UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

BARRANQUILLA Y CÚCUTA - COLOMBIA

Grupo de Investigación Gestión Organizacional
Facultad de Administración y Negocios

Introducción al estudio de las Matemáticas Financieras

Ricardo Mena Torres

EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL ACREDITA INSTITUCIONALMENTE A LA UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Resolución 23095, del 15 de diciembre de 2016

Introducción al estudio de las **Matemáticas Financieras**

Ricardo Mena Torres

EDICIONES
UNIVERSIDAD
SIMÓN BOLÍVAR
BARRANQUILLA Y CÚCUTA - COLOMBIA
VIGILADA MINEDUCACIÓN

PRESIDENTA SALA GENERAL
ANA BOLÍVAR DE CONSUEGRA

RECTOR FUNDADOR
JOSÉ CONSUEGRA HIGGINS (q.e.p.d.)

RECTOR
JOSÉ CONSUEGRA BOLÍVAR

VICERRECTORA ACADÉMICA
SONIA FALLA BARRANTES

VICERRECTORA DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN
PAOLA AMAR SEPÚLVEDA

VICERRECTORA FINANCIERA
ANA CONSUEGRA DE BAYUELO

VICERRECTOR DE INFRAESTRUCTURA
IGNACIO CONSUEGRA BOLÍVAR

SECRETARIA GENERAL
ROSARIO GARCÍA GONZÁLEZ

DIRECTORA DE INVESTIGACIONES
ALIZ YANETH HERAZO BELTRÁN

DEPARTAMENTO DE PUBLICACIONES
CARLOS MIRANDA MEDINA

MIEMBROS DE LA SALA GENERAL
ANA BOLÍVAR DE CONSUEGRA
OSWALDO ANTONIO OLAVE AMAYA
MARTHA VIVIANA VIANA MARINO
JOSÉ EUSEBIO CONSUEGRA BOLÍVAR
JORGE REYNOLDS POMBO
ÁNGEL CARRACEDO ÁLVAREZ
ANTONIO CACUA PRADA
PATRICIA MARTÍNEZ BARRIOS
JAIME NIÑO DÍEZ †
ANA CONSUEGRA DE BAYUELO
JUAN MANUEL RUISECO
CARLOS CORREDOR PEREIRA
JORGE EMILIO SIERRA MONTOYA
EZEQUIEL ANDER-EGG
JOSÉ IGNACIO CONSUEGRA MANZANO
EUGENIO BOLÍVAR ROMERO
ÁLVARO CASTRO SOCARRÁS
IGNACIO CONSUEGRA BOLÍVAR

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

BARRANQUILLA Y CÚCUTA - COLOMBIA

Grupo de Investigación Gestión Organizacional
Facultad de Administración y Negocios

Introducción al estudio de las **Matemáticas Financieras**

Ricardo Mena Torres

EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL ACREDITA INSTITUCIONALMENTE A LA UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Resolución 23095, del 15 de diciembre de 2016

Mena Torres, Ricardo
Introducción al estudio de las matemáticas financieras / Ricardo Mena Torres -- Barranquilla: Ediciones Universidad Simón Bolívar, 2017.

118 p.; 17 x 24 cm.
ISBN: 978-958-8930-74-9

1. Matemáticas financieras 2. Finanzas – Modelos matemáticos 3. Tasas de interés 4. Inversiones (Matemáticas) 5. Amortización I. Universidad Simón Bolívar. Facultad de Administración y Negocios. Grupo de Investigación Gestión Organizacional II. Tít.

658.15 M534 2017 SCDD 21 ed.
Universidad Simón Bolívar – Sistema de Bibliotecas

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS
© Ricardo Mena Torres

Facultad de Administración y Negocios
Grupo de Investigación Gestión Organizacional
Ana Beatriz Blanco Ariza, Directora

ISBN: 978-958-8930-74-9

© **Todos los derechos reservados.** Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada en sistema recuperable o transmitida en ninguna forma por medios electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros, sin la previa autorización por escrito de Ediciones Universidad Simón Bolívar y de los autores. Los conceptos expresados en este documento son responsabilidad exclusiva de los autores y no necesariamente corresponden con los de la Universidad Simón Bolívar y da cumplimiento al Depósito Legal según lo establecido en la Ley 44 de 1993, los Decretos 460 del 16 de marzo de 1995, el 2150 de 1995, el 358 de 2000 y la Ley 1379 de 2010.

©Ediciones Universidad Simón Bolívar
Carrera 54 No. 59-102
http://publicaciones.unisimonbolivar.edu.co/edicionesUSB/
dptopublicaciones@unisimonbolivar.edu.co
Barranquilla y Cúcuta - Colombia

Producción Editorial
Editorial Mejoras
Calle 58 No. 70-30
info@editorialmejoras.co
www.editorialmejoras.co
Barranquilla

Marzo de 2017
Barranquilla

Made in Colombia

Contenido

Agradecimientos 11

Presentación 13

Introducción 15

CAPÍTULO 1
GENERALIDADES 17

1.1 Expresiones algebraicas 18
1.2 Progresiones 19
1.3 Logaritmos 20
1.4 Fracciones 21
1.5 Porcentajes 22
1.6 Matemáticas financieras 23

CAPÍTULO 2
INTERÉS SIMPLE Y LAS
MATEMÁTICAS FINANCIERAS 25

2.1 Interés simple 26
2.2 Descuento simple 28

CAPÍTULO 3
USO DEL INTERÉS COMPUESTO
EN OPERACIONES FINANCIERAS 31

3.1 Interés compuesto 32
3.2 Ecuaciones de valor 37

CAPÍTULO 4
OPERACIONES FINANCIERAS
CON TASAS DE INTERÉS VENCIDAS 39

4.1 Equivalencias de tasas –vencidas– 40

CAPÍTULO 5
USO DE TASAS VENCIDAS Y ANTICIPADAS EN OPERACIONES FINANCIERAS 45
5.1 Equivalencias entre tasas vencidas y anticipadas 46
5.2 Cálculo de una tasa vencida a partir de una tasa anticipada 46
5.3 Cálculo de una tasa anticipada a partir de una tasa vencida 47
5.4 Cálculo de una tasa efectiva a partir de una tasa anticipada 48

CAPÍTULO 6
SERIES DE PAGOS UNIFORMES 51
6.1 Anualidades 52

CAPÍTULO 7
VARIACIONES EN LAS SERIES DE PAGO 59
7.1 Anualidades aticipadas 60

CAPÍTULO 8
SERIES DE PAGOS VARIABLES 63
8.1 Gradientes crecientes 64
8.2 Valor presente de un gradiente lineal creciente 64
8.3 Valor de la cuota a partir del valor presente de un gradiente aritmético o lineal creciente 65
8.4 Valor futuro de un gradientelineal creciente 67
8.5 Valor de la cuota a partir del valor

futuro de un gradiente aritmético creciente 68
8.6 Cálculo de una cuota 'X' en un gradiente lineal creciente 70
8.7 Gradiente aritmético o lineal creciente anticipado 71
8.8 Valor presente de un gradiente geométrico creciente 74
8.9 Valor Futuro de un gradiente geométrico creciente 76
8.10 Cálculo del valor de una cuota 'X' en un gradiente geométrico creciente 77

CAPÍTULO 9
OPERACIONES CON SERIES DE PAGOS VARIABLES DECRECIENTES..... 81
9.1 Gradientes decrecientes 82
9.2 Valor presente de un gradiente lineal de creciente 82
9.3 Valor futuro de un gradiente lineal decreciente 84
9.4 Cálculo del valor de una cuota 'X' en un gradiente lineal decreciente 85
9.5 Valor presente de un gradiente geométrico decreciente 87
9.6 Valor futuro de un gradiente geométrico decreciente 90
9.7 Cálculo de la cuota 'X' de un gradiente geométrico decreciente 92

CAPÍTULO 10
FORMAS DE DIFERIR UNA DEUDA 95

10.1 Amortización 96
10.2 Amortización gradual 96
10.3 Amortización con abono constante a capital 99

CAPÍTULO 11
ALTERNATIVAS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN INVERSIÓN 101
11.1 Alternativas de inversión 102
11.2 Tasa de descuento 102
11.3 Valor Presente Neto 102
11.4 Tasa Interna de Retorno (TIR) 110

CONCLUSIÓN 115

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 117

Índice de Tablas

Pág.

Tabla 1
Valor de las cuotas 67

Tabla 2
Valor de las cuotas 68

Tabla 3
Valor de las cuotas durante
la vigencia del crédito 70

Tabla 4
Valor de las cuotas durante
la vigencia del crédito 79

Tabla 5
Valor de las cuotas durante
la vigencia del crédito 87

Tabla 6
Amortización del crédito..... 97

Tabla 7
Amortización con períodos de gracia 99

Tabla 8
Amortización del crédito..... 100

Agradecimientos

Este trabajo está dedicado a mi esposa Silvana, por su apoyo en todo momento; a mis hijos Santiago Andrés y Felipe Alejandro, que han traído felicidad a mi vida, y a mis padres por sus valiosos consejos. A todos ellos, ¡gracias!

Ricardo Mena

Presentación

Tiene usted en sus manos un texto de introducción a las matemáticas financieras, un compendio para aprendices, profesores, profesionales o investigadores que están relacionados con esta área de las matemáticas o con programas afines a las finanzas y la administración. Un libro, de los casi cuatro que leemos los colombianos al año, como lo indica la última encuesta bienal de Consumo Cultural del Departamento Administrativo Nacional de Estadísticas (DANE, 2014).

La presente obra, producto de años de exploración en su grupo de investigación, experiencias del autor en el campo académico y profesional en las finanzas, se convierte en un puente facilitador para que los estudiantes universitarios vean en las matemáticas financieras la herramienta para tomar buenas y sabias decisiones en el presente y en el futuro; para que los profesores lo utilicen como libro guía, los profesionales del área lo tengan como texto de consulta y los investigadores como obra de apoyo.

El valor del dinero en el tiempo, el interés simple y compuesto, las ecuaciones de valor, las equivalencias de tasas vencidas o anticipadas, los gradientes crecientes o decrecientes, las amortizaciones, las alternativas de inversión o la Tasa Interna de Retorno (TIR), son temas abordados con la simplicidad, la seriedad y el profesionalismo para convertir toda esta información en conocimiento para el lector.

Lograr que los estudiantes se concienticen de la importancia de las nociones básicas de las matemáticas financieras, llevándolas en un lenguaje que enamore al lector, es de gran importancia para el Alma Mater. Ver crecer a los estudiantes como profesionales de las diferentes áreas del conocimiento, no solo con libros traducidos, sino con obras producto de la labor académica e investigativa de los docentes de la Universidad Simón Bolívar es satisfactorio, porque muestra un trabajo de calidad cercano a nuestro contexto.

Le damos una cordial bienvenida a *Introducción al Estudio de las Matemáticas Financieras,* un epítome de estos saberes, respuesta a la necesidad de la comunidad universitaria, ansiosa de aprender con libros pensados, elaborados y construidos por la misma comunidad de la Universidad Simón Bolívar, perteneciente a la Facultad de Administración y Negocios, y al programa de Administración de Empresas, que llevan inmersos ejemplos, ejercicios y problemas de la matemática financiera de la Colombia en la cual vivimos.

Jaime Bermúdez Barrera
Economista, Especialista en Finanzas y
Máster en Administración de Empresas e Innovación

Introducción

Las finanzas son una función empresarial caracterizada por su base contable y contenidos matemáticos necesarios al momento de tomar decisiones de carácter financiero, en las cuales las matemáticas financieras se vuelven una herramienta en dicho proceso.

De acuerdo con Florentino Rico (2010) en su libro *Las Prácticas Didácticas de las Finanzas,*

> En la actualidad la Pedagogía-Enseñanza de las Finanzas se ha convertido en la necesidad prioritaria de académicos, docentes, estudiantes y autoridades universitarias para enfrentar el reto de la globalización y la modernidad; se cree relevante y pertinente hacer esfuerzos para profundizar prácticas y procesos con la perspectiva de lograr una mejor conceptualización para perfeccionar y hacer explícito su entendimiento de Pedagogía-Enseñanza de las Finanzas. (p.19)

Las matemáticas financieras son importantes en el estudio de las finanzas al permitir evaluar alternativas de inversión, de endeudamiento, por ejemplo, pero representan para los estudiantes de pregrado cierto grado de dificultad, esto se debe a que no son conscientes que las operaciones desarrolladas en esta asignatura son las mismas que hemos visto y venimos aplicando desde el colegio (suma, resta, multiplicación, división, potenciación).

A continuación, se explican los temas de matemáticas financieras tratados en pregrado mediante la utilización de una fórmula con ligeras modificaciones en la medida que se avanza en la temática. La importancia en este estudio radica en conocer los conceptos, identificar las variables y determinar la manera de utilizar las ecuaciones para la solución de los problemas y toma de decisiones.

CAPÍTULO 1

GENERALIDADES

1.1 Expresiones algebraicas

Expresiones matemáticas donde se combinan números y letras representando una operación, llámese suma, resta, multiplicación o división.

Ejemplo:

$$b,\ 5c,\ \sqrt{8a},\ x,\ 4y$$

Las expresiones conformadas por un término como las del ejemplo anterior se conocen con el nombre de monomios; aquellas que contienen dos o más términos se les llama polinomios.

Ejemplo:

$$x + y,\ m - n,\ \frac{4nz^3}{3a^2} + \frac{1}{3}y^2$$

Ejemplos de operaciones con expresiones algebraicas:

1. $5x + 3x = 8x$

2. $4a + 3b + 6a – 2b$; en este caso se agrupan los términos semejantes
   $(4a + 6a) + (3b – 2b)$
   R/ta = $10a + b$

3. $x\ (2a – b + 3m)$; la 'x' está multiplicando la expresión dentro del paréntesis y al resolverlo la "x" se multiplica con cada uno de los términos de la expresión.
   R/ta = $2ax – bx + 3mx$

   Si a cada símbolo le otorgamos valores de a = 1, b = 0,m= 3, x = 2, la expresión del literal # 3 tendrá como respuesta:
   $2(1)(2) – 0(2) + 3(3)(2)$
   $4 – 0 + 18 = 22$

1.2 Progresiones

Son series de términos donde los valores se obtienen sumando o multiplicándole al término anterior un número fijo. Si el valor es agregado mediante la suma, la progresión es aritmética, y será geométrica si el valor agregado se hace utilizando la multiplicación.

