UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

SALTOS PEQUEÑOS ENTRE PRIMOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

presenta

JUAN RAMÓN CAMACHO CORDERO

A mi familia y mis amigos,
sin ellos ningun logro tendría sentido

CONTENIDO

Introducción

Capítulo 1

Introducción

El teorema de los números primos

Conjeturas sobre números primos

Capítulo 2

Tuplas primas y la conjetura de Hardy-Littlewood

La criba de Eratóstenes

Capítulo 3

Primos cercanos

El nivel de distribución de los primos

El método de Goldston, Pintz y Yildirim

Implicaciones de la conjetura de Elliott-Halberstam

Apéndice A

Sumación parcial

Ejemplos

Apéndice B

La función de Möbius

La función de Von Mangoldt

Bibliografía

Introduccion

Hace ya un par de años inscribí en mi curricula una materia llamada *Temas selectos de teoría de números; teoría de cribas* con un profesor llamado Florin Nicolae. El ambiente en dicho curso era increible, resolvíamos problemas que hasta entonces jamás pensé que podría llegar a comprender, sin duda todo se debía a las increibles capacidades de mis compañeros y de mi profesor, no me fue difícil enamorarme de la teoría de números.

Entre las cosas que aprendí a través del curso se econtraba un problema conocido como la conjetura de los primos gemelos, la misma trataba sobre la infinitud de las parejas de primos de la forma p , $p+2$. El problema me resulto interesantísimo, supongo que eso le sucede a todas las personas que se involucran con la teoría de números, es una característica bastante particular del área el hecho de que los problemas más difíciles tengan una naturaleza tan elemental. Desde aquel entonces fue que decidí trabajar de lleno en el problema.

Este es sin duda uno de los problemas más importantes en la rama, tal vez sólo por debajo de las grandes conjeturas como son la de Goldbach, la de Riemman y la de Elliott-Halberstam. Así que era de esperarse que no pudiera darle solución (como todos me decían desde el principio), sin embargo, creo que gracias a la ayuda de las personas que me escucharon pude llegar a comprender un gran resultado en esa direccion, el teorema de Goldston, Pintz y Yildirim.

Este resultado indica que, hay una infinidad de primos consecutivos p_i y p_{i+1} a distancia tan pequeña como queramos en comparación con el salto promedio entre ellos, que de acuerdo al teorema de los números primos debe ser $\sim\log p_i$, a pesar significativamente más débil que lo que buscamos, sigue representando el mayor avance en lo referente a los saltos pequeños entre primos.

Existieron muchas dificultades en el proceso, principalmente por no vivir en lugar con muchos investigadores trabajando en el área. Sin embargo, gracias al apoyo de algunas personas a las que les robaba el tiempo de a poco cuando podía, pude aprender mucho del tema, con lo que me fue posible concebir este trabajo.

Espero que el mismo le haga justicia a todas las personas involucradas, como Florian, Florin, Juan Carlos, Pedro Luis y Enrique, principalmente a los dos últimos, ya que sin el apoyo de uno de ellos jamás habría podido seguir con el trabajo y habría perdido el camino por mi inegable falta de experiencia y sin la atención y las puntuales observaciones del otro la calidad del trabajo estaría muy por debajo de lo que es ahora.

Capítulo 1

Distribución de los Números Primos

1.1 Introducción

Un número primo es un entero positvo p que posee exactamente dos divisores positivos, a saber 1 y p. Una de las cuestiones más naturales a tratar a partir del concepto de número primo, es la distribución de los mismos. Tal vez la pregunta más antigua relacionada con este problema es la que presenta Euclides en los Elementos, ¿cuántos primos hay?

Teorema 1.1.1 Existen infinitos números primos.

Demostración. Consideremos la siguiente sucesión

$$m_0 = 2 \, ,$$
$$m_{n+1} = \prod_{i=0}^{n} m_i + 1 \, .$$

Es fácil ver que para cada $j \in \mathbb{N}$ debe existir algún p_j tal que $p_j | m_j$ y $p_j \nmid m_i$ si $i < j$, de manera que existe al menos un primo distinto por cada elemento de esta sucesión. □

Es inevitable preguntarnos (ahora que sabemos que son infinitos) en dónde se encuentran exactamente, a lo largo de $\mathbb{N}$, los números primos. Esta pregunta no sólo resulta ser interesante, también resulta muy difícil, por este motivo nos vemos obligados a ser menos osados y preguntarnos cuál es la cota más precisa que podemos dar para la magnitud de los primos y cuál es la mejor descripción de su distribución.

Nuestra de demostración de 1.1.1 nos ayuda en este cometido, al brindarnos también nuestra primera cota superior ya que el *n*-ésimo primo debe ser menor o igual que m_n. A lo largo de este capítulo trataremos de exhibir cotas superiores e inferiores y funciones asintóticamente similares a la distribución y la separación entre dichos números.

1.2 El Teorema de los Números Primos

Sea $x \in \mathbb{R}$, denotamos por $\pi(x)$ al número de primos menores o iguales a x. Lo que nos gustaría hacer para responder las preguntas planteadas con anterioridad es describir de alguna manera el comportamiento de la función $\pi(x)$. En principio, la misma parece tener una complejidad enorme, sin embargo, la evidencia númerica nos muestra que su comportamiento es bastante regular.

