor al 10%, indicando que aunque la señal inyectada a los subsiguientes ST vayan sufriendo una atenuación, el nivel de ruido, que es menor que el correspondiente al primer elemento,

es tal que permite una muy buena propagación de la señal a lo largo de los diferentes nodos. La amplitud de la señal coherente de entrada es 100 mV y 1,6 V a la salida de la primera etapa. Debido a la naturaleza digital del ST y a que el ruido es correlacionado para valores de AF pequeños es esperable que la cadena opere en un régimen más cercano a un oscilador rígido. El objetivo es encontrar valores de AF para los cuales la óptima transmisión se produzca entre dos situaciones extremas: el caso trivial de una cadena rígida, y el extremo opuesto, en donde la degradación es tal que no es posible transmisión alguna.

Si se aumenta el valor de la atenuación hasta  $AF=37$  se produce una mayor degradación de la señal debido a una menor amplitud de señal proveniente del ST anterior y de un incremento en la intensidad del ruido.

Recién para un AF de 106 la transmisión degrada cayendo recién al 35 %..

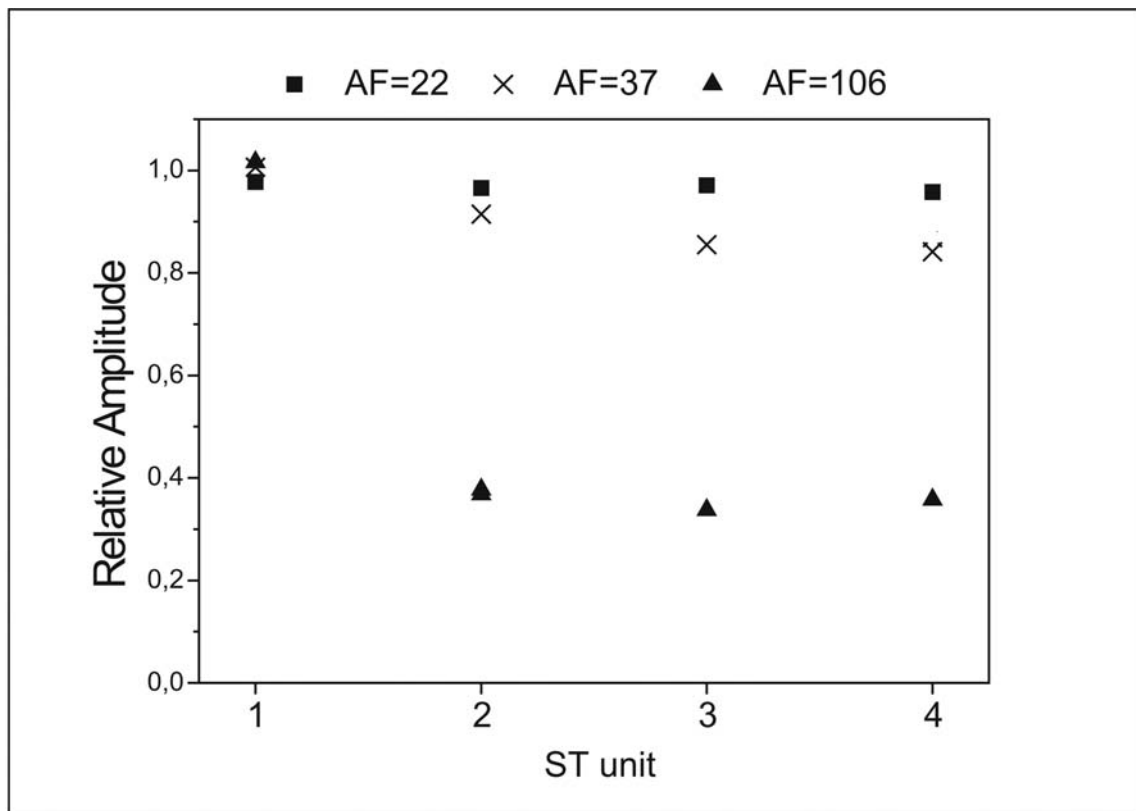


Figura 11: Variación de la Amplitud relativa al avanzar en la cadena para distintos factores de atenuación .

## 4.4 Conclusiones del capítulo

Se ha diseñado y caracterizado un arreglo experimental para simular un sistema biestable, con el objeto de verificar si el mismo presenta el régimen de resonancia estocástica similar a los estudios teóricos. Este proceso requirió una adecuada caracterización del ruido global aplicado en los diferentes elementos y de las correspondientes entradas y salidas del elemento. Se corroboró que la ganancia de la señal responde a una curva típica de resonancia estocástica.

Una vez que se estudió la respuesta experimental de un elemento, se procedió a diseñar un arreglo de 4 Schmitt Triggers acoplados unidireccionalmente, donde sólo el primero de ellos se halla excitado por un modulante externo. A pesar de que no se disponía de un osciloscopio de cuatro canales para caracterizar *simultáneamente* todos los elementos del arreglo, del conjunto de mediciones tomadas de a pares de elementos se observa que para ciertos valores del factor de atenuación se produce la transmisión con poca degradación de la señal, verificándose lo obtenido numéricamente en el capítulo 2.

# Capítulo 5

## Estudio del comportamiento de la fase

Uno de los fenómenos no lineales fundamentales observados en la naturaleza y, particularmente uno de los mecanismos básicos de la auto-organización de los sistemas complejos es el fenómeno de sincronización. Desde un punto de vista más general, este fenómeno se entiende como un “ajuste” de algunas relaciones entre tiempos característicos, frecuencias o fases de dos o más sistemas dinámicos durante su interacción.

Entre todas las posibles situaciones y sistemas donde se puede analizar el fenómeno de sincronización, existe una clase muy amplia de sistemas no lineales que pueden hacer uso del ruido, a partir de lo cual se produce un óptimo comportamiento coherente para un nivel de ruido no nulo en respuesta a un segundo sistema o a una señal de entrada. Los sistemas dinámicos de esta clase poseen escalas de tiempo características controladas por el ruido que juegan el rol del período natural de un oscilador auto-sostenido. Un potencial biestable sometido a ruido es un tipo representativo de esta clase. Cuando dos de estos sistemas se acoplan, se puede observar *una sincronización estocástica* mutua. ([1]). Por otra parte, cuando un sistema biestable estocástico está forzado por una fuerza periódica débil, la respuesta del sistema a esta señal débil puede ser amplificada significativamente ajustando la intensidad del ruido, es decir presentándose el fenómeno de Resonancia Estocástica. Este fenómeno puede ser caracterizado en términos de sincronización de frecuencia (*frequency entrainment*) ([2] [3]) y enganche de fase (*phase locking*) ([4] [5] [6]).

Además, estudios recientes han mostrado que desde un punto de vista general el fenómeno de sincronización se puede extender a sistemas deterministas no periódicos, caóticos o estocásticos. Aquí nos concentraremos en el estudio de la sincronización en relación al fenómeno de resonancia estocástica, pero desde el punto de vista de los procesos estocásticos discretos.

### 5.1 Definición de fase

El comportamiento complejo de los sistemas requiere nuevos conceptos de la definición de fase comparada con aquellas que se hacen en los casos de sistemas que presentan oscilaciones armónicas o cuasi-armónicas. Debido a este hecho vamos a considerar una generalización de la definición de fases instantáneas basadas en la

representación de *señal analítica*. Obviamente existen muchas otras posibilidades y el uso de una posible definición de fase depende fuertemente del sistema dinámico en estudio y del tipo de señal que se esté considerando. Sin embargo, se mostrará que usando la definición de señal analítica, la sincronización de oscilaciones no periódicas y aún estocásticas puede ser estudiada dentro del marco dado por la noción clásica de sincronización para oscilaciones periódicas.

El concepto de señal analítica refiere a lo siguiente: dada una señal real  $x(t)$ , se construye una señal compleja  $w(t)$  dada por:

$$w(t) = x(t) + jy(t) = A(t) e^{i\Phi(t)} \quad (5.1)$$

A partir de esta expresión la definición de amplitud y fase instantánea se obtienen directamente como:

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad \Phi(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \quad (5.2)$$

al igual que la definición de frecuencia instantánea:

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{1}{A^2(t)}[x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)] \quad (5.3)$$

Hasta aquí la elección de  $y(t)$  es arbitraria. Pero como estamos interesados en la representación de señal analítica,  $y(t)$  será la transformada de Hilbert del proceso  $x(t)$  original considerado. Hay varias formas posibles de motivar el uso de la transformada de Hilbert, aunque aquí se delinearán dos procedimientos matemáticos equivalentes. Ambos se originan a partir del hecho que esta representación converge con la definición usual de fase en el límite de procesos con oscilaciones armónicas.

Cómo se procedería en el caso de procesos armónicos? A partir de la señal  $x(t) = A\cos(\omega t)$  definimos  $y(t)$  como:

$$\dot{x}(t) = y(t) = -A\omega\sin(\omega t) \quad (5.4)$$

El mapa  $x \rightarrow y$  difiere para valores positivos y negativos de frecuencias. Para valores positivos  $\omega$  de frecuencias está adelantado respecto de  $x$ , mientras que en el caso negativo está retrasado. Para procesos armónicos se puede ver fácilmente que el mapeo consiste en un shift de fase  $y(\omega t) = x(\omega t - \pi/2)$  para  $\omega > 0$  y  $y(\omega t) = x(\omega t + \pi/2)$  para frecuencias negativas respectivamente.

Además se debe pedir que  $y(t)$  se obtenga a partir de una convolución de  $x(t)$ , esto es:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad (5.5)$$

Para un proceso armónico la convolución de  $x(t)$  significa la multiplicación de la transformada de Fourier de  $x$ ,  $y$  y  $K$ :

$$y_{\Omega} = K_{\Omega} x_{\Omega} \quad (5.6)$$

El salto de fase necesario se obtiene multiplicar  $x_{\Omega}$  por  $\pm i$ , y la transformada de Fourier del núcleo  $K(t)$  es:

$$K_{\Omega} = -i \operatorname{sign}(\Omega) \quad (5.7)$$

con  $\operatorname{sign}(0) = 0$ . En consecuencia antritransformando Fourier se obtiene:

$$K(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (5.8)$$

Este procedimiento se puede generalizar a procesos complejos y da un idea de cómo construir la señal analítica. Con el kernel de la ecuación (8) se puede definir  $y(t)$  como:

$$y(t) = H[x] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x(t - \tau) - x(t + \tau)}{\tau} d\tau \quad (5.9)$$

donde la integral está tomada en el sentido del valor principal de Cauchy. Esta expresión representa la transformada de Hilbert del proceso original  $x(t)$ .

De forma similar, podemos comenzar con la descomposición espectral del proceso original:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_{\Omega} e^{i\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (x_c(\Omega) \cos(\Omega t) + x_s(\Omega) \operatorname{sen}(\Omega t)) d\Omega \quad (5.10)$$

donde  $x_c$  y  $x_s$  son las transformada seno y coseno de  $x(t)$ . Para el proceso armónico se tendrá la expresión obvia  $x_c(\omega) = A \delta(\Omega - \omega)$  y  $x_s(\omega) = 0$ . El conjugado y está definido por un corrimiento en la fase de  $-\pi/2$  lo cual se puede obtener multiplicando la amplitudes espectrales por  $\exp(-i \pi/2)$ . Así se obtiene la representación espectral de la transformada de Hilbert:

$$\begin{aligned} y(t) = H[x] &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (x_c(\Omega) \cos(\Omega t) e^{-i\pi/2} + x_s(\Omega) \operatorname{sen}(\Omega t) e^{-i\pi/2}) d\Omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (x_c(\Omega) \operatorname{sen}(\Omega t) - x_s(\Omega) \cos(\Omega t)) d\Omega \end{aligned} \quad (5.11)$$

para los procesos armónicos  $y(t) = A \text{ sen } (\omega t)$  , como era de esperar.

De la ecuación (11) se encuentra que con  $\Omega > 0$ :

$$H[\exp(i\Omega t)] = -i e^{i\Omega t} \quad , \quad H[\exp(-i\Omega t)] = i e^{i\Omega t} \quad (5.12)$$

lo cual nuevamente determina la transformada de Fourier del núcleo(kernel) de la convolución :

$$K_{\Omega} = -i \text{ sign } (\Omega) \quad (5.13)$$

Con este resultado se recupera la transformada de Hilbert en la forma de la convolución de la ecuación (5.5) con el kernel de la ecuación (5.8).

Como toda transformación lineal  $H[x]$  cumple varias propiedades como:

1. cada transformada de Hilbert de una superposición lineal de dos señales es la superposición de las transformadas de Hilbert de cada una de ellas.
2. si el tiempo de la señal tiene algún corrimiento, también lo tendrá el argumento de la transformada.
3. la transformada de Hilbert de una transformada de Hilbert da la señal original pero negativa.
4. funciones pares dan transformadas de Hilbert impares y viceversa.
5. la señal original y su transformada son ortogonales
6. la energía total de la señal original, la integral de  $x^2(t)$  en el tiempo, es igual a la energía de la transformada.

También se puede hallar la transformada de Hilbert para variables estocásticas. En el caso de una señal estocástica  $x(t)$  la convergencia de esta integral debe ser entendida en el sentido del valor medio cuadrático ([7]). La señal transformada está correlacionada en la misma forma que la señal original. Pero ambas están anticorrelacionadas con una función de correlación la cual es la transformada de Hilbert de la función de autocorrelación de la señal original.

La amplitud estocástica instantánea  $A(t)$  y la fase  $\Phi(t)$  están definidas según la ecuación (5.1) . Las condiciones para que se produzca el fenómeno de una sincronización pueden encontrarse entonces a partir del estudio de la frecuencia media :

$$\langle \omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \omega(t) dt \quad (5.14)$$

y del coeficiente de difusión de la diferencia de fase instantánea entre una señal de entrada y otra de salida.



## 5.2 Caracterización de la diferencia de fase

Cómo se obtiene este coeficiente de difusión en el caso de un sistema estocástico? La ecuación diferencial que describe la dinámica de la diferencia de fase de un oscilador excitado externamente por una señal periódica y ruido gaussiano es:

$$\dot{\phi} = f(\phi) + \alpha \xi(t) \quad (5.15)$$

la cual puede ser vista como el movimiento de una partícula browniana sobreamortiguada en un potencial  $U(\phi)$ . La función  $f(\phi)$  depende de los parámetros que definen el alto de las barreras de potencial. El segundo término da cuenta del ruido blanco gaussiano que producirá difusión de la fase. La ecuación de Fokker-Planck correspondiente a esta dinámica es:

$$\frac{\partial p(\phi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \phi} \left[ f(\phi) p(\phi, t) - D \frac{\partial p(\phi, t)}{\partial \phi} \right] \quad (5.16)$$

La diferencia de fase  $\phi$  es una variable no acotada y el proceso estocástico definido por esta ecuación es no estacionario.

Para analizar la difusión de fase inducida por el ruido, consideramos un estado inicial de la distribución de diferencia de fase concentrada en algún nivel inicial  $\phi_0$ ,  $p(\phi, t=0) = \delta(\phi - \phi_0)$ , tal que  $\langle \phi^2(t=0) \rangle = 0$ . Debido al ruido  $\phi$  difunde acorde a la ley  $\langle \phi^2(t) \rangle \propto D_{eff} \cdot t$  ([8]) donde  $D_{eff}$  es la constante de difusión efectiva que mide la tasa de difusión:

$$D_{eff} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \langle \phi^2(t) \rangle - \langle \phi(t) \rangle^2 \right] \quad (5.17)$$

En ausencia de ruido no hay difusión de fase, es decir  $D_{eff} = 0$ . Con el aumento del la intensidad del ruido esta constante también aumenta, es decir que la difusión se acelera.