1. Hallar el término 10° de la siguiente progresión: 6, 8, 10, 12. Se puede observar en el ejemplo que los términos de la progresión varían unos de otros en 2 unidades. Este número viene a ser la razón (r), el término a calcular se representa con la letra (u), mientras el primer término de la progresión se representa con la letra (a) y la posición del término a calcular en la progresión se simboliza con la letra (n).
   Fórmula:
   $U = a + (n - 1)\ r$; donde: $a = 6$, $n = 10$, $r = 2$

   Reemplazando en la fórmula:
   $U = 6 + (10 - 1)\ (2) = 24$
   24 es valor del 10° término en la progresión.

2. Hallar el 8° término de 4, 12, 36
   En esta progresión se observa que el número siguiente triplica al anterior. Este valor se llama razón (r), el cual se obtiene dividiendo el número entre el anterior.
   Fórmula
   $u = a * r^{n-1}$

   Reemplazando en la fórmula:
   $u = 4 * (3)^{8-1} = 8748$
   8748 valor del 8° término en la progresión

En matemáticas financieras las progresiones se utilizan para calcular el valor de una cuota 'x' dentro de un plan de pagos.

1.3 Logaritmos

Se llama logaritmo al exponente al que hay que elevar la base para hallar un número específico.

Propiedades:

1.3.1 Logaritmo de un producto: es el resultado de la suma del logaritmo de cada elemento que forma la expresión matemática.

Log (m * n) = log m + log n

1.3.2 Logaritmo de un cociente: es la resta del logaritmo de cada término que conforma la operación.

Log (b / c) = log b – log c

1.3.3 Logaritmo de una potencia: se obtiene al multiplicar la potencia por el logaritmo del número o base.

Log x^n = n * log x

1.3.4 Logaritmo de una raíz: se calcula al dividir el logaritmo del número entre la raíz

$\log \sqrt[n]{x}$

Es igual al $\frac{\log x}{n}$

Hallar el valor de las expresiones por medio de logaritmos

a. 435 x 0,146 = log 435 + log 0,146 = 2,63848 + (- 0,83564) = **1.80283**

b. 85,10 / 6,18 = log 85,10 – log 6,18 = 1,92992 – 0,79098 = **1.1389**

c. $3^{(10)}$ = 10 log 3 = **4,77121**

d. $\sqrt[5]{\quad 4} = \frac{\log}{5} 4 = 0{,}60205 / 5 =$ **0,12041**

"Los logaritmos naturales utilizan como base el número irracional conocido como el número de Euler. Las propiedades y operaciones de los logaritmos vulgares son también aplicadas a los logaritmos naturales, puesto que lo único que los diferencia es la base; los logaritmos vulgares son los que usan la base 10 y los naturales el número (e) (2,718281….)" (Meza, 2010, p.14).

1.4 Fracciones

Una fracción es una expresión numérica conformada por un numerador y un denominador.

Ejemplo: 1/2 , -3/5, 4/7

Las fracciones pueden ser homogéneas cuando tienen el mismo denominador o heterogéneas si el denominador es distinto. Entre las fracciones encontramos los llamados números mixtos, conformados por una fracción y un número entero.

Ejemplos de este tipo de fracciones:

5 (1/2) ; 3 (4/7) ; 2 (8/5)

Este tipo de expresiones matemáticas se resuelven multiplicando el denominador por el entero, luego se suma el numerador y se deja el mismo denominador.

- $5(1/2) = \frac{(2 \times 5)+1}{2} = \mathbf{\frac{11}{2}}$
- $3(4/7) = \frac{(7 \times 3)+4}{7} = \mathbf{\frac{25}{7}}$
- $2(8/5) = \frac{(5 \times 2)+8}{5} = \mathbf{\frac{18}{5}}$

Al dividir el numerador de una fracción entre el denominador se está convirtiendo la fracción en un número decimal. Continuando con los ejemplos dados:

- 11/12 = **0,916**
- 25/7 = **3,571**
- 18/5 = **3,6**

Cuando un número decimal se multiplica por 10 o una potencia de 10, la coma se corre a la derecha tantos lugares como ceros tenga la base; si se está realizando una división ocurre lo contrario, la coma se corre a la izquierda.

- 0,916 x 10 = **9,16**
- 3,571 x 100 = **357,1**
- 3,6 x 1000 = **3600**

En la división, la coma se corre a la izquierda y el número de posiciones a correr depende de la cantidad de ceros que tenga el número base.

- 52,7 ÷ 10 = **5,27**
- 435 ÷ 100 = **4,35**
- 2,17 ÷ 1000 = **0,00217**

1.5 Porcentajes

Cuando se habla de porcentajes se hace referencia a una parte de un todo, visto ese todo como el 100 %, la fracción tomada es una parte de ese 100 % y el símbolo utilizado para representar el porcentaje es %.

El porcentaje es una forma de medir algo y permite comprender de una manera más fácil una información. Al decir que las ventas de una empresa aumentaron en un

$ 1.000.000, 3.000.0000 o $ 5.000.000 millones en el año xxx con respecto al año anterior, no se visualiza la magnitud del crecimiento, de la misma forma si la información estuviese expresado en términos de porcentaje. De esta manera, al decir, las ventas se incrementaron en un 10 %, 20 % o en un 50 % con respecto al año anterior; en este caso sin contar con cifras se puede hacer una idea de qué tan conveniente ha sido el comportamiento de ese ítem para la empresa y poder compararlo con el porcentaje de crecimiento de la inflación, también del sector en que se encuentra la empresa, etc.

Exprese las siguientes cifras en porcentajes 0,67, 2,74, 5,6, 0,038

- 0,67 x 100 = **67 %**
- 2,74 x 100 = **274 %**
- 5,6 x 100 = **560 %**
- 0,038 x 100 = **3,8 %**

Para convertir las cifras dadas en porcentajes se multiplica cada una por 100.

1.6 Matemáticas financieras

Las matemáticas financieras son la aplicación de los conceptos vistos en matemáticas del colegio al valor del dinero en el tiempo, interés y equivalencia.

1.6.1 Valor del dinero en el tiempo: cambio experimentado en la cantidad de bienes o servicios que se puede adquirir hoy con una cantidad de dinero 'X', en comparación con los bienes o servicios que se pueden adquirir con la misma cantidad de dinero pasado un tiempo.

1.6.2 Interés: lo pagado por el uso de una cantidad de dinero que no es propia.

Visto de esta forma, el interés se expresa en términos monetarios y cuando ese mismo interés se expresa en forma porcentual (%) lo llamamos tasa de interés.

1.6.3 Equivalencia: la podemos ver de dos maneras:

De manera absoluta: cuando dos cantidades de dinero en tiempo diferente tienen el mismo resultado económico.

De manera relativa: si la relación es entre tasas. Dos tasas son equivalentes si producen el mismo interés en un año.

CAPÍTULO 2

INTERÉS SIMPLE Y LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS

2.1 Interés simple

Tipo de operaciones donde los intereses se calculan basados en un capital que no varía durante el tiempo que dura la operación.

Fórmula:

F = P (1+ in)

Datos:

F = valor futuro

P = valor presente o capital

i = tasa de interés

n = tiempo que dura la negociación

Ejemplo

1. Invermet Ltda. adquiere un préstamo por un valor de $ 10.000.000 para comprar una maquinaria, el cual debe cancelar en 9 meses a una tasa de interés simple del 2,5 % mensual. ¿Cuánto debe cancelar a los 9 meses?

Lo primero es identificar los datos

F = ????

P = $ 10.000.000

i = 2,5 % mensual

n = 9 meses

Luego de identificar los datos se realiza la gráfica que facilita la interpretación del ejercicio.

Aplicando la fórmula:

F = P (1+ in)

F = 10.000.000 (1 + 0,025*9)

F = **$ 12.250.000**

Si quisiera calcular el valor futuro (F), pero la duración del préstamo estuviera dada en días, por ejemplo 70 días, la formula sería la misma teniendo en cuenta de expresar la tasa en la misma unidad en la que se encuentra el tiempo "días".

F = ?

P = $ 10.000.000

i = 2,5 % mensual

n = 70 días

$$F = 10.000.000 \left(1 + \frac{0,025}{30} * 70\right) = \mathbf{\$\ 10.583.333}$$

2. Tomando el ejemplo anterior de referencia, calcular el valor requerido hoy para la compra de una maquinaria, si el valor a cancelar a los 9 meses por el préstamo sería $ 12.250.000 a una tasa de interés simple del 2,5 % mensual.

Gráfica

Fórmula: F = P (1+ in), despejando la ecuación el valor a prestar hoy sería de:

P = F/ (1+ in)

$$P = \frac{12.250.000}{(1+ 0,025*9)} = \mathbf{\$\ 10.000.000}$$

3. Si deseáramos conocer la tasa de interés, lo que habría que hacer es despejar la fórmula.

   F = P*(1+ in)

   F/P = (1+ in)

   F/P - 1 = in

   $\frac{(F/P - 1)}{n} = i$, entonces la i = $\frac{(12.250.000/10.000.000 - 1)}{9}$

   = 0,025

4. Para el cálculo del tiempo el procedimiento es el mismo.

   F = P*(1+ in)

   F/P = (1+ in)

   F/P - 1 = in

   $\frac{(F/P - 1)}{i} = n$, entonces la i = $\frac{(12.250.000/10.000.000 - 1)}{0,025}$

   = 9 meses

2.2 Descuento simple

Se llama descuento simple al valor obtenido de la diferencia entre el valor de una obligación o ingreso futuro y el valor presente de esa misma obligación o ingreso.

Fórmula:

P = F (1- dt)

Donde:

P = valor presente de la obligación o del ingreso

F = valor de la deuda o ingreso esperado

d = tasa de descuento

t = tiempo

D = descuento

Ejemplo:

1.Calcular el descuento simple de una obligación de

$ 3.000.000 con vencimiento en 11 meses a una tasa del 4,5 %.

Datos:

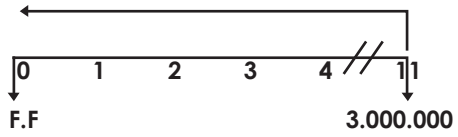
P = ?

F = $ 3.000.000

d = 4,5 %

t = 11 meses

Gráfica



El valor del descuento se obtiene al restarle a la obligación el valor presente de la deuda, es decir, el valor de la obligación en la fecha focal.

Desarrollo:

P = F (1 – dt)

$$P = 3.000.000 \left(1 - \frac{0,045}{12 \text{ meses}} \times 11\right) = \mathbf{\$\ 2.876.250}$$

Este sería el valor a cancelar al día de hoy. El descuento se obtiene al restarle a $3.000.000 los $ 2.876.250, dando como resultado **$ 123.750**. Este es el valor del descuento.

2. El señor Pedro recibe un cheque del almacén Tu Hogar, por la venta de productos de aseo. El cheque es por un valor de $ 2.500.000, para ser cobrado en 3 meses. Al mes el señor Pedro decide cambiar el cheque en la casa de cambio "señor Lobo", quien aplica un descuento del 7 %. ¿Cuánto recibe el señor Pedro? y ¿cuál es la ganancia del señor Lobo?

Datos:

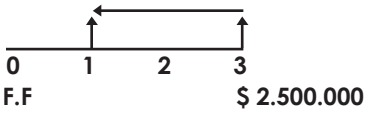
F = $ 2.500.000

P = ?

d = 7 %

t = 2 meses

Gráfica



Desarrollo:

P = F (1 – dt)

$$P = 2.500.000 \left(1 - \frac{0,07}{12 \text{ meses}} \times 2\right) = \textbf{\$ 2.470.850 valor recibido}$$

por el señor Pedro

La ganancia del señor Lobo corresponde al descuento realizado.

D = $ 2.500.000 - $ 2.470.850

D = $ 29.150

Nota: La tasa utilizada en descuento simple se expresa anual

CAPÍTULO 3

USO DEL INTERÉS COMPUESTO EN OPERACIONES FINANCIERAS

3.1 Interés compuesto

Este tipo de operaciones se diferencian de la anterior, porque los intereses se capitalizan, es decir, se unen al capital aumentándolo. La fórmula es igual a la del interés simple, el cambio se encuentra en la variable **"n". $F = P*(1+i)^n$**

F = Valor futuro
P = Capital o valor presente
i = Tasa de interés del período
n = Número de períodos de capitalización "se refiere a las veces que el interés se une al capital" durante el tiempo que dure la negociación.
m = períodos de capitalización en un año

Ejemplo:

Invermet adquiere un préstamo por $ 10.000.000 para la compra de una maquinaria, el cual debe cancelarse a los 9 meses a una tasa de interés del 32 % anual con capitalización trimestral. Se desea conocer el valor a cancelar al final de los 9 meses.

Nota: La tasa que se menciona en el ejemplo se llama tasa nominal y se representa con la letra (J), es una tasa aparente; esta tasa indica las veces que los intereses se capitalizan en un año. La tasa nominal (J) se puede expresar así:

32 % anual con capitalización trimestral
32 % anual capitalizable trimestralmente
32 % trimestre vencido
32 % trimestral

Esto quiere decir que por trimestre se reconocerá un interés del 8 % (0,32/4); obtenido de dividir la tasa nominal (J) entre el número de trimestres que trae un año (4).

Datos del ejemplo:
F = ???
P = $ 10.000.000
J = 32 % trimestral
i = 8 % (0,32/4 trimestres)
n = 3 número de trimestres si la negociación tiene una duración de 9 meses)

Gráfica

Aplicando la fórmula:
F = 10.000.000*(1 + 0,32/4)^3
F = 10.000.000 *(1 + 0,08)^3
F = 10.000.000*(1,259712)
F = $ 12.597.120

Pasados 9 meses la empresa debe cancelar la suma de **$ 12.597.120**

Si utilizamos Excel, la fórmula a aplicar es:
=VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)

Reemplazando queda:
=VF(0,08;3;0;-10000000;0) = $ 12.597.120

Al utilizar Excel la opción pago es cero, por no ser una anualidad y en VA (valor presente) se copia negativo.