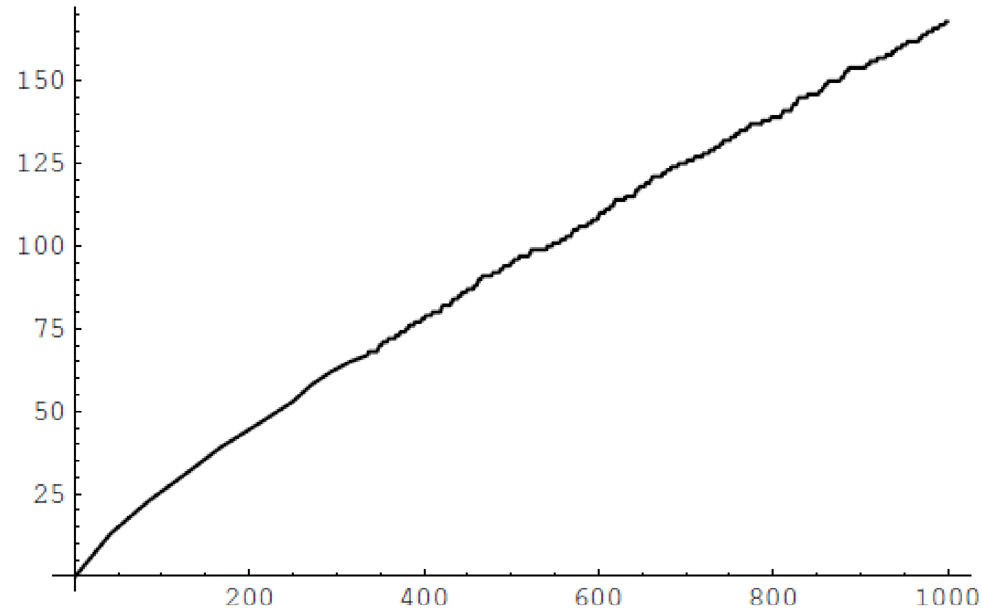

Fig 1.1

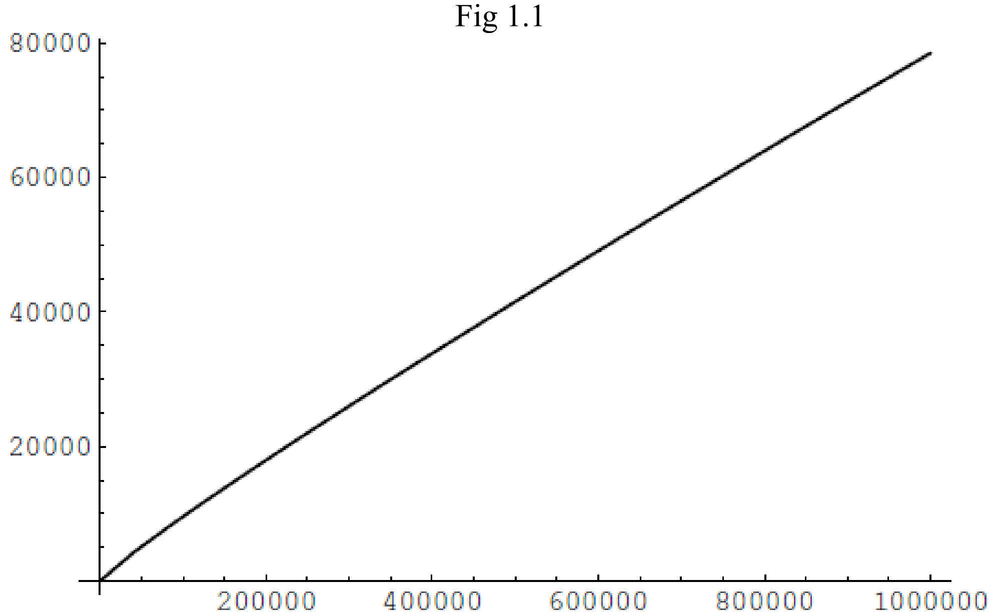

Fig 1.2

Nuestro primer avance se debe al siguiente resultado de Euler que generaliza la infinitud de los números primos.

Teorema 1.2.1 *(Euler)* Sea P el conjunto de los primos. Se cumple que

$$\sum_{p\in P}\frac{1}{p}=\infty .$$

Demostración. En base al teorema fundamental de la aritmética, podemos considerar la factorización de Euler de la serie armónica en términos de series geométricas convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\prod_{p\in P}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{p^i}\right)=\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1},$$

(esta factorización es formal y tiene sentido hacerlo así, pues todos los términos son positivos) aplicando logaritmos en ambos lados de la ecuación y expandiendo de acuerdo a las series de Taylor los términos de la forma $\log(1-x)$ obtenemos

$$\log\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)=-\sum_{p\in P}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)=-\sum_{p\in P}\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i\,p^i}\right)=\sum_{p\in P}\frac{1}{p}+\sum_{p\in P}\left(\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i\,p^i}\right).$$

Por último, observemos que la serie que aparece en el último término converge, de hecho

$$\sum_{p\in P}\left(\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i\,p^i}\right)<\sum_{p\in P}\left(\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{p^i}\right)=\sum_{p\in P}\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}-\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)=\sum_{p\in P}\frac{1}{p(p-1)}<\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^2}.$$

Así que $\sum_{p\in P}1/p$ debe divergir, ya que de lo contrario la serie armónica debería converger (ver teorema A.2.1). □

Corolario 1.2.2 Se cumple que

$$\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p}\right)=0.$$

Demostración. Siguiendo la demostración de 1.2.1 llegamos a lo siguiente

$$\log\left(\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)=-\sum_{p\in P}\frac{1}{p}-\sum_{p\in P}\left(\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i\,p^i}\right)=-\infty,$$

que es equivalente a lo que queremos demostrar. □

Consideremos ahora P_k como el conjunto de los primeros k primos, definimos $\rho_k:=\prod_{p\in\mathsf{P}_k}p$ y $S_k:=\#\{n\le\rho_k \mid \forall\, p\in\mathsf{P}_k,\, p\nmid n\}$, es decir, la cantidad de enteros menores o iguales a ρ_k que no son divisibles por ninguno de los primeros k primos. Utilizando el principio de inclusión y exclusión tenemos

$$S_k=\rho_k+\sum_{I\subseteq\mathsf{P}_k}(-1)^{\# I}\frac{\rho_k}{\prod_{p\in I}p}$$

o de manera equivalente

$$\frac{S_k}{\rho_k}=\prod_{p\in\mathsf{P}_k}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Claramente $\pi(\rho_k)<S_k+k$ (los primos menores que ρ_k son aquellos enteros que no son divisibles por ningún otro primo), así que

$$\frac{\pi(\rho_k)}{\rho_k}<\prod_{p\in P_k}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{k}{\rho_k}<\prod_{p\in P_k}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{k}{2^k}$$

dejamos tender k a infinito y aplicamos 1.2.2 para obtener

$$(1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x}\leq\lim\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2^k}=0.$$

Lo que esto nos indica es que los números primos aparecen de manera menos frecuente conforme avanzamos a enteros más grandes. Interpretando (1), la distancia promedio entre primos consecutivos $\Delta(x):=x/\pi(x)$ tiende a infinito junto con x.