En los osciladores, por ejemplo el Van der Pol ([11][12]), el período del ciclo límite define el tiempo característico principal del oscilador. El ruido puede jugar por lo tanto un rol negativo causando desviaciones de este valor lo cual se vuelve más y más disperso y, en consecuencia deteriora la sincronización del sistema. Contrariamente existen sistemas con tiempos característicos que sólo aparecen en presencia del ruido, jugando éste un rol positivo, como por ejemplo en el caso del Schmitt Trigger. Generalmente estos son sistemas dinámicos con uno o varios umbrales los cuales son superados sólo en presencia de ruido. Los candidatos de tales comportamientos son los

sistemas excitables, biestables y multiestables. Luego de sobrepasar el umbral, si el movimiento está ligado y es ergódico, las trayectorias retornan a su valor original o a una vecindad del mismo. Así el período característico de tales procesos está determinado por el ruido.

Consideremos el sistema que nos incumbe en este trabajo:

$$\dot{x} = -U'(x) + \varepsilon \cos(\omega t) + \sqrt{2D} \zeta(t), \quad U'(x) = \alpha x - \beta x^3 \quad (5.18)$$

en el cual, como ya hemos discutido en una sección previa, se producen transiciones al azar ( $\varepsilon = 0$ ) entre un pozo y otro del potencial, las cuales están asistidas por el ruido. Estos saltos entre pozos pueden considerarse como “oscilaciones” estocásticas caracterizadas por su tiempo principal de retorno:

$$T_{ret} = T_1 + T_2 \quad (5.19)$$

donde  $T_{ret} = T_1 = T_2$  es el tiempo de escape de un pozo para el caso simétrico ( $\varepsilon = 0$ ) y que en una sección previa mostramos que:

$$T_{ret}^{-1} = r_k = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta U_o}{D}\right) \quad (5.20)$$

A pesar que los tiempos de saltos responden a una distribución Poissoniana, consideraremos la dinámica de la ecuación (5.18) en el sentido que venimos discutiendo, es decir que los movimientos en ambos sentidos a través del umbral pueden considerarse como *oscilaciones estocásticas*. Para  $\varepsilon = 0$  el sistema descrito por la ecuación (5.18) no tiene una frecuencia determinista natural, pero está caracterizado por una escala temporal controlada por el ruido y representada por el tiempo principal de escape de un pozo de potencial. En el dominio de frecuencias esta escala temporal define la frecuencia principal de salto del sistema.

En el caso de considerar un valor de  $\varepsilon$  no nulo también se puede producir sincronización de estas oscilaciones estocásticas, donde la señal periódica actúa como un “reloj” externo con frecuencia y fase inicial dados.

Aplicando el concepto de señal analítica con un procedimiento similar al descrito en este capítulo, se obtiene la siguiente ecuación diferencial para la señal analítica  $w(t)$ :

$$\dot{w} = \alpha w - \frac{\beta}{4}(3A^2 w + w^3) + \Xi(t) + a e^{i \omega t} \quad (5.21)$$

Donde  $\Xi(T) = \xi(t) + i \eta(t)$  es el ruido analítico con  $\eta(t)$  la transformada de Hilbert de  $\xi(t)$ . Definiendo la diferencia de fase instantánea como:  $\phi(t) = \Phi(t) - \omega t$  y las fuentes de ruido como:

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= \xi(t) \cos \Phi + \eta(t) \sin \Phi \\ \xi_2(t) &= \eta(t) \cos \Phi - \xi(t) \sin \Phi\end{aligned}\quad (5.22)$$

se pueden obtener a partir de la ecuación (5.21) las ecuaciones diferenciales estocásticas para la amplitud y la fase:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \alpha A - \frac{\beta}{2} A^3 \left[ 1 + \cos^2(\phi + \omega_1 t) \right] + a \cos \phi + \xi_1(t) \\ \dot{\phi} &= -\omega_1 - \frac{a}{A} \cos \phi - \frac{\beta}{4} A^2 \sin[2(\phi + \omega_1 t)] + \frac{1}{A} \xi_2(t)\end{aligned}\quad (5.23)$$

Se puede observar que en la segunda ecuación no aparece una frecuencia natural, sino un término con  $\omega_1$ , nuevamente indicando que no hay escalas de tiempo deterministas.

Calculando el coeficiente de difusión efectiva  $D_{eff}$  dado por la ecuación (5.17) usando fases definidas vía la señal analítica, se obtiene numéricamente los resultados que se presentan en la figura 1. Con el aumento de la amplitud  $A$  la presencia de un mínimo cada vez más pronunciado se observa en la dependencia de  $D_{eff}$  versus la intensidad de ruido. Así se puede verificar una sincronización efectiva para el ejemplo estándar de resonancia estocástica. Es importante notar que la introducción de ruido en el sistema produjo un orden en la dinámica de fase: el aumento de la intensidad del ruido causó la desaceleración de la difusión de la diferencia de fase.

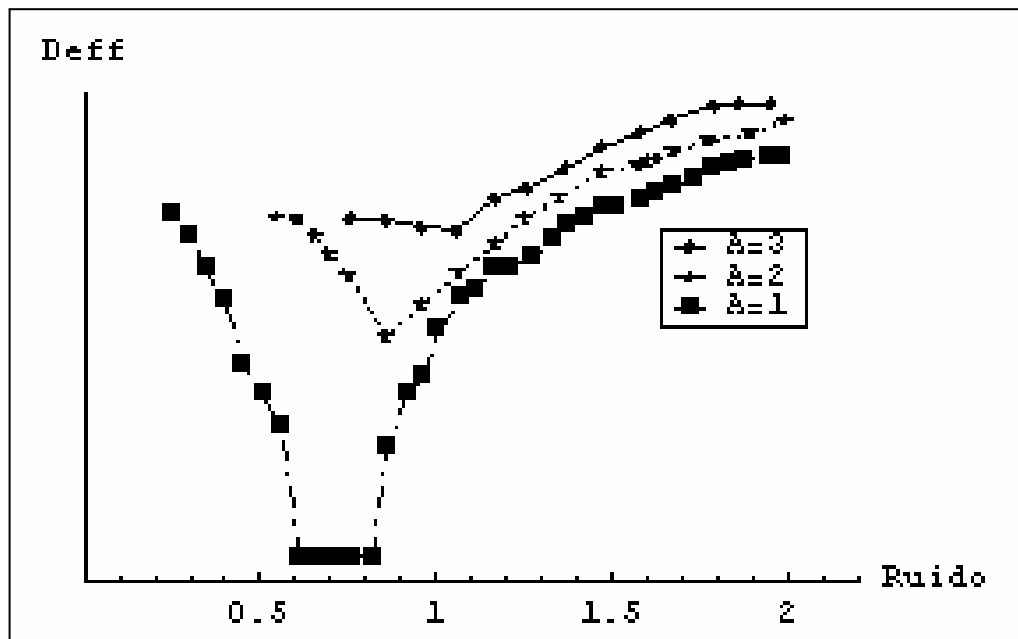


Figura 1: Coeficiente de difusión efectiva  $D_{eff}$  vs. Intensidad de ruido para diferentes valores de la amplitud de la señal externa  $A$ . Los parámetros son  $a=3$ ,  $\alpha=5$ ,  $\beta=1$ ,  $\omega=0.01$ .

Qué ocurre en el caso de un arreglo de osciladores estocásticos? Aquí es conveniente introducir una fase instantánea  $\Phi(n,t)$  del elemento  $n$ -ésimo usando la representación de señal analítica, definida como  $z(n,t) = x(n,t) + i y(n,t)$  donde  $y(n,t)$  es la transformada de Hilbert de la variable original  $x(n,t)$ , la cual corresponde a la señal del  $n$ -ésimo elemento del arreglo. Elegimos el elemento  $n=1$  como referencia y calculamos la diferencia de fase entre dicho elemento y el elemento  $n$  como :

$\phi(n,t) = \Phi(n,t) - \Phi(1,t-n\tau)$ , con  $n > 1 \dots N$  y  $\tau$  el retardo entre elementos, si lo hubiere. Así una medida apropiada de la sincronización estocástica es el coeficiente de difusión cruzado definido como [9]:

$$D_{eff}(n) = \lim_{t \rightarrow \infty} D_{eff}(n,t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{2t} \phi^2(n,t) - \langle \phi(n,t) \rangle^2 \right\rangle \quad (5.24)$$

En esta expresión el símbolo  $\langle \cdot \rangle$  representa el promedio sobre un conjunto de condiciones iniciales. Esta cantidad describe la dispersión en el tiempo de una distribución inicial de diferencia de fases entre el primer oscilador y los siguientes. Si la constante de difusión decrece la sincronización de fase se vuelve más intensa. Una medida única se obtiene promediando los  $D_{eff}(n)$  sobre una “distancia espacial”:

$$D_{eff} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N} D_{eff}(k) \quad (5.25)$$

Con el objeto de cuantificar cuán intensa es la sincronización de fase que se produce en el sistema, introduciremos un índice que la caracteriza y que se denomina  $\gamma_{m,n}$ . Para calcular este índice, definimos la diferencia de fase (lineal) cíclica  $m,n$  entre los elementos  $1$  y  $k$  del arreglo como:

$$\Psi_{1,k}^{m,n}(t) = \phi_{1,k}^{m,n}(t) \text{ mod } 2\pi = (m\phi_1(t - (k-1)\tau) - n\phi_k(t)) \text{ mod } 2\pi \quad (5.26)$$

Así, el índice que da cuenta de la sincronización de fase  $m,n$  entre los elementos  $1$  y  $k$ -ésimo de arreglo se obtiene a partir la intensidad del primer modo de Fourier de la distribución [9]:

$$\left( \gamma_{1,k}^{m,n} \right)^2 = \left\langle \cos \Psi_{1,k}^{m,n}(t) \right\rangle^2 + \left\langle \sin \Psi_{1,k}^{m,n}(t) \right\rangle^2 \quad (5.27)$$

donde  $\langle \cdot \rangle$  denota el promedio temporal. Este índice toma valores entre 0 y 1 y mide la intensidad de la sincronización de la diferencia de fase. En nuestro caso estaremos interesados en la estimación del coeficiente  $\gamma_{1,k}^{m,n}$  para  $m=n=1$ .

### 5.3 Procesos estocásticos de punto

En el caso de sistemas estocásticos, también se pueden interpretar los cambios en la fase como eventos que ocurren en tiempos aleatorios  $t_k$ , cuya ocurrencia es debida a una función distribución o a un proceso dinámico. Por ejemplo, tanto el sistema tipo Schmitt Trigger como los sistemas biestables estocásticos pueden ser bien descritos por procesos de puntos: en estos casos los tiempos aleatorios de ocurrencia  $t_k$  son los momentos en los cuales se producen los saltos de uno a otro estado del sistema. Entonces se puede mapear el proceso  $x(t)$  a un proceso de punto  $t_k$ , donde  $t_k$  son los momentos en los cuales la trayectoria del sistema cruza o intersecta algún plano secante. El tiempo entre dos cruces sucesivos lo notamos como:

$$T(t) = t_{k+1} - t_k ; \quad t_k < t < t_{k+1} \quad (5.28)$$

En este caso podemos definir la fase instantánea de  $x(t)$  como :

$$\Phi(t)_{lineal} = \pi \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} + \pi k ; \quad t_k < t < t_{k+1} \quad (5.29)$$

la cual es una función lineal a trozos del tiempo. Se puede hacer otra definición para la fase instantánea que no requiera una interpolación lineal entre dos eventos consecutivos. En este caso la definición toma la siguiente forma:

$$\Phi(t)_{discr} = \pi k(t) = \pi \sum \theta(t - t_k) \quad (5.30)$$

donde  $k(t)$  es una secuencia creciente de de números enteros y  $t_k$  está nuevamente sujeto a alguna dinámica o distribución.  $\theta(t)$  corresponde a la función de Heavyside.

Para un oscilador biestable sobreamortiguado  $k(t)$  define un proceso dicotómico:

$$x(t) = \exp [i \Phi_{disc} (t)] \quad (5.31)$$

el cual representa una secuencia temporal sucesiva de estados +1 y -1. Esta secuencia de estados puede ser periódica o aleatoria, en cuyo caso habla de secuencias dicotómicas periódicas o aleatorias respectivamente. Los procesos periódicos tienen el requerimiento adicional de la realización de un promedio sobre el estado inicial para que el mismo sea estacionario.

No hay una forma sistemática de encontrar la distribución de los tiempos de cruce de umbrales para un sistema dado. Una de las excepciones es el sistema biestable simétrico: aquí, los intervalos *largos* de tiempo entre dos cruces consecutivos obedece a

una estadística de Poisson. Así la probabilidad de que  $k$  eventos subsecuentes de  $x(t)$  hayan ocurrido en el intervalo  $[0, t]$  viene dado por:

$$P_k(t) = \frac{(\gamma t)^k}{k!} \exp(-\gamma t) \quad (5.32)$$

en cuyo caso  $x(t)$  es un proceso dicotómico Markoviano correlacionado en el tiempo en forma exponencial, con tiempo de correlación  $t_c = 1/\gamma$ . Los tiempos de saltos entre pozos ocurren debido a una distribución Poissoniana siendo el tiempo principal de salto  $T = 1/\gamma$ . Realicemos ahora una comparación entre las definiciones de fase dadas por la ecuación (27) y (28) con el concepto de señal analítica. Para esto calculamos la transformada de Hilbert del proceso dicotómico  $x(t)$  (valores pares de  $k$  corresponden a la transición  $-1 \rightarrow 1$ ) se obtiene:

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \sum_k (-1)^k \ln \left| \frac{t - t_k}{t - t_{k-1}} \right| = \frac{2}{\pi} \sum_k \ln \left| \frac{t - t_{2k}}{t - t_{2k+1}} \right| \quad (5.33)$$

ara  $t < t_k$ ,  $x(t) = -1$  y la transformada  $y(t)$  de Hilbert decrece monótonamente y alcanza el valor  $-\infty$  en  $t = t_k$ . En ese momento  $x$  salta a  $+1$ , entonces  $y(t)$  en el espacio de la fase completa el círculo de  $2\pi$  durante dos transiciones subsecuentes, retornando al estado  $x = -1$ . Sumando  $\pi$  en cada transición en la definición dada en la ecuación (2), la fase instantánea dada por la señal analítica queda:

$$\Phi(t)_{Hilbert} = \pi k(t) + \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \quad (5.34)$$

En la figura 4 se muestra la señal dicotómica, su transformada de Hilbert, la amplitud instantánea y la fase.

Como se explicó, la fase instantánea crece monótonamente, donde su “pendiente” define la frecuencia principal de la señal. A partir de estas discusiones se ha encontrado que el concepto de fase en los procesos estocásticos de punto aproxima adecuadamente al que surge del concepto de señal analítica. En la figura 5 se presentan los gráficos correspondientes a las tres definiciones de fase para el proceso descripto. De la comparación se observa que tanto la definición de fase a trozos y lineal a trozos son una muy buena aproximación para la  $\Phi_{Hilbert}$  obtenida a partir del concepto de señal analítica. Por lo tanto, de aquí en más usaremos la aproximación de  $\Phi_{lineal}$  para las estimaciones del coeficiente de difusión efectiva.