Ejemplo:

1. Si la empresa Invermet Ltda. tuviera que cancelar $12.597.120 a los 9 meses, por un préstamo adquirido una tasa del 32 % anual con capitalización trimestral. Se desea conocer el valor prestado el día de hoy.

Nota: En este caso el dato a conseguir se llama valor presente. Al momento de desarrollar un problema de matemáticas financieras es importante identificar los datos y realizar la gráfica para entender mejor la situación.

Datos:

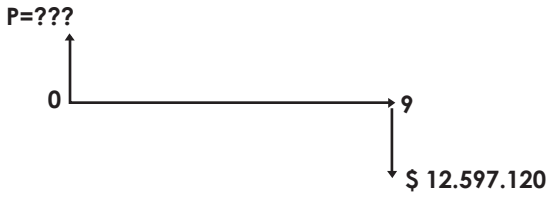
F = $ 12.597.120

P = ¿¿¿

i = 8 % (0,32/4 trimestres)

n = 3

Gráfica



Aplicando la fórmula, con dos presentaciones distintas, pero con un mismo resultado

$F = P*(1 + i)^n$

Despejando el capital (P) en la fórmula.

$F *(1 + i)^{-n} = P$ o $F/(1 + i)^n = P$

$12.597.120*(1 + 0,08)^{-3} = P$ o $12.597.120 / (1 + 0,08)^3 = P$

P = $ 10.000.000 = **P = $ 10.000.000**

En Excel:

= VA(tasa;nper;pago;VF;tipo)

= VA(0,08;3;0;-12597120;0) = $ 10.000.000

2. De acuerdo con el ejemplo anterior, calcular la tasa de interés trimestral, si el valor a cancelar a los 9 meses es de $ 12.597.120 y el valor prestado es $ 10.000.000.

   Datos:

   F = $ 12.597.120

   P = $ 10.000.000

   i = ???

   n = 9 meses (3 trimestres)

Gráfica

Aplicando la fórmula:

$F = P*(1 + i)^n$

Despejando 'i':

$F/P = (1 + i)^n$

$\sqrt[n]{F/P} - 1 = i$

Reemplazando en la fórmula:

$$\sqrt[3]{\frac{12.597.120}{10.000.000}} - 1 = \sqrt[3]{1.259.712} - 1 = 1,08 - 1 = 0,08 = 8\ \%\ \text{trimestral}$$

En Excel:

= tasa (nper;pago;VA;VF;tipo)

= tasa (3;0;-10.000.000;12.597.120;0) = **0,08 o 8 % trimestral**

3. Calcular el número de períodos con los mismos datos del ejemplo anterior.

   Datos

   F = 12.597.120

   P = 10.000.000

   i = 8 % trimestral

Gráfica

Fórmula

$F = P*(1 + i)^n$

Despejar 'n' de la fórmula. Para ello se utiliza la operación logaritmo natural (ln).

$F/P = (1 + i)^n$

$\ln(F/P) = n*\ln(1 + i)$

$$\frac{\ln(F/P)}{\ln(1 + i)} = n$$

Reemplazando en la fórmula:

$$\frac{\ln(12.597.120/10.000.000)}{\ln(1 + 0,08)} = \frac{\ln(1,259712)}{\ln 1,08} = \frac{0,230883123}{0,076961041} = 3 \text{ trimestres}$$

R/ta = 3 trimestres por estar la tasa dada en esa unidad de tiempo.

En Excel:

=NPER(Tasa;pago;VA;VF;tipo)

=NPER(0,08;0;-10000000;12.597.120;0) = **3 trimestres**

Nota: La tasa y el tiempo de duración de una operación deben estar expresados en la misma unidad de tiempo.

3.2 Ecuaciones de valor

En el mundo de los negocios en ocasiones ocurre que un deudor por 'x' razón pacta con su acreedor el pago de sus obligaciones para una nueva fecha. La fecha escogida se conoce como fecha focal; es el momento donde se igualan todos los compromisos surgiendo uno nuevo. La igualación de las obligaciones se realiza utilizando las llamadas ecuaciones de valor, y acreedor como deudor al momento de la operación deben estar de acuerdo en la fecha y la nueva tasa.

Ejemplo:

El señor De la Hoz tiene con el señor Espinoza las siguientes obligaciones. Debe cancelar en 18 meses la suma de $ 2.500.000 y $1.500.000 pagaderos en 5 años. Los señores acuerdan un pago único al final del tercer año y una tasa del 32 % TV.

Datos

Deuda # 1 $ 2.500.000

Deuda # 2 $ 1.500.000

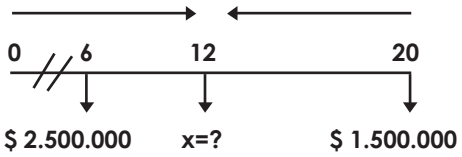
Tiempo 1 a 18 meses = 6 trimestres

Tiempo 2 a 5 años = 20 trimestres

Tasa del 32 % TV = 8 % trimestre

Fecha focal (año 3) = 12 trimestres

Gráfica



Para este ejemplo se deben llevar las obligaciones iniciales a la fecha focal.

Deuda 1: VF = 2.500.000*(1 + 0,08)^{6} = **$ 3.967.185**

Excel =VF(tasa;nper;pago;va;tipo)

=VF(0,08;6;0;-2500000;0) = **$ 3.967.185**

Deuda 2: VF= 1.500.000*(1 + 0,08)$^{-8}$ = **$ 810.403**

Excel =VA(0,08;8;0;-1500000;0) = **$ 810.185**

Valor a cancelar al final del tercer año **$ 4.777.588**

CAPÍTULO 4

OPERACIONES FINANCIERAS CON TASAS DE INTERÉS VENCIDAS

4.1 Equivalencias de tasas –vencidas–

Dos tasas son equivalentes si en un período de un año producen el mismo interés. La fórmula para establecer equivalencias entre tasas se basa en la ya vista.

$$F = P*(1+ i)^n$$

Fórmula de equivalencias de tasas $ie =(1+J/m)^n$,

Donde:

i^e = es el símbolo que utilizaremos para referirnos a la tasa efectiva anual; aquella que se reconoce si la capitalización fuera una vez al año (Bodie y Merton, 1999, citados por Meza, 2010).

Se pueden establecer equivalencias entre tasas nominales, nominales y efectivas.

Ejemplo:

1. Invermet adquiere un préstamo por $ 10.000.000 para la compra de una maquinaria, el cual debe cancelarse a los 9 meses a una tasa de interés del 32 % anual con capitalización bimestral.

En este caso se observa que el término en el cual se encuentra expresada la tasa (bimestral) es diferente al término en el cual se expresa el tiempo de negociación (meses), para calcular el valor a cancelar al final de la operación nos vemos en la necesidad de igualar los términos de la tasa y el período de negociación, para ello debe calcularse la tasa equivalente en meses a la tasa expresada en el ejemplo. En otras palabras, calcular la tasa mensual equivalente a una tasa del 32 % bimestral.

La equivalencia entre tasas nominales se hace de la siguiente manera:

Fórmula:

$$\mathbf{(1 + J_1/m)^n = (1 + J_2/m)^n,}$$

Donde:

J_1 = tasa con capitalización mensual a calcular

J_2 = Tasa con capitalización bimestral dada por el ejemplo (32 % trimestral)

Reemplazando en la fórmula:

$$(1 + J_1/12)^{12} = (1 + 0{,}32/6)^6$$

Despejando:

$$(1+J_1/12) = \sqrt[12]{(1+0{,}0533)^6}$$

$J_1/12 = 0{,}02629$

$J_1 = 0{,}02629 \times 12$

J_1= 0,3156 o 31,56 % anual con capitalización mensual

Conociendo la tasa mensual se procede a resolver el Ejemplo.

Datos:

F = ??

P = 10.000.000

i = 0,3156/12 = **0,02630 mes**

n = 9 meses

Fórmula:

F = P*(1 + i)n

$$F = 10.000.000(1 + 0{,}3156/12)^9$$

F = $ 12.631.908

Como Excel no tiene una fórmula para realizar equivalencias entre tasas nominales, es necesario calcular una tasa efectiva y a partir de esta, calcular la nominal que requerimos.

La tasa efectiva en Excel para una tasa nominal del 32 % bimestral se obtiene así:

= INT.EFECTIVO(tasa nominal;#de períodos),

= INT EFECTIVO(0,32;6) = 0,3658 o 36,58 %

Conocida la tasa efectiva se procede a calcular la nominal

= TASA.NOMINAL (tasa efectiva; # períodos),

= TASA.NOMINAL(0,3658;12) = 0,3158 o 31,58 %

La tasa obtenida es de 31,58 % anual con capitalización mensual; la diferencia con la obtenida manualmente es por el número de decimales tomados por el computador.

El valor futuro se obtiene de la siguiente forma:

= VF(tasa;nper;pago;VA;tipo),

al reemplazar los datos: = VF(0,0263;9;0;-10.000.000;0) = **$12.631.908**

2. Supongamos. Invermet adquiere un préstamo por $ 10.000.000 para la compra de una maquinaria, el cual debe cancelarse a los 9 meses a una tasa de interés del 32 % efectivo anual.

En este caso la tasa se encuentra expresada anualmente y el préstamo debe ser cancelado en unos meses. Nos vemos

ante la problemática de calcular el valor a pagar cuando la tasa y el tiempo de duración son diferentes. Como en el ejemplo anterior se requiere igualar los términos, calculando una tasa con capitalización mensual equivalente a la tasa efectiva anual dada en el ejemplo.

Fórmula:

$$(1+J/12)^{12} = (1+i_e)$$

Donde:

J = Tasa nominal con capitalización mensual que se va a calcular

i_e = Tasa efectiva anual dada por el ejemplo (32% EA)

Reemplazando en la fórmula:

$$(1+J/12)^{12} = (1+0{,}32)$$

$$(1+J/12) = \sqrt[12]{(1+0{,}32)}$$

$$J/12 = 1{,}0234 - 1$$

J = 0,0234 x 12 = 0,2808 = **28,08 %** anual con capitalización mensual

Conocida la tasa equivalente se puede calcular el valor a cancelar a los 9 meses.

Datos

F = ??

P = 10.000.000

i = 0,2808/12 meses = 0,0234 tasa mes

n = 9 meses

Reemplazando los datos:

$$F = P*(1*i)^n$$

$$F = 10.000.000*(1 + 0{,}0234)^9 = \mathbf{\$\ 12.314.272}$$

Desarrollo del mismo ejercicio utilizando Excel.
Datos:
F =??
P = 10.000.000
n = 9 meses
m= 12 (períodos de capitalización en un año)

Para calcular el valor a cancelar debemos primero realizar una equivalencia de tasas, para conocer la tasa a utilizar en la operación.

En Excel la tasa nominal se obtiene así:
=Tasa.nominal(tasa efectiva;#de períodos) Reemplazando en la fórmula:
=Tasa.nominal(0,32;12) = 0,2808 ó 28,08 % anual con capitalización mensual.

El valor a cancelar a los 9 meses. =**VF(tasa;nper;pago;VA;tipo)** Reemplazando los datos en la fórmula:
=VF(0,0234;9;0;-10000000;0)= **$ 12.314.272**

CAPÍTULO 5

USO DE TASAS VENCIDAS Y ANTICIPADAS EN OPERACIONES FINANCIERAS

5.1 Equivalencias entre tasas vencidas y anticipadas

Se pueden establecer equivalencias entre tasas nominales vencidas y anticipadas, por medio de la fórmula $i = i_a / (1- i_a)$.

Nota: el símbolo i_a hace referencia a la tasa anticipada por período

5.2 Cálculo de una tasa vencida a partir de una tasa anticipada

1. Calcular la tasa trimestral vencida, equivalente a una tasa trimestral anticipada del 36 %. Aquí la tasa vencida y la anticipada están expresadas en los mismos términos (trimestres). Aplicando la fórmula anterior, se calcula la tasa trimestral vencida equivalente a la trimestral anticipada.

Datos

i_a = 0,36/4 = 0,09 trimestre anticipado

i = 0,09/(1-0,09) = 0,098, igual 9,8 % trimestre vencido

2. Calcular la tasa trimestral vencida, equivalente a una tasa mensual anticipada del 36 %.

En este caso las tasas están expresadas en términos distintos; una trimestralmente, la que se desea conocer y otra mes anticipado, que es la tasa dada.

Lo primero que se debe hacer es conocer la tasa mensual vencida equivalente a la tasa mensual anticipada. Aplicando la fórmula $\mathbf{i = i_a / (1 - i_a)}$.

i_a = 0,36 / 12 = 0,03 mes anticipado

Reemplazando en la ecuación:

$i = 0{,}03/(1 - 0{,}03)$

$i = 0{,}0309 = 3{,}09$ % mes vencido

Conocida esta tasa se puede calcular la tasa trimestre vencido, para la cual se utiliza la fórmula vista al inicio:

$$\mathbf{(1+J_1/m)^n = (1+J_2/m)^n}$$

J_1 = Tasa nominal a calcular trimestre vencido

J_2 = Tasa mes vencido

Reemplazando en la ecuación:

$(1+J/4)^4 = (1 + 0{,}0309)^{12}$

$(1+J/4)^4 = 1.4407$

$1+J/4= \sqrt[4]{1.4407} = 1.0955 \quad J = (1.0955 -1) \times 4 = 0{,}3823$

38,23 % Tasa anual con capitalización trimestral, i = 9,55 % por trimestre.