Otra cosa que podemos ver a partir de 1.2.1 es que para todo $\varepsilon>0$ se cumple

$$(2)\ x^{1/(1+\varepsilon)}\ll_\varepsilon\pi(x),$$

ya que $x^{1/(1+\varepsilon)}\approx\#\{n^{1+\varepsilon}<x\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ y la suma de los inversos de los elementos en este conjunto converge con $x\to\infty$ (teorema A.2.2), contrario a lo que sucede con los inversos de los primos.

A partir de (2), tomando $\delta:=\varepsilon/(1+\varepsilon)\in(0,1)$, obtenemos

$$(3)\ \frac{x}{\pi(x)}\ll_\delta x^\delta.$$

Esto significa que, cualquier función de la forma x^δ con $\delta>0$ crece más rápido que $x/\pi(x)$, lo que nos brinda evidencia en relación al comportamiento de $\pi(x)$; de acuerdo a (3), la función $x/\pi(x)$ es *parecida* a $\log x$ en el sentido de dicha relación, lo que nos lleva a preguntarnos ¿qué tan parecidas son estas dos funciones en realidad?

Para responder esto recurriremos a las ideas de Chebyshev. Consideremos primero la función

$$\psi(x):=\sum_{n\leq x}\Lambda(n),$$

en donde $\Lambda(\cdot)$ es la función de Von Mangoldt ($\Lambda(n)=\log p$ si $n=p^k$, y 0 de lo contrario), de la cual se detallan algunas propiedades en el apéndice B. Definimos una segunda función

$$\theta(x):=\sum_{p\leq x}\log p,$$

y vemos, a partir de la definición de $\Lambda(\cdot)$, que se tiene lo siguiente

$$\psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)=\sum_{p^k\leq x}\log p=\sum_{p\leq x^{1/k}}\log p=\sum_{k=1}^{\log_2 x}\theta(x^{1/k}),$$

esto y la desigualdad $\theta(x) \leq x \log x$ (para verificar esto basta aplicar exp a ambos lados de la desigualdad) implican

$$\psi(x) - \theta(x) = \sum_{k=2}^{\log_2 x} \theta(x^{1/k}) \leq \sum_{k=2}^{\log_2 x} x^{1/k} \log x^{1/k} = \log x \sum_{k=2}^{\log_2 x} \frac{x^{1/k}}{k} \leq \frac{x^{1/2} (\log x)^2}{2 \log 2} = o(x) ,$$

y por lo tanto

$$(4) \quad \frac{\psi(x)}{x} = \frac{\theta(x)}{x} + o(1) .$$

Por otra parte, si aplicamos sumación parcial con $f(t) = \log t$ y $a_n = 1$ si $n \in P$, obtenemos

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt ,$$

(1) implica que esta integral es $o(x)$, y en consecuencia

$$(5) \quad \frac{\theta(x)}{x} = \frac{\pi(x) \log x}{x} + o(1) .$$

Combinando (4) y (5) vemos que, de exisitir alguno de los tres límites, se debe tener

$$(6) \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\theta(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} ,$$

Utilizando esta relación podemos probar lo siguiente.

Teorema 1.2.3 *(Chebyshev)* De existir algún $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = L ,$$

se debe tener que $L = 1$.

Demostración. Supongamos que existe dicho L, según (6) deberíamos tener

$$(7) \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} = L .$$

Definimos $R(x) := \psi(x) - L x$ y vemos que (7) implica $R(x) = o(x)$, sustituyento esto en la suma $\sum_{n \leq x} \psi(x/n)$ obtenemos

$$(8) \quad \sum_{n \leq x} \psi(x/n) = \sum_{n \leq x} L x/n + \sum_{n \leq x} R(x/n) .$$

Observemos ahora que $\sum_{n \leq x} R(x/n) = o(x \log x)$.

Utilizando esto y A.2.1 en (8) obtenemos

$$(9)\ \sum_{n\le x}\psi(x/n)\sim L\,x\log x\,.$$

Por otra parte, utilzando las propiedades de la función de Von Mangoldt (teorema B.2.1),

$$\sum_{n\le x}\psi(x/n)=\sum_{n\le x}\sum_{i\le x/n}\Lambda(i)=\sum_{n'\le x}\sum_{d|n'}\Lambda(d)=\sum_{n'\le x}\log n'\,.$$

Lo que, de acuerdo a A.2.3, implica

$$(10)\ \sum_{n\le x}\psi(x/n)\sim x\log x\,.$$

A partir de (9) y (10) es claro que L debe ser 1 . □

De manera que, si el límite de $\pi(x)/(x/\log x)$ existe, tendríamos el siguiente resultado consistente con nuestra primera conjetura al respecto del comportamiento de $x/\pi(x)$ y su parecido con $\log x$.

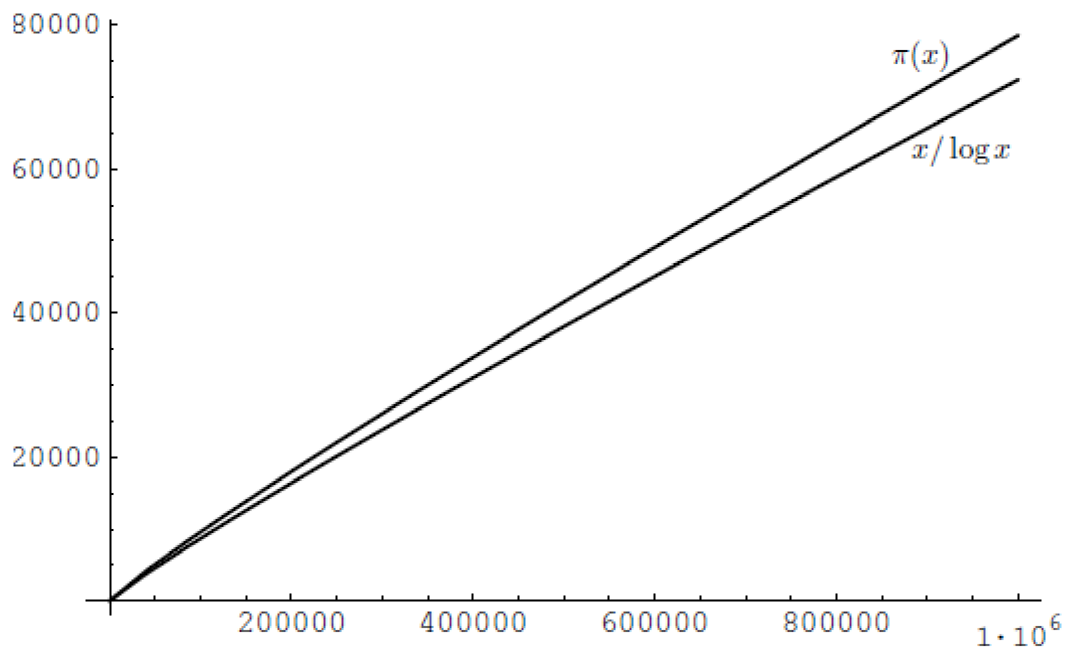

Fig 1.3

Teorema 1.2.4 *(de los Números Primos)* Se cumple que

$$(11)\ \pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$$

Esto fue conjeturado por Legendre en 1798 y más tarde reformulado de manera más concisa por Gauss. Sin embargo, no fue sino hasta 1896 que Hadamard y de la Vallée Poussin, de manera independiente, lograron dar una demostración en base al trabajo de Riemman concerniente al análisis de la función ζ .

