Álgebra homológica, día 14

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

25 de agosto de 2016

1. Productos tensoriales de complejos

Para construir complejos a partir de complejos más simples se usa la construcción del producto tensorial:

1.1. Definición. Sean $(M_\bullet, d_\bullet^M)$ y $(N_\bullet, d_\bullet^N)$ dos complejos de R-módulos. Entonces el **producto tensorial** $M_\bullet \otimes N_\bullet$ es el complejo formado por los R-módulos

$$(M_\bullet \otimes N_\bullet)_n := \bigoplus_{p+q=n} M_p \otimes_R N_q,$$

junto con diferenciales

$$d_n \colon (M_\bullet \otimes N_\bullet)_n \to (M_\bullet \otimes N_\bullet)_{n-1},$$

donde para cada $x \otimes y \in M_p \otimes_R N_q$ con $p + q = n$

$$d_n(x \otimes y) := d_p^M(x) \otimes y + (-1)^p\, x \otimes d_q^N(y).$$

Obviamente, los morfismos d_n deben ser construidos de alguna manera a partir de d_p^M y d_q^N; la única cosa misteriosa en la fórmula son los signos alternados "$(-1)^p$", pero se ve que son necesarios para que $d_{n-1} \circ d_n = 0$ (de hecho, pudimos haber definido también $d_n(x \otimes y) := (-1)^q\, d_p^M(x) \otimes y + x \otimes d_q^N(y)$):

1.2. Observación. *Si $(M_\bullet, d_\bullet^M)$ y $(N_\bullet, d_\bullet^N)$ son complejos, entonces $(M_\bullet \otimes N_\bullet, d_\bullet)$ es también un complejo de cadenas.*

Demostración. Es suficiente ver qué pasa con un elemento $x \otimes y \in M_p \otimes_R N_q$ con $p + q = n$:

$$\begin{aligned} d_{n-1} \circ d_n(x \otimes y) &= d_{n-1}(\underbrace{d_p^M(x)}_{\in M_{p-1}} \otimes y + (-1)^p\, x \otimes \underbrace{d_q^N(y)}_{\in N_{q-1}}) \\ &= \cancel{d_{p-1}^M d_p^M}(x) \otimes y + (-1)^{p-1} d_p^M(x) \otimes d_q^N(y) + \\ &\qquad (-1)^p\, d_p^M(x) \otimes d_q^N(y) + (-1)^{2p}\, x \otimes \cancel{d_{q-1}^N d_q^N}(y) \\ &= \pm d_p^M(x) \otimes d_q^N(y) \mp d_p^M(x) \otimes d_q^N(y) = 0. \end{aligned}$$

∎

1.3. Ejercicio. *Demuestre que $M_\bullet \otimes N_\bullet \cong N_\bullet \otimes M_\bullet$.*

Obviamente, existe cierta relación entre la homología de los complejos $M_\bullet$ y $N_\bullet$ y la homología del complejo $M_\bullet \otimes N_\bullet$, pero esta relación se expresa mediante la **sucesión espectral de Künneth** (para complejos $M_\bullet$ y $N_\bullet$ concentrados en grados ≥ 0)

$$E^2_{pq} = \bigoplus_{s+t=q} \operatorname{Tor}^R_p(H_s(M_\bullet), H_t(N_\bullet)) \Longrightarrow H_{p+q}(M_\bullet \otimes N_\bullet),$$

que es una herramienta que no forma parte de nuestro curso. Sin embargo, si $M_\bullet$ es un complejo de módulos planos y los $\operatorname{im} d_n^M \subset M_{n-1}$ son también planos para todo n, entonces tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(M_\bullet) \otimes_R H_q(N_\bullet) \to H_n(M_\bullet \otimes_R N_\bullet) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}^R_1(H_p(M_\bullet), H_q(N_\bullet)) \to 0$$

Este resultado es una consecuencia de la sucesión espectral, pero también puede ser demostrado directamente.

