

# TEORIE MÍRY A INTEGRÁLU

## UČEBNÍ TEXT PRO NMMA203

JAN MALÝ

### OBSAH

1. Pojem míry	1
2. Lebesgueova míra: nástin	4
3. Měřitelné funkce	5
4. Abstraktní Lebesgueův integrál	7
5. Lebesgueův integrál na přímce	13
6. Záměna limity a integrálu	15
7. Záměna řady a integrálu	16
8. Integrál závislý na parametru	16
9. Vnější míra	20
10. Funkce intervalu	22
11. Rozšíření aditivní funkce intervalu; Lebesgue-Stieltjesova míra	23
12. Hopfova věta: Existence rozšíření	25
13. Jednoznačnost rozšíření	26
14. Zúplnění míry	27
15. Součin měr a Fubiniova věta	28
16. Věta o substituci	32
17. Lebesgueovy prostory	37
18. Věty o konvergenci	39
19. Derivování a rozklad měr	41
20. Znaménkové míry	44
21. Měřitelná zobrazení a obraz míry	47
22. Topologické vlastnosti LS měr	48
23. Lebesgue-Stieltjesův integrál	51
24. Distribuční funkce jedné proměnné	51
25. Distribuční funkce více proměnných	53
26. Funkce Gamma*	54

### 1. POJEM MÍRY

1.1. **Definice** (Množinové funkce). Nechť  $X$  je abstraktní množina a  $\mathcal{G} \subset 2^X$ . Značíme

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty].$$

Jakákoli funkce

$$\tau : \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

se nazývá *množinová funkce*. Množinové funkce se většinou používají k “měření” množin. Někdy budeme používat pro množinovou funkci značení  $(\mathcal{G}, \tau)$ , abychom současně uvedli i znak pro její definiční obor.

1.2. **Příklad.**  $\mathcal{G}$  může být systém všech obdélníků a  $\tau$  může přiřadit každému z nich

- obsah
- obvod
- počet vrcholů
- číslo 14.

---

Děkuji Prof. Dr. Ludkovi Zajíčkovi, DrSc. za cenné připomínky. Děkuji všem studentům, kteří se podíleli na ladění předchozích verzí.

Užitečnost těchto příkladů pro další rozvoj teorie je rozdílná.

**1.3. Definice** (Délka intervalu). Nechť  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $a \leq b$ . Množinu

$$I \in \{[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)\}$$

nazveme (*jednorozměrným*) *intervalem*. Množinový systém všech omezených jednorozměrných intervalů v  $\mathbb{R}$  značíme  $\mathcal{I}_1$ . Na  $\mathcal{I}_1$  definujeme množinovou funkci *délka intervalu* předpisem

$$(1) \quad \ell_1(I) = b - a, \quad I \in \{[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)\}$$

**1.4. Definice** (Elementární objem vícerozměrného intervalu). Množinu  $Q \subset \mathbb{R}^n$  nazveme *n-rozměrným intervalem*, jestliže existují jednorozměrné intervaly  $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$  tak, že

$$Q = I_1 \times \dots \times I_n.$$

Množinu všech omezených *n-rozměrných intervalů* budeme značit  $\mathcal{I}_n$ . Každému *n-rozměrnému intervalu*  $Q$  přiřadíme jeho *objem* předpisem

$$\ell_n(Q) = \ell_1(I_1) \dots \ell_1(I_n),$$

kde  $\ell_1(I)$  je jako v [definici 1.3](#). Jedním z prvních cílů teorie míry je najít vhodné rozšíření těchto množinových funkcí.

**1.5. Plán.** Zatím “neumíme” ani říci, co je obsah kruhu. Chtěli bychom zavést širokou třídu množin, tzv. měřitelné množiny, a na nich množinovou funkci, tzv. Lebesgueovu míru (pro popis pojmů obsah, objem), tak, aby všechny intervaly byly měřitelné a jejich míra byla jejich elementární objem, ale také aby byly i jiné představitelné množiny měřitelné (geometrické obrazce a tělesa), a aby se s třídou měřitelných množin a mírou dobře zacházelo. Přirozené požadavky:

- Např. sjednocení (spočetně mnoha) měřitelných množin je měřitelné
- Pokud jsou množiny disjunktní, míra jejich sjednocení je součet jejich měr

Požadované vlastnosti shrneme do axiomů. Výběr axiomů je výsledek práce matematiků, kteří zjistili, co vše mohou požadovat a vzdali se naopak nesplnitelných požadavků (např. na měřitelnost každé množiny).

Konstrukce Lebesgueovy míry není jediná aplikace teorie, naopak, na pojmech, které nyní budeme budovat, je postavena např. celá teorie pravděpodobnosti.

**1.6. Definice** (Jordan-Peanův objem). Z historického a didaktického hlediska je důležité rozšíření elementárního objemu na tzv. *Jordan-Peanův objem* (též zván Jordanův či Peano-Jordanův). Varianty této množinové funkce jsou používány ke středoškolským definicím objemu. Definice je založena na následující myšlence, kterou zde pouze naznačíme. Konečné disjunktní sjednocení omezených *n-rozměrných intervalů* nazveme *figurou*. Objem figury definujeme jako součet objemů intervalů, z nichž se skládá. Horní Jordan-Peanův objem množiny je infimum objemů figur, které ji obsahují. Dolní Jordan-Peanův objem množiny je supremum objemů figur, které jsou v ní obsaženy. Pokud horní a dolní Jordan-Peanův objem množiny se rovnají a jsou konečné, řekneme, že měřená množina je *Jordan-Peanovovsky měřitelná* a společnou hodnotu nazveme jejím *Jordan-Peanovým (J.P.) objemem*. Tímto způsobem lze měřit objem těles a obsah obrazců známých z geometrie. Není těžké zkonstruovat množiny, které nejsou J.P. měřitelné. Každá J.P. měřitelná množina musí být omezená. Pokud z krychle o objemu 1 vezmeme množinu  $E$  všech jejích bodů o racionálních souřadnicích, vnější J.P. objem množiny  $E$  je 1 a vnitřní 0. Navíc, konečné sjednocení J.P.-měřitelných množin je J.P.-měřitelné, ale spočetné sjednocení už nemusí. J.P.-objem tedy není naše cílová meta, budeme směřovat k lepšímu rozšíření elementárního objemu.

**1.7. Definice** (Rozšíření a zúžení množinové funkce). Nechť  $X$  je abstraktní množina,  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset 2^X$ ,  $\mu$  je množinová funkce na  $\mathcal{U}$  a  $\nu$  je množinová funkce na  $\mathcal{V}$ . Říkáme, že  $\nu$  je *rozšíření*  $\mu$ , jestliže  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  a  $\mu(A) = \nu(A)$  pro každou  $A \in \mathcal{U}$ .

Naopak, množinovou funkci  $\mu$  v tomto případě nazýváme *zúžením* množinové funkce  $\nu$  z  $\mathcal{V}$  na  $\mathcal{U}$  a značíme ji  $\nu|_{\mathcal{U}}$ .

Relace “býti rozšíření” je uspořádání na třídě všech množinových funkcí na  $X$ .

**1.8. Definice** (Okruh,  $\sigma$ -algebra, ...). Nechť  $X$  je abstraktní množina. Systém  $\mathcal{O}$  podmnožin  $X$  se nazývá *okruh*, jestliže

$$(O-1) \quad \emptyset \in \mathcal{O},$$

$$(O-2) \quad A, B \in \mathcal{O} \implies A \setminus B \in \mathcal{O}.$$

$$(O-3) \quad A, B \in \mathcal{O} \implies A \cup B \in \mathcal{O}.$$

Z axiomů snadno dostaneme též

$$A, B \in \mathcal{O} \implies A \cap B \in \mathcal{O}.$$

Indukcí dostaneme, že každý okruh je tedy uzavřen na konečná sjednocení a konečné průniky

$$A_1, \dots, A_m \in \mathcal{O} \implies A_1 \cup \dots \cup A_m \in \mathcal{O}, A_1 \cap \dots \cap A_m \in \mathcal{O}.$$

Požadujeme-li uzavřenost na spočetná sjednocení (a v důsledku na spočetné průniky), dostaneme axiomy  $\sigma$ -okruhu. Tedy  $\sigma$ -okruh je množinový systém, který splňuje

$$(\sigma\text{-O-1}) \emptyset \in \mathcal{O},$$

$$(\sigma\text{-O-2}) A, B \in \mathcal{O} \implies A \setminus B \in \mathcal{O}.$$

$$(\sigma\text{-O-3}) A_1, A_2, \dots \in \mathcal{O} \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{O}.$$

*Algebra* je definována jako okruh obsahující celý prostor  $X$ .  $\sigma$ -*algebra* je definována jako  $\sigma$ -okruh obsahující celý prostor  $X$ . Je to nejdůležitější množinový systém pro teorii míry. K ověření, že množinový systém  $\mathcal{S}$  je  $\sigma$ -algebra stačí tyto axiomy:

$$(S1-1) \emptyset \in \mathcal{S},$$

$$(S2-2) A \in \mathcal{S} \implies X \setminus A \in \mathcal{S},$$

$$(S3-3) A_j \in \mathcal{S}, j = 1, 2, \dots \implies \bigcup_j A_j \in \mathcal{S}.$$

Je-li  $\mathcal{S}$   $\sigma$ -algebra na  $X$ , dvojice  $(X, \mathcal{S})$  se nazývá *měřitelný prostor*. Množiny  $A \in \mathcal{S}$  se nazývají  $\mathcal{S}$ -měřitelné množiny. Nehrozí-li nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných množinách*.

**1.9. Příklady.** (Některá z uvedených tvrzení jsou netriviální a důležitá, jejich důkaz uvedeme později v sekci 12)

- $\{\emptyset, X\}$  je  $\sigma$ -algebra.
- Systém  $2^X$  všech podmnožin množiny  $X$  je  $\sigma$ -algebra.
- Borelovské množiny na topologickém prostoru tvoří  $\sigma$ -algebru.
- Lebesgueovské měřitelné množiny tvoří  $\sigma$ -algebru.
- J.-P.-měřitelné množiny tvoří okruh, ne  $\sigma$ -okruh, ne algebra
- Systém všech konečných (disjunktních) sjednocení intervalů tvoří algebra, ne  $\sigma$ -algebra
- Systém všech konečných (disjunktních) sjednocení omezených intervalů tvoří okruh, ne  $\sigma$ -okruh, ne algebra
- Systém všech konečných (disjunktních) sjednocení omezených intervalů tvaru  $(a, b]$  tvoří okruh, ne  $\sigma$ -okruh, ne algebra.
- Systém všech spočetných (disjunktních) sjednocení omezených intervalů netvoří ani okruh.
- Systém všech uzavřených (resp. otevřených) podmnožin topologického prostoru netvoří ani okruh (protože není uzavřen na množinový rozdíl).

**1.10. Definice** (Generování množinových systémů). Je-li  $\mathcal{F}$  libovolný systém podmnožin  $X$ , potom existuje nejmenší  $\sigma$ -algebra obsahující  $\mathcal{F}$ . Tuto  $\sigma$ -algebru dostaneme jako průnik všech  $\sigma$ -algeber obsahujících  $\mathcal{F}$  a značíme ji  $\sigma(\mathcal{F})$ . Podobně můžeme generovat jiné množinové systémy, např. okruhy. Okruh z příkladu (g) je generovaný systémem  $\mathcal{I}_1$ .

**1.11. Definice** (Borelovské množiny). Nechť  $X$  je topologický prostor a  $\mathcal{G}$  je systém všech jeho otevřených podmnožin. Potom definujeme  $\mathcal{B}(X)$  jako nejmenší  $\sigma$ -algebru obsahující  $\mathcal{G}$  (viz definice 1.10).  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(X)$  obsahuje kromě otevřených množin též všechny uzavřené množiny.  $\mathcal{B}(X)$  se nazývá *borelovská  $\sigma$ -algebra* a jejím prvkům se říká *borelovské množiny*.

V  $\mathbb{R}$  jsou borelovské všechny intervaly, množina všech racionálních čísel, atd. Příklady neborelovských množin se konstruují velmi těžko.

Někdy je výhodné generovat  $\mathcal{B}(X)$  jinak než systémem všech otevřených množin. Na  $\overline{\mathbb{R}}$  je přirozená topologie generovaná intervaly  $(a, b)$ ,  $(a, \infty]$  a  $[-\infty, b)$ . Tudíž  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  je  $\sigma$ -algebra na  $\overline{\mathbb{R}}$  generovaná intervaly. Podobně  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  je generovaná intervaly. Důkazy těchto tvrzení (totiž, že generování otevřenými množinami a intervaly vyjde v těchto případech nastejno) přenecháváme čtenáři.

**1.12. Definice** (Míra). Nechť  $(X, \mathcal{S})$  je měřitelný prostor. Množinová funkce  $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  se nazývá *míra*, jestliže splňuje

$$(M1-1) \mu(\emptyset) = 0,$$

$$(M2-2) (\sigma\text{-additivita}) \text{ jestliže } A_j \in \mathcal{S}, j = 1, 2, \dots, \text{ jsou po dvou disjunktní, potom}$$

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j \mu(A_j).$$

Trojice  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  se nazývá *prostor s mírou*.

Zdůrazněme, že definice míry zahrnuje, že hodnoty jsou nezáporné a definiční obor je  $\sigma$ -algebra.

### 1.13. Příklady.

- (a) Diracova míra  $\delta_a$ :  $X$  je libovolná množina,  $a \in X$ ,  $\mathcal{S} = 2^X$ ,

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

- (b) *Počítací míra*  $X$  je libovolná množina,  $\mathcal{S} = 2^X$ . Počítací míra přiřadí každé množině  $A \subset X$  počet jejích prvků. Nekonečným množinám přiřadí prostě  $\infty$ , nerozlišuje nekonečné mohutnosti.  
 (c) *Lebesgueova míra* zobecňuje pojem délky intervalu, obsahu "obrazce" či objemu "tělesa".  
 (d) *Hausdorffova míra* je druh  $n$ -rozměrné míry v  $\mathbb{R}^d$ . Zobecňuje pojem délky křivky ( $n = 1$ ), a povrchu zakřivené plochy ( $n = 2$ ,  $d = 3$ ).

1.14. **Definice** (Terminologie teorie míry). Míra  $\mu$  na měřitelném prostoru  $(X, \mathcal{S})$  se nazývá

- (a) *konečná*, jestliže  $\mu(X) < \infty$ ,  
 (b)  *$\sigma$ -konečná*, jestliže existují  $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{S}$  tak, že  $\mu(X_j) < \infty$  a  $X = \bigcup_j X_j$ ,  
 (c) *pravděpodobnostní*, jestliže  $\mu(X) = 1$ ,  
 (d) *úplná*, jestliže každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná (a tudíž také míry nula).

Fráze *skoro všude* nebo  *$\mu$ -skoro všude* se používá ve spojení s vlastností bodů množiny  $X$ . Řekneme-li, že taková vlastnost platí skoro všude (nebo ve skoro všech bodech), znamená to, že je splněna až na množinu míry nula, neboli, že existuje množina  $N \in \mathcal{S}$  míry nula tak, že vlastnost je splněna ve všech bodech množiny  $X \setminus N$ . Používá se zejména pro rovnost a nerovnosti mezi funkcemi a pro bodovou konvergenci posloupnosti funkcí.

1.15. **Větička** (Trik zdisjunktnění). *Nechť  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ . Potom existují po dvou disjunktní množiny  $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{S}$  tak, že*

$$A_1 \cup \dots \cup A_k = E_1 \cup \dots \cup E_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Tuto vlastnost mají

$$E_1 = A_1, \quad E_2 = A_2 \setminus A_1, \quad E_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \dots$$

1.16. **Větička** (Vlastnosti míry). *Nechť  $A_j \in \mathcal{S}$ .*

- (a)  $A_1 \subset A_2 \implies \mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ .  
 (b) *Jestliže  $A_j \in \mathcal{S}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ , potom*

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \lim_j \mu(A_j).$$

- (c) *Jestliže  $A_j \in \mathcal{S}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ , a jestliže  $\mu(A_1) < \infty$ , potom*

$$\mu\left(\bigcap_j A_j\right) = \lim_j \mu(A_j).$$

*Důkaz.* (a) je snadné. K důkazu (b) použijeme trik zdisjunktnění ([větičku 1.15](#)). (c): Použijeme (b) na  $A_1 \setminus A_j$ . □

1.17. **Příklad.** *Nechť  $\mu$  je počítací míra na  $\mathbb{N}$  a  $A_j = \{j, j+1, \dots\}$ . Potom  $A_j \searrow \emptyset$ , a přesto  $\mu(A_j) \rightarrow \infty$ . Je to tím, že ve [větičce 1.16](#) (c) není splněn předpoklad o konečnosti  $\mu(A_1)$ .*

## 2. LEBESGUEOVA MÍRA: NÁSTIN

2.1. **Definice** (Lebesgueova vnější míra). *Nechť  $A \subset \mathbb{R}^n$  je libovolná množina. Definujme*

$$(2) \quad \ell^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j) : Q_j \in \mathcal{I}_n, \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset A \right\}.$$

Množinová funkce  $\ell^*: A \mapsto \ell^*(A)$ , definovaná na potenční množině  $2^{\mathbb{R}^n}$ , se nazývá *Lebesgueova vnější míra*. Součty, vyskytující se na pravé straně (2) se nazývají *horní součty* k  $\ell^*(A)$ .

Množinová funkce  $\ell^*$  umí měřit všechny množiny, ale není aditivní. Proto v dalším se budeme snažit z ní vytvořit aditivní funkci (dokonce míru, viz [definice 1.12](#)), za což zaplatíme zúžením definičního oboru. Výsledný obor všech měřitelných množin však již bude dostatečně bohatý pro všechny aplikace.

**2.2. Měřitelné množiny a Lebesgueova míra.** Řekneme, že množina  $A \subset \mathbb{R}^n$  je (Lebesgueovsky) měřitelná, jestliže pro každý interval  $Q \in \mathcal{I}_n$  platí

$$(3) \quad \ell(Q) = \ell^*(Q \cap A) + \ell^*(Q \setminus A).$$

Množinu všech Lebesgueovsky měřitelných množin budeme značit  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$  a množinová funkce

$$\lambda : A \mapsto \ell^*(A), \quad A \in \mathfrak{M}$$

bude *Lebesgueova míra*.

**2.3. Oznamení věty.** *Nechť  $Q \in \mathcal{I}_n$ . Potom  $Q \in \mathfrak{M}$  a  $\lambda(Q) = \ell^*(Q) = \ell(Q)$ .*

*Důkaz.* Vyplýve z věty 11.7. □

**2.4. Oznamení věty.**  *$\mathfrak{M}$  je  $\sigma$ -algebra obsahující všechny borelovské podmnožiny  $\mathbb{R}^n$  a  $\lambda$  je míra na  $\mathfrak{M}$ .*

*Důkaz.* Vyplýve z vět 9.5 a 11.2. □

**2.5. Poznámka** (Lebesgueovsky neměřitelné množiny). V dalším se budeme několikrát vracet k tématu měřitelných množin. Přírozenou otázkou je, které množiny měřitelné nejsou a zda vůbec nějaké takové existují. Pravda je, že sice existují, ale důkaz jejich existence není konstruktivní. Filosoficky vzato, z hlediska výpočtů v aplikacích nemůže mít vliv na výsledek, zda neměřitelné množiny existují nebo ne. Vynechat důkaz měřitelnosti množiny, je-li její měřitelnost požadována, je však hrubou matematickou chybou.

### 3. MĚŘITELNÉ FUNKCE

**3.1. Značení.** Je-li  $X$  abstraktní množina a  $A \subset X$ , značíme  $\chi_A$  charakteristickou funkci množiny  $A$ , neboli

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Symbol  $\infty$  může být užít pro  $+\infty$ .

Je-li  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  funkce, definujeme  $f^+ = \max\{f, 0\}$ ,  $f^- = \max\{-f, 0\}$ . (Maximum či minimum dvou funkcí se definuje bod po bodu.) Tedy

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Je-li  $f$  funkce na  $D$  a  $M \subset \overline{\mathbb{R}}$ , značíme

$$\{f \in M\} = \{x \in D : f(x) \in M\},$$

podobně zavádíme značení jako  $\{f > a\}$ ,  $\{f = a\}$ .

Symbolem  $\varphi \circ f$  značíme složenou funkci  $x \mapsto \varphi(f(x))$ . Značení  $f^{-1}$  používáme pro inverzní funkci k  $f$ .

**3.2. Úmluva.** Na  $\overline{\mathbb{R}}$  zavádíme algebraické operace a nerovnosti přirozeným způsobem. Součet  $a + b$  má smysl pokud  $a \in \mathbb{R}$  nebo  $b \in \mathbb{R}$  nebo  $a$  a  $b$  jsou nekonečna stejného znaménka. Součet  $\infty + (-\infty)$  smysl nemá. Součin  $ab$  má smysl vždy (důležité !!), ve "sporném případě" zavádíme

$$(4) \quad 0 \cdot \pm\infty = 0.$$

Podíl  $a/b$  má smysl s výjimkou případů  $a/0$  a  $\pm\infty/\pm\infty$ .

V celé kapitole budeme uvažovat měřitelný prostor  $(X, \mathcal{S})$ .

**3.3. Definice** (Měřitelné funkce). Nechť  $D \in \mathcal{S}$ . Řekneme, že funkce  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  je  $\mathcal{S}$ -měřitelná, jestliže pro každý interval  $I \subset \overline{\mathbb{R}}$  je  $f^{-1}(I) \in \mathcal{S}$ . Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných funkcích*.

**3.4. Pozorování.** *Nechť  $D, D_j \in \mathcal{S}$ .*

- (a) *Je-li  $f$  měřitelná na  $D$  a  $D_1 \subset D$ , pak  $f$  je měřitelná na  $D_1$ .*
- (b) *Je-li funkce  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mathcal{S}$ -měřitelná na  $D_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  a  $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ , pak  $f$  je měřitelná na  $D$ .*

**3.5. Větička** (Ověřování měřitelnosti). *Uvažujme  $D \in \mathcal{S}$  a funkci  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Nechť  $S \subset \overline{\mathbb{R}}$  je hustá množina. Předpokládejme, že*

- (\*) *Pro všechna  $q \in \mathbb{Q}$  je  $\{f > q\} \in \mathcal{S}$ .*

Potom funkce  $f$  je měřitelná na  $D$ .

*Důkaz.* 1. Necht  $a < \infty$ , najdeme racionální čísla  $q_j \searrow a$ . Pak

$$\{f > a\} = \bigcup_j \{f > q_j\}.$$

2. Necht  $a > -\infty$ , najdeme racionální čísla  $r_j \nearrow a$ . Pak

$$\{f \geq a\} = \bigcap_j \{f > r_j\}.$$

3. Necht  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ , pak

$$\{f \leq b\} = D \setminus \{f > b\}, \quad \{f < b\} = D \setminus \{f \geq b\}.$$

4. Necht  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $a \leq b$ . Potom

$$\{f \in [a, b]\} = \{f \geq a\} \cap \{f \leq b\}$$

a podobně pro ostatní typy intervalů. □

**3.6. Poznámka.** Místo nerovnosti  $f > q$  v (\*) lze užít  $f \geq q$ ,  $f < q$  nebo  $f \leq q$ .

**3.7. Větička** (Měřitelnost vzoru). *Necht  $f$  je měřitelná funkce na  $D \in \mathcal{S}$  a  $A \subset \mathbb{R}$  je borelovská množina. Potom  $\{f \in A\} \in \mathcal{S}$ .*

*Důkaz.* Systém množin  $\{E \subset \mathbb{R}: \{f \in E\} \text{ je měřitelná}\}$  tvoří  $\sigma$ -algebru a obsahuje všechny intervaly. Tudíž obsahuje všechny borelovské množiny. □

**3.8. Větička** (Měřitelnost složené funkce). *Necht  $f$  je měřitelná funkce na  $D \in \mathcal{S}$  a  $\varphi$  je spojitá funkce na otevřené nebo uzavřené množině  $M \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Potom množina  $D' := \{f \in M\}$  je měřitelná a složená funkce  $\varphi \circ f$  je měřitelná na  $D'$ .*

*Důkaz.* Zvolme  $c \in \mathbb{R}$ , potom  $P := \{y \in M: \varphi(y) > c\}$  je borelovská, tudíž

$$\{\varphi \circ f > c\} = \{f \in P\}$$

je měřitelná podle větičky 3.7. □

**3.9. Varování.** Budeme-li skládat spojitou a měřitelnou funkci v opačném pořadí, výsledek nemusí být měřitelný. Také není obecně pravda, že inverzní funkce k měřitelné funkci by byla měřitelná funkce. Viz příklad 21.5

**3.10. Věta** (Operace s měřitelnými funkcemi). *Necht funkce  $f, f_j$  jsou měřitelné funkce na  $D \in \mathcal{S}$ . Pak platí následující:*

- (a) Funkce  $|f|, f^+, f^-, f^2$  jsou měřitelné na  $D$ ,  $1/f$  je měřitelná na  $\{f \neq 0\}$ .
- (b) Funkce  $f_1 + f_2, f_1 - f_2, f_1 f_2, f_1/f_2$  jsou měřitelné vždy na množině, kde učiněná operace dává smysl podle úmluvy 3.2.
- (c) Funkce  $\sup_j f_j, \inf_j f_j, \limsup_j f_j, \liminf_j f_j$  jsou měřitelné na  $D$ .
- (d) Množina  $D'$  všech bodů, kde existuje  $\lim_j f_j$  je měřitelná a  $\lim_j f_j$  je měřitelná na  $D'$ .

*Důkaz.* (a) je důsledek větičky 3.8.

(b): Je výhodné "odpreparovat" diskusí množiny, kde jedna z funkcí nebo obě nabývají nevlastních hodnot a zaměřit se na množinu  $\{f_1 \in \mathbb{R}\} \cap \{f_2 \in \mathbb{R}\}$ . Máme

$$\{f_1 + f_2 > a\} = \bigcup_{\substack{p, q \in \mathbb{Q} \\ p+q > a}} \{f_1 > p\} \cap \{f_2 > q\}.$$

Dále

$$f_1 f_2 = \frac{1}{4} \left( (f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2 \right).$$

Ostatní je snadné.

(c): Je

$$\{\sup_j f_j > a\} = \bigcup_j \{f_j > a\}$$

a odtud odvodíme i zbytek.

(d) Máme

$$\begin{aligned}\{\lim f_j \text{ existuje}\} &= \{\limsup_j f_j = \liminf_j f_j\} \\ &= D \setminus \left( \bigcup_{p \in \mathbb{Q}} \{\liminf_j f_j < p < \limsup_j f_j\} \right).\end{aligned}$$

□

**3.11. Jednoduché funkce.** Funkci  $f$  na  $D \in \mathcal{S}$  nazveme  $\mathcal{S}$ -jednoduchou, jestliže  $f$  je lineární kombinace charakteristických funkcí množin z  $\mathcal{S}$ , tj. existují-li množiny  $A_j \in \mathcal{S}$  a  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , tak, že

$$f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Pokud bude jasné, jakou  $\sigma$ -algebru máme na mysli, budeme mluvit prostě o jednoduchých funkcích.

**3.12. Aproximace jednoduchými funkcemi.** Necht  $(X, \mathcal{S})$  je měřitelný prostor. Necht  $f$  je nezáporná měřitelná funkce na  $D \in \mathcal{S}$ . Potom existují nezáporné jednoduché funkce  $f_k \nearrow f$ . Navíc,  $f$  lze vyjádřit ve tvaru

$$(5) \quad f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j} \chi_{E_j},$$

kde  $E_j \in \mathcal{S}$ .

*Důkaz.* Položme

$$P_j = \bigcup_i \{ [i2^{-j}, (i+1)2^{-j}) : i \text{ je liché celé} \}.$$

Potom

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j} \chi_{E_j},$$

kde

$$E_j := \{f \in P_j\}.$$

Jelikož  $P_j$  jsou borelovské,  $\{f \in P_j\}$  jsou měřitelné podle větičky 3.7. Jedná se vlastně o dyadickou expanzi hodnoty  $f(x)$ ; totiž  $x \in E_j$ , právě když  $f(x)$  má na  $j$ -tém místě v dyadickém rozvoji jedničku. Jednoduché funkce  $f_k$  můžeme definovat vzorcem

$$f_k = \sum_{j=-k}^k 2^{-j} \chi_{E_j}.$$

□

#### 4. ABSTRAKTNÍ LEBESGUEŮV INTEGRÁL

Necht  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  je prostor s mírou. V této kapitole zavedeme *abstraktní Lebesgueův integrál* z  $\mu$ -měřitelné funkce.

Lebesgueovo pojetí nabízí alternativní cestu k definici integrálu přes interval, takto vybudovaný integrál dává použitelnější teorii než integrál Newtonův nebo Riemannův. Značně široká třída integrovatelných funkcí je jen jednou z mnoha výhod. V moderní matematické literatuře se integrálem bez přívlastku rozumí vždy integrál Lebesgueův. Význam Newtonova a Riemannova integrálu zůstává ve sféře didaktiky.

Při lebesgueovském integrování se však nemusíme omezovat na funkce reálné proměnné. Obecné pojetí abstraktního Lebesgueova integrálu na libovolném prostoru s mírou má mnoho aplikací v analýze, teorii pravděpodobnosti a v matematice vůbec, v této obecnosti Riemannova i Newtonova metoda nenabízejí ani částečné řešení problému.

**4.1. Definice (Rozklad).** Konečný soubor množin  $\{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathcal{S}$  nazveme *rozkladem* nebo *Lebesgueovským dělením* množiny  $D \in \mathcal{S}$ , jestliže množiny  $A_j$  jsou po dvou disjunktní a

$$\bigcup_{j=1}^m A_j = D.$$



**4.2. Terminologická poznámka.** Rozdíl mezi obyčejným “riemannovským” dělením a lebesgueovským spočívá hlavně v tom, že riemannovské dělení je pouze na intervaly, u lebesgueovského se dělí na libovolné měřitelné množiny. Tento rozdíl podstatně přispívá k bohatství třídy lebesgueovsky integrovatelných funkcí.