La dependencia de ambos trabajos a las técnicas propias del análisis complejo dio lugar a la idea de la imposibilidad de dar una demostración mediante métodos elementales hasta que en 1949 Erdös y Selberg, de manera independiente, lograron dar demostraciones elementales de 1.2.4 utilizando la fórmula de Selberg como punto de partida.

El resultado anterior tiene una generalización que no resulta nada evidente, la misma surge del siguiente teorema de Dirichlet que extiende la infinitud de los primos de forma destacable a cualquier progresión aritmética que no posea un divisor global.

Teorema 1.2.5 (*de Dirichlet, Primos en Progresiones Aritméticas*) Para cualesquiera $a, q \in \mathbb{Z}$ tales que $(a, q) = 1$, se tiene

$$\#\{p \in P \mid p \equiv a \ (mod\, q)\} = \infty .$$

1.2.4 nos situa en la posición de efectuar las mismas preguntas que hemos hecho al respecto de los primos y su distribución, pero ahora extendiéndonos a progresiones aritméticas (los conjuntos de la forma $\{n \in N \mid n \equiv a\, mod\, q\}$ con $(a, q) = 1$ son llamados *progresiones aritméticas reducidas*). Concretamente, podemos definir

$$\pi(a, q; x) = \#\{p \in P \mid p \equiv a \ (mod\, q), p \leq x\}$$

y, como antes, indagar acerca de las propiedades asintóticas de esta nueva función. En lo referente a esto se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.2.5 *(de los Números Primos en Progresiones Aritméticas)*

$$(12) \ \pi(a, q; x) \sim \frac{\pi(x)}{\phi(q)}$$

La demostración rigurosa a esta pregunta también fue dada por de la Vallée Poussin, y es tan compleja como la de 1.2.3. Sin embargo, podemos indagar un poco en la intuición detrás de esta relación.

Podemos pensar en $p = a(mod\, q)$ y $p \in P$ como eventos independientes (en breve profundizaremos en este enfoque probabilístico), como para cada q existen $\phi(q)$ progresiones aritméticas reducidas, la independencia de dichos eventos implica la equidistribución de los primos entre estas progresiones. Esto es, en efecto, la relación que establece (12).

El problema se puede tratar de una manera más general pensando en q como una función que crece con x, digamos $q \sim c\, x^{\theta}$. Para el caso $\theta = 0$ tenemos las hipótesis de 1.2.5, es decir, q constante, sin embargo, $\theta > 1$ implica $q > x$, así que algunas progresiones aritméticas reducidas, como $q - 1(mod\, q)$ no podrían ser cubiertas por ningún número menor que x, lo que imposibilita la equidistribución de los primos a lo largo de las $\phi(q)$ progresiónes aritméticas posibles.

¿Cuáles valores de θ permiten que x y q satisfagan (12)? A θ se le conoce como *nivel de distribución*, y se conjetura que $\theta = 1 - \varepsilon$ es uno de estos valores permitidos para cada $\varepsilon > 0$, esto se conoce como la conjetura de Elliot-Halberstam (aunque se formula de manera distinta). En el capítulo 3 hablaremos de la misma y de la versión más débil $\theta = 1/2 - \varepsilon$, conocida como el teorema de Bombieri-Vinogradov.

1.3 Conjeturas sobre números primos

De acuerdo al Teorema de los Números Primos, la proporción de números primos menores a x, digamos $\mathbf{P}(x)$, debe cumplir lo siguiente

$$(13)\quad \mathbf{P}(x)=\frac{\pi(x)}{x}\sim\frac{x/\log x}{x}=\frac{1}{\log x}\ .$$

Si pensamos en términos probabilísticos, (13) indica que la probabilidad de que un entero aleatorio grande n sea primo es aproximadamente $1/\log n$. Para formalizar esta idea recurriremos al siguiente resultado.

Teorema 1.3.1 Definiendo para cada entero n las variables aleatorias

$$B_n := Be(1/\log n)\ \text{ y }\ \Pi(n) := \sum_{m\le n} B_m\,,$$

con $B_1, B_2, B_3, \ldots$ todas independientes, tenemos con probabilidad 1 que $\Pi(n)\sim\pi(n)$.

NOTA: $B_n := Be(1/\log n)$ significa que B_n tiene distribucíon Bernoulli con parámetro $1/\log n$, es decir, B_n toma valores 1 ó 0, el primero con probabilidad $1/\log n$ y el segundo con probabilidad $1-1/\log n$.

Demostración. De acuerdo a la desigualdad de Chebyshev se tiene que para todo $\varepsilon>0$

$$(14)\quad P(\,|\Pi(n)-E(\Pi(n))|\ge\varepsilon n\,)\le\frac{D(\Pi(n))}{(n\varepsilon)^2}\,,$$

en donde E y D son la esperanza y la desviación estándar, observemos que

$$\begin{aligned} D(\Pi(n)) &= V(\Pi(n))+(E(\Pi(n)))^2=V\left(\sum_{m\le n} B_m\right)+\left(E\left(\sum_{m\le n} B_m\right)\right)^2\\ &=\sum_{m\le n} V(B_m)+\left(\sum_{m\le n} E(B_m)\right)^2=\sum_{m\le n}\frac{1}{(\log m)^2}+\left(\sum_{m\le n}\frac{1}{\log m}\right)^2 \end{aligned}$$

y que cada una de estas últimas sumas es $o(n)$, así que $D(\Pi(n))=o(n^2)$. Aplicando esto en (14) obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} P(\,|\Pi(n)-E(\Pi(n))|\ge\varepsilon n\,)=0\,,$$

y, como esto se cumple para todo $\varepsilon>0$, tenemos que con probabilidad 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Pi(n)-E(\Pi(n))}{n}=0\,,$$

que mediante un poco de álgebra se convierte en $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\Pi(n)}{E(\Pi(n))}=1$, precisamente la definición de $\Pi(n) \sim E(\Pi(n))$. Por último, aplicamos sumación parciál en el término de la derecha para obtener

$$E(\Pi(n)) = \sum_{m \leq n} \frac{1}{\log m} \sim \frac{n}{\log n},$$

con lo que concluimos nuestra demostración. □

A este modelo probabilístico de primalidad se le conoce como modelo de Cramér. El mismo resulta de gran utilidad para determinar el comportamiento esperado sobre la distribución de primos con propiedades particulares.