La construcción del producto tensorial de complejos se aplica a nuestra situación con complejos de Koszul:

1.4. Observación. *Si tenemos dos aplicaciones R-lineales $f_1\colon F_1 \to R$ y $f_2\colon F_2 \to R$, entonces existe un isomorfismo de complejos*

$$K_\bullet((f_1, f_2)) \cong K_\bullet(f_1) \otimes K_\bullet(f_2).$$

Demostración. Antes de todo, tenemos isomorfismos

$$\begin{gathered}\phi_n\colon \bigoplus_{p+q=n} \Lambda^p(F_1) \otimes_R \Lambda^q(F_2) \to \Lambda^n(F_1 \oplus F_2),\\ x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_q \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge x_q.\end{gathered}$$

entonces los términos del complejo $K_\bullet(f_1) \otimes K_\bullet(f_2)$ se identifican con los de $K_\bullet((f_1, f_2))$. Tenemos que ver que los diferenciales son compatibles:

$$\begin{tikzcd} \bigoplus\limits_{p+q=n} \Lambda^p(F_1) \otimes_R \Lambda^q(F_2) \arrow[r, "d_n^{K_\bullet(f_1)\otimes K_\bullet(f_2)}"] \arrow[d, "\phi_n"'] & \bigoplus\limits_{p+q=n-1} \Lambda^p(F_1) \otimes_R \Lambda^q(F_2) \arrow[d, "\phi_{n-1}"] \\ \Lambda^n(F_1 \oplus F_2) \arrow[r, "d_n^{K_\bullet((f_1,f_2))}"'] & \Lambda^{n-1}(F_1 \oplus F_2) \end{tikzcd}$$

De hecho,

$$\phi_{n-1} \circ d_n(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_q) = \sum_{1 \le i \le p} (-1)^{i+1} f(x_i)\, x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_q + \\ (-1)^p \sum_{1 \le j \le q} (-1)^{j+1} f(y_j)\, x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{y_j} \wedge \cdots \wedge y_q);$$

$$\begin{aligned} d_n \circ \phi_n(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_q) &= d_n(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_q) \\ &= \sum_{1 \le i \le p} (-1)^{i+1} f(x_i)\, x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_q + \\ &\quad (-1)^p \sum_{1 \le j \le q} (-1)^{j+1} f(y_j)\, x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{y_j} \wedge \cdots \wedge y_q). \end{aligned}$$

■

2. Cohomología de Koszul

Casi todos nuestros resultados básicos para complejos fueron fórmulados con la numeración cohomológica, es decir, con diferenciales $d^n\colon M^n \to M^{n+1}$. En el caso de complejos de Koszul los diferenciales son naturalmente homológicos. Sin embargo, podemos aplicar al complejo de Koszul $K_\bullet(f)$ el funtor contravariante $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-,R)$ para obtener el complejo "dual" $\underline{\mathrm{Hom}}_R(K_\bullet(f),R)$ con diferenciales al revés y numeración cohomológica. Pero este complejo va a ser isomorfo a $K_\bullet(f)$.

2.1. Proposición. *Para simplificar la notación, para un R-módulo M escribimos $M^\vee := \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,R)$. Sea $f\colon F \to R$ una aplicación R-lineal definida sobre un R-módulo libre F de rango n. Entonces el complejo de Koszul $K_\bullet(f)$ es isomorfo al complejo $K_\bullet(f)^\vee$ con la numeración apropiada. A saber, tenemos isomorfismos*

$$K_i(f) \cong K^i(f) := K_{n-i}(f)^\vee$$

que forman un isomorfismo de complejos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] K_\bullet(f)\colon & 0 \arrow[r] & \Lambda^n(F) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\cong"] & \Lambda^{n-1}(F) \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "\cong"] & \Lambda^{n-2}(F) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \arrow[r] & \Lambda^2(F) \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "\cong"] & F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"] & R \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ K^\bullet(f)\colon & 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "f^*"'] & F^\vee \arrow[r, "d_2^*"'] & \Lambda^2(F)^\vee \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Lambda^{n-2}(F)^\vee \arrow[r, "d_{n-1}^*"'] & \Lambda^{n-1}(F)^\vee \arrow[r, "d_n^*"'] & \Lambda^n(F)^\vee \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Notemos que el rango de $\Lambda^i(F)$ es $\binom{n}{i}$, lo cual implica que $\Lambda^i(F)$ y $\Lambda^{n-i}(F)$ tienen el mismo rango: es una especie de dualidad que ya está presente en el álgebra exterior. Por último, para cada R-módulo libre F finitamente generado tenemos un isomorfismo *no canónico* $F^\vee \cong F$. A saber, si $e_1, \ldots, e_n$ es una base de F, entonces una base de $F^\vee$ es $e_1^*, \ldots, e_n^*$ donde

$$e_i^*(e_j) := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \ne j. \end{cases}$$

El isomorfismo $e_i \mapsto e_i^*$ depende de la base escogida $e_1, \ldots, e_n$ de F y por lo tanto no es canónico.