5.3 Cálculo de una tasa anticipada a partir de una tasa vencida

1. Calcular la tasa bimestral anticipada a partir de una tasa del 30 % bimestre vencido.

Para calcular la tasa anticipada utiliza la siguiente fórmula:

$i_a = i/(1 + i)$

$i_a = 0{,}05/(1 + 0{,}05)$

$i_a = 0{,}0476$

$i_a = 4{,}76$ % bimestre anticipado

2. Calcular la tasa trimestral anticipada a partir de una tasa del 34 % mes vencido.

Para este caso se debe calcular la tasa trimestre vencido, aplicando la fórmula:

$$\mathbf{(1 + J_1/m)^n = (1 + J_2/m)^n}$$

Donde:

J_1 = Tasa nominal con capitalización trimestral

J_2 = Tasa nominal con capitalización mensual

Reemplazando en la fórmula: $(1 + J_1/4)^4 = (1 + J_2/12)^{12}$

$(1 + J_1/4)^4 = (1 + 0{,}34/12)^{12}$

$(1 + J_1/4)^4 = 1{,}3977$

$1+J_1/4= \sqrt[4]{1.3977} = 1{,}0873$

J_1 = (1,0873 - 1) x 4 = **34,92 % anual con capitalización trimestral**

Trimestre = 0,3492 / 4 = 0,0873 trimestre vencido (i)

Con esta tasa se procede a determinar la tasa trimestre anticipado.

$i_a = i/(1 + i)$

$i_a = 0{,}0873/(1 + 0{,}0873)$

$i_a = 0{,}0802$ o 8,02 % trimestre anticipado

5.4 Cálculo de una tasa efectiva a partir de una tasa anticipada

1. Calcular la tasa efectiva anual a partir de una tasa del 30 % con capitalización mes anticipado. Se debe calcular la tasa mes vencido a partir de la tasa dada.

   $\mathbf{i = i_a/(1 - i_a)}$

   $i_a = 0{,}3/12 = 0{,}25$ mes anticipado

   $i = 0{,}025/(1-0{,}025) = 0{,}025/0{,}975$

$i = 0{,}0256$

$i = 2{,}56\ \%$ mes vencido

A partir de esta tasa se puede calcular la efectiva anual vencida

Fórmula:

$$(1 + i_e) = (1 + J_1/m)^n$$

Donde:

i_e = Tasa efectiva a calcular

J_1 = Tasa nominal vencida con capitalización mensual

Reemplazando en la fórmula:

$$(1 + i_e) = (1 + 0{,}0256)^{12}$$

$$(1 + i_e) = 1{,}3543$$

$$i_e = 1{,}3543 - 1$$

$$\mathbf{i_e = 0{,}3543 = 35{,}43\ \%\ E.A.}$$

CAPÍTULO 6

SERIES DE PAGOS UNIFORMES

6.1 Anualidades

Puede ocurrir que en períodos iguales de tiempo se realicen pagos también iguales. Esto se conoce con el nombre de anualidades. Si los pagos se llevan a cabo al final de cada período la anualidad se conoce como vencida.

Fórmula:

$$F = A * \left(\frac{(1 + i)^n - 1}{1} \right)$$

Donde:

F = Valor futuro de una anualidad
A = Pago periódico
i = tasa de interés
n = períodos de negociación

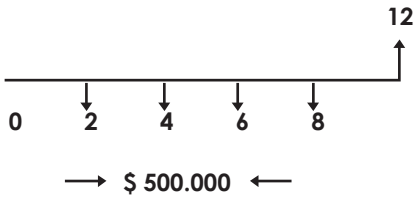
Ejemplo:

1. Si la empresa ABC necesita comprar una maquinaria dentro de un año, por tal motivo realiza depósitos bimestrales por un valor de $ 500.000, en una cuenta que reconoce un interés del 24 % bimestre vencido. ¿Cuánto tiene reunido la empresa al final del año?

Datos:

F = ????
A = $ 500.000
i = 0,04 (0,24 / 6) bimestre
n = 6 bimestres

Gráfica



Aplicando la fórmula:

$$F = 500.000 * \left(\frac{(1 + 0,04)^6 - 1}{0,04} \right)$$

R/ta = $ 3.316.487

En Excel:

=VF(tasa;# de períodos; pago; VA; tipo), reemplazando:
=VF(0,04;6;-500000;0) = **$ 3.316.487**

2. La empresa desea comprar una maquinaria cuyo valor a un año se estima en $10.000.000, y ahorrar en el banco, que le reconoce una tasa del 24 % bimestral, una cuota en igual intervalo de tiempo. Se desea conocer el valor de la cuota.
   F = 10.000.000
   A = ¿¿¿
   i = 0,04 bimestre
   n = 6 bimestres

Lo que se debe hacer es despejar la fórmula inicial, quedando

$$\frac{F}{\left(\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right)} = A; \text{ reemplazando los datos: } \frac{10.000.000}{6.6329}$$

R/ta = $ 1.507.637 bimestral

En Excel:

= PAGO(tasa;nvper;VA;VF;tipo), reemplazando:
= PAGO(0,04;6;0;-10000000;0) = **$ 1.507.637 bimestral**

De esta manera se está calculando la cuota partiendo del valor futuro. Se puede también calcular el valor de la cuota a partir del valor presente.

3. Si la maquinaria que desea comprar la empresa ABC tiene un valor de $ 10.000.000, la empresa hace un préstamo bancario para cancelarlo en 6 cuotas bimestrales a una tasa de interés del 24 % bimestral. Se desea conocer el valor de las cuotas a pagar por la maquinaria.

Datos:

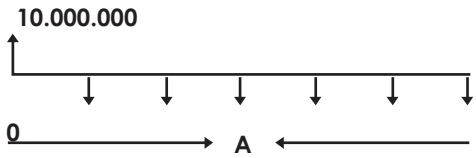
P = $ 10.000.000

i = 0,24/6 = 0,04 bimestral

n = 6 bimestres

A = ???

Gráfica



Fórmula:

$$P = A * \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$ reemplazando en la fórmula:

$$10.000.000 = A * \left(\frac{1-(1+0{,}04)^{-6}}{0{,}04}\right)$$

Despejando, A = 10.000.000 / 3,63 = **$ 1.907.619**

Usando Excel:

= pago(tasa;nper;VA;VF;tipo)

= pago(0,04;6;-10000000;0,0) = **$1.907.619**

4. Utilizando los datos del literal (1), se puede calcular el valor presente de la anualidad. En este caso se desea conocer el valor de la anualidad al día de hoy, si el pago periódico es de $ 500.000 mensual y la tasa que reconoce el banco es del 24 % bimestral.

La fórmula a utilizar es la misma, pero se debe tener presente de invertir los términos dentro del corchete.

Fórmula:

$$P = A * \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right)$$

Gráfica

Reemplazando en la fórmula:

$$P = 500.000 * \left(\frac{1 - (1 + 0,04)^{-6}}{0,04} \right) = \$\ 2.621.125$$

Excel

= VA(tasa;nper;pago;vf;tipo)

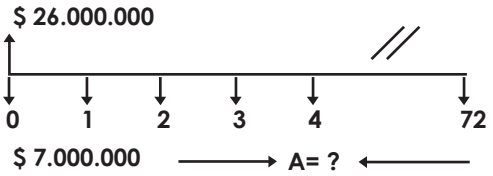
= VA(0,04;6;-500000;0;0) = **$ 2.621.125**

5. Juanita compra un vehículo por valor de $ 26.000.000, entregando $7.000.000 de cuota inicial y con el compromiso de cancelar cuotas mensuales iguales por un tiempo de 6 años a una tasa del 24 % MV. ¿Cuál sería el valor de la cuota?

Datos:

Valor vehículo (V.V) = 26.000.000
Cuota inicial = $ 7.000.000 (CI)
i = 0,24/12 = 0,02 mensual
n = 72 meses
A = ?
P = 19.000.000 (V.V - CI)

Gráfica



Fórmula:

$$P = A * \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right); \; 19.000.000 = A\left(\frac{1-(1+0{,}02)^{-72}}{0{,}02}\right)$$

Despejando A en la fórmula, nos da un valor de **$ 500.197** mensuales.

Excel:

=PAGO(tasa,nper;VA;VF;tipo)
=PAGO(0,02;72;-19.000.000;0;0) = **$ 500.209** mensuales

6. Si Juanita omitiera los primeros 5 pagos, ¿cuánto debe cancelar al momento de la cuota número 6 para quedar al día?

Datos:

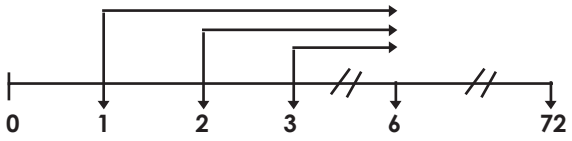
A = $ 500.197

F = ??

n = 6 (sexto pago)

i = 0,02 mensual

Gráfica



Para ponerse al día, los pagos dejados de hacer por Juanita deben ser llevados al sexto mes y sumarle el valor a pagar en esa fecha.

Desarrollo

$$500{,}197 \times \left(\frac{(1 + 0{,}02)^5 - 1}{0{,}02}\right) + 500.197 = 2.603.045 + 500.197$$

R/ta = $ 3.103.242

Excel

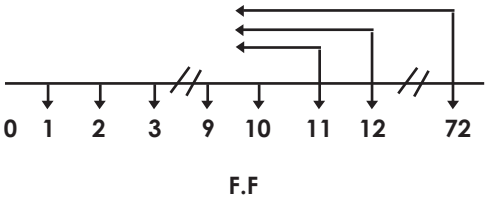
=VF(tasa;nper;pago;VA;tipo)

=VF(0,02;5;-500.197;0;0) = **$ 2.603.045**

A este valor hay que sumarle la cuota del sexto mes $ 500.197, para un total a pagar de **$ 3.103.242**

7. Después de 9 pagos, Juanita desea cancelar la deuda mediante un pago único al vencimiento de la décima cuota. ¿Cuál sería el valor a pagar?

Gráfica



El valor a pagar será igual al valor presente de los pagos faltante (en el mes), más la cuota a cancelar en el mes.

Desarrollo:

$$500.197 \times \left(\frac{1-(1+0{,}02)^{-62}}{0{,}02}\right) + 500.197$$

R/ta = $ 18.184.661.94

Excel

=VA(tasa;nper;pago;VF;tipo)

=VA(0,02;62;-500.197;0;0) = 17.683.284 + 500.197

= **$ 18.183.482**

CAPÍTULO 7

VARIACIONES EN LAS SERIES DE PAGO

7.1 Anualidades anticipadas

Cuando los pagos que conforman una anualidad se realizan a principio de cada período, la anualidad se conoce con el nombre de anualidades anticipadas. El cálculo del valor presente y el valor futuro se realiza aplicando la misma fórmula de las vencidas multiplicándola por el factor (1 + i), para volverla anticipada.

Ejemplo

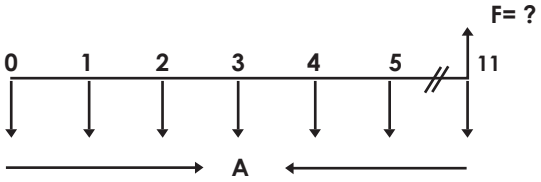
1. Si la empresa ABC necesita comprar una maquinaria dentro de un año, por tal motivo realiza depósitos al inicio de cada bimestre por un valor de $ 500.000, en una cuenta que reconoce un interés del 24% bimestre anticipado. ¿Cuánto tiene reunido la empresa al final del año?

En este caso los depósitos se realizan al inicio de cada período, lo cual convierte a la anualidad en anticipada.

Datos:

A = $ 500.000
n = 6 (número de bimestres del año)
i = 0,24/6 = 0,04 por bimestre

Gráfica



Fórmula:

La fórmula para calcular el valor de la anualidad al final del

período es la misma utilizada para una anualidad vencida, pero teniendo en cuenta de multiplicarla por el factor (1+ i) para convertirla en anticipada.

$$F = A * \left(\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right) * (1 + i)$$

Reemplazando en la fórmula:

$$F = 500.000 * \left(\frac{(1 + 0{,}04)^6 - 1}{0{,}04}\right) * (1 + 0{,}04)$$

R/ta = $ 3.449.147

En Excel:

= VF(tasa;nper;pago;VA;tipo)

= VF(0,04;6;-500000;0;1) = **$ 3.449.147**

Nota: en tipo se digita 1, por tratarse de una anualidad anticipada

2. Utilizando el ejemplo anterior, se quisiera saber el valor al día de hoy de la anualidad.

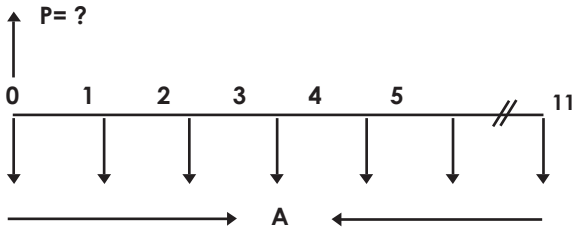
Datos:

A = $ 500.000

n = 6 bimestres

i = 0,24/6 = 0,04 bimestral

Gráfica



Fórmula:

$$P = A * \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right) * (1 + i)$$

Nótese que la fórmula es la misma que la utilizada en el cálculo del valor presente de una anualidad vencida, pero multiplicada por el factor (1 + i) por ser los pagos anticipados.

Reemplazando los datos en la fórmula:

$$P = 500.000 * \left(\frac{1 - (1 + 0{,}04)^{-6}}{0{,}04}\right) * (1 + 0{,}04) = 2.726.100$$

En Excel:

=VA(tasa;nper;pago;VF;tipo)

=VA(0,04;6;-500000;0;1) = **$ 2.725.911**

CAPÍTULO 8

SERIES DE PAGOS VARIABLES

8.1 Gradientes crecientes

Los gradientes son anualidades, con la característica de presentar aumento o disminución de los pagos realizados o ingresos esperados. Cuando los aumentos de un período a otro están expresados en términos monetarios ($ 100, $ 200, $ 400, $ 1000, etc…) el gradiente se conoce con el nombre de gradiente aritmético o lineal creciente; si los valores de un período a otro varían en términos de porcentajes (2 %, 4 %, 5 %, etc…) estamos ante un gradiente geométrico creciente.