**4.3. Větička** (Charakteristika jednoduchých funkcí). *Nechť  $f$  je nezáporná měřitelná funkce na  $D$ . Pak je ekvivalentní*

- (i)  $f$  je jednoduchá,
- (ii)  $f$  nabývá jen konečně mnoha hodnot,
- (iii) existuje rozklad  $\{A_j\}_{j=1}^m$  množiny  $D$  a nezáporná čísla  $\alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  tak, že

$$f = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j}.$$

*Důkaz.* Implikace (i)  $\implies$  (ii) a (iii)  $\implies$  (i) jsou zřejmé. Pro (ii)  $\implies$  (iii), nechť  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  jsou hodnoty, kterých nabývá funkce  $f$  a položíme  $A_j = \{f = \alpha_j\}$ .  $\square$

**4.4. Definice** (Konstrukce integrálu). Nechť  $D, D' \in \mathcal{S}$  a  $f: D' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  je měřitelná funkce. Integrál  $\int_D f d\mu$  vybudujeme ve třech krocích. V prvních dvou krocích předpokládáme  $D' = D$ .

1. Je-li  $f$  nezáporná měřitelná funkce, definujeme

$$(6) \quad \int_D f d\mu = \sup \left\{ \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) : \{A_j\} \text{ je rozklad } D, \right. \\ \left. 0 \leq \alpha_j \leq f \text{ na } A_j, j = 1, \dots, m \right\}.$$

Součty vyskytující se v (6) nazýváme *dolními součty* k funkci  $f$ . Integrál z nezáporné měřitelné funkce je definován *vždy*, může ovšem nabývat nekonečné hodnoty.

2. V obecném případě, kdy  $f$  je měřitelná funkce na  $D$ , definujeme

$$(7) \quad \int_D f d\mu = \int_D f^+ d\mu - \int_D f^- d\mu,$$

pokud rozdíl v (7) má smysl. Pokud

$$\int_D f^+ d\mu = \int_D f^- d\mu = \infty,$$

zůstává integrál funkce  $f$  nedefinován.

3. Je-li  $f$  měřitelná (přesně:  $\mathcal{S}$ -měřitelná) funkce na  $D' \neq D$  a  $\mu(D \setminus D') = 0$ , je účelné definovat

$$\int_D f d\mu = \int_{D \cap D'} f d\mu.$$

Smysl takového integrálu a výsledek samozřejmě v tom případě nezávisí na volbě  $D'$ .

V některých případech je účelné používat podrobnější zápis

$$\int_D f(x) d\mu(x) \quad \text{pro} \quad \int_D f d\mu.$$

Pro integrál podle Lebesgueovy míry v  $\mathbb{R}^n$  používáme zpravidla značení

$$\int_D f(x) dx.$$

Je-li  $n = 1$  a  $D = (a, b)$ , používáme

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Je-li integrál  $\int_D f d\mu$  definován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce  $f$  *má integrál*. Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že  $\int_D f d\mu$  *konverguje* nebo že  $f$  je *integrovatelná*.

**4.5. Poznámka.** Na rozdíl od definice Riemannova integrálu, u Lebesgueova integrálu nekonfrontujeme supremum dolní součtů s infimem nějakých “horních součtů”. To je umožněno tím, že se v samotném začátku definice omezuje pouze na měřitelné funkce a u těch můžeme supremu dolních součtů důvěřovat.



Podobná situace by nastala u Riemannova integrálu, kdybychom se omezili na spojité funkce a v prvním kroku bychom definovali integrál pro spojitou a nezápornou funkci na uzavřeném intervalu, také bychom mohli věřit dolnímu Riemannovu integrálu.

**4.6. Definice** ( $\mu$ -měřitelné funkce). Nechť  $D \subset X$ . Řekneme, že funkce  $f : D' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  je  $\mu$ -měřitelná na  $D \in \mathcal{S}$ , existuje-li  $D'' \in \mathcal{S}$  tak, že  $\mu(D \setminus D'') = 0$  a  $f$  je  $\mathcal{S}$ -měřitelná na  $D''$ . To odpovídá situaci, která se naskytla v třetím kroku definice integrálu. V dalším budeme slovo “měřitelná” používat ve významu “ $\mu$ -měřitelná” v kontextu prostoru s mírou a ve významu  $\lambda$ -měřitelná v kontextu integrace podle Lebesgueovy míry.

**4.7. Označení věty** (Lebesgueův integrál a Newtonův integrál). Nechť funkce  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  má na intervalu  $(a, b)$  primitivní funkci  $F$ .

(a) Je-li  $f$   $\lambda$ -integrovatelná na  $(a, b)$ , potom existují vlastní jednostranné limity  $F(b-)$  a  $F(a+)$  a platí

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-) - F(a+).$$

(b) Jestliže  $f \geq 0$  a existují vlastní jednostranné limity  $F(b-)$  a  $F(a+)$ , pak  $f$  je  $\lambda$ -integrovatelná na  $(a, b)$ .

*Důkaz.* Větu v této obecnosti dokazovat nebudeme. Částečným případem se budeme zabývat ve **větě 5.4**.  $\square$

**4.8. Věta** (Různé vlastnosti Lebesgueova integrálu). Nechť  $D \in \mathcal{S}$  a  $f, g$  jsou měřitelné funkce na  $D$ .

(a) Je-li  $f \geq 0$ ,  $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$  a  $D_1 \subset D_2 \subset D$ , pak

$$\int_{D_1} f d\mu \leq \int_{D_2} f d\mu.$$

(b) Jestliže  $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$ ,  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$  a  $D_1 \cup D_2 = D$ , pak

$$\int_D f d\mu = \int_{D_1} f d\mu + \int_{D_2} f d\mu.$$

(c) Je-li  $\int_D |f| d\mu < \infty$ , pak  $|f| < \infty$  skoro všude.

(d) Je-li  $\int_D |f| d\mu = 0$ , pak  $f = 0$  skoro všude.

(e) (monotonie) Jestliže  $f, g$  mají integrál a  $f \leq g$  skoro všude, pak

$$\int_D f d\mu \leq \int_D g d\mu.$$

(f) Je-li  $\int_D g d\mu < \infty$  a  $|f| \leq g$  skoro všude, pak  $f$  je integrovatelná.

*Důkaz.* (a), (b), (c) jsou snadné. (d): Jestliže množiny  $E_j := \{|f| > 2^{-j}\}$  mají míru nula, pak  $f = 0$  skoro všude. Pokud jedna z nich má kladnou míru, pak  $2^{-j}\mu(E_j)$  je dolní součet k  $|f|$  a tudíž integrál  $|f|$  je kladný. (e): Tvrzení je snadné, pokud  $0 \leq f \leq g$  na  $D$ . V obecném případě se důkaz provede rozdělením na množiny  $\{f \leq 0 \leq g\}$ ,  $\{f \leq g < 0\}$ ,  $\{0 < f \leq g\}$ ,  $\{g < f\}$  a diskusí. (f) plyne z (e) a definice integrálu.  $\square$

**4.9. Poznámka.** Konvergence Newtonova integrálu nestačí k ověření konvergence Lebesgueova integrálu (jako příklad slouží funkce  $\sin x/x$  na intervalu  $(0, \infty)$ ). Pokud  $f \geq 0$  na  $(a, b)$ , můžeme použít **větu 4.7**. Jestliže  $f$  střídá znaménka, základním kritériem je (f) z předchozí **věty 4.8**. Buď např.

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + x^2}, \quad x \in (0, \infty).$$

Položme

$$g(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in (0, \infty).$$

Potom  $g$  je integrovatelná na  $(0, \infty)$  podle **věty 4.7** a  $f$  je integrovatelná na  $(0, \infty)$ , protože  $|f| \leq g$ .

**4.10. Lemma** (O monotonii). Nechť  $D \in \mathcal{S}$ . Nechť  $\{A_j\}_{j=1}^n, \{B_i\}_{i=1}^m$  jsou rozklady  $D$  a

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n, \quad \beta_1, \dots, \beta_m$$

jsou nezáporná reálná čísla. Jestliže

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \chi_{B_i} \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j},$$

potom

$$(8) \quad \sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j).$$

*Důkaz.* Je-li  $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ , potom z předpokladů plyne  $\beta_i \leq \alpha_j$  a tudíž

$$(9) \quad \beta_i \mu(A_j \cap B_i) \leq \alpha_j \mu(A_j \cap B_i).$$

Pokud  $A_j \cap B_i = \emptyset$ , pak  $\mu(A_j \cap B_i) = 0$  a zase dostáváme (9). Sečtením přes  $i, j$  a záměnou pořadí sumace dostáváme

$$(10) \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_i \mu(A_j \cap B_i) \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap B_i).$$

Jelikož

$$\sum_{j=1}^n \mu(A_j \cap B_i) = \mu(B_i), \quad \sum_{i=1}^m \mu(A_j \cap B_i) = \mu(A_j),$$

z (10) dostáváme (9). □

**4.11. Lemma** (Integrál jednoduché funkce). *Nechť  $D \in \mathcal{S}$ . Nechť  $\{A_j\}_{j=1}^n$  je rozklad  $D$  a  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  jsou nezáporná reálná čísla. Potom*

$$\int_D \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j} \right) d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j).$$

*Důkaz.* Označme

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Je-li

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i)$$

dolní součet k  $f$ , podle [lemmatu 4.10](#) dostáváme

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$$

a přechod k supremu přes všechny dolní součty dává

$$\int_D f d\mu \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j).$$

Jelikož

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$$

je též dolní součet k  $f$ , máme i obrácenou nerovnost. □

**4.12. Důsledek.** Je-li  $f$  nezáporná měřitelná funkce na  $D \in \mathcal{S}$ , potom

$$\int_D f d\mu = \sup \left\{ \int_D s d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ je jednoduchá} \right\}.$$

**4.13. Věta** (Levi, Lebesgue, monotone convergence theorem). *Nechť  $\{f_j\}$  je posloupnost měřitelných funkcí na  $D \in \mathcal{S}$ ,  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ , a  $f = \lim f_j$ . Potom*

$$(11) \quad \int_D f d\mu = \lim_j \int_D f_j d\mu.$$

*Důkaz.* Necht

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$$

je dolní součet k  $f$ . Označme

$$s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j},$$

zvolme  $\tau > 1$  a položme

$$E_k = \{\tau f_k \geq s\}.$$

Snadno ověříme, že  $\bigcup_k E_k = D$ . Podle [větičky 1.16](#) (b),

$$\mu(A_j) = \lim_k \mu(A_j \cap E_k),$$

tedy (záměna limity a konečné sumy není žádný problém)

$$(12) \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \lim_k \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap E_k).$$

Každý součet

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap E_k)$$

je dolní součet k  $\tau f_k$ , tedy limitu na pravé straně (12) můžeme shora odhadnout limitou

$$\lim_k \int_D \tau f_k d\mu.$$

Tedy (vytknutí konstanty před integrál není problém, srov. [větu 4.15](#)(b))

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) \leq \lim_k \tau \int_D f_k d\mu.$$

Přechodem k supremu přes všechny dolní součty k  $f$  dostáváme

$$\int_D f d\mu \leq \tau \lim_k \int_D f_k d\mu$$

a přechodem pro  $\tau \searrow 1$  máme

$$\int_D f d\mu \leq \lim_k \int_D f_k d\mu.$$

Opačná nerovnost je zřejmá. □

**4.14. Důsledek** (Spojitá závislost na integračním oboru). *Necht  $D, E_k \in \mathcal{S}$ ,  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ ,  $\bigcup_k E_k = D$ . Necht  $f$  je nezáporná měřitelná funkce na  $D$ . Potom*

$$\int_D f d\mu = \lim_k \int_{E_k} f d\mu.$$

*Důkaz.* Stačí aplikovat Leviho větu na  $f_k = f \chi_{E_k}$ . □

**4.15. Věta** (Linearita integrálu). (a) *Necht  $f, g$  jsou měřitelné funkce na  $D \in \mathcal{S}$ . Potom*

$$\int_D (f + g) d\mu = \int_D f d\mu + \int_D g d\mu,$$

*má-li pravá strana smysl.* (b) *Necht  $f$  je měřitelná funkce na  $D \in \mathcal{S}$  a  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Pokud  $f$  má integrál, pak*

$$\int_D \gamma f d\mu = \gamma \int_D f d\mu.$$

*Důkaz.* Tvrzení (b) je zřejmé.

(a): Nejprve předpokládejme, že funkce  $f$  a  $g$  jsou nezáporné a jednoduché. Podle větičky 4.3 najdeme vyjádření

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}, \quad g = \sum_{i=1}^m \beta_i \chi_{B_i},$$

kde  $\{A_j\}_{j=1}^n$ ,  $\{B_i\}_{i=1}^m$  jsou rozklady  $D$  a  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_m$  jsou nezáporná reálná čísla. Potom také  $\{A_j \cap B_i : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$  je rozklad  $D$  a

$$f + g = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_i) \chi_{A_j \cap B_i}.$$

Podle lemmatu 4.11

$$\int_D f \, d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j),$$

$$\int_D g \, d\mu = \sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i)$$

a

$$\int_D (f + g) \, d\mu = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_i) \mu(A_j \cap B_i).$$

Máme

$$\begin{aligned} \int_D (f + g) \, d\mu &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_i) \mu(A_j \cap B_i) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap B_i) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_i \mu(A_j \cap B_i) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) + \sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i). \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden pro jednoduché funkce.

Nechť  $f$  a  $g$  jsou nezáporné měřitelné funkce. Podle věty 3.12 existují nezáporné jednoduché funkce  $f_j \nearrow f$ ,  $g_j \nearrow g$ . Pak také  $(f_j + g_j) \nearrow (f + g)$ . Podle předchozí části důkazu

$$\int_D (f_j + g_j) \, d\mu = \int_D f_j \, d\mu + \int_D g_j \, d\mu$$

a na obou stranách rovnosti použijeme Leviho větu k limitnímu přechodu. To nám dá důkaz pro nezáporné měřitelné funkce.

Nechť  $f$  a  $g$  jsou integrovatelné funkce na  $D$ . Buď

$$D' = \{|f| + |g| < \infty\}.$$

Potom  $D' \in \mathcal{S}$ ,  $D' \subset D$  a  $\mu(D \setminus D') = 0$ . Můžeme se tedy omezit na množinu  $D'$ . Jelikož  $|f + g| \leq |f| + |g|$ , podle předchozího kroku a věty 4.8 je  $f + g$  také integrovatelná. Na  $D'$  platí

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

Podle předchozího kroku máme

$$\begin{aligned} \int_D (f + g)^+ \, d\mu + \int_D f^- \, d\mu + \int_D g^- \, d\mu &= \int_D [(f + g)^+ + f^- + g^-] \, d\mu \\ &= \int_D [(f + g)^- + f^+ + g^+] \, d\mu \\ &= \int_D (f + g)^- \, d\mu + \int_D f^+ \, d\mu + \int_D g^+ \, d\mu. \end{aligned}$$

Vhodným přeskupením sčítanců dostaneme

$$\int_D (f + g)^+ \, d\mu - \int_D (f + g)^- \, d\mu = \int_D f^+ \, d\mu - \int_D f^- \, d\mu + \int_D g^+ \, d\mu - \int_D g^- \, d\mu,$$

což je dokazovaný vzorec.

Obecný případ, kdy pravá strana má smysl, ale funkce  $f$ ,  $g$  nemusí být integrovatelné, je otázkou snadné, ale zdlouhavé diskuse, kterou ponecháváme čtenáři.  $\square$

**4.16. Důsledek** (Leviho věta pro řady). *Nechť  $D \in S$  a  $g_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , jsou nezáporné měřitelné funkce na  $D$ . Potom*

$$(13) \quad \int_D \sum_j g_j = \sum_j \int_D g_j$$

*Důkaz.* Stačí použít Leviho větu 4.13 na částečné součty.  $\square$

## 5. LEBESGUEŮV INTEGRÁL NA PŘÍMCE

Integrál podle Lebesgueovy míry  $\lambda$  budeme nazývat (klasickým) *Lebesgueovým integrálem*. V této kapitole dokážeme, že pro každou spojitou funkci  $f$  na intervalu  $[a, b]$  splývá

$$\int_{[a,b]} f d\lambda$$

s Newtonovým integrálem funkce  $f$  přes  $[a, b]$ . Pro klasický Lebesgueův integrál funkce  $f$  přes interval  $(a, b)$  budeme též používat tradiční značení

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Používání klasického Lebesgueova integrálu je mnohem výhodnější než používání Riemannova či Newtonova integrálu, neboť vede k “úplnější” třídě integrovatelných funkcí.

Lze dokázat, že každá Riemannovsky integrovatelná funkce je Lebesgueovsky integrovatelná a Lebesgueův integrál v tomto případě splývá s Riemannovým. Opačná inkluze neplatí, lebesgueovsky integrovatelných funkcí je víc.

Lebesgueův integrál nepokrývá tzv. neabsolutně konvergentní integrály, např.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx,$$

kteří v jednoduchých případech zachycuje Newtonův integrál. Pro hlubší studium neabsolutně konvergentních integrálů se hodí pojem Perronova nebo Kurzweilova integrálu. Neabsolutně konvergentní integrály využívají eukleidovskou strukturu a nemají rozumný protějšek na obecných prostorech s mírou.

**5.1. Definice** (Neurčitý Lebesgueův integrál). *Nechť  $f$  je spojitá funkce na intervalu  $(a_0, b_0)$ . Funkci  $F : (a_0, b_0) \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme *neurčitým Lebesgueovým integrálem* funkce  $f$ , jestliže*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

pro každý interval  $[a, b] \subset (a_0, b_0)$ .

Poznamenejme, že každá spojitá funkce na otevřeném intervalu je měřitelná (protože otevřené množiny jsou borelovské a tudíž měřitelné) a má neurčitý Lebesgueův integrál. Ten se zkonstruuje např. jako

$$F(x) = \begin{cases} \int_c^x f(t) dt, & x \geq c, \\ -\int_x^c f(t) dt, & x < c \end{cases}$$

pro pevně zvolený bod  $c \in (a_0, b_0)$ . Konvergence integrálů plyne z omezenosti integrovatelných funkcí a integračních oborů.

**5.2. Věta** (o neurčitém Lebesgueově integrálu). *Nechť  $f$ ,  $F$  jsou spojitě funkce na intervalu  $(a_0, b_0)$ . Potom  $F$  je primitivní funkce  $k$   $f$ , právě když  $F$  je neurčitý Lebesgueův integrál funkce  $f$ .*

*Důkaz.* Nechť nejprve  $F$  je neurčitý Lebesgueův integrál. Snadno ověříme, že

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x), \quad x \in (a_0, b_0),$$

podobně pro limitu zleva.  $F$  je tedy primitivní funkce. Nechť naopak  $F$  je primitivní funkce, najdeme neurčitý Lebesgueův integrál  $G$ . Podle předchozí části je  $G$  primitivní funkce, tedy  $G$  a  $F$  se liší jen o aditivní konstantu. Jelikož se  $F$  liší o aditivní konstantu od neurčitého Lebesgueova integrálu, je to také neurčitý Lebesgueův integrál.  $\square$

5.3. **Definice** (Newtonův integrál). Nechť  $f$  je funkce na intervalu  $(a, b)$ . Připomeňme, že říkáme, že funkce  $f$  má Newtonův integrál  $I$  přes  $(a, b)$ , jestliže  $f$  má na  $(a, b)$  primitivní funkci  $F$ , ta má limity

$$F(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x), \quad F(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} F(x),$$

tyto limity jsou vlastní (ve smyslu “konečné”) a

$$I = F(b-) - F(a+).$$

Integrál  $I$  značíme  $(N) \int_a^b f(x) dx$ . Když  $f$  má Newtonův integrál, říkáme, že Newtonův integrál  $f$  konverguje, v opačném případě říkáme, že diverguje. Jestliže Newtonův integrál  $f$  konverguje, rozlišujeme *absolutní konvergenci* (tj. též  $(N) \int |f(x)| dx$  konverguje) a *neabsolutní konvergenci* (tj.  $(N) \int |f(x)| dx$  diverguje).

Konvergence integrálu  $|f|$  sama o sobě ještě nezaručuje absolutní konvergenci integrálu  $f$ . Např. funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

nemá primitivní funkci, ale  $(N) \int_{-1}^1 |f(x)| dx$  konverguje.

5.4. **Věta** (vztah mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem). *Nechť  $f$  je nezáporná spojitá funkce na intervalu  $(a, b)$ . Potom  $(N) \int_a^b f(x) dx$  konverguje, právě když konverguje Lebesgueův integrál funkce  $f$ . V tom případě mají oba integrály společnou hodnotu.*

*Důkaz.* (a) Zvolme  $c \in (a, b)$  a najděme intervaly  $[a_j, b_j]$  tak, že  $a < a_j < c < b_j < b$ ,  $a_j \searrow a$ ,  $b_j \nearrow b$ . Nechť  $F$  je neurčitý Lebesgueův integrál funkce  $f$ , což je podle věty 5.2 primitivní funkce k  $f$ . Potom  $F$  je neklesající a tudíž má limity  $F(b-)$ ,  $F(a+)$ . Jelikož (z monotonie)  $F(b-)$  nemůže být  $-\infty$  a  $F(a+)$  nemůže být  $+\infty$ , rozdíl  $F(b-) - F(a+)$  má smysl a platí

$$(14) \quad F(b-) - F(a+) = \lim_k (F(b_k) - F(a_k)).$$

Označme

$$f_k = f \chi_{a_k, b_k}.$$

Funkce  $f$  má Lebesgueův integrál přes  $(a, b)$  (je totiž nezáporná a měřitelná). Podle Leviho věty 4.13 a (14) je

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_k \int_a^b f_k(x) dx = \lim_k \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx = \lim_k (F(b_k) - F(a_k)) = F(b-) - F(a+),$$

takže  $\int_a^b f(x) dx$  konverguje, právě když  $F(b-) - F(a+) < \infty$ , ale to je přesně podmínka pro konvergenci Newtonova integrálu.  $\square$

5.5. **Důsledek** (Diskuse vztahu mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem). *Nechť  $f$  je spojitá funkce na intervalu  $(a, b)$ .*

- (a) *Jestliže konverguje Lebesgueův integrál z  $f$  od  $a$  do  $b$ , konverguje i Newtonův a to absolutně.*
- (b) *Jestliže Newtonův integrál z  $f$  od  $a$  do  $b$  konverguje absolutně, pak konverguje i Lebesgueův.*
- (c) *Pokud konverguje jak Lebesgueův, tak Newtonův integrál z funkce  $f$ , pak oba mají stejnou hodnotu.*
- (d) *Jestliže Newtonův integrál z  $f$  od  $a$  do  $b$  konverguje neabsolutně, pak Lebesgueův integrál nemá smysl.*

Tvrzení (b) a (c) platí i bez předpokladu spojitosti, ale důkaz je složitější. Tvrzení (a) naopak spojitost vyžaduje. Jinak neplatí žádná inkluze mezi třídou všech lebesgueovsky integrovatelných funkcí a třídou všech newtonovsky integrovatelných funkcí.

Důkaz je snadné cvičení, založené na rozkladu  $f = f^+ - f^-$ . Pokud Newtonův integrál  $f$  konverguje absolutně, konvergují i Newtonovy integrály funkcí  $f^+$  a  $f^-$ , protože  $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$  a  $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ .

5.6. **Věta** (Vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem). *Nechť  $f$  je Riemannovsky integrovatelná funkce na  $[a, b]$ . Potom Lebesgueův integrál funkce  $f$  od  $a$  do  $b$  konverguje a je roven integrálu Riemannovu.*

*Důkaz.* Nechť  $R$  je Riemannův integrál funkce  $f$  od  $a$  do  $b$ . Z definice Riemannova integrálu plyne, že existují po částech konstantní funkce  $g_j, h_j$  tak, že

$$g_j \leq f \leq h_j, \quad \int_a^b g_j(x) dx \nearrow R, \quad \int_a^b h_j(x) dx \searrow R.$$

Funkce  $g = \sup_j g_j$  a  $h = \inf_j h_j$  jsou měřitelné podle věty 3.10. Máme

$$R \leq \sup_j \int_a^b g_j \leq \int_a^b g \leq \int_a^b h \leq \inf_j \int_a^b h_j \leq R.$$

Tedy funkce  $h - g$  je nezáporná měřitelná a  $\int(h - g) = \int h - \int g = 0$ . Podle věty 4.8 je  $h = g$  s.v., tedy i  $h = f$  s.v. Tím je dokázána měřitelnost funkce  $f$ . Protože  $f$  je omezená na  $[a, b]$ , je Lebesgueovsky integrovatelná a

$$\int_a^b f = \int_a^b h = R.$$

□

## 6. ZÁMĚNA LIMITY A INTEGRÁLU

V této kapitole pracujeme v prostoru s mírou  $(X, \mathcal{S}, \mu)$ . Symbol pro integraci budeme někdy zjednodušovat (vynecháním “ $d\mu$ ”). Vzorec

$$\int_D \lim_j f_j = \lim_j \int_D f_j$$

platí pro Lebesgueův integrál za značně obecných předpokladů. Na druhé straně je snadné sestavit protipříklady (např. pro klasický Lebesgueův integrál  $f_j(x) = j^2 e^{-jx}$ ,  $D = (0, \infty)$ ), a tudíž je zapotřebí tyto předpoklady hlídat.

V dalším budeme uvažovat prostor s mírou  $(X, \mathcal{S}, \mu)$ .

**6.1. Lemma (Fatouovo).** *Nechť  $D \in \mathcal{S}$  a  $\{f_j\}$  je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na  $D$ . Potom*

$$(15) \quad \int_D \liminf_j f_j \leq \liminf_j \int_D f_j.$$

*Důkaz.* Pro  $k = 1, 2, \dots$  máme

$$\int_D \inf_{j \geq k} f_j \leq \inf_{i \geq k} \int_D f_i.$$

Limitní přechod pro  $k \rightarrow \infty$  s použitím Leviho věty na posloupnost  $\{\inf_{j \geq k} f_j\}_k$  dává (15). □

**6.2. Věta (Lebesgueova, dominated convergence theorem).** *Nechť  $D \in \mathcal{S}$  a  $f, f_j, j = 1, 2, \dots$ , jsou měřitelné funkce na  $D$ . Nechť posloupnost  $\{f_j\}$  konverguje skoro všude k  $f$ . Nechť existuje integrovatelná funkce  $g$  (takzvaná majoranta) tak, že*

$$(16) \quad |f_j(x)| \leq g(x), \quad j = 1, 2, \dots, \quad x \in D.$$

*Potom*

$$(17) \quad \int_D f = \lim_j \int_D f_j.$$

*Důkaz.* Můžeme předpokládat, že uvažované funkce jsou konečné a konvergence nastává všude, jinak bychom z  $D$  odstranili množinu míry nula. Použijeme aditivitu integrálu a Fatouovo lemma na funkce  $g + f_j, g - f_j$ . Dostaneme

$$\int_D f \leq \liminf_j \int_D f_j \leq \limsup_j \int_D f_j \leq \int_D f,$$

což je (17). □

**6.3. Důsledek (Lebesgueova věta pro řady).** *Nechť  $D \in \mathcal{S}$  a  $g_j, j = 1, 2, \dots$ , jsou měřitelné funkce na  $D$ . Nechť řada  $\sum_j g_j$  konverguje skoro všude. Nechť existuje integrovatelná funkce  $g$  (takzvaná majoranta) tak, že*

$$(18) \quad \left| \sum_{j=1}^k g_j(x) \right| \leq g(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad x \in D.$$

*Potom*

$$(19) \quad \int_D \sum_j g_j d\mu = \sum_j \int_D g_j d\mu.$$

*Důkaz.* Stačí použít aditivitu integrálu a Lebesgueovu větu na částečné součty. □



## 7. ZÁMĚNA ŘADY A INTEGRÁLU

Některé věty o záměně řady a integrálu jsme již dostali jako důsledky vět o záměně limity a integrálu. Podle [důsledku 4.16](#), u řad s nezápornými členy záměna nečiní potíže. Obecný případ je těžší, neboť předpoklad [\(18\) důsledku 6.3](#) se těžko ověřuje. Málokdy totiž umíme spočítat částečné součty řady. Výjimku tvoří geometrické řady, ale i tam jsou jednodušší cesty k cíli. Následující věta obsahuje praktická kritéria pro záměnu řady a integrálu.

**7.1. Věta** (Záměna řady a integrálu). *Nechť  $D \in \mathcal{S}$  a  $g_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  jsou měřitelné funkce na  $D$ . Předpokládejme, že je splněna aspoň jedna z následujících podmínek:*

- (a)  $g_j = aq^j$ , kde  $a, q$  jsou měřitelné funkce,  $|q| < 1$ , a  $\int_D \frac{a}{1-q} d\mu$  konverguje (geometrická řada),
- (b)  $\sum_j \int_D |g_j| d\mu < \infty$ ,
- (c)  $\int_D \sum_j |g_j| d\mu < \infty$ ,
- (d)  $g_j = (-1)^j h_j$ ,  $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq \dots \geq 0$ ,  $h_j \rightarrow 0$ ,  $h_1$  je integrovatelná (alternující řada).

Potom řada  $\sum_j g_j$  konverguje skoro všude a platí vzorec

$$\int_D \sum_j g_j d\mu = \sum_j \int_D g_j d\mu,$$

*Důkaz.* (a) odvodíme z formule pro částečné součty geometrické řady. Záměnu lze potom provést podle [důsledku 6.3](#), majoranta  $\frac{2a}{1-q}$ . Použijeme-li Leviho větu ([důsledek 4.16](#)) na  $|g_j|$ , zjistíme, že podmínky (b) a (c) jsou ekvivalentní. Předpokládejme tedy (b) nebo (c). Funkce  $g := \sum_j |g_j|$  je integrovatelná, a tudíž podle [věty 4.8](#) konečná skoro všude. V bodech  $x$ , kde je  $g(x)$  konečná, konverguje řada  $\sum_j g_j(x)$ , neboť konverguje absolutně. Můžeme tedy použít [důsledek 6.3](#) s majorantou  $g$ . V případě (d) řada  $\sum_j g_j$  konverguje podle Leibnizova kritéria a částečné součty mají majorantu  $h_1$ , tudíž můžeme provést záměnu podle [důsledku 6.3](#). □

**7.2. Příklad.** Máme

$$\int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x^2} dx = \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \ln \frac{1}{x} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2n} \ln \frac{1}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Záměnu výše můžeme ověřit z [důsledku 4.16](#), ale na podobnou úlohu

$$\int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \ln \frac{1}{x} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{2n} \ln \frac{1}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

musíme použít některé z kritérií [věty 7.1](#).