Demostración. Fijemos una base $e_1, \ldots, e_n$ de F. Tenemos bases de $\Lambda^i(F)$ que constan de los elementos de la forma $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}$ para $1 \le j_1 < \cdots < j_i \le n$. Los isomorfismos

$$\phi_i\colon K_i(f) \to K_{n-i}(f)^\vee$$

están definidos por la fórmula obvia

$$\phi_i(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i})(e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-i}}) := (-1)^{\lfloor i/2 \rfloor} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \wedge e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-i}}.$$

Es fácil ver que este es un isomorfismo y la única cosa que tenemos que verificar es que los morfismos ϕ_i conmutan con los diferenciales (el signo extraño $(-1)^{\lfloor i/2 \rfloor}$ sirve para eso):

$$\phi_{i-1} \circ d_i = d^*_{n-i+1} \circ \phi_i \colon \quad \Lambda^i(F) \to \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Lambda^{n-i+1}(F), R).$$

De hecho, para $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \in \Lambda^i(F)$ tenemos

$$\begin{aligned} \phi_{i-1} \circ d_i(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i})(e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-i+1}}) &= \phi_{i-1}\Big(\sum_{1 \le \ell \le i} (-1)^{\ell+1} f(e_{j_\ell})\, e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{j_\ell}} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}\Big)(e_{\ell_1} \wedge \cdots \wedge e_{n-i+1}) \\ &= \sum_{1 \le \ell \le i} (-1)^{\ell+1+\lfloor (i-1)/2 \rfloor} f(e_{j_\ell})\, e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{j_\ell}} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \wedge e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-i+1}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^*_{n-i+1} \circ \phi_i(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i})(e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-i+1}}) &= \phi_i(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}) \circ d_{n-i+1}(e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-i+1}}) \\ &= \sum_{1 \le \ell \le n-i+1} (-1)^{\ell+1+\lfloor i/2 \rfloor} f(e_{k_\ell})\, e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \wedge e_{k_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{k_\ell}} \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-i+1}}. \end{aligned}$$

Aquí tenemos dos sucesiones de índices, $(j_1, \ldots j_i)$ y $(k_1, \ldots, k_{n-i+1})$, en total $n+1$ de ellos. Entonces ambas sucesiones tienen por lo menos un índice en común. Notamos que si hay más de un índice en común, entonces cada término en las sumas de arriba es igual a 0. Sin pérdida de generalidad, $j_1 = k_1 = 1$. Todos los términos de las sumas son ceros, excepto uno que corresponde a $\ell = 1$:

$$\begin{aligned} \phi_{i-1} \circ d_i(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{j_i})(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-i+1}}) &= (-1)^{\lfloor (i-1)/2 \rfloor} f(e_1)\, e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \wedge e_1 \wedge e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{n-i+1} \\ &= (-1)^{\lfloor (i-1)/2 \rfloor + i + 1} f(e_1)\, e_1 \wedge e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \wedge e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{n-i+1}, \\ d^*_{n-i+1} \circ \phi_i(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{j_i})(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-i+1}}) &= (-1)^{\lfloor i/2 \rfloor} f(e_1)\, e_1 \wedge e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \wedge e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{n-i+1}. \end{aligned}$$

La diferencia entre las dos expresiones es el factor $(-1)^{\lfloor (i-1)/2 \rfloor + \lfloor i/2 \rfloor + i + 1}$, y finalmente se puede verificar que $\lfloor (i-1)/2 \rfloor + \lfloor i/2 \rfloor + i + 1$ es un número par para cada $i \ge 1$. ■

Noten que el isomorfismo que hemos construido no es canónico y depende de la base de F que hemos escogido. Sin embargo, todo esto implica que la **cohomología de Koszul** $H^\bullet(f; M)$ (definida por el complejo de co-cadenas $K_{n-\bullet}(f)^\vee$) coincide con la homología de Koszul:

$$H_i(f; M) \cong H^{n-i}(f; M).$$

Nuestro objetivo es relacionar los complejos de Koszul con la **cohomología local** (que vamos a definir más adelante), y por eso voy a usar la numeración cohomológica. Antes de todo, notamos que la cohomología de Koszul es un δ-funtor derecho:

2.2. Observación. *Para cada sucesión exacta corta de R-módulos*

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

tenemos una sucesión exacta larga de cohomología de Koszul:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(f;K) \arrow[r] & H^0(f;M) \arrow[r] & H^0(f;N) \arrow[dll, out=0, in=180] \\
& H^1(f;K) \arrow[r] & H^1(f;M) \arrow[r] & H^1(f;N) \arrow[dll, out=0, in=180] \\
& H^2(f;K) \arrow[r] & H^2(f;M) \arrow[r] & H^2(f;N) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

de tal modo que $H^n(f;-)$ es un δ-funtor derecho.