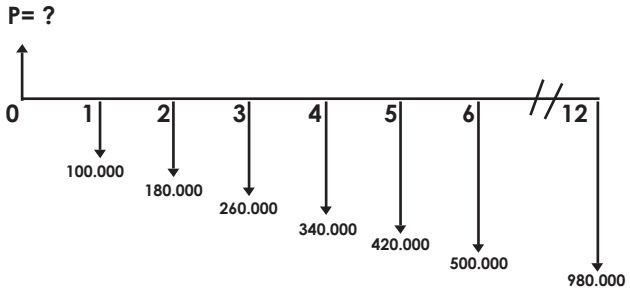
8.2 Valor presente de un gradiente lineal creciente

Calzado y remontadora Roma compra maquinaria cosedora para pagarla en 12 cuotas, las cuales aumentan en $ 80.000 cada mes. El valor de la primera cuota es de $ 100.000 y la tasa pactada en la negociación es del 5 % mensual. ¿Cuánto le costó la maquinaria a Calzado Roma?

Datos:

P = Valor presente de la máquina adquirida por Calzado Roma
A = Primer pago realizado
i = Tasa de interés de la negociación
n = número de períodos
G = Gradiente (aumento experimentado por la cuota de un período a otro)

Gráfica



Fórmula:

$$P = A \times \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right) + \frac{G}{i} \times \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^{n}}\right)$$

Reemplazando:

$$P = 100.000 \times \left(\frac{1 - (1 + 0,05)^{-12}}{0,05}\right) \frac{+ 80.000}{0,05} X \left(\frac{1 - (1 + 0,05)^{-12}}{0,05} - \frac{12}{(1 + 0,05)^{12}}\right)$$

$$P = 100.000 \times \left(8,88\right) + 1.600.000 \times \left(8,88 - 6,68\right)$$

P = 888.000 + 3.520.000

R/ta = $ 4'408.000

8.3. Valor de la cuota a partir del valor presente de un gradiente aritmético o lineal creciente

Tomando como referencia el ejemplo de Calzado Roma, ¿cuál sería el valor de la cuota?, si esta aumenta en $ 50.000, el valor de la maquinaria es de $ 2.800.000, la tasa de interés el 5 % mensual y tiempo 1 año.

Datos:

P = $ 2.800.000

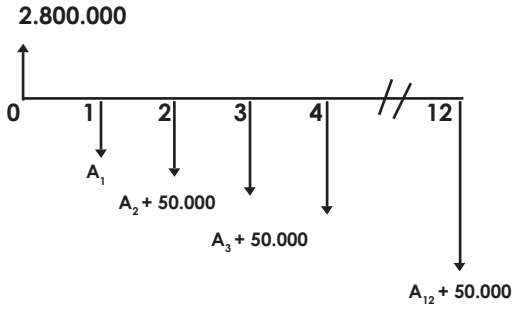
A = ??

i = 0,05 mensual

n = 12 meses

G = $ 50.000 mensual

Gráfica



Fórmula:

$$P = A \times \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right) + \frac{G}{i} \times \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^{n}}\right)$$

Reemplazando:

$$2.800.000 = A \times \left(\frac{1 - (1 + 0{,}05)^{-12}}{0{,}05}\right) + \frac{50.000}{0{,}05} \times \left(\frac{1 - (1 + 0{,}05)^{-12}}{0{,}05} - \frac{12}{(1 + 0{,}05)^{12}}\right)$$

$$2.800.000 = A \times \left(8{,}88\right) + 1.000.000 \times \left(8{,}88 - 6{,}68\right)$$

$$2.800.000 = A \times \left(8{,}88\right) + 2'200.000$$

Despejando "A" en la fórmula:

$$\frac{2'800.000 - 2'200.000}{8{,}88} = A$$

R/ta = $ 67.567,56

Tabla 1
Valor de las cuotas

Cuotas	Valor	Cuotas	Valor	Cuotas	Valor
1	$ 67.567	5	$ 267.567	9	$ 467.567
2	$ 117.567	6	$ 317.567	10	$ 517.567
3	$ 167.567	7	$ 367.567	11	$ 517.567
4	$ 217.567	8	$ 417.567	12	$ 617.567

8.4. Valor futuro de un gradiente lineal creciente

Es el valor de una serie de pagos crecientes al final del período de negociación.

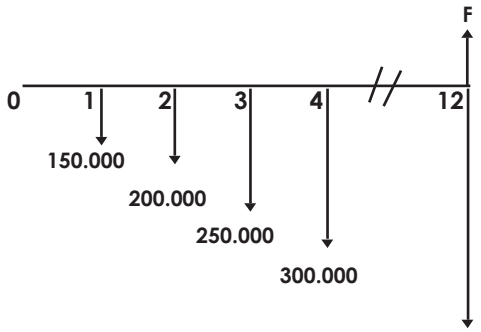
Ejemplo:

1. María se propone ir de vacaciones a Orlando, para lo cual consigna en el banco $ 150.000 y mensualmente aumenta la cuota en $ 50.000, por un año. El banco le reconoce una tasa del 2 % mensual. ¿Cuánto tendrá ahorrado María al final del año?

Datos:

Valor futuro (F) = ?
Tasa de interés (i) = 2 % mensual
Períodos (n) = 12 meses
Primera cuota (A) = $ 150.000
Gradiente (G) = $ 50.000

Gráfica



Fórmula:

$$F = A \times \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) + \frac{G}{i} \times \left(\frac{1 - (1+i) - 1}{i} - n\right)$$

Reemplazando:

$$F = 150.000 \left(\frac{x\ (1 + 0{,}02)^{12} - 1}{0{,}02}\right) + \frac{50.000 \times}{0{,}02} \left(\frac{(1 + 0{,}02)^{12} - 1}{0{,}02} - 12\right)$$

$$F = 150.000 \times \left(13.412\right) + 2.500.000 \times \left(13.412 - 12\right)$$

$$F = 2.011.800 + 3.530.000$$

R/ta = $ 5.541.800

Tabla 2
Valor de las cuotas

Cuotas	Valor	Cuotas	Valor	Cuotas	Valor
1	$ 150.000	5	$ 350.000	9	$ 550.000
2	$ 200.000	6	$ 400.000	10	$ 600.000
3	$ 250.000	7	$ 450.000	11	$ 650.000
4	$ 300.000	8	$ 500.000	12	$ 700.000

8.5. Valor de la cuota a partir del valor futuro de un gradiente aritmético creciente

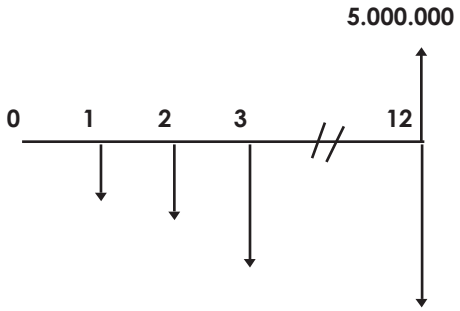
El señor Jorge desea reunir en tres años la suma de $ 5.000.000, en un banco que reconoce una tasa del 1,5 % mensual. ¿Cuál sería el valor de la primera cuota si esta aumenta en $ 5.000 mensuales?

Nos preguntan por el valor del primer pago que debe realizar el señor Jorge para cumplir su cometido. Como conocemos el valor al final de los 3 años, la fórmula a utilizar es la del valor futuro.

Datos:

F = $ 5.000.000
i = 1,5 % mensual
n = 12 meses
G = $ 5.000 mensual

Gráfica



Fórmula:

$$F = A \times \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) + \frac{G}{i} \times \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right)$$

Reemplazando:

$$F = A \times \left(\frac{(1+0{,}015)^{12} - 1}{0{,}015}\right) + \frac{50.000}{0{,}015} \times \left(\frac{(1+0{,}015)^{12} - 1}{0{,}015} - 12\right)$$

$$F = A \times \left(13.041\right) + 333.333 \times \left(13.041 - 12\right)$$

$$5.000.000 = A \times \left(13.041\right) + \left(346.999{,}65\right)$$

$$\frac{5.000.000 - 346.999{,}65}{13.041} = A$$

R/ta = $ 356.798 Valor de la primera cuota

Tabla 3
Valor de las cuotas durante la vigencia del crédito

Cuota	Valor	Cuota	Valor	Cuota	Valor
1	$ 356.798	13	$ 416.798	25	$ 476.798
2	$ 361.798	14	$ 421.798	26	$ 481.798
3	$ 366.798	15	$ 426.798	27	$ 486.798
4	$ 371.798	16	$ 431.798	28	$ 491.798
5	$ 376.798	17	$ 436.798	29	$ 496.798
6	$ 381.798	18	$ 441.798	30	$ 501.798
7	$ 386.798	19	$ 446.798	31	$ 506.798
8	$ 391.798	20	$ 451.798	32	$ 511.798
9	$ 396.798	21	$ 456.798	33	$ 516.798
10	$ 401.798	22	$ 461.798	34	$ 521.798
11	$ 406.798	23	$ 466.798	35	$ 526.798
12	$ 411.798	24	$ 471.798	36	$ 531.798

8.6. Cálculo de una cuota 'X' en un gradiente lineal creciente

Si se quisiera conocer el valor de una cuota, por ejemplo, el valor a cancelar en el mes 5.

El gradiente lineal es una progresión aritmética y el cálculo de cualquier término se realiza de la siguiente forma:

$$\mathbf{X = X_1 + (N - 1)* R}$$

Donde:

X = valor a calcular

X_1 = valor de la primera cuota

N = número de la cuota a calcular

R = la razón. En este caso se refiere al incremento de las cuotas o gradiente

Solución:

X = $ 356.798 + (5 – 1) * $ 5.000

X = $ 376.798

Calcular el valor de la cuota número 12

X = ?

X_1 = $ 356.798

N = 12

R = $ 5.000

Reemplazando en la fórmula:

X = $ 356.798 + (12 – 1) * $ 5.000

X = $ 411.798

8.7. Gradiente aritmético o lineal creciente anticipado

Este gradiente se caracteriza porque los pagos o ingreso ocurren al comienzo de cada período. Se resuelve utilizando las mismas fórmulas de valor presente y futuro del anterior, pero multiplicándolas por el factor (1 + i).

Ejemplo

1. ¿Cuál será el valor de una casa financiada a 10 años, con cuotas mensuales anticipadas que aumentan en $ 10.000 cada mes, si la primera cuota es de $ 1.100.000? La tasa de interés es del 1,2 % mensual.

Datos:

P = ?

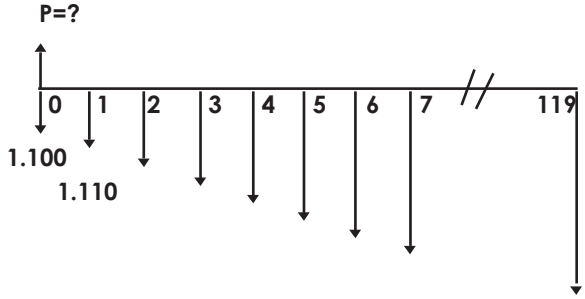
A = 1.100.000

i = 1,2 % mensual

n = 120

G = $ 10.000 mes

Gráfica



Fórmula:

$$P = \left\{ A \times \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right) + \frac{G}{i} \times \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^{n}} \right) \right\} \times (1 + i)$$

Reemplazando en la fórmula:

$$P = \left\{ 1.100.000 \times \left(\frac{1 - (1 + 0{,}012)^{-120}}{0{,}012} \right) + \frac{10.000}{0{,}012} \times \left(\frac{(1 + 0{,}012)^{-120}}{0{,}012} - \frac{120}{(1 + 0{,}012)^{120}} \right) \right\} \times (1 + 0{,}012)$$

$$P = \left\{ 1.100.000 \times \left(\frac{1 - 0{,}2389}{0{,}012} \right) + 833.333 \times \left(\frac{1 - 0{,}2389}{0{,}012} - 28{,}68 \right) \right\} \times (1.012)$$

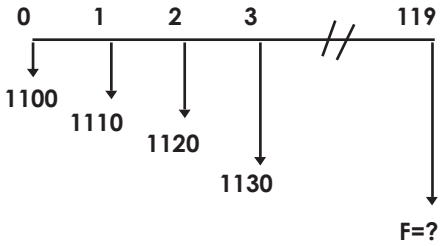
$$P = \left\{ 69.767.500 + 28.954.155 \right\} \times (1.012)$$

R/ta = $ 99.906.314,86

2. Tomando el ejemplo anterior, ¿cuál sería el valor del flujo de dinero al final de los 10 años?

En este caso se hace referencia al valor de los desembolsos al final del tiempo de negociación.

Gráfica



Datos:

A = 1.100.000

n = 120

i = 1,2 % mensual

G = 10.000

Fórmula:

$$F = \left\{ A \times \left(\frac{(1+i)^{-n} - 1}{i} \right) + \frac{G}{i} \times \left(\frac{(1+i)^{-n} - 1}{i} - n \right) \right\} \times (1+i)$$

Reemplazando en la fórmula:

$$F = \left\{ 1.100.000 \times \left(\frac{(1+0{,}012)^{120} - 1}{0{,}012} \right) + \frac{10.000}{0{,}012} \times \left(\frac{(1+0{,}012)^{120} - 1}{0{,}012} - 120 \right) \right\} \times (1+0{,}012)$$

$$F = \left\{ 1.100.000 \times \left(265,38 \right) + 833.333 \times \left(265,38 - 120 \right) \right\} \times (1 + 0,012)$$

$$F = \left\{ 291.918.000 + 121.149.952 \right\} \times (1 + 0,012)$$

R/ta = $ 418,024.767

8.8. Valor presente de un gradiente geométrico creciente

Llámese al valor al día de hoy de una serie de pagos en períodos iguales de tiempo, cuyo incremento de una cuota con relación a la anterior se expresa en términos de porcentaje (%).

Fórmula:

$$P = A \times \left(\frac{(1 + J)^n - (1 + i)^n}{(J - i)\ (1 + i)^n} \right)$$

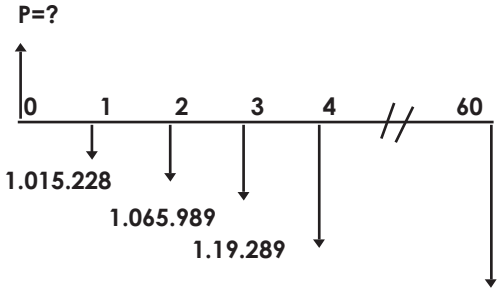
Donde:

P = valor presente del gradiente
i = tasa de interés de la operación
J = gradiente (el porcentaje de incremento de la cuotas)
A = valor de la primera cuota
n = número de períodos de capitalización

Ejemplo:

1. El señor Alberto hace un préstamo bancario para ser cancelado en 5 años, con pagos mensuales que aumentan en un 5 % cada mes. Si el banco cobra una tasa del 1,5 % mensual y la primera cuota es de $1.015.228, ¿cuál es el monto prestado por el señor Alberto?