**7.3. Varování.** Všimněte si dobře pořadí operátorů  $\sum, \int, |\dots|$  v podmínkách (b), (c) [věty 7.1](#)! Jen velmi slabý student se může radovat, když ověří třeba

$$\int_D \left| \sum_j g_j d\mu \right| < \infty.$$

## 8. INTEGRÁL ZÁVISLÝ NA PARAMETRU

V této kapitole uvažujeme prostor s mírou  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  a  $D \in \mathcal{S}$ . Cílem je studovat chování funkce

$$F(t) := \int_D f(t, x) d\mu(x),$$

kde  $t$  je další proměnná (“parametr”). Je-li  $f$  funkce dvou proměnných  $t$  a  $x$ , zavedeme funkce  $f(\cdot, x)$  proměnné  $t$  a  $f(t, \cdot)$  proměnné  $x$  předpisem

$$\begin{aligned} f(t, \cdot) &: x \mapsto f(t, x), \\ f(\cdot, x) &: t \mapsto f(t, x). \end{aligned}$$

**8.1. Věta** (Limita integrálu závislého na parametru). *Nechť  $P$  je metrický prostor a  $A \subset P$ . Buď  $a \in \bar{A} \setminus A$ . Nechť funkce  $f : A \times D \rightarrow \mathbb{R}$  má následující vlastnosti:*

- (Li-1) Pro skoro všechna  $x \in D$  existuje  $\lim_{t \rightarrow a, t \in A} f(t, x)$ .
- (Li-2) pro všechna  $t \in A$  je funkce  $f(t, \cdot)$  měřitelná,
- (Li-3) existuje integrovatelná funkce  $g$  na  $D$  tak, že pro všechna  $t \in A$  a  $x \in D$  je  $|f(t, x)| \leq g(x)$ .

Potom

$$(20) \quad \int_D \lim_{t \rightarrow a, t \in A} f(t, x) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow a, t \in A} \int_D f(t, x) d\mu(x).$$

speciálně výrazy vyskytující se v (20) mají smysl.

*Důkaz.* Připomeňme, že v metrických prostorech lze použít ekvivalentní tzv. Heineovu definici limity: K důkazu tvrzení

$$\lim_{t \rightarrow a} \int_D f(t, \cdot) d\mu = \int_D \lim_{t \rightarrow a} f(t, \cdot) d\mu$$

stačí ověřit, že pro každou posloupnost  $t_j \rightarrow a$  bodů množiny  $A$  platí

$$\lim_j \int_D f(t_j, \cdot) d\mu = \int_D \lim_j f(t_j, \cdot) d\mu.$$

To je však zřejmé z Lebesgueovy věty 6.2. Poznamenejme, že aspoň jedna taková posloupnost  $\{t_j\}$  existuje, a tudíž funkce

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t, \cdot) = \lim_j f(t_j, \cdot)$$

je měřitelná. □

**8.2. Poznámka.** Tvrzení věty 8.1 o záměně limity a integrálu platí též v situaci, kdy např.  $A = (0, +\infty)$  a  $a = +\infty$ . Substituce  $t \mapsto 1/t$  převádí problém na limitu v nule zprava, která už zřejmě spadá do kontextu metrických prostorů.

**8.3. Věta** (Spojitost integrálu závislého na parametru). *Nechť  $P$  je metrický prostor. Bud'  $a \in P$  a  $U$  okolí bodu  $a$  v  $P$ . Nechť funkce  $f : U \times D \rightarrow \mathbb{R}$  má následující vlastnosti:*

(Sp-1) *Pro skoro všechna  $x \in D$  je funkce  $f(\cdot, x)$  spojitá v  $a$ ,*

(Sp-2) *pro všechna  $t \in U$  je funkce  $f(t, \cdot)$  měřitelná,*

(Sp-3) *existuje integrovatelná funkce  $g$  na  $D$  tak, že pro všechna  $t \in U$  a  $x \in D$  je  $|f(t, x)| \leq g(x)$ .*

Potom pro všechna  $t \in U$  je  $f(t, \cdot)$  integrovatelná a funkce

$$F : t \mapsto \int_D f(t, x) d\mu(x)$$

je spojitá v bodě  $a$ .

*Důkaz.* Věta je zřejmým důsledkem věty 8.1, kterou aplikujeme na  $A = U \setminus \{a\}$  □

**8.4. Věta** (Derivace integrálu závislého na parametru). *Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  je prostor s mírou a  $I \subset \mathbb{R}$  je otevřený interval. Nechť funkce  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$  má následující vlastnosti:*

(De-1) *Pro skoro všechna  $x \in D$  je funkce  $f(\cdot, x)$  diferencovatelná na  $I$ ,*

(De-2) *pro všechna  $t \in I$  je funkce  $f(t, \cdot)$  měřitelná,*

(De-3) *existuje integrovatelná funkce  $g$  na  $D$  tak, že pro všechna  $t \in I$  a  $x \in D$  je*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x),$$

(De-4) *existuje  $t_0 \in I$  tak, že  $f(t_0, \cdot)$  je integrovatelná na  $D$ .*

Potom pro všechna  $t \in I$  je  $f(t, \cdot)$  integrovatelná na  $D$ , funkce

$$F : t \mapsto \int_D f(t, x) d\mu(x)$$

je diferencovatelná na  $I$  a platí vzorec

$$F'(t) = \int_D \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x).$$

*Důkaz.* Nechť  $a, b \in I$ ,  $b \neq a$ . Podle věty o střední hodnotě pro skoro každé  $x \in D$  existuje  $\xi$  mezi  $a$  a  $b$  tak, že

$$\left| \frac{f(b, x) - f(a, x)}{b - a} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\xi, x) \right| \leq g(x).$$

Odtud plyne, že funkce

$$x \mapsto \frac{f(b, x) - f(a, x)}{b - a}$$

je integrovatelná, tudíž, volíme-li  $a = t_0$ , i funkce  $f(b, \cdot)$  je integrovatelná. Zvolme znovu  $a \in I$ . Uvažujme funkci

$$h(t, x) = \begin{cases} \frac{f(t, x) - f(a, x)}{t - a}, & t \neq a, \\ \frac{\partial f}{\partial t}(a, x), & t = a. \end{cases}$$

Z předpokladů a výše dokázaného je jasné, že funkce  $h(t, x)$  splňuje předpoklady [věty 8.3](#) pro spojitost v bodě  $a$  (s majorantou  $g$ ), tedy

$$\begin{aligned} F'(a) &= \lim_{t \rightarrow a} \frac{\int_D f(t, x) d\mu(x) - \int_D f(a, x) d\mu(x)}{t - a} \\ &= \lim_{t \rightarrow a} \int_D \frac{f(t, x) - f(a, x)}{t - a} d\mu(x) = \int_D \frac{\partial f}{\partial t}(a, x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána. □

**8.5. Příklad.** Uvažujme funkci

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} e^{-tx} dx.$$

Potom  $F$  je spojitá na  $[0, \infty)$  (majoranta  $x^{-2}(1 - \cos x)$ ) a pro  $t \in (0, \infty)$  je

$$\begin{aligned} F'(t) &= - \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x} e^{-tx} dx, \\ F''(t) &= \int_0^\infty (1 - \cos x) e^{-tx} dx. \end{aligned}$$

Zde již nemůžeme najít majorantu najednou pro  $t \in (0, \infty)$ , poslouží

$$\begin{aligned} x &\mapsto \frac{1 - \cos x}{x} e^{-ax}, \\ x &\mapsto (1 - \cos x) e^{-ax} \end{aligned}$$

pro  $t \in (a, \infty)$ . Jelikož pro  $p > 0$ ,  $q \in \mathbb{R}$  je

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-px} \cos qx dx &= \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-px - iqx} dx = - \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-px - iqx}}{p + iq} \right]_{x=0}^\infty = \operatorname{Re} \frac{1}{p + iq} \\ &= \frac{p}{p^2 + q^2}, \end{aligned}$$

máme

$$F''(t) = \frac{t}{t^2} - \frac{t}{t^2 + 1} = \frac{1}{t(t^2 + 1)}.$$

Jelikož

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} F'(t) = 0,$$

snadno ověříme

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right), \quad t \in (0, \infty), \\ F(t) &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} t \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right), \quad t \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Speciálně dostáváme

$$(21) \quad \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Buď

$$G(a) = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx.$$

Potom integrováním per partes dostaneme

$$G(a) = \frac{1 - \cos a}{a} + \int_0^a \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$

Limitní přechod s využitím (21) dává

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} G(a) = \frac{\pi}{2}.$$

8.6. **Příklad.** Nechtě

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t}{\ln x} dx, \quad t > -1.$$

Mechanickým derivováním za integračním znaméním (není splněn předpoklad (D4)) bychom dostali

$$F'(t) = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{1+t},$$

ačkoli  $F \equiv -\infty$ . Porovnejte s výpočtem derivace pro

$$G(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx.$$

8.7. **Příklad.** Nechtě

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2}.$$

Mechanickým derivováním za integračním znaméním (není splněn předpoklad (D3)) bychom dostali

$$F'(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin tx}{1+x^2},$$

kterýžto integrál konverguje pouze v nule. Nula je ovšem jediný bod, kde  $F$  derivaci nemá. Zkuste dokázat existenci  $F'$  na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ! (Per partes vede na integrál, který je vstřícnější k derivování za integračním znaméním.)

8.8. **Definice** (Zavedení Gamma a Beta funkce). Funkci *Gamma* definujeme na intervalu  $(0, \infty)$  předpisem

$$(22) \quad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Funkci *Beta* dvou proměnných  $p > 0$ ,  $q > 0$  definujeme předpisem

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

Ověřte samostatně konvergenci integrálů!

8.9. **Pozorování** (Rekurentní formule). Integrovaním per partes zjistíme pro  $s > 0$

$$(23) \quad \Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} x^s e^{-x} dx = \int_0^{\infty} s x^{s-1} e^{-x} dx = s \Gamma(s).$$

Obdobně pro  $p, q > 0$

$$(24) \quad pB(p, q+1) = \int_0^1 p x^{p-1} (1-x)^q dx = \int_0^1 x^p q (1-x)^{q-1} dx = qB(p+1, q).$$

8.10. **Pozorování** (Derivování funkce  $\Gamma$ ). Formálním derivováním za integračním znaméním dostaneme rekurentně

$$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} (\ln x)^k e^{-x} dx.$$

Vzorec lze odůvodnit použitím věty o derivování podle parametru pro  $s \in (p, q)$ , kde  $0 < p < q < \infty$ , s majorantou

$$g(x) = (x^{p-1} + x^{q-1}) |\ln x|^k e^{-x}.$$

Funkce Gamma je tedy nekonečně diferencovatelná, tím spíš spojitá na  $(0, \infty)$ .

8.11. **Pozorování** (Průběh funkce Gamma). Zřejmě  $\Gamma(s) > 0$  pro  $s > 0$ . Druhá derivace je zřejmě kladná, tedy Gamma je striktně konvexní na  $(0, \infty)$ . Z konvexity je zjevné, že  $\lim_{s \rightarrow \infty} \Gamma(s)$  existuje. Jelikož  $n! \rightarrow \infty$ , je

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Gamma(s) = \infty.$$

Ze vzorce  $\Gamma(s) = \Gamma(s+1)/s$  dostaneme

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} \Gamma(s) = \infty.$$

## 9. VNĚJŠÍ MÍRA

V této kapitole uvedeme obecné schéma používané ke konstrukci měr. Motivem jsou aplikace na konstrukce měr v analýze, zvláště Lebesgueovy míry, a aplikace v teorii pravděpodobnosti.

Konstrukce popsaná v [definici 9.2](#) je stejná, jakou jsme již použili v speciálním případě na konstrukci vnější Lebesgueovy míry v [definici 2.1](#).

**9.1. Definice** (Vnější míra). *Vnější mírou* na množině  $X$  rozumíme množinovou funkci  $\gamma : 2^X \rightarrow [0, \infty]$  (tedy definovanou na všech podmnožinách  $X$ ) splňující následující požadavky:

$$(VM-1) \quad \gamma(\emptyset) = 0,$$

$$(VM-2) \quad A \subset B \implies \gamma(A) \leq \gamma(B),$$

$$(VM-3) \quad \gamma\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(A_j) \quad (\sigma\text{-subadditivita}).$$

S vnějšími měrami se budeme setkávat především jako s mezistupněm při konstrukci míry.

**9.2. Definice** (Z výchozí množinové funkce k vnější míře). Nechť  $\mathcal{G} \subset 2^X$  a  $\tau : \mathcal{G} \rightarrow [0, \infty]$  je množinová funkce na  $X$  splňující

$$(25) \quad \emptyset \in \mathcal{G}, \quad \tau(\emptyset) = 0.$$

Podmínce (25) budeme říkat *počáteční podmínka*. Pro  $A \subset X$  položíme

$$(26) \quad \tau^*(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \tau(G_j) : G_j \in \mathcal{G}, \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \supset A\right\}$$

(uvědomte si, že  $\inf \emptyset = +\infty$ ). Každý součet

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tau(G_j),$$

kde

$$G_j \in \mathcal{G}, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \supset A,$$

nazveme *horním součtem* k  $\tau^*(A)$ . Užitečnost konstrukce dokládá následující věta.

**9.3. Věta.** *Nechť  $\mathcal{G}$ ,  $\tau$  a  $\tau^*$  jsou jako v [definici 9.2](#). Potom  $\tau^*$  je vnější míra.*

*Důkaz.* (VM-1) a (VM-2) jsou zřejmé. (VM-3): Chceme-li dokázat

$$\tau^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j),$$

zřejmě se stačí omezit na případ, kdy na pravé straně máme konečné číslo. Volme  $\varepsilon > 0$  a nalezneme  $G_j^i \in \mathcal{G}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$ , tak, aby

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_j^i \supset A_j \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \tau(G_j^i) < \tau^*(A_j) + 2^{-j}\varepsilon.$$

Potom

$$\bigcup_{j,i=1}^{\infty} G_j^i \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{a} \quad \sum_{j,i=1}^{\infty} \tau(G_j^i) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j) + \varepsilon.$$

Tedy

$$\tau^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j) + \varepsilon.$$

□

**9.4. Definice** ( $\gamma$ -měřitelné množiny). Nechť  $\gamma$  je abstraktní vnější míra na  $X$ . Množinu  $M \subset X$  nazveme  $\gamma$ -*měřitelnou* (podle Carathéodoryho), jestliže pro každou "testovací" množinu  $T \subset X$  platí

$$\gamma(T) = \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M)$$

System všech (carathéodoryovsky) měřitelných množin značíme  $\mathfrak{M}(\gamma)$  a množinovou funkci  $\gamma|_{\mathfrak{M}(\gamma)}$  značíme  $\gamma^\circ$ .

K důkazu  $\gamma$ -měřitelnosti množiny  $M$  stačí ověřit pouze nerovnost

$$\gamma(T) \geq \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M),$$

a to ještě samozřejmě jen v případech, kdy  $\gamma(T) < \infty$ .

**9.5. Věta (Carathéodoryova).** *Nechť  $\gamma$  je abstraktní vnější míra na  $X$ . Pak systém  $\mathfrak{M}(\gamma)$  tvoří  $\sigma$ -algebru a  $\gamma^\circ$  je úplná míra.*

*Důkaz.* Ihned je vidět, že  $\emptyset, X \in \mathfrak{M}(\gamma)$ , a jestliže  $M \in \mathfrak{M}(\gamma)$ , potom i  $X \setminus M \in \mathfrak{M}(\gamma)$ . Budte  $A, B \in \mathfrak{M}(\gamma)$ , chceme ukázat, že i  $A \cup B \in \mathfrak{M}(\gamma)$ . Volme tedy testovací množinu  $T \subset X$ . Použijeme postupně  $T$  pro testování měřitelnosti  $A$  a  $T \cap A, T \setminus A$  pro testování měřitelnosti  $B$ . Dostaneme (symbolem  $M^c$  budeme značit  $X \setminus M$ )

$$\begin{aligned} \gamma(T) &= \gamma(T \cap A) + \gamma(T \cap A^c), \\ \gamma(T \cap A) &= \gamma(T \cap A \cap B) + \gamma(T \cap A \cap B^c), \\ \gamma(T \cap A^c) &= \gamma(T \cap A^c \cap B) + \gamma(T \cap A^c \cap B^c), \end{aligned}$$

takže (použijeme také subaditivitu  $\gamma$ )

$$\begin{aligned} \gamma(T) &= \gamma(T \cap A \cap B) + \gamma(T \cap A \cap B^c) + \gamma(T \cap A^c \cap B) + \gamma(T \cap A^c \cap B^c) \\ &\geq \gamma(T \cap (A \cup B)) + \gamma(T \cap (A \cup B)^c). \end{aligned}$$

Dokázali jsme zatím, že systém všech  $\gamma$ -měřitelných množin je algebra. Mějme nyní posloupnost  $\{E_j\}$  po dvou disjunktních  $\gamma$ -měřitelných množin. Indukcí dostaneme z předchozího, že pro každé  $m = 1, 2, \dots$  a pro každou testovací množinu  $T \subset X$  je

$$(27) \quad \gamma(T) = \sum_{j=1}^m \gamma(T \cap E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^m E_j)$$

Podrobněji: pro  $m = 1$  je to měřitelnost  $E_1$ . Platí-li (27) pro  $m$ , použijeme testovací množinu  $T \setminus \bigcup_{j=1}^m E_j$  na měřitelnost  $E_{m+1}$  a dostaneme

$$(28) \quad \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^m E_j) = \gamma(T \cap E_{m+1}) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{m+1} E_j).$$

Sečtením (27) a (28) dostaneme (27) pro  $m + 1$ . Z (27) máme hned

$$\gamma(T) \geq \sum_{j=1}^m \gamma(T \cap E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$$

a odtud limitním přechodem pro  $m \rightarrow \infty$

$$(29) \quad \gamma(T) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(T \cap E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j).$$

Nyní dokážeme, že pro  $A_j \in \mathfrak{M}(\gamma)$  je  $\bigcup_j A_j \in \mathfrak{M}(\gamma)$ . Vyrobité po dvou disjunktní  $E_j$  z  $A_j$  podle věty 1.15. Potom  $E_j \in \mathfrak{M}(\gamma)$  podle první části důkazu. Použijeme  $\sigma$ -subaditivitu  $\gamma$  na (29) a dostaneme

$$\begin{aligned} \gamma(T) &= \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(T \cap E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \\ &\geq \gamma(T \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j), \end{aligned}$$

což dává  $\gamma$ -měřitelnost množiny

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Zbývá dokázat, že  $\gamma^\circ$  je míra. Víme, že  $\gamma(\emptyset) = 0$ . Buď  $\{E_j\}$  posloupnost po dvou disjunktních  $\gamma$ -měřitelných množin. Potom použijeme (29) na

$$T = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

(pro  $\geq$ ) a  $\sigma$ -subaditivitu  $\gamma$  (pro  $\leq$ ) a dostaneme

$$\gamma\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(E_j).$$

Úplnost míry  $\gamma^\circ$  je snadná. □

**9.6. Definice** (Základní konstrukce). Základní schéma konstrukce míry probíhá ve dvou krocích. Vyjdeme z nezáporné množinové funkce  $(\mathcal{G}, \tau)$ , od které nechceme téměř nic – předpokládáme jen počáteční podmínku (25). V prvním kroku vytvoříme podle definice 9.2 a věty 9.3 vnější míru  $\tau^*$ , v druhém kroku pak podle definice 9.4 a věty 9.5 (úplnou) míru  $(\mathfrak{M}(\tau^*), \tau^{*\circ})$ . Pro výslednou míru zavedeme zkrácené značení

$$(30) \quad (\mathcal{G}', \tau') := (\mathfrak{M}(\tau^*), \tau^{*\circ}).$$

Konstrukci obvykle považujeme za úspěšnou, jestliže  $(\mathcal{G}', \tau')$  je rozšířením  $(\mathcal{G}, \tau)$ . Tento případ nastává při konstrukci Lebesgue-Stieltjesovy míry, což záhy uvidíme.

## 10. FUNKCE INTERVALU

**10.1. Definice** (Aditivní funkce intervalu). Symbolem  $\vec{\mathcal{I}}_1$  budeme značit systém všech zprava polouzavřených omezených intervalů v  $\mathbb{R}$ , tedy intervalů tvaru  $(a, b]$ ,  $-\infty < a \leq b < +\infty$ . Interval  $(a, a]$  je samozřejmě prázdná množina. Řekneme, že  $\mathbf{m} : \vec{\mathcal{I}}_1 \rightarrow \mathbb{R}$  je *aditivní funkce intervalu* (zkratka AFI), jestliže pro každou uspořádanou trojici reálných čísel  $(a, b, c)$  platí

$$a \leq b \leq c \implies \mathbf{m}((a, c]) = \mathbf{m}((a, b]) + \mathbf{m}((b, c]).$$

Příkladem je množinová funkce *délka intervalu* definovaná předpisem

$$\ell((a, b]) = b - a.$$

Vlastně každá aditivní funkce intervalu vzniká z nějaké funkce  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  předpisem

$$(31) \quad \mathbf{m}((a, b]) = F(b) - F(a), \quad a \geq b.$$

Tato funkce  $F$  je určena jednoznačně až na aditivní konstantu. Naopak, předpis (31) definuje AFI pro každou  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Kdybychom pracovali na všech intervalech, docházelo by k tomu, že intervalům s těmitěž koncovými body by byly přiřazovány různé hodnoty, reprezentace (31) by nefungovala a situace by byla nepřehledná. Proto je výhodné vybrat jen jeden typ intervalů a pracovat jen s ním. Výhodou polouzavřených intervalů je jejich uzavřenost na množinové operace průnik, sjednocení a rozdíl: pokud je výsledkem operace interval, je opět stejného typu.

Řekneme, že AFI  $\mathbf{m}$  je

*nezáporná*, jestliže  $a \leq b \implies \mathbf{m}((a, b]) \geq 0$ ,

*zprava spojitá*, jestliže funkce  $b \mapsto \mathbf{m}((a, b])$  je zprava spojitá na  $[a, \infty)$  (potom též  $a \mapsto \mathbf{m}((a, b])$  je zprava spojitá na  $[-\infty, b)$ ).

**10.2. Poznámka.** Je věcí úmluvy, že uvažujeme intervaly uzavřené zprava, stejně tak bychom se mohli dohodnout na preferenci intervalů uzavřených zleva.

Při naší úmluvě je spojitost zprava přirozená vlastnost: jestliže  $b_j \searrow b$ , potom  $(a, b] = \bigcap_j (a, b_j]$  a proto je přirozené požadovat  $\mathbf{m}((a, b]) = \lim \mathbf{m}((a, b_j])$ . Oproti tomu, když  $b_j \nearrow b$ , pak  $(a, b) = \bigcup_j (a, b_j) \neq (a, b]$ .

**10.3. Definice** (Aditivní funkce vícerozměrného intervalu). Označme  $\vec{\mathcal{H}}_n$  systém všech poloprostorů tvaru  $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \leq c\}$  nebo  $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i > c\}$ , kde  $i \in \{1, \dots, n\}$  a  $c \in \mathbb{R}$ . Všimněme si, že každý zprava polouzavřený interval se dá napsat jako průnik  $2n$  poloprostorů z  $\vec{\mathcal{H}}_n$ . Řekneme, že  $\mathbf{m} : \vec{\mathcal{I}}_n \rightarrow \mathbb{R}$  je *aditivní funkce ( $n$ -rozměrného) intervalu*, jestliže pro každý interval  $Q \in \vec{\mathcal{I}}_n$  a každý poloprostor  $H \in \vec{\mathcal{H}}_n$  platí

$$\mathbf{m}(Q) = \mathbf{m}(Q \cap H) + \mathbf{m}(Q \setminus H).$$

Řekneme, že  $\mathbf{m}$  je *zprava spojitá*, jestliže pro každý interval  $Q \in \vec{\mathcal{I}}_n$  a každou (monotonní) posloupnost  $\{Q_j\}$  intervalů z  $\vec{\mathcal{I}}_n$  platí

$$(32) \quad Q_j \searrow Q \text{ (nebo } Q_j \nearrow Q) \implies \mathbf{m}(Q_j) \rightarrow \mathbf{m}(Q).$$



Podmínka (32) je to, co je přirozené a pro nás důležité. To, že tato podmínka se jeví jako polospojité zprava je dáno tím, že mezi intervaly různých typů jsme vybrali jako “reprezentující” intervaly zprava polouzavřené.

V dalším textu budeme pracovat jenom s AFI, které jsou nezáporné a zprava spojité. Pro stručnost jim budeme říkat *LS funkce intervalu*, neboť to budou právě ty funkce intervalu, z nichž lze rozšířením dostat tzv. Lebesgue-Stieltjesovy (LS) míry.

10.4. **Poznámka.** Nezáporná funkce  $\mathbf{m} : \vec{\mathcal{I}}_n \rightarrow \mathbb{R}$  je aditivní a zprava spojitá, právě když funkce  $n$  intervalových proměnných

$$(I_1, \dots, I_n) \mapsto \mathbf{m}(I_1 \times \dots \times I_n)$$

na  $(\vec{\mathcal{I}})^n$  je aditivní a zprava spojitá v každé proměnné.

Aditivní nezáporná funkce  $\mathbf{m} : \vec{\mathcal{I}}_n \rightarrow \mathbb{R}$  je zprava spojitá, právě když pro každé  $i \in \{1, \dots, n\}$  a  $Q \in \vec{\mathcal{I}}_n$  je funkce

$$t \mapsto \mathbf{m}(Q \cap \{x : x_i \leq t\})$$

zprava spojitá na  $\mathbb{R}$ .

10.5. **Cvičení.** Dokažte tvrzení z poznámky 10.4. Byla by pravdivá i bez předpokladu nezápornosti?

10.6. **Příklady.** 1. Elementární objem z definice 1.4 se stane LS funkcí intervalu, když jej zúžíme na  $\vec{\mathcal{I}}_n$ . Tato změna v přístupu k zavedení Lebesgueovy míry hraje jen nepatrnou roli. Proto v dalším budeme rozšiřovat LS funkce intervalu definované na  $\vec{\mathcal{I}}_n$  a tento postup zahrne i vytvoření Lebesgueovy míry.

2. Diracova funkce  $\mathbf{d}$  je na  $\vec{\mathcal{I}}_n$  definována předpisem

$$\mathbf{d}(Q) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ 0, & x \notin Q. \end{cases}$$

Je to LS funkce intervalu.

3. Mějme funkci  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a uvažujme funkci intervalu

$$\mathbf{m} : (a, b] \mapsto F(b) - F(a).$$

Potom  $\mathbf{m}$  je aditivní;  $\mathbf{m}$  je zprava spojitá, právě když  $F$  je zprava spojitá;  $\mathbf{m}$  je nezáporná, právě když  $F$  je neklesající.

10.7. **Nejbližší cíle.** Mějme danu LS funkci intervalu  $\mathbf{m}$  na  $\mathbb{R}^n$ . Dovedeme  $\mathbf{m}$  přirozeně rozšířit na širší třídu množin? Jakou? Jaké vlastnosti má rozšíření? Je jednoznačně určeno?

Do této třídy otázek patří: jak definovat obsah kruhu, známe-li pouze vzorec pro obsah obdélníku? Jak určit pravděpodobnost jevu, že  $X_1 + X_2 > 0$ , jsou-li  $X_1$  a  $X_2$  náhodné veličiny a známe jejich rozložení na intervalech:  $P((X_1 \in Q_1) \wedge (X_2 \in Q_2))$ ?

## 11. ROZŠÍŘENÍ ADITIVNÍ FUNKCE INTERVALU; LEBESGUE-STIELTJESOVA MÍRA

11.1. **Definice** (Lebesgueova a Lebesgue-Stieltjesova míra). Nechť  $\mathbf{m}$  je LS funkce intervalu na  $\mathbb{R}^n$ . Na  $\mathbf{m}$  budeme aplikovat základní konstrukci z definice 9.6. V prvním kroku definujeme vnější míru  $\mathbf{m}^*$  jako v (26). Vnější míra  $\mathbf{m}^* : A \mapsto \mathbf{m}^*(A)$ , definovaná na potenční množině  $2^{\mathbb{R}^n}$ , se nazývá (Lebesgue-Stieltjesova) *vnější míra generovaná  $\mathbf{m}$* . Speciálně, vnější míra  $\ell^* = \ell_n^*$  generovaná AFI  $\ell = \ell_n$  (viz definice 1.4 a příklad 10.6–1) je *Lebesgueova vnější míra*. Rozmyslete si, že infimum v (26) zůstává stejné bez ohledu na to, zda  $\ell$  definujeme na  $\mathcal{I}_n$  nebo na  $\vec{\mathcal{I}}_n$ . Je to tím, že pro každý interval  $P \in \mathcal{I}_n$  je

$$\ell(P) = \inf\{\ell(Q) : Q \in \vec{\mathcal{I}}_n, Q \supset P\}.$$

Aplikujeme-li základní konstrukci na  $(\vec{\mathcal{I}}_n, \mathbf{m})$ , výsledkem bude míra  $((\vec{\mathcal{I}}_n)', \mathbf{m}')$ , která se nazývá *Lebesgue-Stieltjesova míra generovaná  $\mathbf{m}$*  (krátce: LS míra). Speciálně, pro  $\mathbf{m} = \ell$  dostáváme Lebesgueovu míru  $(\mathfrak{M}, \lambda)$ . Ve větě 11.7 dokážeme, že  $((\vec{\mathcal{I}}_n)', \mathbf{m}')$  je rozšířením množinové funkce  $\mathbf{m}$ .

11.2. **Věta.** Nechť  $\mathbf{m}$  je LS funkce intervalu na  $\mathbb{R}^n$ . Nechť  $Q \in \vec{\mathcal{I}}_n$ . Potom  $\mathbf{m}^*(Q) = \mathbf{m}(Q)$ .