Definamos $\pi_2(x) := \#\{n \leq x \mid n \in P,\ n+2 \in P\}$, es decir la cantidad parejas de primos de la forma $(n, n+2)$, mejor conocidos como primos gemelos. De manera análoga lo hecho en (13), el comportamiento asintótico de $\pi_2(x)$ puede ser descrito en términos probabilísticos considerando la proporción como medida de probabilidad

$$\mathbf{P}(n, n+2 \in P) = \frac{\pi_2(n)}{n}.$$

Si tomamos $\mathbf{P}$ como en el modelo de Cramér, es decir, suponiendo que $n \in P$ y $n+2 \in P$ son eventos independientes, se debe satisfacer lo siguiente

$$(15)\quad \mathbf{P}(n, n+2 \in P) = \frac{1}{\log n} \frac{1}{\log(n+2)} \sim \frac{1}{(\log n)^2}$$

de donde obtenemos la estimación.

$$\pi_2(n) \sim \frac{n}{(\log n)^2}.$$

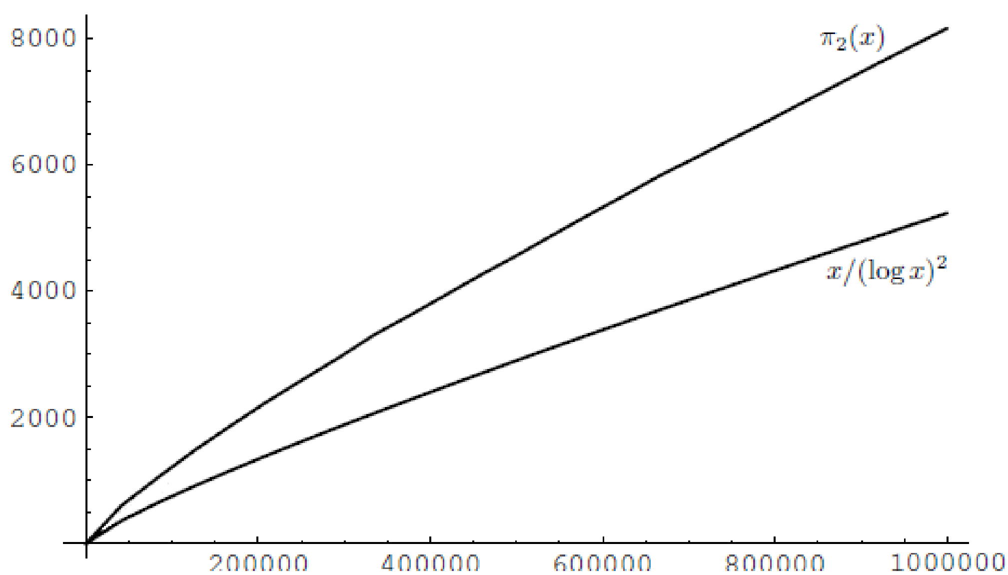

Fig 1.4

En la figura 1.4 podemos observar las graficas de ambas funciones. Aunque en principio esto parece indicar que el modelo de Cramér no nos sirve en esta situación, resulta sencillo explicar el error emergente en el orden de magnitud de $\pi_2(\cdot)$ mediante algunas observaciones.

Primero debemos notar que para que un primo $p<\sqrt{n}$ no divida a n ni a $n+2$ es necesario que n no coincida con las congruencias $-2, 0 \,(mod\ p)$, y la probabilidad de que un entero aleatorio grande cumpla esto es evidentemente $\sim 1-2/p$ (salvo en el caso $p=2$, en el cual ambas congruencias coinciden).

Lo anterior es precisamente el motivo de la discrepancia, ya que resulta inconsistente con la suposición de independencia del modelo de Cramér debido a que, bajo la misma, la probabilidad de que n y $n+2$ no sean divisibles por p debería ser el producto de las probabilidades de cada evento, es decir, $\sim(1-1/p)^2$.

A partir de esto es posible corregir el error en (15) generado por la falsa independencia de divisibilidad por un primo p, multiplicando por el factor

$$\left(1-\frac{2}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2}=\left(\frac{p-2}{p}\right)\left(\frac{p^2}{(p-1)^2}\right)=\frac{(p-1)^2-1}{(p-1)^2}=1-\frac{1}{(p-1)^2},$$

salvo el caso de $p=2$, en el qué el factor de corrección es $(1/2)(1/2)^{-2}=2$. Así obtenemos

$$(16)\ 2\prod_{2<p<\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\mathbf{P}(n, n+2\in P)\sim\frac{\pi_2(n)}{n}.$$

con $\mathbf{P}$ la medida de probabilidad del modelo de Cramér. Además, como

$$\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

converge, asíntóticamente podemos precindir del parámetro $\sqrt{n}$ y obtener lo siguiente.

Conjetura I *(Distribución de los Primos Gemelos)*

$$\pi_2(x)\sim 2\prod_{p\geq 3}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{(\log x)^2}.$$

Si denotamos con p_n al n-esimo primo, podemos plantear las siguientes dos conjeturas implicadas directamente por I.

Conjetura II *(Infinitud de los Primos Gemelos)*

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n)=2,$$

Conjetura III *(Infinitud de los Primos a Distancia Acotada)* Existe $C \in \mathbb{N}$ tal que

$$\liminf_{n\to\infty} (p_{n+1} - p_n) = C .$$

Por desgracia, a pesar de ser más débiles que I, ambas también están fuera de nuestro alcance. Sin embargo, podemos formular una versión aún más débil que sigue siendo objeto de interés y que puede ser atacada con los métodos que hoy se conocen.