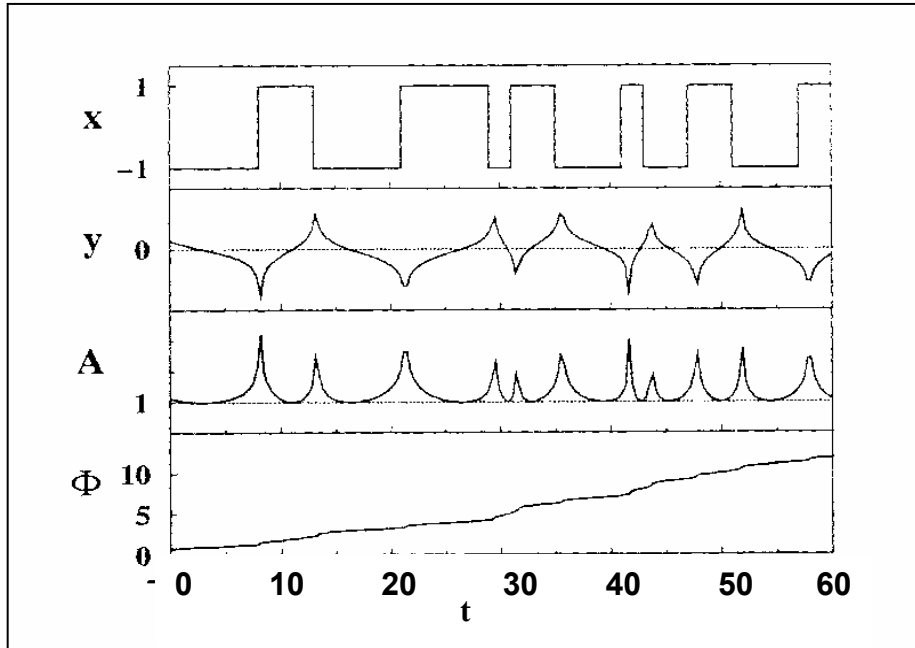


Figura 2 : La señal dicotómica, su transformada de Hilbert, su amplitud y fase calculada según la ecuación (5.34).

Como ya hemos mencionado el proceso estocástico  $x(t)$  correspondiente a nuestro sistema biestable sobreamortiguado puede ser mapeado en un proceso estocástico de punto  $t_k$ . Para definir los tiempos  $t_k$  definimos dos niveles de cruce, por ejemplo en  $x_{\pm} = \pm c$ , que por simplicidad tomamos  $c = x_{min}$ . Estos tiempos  $t_k$  se determinan de la siguiente forma: se establece un tiempo  $t_0=0$  en el cual  $x(t)$  cruza  $x_+$  por primera vez con derivada positiva ( $x(0) = +c ; \dot{x}(0) > 0$ ) ;  $t_1$  es el tiempo subsiguiente cuando  $x(t)$  cruza  $x_-$  con derivada negativa ( $x(0) = -c ; \dot{x}(0) < 0$ ) ;  $t_2$  es el tiempo subsiguiente cuando  $x(t)$  vuelve a cruzar  $x_+$  con derivada positiva y así siguiendo. La cantidad  $T(i) = t_i - t_{i-1}$  representa los tiempos de residencia entre dos eventos de salto sucesivos. A partir de estos tiempos podemos calcular la  $\Phi_{lineal}$  según la definición dada en la ecuación (27).

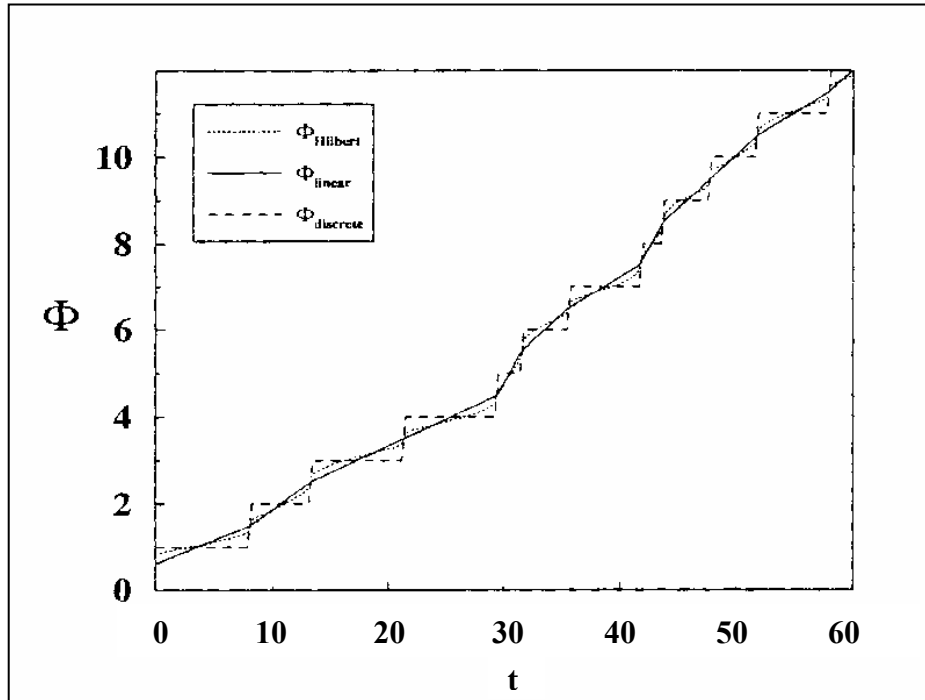


Figura 3 : Comparación de las tres definiciones de fase instantánea. Tanto la interpolación lineal como la discreta son una muy buena aproximación a la fase obtenida a partir de la señal analítica.

## 5.4 Diferencia de Fase entre elementos

Una vez establecida la definición de fase que usaremos, se estudia el comportamiento de la diferencia de fase entre los distintos elementos de los diferentes arreglos estudiados en este trabajo, es decir la cadena abierta y el anillo. El objetivo es mostrar si el sistema presenta sincronización de fase como función de los parámetros y si la misma se produce en la situación de resonancia estocástica. A partir de estos resultados abordaremos el estudio del comportamiento del coeficiente de difusión de fase efectivo (ver ecuación (5.24)).

### Cadena lineal

En las figuras 4-5-6 se presenta la diferencia de fase  $\Delta\Phi_{lineal}$  calculada para la cadena para diferentes niveles de ruido y de retardo temporal. En el análisis que se desarrolla a continuación fijamos el acoplamiento en  $\varepsilon'=70$ , que corresponde a un valor arbitrario subumbral.



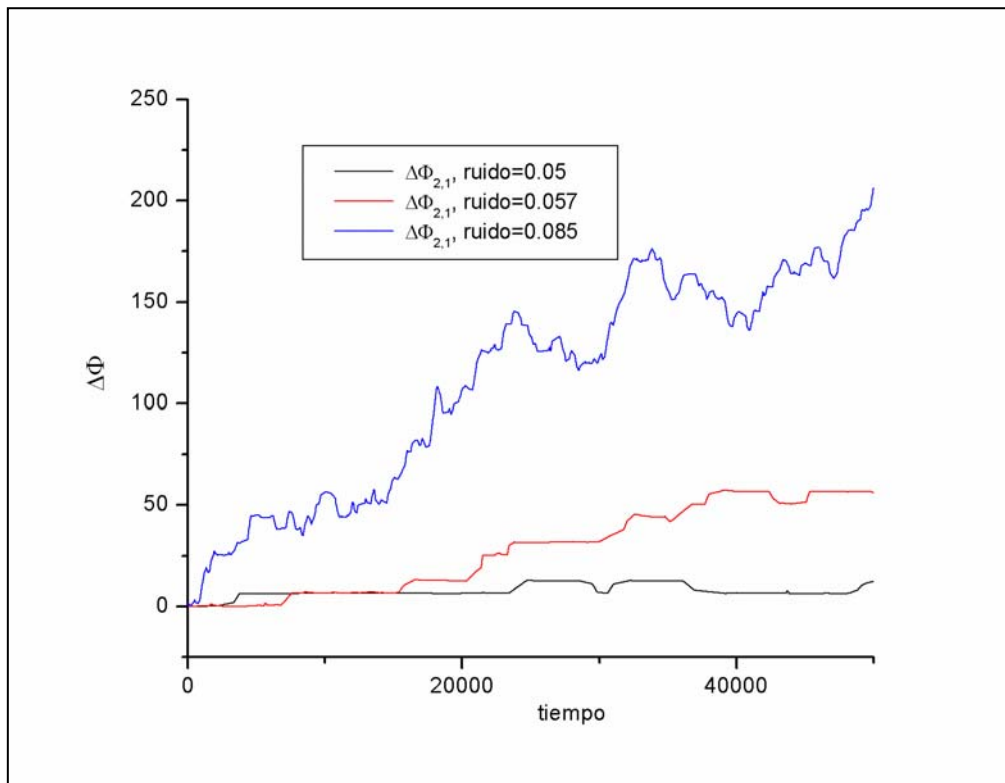


Figura 4:  $\Delta\Phi$  entre el segundo y primer oscilador de una cadena abierta con un retardo temporal  $\tau=1500$  unidades de tiempo, para las intensidades de ruido especificadas en el gráfico y un acoplamiento  $\varepsilon'=70$ . El tiempo está dado en unidades de pasos de integración.

En la figura 4 se presenta la diferencia de fase  $\Delta\Phi_{2,1} = \Phi(2,t) - \Phi(1,t - \tau)$  entre el segundo y el primer elemento, mientras que en la figura 5 se elige un elemento al azar (el cuarto) más alejado en la línea y se grafica  $\Delta\Phi_{4,1} = \Phi(4,t) - \Phi(1,t - 3\tau)$ .

De estos gráficos puede observarse lo siguiente:

- 1) las diferencias de fase correspondientes a un mismo elemento presentan un comportamiento creciente a medida que se incrementa el nivel de ruido. Este comportamiento corresponde a la difusión de la fase que producen las fluctuaciones térmicas en el sistema.
- 2) para un mismo nivel de ruido, el comportamiento presenta mayores fluctuaciones a medida que se incrementa la separación espacial de los elementos.

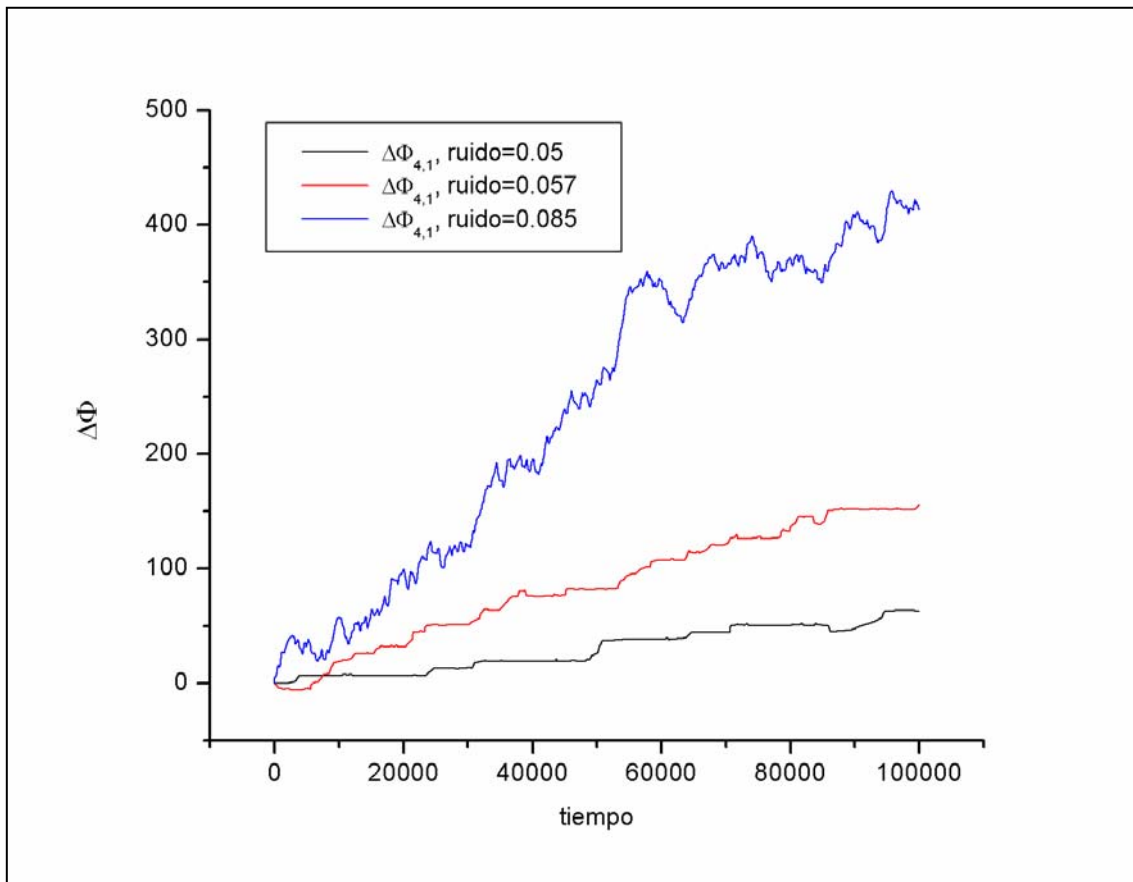


Figura 5:  $\Delta\Phi$  entre el cuarto y primer oscilador de una cadena abierta con un retardo  $\tau=1500$  unidades de tiempo, para las intensidades de ruido especificadas en el gráfico y un acoplamiento  $\varepsilon'=70$ . El tiempo está dado en unidades de pasos de integración.

3) comparando las diferencias de fase correspondiente a un mismo nivel de ruido cercano al óptimo resonante, en nuestro caso aproximadamente  $\sigma_R=0.053$ , se observa que a mayor distancia del “comienzo” de la cadena (es decir del primer elemento), la diferencia de fase también presenta un incremento en su crecimiento. Además se observan episodios en los cuales la misma permanece constante o “enganchada”, durante tiempos bastantes más largos que el tiempo de retardo en el acoplamiento, produciéndose así una *sincronización parcial de fase* entre los distintos elementos y el primero. Sin embargo en la figura 6, se ve claramente que dichos episodios de enganche de fase tienden a desaparecer o a disminuir a medida que se incrementa la distancia entre elementos. Para distancias mayores la difusión de la diferencia de fase es importante y la sincronización parcial se rompe como lo demuestra la desaparición de las mesetas de fase constante.