Gráfica



Para calcular el valor presente se deben regresar todos los pagos al momento "cero", es decir al momento que se adquiere la obligación.

Datos:

A = 1.015.228
i = 1,5 % mensual
n = 60
J = 5 %
n = 60
P = ?

Reemplazando en la fórmula:

$$P = A \times \left(\frac{(1 + J)^n - (1 + i)^n}{(J - i)\ (1 + i)^n} \right)$$

$$P = 1.015.228 \times \left(\frac{(1 + 0{,}05)^{60} - (1 + 0{,}015)^{60}}{(0{,}05 - 0{,}015)\ (1 + 0{,}015)^{60}} \right)$$

$$P = 1.015.228 \times \left(\frac{18.679 - 2.443}{0{,}035 \times 2.443} \right)$$

P = 1.015.228 x 182,894 = **$ 192.785.705** valor prestado por el señor Alberto

8.9. Valor futuro de un gradiente geométrico creciente

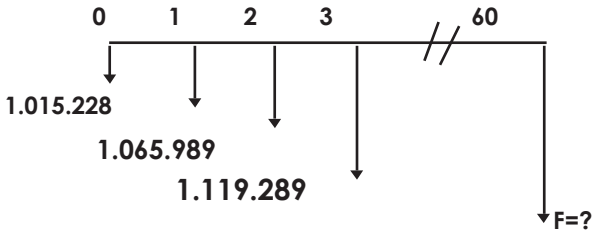
Se define como el valor de los pagos al final del período de negociación.

Tomando el ejemplo anterior, ¿cuál sería el valor de la serie de pagos realizados por el señor Alberto al cabo de los 5 años?

Datos:

A = $ 1.015.228
i = 1,5 % mensual
n = 60
J = 2 % (porcentaje de crecimiento de las cuotas)
F = ?

Gráfica



Fórmula:

$$F = A \times \left(\frac{(1 + J)^n - (1 + i)^n}{(J - i)} \right)$$

Reemplazando en la fórmula:

$$F = 1.015.228 \times \left(\frac{(1 + 0{,}05)^{60} - (1 + 0{,}015)^{60}}{(0{,}05 - 0{,}015)} \right)$$

$$F = 1.015.228 \times \left(\frac{18.679 - 2.443}{0{,}035} \right)$$

F = 470.949.765 Valor de los flujos al final de los 5 años

8.10. Cálculo del valor de una cuota 'X' en un gradiente geométrico creciente

En los gradientes geométricos se puede también calcular el valor de cualquiera de las cuotas que lo conforman de la siguiente manera:

$$\mathbf{X = X_1 * (R)^{n-1}}$$

Donde:

X = es el valor de la cuota a calcular

X_1 = valor del primer término del gradiente

n = período solicitado

R = la razón

Para el ejemplo tratado, calcular el valor de las cuotas 12, 28 y 42.

Cuota # 12

$$\mathbf{X = X_1 * (R)^{n-1}}$$

X = valor de la cuota solicitada
X_1 = $ 1.015.228
n = 12 (período solicitado)
R = se obtiene al dividir el valor de la segunda cuota entre el valor de la primera
R = (1.065.989 / 1.015.228) = 1,05

Reemplazando en la fórmula:

$X = 1.015.228 * (1,05)^{12-1}$

X = $ 1.736.384

Cuota # 28

$X = 1.015.228 * (1,05)^{28-1}$

X = $ 3.790.309

Cuota # 42

$X = 1.015.228 * (1,05)^{42-1}$

X = $ 7.504.553

Tabla 4
Valor de las cuotas durante la vigencia del crédito

Cuota	Valor	Cuota	Valor
1	$ 1.015.228	31	$ 4.387.757
2	$ 1.065.989	32	$ 4.607.145
3	$ 1.119.289	33	$ 4.837.502
4	$ 1.175.253	34	$ 5.079.377
5	$ 1.234.016	35	$ 5.333.346
6	$ 1.295.717	36	$ 5.600.013
7	$ 1.360.503	37	$ 5.880.014
8	$ 1.428.528	38	$ 6.174.015
9	$ 1.499.954	39	$ 6.482.715
10	$ 1.574.952	40	$ 6.806.851
11	$ 1.653.699	41	$ 7.147.194
12	**$ 1.736.384**	42	**$ 7.504.553**
13	$ 1.823.204	43	$ 7.879.781
14	$ 1.914.364	44	$ 8.273.770
15	$ 2.010.082	45	$ 8.687.459
16	$ 2.110.586	46	$ 9.121.831
17	$ 2.216.115	47	$ 9.577.923
18	$ 2.326.921	48	$ 10.056.819
19	$ 2.443.267	49	$ 10.559.660
20	$ 2.565.431	50	$ 11.087.643
21	$ 2.693.702	51	$ 11.642.025
22	$ 2.828.387	52	$ 12.224.127
23	$ 2.969.807	53	$ 12.835.333
24	$ 3.118.297	54	$ 13.477.100
25	$ 3.274.212	55	$ 14.150.955
26	$ 3.437.922	56	$ 14.858.502
27	$ 3.609.818	57	$ 15.601.427
28	**$ 3.790.309**	58	$ 16.381.499
29	$ 3.979.825	59	$ 17.200.574
30	$ 4.178.816	60	$ 18.060.602

CAPÍTULO 9

OPERACIONES CON SERIES DE PAGOS VARIABLES DECRECIENTES

9.1 Gradientes decrecientes

Estos tipos de gradientes tienen la particularidad de que los pagos realizados disminuyen a medida que avanzan los períodos. Cuando las disminuciones están expresadas en términos monetarios ($ 100, $ 200, $ 400, $ 1000, etc…) el gradiente se conoce con el nombre de gradiente aritmético o lineal decreciente; si los valores varían en términos de porcentajes (2 %, 4 %, 5 %, etc…) estamos ante un gradiente geométrico decreciente.

9.2. Valor presente de un gradiente lineal decreciente

Es el valor al día de hoy de una serie de pagos que disminuyen en un valor fijo.

Fórmula:

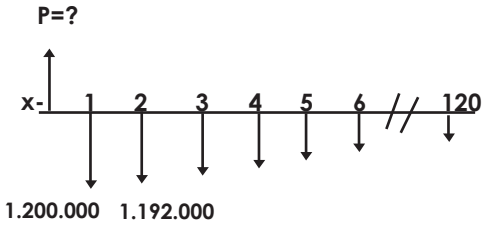
$$P = A \times \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right) - \frac{G \times}{i} \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^{n}}\right)$$

Como se puede observar, la fórmula es la misma del gradiente lineal creciente, con la diferencia que, en este, en vez de sumar el gradiente se resta.

Ejemplo:

La empresa ABC compra una maquinaria para ser cancelada en 10 años con pagos mensuales que disminuyen en $ 8.000. Se recurre a un banco que ofrece una tasa de financiamiento del 2 % mensual. ¿Cuál es el valor del préstamo solicitado por la empresa si la primera cuota fue de $ 1.200.000?

Gráfica



Datos:

P =???

A = $ 1.200.000

i = 2 % mensual

G = $ 8.000

n = 120

Reemplazando en la fórmula:

$$P = 1.200.000 \times \left(\frac{1 - (1 + i)^{-120}}{0,02}\right) \frac{8.000}{0,02} \times \left(\frac{1 - (1 + i)^{-120}}{0,02} - \frac{120}{(1 + 0,02)^{120}}\right)$$

$$P = 1.200.000 \times \left(45,36\right) - 400.000 \times \left(45,36 - 11.147\right)$$

$$P = 1.200.000 \times \left(45,36\right) - 400.000 \times \left(34.213\right)$$

$$P = 54.432.000 - 13.685.200$$

P = $ 40.746.800 Valor de la maquinaria comprada por la empresa ABC

9.3. Valor futuro de un gradiente lineal decreciente

Se refiere al valor de la serie de pagos al final del período de negociación.

Fórmula:

$$F = A \times \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) - \frac{G}{i} \times \left(\frac{(1+i)^n - n}{i}\right)$$

El valor futuro se obtiene aplicando la fórmula utilizada para calcular el valor futuro de un gradiente lineal creciente, pero restando en esta ocasión el gradiente.

Ejemplo:

El señor Pedro compra un vehículo para cancelarlo en 5 años con cuotas mensuales que disminuyen en 5.000 y la tasa ofrecida por el banco es del 1,5 % mensual. ¿Cuál será el valor cancelado por el señor Pedro al final del crédito, si la primera cuota es de $ 1.500.000?

Datos:

F = ?

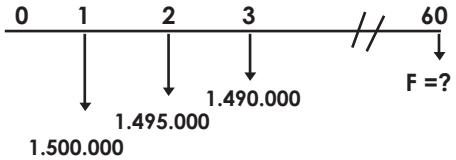
A = $ 1.500.000

i = 1,5 % mensual

G = $ 5.000

n = 60 (cuotas del crédito)

Gráfica



Fórmula

$$F = A \times \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) - \frac{G}{i} \times \left(\frac{(1+i)^n - n}{i} \right)$$

Reemplazando en la fórmula:

$$F = 1.500.000 \times \left(\frac{(1+0{,}015)^{60} - 1}{0{,}015} \right) - \frac{5.000}{0{,}015} \times \left(\frac{(1+0{,}015)^{60} - 1}{0{,}015} - 60 \right)$$

$$F = 1.500.000 \times \left(96{,}214 \right) - 333.333{,}33 \times \left(96{,}214 - 60 \right)$$

F = 144.321.000 - 12.071.321

F = **$ 132.249.679 Valor cancelado al final del crédito por el señor Pedro**

9.4. Cálculo del valor de una cuota 'X' en un gradiente lineal decreciente

Para calcular el valor de una cuota en un gradiente lineal decreciente se utiliza la fórmula de progresión aritmética cambiando el signo de suma por el de la resta, como se muestra a continuación:

$$\mathbf{X = X_1 - (N - 1) * R}$$

Donde:

X = es el valor de cuota deseada

X_1 = valor de la primera cuota

N = número de la cuota a calcular

R = la razón, en este caso el valor del gradiente

Tomemos el ejemplo de la empresa ABC y calculemos el valor de las cuotas #7, #20 y #50.

X = ?

X_1 = 1.200.000

N = 7

R = 8.000

X = 1.200.000 – (7 – 1) * 8.000 = **$ 1.152.000**

Cuota #20

X = ?

X_1 = 1.200.000

N = 20

R = 8.000

X = 1.200.000 – (20 – 1) * 8.000 = **$ 1.048.000**

Cuota #50

X = ?

X_1 = 1.200.000

N = 50

R = 8.000

X = 1.200.000 – (50 – 1) * 8.000 = **$ 808.000**

Tabla 5

Valor de las cuotas durante la vigencia del crédito

Cuota	Valor	Cuota	Valor	Cuota	Valor	Cuota	valor
1	$ 1.200.000	31	$ 960.000	61	$ 720.000	91	$ 480.000
2	$ 1.192.000	32	$ 952.000	62	$ 712.000	92	$ 472.000
3	$ 1.184.000	33	$ 944.000	63	$ 704.000	93	$ 464.000
4	$ 1.176.000	34	$ 936.000	64	$ 696.000	94	$ 456.000
5	$ 1.168.000	35	$ 928.000	65	$ 688.000	95	$ 448.000
6	$ 1.160.000	36	$ 920.000	66	$ 680.000	96	$ 440.000
7	**$ 1.152.000**	37	$ 912.000	67	$ 672.000	97	$ 432.000
8	$ 1.144.000	38	$ 904.000	68	$ 664.000	98	$ 424.000
9	$ 1.136.000	39	$ 896.000	69	$ 656.000	99	$416.000
18	$ 1.064.000	48	$ 824.000	78	$ 584.000	108	$ 344.000
19	$ 1.056.000	49	$ 816.000	79	$ 576.000	109	$ 336.000
20	**$ 1.048.000**	50	**$ 808.000**	80	$ 568.000	110	$ 328.000
21	$ 1.040.000	51	$ 800.000	81	$ 560.000	111	$ 320.000
22	$ 1.032.000	52	$ 792.000	82	$ 552.000	112	$ 312.000
23	$ 1.024.000	53	$ 784.000	83	$ 544.000	113	$ 304.000
24	$1.016.000	54	$ 776.000	84	$ 536.000	114	$ 296.000
25	$1.008.000	55	$ 768.000	85	$ 528.000	115	$ 288.000
26	$1.000.000	56	$ 760.000	86	$ 520.000	116	$ 280.000
27	$ 992.000	57	$ 752.000	87	$ 512.000	117	$ 272.000
28	$ 984.000	58	$ 744.000	88	$ 504.000	118	$ 264.000
29	$ 976.000	59	$ 736.000	89	$ 496.000	119	$ 256.000
30	$ 968.000	60	$ 728.000	90	$ 488.000	120	$ 248.000

9.5. Valor presente de un gradiente geométrico decreciente

Es el valor al día de hoy de una serie de pagos que disminuyen en un porcentaje fijo.

Fórmula:

$$P = A \times \left(\frac{(1 + i)^n - (1 - G)^n}{(G + i) \times (1 + i)} \right)$$

A = valor de la primera cuota
i = tasa de interés
G = porcentaje de aumento o disminución (gradiente)
P = valor presente

Ejemplo:

Una empresa desea adquirir un vehículo para el reparto de sus productos. El banco le ofrece las siguientes condiciones: Préstamo a 5 años a una tasa del 18 % E.A, el primer pago sería por un valor de $ 1.100.000 y disminuiría a partir de la segunda cuota en un 3 % mensual. ¿Cuál es el valor del vehículo?

Para resolver el ejercicio lo primero que se debe hacer es calcular la tasa mensual equivalente a la tasa efectiva ofrecida por el banco.