De acuerdo al Teorema de los Números Primos, la distancia promedio entre primos consecutivos $\Delta(x)$ menores o iguales a x debe satisfacer

$$(17)\ \ \Delta(x) = \frac{x}{\pi(x)} \sim \frac{x}{x/\log x} = \log x \cdot$$

Así que, en general, cerca del entero n los primos están a distancia $\log n$, sin embargo, de acuerdo a nuestras tres conjeturas, esperamos que a lo largo de $\mathbb{N}$ aparezcan de manera frecuente diferencias entre primos consecutivos mucho menores a lo esperado. Esto arroja nuestra última conjetura, la que resulta ser el objeto central de este trabajo.

Conjetura IV *(Saltos Inusualmente Pequeños Entre Primos Consecutivos)*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} = 0 .$$

Gracias a un método desarrollado por Daniel A. Goldston, János Pintz y Cem Y. Yildirim en 2005, nos veremos en posición de dar una demostración de IV. Además, haremos evidente la profundidad de dicho método utilizándolo como herramienta para obtener avances significativos en relacion a III.

Capítulo 2

Teoría de Cribas y Tuplas Primas

2.1 Tuplas primas y la conjetura de Hardy-Littlewood

Consideremos ahora un conjunto $H:=\{h_1<h_2<\ldots<h_k\}$, una tupla prima asociada a este conjunto es un vector de la forma $(n+h_1, n+h_2, \ldots n+h_k)$ compuesto exclusivamente por primos. Generalizamos entonces la definición de $\pi(\cdot)$ y $\pi_2(\cdot)$ como

$$\pi_H(x):=\#\,\mathrm{P}_H\cap[0,x] \text{, en donde } \mathrm{P}_H:=\{n\in\mathbb{N}\,|\,(n+h_1,\ldots,n+h_k)\in\mathrm{P}^k\}$$

Hardy y Littlewood, mediante argumentos analíticos relacionados con el método del círculo desarrollado por ellos mismos, conjeturaron que $\pi_H(x)$ tiende a infinito junto con x , siempre y cuando H se escoja de manera que para ningún primo p se tenga que $\#\{h(mod\ p)\,|\,h\in H\}=p$, es decir, que los elementos de H no cubran todas las congruencias distintas $(mod\ p)$, un H que cumpla esta condición se llama admisible. Nosotros llegaremos a la misma conjetura en base a los argumentos probabilísticos relacionados con el modelo de Cramér que fueron presentados en el capítulo anterior.

Podemos pensar, como en el caso de los primos gemelos, la proporción como una medida de probabiliadad, es decir

$$\mathbf{P}(n+h_i\in\mathrm{P},\forall\, i\leq k)=\frac{\pi_H(n)}{n}$$

Si consideramos dicha $\mathbf{P}$ como en el modelo de Carmér, los k eventos $n+h_k\in\mathrm{P}$ deben ser independientes y cada uno debe darse con probabilidad $1/\log(n+h_k)$, entonces

$$\mathbf{P}(n+h_i\in\mathrm{P},\forall\, i\leq k)=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\log(n+h_i)}\sim\frac{1}{(\log n)^k}\ ,$$

así pues, $\pi_H(n)$ debería distribuir como $n/(\log n)^k$. Sin embargo, como en el caso de los primos gemelos, estamos cometiendo un error al asumir que, para un primo p , los eventos $p\nmid n+h_i$ son todos independientes.

En dicho modelo, la probabiliad de que los k enteros de la túpla no sean múltiplos de p es $\sim(1-1/p)^k$. Sin embargo, en realidad hace falta que n no conicida con ninguna de las congruencias $-h_i(mod\, p)$, definiendo $\upsilon_{\mathcal{H}}(p)$ como la cantidad de congruencias distinitas que cubre $\mathcal{H}$ módulo p , esta probabilidad es $1-\upsilon_{\mathcal{H}}(p)/p$. Así pues, el factor de corrección por la falta de independecia debe ser

$$\left(1-\frac{\upsilon_{\mathcal{H}}(p)}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-k},$$

al hacer esto sobre todos los primos, obtenemos el factor de corrección

$$G(\mathcal{H}):=\prod_{p\in\mathrm{P}}\left(1-\frac{\upsilon_{\mathcal{H}}(p)}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-k}$$

es así como justificamos esta conjetura.

Conjetura (*Hardy-Littlewood*) Se cumple la formula asíntótica

$$\pi_{\mathcal{H}}(n)\sim G(\mathcal{H})\frac{n}{(\log n)^k}$$

A la G se le conoce como la constante de Gallagher de la tupla $\mathcal{H}$, esta jugará un papel muy importante en los resultados concernientes al capítulo 3.

A partir de ahora, asumiremos $h_1=0$. Es claro que basta considerar el comportamiento de $\pi_{\mathcal{H}}(x)$ cuando esto sucede, ya que cualquier otro resulta asintóticamente similar. Además, restringiendo el análisis a estos conjuntos, se tiene también que $\mathrm{P}_{\mathcal{H}}\subset\mathrm{P}$, lo que restulta cómodo para la presentación de nuestros siguientes resultados; podemos observar, por ejemplo, $\mathrm{P}_{\{0\}}=\mathrm{P}$ y que $\mathrm{P}_{\mathcal{H}_1}\cap\mathrm{P}_{\mathcal{H}_2}=\mathrm{P}_{\mathcal{H}_1\cup\mathcal{H}_2}$.

En base al resultado de Euler expuesto en el capítulo anterior, podemos construir una medida de probabilidad en P como sigue, para todo $A\subset\mathrm{P}$ definimos

$$\mathbf{P}(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{p\in A\cap(0,n]}\frac{1}{p}}{\sum_{p\in\mathrm{P}\cap(0,n]}\frac{1}{p}}$$

Nuestro fin en este capítulo será demostrar el siguiente teorema

Teorema 2.1.1 $\mathbf{P}(\mathrm{P}_{\mathcal{H}})\neq 0 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{H}=\{0\}$, i.e. $\mathrm{P}_{\mathcal{H}}=\mathrm{P}$, en particular $P(P_{\mathcal{H}})\neq 0\Rightarrow P(P_{\mathcal{H}})=1$.