*Důkaz.* Zřejmě  $\mathbf{m}(Q)$  je horní součet k  $\mathbf{m}^*(Q)$  a tudíž  $\mathbf{m}^*(Q) \leq \mathbf{m}(Q)$ . Obrácenou nerovnost dokážeme sporem. Mějme  $Q, Q_j \in \vec{\mathcal{I}}_n, j = 1, 2, \dots$ , a předpokládejme, že

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

ale

$$(33) \quad \mathbf{m}(Q) > \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{m}(Q_j).$$

Intervaly  $Q, Q_j$  si ještě trochu upravíme pomocí spojitosti zprava ( $Q$  trochu zmenšíme a  $Q_j$  trochu zvětšíme) tak, že (33) platí stále a co se týče inkluze, dokonce

$$\bar{Q} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^{\circ}.$$

Položme  $I_1 = Q$ . Zřejmě

$$\mathbf{m}(I_1) > \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{m}(I_1 \cap Q_j).$$

Pomocí vhodné nadroviny  $H \in \vec{\mathcal{H}}_n$  rozdělíme  $I_1$  na  $I_1 \cap H$  a  $I_1 \setminus H$ . Potom z aditivity

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(I_1) &= \mathbf{m}(I_1 \cap H) + \mathbf{m}(I_1 \setminus H), \\ \mathbf{m}(I_1 \cap Q_j) &= \mathbf{m}(I_1 \cap Q_j \cap H) + \mathbf{m}(I_1 \cap Q_j \setminus H), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

takže najdeme  $I_2 \in \{I_1 \cap H, I_1 \setminus H\}$  tak, že

$$\mathbf{m}(I_2) > \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{m}(I_2 \cap Q_j).$$

Pokračujeme indukcí a postupným dělením nacházíme “stále menší” intervaly  $I_k$  tak, že  $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ , diam  $I_k \rightarrow 0$  a

$$\mathbf{m}(I_k) > \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{m}(I_k \cap Q_j), \quad k = 1, 2, \dots$$

Podle Cantorovy věty existuje bod  $x \in \bigcap_k \bar{I}_k$ . Potom  $x \in \bar{Q}$  a tudíž existuje  $j$  tak, že  $x \in Q_j^{\circ}$ . Pak ovšem pro dost velká  $k$  je  $I_k \subset Q_j$ , a proto

$$\mathbf{m}(I_k) = \mathbf{m}(I_k \cap Q_j),$$

což je spor. Dostáváme tedy

$$\mathbf{m}(Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{m}(Q_j)$$

pro každý horní součet k  $\mathbf{m}^*(Q)$ , a tedy

$$\mathbf{m}(Q) \leq \mathbf{m}^*(Q).$$

□

**11.3. Lemma.** Necht  $\mathbf{m}$  je LS funkce intervalu na  $\mathbb{R}^n$  a  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Potom  $E$  je  $\mathbf{m}^*$ -měřitelná, právě když

$$(34) \quad \mathbf{m}(Q) = \mathbf{m}^*(Q \cap E) + \mathbf{m}^*(Q \setminus E), \quad Q \in \vec{\mathcal{I}}_n.$$

*Důkaz.* Podle věty 11.2 je  $\mathbf{m}(Q) = \mathbf{m}^*(Q)$ , tedy  $\mathbf{m}^*$ -měřitelnost implikuje (34). Co se týče opačné implikace, zvolme tedy  $T \subset \mathbb{R}^n$  a uvažujme horní součet  $\sum_j \mathbf{m}(Q_j)$  pro  $\mathbf{m}^*(T)$ . Jelikož  $\mathbf{m}^*$  splňuje axiomy abstraktní vnější míry a množina  $E$  splňuje (34), máme

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^*(T \cap E) + \mathbf{m}^*(T \setminus E) &\leq \sum_j \mathbf{m}^*(T \cap E \cap Q_j) + \sum_j \mathbf{m}^*(T \cap E^c \cap Q_j) \\ &\leq \sum_j \mathbf{m}^*(E \cap Q_j) + \sum_j \mathbf{m}^*(E^c \cap Q_j) \\ &= \sum_j \mathbf{m}(Q_j) \end{aligned}$$

Přechodem k infimu přes horní součty dostaneme

$$\mathbf{m}^*(T \cap E) + \mathbf{m}^*(T \setminus E) \leq \mathbf{m}^*(T)$$

Opačná nerovnost plyne triviálně ze subaditivity  $\mathbf{m}^*$ . □

**11.4. Poznámka.** Lemma 11.3 ospravedlňuje původní definici 2.2 lebesgueovskými měřitelnými množinami.

11.5. **Lemma.** Každý poloprostor  $H \in \vec{\mathcal{H}}_n$  je  $\mathbf{m}$ -měřitelná množina.

*Důkaz.* Necht  $H \in \vec{\mathcal{H}}_n$  a  $Q \in \vec{\mathcal{I}}_n$ . Potom  $Q \cap H$ ,  $Q \setminus H \in \vec{\mathcal{I}}_n$ . S pomocí aditivity a věty 11.2 dostáváme

$$\mathbf{m}(Q) = \mathbf{m}(Q \cap H) + \mathbf{m}(Q \setminus H) = \mathbf{m}^*(Q \cap H) + \mathbf{m}^*(Q \setminus H).$$

Podle lemmatu 11.3 je  $H$   $\mathbf{m}$ -měřitelná. □

11.6. **Lemma.** Systém  $\vec{\mathcal{H}}_n$  generuje borelovskou  $\sigma$ -algebru v  $\mathbb{R}^n$ .

*Důkaz.* Zřejmě je každý poloprostor borelovský. Jelikož každý interval  $Q \in \vec{\mathcal{I}}_n$  je průnik  $2n$  poloprostorů z  $\vec{\mathcal{H}}_n$ , je  $\vec{\mathcal{I}}_n \subset \sigma(\vec{\mathcal{H}}_n)$ . Bud  $\mathcal{Q}$  systém všech  $n$ -rozměrných kartézských součinů zprava uzavřených jedno-rozměrných intervalů s racionálními konci. Potom  $\mathcal{Q} \subset \vec{\mathcal{I}}_n$ . Je-li  $G \subset \mathbb{R}^n$  otevřená, snadno ověříme

$$G = \bigcup \{Q \in \mathcal{Q} : Q \subset G\},$$

tedy  $G$  je spočetným sjednocením množin z  $\sigma(\vec{\mathcal{H}}_n)$ . Dostáváme

$$\sigma(\vec{\mathcal{H}}_n) = \sigma(\{G \subset \mathbb{R}^n : G \text{ otevřená}\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

□

11.7. **Věta.** Necht  $\mathbf{m}$  je LS funkce intervalu na  $\mathbb{R}^n$ . Potom systém množin  $\mathfrak{M}(\mathbf{m}^*)$  je  $\sigma$ -algebra obsahující všechny borelovské množiny (tím spíš všechny intervaly),  $\mathbf{m}'$  splňuje axiomy míry a  $\mathbf{m}' = \mathbf{m}$  na  $\vec{\mathcal{I}}_n$ .

*Důkaz.* Věta je pouze shrnutím již dosažených výsledků. Ze základní konstrukce (věta 9.5) dostáváme, že systém množin  $\mathfrak{M}(\mathbf{m}^*)$  je  $\sigma$ -algebra a  $\mathbf{m}'$  splňuje axiomy míry. Dokážeme měřitelnost intervalů. Podle lemmatu 11.5, každý poloprostor  $H \in \vec{\mathcal{H}}_n$  je v  $\mathfrak{M}(\mathbf{m}^*)$  a o tomto systému už teď víme, že je to  $\sigma$ -algebra. Tedy podle lemmatu 11.6 je každá borelovská množina  $\mathbf{m}^*$ -měřitelná. Připomeňme, že podle věty 11.2 je  $\mathbf{m}^*(Q) = \mathbf{m}(Q)$  pro každý interval  $Q \in \vec{\mathcal{I}}_n$ . Vzhledem k měřitelnosti intervalů můžeme tuto rovnost přepsat jako  $\mathbf{m}'(Q) = \mathbf{m}(Q)$ . □

## 12. HOPFOVA VĚTA: EXISTENCE ROZŠÍŘENÍ

Hopfova věta je abstraktním nástrojem ke konstrukcím měř rozšiřováním. Hopfovu větu by bylo možné použít i ke konstrukcím Lebesgue-Stieltjesových měř, ale ověření předpokladů by bylo pracné.

12.1. **Definice** (Pramíra, konečně aditivní míra). Necht  $X$  je abstraktní množina a  $\mathcal{O} \subset 2^X$  je okruh. Množinová funkce  $\pi : \mathcal{O} \rightarrow [0, \infty]$  se nazývá *pramíra*, jestliže splňuje

$$(Pr-1) \quad \pi(\emptyset) = 0,$$

$$(Pr-2) \quad \text{jestliže } A \in \mathcal{O}, A_j \in \mathcal{O}, j = 1, 2, \dots, A_j \text{ jsou po dvou disjunktní a } A = \bigcup_j A_j, \text{ potom}$$

$$\pi(A) = \sum_j \pi(A_j).$$

Požadavek, že hodnoty jsou nezáporné a definiční obor je okruh, je součástí definice pramíry. Pokud množinová funkce  $\pi$  na okruhu splňuje pouze (Pr-1) a obdobu (Pr-2) pro *konečnou* disjunktní sjednocení, nazývá se *konečně aditivní míra*. Zdůrazněme, že konečně aditivní míra nemusí být míra, přívlastek je zobecňující.

Řekneme, že pramíra  $\pi$  na  $\mathcal{O}$  je  $\sigma$ -konečná, jestliže existují  $X_k \in \mathcal{O}$  tak, že

$$\pi(X_k) < \infty, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{a} \quad X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k.$$

12.2. **Věta** (Hopfova věta). Necht  $\mathcal{O}$  je okruh podmnožin  $X$  a  $\pi$  je pramíra na  $\mathcal{O}$ . Necht  $\mathcal{S}_0$  je nejmenší  $\sigma$ -algebra obsahující  $\mathcal{O}$ . Potom existuje míra  $\mu_0$  na  $\mathcal{S}_0$ , která rozšiřuje  $\pi$ . Jestliže  $\pi$  je  $\sigma$ -konečná, pak je taková míra  $\mu_0$  na  $\mathcal{S}_0$  určena jednoznačně.

12.3. **Poznámka.** Důkaz Hopfovy věty vyplyne z obecnějších tvrzení (věta 12.4, věta 13.5), která dokážeme v této a následující sekci.

12.4. **Věta** (Hopfova o existenci). Necht  $X$  je abstraktní množina,  $\mathcal{O}$  je množinový okruh na  $X$  a  $\pi$  je pramíra na  $\mathcal{O}$ . Potom míra  $(\mathcal{O}', \pi')$  (výsledek základní konstrukce) rozšiřuje  $(\mathcal{O}, \pi)$ .

*Důkaz.* 1. krok. Nechť  $Q \in \mathcal{O}$ , chceme dokázat, že  $Q \in \mathfrak{M}(\pi^*)$ . Zvolme testovací množinu  $T \subset X$  a spočetný systém  $\{G_k\}$  množin z  $\mathcal{O}$  tak, že  $T \subset \bigcup_k G_k$ . Množiny  $G_k \cap Q$ ,  $G_k \setminus Q$  leží v  $\mathcal{O}$ , tedy

$$\pi(G_k) = \pi(G_k \cap Q) + \pi(G_k \setminus Q).$$

Jelikož  $\sum_k \pi(G_k \cap Q)$  je horní součet k  $\pi^*(T \cap Q)$  a  $\sum_k \pi(G_k \setminus Q)$  je horní součet k  $\pi^*(T \setminus Q)$ , máme

$$\pi^*(T \cap Q) + \pi^*(T \setminus Q) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \pi(G_k \cap Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \pi(G_k \setminus Q) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi(G_k)$$

a přechodem k infimu přes všechny horní součty k  $\pi^*(Q)$  dostaneme

$$\pi^*(T \cap Q) + \pi^*(T \setminus Q) \leq \pi^*(T).$$

Opačná nerovnost platí ze subaditivty, tedy  $Q \in \mathfrak{M}(\pi^*)$ .

2. krok. Ukážeme, že pro každou  $Q \in \mathcal{O}$  je  $\pi^*(Q) = \pi(Q)$ . Je-li systém  $\{G_k\}$  pokrytí  $Q$  množinami z  $\mathcal{O}$ , pak pro každé  $k \in \mathbb{N}$  je  $G_k \cap Q \in \mathcal{O}$ . Použijeme trik zdisjunktnění ([větičku 1.15](#)) a najdeme disjunktní systém  $\{E_j\}$  množin z  $\mathcal{O}$  tak, že  $E_j \subset G_j \cap Q$  a  $\bigcup_j E_j = \bigcup_j (G_j \cap Q) = Q$ . Tedy podle předpokladu (Pr-2) je

$$\pi(Q) = \sum_j \pi(E_j) \leq \sum_j \pi(G_j).$$

přechodem k infimu přes všechny horní součty dostaneme

$$\pi(Q) \leq \pi^*(Q).$$

Jelikož jednoprvkový systém  $\{Q\}$  je pokrytí  $Q$ , opačná nerovnost  $\pi^*(Q) \leq \pi(Q)$  platí triviálně.  $\square$

**12.5. Poznámka** (o úplnosti). Míra  $\pi'$ , která vznikne rozšířením  $\pi$  za pomoci základní konstrukce, je automaticky úplná. Klasická formulace Hopfovy věty však o úplnosti nemluví. Pokud chceme použít toto znění pro konstrukci např. Lebesgueovy míry, použijeme Hopfovou větu (o rozšíření z intervalů na generovanou  $\sigma$ -algebru) v kombinaci s konstrukcí zúplnění, kterou popíšeme v [section 14](#). Paradoxně pak docházíme k postupu, kdy vytvoříme tu správnou míru již při důkazu Hopfovy věty, pak se ještě během tohoto důkazu neborelovských měřitelných množin zbavíme, “abychom” je v dalším kroku konstrukce (již mimo Hopfovou větu) jiným způsobem získali zpět.

### 13. JEDNOZNAČNOST ROZŠÍŘENÍ

**13.1. Definice** (Dynkinův systém). Nechť  $X$  je abstraktní množina. Systém množin  $\mathcal{D} \subset 2^X$  se nazývá *Dynkinův systém*, je-li splněno

$$(D-1) \emptyset, X \in \mathcal{D},$$

$$(D-2) A, B \in \mathcal{D}, B \subset A \implies A \setminus B \in \mathcal{D}.$$

$$(D-3) \text{ Jestliže } A_j \in \mathcal{D} \text{ jsou po dvou disjunktní, pak } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{D}.$$

Každá  $\sigma$ -algebra je Dynkinův systém.

Důležitost Dynkinových systémů spočívá v tom, že jsou li  $\mu, \nu$  dvě míry na  $(X, \mathcal{S})$ ,  $\mu(X) = \nu(X) < \infty$ , potom systém množin  $\{A \in \mathcal{S} : \mu(A) = \nu(A)\}$  je Dynkinův systém (obecně ne  $\sigma$ -algebra: uvažujte např. míry  $A \mapsto \lambda(\{x \in A : x > 0\})$  a  $A \mapsto \lambda(\{x \in A : x < 0\})$  na intervalu  $[-1, 1]$ ).

**13.2. Definice** (Generování Dynkinových systémů). Je-li  $\mathcal{F}$  libovolný systém podmnožin  $X$ , potom existuje nejmenší Dynkinův systém obsahující  $\mathcal{F}$ . Tento Dynkinův systém dostaneme jako průnik všech Dynkinových systémů obsahujících  $\mathcal{F}$ ; budeme jej značit  $\delta(\mathcal{F})$ . Připomeňme, že  $\sigma(\mathcal{F})$  značíme nejmenší  $\sigma$ -algebru obsahující  $\mathcal{F}$ .

**13.3. Věta** (o Dynkinových systémech). *Nechť  $\mathcal{F}$  je systém podmnožin  $X$  uzavřený na konečné průniky. Potom  $\delta(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$ .*

*Důkaz.* Nechť  $A \in \sigma(\mathcal{F})$ . Označme  $\mathcal{F}_A = \{B \in \sigma(\mathcal{F}) : A \cap B \in \delta(\mathcal{F})\}$ . Jestliže  $A \in \mathcal{F}$ , pak  $\mathcal{F}_A$  je Dynkinův systém obsahující  $\mathcal{F}$ , tedy  $\mathcal{F}_A \supset \delta(\mathcal{F})$ . Nechť nyní  $A \in \delta(\mathcal{F})$ , potom podle předchozího kroku je  $\mathcal{F}_A$  Dynkinův systém a obsahuje  $\mathcal{F}$ . Pak ale podobně jako v předchozím kroku je  $\mathcal{F}_A \supset \delta(\mathcal{F})$ . Dokázali jsme, že systém  $\delta(\mathcal{F})$  je uzavřený na průniky. Každý Dynkinův systém uzavřený na průniky je však zřejmě  $\sigma$ -algebra, tedy  $\delta(\mathcal{F})$  je  $\sigma$ -algebra obsahující  $\mathcal{F}$ . Z minimality obou systémů plyne, že  $\delta(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$ .  $\square$

**13.4. Věta** (o jednoznačnosti). *Nechť  $\mathcal{F}$  je systém podmnožin  $X$  uzavřený na konečné průniky. Nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou míry na  $\sigma(\mathcal{F})$ , které se shodují na  $\mathcal{F}$ . Jestliže existují  $X_k \in \mathcal{F}$  tak, že  $\mu(X_k) < \infty$  a  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k = X$ , pak  $\mu = \nu$  na  $\sigma(\mathcal{F})$ .*

*Důkaz.* Pro každé  $k \in \mathbb{N}$  je systém množin  $\{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \mu(A \cap X_k) = \nu(A \cap X_k)\}$  Dynkinův systém obsahující  $\mathcal{F}$  a  $\delta(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$  (rovnost nastává podle věty 13.3). Každou množinu  $A \in \sigma(\mathcal{F})$  můžeme napsat jako (po dvou) disjunktí sjednocení

$$A = \bigcup_j A_j,$$

kde

$$\begin{aligned} A_j &= E_j \cap X_j, \\ E_1 &= A, \quad E_2 = (A \setminus X_1), \quad E_3 = (A \setminus (X_1 \cup X_2)), \dots \end{aligned}$$

Všimněme si, že  $E_j$  vyrobíme z množin z  $\mathcal{F}$  okruhými operacemi, tedy  $E_j \in \sigma(\mathcal{F})$ , ale tím pádem  $E_j \in \delta(\mathcal{F})$  a  $\mu(E_j \cap X_j) = \nu(E_j \cap X_j)$ , neboli  $\mu(A_j) = \nu(A_j)$  pro všechna  $j \in \mathbb{N}$ . Jelikož  $A$  je disjunktí sjednocení množin  $A_j$ , dostáváme  $\mu(A) = \nu(A)$ .  $\square$

**13.5. Věta** (Hopfova o jednoznačnosti). *Nechť  $X$  je abstraktní množina,  $\mathcal{O}$  je množinový okruh na  $X$  a  $\pi$  je  $\sigma$ -konečná pramíra na  $\mathcal{O}$ . Nechť míra  $(\mathcal{S}, \mu)$  na  $X$  rozšiřuje  $(\mathcal{O}, \pi)$ . Potom  $\sigma(\mathcal{O}) \subset \mathcal{S}$  a  $\mu = \pi'$  na  $\sigma(\mathcal{O})$ .*

*Důkaz.* Věta je důsledkem věty 13.4.  $\square$

## 14. ZÚPLNĚNÍ MÍRY

**14.1. Definice** (Zúplnění míry). Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  je prostor s mírou. Položme

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{S}} &:= \{E \subset X : \exists E_*, E^* \in \mathcal{S} : E_* \subset E \subset E^*, \mu(E^* \setminus E_*) = 0\}, \\ \overline{\mu}(E) &:= \mu(E_*) = \mu(E^*), \quad E \in \overline{\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

Rovnost  $\mu(E_*) = \mu(E^*)$  na předchozím řádku je triviálním důsledkem požadavku  $\mu(E^* \setminus E_*) = 0$ . Ověřme, že definice  $\overline{\mu}(E)$  nezávisí na volbě  $E^*$ . Totiž, pokud  $E_\#, E^\# \in \mathcal{S}$ ,  $E_\# \leq E \leq E^\#$ , potom  $\mu(E^*) = \mu(E_*) \leq \mu(E^\#)$  a podobně  $\mu(E^\#) \leq \mu(E^*)$ . Množinová funkce  $(\overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$  se nazývá *zúplnění míry*  $(\mathcal{S}, \mu)$ .

**14.2. Věta.** *Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  je prostor s mírou. Potom  $\overline{\mathcal{S}}$  je  $\sigma$ -algebra a  $\overline{\mu}$  je úplná míra na  $\overline{\mathcal{S}}$ , která rozšiřuje  $\mu$ . Navíc,  $\overline{\mu}$  je nejvyšší rozšíření  $\mu$  na úplnou míru. Tedy, pokud úplná míra  $\nu$  na sigma-algebře  $\mathcal{T}$  rozšiřuje  $(\mathcal{S}, \mu)$ , pak  $\mathcal{T} \supset \overline{\mathcal{S}}$  a  $\nu = \overline{\mu}$  na  $\overline{\mathcal{S}}$ .*

*Důkaz.*  $\overline{\mathcal{S}}$  je  $\sigma$ -algebra: Zřejmě  $\overline{\mathcal{S}}$  obsahuje  $\emptyset$  a je uzavřeno na doplňky. Uvažujme  $E_j \in \overline{\mathcal{S}}$  a  $E = \bigcup_j E_j$ . Z definice najdeme  $L_j, U_j \in \mathcal{S}$  tak, že  $L_j \subset E_j \subset U_j$  a  $\mu(U_j \setminus L_j) = 0$ . Položme  $L = \bigcup_j L_j$ ,  $U = \bigcup_j U_j$ . Zřejmě  $L \subset E \subset U$ . Vlastnost  $\mu(U \setminus L) = 0$  plyne z elementární inkluze

$$\left( \bigcup_j U_j \right) \setminus \left( \bigcup_j L_j \right) \subset \bigcup_j (U_j \setminus L_j).$$

Tedy  $E \in \overline{\mathcal{S}}$ .

$\overline{\mu}$  je míra: Zřejmě  $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$ . Nechť  $E, E_j, U, U_j, L, L_j$  jsou jako předtím a navíc  $E_j$  jsou po dvou disjunktí. Potom též  $L_j$  jsou po dvou disjunktí a  $\overline{\mu}(E_j) = \mu(L_j) = \mu(U_j)$  a  $\overline{\mu}(E) = \mu(L) = \mu(U)$ . Tedy  $\overline{\mu}(E) = \mu(L) = \sum_j \mu(L_j) = \sum_j \overline{\mu}(E_j)$ .

$\overline{\mu}$  je úplná (míra): Nechť  $M \in \overline{\mathcal{S}}$ ,  $N \in \mathcal{S}$  a  $\overline{\mu}(M) = 0$ . Potom existuje  $M^* \in \mathcal{S}$  tak, že  $N \subset M \subset M^*$  a  $\mu(M^*) = 0$ . Pro  $N$  můžeme volit  $N_* = \emptyset$ ,  $N^* = M^*$  a vidíme, že  $N \in \overline{\mathcal{S}}$ . Tedy  $\overline{\mu}$  je úplná.

$\overline{\mu}$  je nejvyšší: Nechť úplná míra  $\nu$  na  $\sigma$ -algebře  $\mathcal{T}$  rozšiřuje  $(\mathcal{S}, \mu)$ . Nechť  $E \in \overline{\mathcal{S}}$ . Najdeme  $E_*$ ,  $E^*$  jako v definici. Potom  $E \setminus E_* \subset E^* \setminus E_* \in \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$  a  $\nu(E^* \setminus E_*) = \mu(E^* \setminus E_*) = 0$ , tedy z úplnosti  $\nu$  je  $E \setminus E_* \in \mathcal{T}$  a  $\nu(E \setminus E_*) = 0$ . Tedy  $E = E_* \cup (E \setminus E_*) \in \mathcal{T}$  a  $\nu(E) = \nu(E_*) = \overline{\mu}(E)$ .  $\square$

**14.3. Poznámka.** Úloha rozšířit danou míru na úplnou obecně není jednoznačná. Proto je důležité mluvit o nejvyšším úplném rozšíření. Pokus definovat Lebesgueovu míru jako “úplné rozšíření  $\ell$ ” je lákavý, ale chybný. Lze to spravit, budeme-li mluvit o nejvyšším rozšíření, viz [důsledek 14.6](#).

**14.4. Lemma.** Nechť  $(\mathcal{F}, \tau)$  je množinová funkce na množině  $X$  splňující počáteční podmínku (25) a  $E \subset X$ . Potom existuje  $E^* \in \sigma(\mathcal{F})$  tak, že  $E^* \supset E$  a  $\tau^*(E) = \tau^*(E^*)$ .

*Důkaz.* Jestliže  $\tau^*(E) = \infty$ , poslouží  $E^* = X$ . Jinak najdeme horní součty  $\sum_{j=1}^{\infty} \tau(A_j^m)$  k  $\tau^*(E)$ , kde  $m = 1, 2, \dots$ , tak, že

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tau(A_j^m) \leq \tau^*(E) + 2^{-m}.$$

Položme

$$E_m = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^m,$$

$$E^* = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Potom zřejmě  $E \subset E_m$  a

$$\tau^*(E) \leq \tau^*(E_m) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau(A_j^m) + 2^{-m} \leq \tau^*(E) + 2^{-m}.$$

Tudíž  $E \subset E^*$  a  $\tau^*(E^*) = \tau^*(E)$ . □

Následující věta pojednává mj. o situaci z [poznámky 12.5](#).

**14.5. Věta** (o jednoznačnosti a úplnosti). *Nechť  $\mathcal{F}$  je systém podmnožin  $X$  uzavřený na konečné průniky a  $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{F})$ . Nechť  $\tau$  je množinová funkce na  $\mathcal{F}$  splňující počáteční podmínku (25) a  $(\mathcal{F}', \tau')$  je výsledek základní konstrukce. Nechť  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$  a  $\tau = \tau'$  na  $\mathcal{F}$  (tj. základní konstrukce je “úspěšná”). Buď  $\mu$  zúžení  $\tau'$  na  $\mathcal{S}$  a  $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{\mu})$  zúplnění  $\mu$ . Jestliže existují  $X_k \in \mathcal{F}$  tak, že  $\tau(X_k) < \infty$  a  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k = X$ , pak  $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{F}'$  a  $\bar{\mu} = \tau'$ . Tedy  $\tau'$  je nejužší rozšíření  $\tau$  na úplnou míru.*

*Důkaz.* Víme, že  $\tau'$  je rozšíření  $\tau$  na úplnou míru. Z věty 13.4 dostáváme, že  $\mu$  je nejužší rozšíření  $\tau$  na míru a  $\bar{\mu}$  je tedy nejužší rozšíření  $\tau$  na úplnou míru. Odtud  $\bar{\mathcal{S}} \subset \mathcal{F}'$  a  $\bar{\mu} = \tau'$  na  $\bar{\mathcal{S}}$ . Zbývá ukázat, že  $\mathcal{F}' \subset \bar{\mathcal{S}}$ . Zvolme  $E \in \mathcal{F}'$  a předpokládejme nejprve, že  $\tau'(E) < \infty$ . Podle lemmatu 14.4 existuje  $E^* \in \mathcal{S}$  tak, že  $E^* \supset E$  a  $\tau^*(E^*) = \tau^*(E)$ , neboli též  $\mu(E) = \tau'(E^*) = \tau'(E)$ . Použijeme lemma 14.4 ještě jednou, a to na množinu  $N = E^* \setminus E$ . Víme, že  $N \in \mathcal{F}'$  a  $\tau'(N) = \tau'(E^*) - \tau'(E) = 0$ . Existuje tedy  $N^* \in \mathcal{S}$  tak, že  $N \subset N^*$  a  $\mu(N^*) = \tau'(N^*) = \tau'(N) = 0$ . Položme  $E_* = E^* \setminus N^*$ . Potom  $E_*, E^* \in \mathcal{S}$ ,  $E_* \subset E \subset E^*$  a  $\mu(E^* \setminus E_*) = \mu(E^* \cap N^*) = 0$ . Podle definice zúplnění,  $E \in \bar{\mathcal{S}}$ .

Nyní odstraníme předpoklad, že  $\tau'(E) < \infty$ . Mějme  $X_k$  jako v předpokladech, pak  $E \cap X_k \in \mathcal{F}'$  a  $\tau'(E \cap X_k) < \infty$ . Podle předchozího kroku odtud plyne, že  $E \cap X_k \in \bar{\mathcal{S}}$ , a jelikož  $\bar{\mathcal{S}}$  je  $\sigma$ -algebra,  $E = \bigcup_k (E \cap X_k) \in \bar{\mathcal{S}}$ . □

**14.6. Důsledek.** *Lebesgueova míra  $\lambda$  je nejužší rozšíření  $\ell$  na úplnou míru.*

## 15. SOUČIN MĚR A FUBINIOVA VĚTA

**15.1. Definice** (Součin měr). Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$ , a  $(Y, \mathcal{T}, \nu)$  jsou prostory s mírou. Nechť míry  $\mu, \nu$  jsou  $\sigma$ -konečné. Uvažujme systém  $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$  všech podmnožin  $X \times Y$  tvaru  $A \times B$ , kde  $A \in \mathcal{S}$ ,  $B \in \mathcal{T}$ . Takovým množinám budeme říkat *měřitelné obdélníky*. Na  $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$  definujeme množinovou funkci  $\mu \times \nu$  předpisem

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \nu(B).$$

Systém množin  $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$  generuje tzv. *součinnovou  $\sigma$ -algebru*  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T} := \sigma(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ . V dalším (věta 15.5) uvidíme, že existuje právě jedna míra  $\rho$  na  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$  tak, že

$$\rho(A \times B) = \mu(A) \nu(B), \quad A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}.$$

Tuto míru budeme nazývat *součinným měrem*  $\mu$  a  $\nu$  a značit  $\mu \otimes \nu$ . Její zúplnění budeme nazývat *úplným součinným měrem* a značit  $(\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}, \mu \otimes \nu)$ .

Tedy  $\mu \otimes \nu$  je nejužší rozšíření  $\mu \times \nu$  na míru a  $\mu \otimes \nu$  je nejužší rozšíření  $\mu \times \nu$  na úplnou míru.

Naším cílem je tedy rozšířit množinovou funkci  $(\mathcal{S} \times \mathcal{T}, \mu \times \nu)$  na míru a za tímto účelem aplikujeme základní konstrukci.