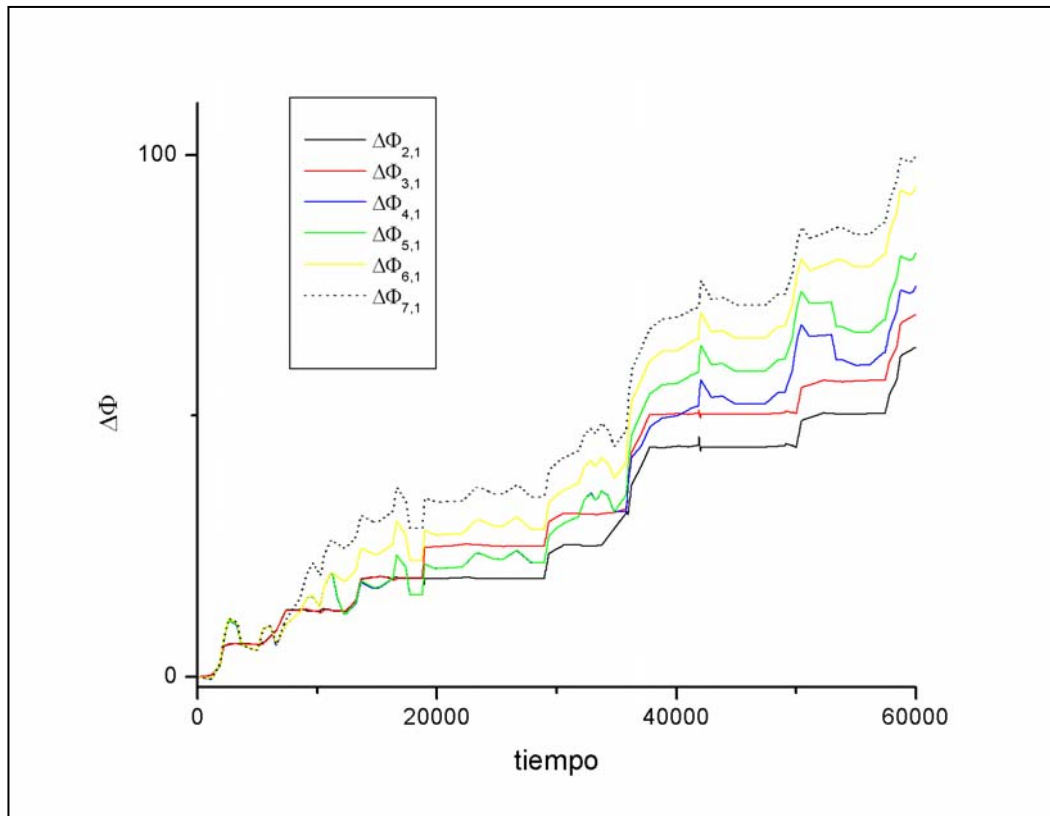


Figura 6 :  $\Delta\Phi$  entre cada elemento de la cadena y el primer oscilador .  
 El retardo  $\tau=2048$  unidades de tiempo, para una intensidad de ruido de 0.053 y  
 un acoplamiento  $\varepsilon'=70$ . El tiempo está dado en unidades de pasos de integración.

Qué información complementaria se obtiene si se analiza la diferencia de fase entre vecinos consecutivos y no relativa al primer elemento?

Para intensidades de ruido en un entorno del valor óptimo, se producen sincronizaciones de fase parciales (es decir con mesetas de fase) sólo entre elementos vecinos como lo muestra el gráfico superior de la figura 7. En él se observa que la  $\Delta\Phi$  no sólo presenta mesetas (*plateaus*) en ciertos intervalos prolongados de tiempo, sino que la misma se mantiene acotada en una región en torno a  $\Delta\Phi =0$ , para ruidos cercanos al óptimo resonante. En el gráfico inferior de la misma figura se elige un valor de ruido alejado del rango óptimo ; allí la  $\Delta\Phi$  presenta un comportamiento más fluctuante con la presencia también de algunos pocos episodios de enganche de la fase, y de mucha menor duración.

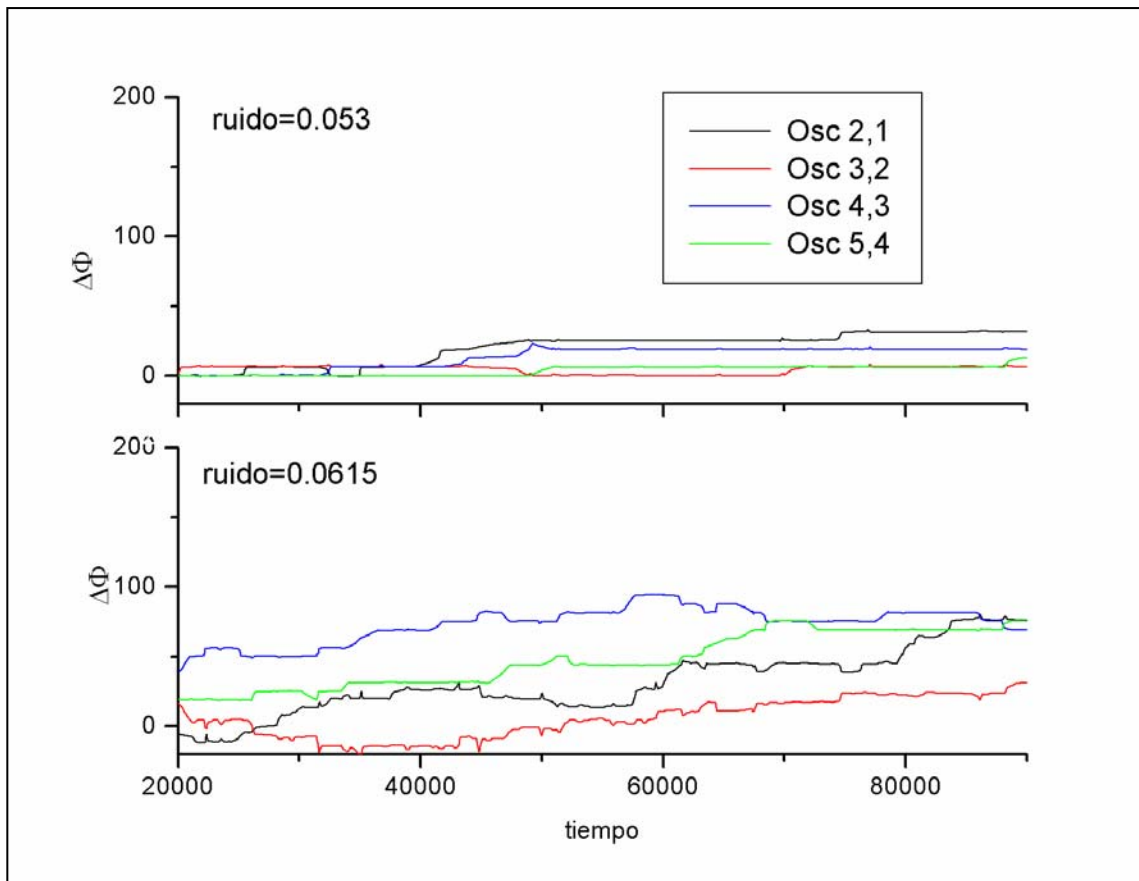


Figura 7 :  $\Delta\Phi$  entre cada elemento de la cadena y el primer oscilador. El retardo  $\tau=2048$  unidades de tiempo, para una intensidad de ruido de 0.053 (arriba) y 0.0615 (abajo), con un acoplamiento  $\varepsilon'=70$ . El tiempo está dado en unidades de pasos de integración.

## Anillo

Encaremos ahora el caso del anillo para analizar la diferencia de fase entre elementos de manera similar a la que se desarrolló en el caso de la cadena abierta. Sin embargo, aquí es muy importante marcar claramente la distinción en la respuesta del sistema durante la excitación periódica externa y una vez que la misma ha sido apagada. Por lo tanto en cada figura que se presente para realizar el análisis, se indicará el momento en el cual dicho cambio se produce, ya que nuestro objetivo es comprender *especialmente* el comportamiento del sistema durante el régimen de almacenamiento de la información.

En la figura 9 se presentan dos paneles correspondientes a la  $\Delta\Phi_{n,1}$  entre el primer y quinto elemento del anillo en el panel A, y entre el primer y segundo elemento

en el panel B , para cuatro intensidades de ruido diferentes elegidos de la siguiente forma:

- a) un valor inferior al valor óptimo de resonante  $\sigma_R$ .
- b) un valor aproximadamente igual al resonante  $\sigma_R$ ;
- c) un valor algo mayor a  $\sigma_R$ ;
- d) un valor bastante mayor a  $\sigma_R$ .

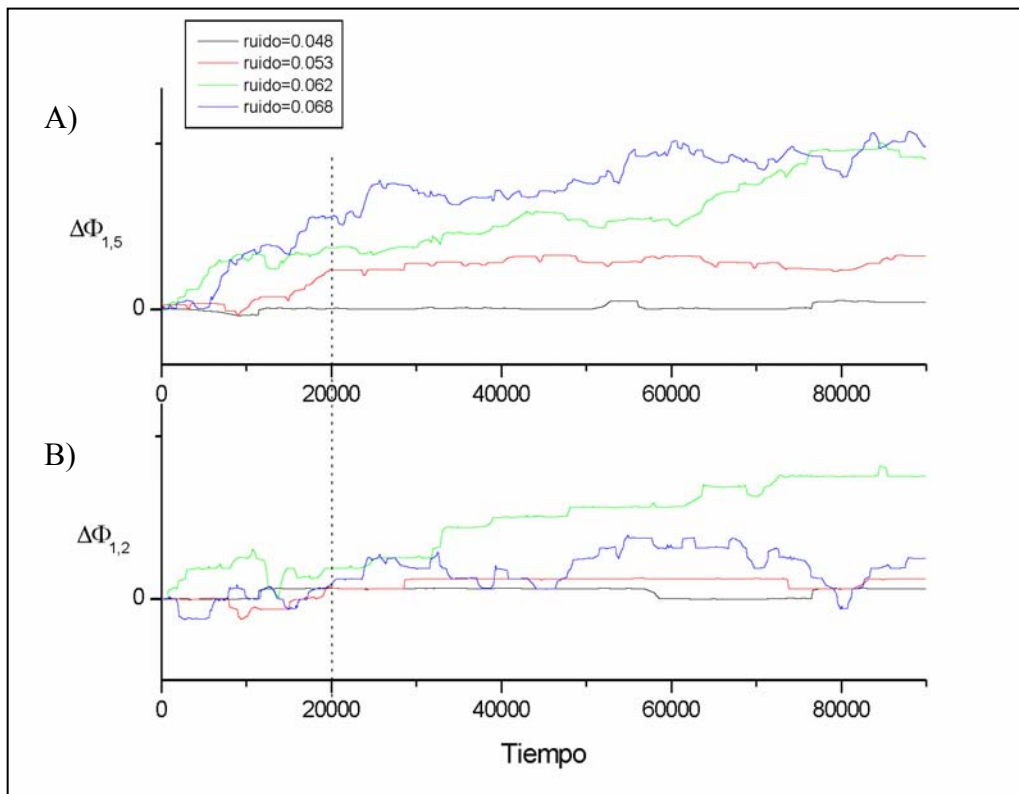


Figura 9:  $\Delta\Phi$  entre cada elemento del anillo y el primer oscilador . El valor del retardo es 4096 ,  $N=5$  y el acoplamiento  $\varepsilon'=60$ . El valor de ruido óptimo resonante es  $\sigma_R=0.053$ . El tiempo está dado en unidades de pasos de integración. La línea punteada vertical indica el momento en que se apaga el forzante periódico externo.

A partir de dicha figura podemos realizar el siguiente análisis:

Si comparamos las curvas correspondientes a valores idénticos de ruido en los distintos paneles encontramos que a medida que aumentamos la distancia espacial entre elementos la difusión de la fase aumenta ( se observa un incremento en la “ inclinación” de las curvas). En el panel B se observan mesetas de sincronización de fase parcial, cuya duración disminuyen con el incremento de la intensidad del ruido. En el panel A

estas mesetas presentan una reducción en su duración, incluso llegando a desaparecer cuando consideramos la diferencia de fase entre elementos más alejados del anillo. Todas estas observaciones son equivalentes a aquellos encontrados en la cadena. Con respecto al comportamiento de  $\Delta\Phi_{n,1}$  para distintos rangos de ruidos, como los especificados en a), b), c) y d) se puede concluir:

*Para un valor bastante mayor a  $\sigma_R$  (ej.  $\sigma=0.068$ ):* lejos de la condición resonante, se observa que a mayor distancia entre elementos, la diferencia de fase presenta un aumento con el tiempo, incluso durante el tiempo  $N\tau$  donde ya son importantes los indicios de la corrupción que la señal sufre debido al ruido. El aumento de la difusión se manifiesta como un incremento en la “inclinación o pendiente” de las curvas para mayores distancias espaciales, y por consiguiente la  $\Delta\Phi$  no se halla acotada en una región en torno a algún valor determinado, sino que presenta un crecimiento constante con el transcurrir del tiempo.

*Para un valor algo mayor a  $\sigma_R$  (ej.  $\sigma=0.062$ ):* si nos apartamos del valor óptimo de ruido resonante, la  $\Delta\Phi$  entre los dos primeros vecinos se mantiene en una zona acotada con la presencia de mesetas de sincronización parcial. Pero a medida que aumenta la distancia espacial entre los elementos, las fluctuaciones causadas por saltos aleatorios entre los pozos producen una pérdida de sincronización debido a la corrupción de las oscilaciones estocásticas, que se manifiesta en un aumento de la difusión de la fase, pero fundamentalmente en una reducción de la duración de las mesetas. También se observa que esto ocurre aún cuando el forzante externo se encuentra actuando.

*Para un valor aproximadamente igual  $\sigma_R$  ( $\sigma=0.053$ ):* Se observan mesetas de fase constante de gran duración (*sincronizaciones parciales de fase*) correspondiente a una señal dominada por la frecuencia característica  $\omega_{ex}$ , con el agregado que las curvas correspondientes a distintas distancias espaciales mantienen un comportamiento similar (“pendientes” similares) y acotado en una dada región de valores de  $\Delta\Phi$ , según el elemento que se considere. Esto último, sumado a la ausencia de fluctuaciones de  $\Delta\Phi$  pone de manifiesto la presencia de oscilaciones inducidas por ruido sumamente coherentes a lo largo del anillo, proveyendo condiciones óptimas para la sincronización de fase parcial entre elementos. Estas sincronizaciones de fase parcial son asistidas por el ruido y están asociadas a la existencia de oscilaciones con una componente espectral localizada en la frecuencia externa y cada vez más intensa a medida que  $\sigma \rightarrow \sigma_R$

*Para un valor inferior al  $\sigma_R$  (ej.  $\sigma=0.048$ ):* Si todavía continuamos reduciendo el ruido por debajo del valor óptimo  $\sigma_R$  aún se encuentra sincronización de fase entre

osciladores, pero ahora el tiempo característico de las oscilaciones coherentes no está ya determinado por el período externo (escala temporal relevante cuando nos interesa analizar el comportamiento en el régimen de almacenamiento) sino por el producto  $N\tau$  (duración de la vuelta). La sincronización de fase que se produce aquí es mucho más intensa ante el incremento de la distancia espacial entre elementos, resultando en un coeficiente de difusión efectivo aún menor que en los casos anteriores y en un índice  $\gamma_{1,k}$  tendiendo a 1 (Ver figura 11).

Reduciendo aún más el nivel de ruido, ya no se logra la condición necesaria para que la salida de un oscilador sea suficiente para producir saltos en el siguiente elemento y por lo tanto no tiene sentido analizar ninguno de los índices cuantificadores, estableciéndose una cota inferior para el rango de intensidades de ruido .