En 1915 Viggo Brun dio una prueba de un caso particular de este resultado referente a los primos gemelos basándose en la llamada *Criba de Brun*. Concretamente, si $\mathcal{H}=\{0,2\}$ entonces

$$\sum_{q\in \mathrm{P}_H} \frac{1}{p} < \infty$$

Sin embargo, la importancia de su trabajo, más que en el avance correspondiente a la distribución de estas tuplas, radica en la introducción de los métodos de cribas como herramienta de la teoría de números analítica.

La demostración que aquí se presenta de 2.1.1 sigue las ideas de la criba de Eratóstenes (que se exponen en la siguiente sección), sin embargo, resultan similares a las utilizadas por Brun.

Claramente 2.1.1 contrasta con el resultado de Euler expuesto en 1.2.1. En realidad, la combinación de ambos indica que la cantidad de tuplas primas a distancias específicas es pequeña en comparación a la cantidad de primos. Es decir, que a pesar de que esperamos la infinitud de las tuplas primas asociadas a conjuntos admisibles (entre ellos el correspondiente a los primos gemelos), si tomamos un primo cualquiera (a lo largo de todo $\mathbb{N}$), la probabilidad de que forme parte de una tupla prima dada es 0 .

2.2 La Criba de Eratóstenes

Sea A un conjunto finito y sea P un conjunto de primos tal que para cada $p\in\mathsf{P}$ tenemos un conjunto $\mathsf{A}_p\subset\mathsf{A}$. El problema general de la criba consiste en acotar, superior e inferiormente, la cardinalidad del conjunto

$$S(\mathsf{A},\mathsf{P}):=\mathsf{A}\setminus \bigcup_{p\in\mathsf{P}} \mathsf{A}_p \,.$$

Una respuesta explícita al problema se puede obtener de manera natural mediante la combinatoria; si para cada conjunto $I\subset\mathsf{P}$ denotamos

$$A_I := \cap_{p\in I} A_p \,,$$

según el principio de inclusión y exclusión, tenemos

$$(1)\quad S(\mathsf{A},\mathsf{P})=\sum_{I\subset\mathsf{P}} (-1)^{\# I}\,\#\mathsf{A}_I$$

en donde interpretamos $\mathsf{A}_{\emptyset}$ como A . Sin embargo, de manera general, el problema de determinar el valor de los sumandos del lado derecho de la igualdad posee una complejidad equivalente a la del manejo del lado izquierdo.

En el caso particular de la criba de Eratóstenes se tiene $\mathsf{A}=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n\leqslant x\}$ y P el conjunto de todos los primos. Para cada $p\in\mathsf{P}$ escogemos $\omega(p)$ clases residuales módulo p y definimos A_p como el conjunto de los elementos de A que pertenecen al menos a alguna de estas clases. Sea $\mathsf{A}_1:=\mathsf{A}$ y para cualquier $d\in\mathbb{Z}$ libre de cuadrados compuesto por primos en P definimos

$$\mathsf{A}_d := \cap_{p|d} \mathsf{A}_p \text{ y } \omega(d) := \prod_{p|d} \omega(p) .$$

Para $z \in \mathbb{R}^+$ definimos

$$\mathsf{P}(z) := \prod_{\substack{p \in \mathsf{P} \\ p < z}} p .$$

En este caso quisieramos acotar

$$S(\mathsf{A}, \mathsf{P}, z) := \#\left(\mathsf{A} \setminus \cup_{p|\mathsf{P}(z)} \mathsf{A}_p\right).$$

Suponemos que existe X tal que

$$\# \mathsf{A}_d = \frac{\omega(d)}{d} X + R_d ,$$

para algun R_d con $|R_d| = O(\omega(d))$. y que $\# \mathsf{A}_d = 0$ para todo d mayor que algún $y \in \mathbb{R}^+$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1 *(La Criba de Eratostenes)* Si existe algún $k \geq 0$ tal que

$$\sum_{p|\mathrm{P}(z)} \frac{\omega(p) \log p}{p} \leq k \log z + O(1) ,$$

se tiene que

$$S(\mathsf{A}, \mathsf{P}, z) = X\, W(z) + O\left(\left(X + \frac{y}{\log z}\right) (\log z)^{k+1} \exp\left(-\frac{\log y}{\log z}\right)\right) ,$$

en donde $W(z)$ denota el producto

$$\prod_{p|\mathrm{P}(z)} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) .$$

Antes de proceder con la demostración trabajaremos un par de resulados que nos serán de extrema utilidad, ambos relativos a la siguiente función

$$F(t, z) := \sum_{\substack{d \leq t \\ d|\mathrm{P}(z)}} \omega(d) .$$

Para ello aplicaremos lo que se conoce como el truco de Rankin (en [2] se encuentra una buena referencia). Podemos ver que para cualquier $\delta > 0$ se tiene

$$F(t, z) \ll \sum_{d|\mathrm{P}(z)} \omega(d) \left(\frac{t}{d}\right)^{\delta} = t^{\delta} \sum_{d|\mathrm{P}(z)} \frac{\omega(d)}{d^{\delta}} \leq t^{\delta} \prod_{p|\mathrm{P}(z)} \left(1 + \frac{\omega(p)}{p^{\delta}}\right) ,$$

utilizando aquí que $1 + x \leq e^x$ tenemos

$$(1)\ \ F(t,z) \ll t^{\delta} \prod_{p|\mathrm{P}(z)} \left(1+\frac{\omega(p)}{p^{\delta}}\right) \leq \exp\left(\delta \log t + \sum_{p|\mathrm{P}(z)} \frac{\omega(p)}{p^{\delta}}\right).$$

Por otra parte, tomando $\eta := 1-\delta$ resulta lo siguiente

$$\sum_{p|\mathrm{P}(z)} \frac{\omega(p)}{p^{\delta}} = \sum_{p|\mathrm{P}(z)} \frac{\omega(p)}{p} e^{\eta \log p},$$

de manera similar podemos utilizar que $e^{x} \leq 1+x e^{x}$ y $p<z$ para obtener

$$(2)\ \ \sum_{p|\mathrm{P}(z)} \frac{\omega(p)}{p^{\delta}} \leq \sum_{p|\mathrm{P}(z)} \frac{\omega(p)}{p}\left(1+(\eta \log p)\, p^{\eta}\right) \leq \sum_{p|\mathrm{P}(z)} \frac{\omega(p)}{p}\left(1+(\eta \log p)\, z^{\eta}\right)$$

a partir de (1) y (2) llegamos a

$$(3)\ \ F(t,z) \ll t \exp\left(-\eta \log t + \sum_{p|\mathrm{P}(z)} \frac{\omega(p)}{p} + \eta z^{\eta} \sum_{p|\mathrm{P}(z)} \frac{\omega(p) \log p}{p}\right)$$