**15.2. Lemma** (Vnější míra měřitelného obdélníku). *Je-li  $A \in \mathcal{S}$  a  $B \in \mathcal{T}$ , pak*

$$(\mu \times \nu)^*(A \times B) = (\mu \times \nu)(A \times B).$$

*Důkaz.* Nechť

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(A_j \times B_j)$$

je horní součet k  $(\mu \times \nu)^*(A \times B)$ . Potom pro každý bod  $x \in X$  je

$$\nu(B)\chi_A(x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j)\chi_{A_j}(x).$$

Podle [důsledku 4.16](#) je

$$\begin{aligned} (\mu \times \nu)(A \times B) &= \int_X \nu(B)\chi_A d\mu \leq \int_X \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j)\chi_{A_j} d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \nu(B_j)\chi_{A_j} d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(A_j \times B_j). \end{aligned}$$

□

**15.3. Lemma** (Kritérium měřitelnosti). *Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$ , a  $(Y, \mathcal{T}, \nu)$  jsou prostory s mírou a  $E \subset X \times Y$ . Jestliže pro každý měřitelný obdélník  $Q$  platí*

$$(\mu \times \nu)^*(Q \cap E) + (\mu \times \nu)^*(Q \setminus E) = (\mu \times \nu)(Q),$$

*potom je  $E$   $(\mu \times \nu)^*$ -měřitelná.*

*Důkaz.* Důkaz je analogický jako u [lemmatu 11.3](#). (Proveďte jako cvičení!) □

**15.4. Lemma** (Měřitelnost měřitelných obdélníků). *Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$ , a  $(Y, \mathcal{T}, \nu)$  jsou prostory s mírou. Potom každý měřitelný obdélník je  $(\mu \times \nu)^*$ -měřitelný.*

*Důkaz.* Uvažujme množinu  $E \in \mathcal{S}$ . Chceme dokázat  $(\mu \times \nu)^*$ -měřitelnost množiny  $E \times Y$ . Buď  $A \times B \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$  měřitelný obdélník. Potom

$$(A \times B) \cap (E \times Y) = (A \cap E) \times B \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}, \quad (A \times B) \setminus (E \times Y) = (A \setminus E) \times B \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$$

a

$$(\mu \times \nu)((A \times B) \cap (E \times Y)) + (\mu \times \nu)((A \times B) \setminus (E \times Y)) = (\mu \times \nu)(A \times B).$$

Tedy podle [lemmat 15.2](#) a [15.3](#) je  $E \times Y$   $(\mu \times \nu)^*$ -měřitelná. Podobně bychom dostali měřitelnost  $X \times F$  pro každou  $F \in \mathcal{T}$ . Tedy

$$E \times F = (E \times Y) \cap (X \times F) \in \mathfrak{M}((\mu \times \nu)^*).$$

□

**15.5. Věta** (Existence součinu měr). *Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$ , a  $(Y, \mathcal{T}, \nu)$  jsou prostory s mírou. Nechť míry  $\mu$ ,  $\nu$  jsou  $\sigma$ -konečné. Potom existuje právě jedna míra  $\rho$  na  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$  tak, že*

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}.$$

*Důkaz.* Systém množin  $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$  je uzavřený na konečné průniky. Jelikož míry  $\mu$  a  $\nu$  jsou  $\sigma$ -konečné, můžeme napsat  $X \times Y$  jako spočetné sjednocení

$$X \times Y = \bigcup_{i,j} (X_i \times Y_j),$$

kde

$$X_i \in \mathcal{S}, Y_j \in \mathcal{T}, \mu(X_j) < \infty, \nu(Y_j) < \infty,$$

takže

$$(\mu \times \nu)(X_i \times Y_j) < \infty.$$

Podle [věty 13.4](#) existuje nejvýše jedno rozšíření množinové funkce  $\mu \times \nu$  na míru na  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ . Existenci aspoň jednoho rozšíření nám dávají [lemmata 15.4](#) a [15.2](#), hledaným rozšířením je míra

$$M \mapsto (\mu \times \nu)'(M), \quad M \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}.$$

□

**15.6. Věta.** *Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$ , a  $(Y, \mathcal{T}, \nu)$  jsou prostory s mírou. Nechť míry  $\mu$ ,  $\nu$  jsou  $\sigma$ -konečné. Pak  $(\overline{\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}}, \overline{\mu \otimes \nu}) = ((\mathcal{S} \times \mathcal{T})', (\mu \times \nu)')$ .*



*Důkaz.* Věta je důsledkem [věty 14.5](#) o zúplnění a jednoznačnosti.  $\square$

**15.7. Poznámka.** Z důkazů [lemmat 15.4, 15.2](#) vidíme, že rozšíření  $\mu \times \nu$  na (úplnou) míru můžeme provést bez omezujících předpokladů, avšak pokud míry  $\mu$  a  $\nu$  nejsou  $\sigma$ -konečné, mohli bychom ztratit jednoznačnost rozšíření.

**15.8. Definice** (Součiny konečně mnoha měr). Součin konečně mnoha měr se definuje zcela analogicky jako součin dvou měr. Podrobnosti vypustíme, neboť zápis výkladu pro součin konečně mnoho prostorů s měrami  $(X_i, \mathcal{S}_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  by byl nepřehledný pro velké množství indexů. Problém zavedení součinu několika měr lze též převést na předchozí případ dvou měr rekurentním násobením, např.

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n = (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n.$$

**15.9. Definice** (Řezy). Nechť  $M \subset X \times Y$ . Značíme

$$\begin{aligned} M^{x,*} &= \{y \in Y : (x, y) \in M\}, & x \in X, \\ M^{*,y} &= \{x \in X : (x, y) \in M\}, & y \in Y. \end{aligned}$$

Tyto množiny se nazývají řezy.

**15.10. Lemma** (Výpočet součinné míry množiny). *Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  a  $(Y, \mathcal{T}, \nu)$  jsou prostory s mírou. Nechť míry  $\mu$  a  $\nu$  jsou  $\sigma$ -konečné. Buď  $(\mathcal{R}, \rho)$  součin měr  $\mu$  a  $\nu$ . Nechť  $M$  je  $\rho$ -měřitelná množina. Potom pro každé  $x \in X$  je množina  $M^{x,*}$   $\nu$ -měřitelná, funkce  $x \mapsto \nu(M^{x,*})$  je měřitelná a*

$$\rho(M) = \int_X \nu(M^{x,*}) d\mu.$$

*Důkaz.* Důkaz provedeme pro jednoduchost pro případ, že míry  $\mu$  a  $\nu$  jsou konečné. Obecný případ se liší v technických detailech. Systém všech množin  $M$ , pro které tvrzení platí, je Dynkinův systém obsahující všechny měřitelné obdélníky, a systém všech měřitelných obdélníků je uzavřený na konečné průniky. Tudíž podle [věty 13.3](#) tvrzení platí pro každou  $\rho$ -měřitelnou množinu.  $\square$

**15.11. Věta** (Fubiniova). *Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  a  $(Y, \mathcal{T}, \nu)$  jsou prostory s mírou. Nechť míry  $\mu$  a  $\nu$  jsou úplné a  $\sigma$ -konečné. Buď  $(\mathcal{R}, \rho)$  součin měr  $\mu$  a  $\nu$  a  $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\rho})$  jejich úplný součin. Nechť  $f$  je  $\overline{\rho}$ -měřitelná funkce na  $\overline{\rho}$ -měřitelné množině  $M \subset X \times Y$ . Předpokládejme, že integrál*

$$\int_M f(x, y) d\overline{\rho}(x, y)$$

*má smysl. Potom pro  $\mu$ -skoro všechna  $x$  má smysl integrál*

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x, y) d\nu(y),$$

*funkce  $g$  má integrál*

$$\int_X g d\mu$$

*a*

$$(35) \quad \int_M f(x, y) d\overline{\rho}(x, y) = \int_X g d\mu = \int_X \left( \int_{M^{x,*}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

*Důkaz.* 1. krok. Podle [lemmatu 15.10](#) tvrzení platí pro  $f = \chi_A$ , kde  $A$  leží v  $\sigma$ -algebře  $\mathcal{R}$ .

2. krok. Je-li  $N$   $(\mu \times \nu)^*$ -nulová, pak existuje  $E \in \mathcal{R}$  tak, že  $E \supset N$  a  $\rho(E) = 0$ . Z platnosti tvrzení pro  $\chi_E$  snadno odvodíme platnost tvrzení pro  $\chi_N$ .

3. krok. Obecnou množinu  $M \in \overline{\mathcal{R}}$  můžeme napsat ve tvaru disjunktního sjednocení  $M = A \cup N$ , kde  $A \in \mathcal{R}$  a  $N$  je  $(\mu \times \nu)^*$ -nulová. Důkaz tvrzení pro  $f = \chi_M$  dostaneme z prvního a druhého kroku.

4. krok. Víme-li, že tvrzení platí pro charakteristické funkce množin z  $\overline{\mathcal{R}}$ , rutinním postupem přes jednoduché funkce a nezáporné měřitelné funkce odvodíme obecný případ.  $\square$

**15.12. Poznámka.** Role prostorů  $X$  a  $Y$  ve Fubiniově větě je symetrická. Proto také platí Fubiniova věta ve tvaru

$$(36) \quad \int_M f(x, y) d\overline{\rho}(x, y) = \int_Y \left( \int_{M^{y,*}} f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

a je-li splněn předpoklad existence integrálu

$$\int_M f(x, y) d\bar{\rho}(x, y),$$

můžeme ospravedlnit záměnu pořadí integrace

$$(37) \quad \int_X \left( \int_{M^{x,*}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_{M^{y,*}} f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

**15.13. Věta** (Lebesgueova míra a součin měr). *(n+m)-rozměrná Lebesgueova míra je úplným součinem n-rozměrné a m-rozměrné Lebesgueovy míry.*

*Důkaz.* Nechť  $A \subset \mathbb{R}^n$  a  $Q \subset \mathbb{R}^m$  je omezený interval. Potom zřejmě  $\lambda_{n+m}^*(A \times Q) = \lambda_n^*(A)\lambda_m(Q)$ . Tedy  $A \times Q$  je  $\lambda_{n+m}$ -měřitelná, právě když  $A$  je  $\lambda_n$ -měřitelná. Jelikož  $\mathbb{R}^m$  lze napsat jako monotonní sjednocení spočetně mnoha omezených intervalů, je vidět, že měřitelné obdélníky tvaru  $A \times \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ , jsou  $\lambda_{n+m}$  měřitelné. Podobně měřitelné obdélníky tvaru  $\mathbb{R}^n \times B$ ,  $B \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^m)$ , jsou  $\lambda_{n+m}$ -měřitelné. Pomocí operace průniků dojdeme k poznání, že měřitelné obdélníky z  $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{M}(\mathbb{R}^m)$  jsou  $\lambda_{n+m}$ -měřitelné.

Podle **důsledku 14.6** je  $\lambda_{n+m}$  nejuzší rozšíření  $\ell_{n+m}$  na úplnou míru. Toto nejuzší rozšíření podle první části důkazu musí měřit i všechny měřitelné obdélníky z  $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{M}(\mathbb{R}^m)$ , tedy splývá s  $\lambda_n \otimes \lambda_m$ .  $\square$

**15.14. Příklad.** Nechť  $N \subset \mathbb{R}$  je neměřitelná množina. Potom  $N \times \{0\}$  je  $\lambda_2$ -nulová v  $\mathbb{R}^2$ , tudíž  $\lambda_2$ -měřitelná, ale není  $\lambda_1 \otimes \lambda_1$ -měřitelná. Předchozí věta tedy ztratí platnost, nahradíme-li úplný součin obyčejným součinem.

**15.15. Příklad** (Ratajovy dlaždičky). Fubiniova věta se často používá pro záměnu pořadí integrace podle vzorce (37). Následující příklad demonstruje, jak je nebezpečné neověřit předpoklad o existenci dvojného integrálu. Rozdělme  $\mathbb{R}^2$  na čtverce  $Q_{ij} = [i, i+1) \times [j, j+1)$ . Nechť funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je definována předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in Q_{ij}, \quad 0 < j = i + 1, \\ -1, & x \in Q_{ij}, \quad 0 < i = j + 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx = 1 \neq -1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy.$$

**15.16. Příklad.** S pomocí **příkladu 7.2** počítejme

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{4} &= [\operatorname{arctg}^2 x]_{x=0}^{\infty} = \int_0^{\infty} \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2}{1+x^2} [\operatorname{arctg}(yx)]_{y=0}^1 dx \\ &= \int_0^{\infty} \left( \int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)(1+y^2x^2)} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{\infty} \frac{2x}{(1+x^2)(1+y^2x^2)} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-y^2} \left[ \ln \frac{1+x^2}{1+x^2y^2} \right]_{x=0}^{\infty} dy \\ &= -2 \int_0^1 \frac{\ln y}{1-y^2} dy = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

(odůvodněte samostatně použití Fubiniovy věty). Označme

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots, \\ L &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots, \\ V &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \end{aligned}$$

Potom máme

$$V = L + S, \quad V = 2^2 S, \quad L = \frac{\pi^2}{8},$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = V = \frac{4}{3} L = \frac{\pi^2}{6}.$$

## 16. VĚTA O SUBSTITUCI

**16.1. Definice** (Jacobiho matice). Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  je zobrazení diferencovatelné v bodě  $x \in G$ . Matice lineárního zobrazení  $\varphi'(t)$  se nazývá *Jacobiho matice* zobrazení  $\varphi$  v bodě  $t$ . Je to tedy matice

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}.$$

Zobrazení  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  nazveme *regulární*, jestliže má spojitou derivaci (tj. spojitě všechny parciální derivace) a jeho Jacobiho matice má všude v  $G$  hodnost  $n$ .

**16.2. Definice** (Jakobián). V této kapitole se budeme zabývat možností záměny proměnných v integrálu prostřednictvím zobrazení  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Budeme tedy vyšetřovat jen případ  $m = n$ . Pak je Jacobiho matice čtvercová a její determinant nazveme *jakobiánem* zobrazení  $\varphi$  v bodě  $t$ .

**16.3. Věta** (o substituci). *Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  je prosté regulární zobrazení. Nechť  $u$  je funkce na  $M \subset \varphi(G)$ . Potom*

$$\int_M u(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t)) |J\varphi(t)| dt,$$

*pokud alespoň jedna strana má smysl. (Připomeňme, že aby integrál mohl mít smysl, je mj. nutné, aby integrační obor byl měřitelná množina a integrovaná funkce byla měřitelná)*

*Důkaz.* Důkaz uvedeme ke konci kapitoly. □

**16.4. Příklad** (Polární souřadnice). Nechť

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : r > 0, -\pi < \alpha < \pi \right\}.$$

Zobrazení  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  dané předpisem

$$\begin{aligned} \varphi(r, \alpha) &:= \begin{pmatrix} x(r, \alpha) \\ y(r, \alpha) \end{pmatrix}, \\ x(r, \alpha) &:= r \cos \alpha, \\ y(r, \alpha) &:= r \sin \alpha \end{aligned}$$

se nazývá *zobrazení polárních souřadnic*.

**16.5. Věta** (o polárních souřadnicích). *Nechť  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  je zobrazení polárních souřadnic. Potom  $\varphi$  je prosté regulární zobrazení a  $J\varphi(r, \alpha) = r$ . Je-li  $M \subset \mathbb{R}^2$  a  $u$  funkce na  $M$ , potom*

$$(38) \quad \int_M u(x, y) dx dy = \int_{G \cap \varphi^{-1}(M)} u(r \cos \alpha, r \sin \alpha) r dr d\alpha,$$

*pokud alespoň jedna strana má smysl.*

*Důkaz.* Soustava rovnic

$$\begin{aligned} r \cos \alpha &= x, \\ r \sin \alpha &= y \end{aligned}$$

s podmínkou  $\begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} \in G$  má právě jedno řešení

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \alpha &= 2 \arctg \left( \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

pokud  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \notin N := (-\infty, 0] \times \{0\}$ . Ověření hladkosti a výpočet jakobiánu je rutinní záležitost. Vzorec (38) dostaneme z věty 16.3 o substituci, uvážíme-li, že  $\lambda(N) = 0$ . □

16.6. **Příklad** (Sférické souřadnice). Necht' tentokrát

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : r > 0, -\pi < \beta < \pi, -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}, \right\}.$$

Zobrazení  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  dané předpisem

$$\begin{aligned} \varphi(r, \beta, \gamma) &:= \begin{pmatrix} x(r, \beta, \gamma) \\ y(r, \beta, \gamma) \\ z(r, \beta, \gamma) \end{pmatrix}, \\ x(r, \beta, \gamma) &:= r \cos \gamma \cos \beta, \\ y(r, \beta, \gamma) &:= r \cos \gamma \sin \beta, \\ z(r, \beta, \gamma) &:= r \sin \gamma \end{aligned}$$

se nazývá *zobrazení sférických souřadnic*.

16.7. **Věta** (o sférických souřadnicích). *Necht'  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  je zobrazení sférických souřadnic. Potom  $\varphi$  je prosté regulární zobrazení a  $J\varphi(r, \beta, \gamma) = r^2 \cos \gamma$ . Je-li  $M \subset \mathbb{R}^3$  a  $u$  funkce na  $M$ , potom*

$$(39) \quad \begin{aligned} &\int_M u(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{G \cap \varphi^{-1}(M)} u(r \cos \gamma \cos \beta, r \cos \gamma \sin \beta, r \sin \gamma) r^2 \cos \gamma \, dr \, d\beta \, d\gamma, \end{aligned}$$

*pokud alespoň jedna strana má smysl.*

*Důkaz.* Soustava rovnic

$$\begin{aligned} r \cos \gamma \cos \beta &= x, \\ r \cos \gamma \sin \beta &= y, \\ r \sin \gamma &= z \end{aligned}$$

s podmínkou  $\begin{pmatrix} r \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in G$  má právě jedno řešení

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \beta &= 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \gamma &= \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

pokud  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \notin N := (-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R}$ . Ověření hladkosti a výpočet jakobiánu je rutinní záležitost.

Vzorec (39) dostaneme z věty 16.3 o substituci, uvažíme-li, že  $\lambda(N) = 0$ . □

V dalším se budeme zabývat důkazem věty o substituci.

16.8. **Lemma** (o míře lineárního obrazu). *Necht'  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je lineární zobrazení. Potom pro každou měřitelnou množinu  $E \subset \mathbb{R}^n$  je  $L(E)$  měřitelná a platí*

$$\lambda(L(E)) = |JL| \lambda(E).$$

*Důkaz.* Jestliže  $L$  je singulární, pak  $L(\mathbb{R}^n)$  je lineární podprostor  $\mathbb{R}^n$  dimenze  $< n$  a tudíž  $\lambda(L(E)) = 0 = |JL| \lambda(E)$  pro každou množinu  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Můžeme tedy předpokládat, že zobrazení  $L$  je regulární. Potom inverzní zobrazení je spojitě a obraz  $L(E)$  každé borelovské množiny je borelovská množina. Nejprve dokážeme, že existuje konstanta  $\alpha > 0$  tak, že pro každou borelovskou množinu  $E \subset \mathbb{R}^n$  je

$$(40) \quad \lambda(L(E)) = \alpha \lambda(E).$$

Položme

$$\alpha = \lambda(L([0, 1]^n)) > 0.$$

Definujme množinovou funkci  $\mu$  na  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  předpisem

$$\mu(E) = \lambda(L(E))/\alpha.$$

Především, jelikož  $L$  a  $L^{-1}$  jsou měřitelné, množinová funkce  $\mu$  je míra. Předpokládejme, že  $q$  je přirozené číslo a  $Q$  je krychle  $[0, 1/q]^n$ . Potom každá posunutá kopie  $Q$  má stejnou míru  $\mu$  a  $[0, 1]^n$  lze disjunktně rozložit na  $q^n$  takových kopií. Proto

$$\mu(Q) = q^{-n} = \lambda(Q).$$

Pomocí aditivity měr nahlédneme, že

$$\mu(I) = \lambda(I)$$

pro každý interval o racionálních mezích. Protože systém takových intervalů je uzavřený na konečné průniky a generuje Dynkinův systém  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , podle věty 13.4 o jednoznačnosti je  $\mu = \lambda$  na borelovských množinách. Zúplněním dostaneme (40) pro každou  $\lambda$ -měřitelnou množinu. Zbývá dokázat, že  $\alpha = JL$ .

Nejprve dokážeme tvrzení pro zobrazení

$$Lx = (d_1x^1, \dots, d_nx^n), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

kde  $d_1, \dots, d_n$  jsou nezáporná reálná čísla. Potom matice  $L$  je diagonální matice, která má diagonální prvky  $d_1, \dots, d_n$ . Pro každý  $n$ -rozměrný interval  $Q$  je  $L(Q)$  také  $n$ -rozměrný interval a

$$\ell(L(Q)) = d_1 \dots d_n \ell(Q) = JL \ell(Q).$$

Ve stejném poměru dopadají také horní součty k libovolné množině, tedy pro měřitelné množiny máme

$$\lambda(L(E)) = |JL| \lambda(E).$$

Je-li  $L$  izometrické lineární zobrazení, potom zobrazuje jednotkovou kouli  $\{x : |x| \leq 1\}$  na sebe a tudíž  $\alpha = 1$ . Konečně, je-li  $L$  libovolné lineární zobrazení, pak lineární algebra tvrdí, že existují izometrická lineární zobrazení  $P, Q$  (reprezentovaná ortogonálními maticemi) a "diagonální" lineární zobrazení  $D$  tak, že  $L = QDP$ . (Označme  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  kanonickou bázi prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Matice zobrazení  $L^*L$  je symetrická pozitivně definitní a tudíž existuje ortonormální báze  $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  složená z vlastních vektorů matice  $L^*L$ . Existují tedy  $\lambda_i > 0$  tak, že

$$L^*L\vec{f}_i = \lambda_i^2\vec{f}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Potom  $Q, D$  and  $P$  se konstruují jako lineární zobrazení transformující báze na báze:  $P(\vec{f}_i) = \vec{e}_i$ ,  $D(\vec{e}_i) = \lambda_i\vec{e}_i$ ,  $Q(\lambda_i\vec{e}_i) = L(\vec{f}_i)$ . Máme

$$\begin{aligned} (Q\vec{e}_i) \cdot (Q\vec{e}_j) &= \frac{L\vec{f}_i}{\lambda_i} \cdot \frac{L\vec{f}_j}{\lambda_j} = \frac{L^*L\vec{f}_i}{\lambda_i\lambda_j} \cdot \vec{f}_j \\ &= \begin{cases} \vec{f}_i \cdot \vec{f}_j = 1, & i = j, \\ \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i\lambda_j} \vec{f}_i \cdot \vec{f}_j = 0, & i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

tedy  $Q$  je ortogonální. S využitím věty o součinu determinantů dostáváme pro každou měřitelnou množinu  $E \subset \mathbb{R}^n$ , že  $L(E)$  je měřitelná a

$$\begin{aligned} \lambda(L(E)) &= \lambda(D(P(E))) = \det D \lambda(P(E)) = \det D \lambda(E) \\ &= |\det Q \det D \det P| \lambda(E) = |\det(QDP)| \lambda(E) \\ &= |\det L| \lambda(E). \end{aligned}$$

□

**16.9. Značení.** V dalším budeme značit

$$B(z, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - z| < r\}$$

(tedy  $B(z, r)$  je koule o středu  $z$  a poloměru  $r$ ), a pro dané množiny  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  bude

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}.$$

Norma lineárního zobrazení  $L$  je

$$\|L\| := \sup\{Lx : x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}.$$

**16.10. Lemma** (Odhad stěny). *Nechť  $M \geq 1$  a  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je lineární zobrazení s normou  $\|L\| \leq M$ . Nechť  $0 < r < \rho$  a  $Q = [0, \rho]^n$ . Potom pro každou stěnu  $S$  krychle  $Q$  je*

$$\lambda((L(S) + B(0, r))) \leq C_n M^{n-1} \rho^{n-1} r,$$

kde

$$C_n = 2^n \alpha_{n-1} (n-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

a  $\alpha_{n-1}$  je symbol pro míru  $(n-1)$ -rozměrné jednotkové koule.

*Důkaz.* Můžeme předpokládat, že pro nějaký index  $i \in \{1, \dots, n\}$  je  $S = \{x \in Q : x_i = 0\}$ . Kdyby byla  $S = \{x \in Q : x_i = \rho\}$ , měřená množina by byla jen posunutá o vektor  $\rho L\vec{e}_i$ . Najdeme lineární podprostor  $\mathbb{V}$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  tak, aby  $\mathbb{V}$  obsahoval  $L(S)$  a jeho dimenze byla  $n-1$ . Dále najdeme lineární isometrii  $P$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  na sebe tak, aby bylo  $P(\mathbb{V}) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ . Pro každý bod  $x \in S$  je  $|x| \leq \sqrt{n-1} \rho$ , tedy

$$|Lx| \leq \|L\| \sqrt{n-1} \rho \leq M\sqrt{n-1} \rho$$

Potom

$$P(L(S)) \subset B_{n-1}(0, M\sqrt{n-1} \rho) \times \{0\},$$

kde  $B_{n-1}(0, \delta)$  značí  $n-1$ -rozměrnou kouli v  $\mathbb{R}^{n-1}$  o poloměru  $\delta$ . Odtud

$$\begin{aligned} P(L(S) + B(0, r)) &= P(L(S)) + B(0, r) \subset B_{n-1}(0, M\sqrt{n-1} \rho + r) \times (-r, r) \\ &\subset B_{n-1}(0, 2M\sqrt{n-1} \rho) \times (-r, r) \end{aligned}$$

tedy

$$\lambda(L(S) + B(0, r)) = \lambda(P(L(S) + B(0, r))) \leq 2r\alpha_{n-1}(2M\sqrt{n-1} \rho)^{n-1}.$$

□

**16.11. Lemma** (Klíčový odhad). *Nechť  $M \geq 1$  a  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je lineární zobrazení s normou  $\|L\| \leq M$ . Nechť  $0 < r < \rho$  a  $Q = [0, \rho]^n$ . Potom*

$$\lambda((L(Q) + B(0, r)) \setminus L(Q)) \leq 2nC_n M^{n-1} \rho^{n-1} r,$$

kde  $C_n$  je konstanta z [lemmatu 16.10](#).

*Důkaz.* Nechť  $x \in (L(Q) + B(0, r)) \setminus L(Q)$ . Potom existuje  $z \in Q$  tak, že  $|x - Lz| < r$ . Na úsečce spojující  $L^{-1}x$  a  $z$  najdeme bod  $z'$ , který leží na hranici  $Q$ . Můžeme předpokládat  $z = z'$ . Tedy

$$(L(Q) + B(0, r)) \setminus L(Q) \subset \bigcup_S (L(S) + B(z, r)),$$

kde  $S$  probíhá všechny stěny krychle  $Q$ , kterých je  $2n$ . Tedy

$$\lambda((L(Q) + B(0, r)) \setminus L(Q)) \leq 2nC_n M^{n-1} \rho^{n-1} r.$$

□

**16.12. Věta** (o substituci-nerovnost). *Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  je spojitě diferencovatelné zobrazení. Nechť  $E \subset G$  je měřitelná množina. Potom*

$$\ell^*(\varphi(E)) \leq \int_E |J\varphi(t)| dt.$$

*Důkaz.* Můžeme předpokládat, že  $E$  je omezená a  $\bar{E} \subset G$ , jinak bychom  $E$  rozložili na spočetný systém disjunktních množin, pro které by dodatečný předpoklad platil. Zvolme  $\varepsilon > 0$ . Najdeme omezenou otevřenou množinu  $U \subset G$  tak, že  $E \subset U \subset \bar{U} \subset G$  a

$$(41) \quad \int_U |J\varphi(t)| dt \leq \int_E |J\varphi(t)| dt + \varepsilon.$$

Funkce  $J\varphi$  a  $\varphi'$  jsou stejnoměrně spojité na  $U$ . Najdeme tedy konstantu  $M$  a poloměr  $\delta > 0$  tak, aby pro všechna  $s, t \in U$  platilo

$$(42) \quad \begin{aligned} |s - t| < \delta &\implies |J\varphi(s) - J\varphi(t)| < \varepsilon, \\ |s - t| < \delta &\implies \|\varphi'(s) - \varphi'(t)\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \\ &\|\varphi'(t)\| \leq M. \end{aligned}$$

Rozdělíme  $U$  na po dvou disjunktní sjednocení krychlí

$$U = \bigcup_j Q_j,$$

kde každá krychle  $Q_j$  má průměr menší než  $\delta$ . Označme  $z_j$  vrchol krychle  $Q_j$ ,  $\rho_j$  délku její hrany a  $L_j = \varphi'(z_j)$ . Necht  $t \in Q_j$ . Potom

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(z_j) - L(t - z_j)| &\leq \left| \int_0^1 \frac{d}{d\xi} \left( \varphi(z_j + \xi(t - z_j)) - \varphi(z_j) - L_j(\xi(t - z_j)) \right) d\xi \right| \\ &= \left| \int_0^1 \varphi'(z_j + \xi(t - z_j))(t - z_j) - L_j(t - z_j) d\xi \right| \\ &\leq \int_0^1 \|\varphi'(z_j + \xi(t - z_j)) - L_j\| |t - z_j| d\xi \\ &\leq \varepsilon \rho_j. \end{aligned}$$

Tedy

$$\varphi(Q_j) \subset \varphi(z_j) - L(z_j) + L_j(Q_j) + B(0, \varepsilon \rho_j).$$

Z posunuté verze [lemmatu 16.10](#), z [lemmatu 16.8](#) a odhadu [\(42\)](#) dostaneme

$$\begin{aligned} \ell^*(\varphi(Q_j)) &\leq \lambda(L_j(Q_j)) + 2nC_n(M\rho_j)^{n-1}\varepsilon\rho_j \\ &= \int_{Q_j} (JL_j + 2nC_nM^{n-1}\varepsilon) dt \\ &\leq \int_{Q_j} (J\varphi(t) + (1 + 2nC_nM^{n-1})\varepsilon) dt. \end{aligned}$$

Sečtením přes  $j$  a použitím [\(41\)](#) dostaneme

$$\ell^*(\varphi(E)) \leq \sum_j \ell^*(\varphi(Q_j)) \leq \int_U (J\varphi(t) + (1 + 2nC_nM^{n-1})\varepsilon) dt \leq \int_E J\varphi(t) dt + \varepsilon + (1 + 2nC_nM^{n-1})\varepsilon \lambda(U).$$

Limitní přechod  $\varepsilon \rightarrow 0$  dává požadovanou nerovnost.  $\square$

**16.13. Věta (Sardova).** *Necht  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  je spojitě diferencovatelné zobrazení. Necht*

$$Z = \{t \in G : J\varphi(t) = 0\}.$$

*Potom  $\lambda\varphi(Z) = 0$ .*

*Důkaz.* Tvrzení je zřejmým důsledkem předchozí [věty 16.12](#).  $\square$

*Důkaz věty o substituci.* Můžeme předpokládat, že  $M = \varphi(G)$ , tedy uvažujeme měřitelnou funkci  $u$  na  $\varphi(G)$ . Také můžeme předpokládat, že funkce  $u$  je nezáporná. Jestliže zobrazení  $\varphi$  je regulární a prosté, podle věty o inverzním zobrazení je inverzní zobrazení též regulární a prosté. Necht  $E \subset G$  je borelovská množina. Potom  $\varphi(E)$  je také borelovská množina, neboť zobrazení  $\varphi^{-1}$  je spojitě. Podle [věty 16.12](#) máme

$$\lambda(\varphi(E)) \leq \int_E |J\varphi(t)| dt.$$

Odtud také dostaneme, že obraz  $\lambda$ -nulové množiny je  $\lambda$ -nulová množina. Máme-li tedy nezápornou měřitelnou funkci  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ , pak postupně dostaneme měřitelnost funkce  $f \circ \varphi^{-1}$  a vzorec

$$(43) \quad \int_{\varphi(G)} f(\varphi^{-1}(x)) dx \leq \int_G f(t) |J\varphi(t)| dt.$$

Tvrzení už jsme dokázali pro charakteristickou funkci měřitelné množiny a odtud obvyklým postupem přes jednoduché funkce plyne pro každou nezápornou měřitelnou funkci. Vyměníme-li role  $\varphi$  a  $\varphi^{-1}$  a uvažujeme-li nezápornou měřitelnou funkci  $v$  na  $\varphi(G)$ , dostaneme měřitelnost funkce  $v \circ \varphi$  a vzorec

$$(44) \quad \int_G v(\varphi(t)) dt \leq \int_{\varphi(G)} v(x) |J(\varphi^{-1})(x)| dx$$

Uvážíme-li, že

$$\frac{1}{J(\varphi^{-1})(\varphi(t))} = J\varphi(t),$$

položíme-li  $f(t) = u(\varphi(t))$  v [\(43\)](#) a  $v(x) = u(x)/|J(\varphi^{-1})(x)|$  v [\(44\)](#), dostaneme

$$\int_{\varphi(G)} u(x) dx = \int_G u(\varphi(t)) |J\varphi(t)| dt,$$

což jsme měli dokázat. □

## 17. LEBESGUEOVY PROSTORY

**17.1. Definice (Norma).** Připomeňme, že *norma* je nezáporná konečná funkce  $\| \cdot \| : u \mapsto \|u\|$  na lineárním prostoru  $\mathcal{X}$ , která splňuje axiomy

- (N-1)  $\|u\| = 0 \iff u = 0, \quad u \in \mathcal{X},$
- (N-2)  $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|, \quad u \in \mathcal{X}, \lambda \in \mathbb{R},$
- (N-3)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad u, v \in \mathcal{X}$  (trojúhelníková nerovnost).