En la figura 10 se presenta la diferencia de fase entre el primer y otros elementos del anillo para el valor de ruido resonante  $\sigma_R$  y uno por debajo del mismo. En el panel A se ve claramente cómo, a pesar que para  $\sigma_R$  hay sincronización de fase parcial entre el primer elemento y los subsiguientes presentando mesetas de sincronización, las mismas sufren una difusión a lo largo del arreglo perdiéndose la posibilidad de un enganche de fase simultáneo entre todos los elementos del anillo. En el panel B se presenta el comportamiento para el caso de  $\sigma < \sigma_R$  . Aquí el comportamiento cualitativo es considerablemente diferente: las mesetas de sincronización toman valores similares tanto en duración como en localización temporal para los diferentes elementos del anillo. Así la sincronización parcial de fase se va tornando más intensa, transformándose progresivamente en una sincronización total de fase.

A modo de resumen se puede decir que en este sistema, *el fenómeno de sincronización de fase total ocurre para un nivel de ruido que no coincide con el valor de ruido óptimo en donde el sistema presenta resonancia estocástica.*

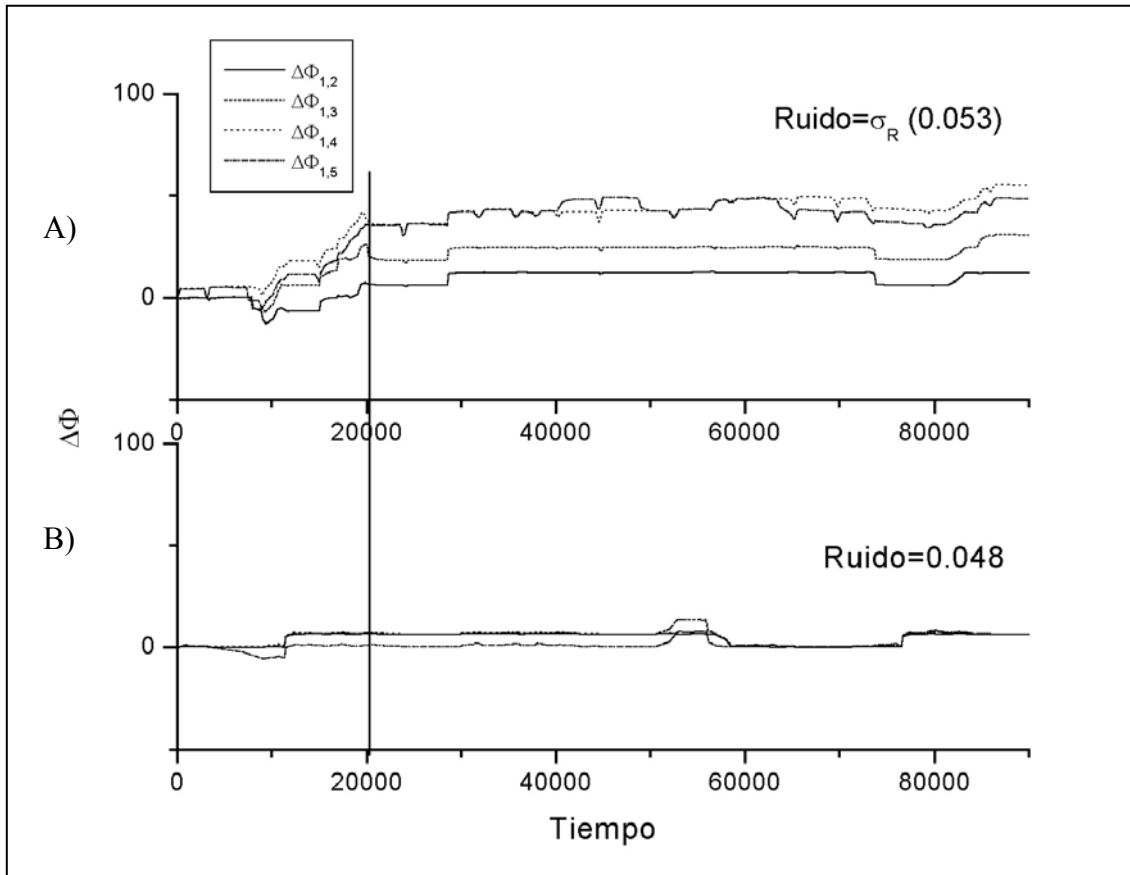


Figura 10:  $\Delta\Phi$  entre cada elemento del anillo y el primer oscilador. El valor del retardo es 4096,  $N=5$  y el acoplamiento  $\varepsilon'=60$ . El valor de ruido óptimo resonante es  $\sigma_R=0.053$ . El tiempo está dado en unidades de pasos de integración. La línea punteada vertical indica el momento en que se apaga el forzante periódico externo.

## 5.5 Difusión de fase efectiva y sincronización de fase

A partir del cálculo y análisis del comportamiento de la diferencia de fase con retardo entre elementos, se puede estudiar el fenómeno de sincronización de fase en el sistema mediante distintos estimadores. Muchas veces este proceso puede ser detectado directamente graficando la diferencia de fase  $\Delta\Phi$  en función del tiempo, y estudiando la presencia de mesetas horizontales como se ha hecho en la sección anterior. Este método de análisis de la sincronización, aunque es relativamente simple, ha demostrado ser eficiente en el estudio de muchos sistemas. Otra alternativa es realizar un análisis



estadístico de la fase que revele la sincronización de fase en el sistema. Con este fin en la sección 5.2 presentamos el índice de sincronización  $(\gamma_{1,k}^{1,1})^2$  (ecuación (5.27)), el cual permite caracterizar cuantitativamente este fenómeno, en función del ruido. En la figura 11 se grafica este índice, observándose que el mismo presenta un comportamiento decreciente como función del ruido para todo valor de  $k$ . Sin embargo para  $k=2$  se presenta una meseta en el nivel de ruido resonante que desaparece progresivamente a mayores distancias espaciales, esto es cuando  $k$  se incrementa. Esta meseta está asociada a los enganches parciales de fase en la situación de resonancia estocástica. Dicha meseta puede ser más o menos notoria según disminuya o aumente respectivamente el valor del retardo temporal, según se mostró en la sección 5.4.

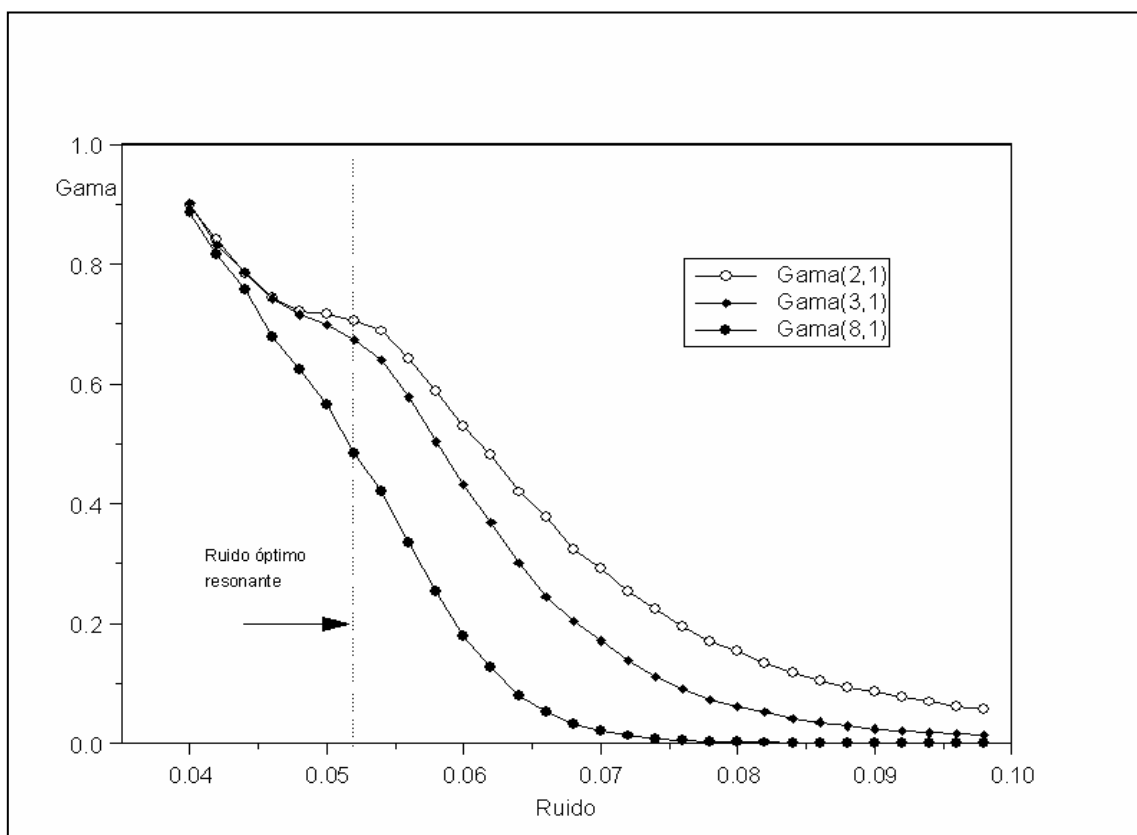


Figura 11:  $(\gamma_{1,k}^{1,1})^2$  en función del ruido, para un acoplamiento de 60 , un retraso temporal de 4096 pasos de integración en un anillo de 8 elementos. En el gráfico se indica el valor de ruido resonante.

Otro abordaje estadístico complementario del estudio de la diferencia de fase en cada dispositivo se puede hacer analizando el comportamiento del coeficiente de difusión efectivo  $D_{eff}$  del arreglo, dado por la ecuación (5.25), para los dos tipos de sistemas propuestos en este trabajo: la cadena y el anillo, con tiempos de retraso  $\tau$  en el

acoplamiento. En el caso del anillo, a fin de contar con magnitudes comparables, como ya se mencionara anteriormente, se tuvo la precaución que la energía inyectada al sistema (por el forzante externo) fuera la misma para los diferentes parámetros: la fuerza externa periódica se mantuvo “activada” durante un tiempo  $N\tau$  constante.

A partir de la definición dada en la ecuaciones (5.24) y (5.25) se calculan numéricamente los coeficientes de difusión efectiva para los distintos arreglos y para diferentes valores de los parámetros relevantes del sistema, esto es: intensidad del ruido, del acoplamiento y del retardo temporal entre elementos.

Calculando  $D_{eff}$  en función del ruido para distintos valores de  $N$  y  $\tau$  y  $\varepsilon' = 65$  (subumbral), se presentan las curvas correspondientes para ambos arreglos en las figuras 12 y 14 respectivamente.

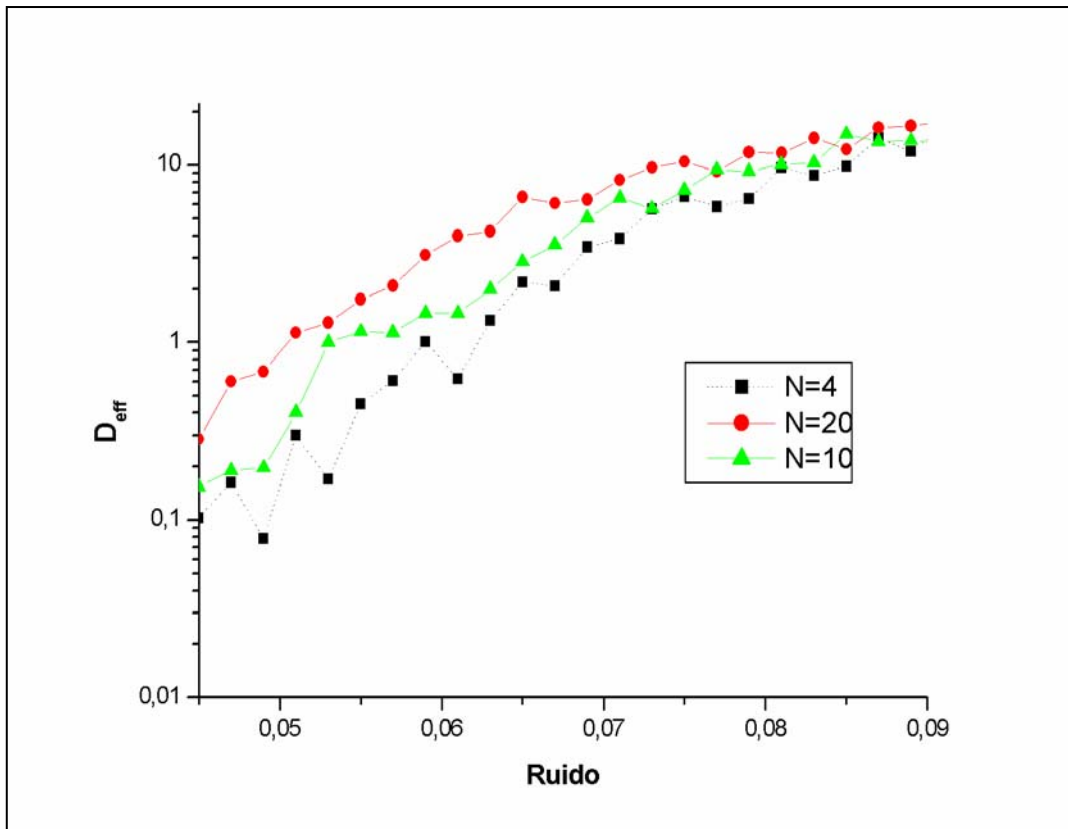


Figura 12:  $D_{eff}$  como función de la intensidad de ruido para la línea abierta con  $\varepsilon' = 65$  y un retardo temporal igual a 2000 pasos de integración. Los cuadrados corresponden a  $N=4$  osciladores, los triángulos a  $N=10$  y los círculos a  $N=20$ .

De la figura 12 se observa que a mayor número de elementos, y por lo tanto mayor número de fuentes de ruido en la línea, aumenta el coeficiente de difusión efectiva. Para ruidos bajos los coeficientes de difusión mantienen un valor pequeño independiente del número de elementos, debido a la gran coherencia de las oscilaciones

que se producen en el sistema. En la figura 13, se observa que para valores intermedios de ruido, la separación entre las curvas de  $D_{eff}$  se incrementa a medida que el  $N$  crece. Sin embargo, cuando la intensidad del ruido es más intensa, las curvas correspondientes a  $N$  constante, presentan un comportamiento creciente similar a pesar de los diferentes retrasos temporales. Claramente esto es un indicio de la importante corrupción que se produce en las oscilaciones estocásticas del sistema, y que se manifiesta por la ausencia de alguna componente espectral definida en el espectro de potencias, el cual se halla determinado fundamentalmente por el ruido de fondo.