Datos:

i = 18 % E.A
J = tasa nominal
m = 12 (número de períodos de capitalización en un año)

Fórmula de equivalencia de tasas

$$(1 + J/m)^n = (1 + i)$$

Reemplazando en la fórmula:

$$(1 + J/12)^{12} = (1 + 0{,}18)$$

$$J = \left(\sqrt[12]{(1 + 0{,}18)} - 1 \right) x\ 12 = 0{,}1666 \text{ o } 16{,}66\ \%$$

capitalizable mensualmente

Usando Excel

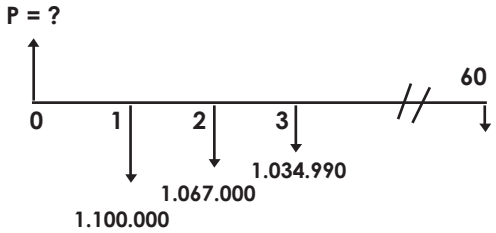
= tasa.nominal(tasaefectiva;#de períodos)

= tasa.nominal(0.18;12) = 0,16666116

= 16,66 % con capitalización mensual

Conocida la tasa mensual se procede a resolver el gradiente

Gráfica



Datos:

A = $ 1.100.000

i = 0,1666 / 12 meses = 0,0138

G = 3 %

n = 60 meses (5 años por 12 meses del año)

P = ?

Fórmula

$$P = A\ x \left(\frac{(1 + i)^n - (1 - G)^n}{(G + i)\ x\ (1 + i)} \right)$$

Reemplazando en la fórmula:

$$P = 1.100.000 \times \left(\frac{(1 + 0{,}0138)^{60} - (1 - 0{,}03)^{60}}{(0{,}03 + 0{,}0138) \times (1 + 0{,}0138)} \right) = \$\ 52.378.700$$

P = $ 52.378.700, es el valor del vehículo

9.6. Valor futuro de un gradiente geométrico decreciente

Se entiende al valor de una serie de pagos al final del período de negociación

Fórmula:

$$F = A \times \left(\frac{(1 + i)^n - (1 - G)^n}{(G + i)} \right)$$

Donde:

A = valor de la primera cuota
i = tasas de interés de la operación
G = porcentaje de aumento o disminución (gradiente)
n = número de períodos
F = valor futuro

Ejemplo:

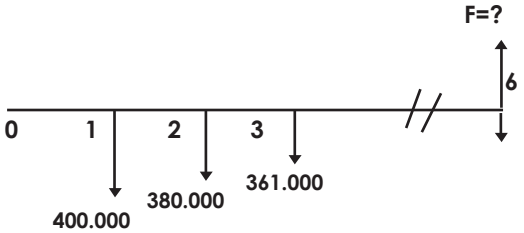
Milena planea ir de vacaciones con su familia al Eje Cafetero, para lo cual decide ahorrar en una corporación financiera que reconoce el 2 % mes anticipado (M.A), una cuota mensual. El valor de la primera cuota es de $ 400.000 y a partir del segundo mes la cuota disminuye en un 5 % cada mes. Si el plan vacacional tiene un valor de $ 3.500.000, ¿cuánto tendrá Milena al final del semestre?, ¿tendrá que hacer algún aporte adicional?

Antes de resolver los interrogantes, se debe calcular el valor de la tasa mensual vencida equivalente a una tasa mensual anticipada. Esto porque los pagos se realizan al final de cada mes y la tasa ofrecida está expresada mes anticipado.

i_a (tasa efectiva del período anticipada) = 2 % M A
i_p (tasa efectiva del período vencida) = ?
Fórmula de equivalencia:
$i_p = i_a / (1 - i_a)$
$i_p = 0{,}02 / (1 - 0{,}02) = 0{,}02 / 0{,}98$
$i_p = 0{,}0204$ o 2,04 % mes vencido

Conocida la tasa que realmente reconoce la corporación financiera mensualmente por los depósitos, se procede a solucionar los interrogantes.

Gráfica



Datos:
A = $ 400.000
i = 0,204 mensual
G = 0,05 (porcentaje de disminución)
n = 6 meses
F = ?

Remplazando los datos en la fórmula:

$$F = 400.000 \times \left(\frac{(1 + 0{,}0204)^6 - (1 - 0{,}05)^6}{(0{,}05 + 0{,}0204)} \right)$$

$$= 400.000 \times \left(\frac{1.128 - 0{,}735}{0{,}0704} \right)$$

$$F = 400.000 \times \left(5.582 \right)$$

R/ta $ 2.232.800 valor acumulado después de los 6 meses

Faltante o sobrante = Valor ahorrado - valor del plan

Faltante o sobrante = 2.232.800 - 3.500.000

Faltante = $ 1.267.200

9.7. Cálculo de la cuota 'X' de un gradiente geométrico decreciente

Se aplica para este caso la misma fórmula de la progresión geométrica.

$X = X_1 * (R)^{n-1}$

Donde:

X = valor de la cuota a conseguir

X_1 = valor del primer término de la progresión

R = la razón (se divide el segundo término entre el primero)

n = período solicitado

Calcular el valor de las cuotas 3, 5 y 6

Cuota # 3

X = valor de la cuota solicitada

X_1 = 400.000

R = (380.000/400.000) = 0,95

n = 3

Reemplazando en la fórmula:

$X = 400.000\ (0,95)^{3-1} =$ **$ 361.000**

Cuota # 5

X = valor de la cuota solicitada

$X_1 = 400.000$

$R = 0,95$

$n = 5$

$X = 400.000 * (0,95)^{5-1} =$ **$ 325.803**

Cuota # 6

X = valor de la cuota solicitada

$X_1 = 400.000$

$R = 0,95$

$n = 6$

$X = 400.000 * (0,95)^{6-1}$ **$ 309.512**

CAPÍTULO 10

FORMAS DE DIFERIR UNA DEUDA

10.1 Amortización

"La amortización desde el punto de vista financiero, es el proceso de pago de una deuda y sus intereses mediante una serie de cuotas (periódicas o no), en un tiempo determinado. La palabra amortización proviene del latín *mors*, que significa muerte, por lo tanto, la amortización es el proceso con el que se mata una deuda"(Meza, 2010, p.404).

10.2. Amortización gradual

Es aquella donde el valor de las cuotas es el mismo durante el tiempo que dure la deuda.

Ejemplo:

1. La empresa ABC desea comprar una maquinaria y recurre al banco BBVA, al que le solicita un préstamo por 20.000.000 a una tasa del 36% trimestral, por 2 años.

Realice la tabla de amortización

Datos:

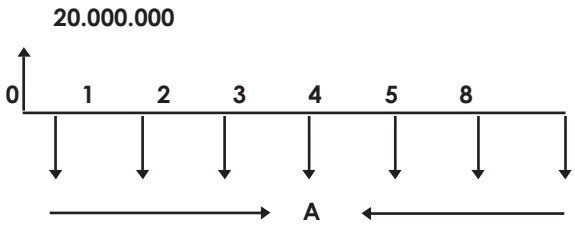
P = $ 20.000.000

i = 0,36/4 = 0,09 trimestre

A = Cuota?

n = 8 trimestres

Gráfica



Se debe calcular el valor de la cuota y como nos están dando el valor del crédito, se utiliza la fórmula del valor presente de una anualidad.

Despejando A, queda:

Fórmula:

$$P = A \times \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right)$$

Despejando A, queda:

$$A = \frac{20.000.000}{\left(\frac{1 - (1 + 0{,}09)^{-8}}{0{,}09} \right)}$$

R/ta = $ 3.613.488

El valor de la cuota se puede calcular utilizando Excel, como lo vemos a continuación:

En Excel:

=pago(tasa;nper;VA;VF;tipo)

=pago(0,09;8;-20000000;0;0) = **$ 3.613.487**[56]

Tabla 6

Amortización del crédito

#	cuotas	Intereses	capital	Saldo
0	0	0	0	20000000
1	3613488	1800000	1813488	18186512
2	3613488	1636786	1976702	16209810
3	3613488	1458883	2154605	14055205
4	3613488	1264968	2348520	11706685
5	3613488	1053602	2559886	9146799
6	3613488	823212	2790276	6356523
7	3613488	572087	3041401	3315127
8	3613488	298361	3315127	0

El valor de los intereses de la primera cuota, se obtiene al multiplicar el valor del saldo por la tasa de interés.

Saldo $ 20.000.000

Tasa 9 % trimestre

Intereses = 20.000.000 x 0,09 = $ 1.800.000

El capital abonado se calcula restándole a la cuota los intereses obtenidos

Capital = 3.613.488 – 1.800.000 = $ 1.813.488

Esta operación se repite hasta llegar al último período

2. Puede suceder que un crédito tenga períodos de gracia, donde se pagarán intereses únicamente. En el ejemplo anterior supongamos que el banco ofrece un período de gracia de 2 trimestres. La amortización del crédito quedaría de la siguiente forma:

Se debe calcular el valor de la cuota:

Datos:

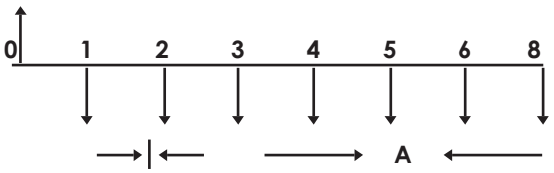
A = ??

i = 0,36/ 4 = 0,09 trimestre

n = 6

P = $ 20.000.000

Gráfica



Reemplazando en la fórmula

$$A = \frac{20.000.000}{\left(\frac{1 - (1 + 0{,}09)^{-6}}{0{,}09}\right)} = \$\ 4.458.396$$

Excel:

=pago(tasa;nper;VA;VF;tipo)

=pago(0,09;6;-20000000;0;0) = **$ 4.458.395,67'**

Tabla 7

Amortización con períodos de gracia

#	Cuota	Intereses	Capital	Saldo
0	0			20000000
1	0	1800000	0	20000000
2	0	1800000	0	20000000
3	4458396	1800000	2658396	17341604
4	4458396	1560744	2897652	14443952
5	4458396	1299956	3158440	11285512
6	4458396	1015696	3442700	7842812
7	4458396	705853	3752543	4090272
8	4458396	368124	4090272	0

10.3. Amortización con abono constante a capital

En este tipo de amortización el valor abonado a capital durante el tiempo que dure el crédito es el mismo, el cual se obtiene de dividir el valor de la deuda entre los períodos de pagos.

Tomando el ejemplo anterior el valor a abonar a capital es: 20.000.000/8 = $2.500.000

Tabla 8
Amortización del crédito

#	Cuota	Intereses	Capital	Saldo
0	0	0	0	20000000
1	4300000	1800000	2500000	17500000
2	4075000	1575000	2500000	15000000
3	3850000	1350000	2500000	12500000
4	3625000	1125000	2500000	10000000
5	3400000	900000	2500000	7500000
6	3175000	675000	2500000	5000000
7	2950000	450000	2500000	2500000
8	2725000	225000	2500000	0

Al usar las fórmulas de las anualidades, los períodos y tasas están expresadas en la misma unidad de tiempo, pero si este no fuera el caso, tendríamos la necesidad de establecer equivalencias de tasas; es decir, calcular una tasa equivalente en la unidad de tiempo en la que se encuentran expresados los períodos de pagos. Mediante los pasos expuestos en el tema de equivalencias.

CAPÍTULO 11

ALTERNATIVAS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN INVERSIÓN

11.1 Alternativas de inversión

Según Jhonny de Jesús Meza (2010) en su libro *Matemáticas Financieras Aplicadas*:

> *"Una inversión desde el punto de vista financiero, es la asignación de recursos en el presente con el fin de obtener unos beneficios en el futuro. Una inversión conviene en la medida que se pueda recuperar y deje unos beneficios que satisfagan las expectativas de rendimiento y quede un excedente que aumente la riqueza de los inversionistas. Para tomar esta importante decisión los inversionistas deben contar:*
>
> - *Con una tasa de interés que le sirva de referencia para decidir si invierten o no. Esta se conoce como tasa de oportunidad del inversionista.*
> - *Técnicas de análisis que permitan comprobar que con la inversión realizada se puede ganar por lo menos la tasa de oportunidad"* (pp.457-458).

11.2 Tasa de descuento

Cabezas & Castrillón (2002) afirman:

> *"Es la tasa mínima a la cual la empresa o el ente está dispuesto a correr el riesgo de la inversión"* (p.140).

Es la tasa mínima que desea ganarse el inversionista, por debajo de esta tasa prefiere no invertir.

11.3 Valor Presente Neto

Cabezas & Castrillón (2002) afirman:

> *"Busca comparar el presente de los ingresos con el presente de los egresos para determinar si el proyecto cumple con las condiciones de factibilidad"* (p.141).

Con esta técnica un proyecto es factible en la medida que el valor presente de los ingresos sea mayor al presente de los egresos. Si el resultado del VPN es igual a "cero", el inversionista recupera la inversión, pero no obtiene ganancia; si el VPN es superior a "cero", el inversionista recupera lo invertido y obtiene una ganancia; pero si el resultado del VPN arroja una cifra menor a "cero", el inversionista en ese proyecto está obteniendo pérdida.

Ejemplo:

1. El señor Cárdenas tiene unos ahorros en una corporación, la cual le reconoce el 25 % efectivo anual. Desea comprar un taxi con sus ahorros, con las siguientes condiciones: Cuota inicial $ 3.000.000 y 30 cuotas mensuales vencidas de $ 300.000. El señor Cárdenas estima que el taxi producirá $ 400.000 mensuales, y espera venderlo al final de 3 años en $ 10.000.000. ¿Será este un buen negocio? (Cabezas & Castrillon, 2002, p.142).

El ejercicio consta de dos partes, una conformada por un flujo de ingresos y otra que representa un flujo de egresos.

1.1 Flujo de ingresos

Determinar el valor presente de los ingresos, para ello los datos son los siguientes:

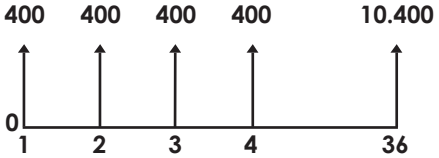
i_e = 0,25

n = 36 meses

A = $ 400.000 mensuales

VPI (Valor presente de los ingresos) = ?