(zde se budeme zabývat je reálnými lineárními prostory, v komplexním lineárním prostoru by  $\lambda$  muselo probíhat  $\mathbb{C}$ ). Každý *normovaný prostor* (tj. lineární prostor vybavený normou) se považuje za metrický prostor se vzdáleností  $x, y \mapsto \|x - y\|$ .

**17.2. Definice ( $L^p$ -normy).** Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  je prostor s mírou. Je-li  $u$   $\mu$ -měřitelná funkce na  $X$  a  $1 \leq p < \infty$  je reálný exponent, definujeme

$$\|u\|_p := \left( \int_X |u|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Dále definujeme

$$\|u\|_\infty := \inf \left\{ C \geq 0 : |u| \leq C \text{ skoro všude} \right\}.$$

Uvidíme, že funkce  $\| \cdot \|_p, \| \cdot \|_\infty$  splňují vlastnosti normy až na jednu:  $\|u\| = 0$  znamená, že  $u = 0$  skoro všude, což nemusí implikovat  $u = 0$  (tj. úplně všude). Nechť  $p \in [1, +\infty]$ . Zavedme dočasně prostor  $\mathcal{L}^p(X)$  všech  $\mu$ -měřitelných funkcí  $u$  na  $X$ , pro něž  $\|u\|_p < \infty$ . Na  $\mathcal{L}^p(X)$  uvažujme ekvivalenci

$$u \sim v \quad \text{jestliže } u = v \text{ skoro všude.}$$

Abychom vyhověli všem axiomům normovaného lineárního prostoru, měli bychom definovat prostor  $L^p(X) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{S}, \mu)$  jako “faktorprostor”

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X) / \sim$$

Faktorizace je jedna ze základních operací obecné teorie množin. Znamená to, že prvky prostoru  $L^p(X)$  jsou třídy navzájem ekvivalentních prvků. Je-li  $u \in \mathcal{L}^p(X)$ , označme

$$[u] = \{v \in \mathcal{L}^p(X) : v \sim u\},$$

potom

$$L^p(X) = \{[u] : u \in \mathcal{L}^p(X)\}.$$

Na prostorech  $L^p$  je zapotřebí zavést algebraické operace, uspořádání a normu, neboli např.

$$[u] + [v] := [u + v], \quad \|[u]\|_p := \|u\|_p$$

a

$$[u] \leq [v], \text{ když existují } \tilde{u} \in [u] \text{ a } \tilde{v} \in [v] \text{ tak, že } \tilde{u} \leq \tilde{v}$$

V matematické literatuře se tento formalismus nepoužívá a dává se přednost méně přesnému, ale přehlednějšímu vyjadřování. Toho se budeme držet i my. Namísto dvou prostorů  $\mathcal{L}^p$  a  $L^p$  budeme používat jen jeden prostor značený  $L^p$ , jehož prvky budou funkce. Budeme mluvit o  $L^p$ -normě funkcí, i když to norma není. Důležité je, že “víme, jak to spravit”, pokud bychom se chtěli odvolávat na obecnou teorii normovaných prostorů.

$L^p$ -norma splňuje všechny axiomy normy až na výše zmíněnou konvenci. Ověření je triviální s výjimkou trojúhelníkové nerovnosti pro  $1 < p < +\infty$ . Tuto dokážeme níže pod názvem “Minkowského nerovnost”.

**17.3. Věta (Youngova nerovnost).** *Jsou-li  $a, b \geq 0, p, q \in (1, \infty), pq = p + q$ , pak*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Důkaz.* Pro  $a = 0$  nebo  $b = 0$  je důkaz triviální. Jinak z konkavity logaritmu dostáváme, že

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) = \ln(ab).$$

□



17.4. **Věta** (Hölderova nerovnost). *Jsou-li  $u, v$   $\mu$ -měřitelné funkce na  $X$ ,  $p, q \in (1, \infty)$ ,  $pq = p + q$ , pak*

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

*Rovnost nastává, právě když existují  $a, b \in [0, \infty)$  (aspoň jedno z nich nenulové) tak, že  $a|u|^p = b|v|^q$  skoro všude.*

*Důkaz.* Označme

$$s = \|u\|_p, \quad t = \|v\|_q.$$

Můžeme předpokládat, že funkce  $u, v$  jsou nezáporné a že  $0 < s < \infty$ ,  $0 < t < \infty$ . Potom pro skoro každé  $x \in X$  máme z Youngovy nerovnosti

$$\frac{u(x)}{s} \frac{v(x)}{t} \leq \frac{u(x)^p}{ps^p} + \frac{v(x)^q}{qt^q}.$$

Zintegrovaním podle  $x$  dostaneme

$$\frac{1}{st} \int_X uv \, d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tvrzení o rovnosti dostaneme analýzou důkazu. □

17.5. **Věta** (Minkowského nerovnost). *Jsou-li  $u, v$  měřitelné funkce na  $X$ ,  $p \in (1, \infty)$ , pak*

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

*Důkaz.* Můžeme předpokládat, že  $0 < \|u\|_p < \infty$ ,  $0 < \|v\|_p < \infty$ . Pro skoro každé  $x \in X$  máme

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \left( |u(x)|^p + |v(x)|^p \right)^{1/p}, \\ |v(x)| &\leq \left( |u(x)|^p + |v(x)|^p \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

tedy po sečtení a umocnění na  $p$

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq 2^p(|u(x)|^p + |v(x)|^p),$$

takže  $\|u + v\|_p < \infty$ . S pomocí Hölderovy nerovnosti, kde definujeme  $q = \frac{p}{p-1}$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \int_X |u + v|^p \, d\mu &\leq \int_X |u + v|^{p-1} |u| \, d\mu + \int_X |u + v|^{p-1} |v| \, d\mu \\ (45) \quad &\leq \left( \int_X |u + v|^p \, d\mu \right)^{1/q} \left( \int_X |u|^p \, d\mu \right)^{1/p} \\ &\quad + \left( \int_X |u + v|^p \, d\mu \right)^{1/q} \left( \int_X |v|^p \, d\mu \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Jelikož

$$0 < \left( \int_X |u + v|^p \, d\mu \right)^{1/q} < \infty,$$

můžeme tímto výrazem vydělit obě strany nerovnosti (45) a dostaneme požadovaný výsledek. □

17.6. **Věta** (Úplnost prostorů  $L^p$ ). *Nechť  $\{f_j\}$  je posloupnost prvků  $L^p(X)$ , cauchyovská v normě  $\|\dots\|_p$ . Pak existuje  $f \in L^p(X)$  tak, že  $\|f_j - f\|_p \rightarrow 0$ . Dále existuje posloupnost  $\{g_j\}$  vybraná z  $\{f_j\}$  tak, že  $g_j \rightarrow f$   $\mu$ -skoro všude.*

*Důkaz.* Důkaz provedeme pro  $p < \infty$ ; případ  $p = \infty$  je odlišný a snadnější. Jelikož  $\{f_j\}$  je cauchyovská posloupnost, lze z ní vybrat posloupnost  $g_j$  tak, že pro všechna  $j = 1, 2, \dots$  platí

$$(46) \quad \|g_{j+1} - g_j\| < 2^{-j}.$$

Položme

$$\begin{aligned} h_k &= |g_1| + |g_2 - g_1| + \dots + |g_k - g_{k-1}|, \\ h &= \lim_{k \rightarrow \infty} h_k \end{aligned}$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pro  $L^p$ -normu a (46) dostaneme

$$\|h_k\|_p \leq \|g_1\|_p + \sum_{j=1}^{k-1} \|g_{j+1} - g_j\|_p \leq \|g_1\|_p + 1.$$

Podle Leviho věty 4.13 a předchozího odhadu je

$$\int_X h^p d\mu = \lim_k \int_X h_k^p d\mu = \lim_k \|h_k\|_p^p \leq (\|g_1\|_p + 1)^p$$

Funkce  $h^p$  je tedy integrovatelná a tím spíš skoro všude konečná (viz věta 4.8 (c)). Uvažujme bod  $x$ , v němž  $h(x) < \infty$ . Potom řada

$$g_1(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (g_{j+1}(x) - g_j(x))$$

konverguje, neboť konverguje řada absolutních hodnot. Tím jsme dokázali existenci limity

$$f(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x)$$

v každém takovém bodě  $x$ . Lebesgueova věta 6.2 s majorantou  $h^p$  dává

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X |f - g_j|^p d\mu = \int_X \lim_{j \rightarrow \infty} |f - g_j|^p d\mu = 0.$$

Znovu použijeme, že  $\{f_j\}$  je cauchyovská posloupnost, a dostáváme

$$\|f - f_j\|_p \leq \|f - g_j\|_p + \|g_j - f_j\|_p \rightarrow 0.$$

Tvrzení o konvergenci skoro všude jsme dokázali v průběhu. □

**17.7. Věta** (Hustota jednoduchých funkcí). *Jednoduché  $L^p$ -funkce jsou husté v  $L^p(X)$ ,  $1 \leq p < \infty$ .*

*Důkaz.* Necht  $f \in L^p(X)$ . Chceme najít posloupnost  $\{f_j\}$  jednoduchých funkcí tak, aby  $\|f_j - f\|_p \rightarrow 0$ . Můžeme předpokládat, že  $f \geq 0$ . Podle věty 3.12 existují jednoduché funkce  $f_j \geq 0$  tak, že  $f_j \nearrow f$ . Z Lebesgueovy věty 6.2 (majoranta  $|f|^p$ ) dostaneme

$$\int_X |f_j - f|^p dx \rightarrow 0.$$

□

## 18. VĚTY O KONVERGENCI

Buď  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  prostor s mírou.

**18.1. Větička** (Čebyševova nerovnost). *Necht  $f$  je měřitelná funkce na  $D \in \mathcal{S}$ ,  $p > 0$  a  $a > 0$ . Potom*

$$\mu(D \cap \{f \geq a\}) \leq \frac{\int_D |f|^p d\mu}{a^p}.$$

*Důkaz.* Zřejmě

$$\mu(D \cap \{|f| \geq a\}) \leq \int_{D \cap \{|f| \geq a\}} \frac{|f|^p}{a^p} d\mu \leq \frac{\int_D |f|^p d\mu}{a^p}.$$

□

**18.2. Věta** ( $\varepsilon$ - $\delta$  spojitost integrálu). *Necht  $f$  je integrovatelná funkce na  $X$ . Potom ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro všechna  $E \in \mathcal{S}$  platí*

$$\mu(E) < \delta \implies \int_E |f| d\mu < \varepsilon.$$

*Důkaz.* Necht

$$E_j = \{|f| \geq j\}.$$

Podle Lebesgueovy věty 6.2 (majoranta  $|f|$ ) je

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{E_j} |f| d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X |f| \chi_{E_j} d\mu = 0,$$

takže existuje  $k \in \mathbb{N}$  tak, že

$$\int_{E_k} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť  $E \in \mathcal{S}$ ,  $\mu(E) < \delta := \frac{\varepsilon}{2k}$ . Potom

$$\begin{aligned} \int_E |f| d\mu &= \int_{E \cap E_k} |f| d\mu + \int_{E \setminus E_k} |f| d\mu \\ &\leq \int_{E_k} |f| d\mu + k \mu(E) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

□

18.3. **Definice** (Limity posloupností množin). Nechť  $\{E_j\}$  je posloupnost množin. Značíme

$$\begin{aligned} \limsup_{j \rightarrow \infty} E_j &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j, \\ \liminf_{j \rightarrow \infty} E_j &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} E_j, \end{aligned}$$

18.4. **Věta** (Borel–Cantelliho). Nechť  $\{E_j\}$  je posloupnost měřitelných podmnožin  $X$ . Jestliže

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) < \infty,$$

potom

$$\mu\left(\limsup_j E_j\right) = 0.$$

*Důkaz.* Máme

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right) &\leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \mu\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right) \\ &\leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=k}^{\infty} \mu(E_j) = 0. \end{aligned}$$

□

18.5. **Definice** (Konvergence v míře). Nechť  $f, f_j, j = 1, 2, \dots$ , jsou měřitelné funkce na  $D \in \mathcal{S}$ . Řekneme, že  $f_j \rightarrow f$  v míře, jestliže pro každé  $\varepsilon > 0$  platí

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(\{|f_j - f| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

18.6. **Věta** (Jegorovova). Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  je prostor s mírou, která je konečná a  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  je  $\mathcal{S}$ -měřitelná. Nechť  $\{f_j\}$  je posloupnost  $\mathcal{S}$ -měřitelných funkcí na  $X$ . Předpokládejme, že  $f_j \rightarrow f$  skoro všude. Potom pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje množina  $G \in \mathcal{S}$  tak, že  $\mu(G) < \varepsilon$  a  $f_j \rightarrow f$  stejnoměrně na  $X \setminus G$ .

*Důkaz.* Můžeme předpokládat, že  $f = 0$ . Zvolme  $\varepsilon > 0$ . Označme

$$E_k^j = \bigcup_{i \geq j} \{|f_i| \geq 1/k\}.$$

Potom

$$\lim_j \mu(E_k^j) = \mu\left(\bigcap_j E_k^j\right) = 0$$

(zde jsme využili, že  $\mu(X) < \infty$ , viz větička 1.16(c)), a proto existuje  $G_k \in \{E_k^j : j \in \mathbb{N}\}$  tak, že

$$\mu(G_k) < 2^{-k} \varepsilon.$$

Položme

$$G = \bigcup_k G_k.$$

Potom  $\mu(G) < \varepsilon$ . Je-li dáno přirozené  $k$ , potom existuje přirozené  $j$  tak, že  $G_k = E_k^j$ . Je-li  $i \geq j$  a  $x \notin G$ , potom  $|f_i(x)| < 1/k$ . Tedy  $f_j \rightarrow 0$  stejnoměrně na  $X \setminus G$ . □

18.7. **Poznámky** (Vztah konvergence v míře, konvergence skoro všude a konvergence v  $L^p$ ). Nechť  $f, f_j$  jsou měřitelné funkce na  $X$ . Připomeňme, že konvergence  $f_j \rightarrow f$  v  $L^p$  znamená podle definice  $\|f_j - f\|_p \rightarrow 0$ .

(a) Nechť  $f_j \rightarrow f$  v  $L^p(X)$ . Potom  $f_j \rightarrow f$  v míře.

To je snadný důsledek Čebyševovy nerovnosti (větička 18.1).

(b) Nechť  $f_j \rightarrow f$  v míře. Nechť existuje “integrovatelná majoranta”  $g \in L^p(X)$ ,  $p < \infty$ , tak, že  $|f_j| \leq g$  skoro všude,  $j = 1, 2, \dots$ . Potom  $f_j \rightarrow f$  v  $L^p(X)$ .

Bez újmy na obecnosti  $f = 0$ . Pro každé  $\varepsilon > 0$  máme

$$\begin{aligned} \int_X |f_j|^p d\mu &\leq \int_{\{|f_j| \leq \varepsilon g\}} |f_j|^p d\mu + \int_{\{g < \varepsilon\}} |f_j|^p d\mu + \int_{\{|f_j| \geq \varepsilon^2\}} |f_j|^p d\mu \\ &\leq \varepsilon \int_X g^p d\mu + \int_{\{g < \varepsilon\}} g^p d\mu + \int_{\{|f_j| \geq \varepsilon^2\}} g^p d\mu. \end{aligned}$$

První integrál jde k nule pro  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Druhý také, to plyne z Lebesgueovy věty 6.2 s majorantou  $g^p$ . Třetí integrál jde k nule pro  $j \rightarrow \infty$  z věty 18.2 a definice konvergence v míře.

(c) Nechť  $\mu(X) < \infty$ . Jestliže  $f_j \rightarrow f$  skoro všude, pak  $f_j \rightarrow f$  v míře.

To je snadný důsledek Jegerovy věty 18.6.

(d) Jestliže  $f_j \rightarrow f$  v míře, pak existuje vybraná posloupnost, která konverguje skoro všude.

Bez újmy na obecnosti  $f = 0$ . Položme  $f_j^{(0)} = f_j$  a pro  $m = 1, 2, \dots$  najdeme  $\{f_j^{(m)}\}_j$  vybranou z  $\{f_j^{(m-1)}\}_j$  tak, že

$$\sum_j \mu(\{|f_j^{(m)}| \geq 1/m\}) < \infty.$$

Podle Borel–Cantelliho věty 18.4 je pak i

$$\mu(E_m) = 0, \text{ kde } E_m = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} \{|f_j^{(m)}| \geq 1/m\}.$$

Zřejmě

$$x \notin E_m \implies \limsup_j |f_j^{(m)}(x)| \leq 1/m.$$

Položme  $g_j = f_j^{(j)}$ . Potom pro každé  $m$  je  $\{g_j\}_j$  až na konečně mnoho členů vybraná posloupnost z  $\{f_j^{(m)}\}_j$ , tedy  $g_j \rightarrow 0$  skoro všude.

## 19. DERIVOVÁNÍ A ROZKLAD MĚR

19.1. **Definice** (Absolutní spojitost a singulárnost). Nechť  $(X, \mathcal{S})$  je měřitelný prostor. Nechť  $\mu$  a  $\nu$  jsou míry na  $\mathcal{S}$ . Řekneme, že  $\nu$  je *absolutně spojitá vzhledem k  $\mu$* , značení  $\nu \ll \mu$ , jestliže pro každou  $E \in \mathcal{S}$  platí

$$(47) \quad \mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0.$$

Řekneme, že  $\nu$  a  $\mu$  jsou navzájem *singulární*, značení  $\mu \perp \nu$ , jestliže existují  $X_a, X_s \in \mathcal{S}$  tak, že

$$(48) \quad X = X_a \cup X_s, \quad \mu(X_s) = \nu(X_a) = 0.$$

19.2. **Definice** (Míra s hustotou). Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  je prostor s mírou a  $f$  je nezáporná  $\mu$ -měřitelná funkce na  $X$ . Položme

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{S}.$$

Potom  $\nu$  je míra, která se nazývá *míra s hustotou  $f$*  (vzhledem k  $\mu$ ). Naopak  $f$  se v této situaci nazývá *hustota* nebo *Radon–Nikodýmova derivace* míry  $\nu$  (vzhledem k  $\mu$ ) a značí  $\frac{d\nu}{d\mu}$ . Má-li  $\nu$  hustotu vzhledem k  $\mu$ , pak  $\nu$  je zřejmě absolutně spojitá. Opak platí také, ale není již tak snadný, je to tvrzení hlavní věty kapitoly, věty 19.4.

19.3. **Větička**. Nechť  $\mu, \nu$  jsou  $\sigma$ -konečné míry na  $(X, \mathcal{S})$  a  $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ . Potom pro každou  $\mu$ -měřitelnou funkci  $g$  na  $E \in \mathcal{S}$  platí

$$\int_E g d\nu = \int_E gf d\mu,$$

pokud integrál aspoň na jedné straně má smysl.

*Důkaz.* Pro charakteristické funkce to platí a přechod přes jednoduché a nezáporné měřitelné funkce k obecnému případu kopíruje konstrukci integrálu.  $\square$

19.4. **Věta** (Radon–Nikodýmova). *Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  je prostor se  $\sigma$ -konečnou mírou a  $\nu$  je  $\sigma$ -konečná míra na  $\mathcal{S}$ . Nechť  $\nu \ll \mu$ . Potom existuje právě jedna (až na modifikace na množinách  $\mu$ -míry nula)  $\mu$ -měřitelná funkce  $f$  tak, že*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$$

pro každou  $E \in \mathcal{S}$ , neboli  $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ . Pokud  $\nu$  je konečná,  $f$  je  $\mu$ -integrovatelná.

*Důkaz.* Důkaz provedeme v případě, že obě míry jsou konečné, obecný případ se dostane ze speciálního rutinními rozdělení na podmnožiny, na nichž jsou obě míry konečné, definováním  $f$  na každé z nich a slepením.

Položme  $\sigma = \mu + \nu$  a definujme funkcionál  $J$  na  $L^2(\sigma) = L^2(X, \mathcal{S}, \sigma)$  předpisem

$$J(v) = \int_X v^2 \, d\sigma - 2 \int_X v \, d\nu.$$

Hledáme  $u \in L^2(\sigma)$  tak, aby platilo

$$J(u) = \min\{Jv : v \in L^2(\sigma)\}.$$

Motiv je následující: Kdyby existovala funkce  $w = \frac{d\nu}{d\sigma}$ , pak by bylo podle [větičky 19.3](#)

$$J(v) = \int_X |v - w|^2 \, d\sigma - \int_X w^2 \, d\sigma \geq - \int_X w^2 \, d\sigma, \quad v \in L^2(\sigma)$$

a

$$J(w) = - \int_X |w|^2 \, d\sigma = \min\{Jv : v \in L^2(\sigma)\}.$$

Položme tedy

$$s = \inf\{Jv : v \in L^2(\sigma)\}.$$

Nejprve ukážeme, že  $s > -\infty$ . Jelikož

$$\int v \, d\nu \leq \int |v| \, d\nu \leq \int |v| \, d\sigma, \quad v \in L^2(\sigma),$$

je

$$J(v) \geq \int_X (|v|^2 - 2|v|) \, d\sigma = \int_X ((|v| - 1)^2 - 1) \, d\sigma \geq -\sigma(X) > -\infty, \quad v \in L^2(\sigma).$$

Uvažujme tzv. minimalizující posloupnost, posloupnost  $\{u_j\}_j$  funkcí z  $L^2(\sigma)$  splňujících

$$J(u_j) \rightarrow s.$$

Nechť  $i, j \in \mathbb{N}$ , potom

$$(49) \quad 2 \int_X \left| \frac{u_j - u_i}{2} \right|^2 \, d\sigma + 2 \int_X \left| \frac{u_j + u_i}{2} \right|^2 \, d\sigma = \int_X |u_i|^2 \, d\sigma + \int_X |u_j|^2 \, d\sigma$$

a

$$(50) \quad -4 \int_X \frac{u_j + u_i}{2} \, d\nu = -2 \int_X u_j \, d\nu - 2 \int_X u_i \, d\nu,$$

sečtením (49) a (50) dostaneme

$$2 \int_X \left| \frac{u_j - u_i}{2} \right|^2 \, d\sigma + 2J\left(\frac{u_j + u_i}{2}\right) = J(u_j) + J(u_i).$$

Odtud

$$\frac{1}{2} \int_X |u_j - u_i|^2 \, d\sigma = -2J\left(\frac{u_j + u_i}{2}\right) + J(u_j) + J(u_i) \leq -2s + J(u_j) + J(u_i) \rightarrow 0$$

pro  $i, j \rightarrow \infty$ . Tedy posloupnost  $\{u_j\}_j$  je cauchyovská v normě  $L^2(\sigma)$  a podle [věty 17.6](#) existuje limita  $u$  posloupnosti  $\{u_j\}_j$  v  $L^2(\sigma)$ . Podle této věty též můžeme předpokládat, že  $u_j \rightarrow u$  skoro všude (jinak přejdeme k podposloupnosti). Potom Fatouovo lemma dává

$$\int_X |u|^2 \, d\sigma \leq \liminf_j \int_X |u_j|^2 \, d\sigma$$

a s pomocí Hölderovy nerovnosti (věta 17.4)

$$\left| \int_X u_j d\nu - \int_X u d\nu \right| \leq \int_X |u_j - u| d\nu \leq \int_X |u_j - u| d\sigma \leq \left( \int_X |u_j - u|^2 d\sigma \right)^{1/2} (\sigma(X))^{1/2} \rightarrow 0.$$

Tedy

$$s \leq J(u) \leq \liminf_j J(u_j) = s.$$

Dokázali jsme, že  $u$  je minimizér  $J$ . Pro každou  $v \in L^2(\sigma)$  a  $t > 0$  máme

$$0 \leq \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \int_X \frac{|u+tv|^2 - |u|^2}{t} d\sigma - 2 \int_X \frac{u+tv-u}{t} d\nu = \int_X (2uv - tv^2) d\sigma - \int_X 2v d\nu.$$

Limitní přechod  $t \rightarrow 0_+$  dává

$$\int_X uv d\sigma \geq \int_X v d\nu.$$

Zvolme  $E \in \mathcal{S}$  a aplikujme předchozí odhad  $v = \pm \chi_E$ , dostaneme

$$\int_E u d\sigma = \nu(E).$$

Tedy našli jsme zatím  $u = \frac{d\nu}{d\sigma}$ . Nechť  $F \in \mathcal{S}$  a  $u \geq 1$  na  $F$ . Potom

$$\nu(F) = \int_F u d\sigma \geq \sigma(F) = \nu(F) + \mu(F),$$

tedy  $\mu(F) = 0$  a z absolutní spojitosti  $\nu$  dostáváme též  $\nu(F) = 0$  a  $\sigma(F) = 0$ . Tedy  $u < 1$   $\sigma$ -skoro všude. Ještě jednodušší je ukázat, že  $u \geq 0$   $\sigma$ -s.v., to ponecháme čtenáři. Nyní poloźme

$$g = \frac{1}{1-u}, \quad f = \frac{u}{1-u}.$$

Potom podle větičky 19.3 platí

$$\int_E f d\mu + \int_E f d\nu = \int_E f d\sigma = \int_E ug d\sigma = \int_E g d\nu.$$

Poloźme  $X_k = \{g \leq k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Potom  $f, g$  jsou omezené měřitelné na  $X_k$  a tudíž můžeme odečíst

$$\int_{E \cap X_k} f d\mu = \int_{E \cap X_k} (g - f) d\nu = \nu(E \cap X_k).$$

Limitní přechod  $X_k \nearrow X$  dává

$$\int_E f d\mu = \nu(E), \quad E \in \mathcal{S},$$

neboli  $f = \frac{d\mu}{d\sigma}$ . Tím jsme dokázali existenci, tvrzení o jednoznačnosti je snadné.  $\square$

**19.5. Věta** (Lebesgueova o rozkladu). *Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  je prostor se  $\sigma$ -konečnou mírou a  $\nu$  je  $\sigma$ -konečná míra na  $\mathcal{S}$ . Potom existuje právě jeden rozklad  $\nu = \nu_a + \nu_s$ , kde  $\nu_a$  a  $\nu_s$  jsou míry na  $(X, \mathcal{S})$ ,  $\nu_a \ll \mu$  a  $\nu_s \perp \mu$ .*

*Důkaz.* Důkaz provedeme podrobně opět jen v případě, kdy  $\mu$  a  $\nu$  jsou konečné.

Existence: Jako v důkazu věty 19.4 najdeme  $u = \frac{d\nu}{d\sigma}$ , kde  $\sigma = \mu + \nu$ . Poloźme

$$X_a = \{u < 1\}, \quad X_s = \{u = 1\},$$

Definujme míry  $\nu_a$  a  $\nu_s$  předpisem

$$\nu_a(E) = \nu(E \cap X_a), \quad \nu_s(E) = \nu(E \cap X_s), \quad E \in \mathcal{S}.$$

Potom

$$\nu_s(X_a) = \nu(X_s \cap X_a) = 0,$$

$$\mu(X_s) = \sigma(X_s) - \nu(X_s) = \sigma(X_s) - \int_{X_s} u d\sigma = 0,$$

tedy  $\mu$  a  $\nu_s$  jsou navzájem singulární. Nechť nyní  $E \in \mathcal{S}$ ,  $\mu(E) = 0$ . Předpokládejme, že  $\nu_a(E) > 0$ . Potom i  $\sigma(E) > 0$  a  $\mu(E \cap X_a) = 0$  a tudíž

$$\nu_a(E) = \nu(E \cap X_a) = \int_{E \cap X_a} u d\sigma < \sigma(E \cap X_a) = \mu(E \cap X_a) + \nu(E \cap X_a) = \nu(E \cap X_a) = \nu_a(E).$$

To je spor, takže  $\nu_a(E) = 0$  a  $\nu_a \ll \mu$ .