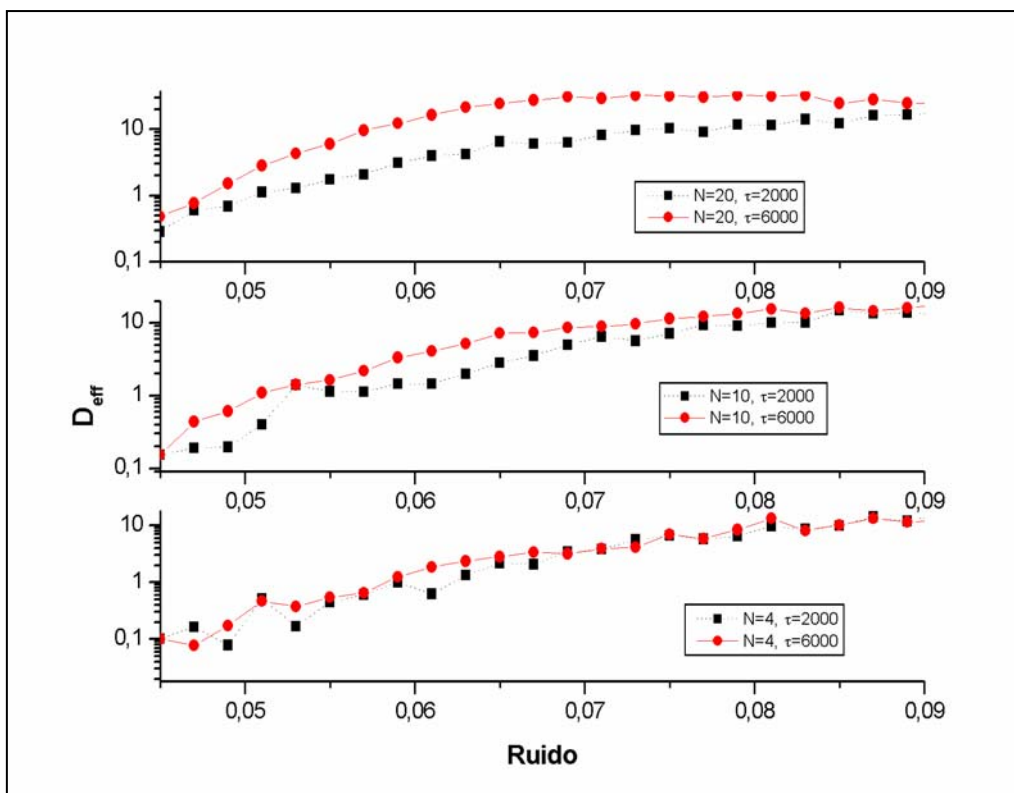


Figura 13 :  $D_{eff}$  como función de la intensidad de ruido para la línea abierta con  $e'=65$  y un retardo temporal igual a 2000 y 6000 pasos de integración. Cada panel corresponde, de abajo hacia arriba, a  $N=4$ ,  $N=10$  y  $N=20$  osciladores

En la figura 14 se grafica  $D_{eff}$  como función del ruido para distintos valores de  $N$  y  $\tau$  en el caso del anillo, manteniendo  $N\tau=cte$ , de forma que la señal recorre 5 veces el dispositivo. Las curvas corresponden a  $N=4$  y  $\tau=10000$ ,  $N=5$  y  $\tau=8000$ ,  $N=8$  y  $\tau=5000$ ,  $N=10$  y  $\tau=4000$ . Aquí también se observa que aunque el retardo temporal sea menor, a mayor  $N$  aumenta el  $D_{eff}$ .

De las curvas obtenidas para los correspondientes coeficientes de difusión efectivos del anillo y de la cadena abierta, se procedió a interpolar los mismos con el objeto de encontrar el comportamiento de  $D_{eff}$  como función de la intensidad del ruido

para diferente número de elementos y tiempos de retardo. Hemos encontrado una dependencia funcional de la forma

$$D_{eff} \propto (\sigma - \sigma_0)^\alpha \quad (5.35)$$

para un intervalo de ruidos menores a 0.07 (correspondiente a rangos próximos a los regímenes de transmisión y almacenaje)[10]. En la ecuación (5.35)  $\sigma_0$  representa el mínimo nivel de ruido a partir del cual el sistema presenta transiciones, y por lo tanto se establece un régimen de transmisión a lo largo del arreglo. Este valor crítico dependerá del valor del acoplamiento entre elementos, aunque siempre se toma la precaución de estar trabajando en una zona subumbral de los parámetros. Con estas consideraciones queda claro que en la dependencia funcional de  $D_{eff}$  con el ruido (5.35) que hemos obtenido de la interpolación, tomará valor nulo para cualquier valor  $\sigma < \sigma_0$  ya que las transiciones no son posibles. Para niveles de ruido  $\sigma > \sigma_0$  las transiciones entre pozos están garantizadas, aunque la frecuencia de saltos no se produce necesariamente a la frecuencia externa, como hemos discutido en el comportamiento de la diferencia de fase. El valor de ruido correspondiente a la situación de resonancia estocástica cae obviamente dentro del intervalo que se está considerando.

De la interpolación de los datos correspondientes al anillo para  $\sigma < 0.07$ , se ha encontrado que el exponente  $\alpha$  de la expresión (5.35) toma valores en el intervalo [1,2] para distinto número de elementos y retardos temporales. Inspeccionando la figura 14 se observa que  $D_{eff}$  disminuye a medida que aumenta el retardo temporal, pero esto también implica que el número de elementos  $N$  decrece ( $N\tau$  constante), y por consiguiente las fuentes de ruido en el sistema que puedan producir la difusión de la fase.

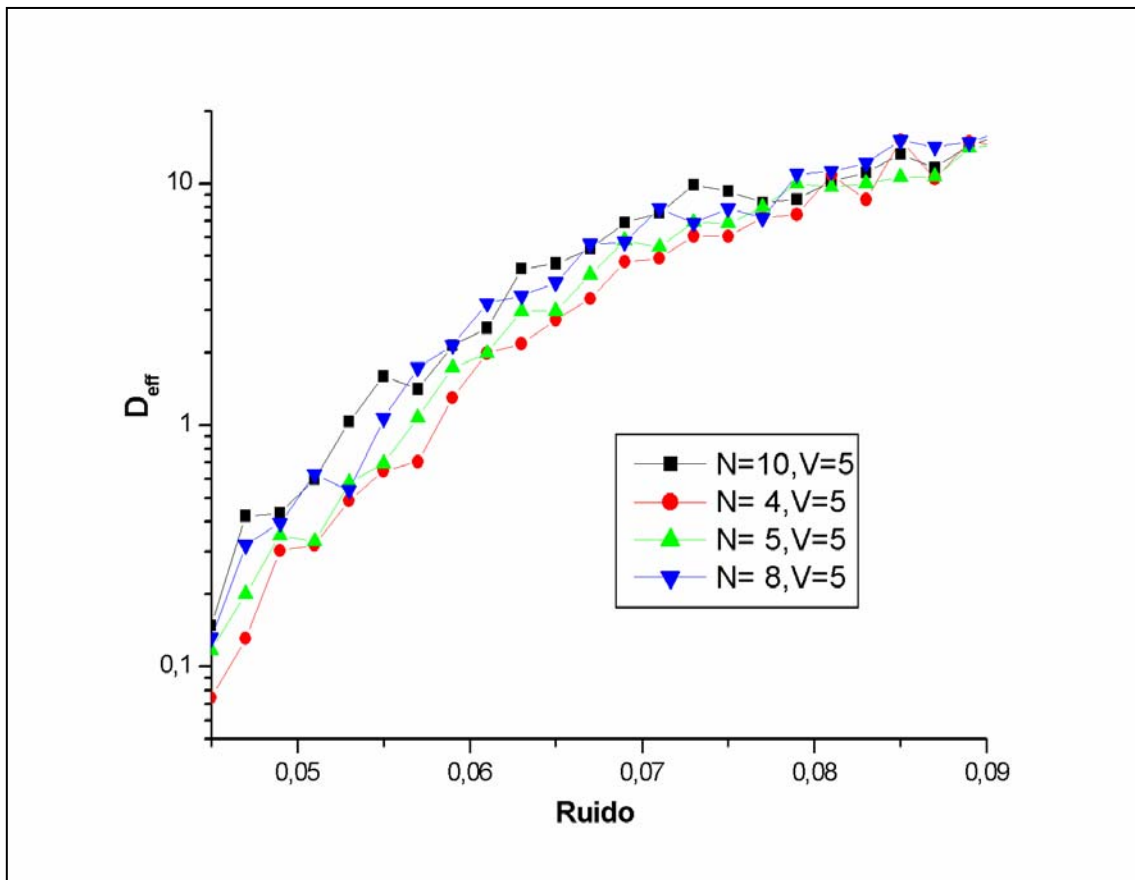


Figura 14 :  $D_{eff}$  como función de la intensidad de ruido para el anillo con  $e'=65$  y para una señal que la recorre durante  $V=5$  vueltas. Los cuadrados corresponden a un anillo con  $N=10$  osciladores y  $\tau=4000$  pasos de integración, los círculos con  $N=4$  y  $\tau=10000$ , los triángulos hacia arriba con  $N=5$  y  $\tau=8000$  y los triángulos hacia abajo con  $N=8$  osciladores y  $\tau=5000$ .

En la figura 15 se presentan las superficies que dan cuenta del  $D_{eff}$  para  $0.045 < \sigma < 0.07$  y  $40 < \epsilon' < 70$ , variando  $N$  y  $\tau$ , y recordando que su producto se debe mantener constante. En los cuatro paneles de dicha figura, disminuyendo el valor del acoplamiento  $\epsilon'$  y manteniendo constante el nivel de ruido y el retardo temporal, se observa que el coeficiente  $D_{eff}$  aumenta su valor, de manera tal que el exponente  $\alpha$  disminuye. Cuando el acoplamiento entre elementos es más débil, se torna cada vez más dificultoso en el sistema producir un enganche de fase entre elementos, ya sea parcial y especialmente un enganche total.

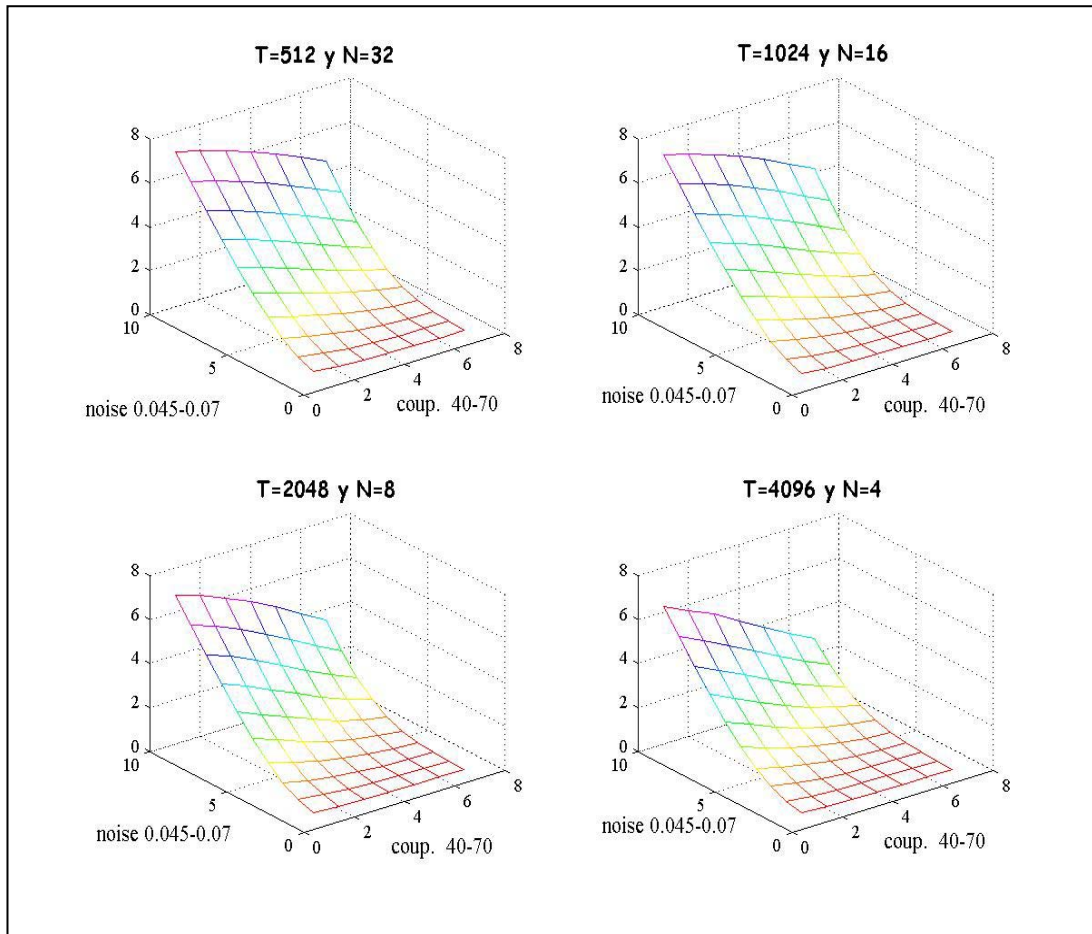


Figura 15 :  $D_{eff}$  como función de la intensidad de ruido y del acoplamiento para el anillo. Los valores de  $N$  y  $\tau$  están indicados en cada gráfico.

## 5.6 Conclusiones del capítulo

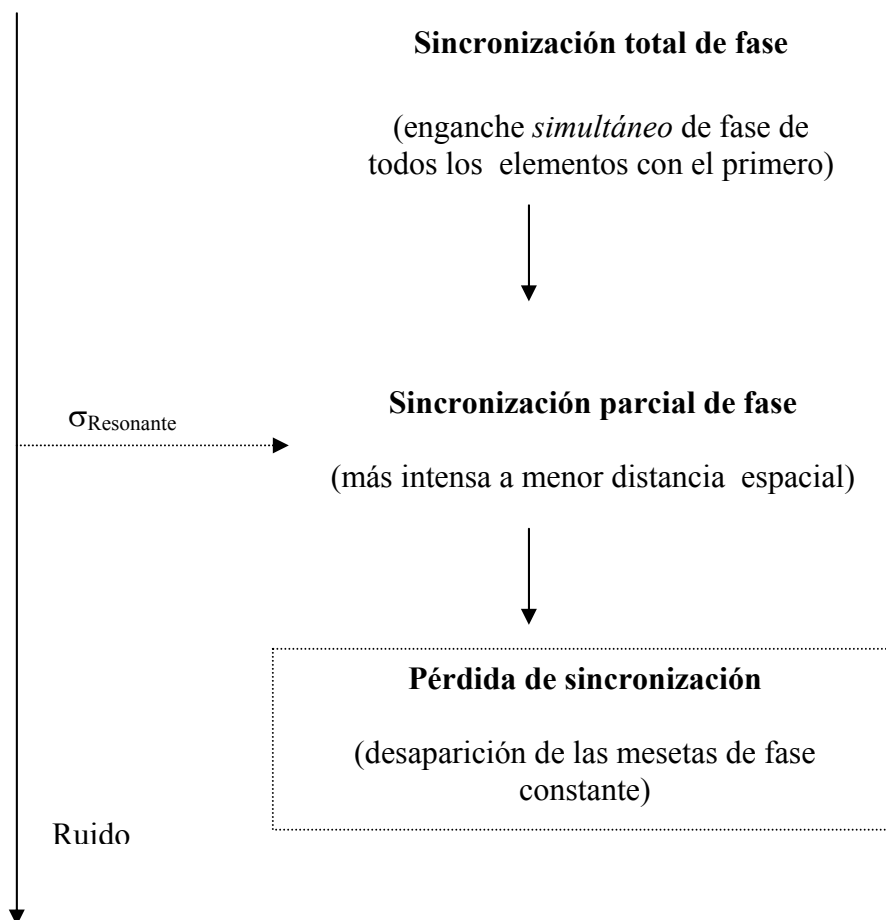
A partir de la definición propuesta para el análisis de la diferencia de fase entre los elementos  $n$ -ésimo y primero, como  $\Delta\Phi_{n,1} = \Phi(n,t) - \Phi(1,t - (n-1)\tau)$ , se ha determinado la posibilidad que se produzca una “Sincronización de fase *con retraso*” (enganche retardado de fases entre elementos) parcial o total, como función del ruido para cada uno de los arreglos presentados.