Gráfica



Para calcular el valor presente de los ingresos hay que tener en cuenta que el período en el que está expresada la tasa es distinto al de los pagos, por eso se debe calcular una tasa equivalente a la dada, la cual debe estar expresada en meses.

Fórmula:

$$(1 + J/12)^{12} = (1 + i_e)$$

Reemplazando los datos en la fórmula:

$$(1 + J/12)^{12} = (1 + 0{,}25)$$

$$(1 + J/12) = \sqrt[12]{1{,}25} =$$

J/12 = 1.0187692 - 1 =

J = 0,0187692 * 12 = 0,2252 o 22,52 %

Tasas del 22,52 % M.V

Excel

=Tasanominal (tasa efectiva;# de períodos)

=Tasanominal (0,25;12) = **22,52 % M.V**

Conocida la tasa nominal se procede a calcular el valor presente de los ingresos.

Los ingresos deben ser traídos al momento "cero" a una tasa del 22.52 % MV.

Como el valor de los ingresos esperados es igual en períodos iguales de tiempo, estamos ante una anualidad.

Fórmula: la tasa de interés i = 0,2252/12 = 0,0187

$$P = A * \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right)$$

Reemplazando en la fórmula:

$$P = 400.000 * \left(\frac{1 - (1 + 0,0187)^{-36}}{0,0187} \right)$$

P = $ 10.412.800

Excel

=VA(tasa;nper;pago;VF;tipo)

=VA(0,0187;36;-400000;0;0) = **$ 10.412.800**

Al valor presente de los ingresos se le debe sumar el valor de la venta del vehículo al momento "cero", como se muestra a continuación:

$P = 10.000.000 *(1+0,0187)^{-36}$ = **$ 5.132.000**

Excel

=VA(tasa;nper;pago;VF;tipo)

=VA(0,0187;36;0;-10000000;0) = **$ 5.132.000**

VPI (Valor Presente de los Ingresos) = 10.412.800 + 5.132.000

VPI = **$ 15.544.800**

1.2 Flujo de egresos

Así como de determinó el valor presente de los ingresos hay que calcular el valor presente de los egresos para el mismo período de tiempo.

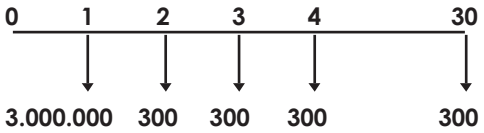
Datos:

A = 300.000 mensuales

n = 30 meses

i = 1,0187 % = 0,0187

Gráfica



Con los datos y elaborada la gráfica se precede a calcular el valor al día de hoy de los egresos. Momento "cero"

$$P = 300.000 * \left(\frac{1 - (1 + 0{,}0187)^{-30}}{0{,}0187692} \right)$$

R/ta = $ 6.840.630

Excel:

=VA (tasa;nper;pago;VF;tipo)

=VA (0,018730;-300000;0;0) = **$ 6.840.630**

Al valor calculado le debemos sumar la cuota inicial para obtener el valor presente de los egresos.

VPE (Valor Presente de los Egresos) = $ 6.840.630 + $ 3.000.000

VPE = $ 9.840.630

El Valor Presente Neto (VPN) resulta de la diferencia entre el valor presente de los ingresos y el valor presente de los egresos.

VPN = VPI – VPE = $ 15.544,800 - $ 9.840.630,

VPN = $ 5.704.170

El resultado nos indica que el señor Cárdenas recupera lo invertido y además se está ganando en el proyecto **$ 5.704.170**

1.3 Puede ocurrir que se presenten dos alternativas de inversión mutuamente excluyentes.

Ejemplo:

El alcalde de Bogotá dentro de su política de bienestar ha considerado la posibilidad de dotar a la capital de un nuevo parque al occidente de la ciudad, para lo cual ha planteado al Concejo dos opciones.

- Opción #1. Constituir un nuevo parque con una inversión de $ 12.000 millones, costos anuales de mantenimiento de $ 400 millones e inversiones cada 20 años de $ 1.000 millones.
- Opción #2. Reparar un parque ya existente con una inversión de $ 11.000 millones, costos anuales de mantenimiento de $ 550 millones e inversiones cada 15 años de $ 1.200 millones

Si la tasa de descuento es del 12 % anual, determinar: ¿qué decisión debe tomar el alcalde?

> *"Por ser opciones donde únicamente se manejan egresos, la aplicación del VP en este ejemplo consiste en calcular el valor presente de los egresos al momento cero (0), para compararlos y escoger entre las dos alternativas aquella que presente el VP más bajo"(Rosillo, 2009, p.228)*.

Opción 1

Datos:

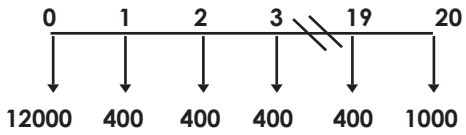
Inversión inicial = 12.000 millones

Mantenimiento = $ 400 millones

Inversión 20 años = $ 1.000 millones

Tasa = 12 % anual

Gráfica



Fórmula:

$$VPE = 12000 + 400 * \left(\frac{1 - (1 + 0{,}12)^{-19}}{0{,}12}\right) + 1000\ (1 + 0{,}12)^{-20}$$

VPE = 15.049,66

Excel:

=VA(tasa;nper;pago;VF;tipo); valor presente de los pagos

= VA(0,12;19;-400;0;0) = $ 2946

Valor presente de la inversión cada 20 años

=VA(tasa;nper;pago;VF;tipo);

=VA(0.12;19;0;-1000;0) = $ 116

VPE = 12.000 + 2946 + 116 = **$ 15.050**

Opción 2

Datos:

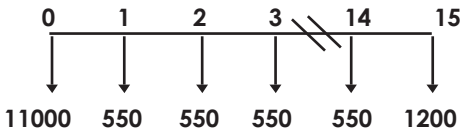
Inversión inicial = 11.000 millones

Mantenimiento = $ 550 millones

Inversión 15 años = 1.200 millones

Tasa = 12 % anual

Gráfica



Fórmula

$$VPE = 11000 + 550 \left(\frac{1 - (1 + 0{,}12)^{-14}}{0{,}12} \right) + 1200\ (1 + 0{,}12)^{-15}$$

VPE = 14.864

Excel

=VA(tasa;nper;pago;VF; tipo)

=VA(0,12;14;-550;0;0) = $ 3.645

Valor presente de la inversión a realizar cada 15 años

Excel

=VA(tasa;nper;pago;VF;tipo)

=VA(0,12;15;0;-1200;0) = $ 219

VPE (Valor presente de los egresos) = 11.000 + 3.645 + 219 = **$ 14.865**

La opción a escoger por parte del alcalde es la número 2, por presentar el **VPE** más bajo.

11.4 Tasa Interna de Retorno (TIR)

Es la tasa a la que rinde un proyecto, es decir la tasa de descuento que al momento de aplicarla devuelve los flujos del proyecto a "cero". Es una herramienta para la toma de decisiones de inversión, porque el inversionista se ve en la necesidad de compararla con la tasa deseada de rendimiento (tasa de referencia), para este caso la TOI (Tasa de Oportunidad del Inversionista).

Criterios:

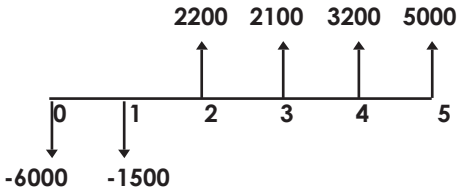
- Si la TIR > TOI se decide invertir en el proyecto
- La TIR = TOI le es indiferente
- En el caso que la TIR < TOI se descarta el proyecto

Ejemplo:

1. Le proponen un proyecto de inversión que presenta el siguiente flujo de recursos.

Años	Flujo de caja
0	- $ 6000
1	- $ 1500
2	$ 2200
3	$ 2100
4	$ 3200
5	$ 5000

Gráfica



Para cualquier inversión que desee realizar, usted espera un rendimiento del 12 %

Se procede a calcular la TIR en Excel = TIR(valores;estimar)

Años	Flujo de caja
0	- $ 6000
1	- $ 1500
2	$ 2200
3	$ 2100
4	$ 3200
5	$ 5000
=TIR(K11:K16)	

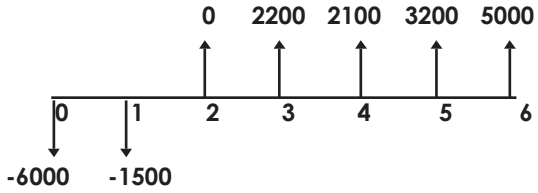
TIR = 15 %

En este ejemplo la tasa de rendimiento del proyecto es del 15 %, superior a la esperada.

2. En el caso que se presentara el siguiente cambio en los flujos del proyecto

Años	Flujo de caja
0	- $ 6000
1	- $ 1500
2	0
3	$ 2200
4	$ 2100
5	$ 3200
6	$ 5000

Gráfica



La TIR para esta nueva situación sería del 12 %, igual al rendimiento que se desearía en cualquier inversión a realizar.

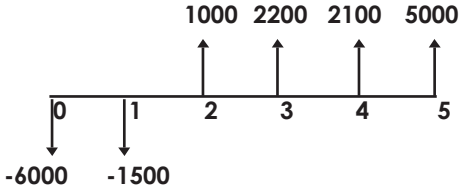
Años	Flujo de caja
0	- $ 6000
1	- $ 1500
2	0
3	$ 2200
4	$ 2100
5	$ 3200
6	$ 5000
=TIR(K11:K17)	

TIR = 12 %

3. Modificando una vez más el flujo del proyecto

Años	Flujo de caja
0	- $ 6000
1	- $ 1500
2	$ 1000
3	$ 2200
4	$ 2100
5	$ 5000

Gráfico



Ante este nuevo flujo la TIR es del 9 %, por debajo de la esperada.

Años	Flujo de caja
0	$ 6000
1	$ 1500
2	$ 1000
3	$ 2200
4	$ 2100
5	$ 5000
=TIR(K11:K16)	

TIR = 9 %

Conclusión

El presente documento busca contribuir a dar solución a las inquietudes que surgen en los estudiantes en la medida que avanzan en el estudio de las Matemáticas Financieras. Es importante que los estudiantes de las Ciencias Económicas, Administrativas y Contables tengan los conceptos claros en esta asignatura, importante para la evaluación de alternativas de inversión y toma de decisiones empresariales. Es por ello que los distintos temas desarrollados en pregrado se explican a la luz de la aplicación de una fórmula y en la medida que avanzan en los temas, el estudiante puede ver ligeros cambios que le permitirán solucionar, comprender y apropiarse de la temática.

Los temas son tratados mediante la aplicación de ejercicios comprensibles y cuyo desarrollo es presentado a los estudiantes de manera manual y mediante la utilización de Excel, para que puedan observar las formas de solucionarlos, desarrollando habilidades de análisis, comprensión e interpretación.

Referencias Bibliográficas

Aires, F. (1998). *Matemáticas Financieras*. México: Ediciones McGraw-Hill.

Álvarez, A. (2005). *Matemáticas Financieras*.Bogotá: Ediciones McGraw-Hill

Baca, G. (2010). *Fundamentos de Ingeniería Económica*. México: Ediciones McGraw-Hill

Blank, L. (2012). *Ingeniería Económica*. México: Ediciones McGraw-Hill

Cabezas, L. & Castrillón, J. (2010). Matemáticas Financieras. Barranquilla, Colombia: Ediciones Uninorte

Cánovas, R. (2004). *Matemáticas Financieras, fundamentos y aplicaciones*. México: Ediciones Trillas

Durán, G. (2009). *Problemas de Matemáticas, Resolución de problemas para las áreas administrativas, contables y financieras*. Barranquilla: Ediciones Universidad de la Costa CUC

García, (2008). *Matemáticas Financieras, con ecuaciones de diferencia finita*. Bogotá: Ediciones Pearson

García, O. (2009). *Administración Financiera, fundamentos y Aplicaciones*. Cali: Ediciones Prensa Moderna

García M., Jaime (2013). Matemáticas Financieras. Jaime Ediciones Una aula.

Gitman, L. (2012). *Principios de administración Financiera*. México: Ediciones Pearson,

Hernández, A. (2000). *Matemáticas financieras, teoría y práctica*. México: Ediciones Ecafsa.

Jaramillo, F. (2004). *Matemáticas Financieras Básicas Aplicadas*. Colombia: *Ediciones Alfa Omega*

Jimeno, Alfredo (2012). *Matemáticas financieras, un enfoque práctico*. Impresos Donado

Lasa A. (2012). *Matemáticas de las operaciones financieras*. México: Ediciiones Trillas

Meza, Jhony. (2010). *Matemáticas Financieras Aplicadas*. Ediciones ECOE

Remolina, G. (2008). *Evaluación financiera para decisiones gerenciales*. Bogotá: Ediciones ecuela Colombiana de Ingeniería

Rosillo, J. (2004). *Matemáticas Financieras para decisiones de inversión y financiamiento*. Bogotá: Ediciones CENCARGE

Villarreal, J. (2013). I*ngeniería Económica*. Bogotá: Ediciones Pearson

Zima, P. (2005). *Matemáticas Financieras*. México: Ediciones McGraw-Hill

Introducción al Estudio de las Matemáticas Financieras, es una obra donde se da respuesta a las inquietudes de los estudiantes que se inician en el estudio de las Matemáticas Financieras de una forma clara, sencilla y pedagógica. En este libro se explican los temas más comunes en pregrado, de las Matemáticas Financieras, para la toma de decisiones empresariales. El valor del dinero en el tiempo, el interés simple y compuesto, las ecuaciones de valor, las equivalencias de tasas vencidas y anticipadas, los gradientes crecientes y decrecientes, las amortizaciones, las alternativas de inversión y la tasa interna de retorno (TIR), son explicados a partir del uso de una fórmula con ligeras modificaciones en la medida que se avanzas en el desarrollo de los temas, dando al estudiante la claridad, confianza y entendimiento del curso

EDICIONES UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

ISBN 978-958-8930-74-9