Jednoznačnost: Buď  $u = \frac{d\nu}{d\sigma}$  a buď  $\nu = \nu_a + \nu_s$  rozklad  $\nu$  na absolutně spojitou a singulární část. Potom existuje disjunktní rozklad  $X = X_a \cup X_s$ , kde  $X_a, X_s \in \mathcal{S}$  a  $\nu_s(X_a) = \mu(X_s) = 0$ . Jelikož  $\nu_a \ll \mu$ , je  $\nu_a(X_s) = 0$ . Rozklad tedy musí být tvaru

$$\nu_a(E) = \nu(E \cap X_a), \quad \nu_s(E) = \nu(E \cap X_s), \quad E \in \mathcal{S}.$$

Je-li  $E \in \mathcal{S}$ ,  $E \subset X_s$ , pak  $\mu(E) = 0$ ,  $\nu(E) = \sigma(E)$ , tedy  $u = 1$   $\sigma$ -s.v. na  $E$ . Naopak

$$\sigma(\{u = 1\} \setminus X_s) = \sigma(\{u = 1\} \cap X_a) = \nu(\{u = 1\} \cap X_a),$$

tedy

$$\mu(\{u = 1\} \cap X_a) = 0$$

a

$$\nu(\{u = 1\} \cap X_a) = \nu_a(\{u = 1\} \cap X_a) = 0.$$

Odtud  $\sigma(\{u = 1\} \setminus X_s) = 0$ , tedy  $X_s$  se liší od  $\{u = 1\}$  nejvýš o množinu  $\sigma$ -míry nula a rozklad tedy musí být stejný jako rozklad popsáný v existenční části.  $\square$

**19.6. Definice** (Absolutně spojitá a singulární část). Míře  $\nu_a$  z věty 19.5 se říká *absolutně spojitá část* míry  $\nu$  a míře  $\nu_s := \nu - \nu_a$  se říká *singulární část* míry  $\nu$ . Rozkladu  $\nu = \nu_a + \nu_s$  se říká *Lebesgueův rozklad* míry  $\nu$ .

**19.7. Definice** (Spojité a diskrétní míry). Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  je prostor s mírou. Předpokládejme, že  $\mathcal{S}$  obsahuje všechny jednobodové množiny. Řekneme, že míra  $\mu$  na  $\mathcal{S}$  je

- *spojitá*, jestliže  $\mu(\{x\}) = 0$  pro všechna  $x \in X$ ,
- *diskrétní*, jestliže existuje spočetná množina  $S \subset X$  tak, že  $\mu(X \setminus S) = 0$ .

**19.8. Větička** (Charakterizace diskrétních měr). Míra  $\mu$  je *diskrétní*, právě když existuje spočetná množina  $S \subset X$  tak, že

$$\mu(E) = \sum_{x \in E \cap S} \mu(\{x\}), \quad E \in \mathcal{S}.$$

*Důkaz.* Důkaz je zřejmý.  $\square$

**19.9. Věta** (Rozklad míry na spojitou a diskrétní část). Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  je prostor se  $\sigma$ -konečnou mírou. Předpokládejme, že  $\mathcal{S}$  obsahuje všechny jednobodové množiny. Potom existuje rozklad

$$\mu = \mu_c + \mu_d,$$

kde  $\mu_c$  je *spojitá* a  $\mu_d$  je *diskrétní*.

*Důkaz.* Položme

$$S = \{x : \mu(\{x\}) > 0\}.$$

Jelikož  $\mu$  je  $\sigma$ -konečná a jednobodové množiny jsou měřitelné, množina  $S$  je spočetná a měřitelná. Definujme míry  $\mu_c$  a  $\mu_d$  předpisem

$$\mu_c(E) = \mu(E \setminus S), \quad \mu_d(E) = \mu(E \cap S), \quad E \in \mathcal{S}.$$

Zřejmě  $\mu_c$  je *spojitá* a  $\mu_d$  je *diskrétní*.  $\square$

## 20. ZNAMÉNKOVÉ MÍRY

**20.1. Definice** (Znaménková míra, vektorová míra). Nechť  $(X, \mathcal{S})$  je měřitelný prostor a  $\mathbb{V} = (\mathbb{V}, |\cdot|)$  je normovaný lineární prostor (dále jen “NLP”). Množinová funkce  $\nu : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{V}$  se nazývá *vektorová míra* na  $\mathcal{S}$ , jestliže splňuje

$$(ZVM-1) \quad \nu(\emptyset) = 0,$$

$$(ZVM-2) \quad \text{jestliže } A_j \in \mathcal{S}, j = 1, 2, \dots, \text{ jsou po dvou disjunktní, } A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \text{ potom}$$

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j).$$

Součet v (ZVM-2) se chápe ve smyslu konvergence částečných součtů v normě prostoru  $\mathbb{V}$ . V dalším se budeme zabývat především *znaménkovými měrami*, tj. “vektorovými” měrami s hodnotami v  $\mathbb{R}$ . Jelikož  $\mathbb{R}$  je také normovaný lineární prostor, můžeme znaménkové míry chápat jako zvláštní případ právě definovaného pojmu. Někdy se pro znaménkovou míru používá termín *náboj*, nebo *reálná míra*. Také se hojně studují *komplexní míry*, tj. s hodnotami ve  $\mathbb{V} = \mathbb{C}$ . Oproti míře, znaménková míra může nabývat i záporných hodnot, ale nesmí nabývat hodnot  $+\infty, -\infty$ .

Snadno nahlédneme, že systém všech znaménkových (nebo vektorových) měr tvoří vektorový prostor.

Omezení na konečné hodnoty vylučuje Lebesgueovu míru nebo některé množinové funkce, které lze získat jako rozdíly nezáporných měr. Lze uvažovat zobecnění znaménkových měr, které zahrne i tyto případy, ale zde se tím nebudeme zabývat.

**20.2. Příklady.** (a) Je-li  $f$   $\mu$ -integrovatelná funkce, pak

$$E \mapsto \int_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{S}$$

je znaménková míra.

(b) Jsou-li  $\mu, \nu$  konečné míry, pak  $\mu - \nu$  je znaménková míra.

**20.3. Definice** (Variace vektorové míry). Nechť  $(X, \mathcal{S})$  je měřitelný prostor a  $\nu$  je vektorová míra na  $\mathcal{S}$ . Pro  $E \in \mathcal{S}$  definujeme

$$|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_j |\nu(E_j)| : E_j \in \mathcal{S} \text{ jsou po dvou disjunktní, } \bigcup_j E_j \subset E \right\}.$$

Množinová funkce  $|\nu|$  se nazývá *variace vektorové míry*  $\nu$ . V definici variace není podstatné, zda uvažujeme konečné či nekonečné součty. Také můžeme uvažovat jen takové součty, že sjednocení množin  $E_j$  je celé  $E$ .

**20.4. Věta** (Variace míry je míra). *Nechť  $(X, \mathcal{S})$  je měřitelný prostor a  $\mathbb{V}$  je NLP. Nechť  $\nu : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{V}$  je vektorová míra na  $\mathcal{S}$ . Potom  $|\nu|$  je míra na  $\mathcal{S}$ .*

*Důkaz.* Uvažujme posloupnost  $\{E_j\}$  po dvou disjunktních měřitelných množin a jejich sjednocení  $E$ . Jsou-li

$$\sum_i |\nu(E_j^i)|$$

dolní součty k  $|\nu|(E_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , pak

$$\sum_{i,j} |\nu(E_j^i)|$$

je dolní součet k  $|\nu|(E)$ . Odtud

$$(51) \quad |\nu|(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\nu|(E_j).$$

Naopak, buď

$$\sum_k |\nu(A_k)|$$

dolní součet k  $|\nu|(E)$ . Potom z (ZVM-2) dostaneme

$$|\nu(A_k)| = \left| \sum_j \nu(A_k \cap E_j) \right| \leq \sum_j |\nu|(A_k \cap E_j), \quad k = 1, 2, \dots$$

a z (51) plyne

$$\sum_k |\nu|(A_k \cap E_j) \leq |\nu|(E_j), \quad j = 1, 2, \dots$$

Tedy

$$\begin{aligned} \sum_k |\nu(A_k)| &\leq \sum_k \left( \sum_j |\nu|(A_k \cap E_j) \right) = \sum_j \left( \sum_k |\nu|(A_k \cap E_j) \right) \\ &\leq \sum_j |\nu|(E_j). \end{aligned}$$



Přechodem k supremu přes všechny dolní součty k  $|\nu|(E)$  dostáváme

$$(52) \quad |\nu|(E) \leq \sum_j |\nu|(E_j).$$

Z (51) a (52) plyne, že  $|\nu|$  je míra. □

**20.5. Lemma.** Nechť  $(X, \mathcal{S})$  je měřitelný prostor a  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$  je vektorová míra. Nechť  $\nu$  je omezená na podmnožinách  $A \in \mathcal{S}$ . Potom  $|\nu|(A) < \infty$ .

*Důkaz.* Nechť  $C = \sup\{|\nu(B)| : B \in \mathcal{S}, B \subset A\}$ . Mějme rozklad  $\{A_k\}_{k=1}^m$  množiny  $A$ . Označme

$$M_i^+ = \{k : \nu_i(A_k) > 0\}, \quad M_i^- = \{k : \nu_i(A_k) < 0\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Potom

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m |\nu(A_k)| &\leq \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n |\nu_i(A_k)| = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k \in M_i^+} \nu_i(A_k) - \sum_{k \in M_i^-} \nu_i(A_k) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \nu_i \left( \bigcup_{k \in M_i^+} A_k \right) - \nu_i \left( \bigcup_{k \in M_i^-} A_k \right) \right) \leq 2Cn. \end{aligned}$$

Přechodem k supremu přes všechny dolní součty k  $|\nu|(A)$  dostaneme

$$|\nu|(A) \leq 2Cn. \quad \square$$

**20.6. Lemma.** Nechť  $(X, \mathcal{S})$  je měřitelný prostor,  $\nu : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$  je vektorová míra a  $A \in \mathcal{S}$ . Jestliže  $|\nu|(A) = \infty$ , potom existuje  $B \in \mathcal{S}$  tak, že  $B \subset A$ ,  $|\nu(B)| \geq 1$  a  $|\nu|(A \setminus B) = \infty$ .

*Důkaz.* Z lemmatu 20.5 víme, že  $\nu$  není omezená na podmnožinách  $A$ , tedy existuje  $E \in \mathcal{S}$  tak, že  $E \subset A$  a  $|\nu(E)| > |\nu(A)| + 1$ . Potom ovšem  $|\nu(E)| \geq 1$  a z trojúhelníkové nerovnosti  $|\nu(A \setminus E)| = |\nu(A) - \nu(E)| \geq |\nu(E)| - |\nu(A)| \geq 1$ . Aspoň jedna z množin  $E, A \setminus E$  musí mít nekonečnou variaci  $|\nu|$ , ta druhá z nich splňuje požadavky kladené na  $B$ . □

**20.7. Věta** (o variaci). Nechť  $(X, \mathcal{S})$  je měřitelný prostor,  $\mathbb{V}$  je normovaný lineární prostor konečné dimenze a  $\nu$  je vektorová míra na  $\mathcal{S}$ . Potom  $|\nu|(X) < \infty$ .

*Důkaz.* Můžeme předpokládat, že  $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ . Pro spor předpokládejme, že  $|\nu|(X) = \infty$ . Podle lemmatu 20.6 najdeme  $B_1 \in \mathcal{S}$  tak, že  $|\nu(B_1)| \geq 1$  a  $|\nu|(X \setminus B_1) = \infty$ . Podobně v množině  $X \setminus B_1$  najdeme  $B_2 \in \mathcal{S}$  tak, že  $|\nu(B_2)| \geq 1$  a  $|\nu|((X \setminus B_1) \setminus B_2) = \infty$ . Takto postupně zkonstruujeme posloupnost po dvou disjunktních  $\mathcal{S}$ -měřitelných množin  $\{B_k\}$  tak, že  $|\nu(B_k)| \geq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Z axiomu (ZVM-2) ale má být

$$\nu \left( \bigcup_k B_k \right) = \sum_k \nu(B_k),$$

což není možné, protože ta suma vůbec nekonverguje. □

**20.8. Definice** (Jordanův rozklad znaménkové míry na kladnou a zápornou část). Nechť  $(X, \mathcal{S})$  je měřitelný prostor a  $\nu$  je znaménková míra. Potom existuje (právě jedna) dvojice  $(\nu^+, \nu^-)$  (nezáporných) měř na  $(X, \mathcal{S})$  tak, že

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \nu^+(E) - \nu^-(E), \quad E \in \mathcal{S}, \\ |\nu|(E) &= \nu^+(E) + \nu^-(E), \quad E \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Míra  $\nu^+$  se nazývá *kladná část*  $\nu$ , míra  $\nu^-$  se nazývá *záporná část*  $\nu$  a rozklad  $\nu = \nu^+ - \nu^-$  se nazývá *Jordanův rozklad*. Míry  $\nu^+$  a  $\nu^-$  dostaneme ze vzorců

$$\nu^+(E) = \frac{|\nu|(E) + \nu(E)}{2}, \quad \nu^-(E) = \frac{|\nu|(E) - \nu(E)}{2}, \quad E \in \mathcal{S}.$$

**20.9. Definice** (Integrovaní podle znaménkové míry). Nechť  $\nu$  je znaménková míra na  $(X, \mathcal{S})$  a  $f$  je  $\mathcal{S}$ -měřitelná funkce na  $D \in \mathcal{S}$ . Definujeme

$$\int_D f d\nu = \int_D f d\nu^+ - \int_D f d\nu^-$$

pokud rozdíl vpravo má smysl.

20.10. **Definice** (Hahnův rozklad znaménkové míry). Nechť  $\nu$  je znaménková míra na  $(X, \mathcal{S})$ . Dvojici  $(P, N)$  množin z  $\mathcal{S}$  nazveme *Hahnův rozklad*  $X$  podle míry  $\nu$ , jestliže  $P \cup N = X$ ,  $P \cap N = \emptyset$  a pro každou  $E \in \mathcal{S}$  máme

$$(53) \quad E \subset P \implies \nu(E) \geq 0, \quad E \subset N \implies \nu(E) \leq 0.$$

20.11. **Věta** (Existence Hahnova rozkladu). *Nechť  $\nu$  je znaménková míra na  $(X, \mathcal{S})$ . Potom existuje Hahnův rozklad  $X$  podle  $\nu$ .*

*Důkaz.* Nechť  $f = \frac{d\nu^+}{d|\nu|}$ ,  $g = \frac{d\nu^-}{d|\nu|}$  a položme

$$P = \{f \geq g\}, \quad N = \{f < g\}.$$

Pro každou  $E \in \mathcal{S}$  dostaneme

$$E \subset P \implies \nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) = \int_E (f - g) d|\nu| \geq 0,$$

a

$$E \subset N \implies \nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) = \int_E (f - g) d|\nu| \leq 0.$$

□

## 21. MĚŘITELNÁ ZOBRAZENÍ A OBRAZ MÍRY

21.1. **Definice** (Měřitelné zobrazení). Nechť  $(X, \mathcal{S})$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  jsou měřitelné prostory a  $D \in \mathcal{S}$ . Řekneme, že  $f : D \rightarrow Y$  je *měřitelné zobrazení*, přesněji, měřitelné zobrazení  $(D \subset X, \mathcal{S}) \rightarrow (Y, \mathcal{T})$ , jestliže pro každou  $E \in \mathcal{T}$  je  $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}$ .

21.2. **Větička** (Skládání měřitelných zobrazení). *Nechť  $(X, \mathcal{S})$ ,  $(Y, \mathcal{T})$ ,  $(Z, \mathcal{U})$  jsou měřitelné prostory,  $f$  je měřitelné zobrazení  $(X, \mathcal{S}) \rightarrow (Y, \mathcal{T})$  a  $g$  je měřitelné zobrazení  $(Y, \mathcal{T}) \rightarrow (Z, \mathcal{U})$ . Potom  $g \circ f$  je měřitelné zobrazení  $(X, \mathcal{S}) \rightarrow (Z, \mathcal{U})$ .*

*Důkaz.* Důkaz je zřejmý. □

21.3. **Větička** (Měřitelnost-postačující podmínka). *Nechť  $(X, \mathcal{S})$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  jsou měřitelné prostory,  $D \in \mathcal{S}$ . Nechť  $\mathcal{G} \subset 2^Y$ ,  $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{G})$ . Potom  $f : D \rightarrow Y$  je měřitelné zobrazení, právě když pro každou  $E \in \mathcal{G}$  je  $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}$ .*

*Důkaz.* Systém množin  $\mathcal{F} := \{M \subset Y : \{f \in M\} \in \mathcal{S}\}$  je zřejmě  $\sigma$ -algebra obsahující všechny množiny z  $\mathcal{G}$ . Jelikož  $\mathcal{T}$  je nejmenší  $\sigma$ -algebra s takovou vlastností, je nutně  $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$ . □

21.4. **Poznámka.** Měřitelné funkce jsou zvláštní případ měřitelných zobrazení. Snadno nahlédneme, že  $\mathcal{S}$ -měřitelné funkce na  $X$  jsou právě měřitelná zobrazení  $(X, \mathcal{S})$  do  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  viz. [větička 3.7](#). Speciálně, lebesgueovské měřitelné funkce jsou měřitelná zobrazení  $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Všimněte si a zapamatujte, že pro proměnnou a funkční hodnoty používáme různé  $\sigma$ -algebry. To má za následek, že složení dvou měřitelných funkcí reálné proměnné nemusí být měřitelná funkce a inverzní funkce k měřitelné funkci nemusí být měřitelná. Měřitelná zobrazení  $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{M})$  nemají valný praktický význam.

21.5. **Příklad.** Nechť  $\varphi$  je Cantorova funkce a  $C$  Cantorovo diskontinuum z [příkladu 24.12](#). Funkce  $\psi(x) = \varphi(x) + x$  zobrazuje  $[0, 1] \setminus C$  na množinu míry 1, tedy obraz  $\psi(C)$  musí mít míru 1. V každé množině kladné míry existuje neměřitelná množina, buď  $M$  neměřitelná podmnožina  $\psi(C)$ . Množina  $N = \psi^{-1}(M)$  je nulová, tudíž měřitelná. Buď  $g$  inverzní funkce k  $\psi$  a  $f = \chi_N$ . Potom  $f$  je měřitelná,  $g$  je spojitá, ale  $f \circ g = \chi_M$  je neměřitelná.

Nyní předpokládejme, že  $N$  má mohutnost kontinua. Nechť bijekce  $u$  intervalu  $[0, 1]$  na  $[0, 2]$  splývá s  $\psi$  na  $[0, 1] \setminus C$ , ale zobrazuje nějakou borelovskou podmnožinu množiny  $C$  na  $M$ . Potom  $u$  zůstává měřitelné, protože se od měřitelné  $\psi$  liší jen na množině míry 0, avšak  $u^{-1}$  není měřitelné zobrazení.

21.6. **Definice** (Obraz míry). Nechť  $(X, \mathcal{S})$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  jsou měřitelné prostory,  $\mu$  je míra na  $(X, \mathcal{S})$  a  $f$  je měřitelné zobrazení  $(X, \mathcal{S})$  do  $(Y, \mathcal{T})$ . Potom množinová funkce

$$f(\mu) : E \mapsto \mu(f^{-1}(E)), \quad E \in \mathcal{T}$$

se nazývá *obraz míry*  $\mu$ .

Obraz míry je zřejmě míra.

21.7. **Příklad.** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  je prosté regulární zobrazení,  $G' = f(G)$ . Definujme míru  $\mu$  na  $\mathbb{R}^n$  předpisem

$$\mu(E) = \int_E Jf(x) dx, \quad E \in \mathfrak{M}.$$

Potom  $f(\mu)$  splývá s  $\lambda$  na  $G$ .

21.8. **Poznámka.** Nechť  $(X, \mathcal{S})$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  jsou měřitelné prostory,  $\nu$  je míra na  $(Y, \mathcal{T})$  a  $f$  je měřitelné zobrazení  $(X, \mathcal{S})$  do  $(Y, \mathcal{T})$ . Vzorec

$$\mu(A) := \nu(f(A))$$

nemusí definovat míru na  $(X, \mathcal{S})$ . Především nemáme zaručeno

$$(54) \quad A \in \mathcal{S} \implies f(A) \in \mathcal{T}.$$

I kdyby (54) bylo splněno,  $\mu$  nemusí být aditivní, když  $f$  není prostá. S jistou dávkou opatrnosti se dá uvažovat o vzorci

$$(55) \quad \mu(A) = \int_Y \mathcal{N}(f, A, y) dy,$$

kde  $\mathcal{N}(f, A, y)$  je počet prvků množiny  $\{x \in A : f(x) = y\}$ . Vzorec (55) má šanci definovat míru, pokud nejsou problémy s měřitelností.

21.9. **Větička** (o obrazu míry). Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{T}, \nu)$  jsou prostory s mírou,  $f$  je měřitelné zobrazení  $(X, \mathcal{S})$  do  $(Y, \mathcal{T})$  a  $\nu = f(\mu)$ . Potom pro každou  $\mathcal{T}$ -měřitelnou funkci  $u$  na  $Y$  je

$$\int_Y u(y) d\nu(y) = \int_X u(f(x)) d\mu(x)$$

pokud aspoň jedna strana má smysl.

*Důkaz.* Důkaz je rutinní záležitost (přes charakteristické funkce, jednoduché funkce, ...). □

## 22. TOPOLOGICKÉ VLASTNOSTI LS MĚR

22.1. **Lemma.** Nechť  $(\mathcal{S}, \mu)$  je Lebesgue-Stieljtjesova míra na  $\mathbb{R}^n$  a  $E \in \mathcal{S}$ . Potom

(a) ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje otevřená množina  $G \subset \mathbb{R}^n$  tak, že  $E \subset G$  a  $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$ ,

(b)

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ kompaktní, } K \subset E\}.$$

*Důkaz.* Nechť  $\mu$  je generovaná LS funkcí intervalu  $\mathbf{m}$ . Potom existují kompaktní množiny  $X_k$  tak, že  $\mu(X_k) < \infty$  a  $\bigcup_k X_k = \mathbb{R}^n$ , například můžeme volit  $X_k = [-k, k]^n$ .

(a) Předpokládejme nejprve, že  $\mu(E) < \infty$ . Zvolme  $\varepsilon > 0$  a najděme horní součet

$$\sum_j \mathbf{m}(Q_j), \quad j = 1, 2, \dots,$$

kde  $Q_j \in \vec{I}$ ,  $E \subset \bigcup_j Q_j$  a

$$\sum_j \mathbf{m}(Q_j) < \mathbf{m}^*(E) + \varepsilon = \mu(E) + \varepsilon.$$

Intervaly  $Q_j$  trochu zvětšíme na otevřené intervaly  $P_j \supset Q_j$  tak, že stále platí

$$\sum_j \mu(P_j) < \mu(E) + \varepsilon.$$

Položme

$$G = \bigcup_j P_j.$$

Potom  $G$  je otevřená a

$$\mu(G) < \sum_j \mu(P_j) < \mu(E) + \varepsilon,$$

takže

$$\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E) < \varepsilon.$$

V obecném případě najdeme množiny  $E_k$  konečné míry,  $k = 1, 2, \dots$ , tak, že  $E = \bigcup_k E_k$  (například  $E_k = E \cap X_k$ ). Ke každé  $E_k$  najdeme otevřenou množinu  $G_k \subset E_k$  tak, že  $\mu(G_k \setminus E_k) < 2^{-k}\varepsilon$  a položíme

$$G = \bigcup_k G_k.$$

Potom

$$G \setminus E \subset \bigcup_k (G_k \setminus E_k)$$

a tudíž  $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$ .

(b) Vyjdeme z (a) a přechodem k doplňkům najdeme posloupnost  $F_j$  uzavřených množin tak, že  $\mu(E \setminus F_j) < 2^{-j}$ . Uvažme, že množiny  $F_j \cap X_k$  jsou kompaktní podmnožiny  $E$  a že

$$\mu(E) = \sup_{j,k} \mu(F_j \cap X_k).$$

□

**22.2. Věta** (Charakterizace měřitelných množin). *Nechť  $(\mathcal{S}, \mu)$  je Lebesgue-Stieltjesova míra na  $\mathbb{R}^n$ . Je ekvivalentní:*

- (i)  $E \in \mathcal{S}$ ,
- (ii) pro každé  $\varepsilon > 0$  existují otevřená množina  $G \subset \mathbb{R}^n$  a uzavřená množina  $F \subset \mathbb{R}^n$  tak, že  $F \subset E \subset G$  a  $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$ ,
- (iii) existují borelovské množiny  $P, Q \subset \mathbb{R}^n$  (přesněji,  $P$  typu  $F_\sigma$  a  $Q$  typu  $G_\delta$ ) tak, že  $P \subset E \subset Q$  a  $\mu(Q \setminus P) = 0$ ,
- (iv) existují borelovské množiny  $M, N$  tak, že  $\mu(N) = 0$  a  $E \Delta M \subset N$ .

*Důkaz.* (i)  $\implies$  (ii): Podle [lemmatu 22.1\(a\)](#) najdeme otevřenou množinu  $G$  a (přechodem k doplňku) uzavřenou množinu  $F$  tak, že

$$F \subset E \subset G, \quad \mu(G \setminus E) < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \mu(E \setminus F) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

(ii)  $\implies$  (iii): Na základě (ii) najdeme uzavřené množiny  $F_j$  a otevřené množiny  $G_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , tak, že  $F_j \subset E \subset G_j$  a  $\mu(G_j \setminus F_j) < 2^{-j}$ . Nyní stačí položit

$$P = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j, \quad Q = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j.$$

(iii)  $\implies$  (iv): Položme  $M = P$  (nebo  $M = Q$ ),  $N = Q \setminus P$ .

(iv)  $\implies$  (i): To je důsledek úplnosti LS měř a měřitelnosti borelovských množin. □

**22.3. Definice** (Radonovy míry). *Nechť  $(\mathcal{S}, \mu)$  je úplná míra na lokálně kompaktním Hausdorffově topologickém prostoru  $X$  (je možno si představit otevřenou nebo uzavřenou podmnožinu  $\mathbb{R}^n$ ). Řekneme, že  $\mu$  je Radonova, jestliže platí:*

(R-1) Je-li  $K \subset X$  kompaktní, pak  $K \in \mathcal{S}$  a  $\mu(K) < \infty$ ,

(R-2) Je-li  $E \in \mathcal{S}$ , pak  $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ kompaktní}\}$ .

Nechť  $(\mathcal{S}, \nu)$  je úplná znaménková míra na lokálně kompaktním Hausdorffově topologickém prostoru  $X$ . Řekneme, že  $\nu$  je Radonova znaménková míra, jestliže  $\nu^+$  a  $\nu^-$  jsou Radonovy míry.

**22.4. Poznámky.** Místo vnitřní regularity se v některé literatuře požaduje “vnější regularita”, tj. že míra měřitelné množiny je infimum měř otevřených nadmnožin. V naší obecnosti to vyjde nastejno, ale v obecnějších topologických prostorech tím vzniká nejednoznačnost v chápání pojmu Radonovy míry.

V našem výkladu požadujeme úplnost Radonovy míry, ani v tomto není obecně užívaná terminologie zajedno.

Příkladem míry, která není Radonova je tzv.  $k$ -rozměrná Hausdorffova míra v  $\mathbb{R}^n$  pro  $0 \leq k < n$ . Tato míra měří homogenně množiny nižší dimenze, např. “plochy” nebo “fraktály”. Když se však omezíme na podmnožiny pevné plochy, můžeme tak dostat Radonovu míru (například “povrchovou míru na sféře”) a aplikovat výsledky této kapitoly.

**22.5. Věta.** *Nechť  $(\mathcal{T}, \nu)$  je úplná míra na  $\mathbb{R}^n$ . Potom je ekvivalentní*

- (i)  $\nu$  je Radonova míra,
- (ii)  $\nu$  je Lebesgueova-Stieltjesova míra (tj. existuje LS funkce intervalu  $\mathbf{m}$  tak, že  $\nu$  je LS míra generovaná  $\mathbf{m}$ ).

*Důkaz.* Podle [lemmatu 22.1](#), každá LS míra je Radonova. Nechť  $\nu$  je Radonova míra na  $\mathbb{R}^n$ . Položme

$$\mathbf{m}(Q) := \nu(Q), \quad Q \in \vec{I}.$$

Nechť  $(\mathcal{S}, \mu)$  je LS míra generovaná  $\mathbf{m}$ . Potom podle [věty 11.7](#)  $\nu = \mu$  na  $\vec{I}$  a podle [věty 13.4](#) je  $\nu = \mu$  na  $\sigma$ -algebře generované intervaly, což je borelovská  $\sigma$ -algebra. Zbývá ukázat, že  $\mathcal{S} = \mathcal{T}$  a že  $\mu = \nu$  na neborelovských podmnožinách  $\mathcal{S}$ . Je-li  $E \in \mathcal{S}$ , pak podle [věty 22.2](#) existují borelovské množiny  $M$  a  $N$  tak, že  $\mu(N) = 0$  a  $E \Delta M \subset N$ . Vzhledem k úplnosti  $\nu$  je  $E \Delta M \in \mathcal{T}$  a  $\nu(E \Delta M) = \nu(N) = 0$ . Tudíž  $E \in \mathcal{T}$  a  $\nu(E) = \mu(E)$ . Je-li  $E \in \mathcal{T}$ , situace je trochu složitější ale obdobná, podrobnosti necháváme jako cvičení pro čtenáře.  $\square$

**22.6. Věta** (Luzinova věta). *Nechť  $(\mathcal{S}, \mu)$  je Radonova míra na  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je měřitelná funkce a  $\varepsilon > 0$ . Potom existuje spojitá funkce  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a otevřená množina  $G$  tak, že  $\mu(G) < \varepsilon$  a  $f = g$  na  $\mathbb{R}^n \setminus G$ .*

*Důkaz.* Důkaz pouze naznačíme. Uspořádejme všechny otevřené jednorozměrné intervaly s racionálními konci do posloupnosti  $\{I_k\}_k$  a označme

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in I_k\}$$

Podle [věty 22.2](#) existují otevřené množiny  $G_k$  a uzavřené množiny  $F_k$  tak, že  $F_k \subset E_k \subset G_k$  a  $\mu(G_k \setminus F_k) < 2^{-k}\varepsilon$ . Položme

$$G = \bigcup_j (G_k \setminus F_k).$$

Potom  $\mu(G) < \varepsilon$  a  $f$  je spojitá na  $\mathbb{R}^n \setminus G$ . Podle Tietzeovy rozšiřovací věty existuje spojitá funkce  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tak, že  $g = f$  na  $\mathbb{R}^n \setminus G$ , ta má požadované vlastnosti.  $\square$

**22.7. Poznámka.** Věta platí i pro obecnější lokálně kompaktní prostory, zde se omezujeme na  $\mathbb{R}^n$ , abychom nemuseli pro Radonovy míry dokazovat vlastnosti uvedené ve [větě 22.2](#). Platí též obrácené tvrzení: jestliže  $f$  splňuje pro každé  $\varepsilon > 0$  vlastnost z tvrzení Luzinovy věty, pak  $f$  je měřitelná. Vskutku, jsou-li  $g_j$  spojitě funkce odpovídající  $\varepsilon_j = 2^{-j}$ , pak  $g_j \rightarrow f$  skoro všude a tudíž je  $f$  měřitelná jakožto limita posloupnosti měřitelných funkcí.