El objetivo de los resultados que surgen del estudio del comportamiento del coeficiente  $D_{eff}$ , del índice  $\gamma_{1,k}^{1,1}$  y de lo discutido en la sección 5.4 en relación a  $\Delta\Phi$ , es analizar no sólo que se produzca el fenómeno de sincronización de fase, sino que además encontrar si el mismo ocurre o no en los regímenes de óptima transmisión y/o almacenamiento del sistema. Claramente se observa que la situación de óptima sincronización se produce para valores de ruido alejados de las condiciones óptimas en

donde se establecen dichos regímenes, aunque los valores pequeños que toma el  $D_{eff}$  en esos rangos, son un claro indicio de la presencia de episodios de sincronización parcial de fase entre elementos consecutivos aunque no necesariamente entre elementos más distantes. Debemos tener en cuenta que este coeficiente efectivo da cuenta de un “promedio” de las difusiones de fase entre elementos cada vez más distantes del arreglo y por lo tanto no podrá ser nulo en  $\sigma_R$ .

Para ruidos menores al óptimo resonante se ha encontrado que los episodios de sincronización parcial incrementan su duración a medida que el ruido disminuye, haciendo que el sistema tienda a una sincronización de fase total con retraso (enganche retardado de fase de todos los elementos con respecto al primero *simultáneamente*). Por otra parte, a medida que el ruido aumenta por encima del valor resonante, la sincronización de fase parcial con retraso se va corrompiendo debido a que la presencia de mayores fluctuaciones térmicas produce una pérdida de coherencia de las oscilaciones estocásticas .

Las transiciones observadas (como función del ruido) pueden resumirse este esquema cuyos resultados fueron obtenidos a partir del análisis del comportamiento decreciente de los índices de sincronización  $\gamma_{i,k}^{1,1}$  y del comportamiento creciente del coeficiente de difusión efectivo.



A modo de síntesis se puede decir que para los regímenes de transmisión y almacenamiento óptimo, que son de interés para este trabajo, los arreglos con las diferentes topologías presentan sincronización parcial de fase con retraso y no una sincronización total.



## Capítulo 6

# Discusión y Conclusiones

En este trabajo se han presentado diferentes modelos que fueron propuestos con el objeto de entender algunos aspectos de los procesos que ocurren en el entramado neuronal como por ejemplo la transmisión direccional, la robustez de la misma ante fallas o defectos debido a la muerte neuronal y la capacidad de desarrollar lo que se denomina memoria de corto plazo. Un ingrediente fundamental que se encuentra en los sistemas neuronales es la presencia de fluctuaciones térmicas o ruido. Siempre y cuando el ruido se module en cantidades adecuadas allí donde aparezca, puede jugar un papel constructivo, ya sea si es generado en el propio sistema como consecuencia de las fluctuaciones moleculares (ruido térmico) o introducido por una fuente externa, por ejemplo, por vibraciones mecánicas. El introducir una apropiada dosis de ruido en un sistema puede ayudar a mejorar la transferencia de la información en él, al actuar como un amplificador de sus señales.

Como una mímica de dichos procesos neuronales, en este trabajo se presenta el estudio de la transmisión de una señal periódica en dispositivos con diferentes topologías que modelan distintos entramados y fenómenos. Los modelos que hemos propuesto permiten mostrar de qué manera el ruido posibilita la transmisión y el almacenamiento de información cuando en el sistema se presenta el fenómeno de resonancia estocástica.

Debido al hecho generalmente aceptado de que las neuronas, aún las sensoras, exhiben biestabilidad en ciertas regiones restrictivas del espacio de los parámetros, se propuso un oscilador biestable sobreamortiguado como modelo de neurona. Una vez establecido el modelo para una unidad neuronal, se acoplaron las mismas unidireccionalmente resultando en arreglos abiertos (con condiciones de contorno libre) o con condiciones periódicas de contorno.

Otro elemento que también aparece en los procesos neuronales es la existencia de retardos temporales en las conexiones sinápticas entre neuronas, los cuales han sido incluidos en los modelos como retrasos en la dinámica relacionada con el acoplamiento entre unidades.

El estudio y los resultados obtenidos en este trabajo son el fruto de un análisis numérico y experimental de los modelos propuestos.

Como una primera etapa se estudió la transmisión unidireccional en una cadena de osciladores biestables sobreamortiguados sometidos a ruido Gaussiano no correlacionado. Para este sistema se obtuvieron los siguientes resultados:

1) Cuando el sistema se halla en el régimen de resonancia estocástica, existe un nivel de ruido óptimo para el cual la transmisión de una señal externa a lo largo de la línea sufre la menor degradación posible. Se encontró un rango de valores de  $D$  en donde se produce un tipo de “tuneleo estocástico”, es decir un intervalo de intensidades de ruido, en la cual se alcanza una muy buena transmisión para menores eficiencias sinápticas. Se caracterizaron las distancias características de transmisión como función de los parámetros. Este comportamiento se presenta para una región de la intensidad de acoplamiento subumbral, e intermedia entre acoplamientos rígidos y elementos casi libres. Este estudio se realiza a partir del comportamiento de la relación señal-ruido.

2) La transmisión es robusta ante la interrupción de la cadena por muerte térmica de alguno de sus elementos. La misma se reestablece a partir de un cierto valor crítico *subumbral* del acoplamiento.

3) Se diseñó y caracterizó un circuito electrónico para modelar un sistema biestable a partir del sistema paradigmático conocido como el Schmitt Trigger. Se diseñó luego una cadena abierta con 4 de estos dispositivos acoplados unidireccionalmente y sometidos a ruido global. Se corroboró la posibilidad de una transmisión con poca degradación para un cierto valor crítico (subumbral) del coeficiente de atenuación.

4) Se estudió la diferencia de fase a lo largo de la línea encontrándose que la misma presenta difusión debida al ruido, existiendo la posibilidad de sincronización de fase parcial entre elementos consecutivos. A partir de la definición de un coeficiente de difusión efectivo promediado sobre una distancia espacial se observó que el mismo no presenta un mínimo en el valor de ruido correspondiente a la condición resonante.

En una segunda etapa se estudió el sistema con condiciones periódicas de contorno. Para esta topología se encontraron los siguientes resultados:

1) Existe una región subumbral de los parámetros para el cual el sistema presenta un régimen de almacenamiento de la información. El mismo fue caracterizado a partir de la definición de tiempos característicos de almacenajes como función de los parámetros característicos del sistema: nivel de ruido, intensidad de acoplamiento y retardo en las sinapsis. Se encontró que se establece una onda propagante en el sistema que permite

almacenar información durante intervalos de tiempo mucho mayores que  $N\tau$ . Este régimen es el que denominamos *memoria de corto plazo*.

2) Se halló la existencia de difusión de la diferencia de fase entre elementos del anillo, encontrándose la posibilidad de sincronización parcial de fase y sincronización total o enganche total de las fases de todos los elementos según el rango de ruidos que se considere. Para caracterizar este fenómeno, tanto para la cadena como para el anillo, se realizó un análisis simple pero eficiente como el estudio directo de la diferencia de fase vs tiempo y un análisis estadístico a partir de un índice estimador que cuantifica la intensidad de la sincronización y de un coeficiente de difusión efectivo promediado sobre una “distancia espacial”. A partir de este estudio se encontró que la sincronización total ocurre para un ruido menor que el óptimo resonante. Para este valor se produce un enganche parcial de las diferencias de fase, comportamiento que se debe a la presencia de oscilaciones coherentes a lo largo del anillo con una frecuencia característica coincidente con la externa.

## 6.1 Problemas abiertos

En cuanto al análisis experimental queda como estudio a futuro la posibilidad de realizar la cadena abierta con ruido local estudiando la respuesta *simultánea* de los 4 elementos del arreglo, lo cual requeriría la utilización de un osciloscopio de 4 canales que no fue posible disponer para este trabajo.

Con respecto a los modelos propuestos de cadena y anillo, sería de interés realizar estudios sobre cuál sería el comportamiento del sistema si:

- 1) se considera un acoplamiento negativo, con o sin retardo, analizando la posible conexión con la transmisión neuronal.
- 2) se incluye ruido local dependiente de la posición.

Otro elemento interesante a analizar es qué ocurriría si no se despreciase el término de inercia, y por lo tanto la dinámica dentro del pozo se torna relevante.

# Capítulo 7

## Referencias

### Capítulo 1:

1. Abramowitz M., Stegun I., *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York) (1965)
2. Anishchenko V.S., Neiman A., Moss F., Schimansky-Geier L., *Physics - Uspekhi* **42**, 7 (1999)
3. Babcock K.L., Ahlers G., Cannel D.S., *Phys Rev Lett* **67**, 3388 (1991).
4. Benzi R., Sutera A., Vulpiani A., *J. Phys A* **14**, L453 (1981)
5. Benzi R., Parisi G., Sutera A., Vulpiani A., *Tellus* **34**, 10 (1982)
6. Berdichevsk V., Gitterman M., *J.P hys A* **29**, L447 (1996)
7. Bulsara A., Jacob E., Zhou T., Moss F., Kiss L., *J.Theor. Biol.* **152**, 531 (1991)
8. C.Nicolis, *Tellus* **34**, 1 (1982)
9. Carrillo O., Ibañez M., Sancho J.M., *Fluctuations and Noise Letters* **2**, L1-L11 (2002).
10. Carrol T.R., Pecora L., *Phys Rev Lett* **70**, 576 (1993)
11. Collins J.J., Chow C.C., Imhoff T.T., *Nature* 376, 236 (1995)
12. Collins J.J., Chow C.C., Imhoff T.T., *Phys Rev E* **52**, R 3321 (1995)
13. Collins J.J., Imhoff T.T., Grigg P., *Nature* **383**, 770 (1996)
14. Cordo P., Inglis J., Verschueren S., Collins J.J., Merfeld D., Buckely S., Moss F., *Nature* **383**, 769 (1996)
15. Douglas J., Wilkens L., Pantazelou E., Moss F., *Nature* **365**, 337 (1993)
16. Dykman M., Luchinsky D., Manella R., McClintock, Stein D., P. Stocks N., *Nuovo Cimento D* **17**, 661 (1995)
17. Dykman M., Manella R., McClintock, Stein D., P. Stocks N., *Phys Rev E* **47**, 1629(1993a)
18. Dykman M., Manella R., McClintock, Stein D., P. Stocks N., *Phys Rev E* **47**, 3996(1993b)
19. Dykman M., Manella R., McClintock P., Stocks N., *Phys Rev Lett* **68**, 2985 (1992)
20. Dykman M., Manella R., McClintock P., Stocks N., *Phys Rev Lett* **65**, 2606(1990 b)

21. Dykman M., Manella R., McClintock P., Stocks N., *Phys Rev Lett* **65**, 48 (1990a)
22. Fauve S., Heslot F., *Phys. Lett. A* **97**, 5 (1983)
23. Floquet G., *Ann. De l'Ecole Norm. Suppl.* **12**, 47. (1883)
24. Fox R. F., Lu Y., *Phys Rev E* **48**, 3390 (1993)
25. Freund J., Kienert J., Schimasky-Geier L., Beisner B., Neiman A., Russell D., Yakusheva T., Moss F., *Phys Rev E* **63**, 031910 (2001)
26. Gammaitoni L., Hänggi P., Jung P., Marchesoni F., *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223 (1998)
27. Gammaitoni L., Marchesoni F., Santucci S., *Phys.Rev.Lett* **67**, 1799 (1995)
28. Gammaitoni L., Marchesoni F., Martinelli M., Pardi S., Santucci S., *Phys Lett A* **158**, 449 (1991)
29. Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichela-Saetta, Santucci S., *Phys Rev E* **48**, 4878(1993)
30. Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichela-Saetta, Santucci S., *Phys Rev Lett* **62**, 349(1989)
31. Gang Hu., Haken H., Fagen X., *Phys Rev Lett* **77**, 1925 (1996)
32. García Ojalvo J., Parrondo J.M.R., Sancho J.M., Vand Den Broeck C., *Phys Rev E* **54**, 6918 (1996).
33. Gitterman M., Weiss G.H., *Journal of Statistical Physics* **70**, 107 (1993).
34. Gluckman B., Netoff T.I., Nell E., Ditto W.L., Spano M.L., Schiff S.J., *Phys Rev Lett* **77**, 4098 (1996)
35. Grigolini P., Marchesoni F., *Adv. Chem.Phys.* **62**, 29 (1985)
36. H.Kramers, *Physica* **7**, 284 (1940)
37. Hänggi P., Talkner P., Borkovec M., *Rev Mod Phys* **62**, 251 (1990)
38. Hänggi P., *Helv. Phys Acta* **51**, 202 (1978)
39. Hänggi P., Thomas H., *Phys Rep* **88**, 207 (1982)
40. Hu G., Jaken H., Ning C., *Phys Lett A* **172**, 21 (1992)
41. Hu G., Nicolis G., Nicolis C., *Phys Rev A* **42**, 2030(1990)
42. Hyas J., Imbrie J., Shackleton, *Science* **194**, 1121 (1976)
43. Jung P., Hänggi P., *Phys Rev A* **44**, 8032 (1991a )
44. Jung P., Hänggi P., *Z.Phys B* **90**, 255 (1993)
45. Kramers H., *Physica* **7**, 274 (1940)
46. Kubo R., *J.Phys.Soc.Jpn.* **12**, 570. (1957)
47. Kubo R., *Rep.Prog.Phys* **29**, 255 (1966)
48. Levin J., Miller J.P., *Nature* **380**, 165 (1996)
49. Lindner J., Meadows B.K., Ditto W.L., Inchiosa M., Bulsara A., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3 (1995)
50. Löfstedt R., Coppersmith S., *Phys Rev E* **49**, 4821 (1994b)

51. Löfstedt R., Coppersmith S., *Phys Rev Lett* **72**, 1947 (1994a)
52. Longtin A., Bulsara A., Moss F., *Phys. Rev. Lett* **67**, 656. (1991)
53. Longtin A., *Chaos* **5**, 209 (1995)
54. Longtin A., *J. Stat Phys* **70**, 309 (1993)
55. Longtin A., *Nuovo Cimento D* **17**, 835 (1995)
56. Magnus W., Winkler S., *Hill's equation* (Dover, New York). (1979)
57. Mahato M.C., Shenoy S., *Phys. Rev. E* **50**, 2503 (1994)
58. Manella R., Fioretti A., Fronzoni L., Zambon B., Arimondo E., Chillemi S., *Phys. Lett A* **197**, 25 (1995)
59. Mangioni S., Deza R., Wio H.S., Toral R., *Phys Rev Lett* **79**, 2389 (1997).
60. Marchesoni F., Grigolini P., *Physica A* **121**, 269 (1983)
61. Mc Namara B., Weisenfeld K., *Phys. Rev A* **39**, 4854. (1989)
62. McNamara B., Weisenfeld K., Roy R., *Phys Rev Lett* **60**, 2626 (1988)
63. Melnikov V. I., *Phys. Rev. E* **48**, 2481 (1993)
64. Moss F., Bulsara A., Shlesinger M.F., *J.Stat. Phys* **70**, 1 (1993)
65. Müller R., Lippert K., Kühnel A., Behn U., *Phys Rev E* **56**, 2658 (1997)
66. Neiman A. Saporin P., Stone L., *Phys Rev E* **56**, 270 (1997)
67. Neiman A., Schimansky-Geier L., *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2988 (1994)
68. Neiman A., Shulgin B., Anischenko V., Ebeling W., Schimansky-Geier L., Freund J., *Phys Rev Lett* **76**, 4299 (1996)
69. Neiman A., Silchenko A., Anishchenko V., Schimansky-Geier L., *Phys. Rev. E* **58**, 7118(1998)
70. Nicolis C., *J. Stat. Phys.* **70**, 3 (1993)
71. Nicolis C., *Tellus* **34**, 1 (1982)
72. Nozaki D., Mar D., Grigg P., Collins J.J., *Phys Rev Lett* **82**, 2402 (1999)
73. Papoulis A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes* (McGraw-Hill, New York) (1965)
74. Presilla C., Marchesoni F., Gammaitoni L., *Phys Rev A* **40**, 2105 (1989)
75. R.Benzi, A. Sutura, y A. Vulpiani, *J. Phys A* **14**, L453 (1981).
76. R.Benzi, G.Parisi, A. Sutura, y A. Vulpiani, *Tellus* **34**, 10 (1982).
77. Reimann P., *Physics Reports* **361**, 57-265 (2002).
78. Risken H., *The Fokker Planck equation*, Springer Series in Synergetics Vol 18 (Springer Verlag, New York). (1984)
79. Russel D. Wilkens L., Moss F., *Nature* **402**, 291 (1999)
80. Santagiustina M., Colet P., Miguel M.S., Walgraef D., *Phys Rev Lett* **79**, 3633 (1997).
81. Schimansky-Geier L., Zülicke C., *Z.Phys B* **79**, 451 (1990)
82. Shulgin B., Neiman A., Anishchenko V., *Phys. Rev. Lett* **75**, 4157 (1995)
83. Shy S., Jang R.H., Ronney P., *Combust. Sci. Tech.* **113**, 329 (1996).