Demostración. Tenemos el complejo de Koszul $K^\bullet(f) := K_{n-\bullet}(f)^\vee$ que es un complejo de R-módulos libres. Entonces tenemos una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \to K^\bullet(f) \otimes_R K \to K^\bullet(f) \otimes_R M \to K^\bullet(f) \otimes_R N \to 0$$

y podemos considerar la sucesión exacta larga correspondiente. ∎

3. Complejos de Koszul para sucesiones de elementos

3.1. Notación. Sean $x_1, \ldots, x_n \in R$ algunos elementos fijos. Sea F el R-módulo libre generado por n elementos $e_1, \ldots, e_n$ y sea f la aplicación

$$\begin{aligned} f\colon F &\mapsto R, \\ e_i &\mapsto x_i. \end{aligned}$$

Entonces el complejo de Koszul correspondiente se denota por

$$K_\bullet(x_1, \ldots, x_n) := K_\bullet(f),$$

y la homología de Koszul correspondiente se denota por

$$H_\bullet(x_1, \ldots, x_n; M).$$

3.2. Ejemplo. Se ve que $K_\bullet(f)$ es un complejo de módulos libres con algunos diferenciales que se definen por matrices con elementos $\pm x_i$ o 0. Por ejemplo, si $n = 2$, entonces $\Lambda^2(F)$ es el módulo libre de rango 1 con base $e_1 \wedge e_2$ y tenemos

$$d_2(e_1 \wedge e_2) = x_1 \cdot e_2 - x_2 \cdot e_1.$$

Entonces el complejo de Koszul $K_\bullet(x_1, x_2)$ toma la forma

$$0 \to R \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}} R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}} R \to 0$$

De la misma manera, para $n = 3$ tenemos

- $\Lambda^2(F)$ con base $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$, $e_2 \wedge e_3$,
- $\Lambda^3(F)$ con base $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$,

y el complejo de Koszul se identifica con

$$0 \to R \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x_2 & -x_3 & 0 \\ x_1 & 0 & -x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}} R \to 0$$

▲

3.3. Observación. *Para cualquier permutación $\sigma \in S_n$ de la sucesión de elementos $x_1, \ldots, x_n \in R$ tenemos isomorfismos*

$$K_\bullet(x_1, \ldots, x_n) \cong K_\bullet(x_{\sigma \cdot 1}, \ldots, x_{\sigma \cdot n}),$$
$$H_\bullet(x_1, \ldots, x_n; M) \cong H_\bullet(x_{\sigma \cdot 1}, \ldots, x_{\sigma \cdot n}; M).$$

Demostración. La permutación σ corresponde a un isomorfismo $F \to F$ de R-módulos libres de rango n (definido por la matriz de la permutación). Luego, como hemos notado en la lección de ayer, este isomorfismo induce un isomorfismo de los complejos de Koszul correspondientes. ■

3.4. Observación. *Tenemos isomorfismos de complejos*

$$\begin{aligned} K_\bullet(x_1, \ldots, x_n) &\cong K_\bullet(x_1) \otimes K_\bullet(x_2, \ldots, x_n), \\ K_\bullet(x_1, \ldots, x_n) &\cong K_\bullet(x_1) \otimes K_\bullet(x_2) \otimes K_\bullet(x_3, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ K_\bullet(x_1, \ldots, x_n) &\cong K_\bullet(x_1) \otimes \cdots \otimes K_\bullet(x_n). \end{aligned}$$

Demostración. Inductivamente podemos aplicar el isomorfismo $K_\bullet((f_1, f_2)) \cong K_\bullet(f_1) \otimes_R K_\bullet(f_2)$ de 1.4. ■

Notemos que el isomorfismo $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n) \cong K_\bullet(x_1) \otimes \cdots \otimes K_\bullet(x_n)$ nos da otra demostración del hecho de que las permutaciones de $x_1, \ldots, x_n$ dan complejos isomorfos $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n)$ (esto ya que el producto tensorial de complejos es conmutativo).

Esto significa que el complejo de Koszul $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n)$ es simplemente el producto tensorial de complejos de la forma

$$0 \to R \xrightarrow{x_i} R \to 0$$