**22.8. Definice** (Prostory spojitých funkcí). Nechť  $X$  je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor. Buď  $C_b(X)$  Banachův prostor všech omezených spojitých funkcí na  $X$  se supremovou normou. *Nosičem* funkce  $f$  se nazývá nejmenší uzavřená množina obsahující  $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ . Množina všech spojitých funkcí na  $X$  s kompaktním nosičem se značí  $C_c(X)$ , je to lineární podprostor  $C_b(X)$ . Uzávěr  $C_c(X)$  v  $C_b(X)$  se značí  $C_0(X)$ , to je opět Banachův prostor.

**22.9. Věta** (Rieszova věta o reprezentaci). *Nechť  $X$  je separabilní lokálně kompaktní metrický prostor. Nechť  $\Phi$  je lineární funkcionál na množině  $C_c(X)$ . Nechť  $\Phi$  je nezáporný, tj.  $f \geq 0 \implies \Phi(f) \geq 0$ . Potom existuje právě jedna Radonova míra  $\mu$  na  $X$  tak, že pro každou funkci  $f \in C_c(X)$  platí*

$$(56) \quad \Phi(f) = \int_X f d\mu.$$

*Důkaz.* Důkaz vynecháme. Těžší část je existence, k tomuto účelu se definuje množinová funkce

$$\mathbf{m}(G) = \sup \left\{ \Phi(f) : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq \chi_G \right\},$$

kde  $G$  probíhá všechny otevřené podmnožiny  $X$ , a na tuto množinovou funkci  $\mathbf{m}$  se aplikuje základní konstrukce. Dokázat, že výsledná míra  $\mu$  splňuje [\(56\)](#) ovšem dá dost práce.  $\square$

**22.10. Věta.** *Nechť  $X$  je separabilní lokálně kompaktní metrický prostor. Nechť  $\Phi$  je spojitý lineární funkcionál na prostoru  $C_0(X)$ . Potom existuje právě jedna znaménková Radonova míra  $\mu$  na  $X$  tak, že pro každou funkci  $f \in C_0(X)$  platí*

$$(57) \quad \Phi(f) = \int_X f d\mu.$$

*Důkaz* nebudeme uvádět.  $\square$

### 23. LEBESGUE-STIELTJESŮV INTEGRÁL

**23.1. Definice** (Lebesgue-Stieltjesův integrál). Necht  $\mu$  je LS míra na  $\mathbb{R}$  a  $f$  je  $\mu$ -měřitelná funkce na  $\mu$ -měřitelné množině  $E \subset \mathbb{R}$ . Integrál

$$\int_E f d\mu$$

se nazývá *Lebesgue-Stieltjesův integrál* funkce  $f$  podle  $\mu$ . Je-li  $\mu$  LS míra vytvořená z LS funkce intervalu

$$(x, y] \mapsto g(y) - g(x),$$

používá se v literatuře též označení  $\int_a^b f dg$  pro  $\int_{(a,b]} f d\mu$ . Symbol  $\int_a^b f dg$  může mít význam i za obecnějších předpokladů, tím se však zde nebudeme zabývat. Značení  $dg$  pro “diferenciál  $g$ ” je téměř konzistentní se značením  $dx$  pro integrál podle Lebesgueovy míry, v kterémžto případě je  $g(x) = x$ . Naopak, ve značení  $\int_I f d\mu$  je symbol diferenciálu “ $d$ ” užit poněkud nelogicky.

**23.2. Věta** (per partes pro LS integrál). Necht  $\mu$  a  $\nu$  jsou LS míry na  $\mathbb{R}$  a  $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jsou funkce. Necht pro  $\mu$ -s.v.  $x \in [a, b]$  a speciálně též pro  $x = b$  je

$$v(x) - v(a) = \nu([a, b]).$$

Podobně necht pro  $\nu$ -s.v.  $x \in [a, b]$  a speciálně též pro  $y = b$  je

$$u(x) - u(a) = \mu((a, x]).$$

Potom

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_{(a,b]} v d\mu + \int_{[a,b)} u d\nu.$$

*Důkaz.* BÚNO můžeme předpokládat, že  $u(0) = v(0) = 0$ . Použijeme Fubiniovu větu (samostatně ověřte předpoklady) a dostaneme

$$\begin{aligned} u(b)v(b) &= \mu((a, b])\nu([a, b]) = \int_{(a,b]} (\nu([a, x] + \nu([x, b])) d\mu(x) \\ &= \int_{(a,b]} v d\mu + \mu \otimes \nu(\{(x, y) : a < x \leq y < b\}) = \int_{(a,b]} v d\mu + \int_{[a,b)} \mu((a, y]) d\nu(y) \\ &= \int_{(a,b]} v d\mu + \int_{[a,b)} u d\nu. \end{aligned}$$

□

### 24. DISTRIBUČNÍ FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

**24.1. Definice** (Náhodná veličina). Necht  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je *pravděpodobnostní prostor*, neboli prostor s pravděpodobnostní mírou.  $\mathcal{A}$ -měřitelná funkce  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se bude nazývat *náhodná veličina*.

**24.2. Definice** (Distribuční funkce a rozdělení náhodné veličiny). Necht  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravděpodobnostní prostor a  $X$  je náhodná veličina na  $\Omega$ . Funkce

$$F(x) = P(\{X \leq x\})$$

se nazývá *distribuční funkce* náhodné veličiny  $X$  a značí  $F_X$ . Míru  $X(P)$  na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  (obraz míry, viz. [větička 21.6](#)) lze zúplnit na pravděpodobnostní LS míru, která se nazývá *rozdělení* náhodné veličiny  $X$  a značí  $\mu_X$ ;

**24.3. Pozorování** (Využití rozdělení náhodné veličiny). Necht  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravděpodobnostní prostor,  $X$  je náhodná veličina na  $\Omega$  a  $\mu = \mu_X$ . Potom pro každou borelovskou množinu  $E \subset \mathbb{R}$  je

$$P(\{X \in E\}) = \mu(E).$$

Necht  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je borelovsky měřitelná funkce. Potom

$$\int_{\Omega} \phi \circ X dP = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) d\mu(x),$$

pokud má aspoň jedna strana smysl.

*Důkaz.* Plyne z [větičky 21.9](#).

□

24.4. **Větička** (Vlastnosti distribučních funkcí). Nechť  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravděpodobnostní prostor,  $X$  je náhodná veličina na  $\Omega$  a  $F = F_X$ . Potom

(DF-1)  $F$  je neklesající,

(DF-2)  $F$  je zprava spojitá a

(DF-3)  $F(-\infty+) = 0$ ,  $F(+\infty-) = 1$ .

*Důkaz.* Důkaz je zřejmý. □

24.5. **Věta** (Neklesající funkce a rozdělení). Nechť  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  splňuje (DF-1)–(DF-3) z větičky 24.4. Potom existuje právě jedna LS míra  $(\mathcal{S}, \mu)$  na  $\mathbb{R}$  tak, že

$$(58) \quad \mu((a, b]) = F(b) - F(a), \quad (a, b] \in \vec{I}_1,$$

*Důkaz.* Míru  $\mu$  zkonstruujeme pomocí věty 11.7 z LS funkce intervalu

$$(a, b] \mapsto F(b) - F(a).$$

Jednoznačnost plyne z věty 14.5. □

24.6. **Větička** (Charakterizace distribučních funkcí). Větičku 24.4 můžeme obrátit. Jestliže  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  splňuje (DF-1)–(DF-3), pak existuje pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a náhodná veličina  $X$  na  $\Omega$  tak, že  $F$  je distribuční funkce  $X$ .

*Důkaz.* Uvažujme identickou funkci  $X: x \mapsto x$  na pravděpodobnostním prostoru  $(\mathbb{R}, \mathcal{S}, \mu)$ , kde  $(\mathcal{S}, \mu)$  je jako ve větě 24.5. □

24.7. **Poznámka.** Na základě větiček 24.4 a 24.6 můžeme termín “distribuční funkce” používat pro funkci  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  splňující (DF-1)–(DF-3), aniž bychom měli na mysli nějakou konkrétní náhodnou veličinu, které by byla funkce  $F$  přiřazena.

24.8. **Větička** (Rozklad míry). Nechť  $\mu$  je LS míra na  $\mathbb{R}$ . Potom existuje rozklad  $\mu = \mu_a + \mu_d + \mu_{sc}$ , spočetná množina  $S \subset \mathbb{R}$  a Lebesgueovský nulová množina  $N \subset \mathbb{R}$  tak, že

(a)  $\lambda(E) = 0 \implies \mu_a(E) = 0$ ,  $E \in \mathfrak{M}$ ,

(b)  $\mu_{sc}(\{x\}) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,

(c)  $\mu_{sc}(\mathbb{R} \setminus N) = 0$ ,

(d)  $\mu_d(\mathbb{R} \setminus S) = 0$ .

*Důkaz.* Důkaz plyne z vět 19.5 a 19.9. □

24.9. **Tvrzení** (Skoky a derivace distribuční funkce). Nechť  $F$  je distribuční funkce,  $\mu$  je LS míra na  $\mathbb{R}$  a platí (58). Nechť  $S$ ,  $N$ ,  $\mu_a$ ,  $\mu_{sc}$  a  $\mu_d$  jsou jako ve větě 24.8. Bud'

$$F_a(x) = \mu_a((-\infty, x]).$$

Potom

(a) Derivace  $F'$  a  $F'_a$  existují skoro všude a  $F' = F'_a$  s.v.

(b)  $F_a(x) = \int_{-\infty}^x F'(t) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,

(c)  $\mu(\{x\}) = \mu_d(\{x\}) = F(x) - F(x-)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,

(d)  $S$  je množina bodů nespojitosti  $F$ .

*Důkaz.* Důkaz nebudeme uvádět. Tvrzení (c), (d) jsou příliš snadná a tvrzení (a), (b) příliš těžká. □

24.10. **Definice** (Distribuční funkce absolutně spojitě, singulárně spojitě a funkce skoků). Nechť  $F$  je distribuční funkce,  $\mu$  je LS míra na  $\mathbb{R}$  a platí (58). Nechť  $S$  je množina bodů nespojitosti  $F$ . Řekneme, že  $F$  je *absolutně spojitá*, jestliže existuje integrovatelná funkce  $f$  na  $\mathbb{R}$  tak, že

$$(59) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řekneme, že  $F$  je *funkce skoků*, jestliže

$$F(x) = \sum_{t \in S \cap (-\infty, x]} (F(t) - F(t-)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řekneme, že  $F$  je *singulárně spojitá*, jestliže  $S = \emptyset$  a  $F' = 0$  s.v.

24.11. **Tvrzení.** Nechť vše je jak v definici 24.10.



- (a) Je-li  $F$  je absolutně spojitá, pak  $F' = f$  s.v.
- (b)  $F$  je absolutně spojitá, právě když  $\mu = \mu_a$ .
- (c)  $F$  je singulární spojitá, právě když  $\mu = \mu_{sc}$ .
- (d)  $F$  je funkce skoků, právě když  $\mu = \mu_d$ .

*Důkaz.* Nebudeme dokazovat (není všechno snadné). □

**24.12. Příklady** (distribučních funkcí). Každá spojitě diferencovatelná distribuční funkce je příkladem absolutně spojitě distribuční funkce, třeba

$$F(x) = 1/2 + \frac{1}{\pi} \arctan x.$$

Funkce  $\chi_{[0, \infty)}$  je typická funkce skoků. Příkladem singulární spojitě funkce je tzv. Cantorova funkce. Ta se konstruuje následovně: Položme  $\varphi_0(x) = x$ . Pro  $k = 1, 2, \dots$  konstruuje rekurentně

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi_{k-1}(3x), & x \in [0, \frac{1}{3}], \\ \frac{1}{2}, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi_{k-1}(3x - 2), & x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Potom posloupnost  $\{\varphi_k\}$  je stejnoměrně konvergentní a její limitou je Cantorova funkce  $\varphi$ . Platí

$$\varphi(1) - \varphi(0) = 1 \neq 0 = \int_0^1 \varphi'(x) dx$$

a funkce  $\varphi$  je tedy “protipříklad” na Newton-Leibnizovu formuli.

Poznamenejme, že množina bodů  $x \in [0, 1]$ , v nichž není  $\varphi$  lokálně konstantní, je známé *Cantorovo diskontinuum*.

**24.13. Větička.** Využití distribuční funkce náhodné veličiny *Nechť*  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravděpodobnostní prostor,  $X$  je náhodná veličina na  $\Omega$  a  $F = F_X$ .

- (a) *Nechť*  $F$  je absolutně spojitá. Potom pro každou borelovskou množinu  $E \subset \mathbb{R}$  je

$$P(\{X \in E\}) = \int_E F'(x) dx.$$

*Nechť*  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je borelovsky měřitelná funkce. Potom

$$\int_{\Omega} \phi \circ X dP = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) F'(x) dx,$$

pokud má aspoň jedna strana smysl.

- (b) *Nechť*  $F$  je funkce skoků a  $S_F$  je množina skoků funkce  $F$ . Potom pro každou borelovskou množinu  $E \subset \mathbb{R}$  je

$$P(\{X \in E\}) = \sum_{x \in S_F \cap E} (F(x) - F(x-)).$$

*Nechť*  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je borelovsky měřitelná funkce. Potom

$$\int_{\Omega} \phi \circ X dP = \sum_{x \in S_F} \phi(x)(F(x) - F(x-)),$$

pokud má aspoň jedna strana smysl.

*Důkaz.* Tvrzení je snadným důsledkem [pozorování 24.3](#) a [tvrzení 24.11](#). □

## 25. DISTRIBUČNÍ FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

**25.1. Definice** (Distribuční funkce více proměnných). *Nechť*  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravděpodobnostní prostor a  $X_1, \dots, X_n$  jsou náhodné veličiny na  $\Omega$ . Funkce

$$F(x) = P(\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\})$$

se nazývá *distribuční funkce*  $n$ -rozměrné náhodné veličiny  $X = (X_1, \dots, X_n)$  a značí  $F_X$ . Míru  $X(P)$  na  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  (obraz míry, viz. [větička 21.6](#)) lze zúplnit na pravděpodobnostní LS míru, která se nazývá *rozdělení* náhodné veličiny  $X$  a značí  $\mu_X$ .

**25.2. Poznámka.** Obdobně jako v jednorozměrném případě bychom chtěli konstruovat LS míru  $\mu_X$  pouze na základě znalosti rozdělení  $F$ . K tomuto účelu je třeba funkci  $F$  přiřadit LS funkci intervalu. Pokud  $F$  vznikla jako distribuční funkce  $n$ -rozměrné náhodné veličiny, musí splňovat



(DFn-1)  $F$  je neklesající ve všech proměnných:

$$x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n \implies F(x) \leq F(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n;$$

(DFn-2)  $F$  je (separátně) zprava spojitá ve všech proměnných;

$$(DFn-3) \lim_{t \rightarrow -\infty} F(x + t\vec{e}_i) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, i \in \{1, \dots, n\};$$

$$(DFn-4) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) = 1.$$

Nechť tedy  $F$  má tyto vlastnosti. Pro každý interval  $Q = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n] \in \vec{\mathcal{I}}_n$  označme  $V(Q) = \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_n, b_n\}$  množinu všech vrcholů  $Q$ . Pro každý vrchol  $x \in V(Q)$  buď  $\sigma(x)$  počet prvků množiny  $\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i = a_i\}$ . Položme

$$\mathbf{m}(Q) = \sum_{x \in V(Q)} (-1)^{\sigma(x)} F(x).$$

Potom  $\mathbf{m}$  je LS funkce intervalu a jejím rozšířením dostaneme LS míru  $\mu$  takovou, že

$$\mu((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

## 26. FUNKCE GAMMA\*

26.1. **Příklad** (Vztah funkcí Gamma a Beta). Substitucí  $x = r^2$  získáme

$$(60) \quad \Gamma(s) = 2 \int_0^\infty r^{2s-1} e^{-r^2} dr.$$

Substituce  $x = \cos^2 \alpha$  (tedy  $1 - x = \sin^2 \alpha$ ) dává

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \alpha \sin^{2q-1} \alpha d\alpha.$$

Tedy použitím polárních souřadnic dostaneme

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_{\{x>0, y>0\}} x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= 4 \int_{\{r>0, 0<\alpha<\pi/2\}} r^{2p+2q-1} e^{-r^2} \cos^{2p-1} \alpha \sin^{2q-1} \alpha d\alpha dr \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q). \end{aligned}$$

26.2. **Příklad** (Vyjádření funkce Gamma limitou). Označme

$$f_n(x) = x^{s-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \chi_{(0,n)}(x), \quad x \in (0, \infty).$$

Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x^{s-1} e^{-x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Z nerovnosti

$$e^{-\frac{x}{n}} \geq 1 - \frac{x}{n} \geq 0, \quad 0 < x < n$$

dostaneme umocněním na  $n$ -tou

$$0 \leq f_n(x) \leq x^{s-1} e^{-x},$$

což je integrovatelná funkce proměnné  $x \in (0, \infty)$ . Lebesgueova věta 6.2 dává

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty x^{s-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

Substitucí  $x = ny$  dostaneme

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n^s y^{s-1} (1-y)^n dy = \lim_{n \rightarrow \infty} n^s B(s, n+1).$$

S pomocí (24) máme

$$\begin{aligned} n^s B(s, n+1) &= n^s \frac{n}{s} B(s+1, n) = n^s \frac{n(n-1)}{s(s+1)} B(s+2, n-1) \\ &= \dots = n^s \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n-1)} B(s+n, 1) = \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n-1)} \int_0^1 x^{s+n-1} dx \\ &= \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)}. \end{aligned}$$

Tedy

$$(61) \quad \Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)}.$$

**26.3. Definice** (Rozšíření definičního oboru funkce  $\Gamma$ ). Funkci  $\Gamma$  můžeme definovat vzorcem (22) i pro komplexní hodnoty proměnné  $s$ , pokud  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . Beze změn v důkazu dostaneme formule (24) i (61). Limita na pravé straně formule (61) však existuje pro “většinu” komplexních čísel  $s$  bez ohledu na znaménko  $\operatorname{Re}(s)$ . Přesněji, existuje pro každé komplexní číslo  $s$  s výjimkou nuly a záporných celých čísel. Vskutku, dokážeme indukcí podle  $k$  následující tvrzení:

*Pro každé komplexní číslo  $s \in \{z : \operatorname{Re} z > 1 - k\} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  existuje*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)}.$$

Pro  $k = 1$  použijeme odvození pomocí integrálního počtu jako v příkladu 26.2. Nechť  $k > 1$ , tvrzení platí pro  $k - 1$  a  $s$  je komplexní číslo, jehož reálná část je větší než  $1 - k$ . Potom  $\operatorname{Re}(s+1) > 2 - k$  a podle indukčního předpokladu existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{s+1} n!}{(s+1)\dots(s+1+n)}.$$

Tedy existuje také

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{s+1} n!}{(s+1)\dots(s+1+n)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s+1+n}{sn} = \frac{1}{s} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{s+1} n!}{(s+1)\dots(s+1+n)}.$$

Závěr je následující: definujeme-li funkci  $\Gamma$  limitou (61), její definiční obor je celá množina komplexních čísel s výjimkou nuly a záporných celých čísel. Pouze pro kladnou reálnou část však dostáváme integrální reprezentaci (22).

**26.4. Příklad** (Objem koule v  $\mathbb{R}^n$ ). Nechť  $\alpha_n r^n$  je objem  $n$ -rozměrné koule o poloměru  $r$  v  $\mathbb{R}^n$  a

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

Konstantu  $\alpha_n$  určíme z výpočtu

$$\begin{aligned} I^n &= \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^n = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \dots \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \dots e^{-x_n^2} dx_n \right) \dots \right) dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mathbf{x}|^2} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^{e^{-|\mathbf{x}|^2}} dt \right) d\mathbf{x} = \int_0^1 \left( \int_{\{\mathbf{x} : 0 < t < e^{-|\mathbf{x}|^2}\}} d\mathbf{x} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \int_{\{|\mathbf{x}| < \sqrt{\ln \frac{1}{t}}\}} d\mathbf{x} \right) dt = \int_0^1 \lambda_n(B(0, \sqrt{\ln \frac{1}{t}})) dt \\ &= \int_0^1 \alpha_n \left( \ln \frac{1}{t} \right)^{n/2} dt = \alpha_n \int_0^\infty y^{n/2} e^{-y} dy \\ &= \alpha_n \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right). \end{aligned}$$

Použili jsme Fubiniovu větu a substituci

$$y = \ln \frac{1}{t}, \quad \text{neboli } t = e^{-y}.$$

Jelikož

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x_1^2 - x_2^2} dx_1 dx_2 = \int_0^\infty \left( \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\alpha \right) dr \\ &= 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = 2\pi \left[ \frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^\infty = \pi \end{aligned}$$

(z polárních souřadnic), máme  $I = \sqrt{\pi}$ ,

$$\alpha_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + n/2)}.$$

Gamma funkci v  $1 + n/2$  spočteme rekurentně. Z (60) plyne

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^\infty e^{-r^2} dr = I = \sqrt{\pi},$$

tedy podle (23)

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

26.5. **Příklad** (Stirlingova formule). Dokážeme

$$L := \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{e}{s}\right)^s \Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi}.$$

Máme

$$\begin{aligned} L &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}} \exp(s - x + s \ln x - s \ln s) dx \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(-s\left(\frac{x}{s} - 1 - \ln \frac{x}{s}\right)\right) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^\infty a \exp\left(-\frac{a^2 x - 1 - \ln(a^2 x)}{a^2}\right) dx. \end{aligned}$$

(V posledním řádku jsme zaměnili  $s = a^{-2}$ ). Substituce  $t = \frac{\ln a^2 x}{a}$  dává

$$(62) \quad L = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\left(\frac{e^{at} - 1 - at}{a^2} - at\right)\right) dx.$$

Jelikož

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{at} - 1 - at}{a^2} - at\right) = \frac{t^2}{2},$$

je

$$L = \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi},$$

pokud můžeme zaměnit limitu a integrál. Záměnu provedeme podle Lebesgueovy věty. Nalezení majoranty není tak úplně triviální. Označme

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - t, & t \geq 0, \\ e^t - t - 1, & t < 0 \end{cases}$$

a pro pevné  $a \in (0, 1)$  buď

$$g(t) = \frac{e^{at} - at - 1}{a^2} - at - f(t).$$

Pro  $t > 0$  je

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{e^{at} - 1}{a} - a - t + 1, \\ g''(t) &= e^{at} - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Pro  $t < 0$  máme

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{e^{at} - 1}{a} - a - e^t + 1, \\ g''(t) &= e^{at} - e^t \geq 0. \end{aligned}$$

Funkce  $g(t)$  je tedy spojitá, konvexní na intervalech  $(-\infty, 0)$  a  $(0, \infty)$  a limitním přechodem v derivaci snadno zjistíme

$$g'(0+) = 1 - a > 0, \quad g'(0-) = -a < 0.$$

Odtud je zřejmé, že  $g(t) > 0$  pro  $t \neq 0$ , tedy

$$\frac{e^{at} - at - 1}{a^2} - at \geq f(t).$$

Majoranta integrandu v (62) vzhledem k  $a \in (0, 1)$  je

$$e^{-f(t)} = \begin{cases} e^{-\frac{t^2}{2} + t}, & t > 0, \\ e^{1+t-e^t}, & t < 0, \end{cases}$$

což je zřejmě integrovatelná funkce. Tím je důkaz završen.

**26.6. Příklad** (Výpočet jistého určitého integrálu). Budeme počítat

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2p}}{1 + x^{2q}} dx,$$

kde  $p < q$  jsou přirozená čísla. Vytvořme indexové množiny

$$A^+ = \{1, 3, \dots, 2q - 1\}, \quad A^- = \{-1, -3, \dots, -2q + 1\}, \\ A = A^+ \cup A^-.$$

Potom v komplexním oboru máme rozklad

$$z^{2q} + 1 = \prod_{k \in A} (z - z_k),$$

kde

$$z_k = e^{ik\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2q}.$$

Označme

$$P_k(z) = \prod_{j \in A \setminus \{k\}} (z - z_j)$$

Potom zderivováním rovnosti

$$z^{2q} + 1 = (z - z_k) P_k(z)$$

dostaneme

$$2q z^{2q-1} = P_k(z) + (z - z_k) P_k'(z)$$

Dosazením  $z = z_k$  odvodíme

$$(63) \quad 2q z_k^{2q-1} = P_k(z_k).$$

Uvažujme rozklad racionální funkce na částečné zlomky

$$\frac{z^{2p}}{z^{2q} + 1} = \sum_{j \in A} \frac{a_j}{z - z_j},$$

kde  $a_j$  jsou komplexní čísla, která zatím neznáme. Obě strany vynásobíme výrazem  $z - z_k$  a dostaneme

$$\frac{z^{2p}}{P_k(z)} = \sum_{j \in A} \frac{a_j(z - z_k)}{z - z_j}$$

Limitní přechod pro  $z \rightarrow z_k$  dává

$$\frac{z_k^{2p}}{P_k(z_k)} = a_k$$

a dosazením z (63) máme

$$a_k = \frac{1}{2q} z_k^{2p-2q+1} = -\frac{1}{2q} z_k^{2p+1},$$

neboť  $z_k$  řeší rovnici  $z_k^{2q} = -1$ . Nyní se budeme zabývat integrálem

$$I_k(R) = q \int_{-R}^R \left( \frac{a_k}{x - z_k} + \frac{a_{-k}}{x - z_{-k}} \right) dx, \quad k \in A^+.$$

Označme

$$\beta = (2p + 1) \alpha, \quad \text{takže} \quad q a_k = -\frac{1}{2} e^{ik\beta}.$$

Máme

$$\begin{aligned} q\left(\frac{a_k}{x-z_k} + \frac{a_{-k}}{x-z_{-k}}\right) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{ik\beta}}{x-e^{ik\alpha}} + \frac{e^{-ik\beta}}{x-e^{-ik\alpha}}\right) \\ &= \frac{\cos(k\beta - k\alpha) - x \cos k\beta}{x^2 - 2x \cos k\alpha + 1}. \end{aligned}$$

Substituce  $x = y + \cos \alpha$  dává

$$\begin{aligned} (64) \quad I_k(R) &= \int_{-R}^R \frac{\cos(k\beta - k\alpha) - x \cos k\beta}{x^2 - 2x \cos k\alpha + 1} dx = \int_{-R-\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha} \frac{\sin k\beta \sin k\alpha - y \cos k\beta}{y^2 + \sin^2 k\alpha} dy \\ &= \int_{-R-\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha} \frac{\sin k\beta \sin k\alpha}{y^2 + \sin^2 k\alpha} dy - \int_{-R-\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha} \frac{y \cos k\beta}{y^2 + \sin^2 k\alpha} dy. \end{aligned}$$

V druhém integrálu pravé strany rovnosti (64) využijeme lichost integrandu. Pokud  $\cos k\alpha > 0$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \left| \int_{-R-\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha} \frac{y \cos k\beta}{y^2 + \sin^2 k\alpha} dy \right| &= \left| \int_{-R-\cos k\alpha}^{-R+\cos k\alpha} \frac{y \cos k\beta}{y^2 + \sin^2 k\alpha} dy + \int_{-R+\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha} \frac{y \cos k\beta}{y^2 + \sin^2 k\alpha} dy \right| \\ &= \left| \int_{-R-\cos k\alpha}^{-R+\cos k\alpha} \frac{y \cos k\beta}{y^2 + \sin^2 k\alpha} dy \right| \leq \int_{-R-1}^{-R+1} \frac{R+1}{(R-1)^2} dy \\ &= \frac{2R+2}{(R-1)^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ke stejnému závěru dojdeme analogicky i v případě  $\cos k\alpha < 0$ . Tedy

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_k(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R-\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha} \frac{\sin k\beta \sin k\alpha}{y^2 + \sin^2 k\alpha} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\beta \sin k\alpha}{y^2 + \sin^2 k\alpha} dy = \pi \sin k\beta,$$

neboť integrál přes  $\mathbb{R}$  konverguje. Jelikož integrál  $I$  konverguje, máme

$$qI = q \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^{2p}}{x^{2q} + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{k \in A^+} I_k(R) = \sum_{k \in A^+} \lim_{R \rightarrow \infty} I_k(R) = \pi \sum_{k \in A^+} \sin k\beta$$

Počítejme

$$\begin{aligned} \frac{qI}{\pi} &= \operatorname{Im} \sum_{k \in A^+} e^{ik\beta} = \operatorname{Im} \sum_{j=0}^{q-1} e^{i(2j+1)\beta} = \operatorname{Im} \frac{e^{i\beta}(1 - e^{2iq\beta})}{1 - e^{2i\beta}} = \operatorname{Im} \frac{2e^{i\beta}}{1 - e^{2i\beta}} = \operatorname{Im} \frac{2}{e^{-i\beta} - e^{i\beta}} \\ &= \operatorname{Im} \frac{2i^2}{e^{i\beta} - e^{-i\beta}} = \operatorname{Im} \frac{i}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \beta}. \end{aligned}$$

Zde jsme využili, že  $2q\beta$  je lichý násobek  $\pi$ , takže  $e^{2iq\beta} = -1$ . Tedy

$$I = \frac{\pi}{q \sin\left(\pi \frac{2p+1}{2q}\right)}.$$

**26.7. Příklad** (Výpočet dalších určitých integrálů). Nyní budeme počítat

$$J(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t} dt, \quad s \in (0, 1).$$

Nejprve uvažujme

$$s = \frac{2p+1}{2q},$$

kde  $p, q$  jsou jako v příkladu 26.6. Substituce  $t = x^{2q}$  vede na

$$J(s) = 2q \int_0^\infty \frac{x^{2p}}{1+x^{2q}} dx = q \int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2p}}{1+x^{2q}} dx.$$

Podle předchozího příkladu 26.6 je

$$(65) \quad J(s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Vzorec (65) platí pro  $s$  z husté podmnožiny intervalu  $(0, 1)$ . Ze spojitosti obou stran (ověřte samostatně předpoklady věty o spojitosti integrálu závislého na parametru) dostáváme (65) pro všechna  $s \in (0, 1)$ .

Nyní budeme počítat hodnotu Beta funkce  $B(1-s, s)$ ,  $s \in (0, 1)$ . Máme

$$B(1-s, s) = \int_0^1 x^{-s} (1-x)^{s-1} dx = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{x}\right)^{s-1} \frac{dx}{x}.$$

Substituce  $t = (1-x)/x$  dává

$$B(1-s, s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \quad s \in (0, 1).$$

Konečně aplikací na Gamma funkci dostáváme

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \quad s \in (0, 1).$$