84. Simon A., Libchaber A., *Phys Rev Lett* **68**, 3375 (1992)
85. Stemmler M., *Network* **7**, 687 (1996)
86. Stocks N.G., Stein N.D., McClintock P.V., *Journal of Physics A* **26**, L385(1993)
87. Van Den Broeck C., Parrondo J.M.R., Toral R., *Phys Rev Lett* **73**, 3395 (1994)
88. Vemuri G., Roy R., *Phys Rev A* **39**, 4668 (1988).
89. Von Haefen B., Izús G., *Phys Rev E* **67**, 056207 (2003).
90. Weisenfeld K., Pantazelou D., Dames C., Moss F., *Phys Rev Lett* **72**, 2125 (1994)
91. Zhou T., Moss F., Jung P., *Phys Rev A* **42**, 3162 (1990)
92. Zhou T., Moss F., *Phys Rev A* **41**, 4255 (1990)
93. Pikovsky A.S., Kurths J., *Phys. Rev. Lett.* **78**, 775 (1997).
94. Lee S.G., Neiman A., Kim S., *Phys. Rev. E* **57**, 3292 (1998)

## Capítulo 2:

1. McNamara B., Wiesenfeld K., *Phys.Rev A* **39**, 4854 (1989).
2. Gammaitoni L., Hänggi P., Jung P., Marchesoni F., *Rev. Mod. Phys* **70**,223 (1998)
3. Longtin A., Bulsara A., Moss F., *Phys Rev. Lett* **67**, 656 (1991)
4. Moss F. en *Contemporary Problems in Statistical Physics*, edited por G.H Weiss (SIAM, Phyladelphia, 1994), pp 205-253.
5. Longtin A., *J.Stat. Phys.* **70**, 309 (1993)
6. Longtin A., Bulsara A., Pierson D., Moss F., *Biol.Cybern* **70**, 159 (1994).
7. Douglas J.K., Wilkens L., Pantazelou E., Moss F., *Nature(London)* **365**, 337 (1993)
8. Collins J.J., Chow C.C.,Imhoff T.T., *Nature (London)* **376**, 236 (1995).
9. Bezrukov S.M., Vodyanoy I., *Nature (London)* **378**, 362 (1995).
10. Pei X., Wilkens J., Moss F., *J.Neurophysiol.* **76**, 3002 (1996).
11. Weisenfeld K., Pierson D., Pantazelou E., Dames C., Moss F., *Phys Rev. Lett* **72**, 2125 (1994).
12. Chapeaux-Blondeau F., Godivier X., Chambet N., *Phys Rev E* **53**, 1273 (1996).
13. Lindner J.F.,Meadows B.K., Ditto W.L., Inchiosa M.E., Bulsara A., *Phys. Rev Lett* **75**, 3 (1995).
14. Lindner J.F., Meadows B.K., DittoE.L., Inchiosa M.E., Bulsara A., *Phys. Rev E* **53**, 2081 (1996).
15. Marchesoni F., GammaitoniL., Bulsara A., *Phys Rev Lett* **76**, 2609 (1996).
16. Castelpoggi F., Wio H.S., *Europhys. Lett* **38**, 91 (1997).
17. Löcher M., Cigna D., Hunt E.R., *Phys Rev. Lett* **80**, 5212 (1998).
18. Lindner J.F., Chandramouli S., Bulsara A., Löcher M, Ditto W., *Phys Rev Lett* **81**, 5048 (1998).

19. Hertz J., Krogh A., Palmer R., *Introduction to the Theory of Neural Computation* (Addison-Wesley, Redwood, CA, 1991).
20. Zhang Y., Hu G., Gammaitoni L., *Phys. Rev E* **58**, 2952, (1998).
21. Bulsara A., Lowen S., Rens C., *Phys Rev E* **49**, 4989 (1994)
22. Bulsara A., Jacobs E., Zhou T., Moss F., Kiss L., *J.Theor.Biol* **152**, 531 (1991)
23. Sampath G., Srinivasan S., *Stochastic Models for Spike trains of single Neurons*, Springer-Verlag, Berlín, 1977.
24. Perazzo R., Romanelli L., Deza R., *Phys Rev E* **61**, 4, R3287 (2000)

### Capítulo 3:

1. Kádár S., Wang J. y Showalter K., *Nature*(London) **391**, 771 (1998)
2. Moss F., *Nature*(London) **391**, 743 (1998)
3. Jung P. y Meyer-Kress G., *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2130 (1995).
4. Kramers H., *Physica* **7**, 274 (1940)
5. Perazzo R., Romanelli L., Deza R., *Phys Rev E* **61**, 4, R3287 (2000)
6. Zhang y., Hu G., Gammaitoni L., *Phys Rev E* **58**, 2952 (1998)
7. Sopolinsky H. , “*The Theory of Neural Networks: The Hebb Rules and Beyond*”, en Heindelberg Colloquium of Glassy Dynamics, 485-527, Springer-Verlag, Berlin (1987).
8. Sopolinsky H. Y kanter I. , *Phys. Rev. Lett* **57**, 2861 (1986)
9. Hertz J., Krogh A., Palmer R. , “*Introduction to the Theory of Neural Computation*”, Santa Fe Institute, Studies in the Sciences of Complexity, Addison-Wesley (1991).
10. Hopfield J.J., “*Neural Networks and Physical Systems with Emergent Colective Computational Abilities*”, Proceedings of the National Academy of Sciences, USA 79, 2554 (1988).
11. Hopfield J.J., “*Neurons with Graded Responses Have Collective Computational Properties Like those of Two-State Neurons*”, Proceedings of the National Academy of Sciences, USA 81, 3088 (1988).
12. Carusela M.F., Perazzo R.J., Romanelli L., *Physica D* **168**, 177 (2002)
13. Carusela M.F., Perazzo R.J., Romanelli L., *PRE* **64** (2001) , 031101.

### Capítulo 4:

1. Fauve S., Heslot F., *Phys Lett A* **97**, 5 (1983).
2. Sendra A.S., Smith K.C, *Microelectronic Circuits* (Oxford University Press, Oxford,1998).



3. Gammaitoni L., *Phys Rev E* **52**, 4691 (1995).
4. Kortlüke O., Kuzovkov V.N., Von Niessen V., *Phys Rev Lett* **83**, 3089 (1999)
5. Von Haefen B., Deza R., Wio H., *Phys Rev. Lett* **84**, 404 (2000)
6. Slezak, Signal processing in pulsed photoacoustic detection of traces by means of a FFT-based method, *Review of Scientific Instruments* **74**,1 (2003)
7. Rowe A., Etchegoin P, *Phys Rev E* **64**, 031106 (2001)
8. Kádár S., Wang J., Showalter K., *Nature (London)* **391**, 770 (1998)
9. Löcher M., Cigna D., Hunt E.R, *Phys Rev Lett* **80**, 5212 (1998)
10. Melnikov V. I., *Phys. Rev. E* **48**, 2481 (1993)
11. **Carusela M.F.**, Codnia J., Romanelli L., *Physica A*, **330**, 415-420 (2003)

## Capítulo 5:

1. Neiman A. *Phys. Rev E* **49**, 3484 (1994)
2. Neiman A., Schimansky-Geier L., *Phys. Lett. A* **197**, 379 (1995)
3. Shulgin B., Neiman A., Anishchenko V., Ph Rev) (1995)
4. Neiman A., Silchenko A., Anishchenko V., Schimansky Geier L., *Phys Rev E* **58**, 7118 (1998)
5. Neiman A., Schimansky-Geier L., Moss F., Schulgin B., Collins J.J., *Phys Rev E* **60**, 248 (1998)
6. Freund J., Neiman A., Schimansky-Geier L., *Europhys Lett* **50**, 8 (2000)
7. Middleton D., *An introduction to Statistical Communication Theory*, Mc Graw-Hill, New York (1960)
8. Stratonovich R.L., *Topics in the Theory of Random Noise*, vol 2, Gordon and Breach, New York (1967)
9. Roseblum M., “Phase Synchronization of chaotic systems. From theory to experimental data”, Publicación de la Universidad de Postdam (2002)
10. **Carusela M.F.**, Romanelli L., *Physica A* **338**, 425 (2004)
11. Van der Pol B., *Radio Rev* **1**, 704 (1920)
12. Van der Pol B., *Phil. Mag.* **3**, 65 (1927)

# Apéndice A

El efecto de mediciones en tiempo finito o de un análisis espectral localizado en el tiempo puede ser incorporado en el análisis de Fourier usando una función ventana. La ventana en el dominio temporal está referido como una *ventana temporal*, y su transformada de Fourier como una *ventana espectral*.

El cálculo de la transformada de Fourier con ventanas con una ventana temporal de longitud T, es equivalente al cálculo de la transformada de Fourier de la señal truncada:

$$X_n(f, s) = \int_{-T/2}^{T/2} x_n(t) e^{i2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} H_{N\tau}(t-s) x_n(t) e^{i2\pi f t} dt$$

$$H_{N\tau}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq T/2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se puede expresar el espectro de  $\hat{X}_n(f)$  en términos del espectro de Fourier de  $x_n(t)$  y de la ventana espectral  $W(f)$

$$\hat{X}_n(f) = \frac{1}{2\pi} X_n(f) * W(f)$$

La ventana espectral puede pensarse como un filtro pesado promediado aplicado al espectro  $X_n(f)$ , causando una mezcla de las componentes espectrales. Para conservar las características de este espectro, la ventana espectral tiene que ser real, par y altamente concentrada en torno de  $f = 0$ . Las primeras dos condiciones requieren que la ventana temporal sea real y par.

$$H_{N\tau}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq N\tau/2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

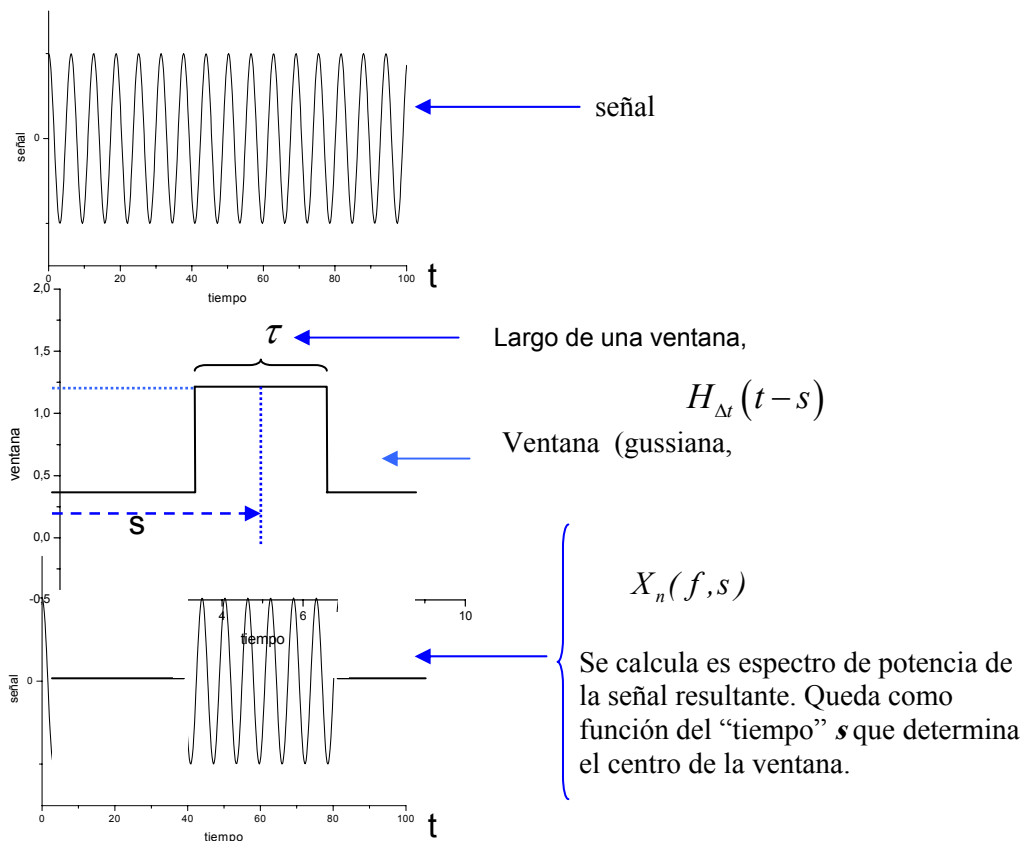
La transformada resultante es una función de la frecuencia  $f$  y del tiempo  $s$  donde está centrada la ventana. La densidad espectral de potencia queda dependiente del

tiempo y describe el cambio en la señal con una duración equivalente al ancho de la ventana  $H_{N\tau}(x)$ .

Para realizar una localización temporal de frecuencias en una señal temporal, se puede proceder de la siguiente forma:

- 1) Realizar la transformada de Fourier con una ventana (cuadrada, gaussiana, triangular, etc) de ancho  $T$ . El espectro  $\hat{X}_n(f)$  incluirá todas las frecuencias tales que  $f < 1/T$ .
- 2) Trasladar el centro de la ventana una “ distancia temporal”  $s$  realizando nuevamente el procedimiento descrito en 1).

De esta forma se obtendrá una función  $\hat{X}_n(f, n s), n \geq 0$  que dará la localización temporal de las frecuencias relevantes de la señal.



# Agradecimientos

A Lili por su estímulo y empuje permanente.

A todos mis compañeros de la UNGS, y particularmente a Claudio por su paciencia.

A mi familia por su constante apoyo.

Y especialmente a Andrés, por estar.