Ahora, utilizando sumación parcial con $f(t) = 1/\log t$ y $a_n = \omega(n)\log(n)/n$ si $n\,|\,\mathrm{P}(z), n \in \mathcal{P}$ y nulo de lo contrario, obtenemos

$$\sum_{p|\mathrm{P}(z)} \frac{\omega(p)}{p} = \frac{1}{\log z}\left(\sum_{p|\mathrm{P}(z)} \frac{\omega(p) \log p}{p}\right) + \int_{2}^{z} \frac{S(t)}{t(\log t)^{2}}\, dt,$$

siendo $S(t) = \sum_{n \leq t} a_n$, suponiendo la hipótesis de 2.2.1 se debería seguir que

$$\sum_{p|\mathrm{P}} \frac{\omega(p)}{p} \leq \frac{k \log z + O(1)}{\log z} + k \int_{2}^{z} \frac{1}{t \log t}\, dt + O\left(\int_{2}^{z} \frac{1}{t(\log t)^{2}}\, dt\right)$$

$$= k + O\left(\frac{1}{\log z}\right) + k \log\log z + O(1) = k \log\log z + O(1).$$

Utilizamos lo anterior (y la hipótesis de 2.2.1) en (3) para obtener

$$F(t,z) \ll t \exp\left(-\eta \log t + k \log\log z + \eta z^{\eta} k \log z\right),$$

si tomamos $\eta = \dfrac{1}{\log z}$ se sigue que

$$F(t,z) \ll t \exp\left(-\frac{\log t}{\log z} + k \log\log z + z^{\frac{1}{\log z}} k\right) = t (\log z)^{k} \exp\left(-\frac{\log t}{\log z}\right) \exp\left(z^{\frac{1}{\log z}} k\right),$$

y como $z^{1/\log z} = e$, la expresión anterior se reduce a

$$(4)\quad F(t,z) \ll t(\log z)^k \exp\left(-\frac{\log t}{\log z}\right).$$

De nuevo utilzamos sumación parcial, esta vez con $f(t)=1/t$ y $a_n=\omega(n)$ si $n>y, n|P(z) n\in P$ y nulo de lo contrario. Así vemos que

$$\sum_{\substack{d>y\\ d|P(z)}} \frac{\omega(d)}{d} = \sum_{n>y} \frac{a_n}{n} = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{y<n<m} \frac{a_n}{n}\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\sum_{y<n<m} a_n - \int_y^m \left(\sum_{y<n<t} a_n\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}(F(m,z)-F(y,z)) - \int_y^m (F(t,z)-F(y,z))\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}(F(m,z)-F(y,z))\right) + \lim_{m\to\infty}\left(\int_y^m (F(t,z)-F(y,z))\left(\frac{1}{t^2}\right)dt\right),$$

observamos que el primer término se anula, ya que $F(m,z)=o(m)$, y como $F(t,z)/t^2$ es mayor que la función que aparece en la integral llegamos a

$$\sum_{\substack{d>y\\ d|P(z)}} \frac{\omega(d)}{d} \;<\; \lim_{m\to\infty}\left(\int_y^m F(t,z)\left(\frac{1}{t^2}\right)dt\right) = \int_y^\infty F(t,z)\frac{1}{t^2}dt,$$

que podemos acotar utilizando (4)

$$(5)\quad \sum_{\substack{d>y\\ d|P(z)}} \frac{\omega(d)}{d} \ll \int_y^\infty \frac{t(\log z)^k \exp(-\log t/\log z)}{t^2}dt \ll (\log z)^{k+1}\exp\left(-\frac{\log y}{\log z}\right).$$

Ahora la demostración de 2.2.1 resulta sencilla.

Demostración. Expresamos $S(\mathsf{A},\mathsf{P},z)$ en términos de la función de Möbius de acuerdo al principio de inclusión-exclusión, como en (1).

$$S(\mathsf{A},\mathsf{P},z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)\#\mathsf{A}_d = \sum_{\substack{d\le y\\ d|P(z)}} \mu(d)\#\mathsf{A}_d = \sum_{\substack{d\le y\\ d|P(z)}} \mu(d)\left(\frac{\omega(d)}{d}X + R_d\right),$$

para esto definimos $\omega(1)=0$. Como $|R_d|=O(\omega(p))$, se tiene

$$S(\mathsf{A},\mathsf{P},z) = \sum_{\substack{d\le y\\ d|P(z)}} \mu(d)\frac{\omega(d)}{d}X + O(F(y,z))$$

trabajamos el primer sumando

$$S(\mathsf{A},\mathsf{P},z)=\sum_{d|P(z)}\mu(d)\frac{\omega(d)}{d}X-\sum_{\substack{d>y\\ d|P(z)}}\mu(d)\frac{\omega(d)}{d}X+O(F(y,z))$$
$$=X\left(\sum_{d|P(z)}\mu(d)\frac{\omega(d)}{d}\right)-X\left(\sum_{\substack{d>y\\ d|P(z)}}\mu(d)\frac{\omega(d)}{d}\right)+O(F(y,z))$$

para el primer término vemos que $\sum_{d|P(z)}\mu(d)\frac{\omega(d)}{d}=\prod_{p|P(z)}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)\;-\;1$, y en los otros dos utilizamos (5) y (4) respectivamente, para obtener

$$S(\mathsf{A},\mathsf{P},z)=X\prod_{p|P(z)}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)-X+O\left(X(\log z)^{k+1}\exp\left(-\frac{\log y}{\log z}\right)\right)+O\left(y(\log z)^{k}\exp\left(-\frac{\log y}{\log z}\right)\right)$$
$$=X\prod_{p|P(z)}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)+O\left(\left(X+\frac{y}{\log z}\right)(\log z)^{k+1}\exp\left(-\frac{\log y}{\log z}\right)\right)$$

que es justamente lo que queríamos probar.

Ahora poseemos las herramientas necesarias para demostrar 2.1.1. Para hacerlo probaremos el siguiente lema que brinda una cota asintótica para $\pi_H(\cdot)$ cuando H tiene dos elementos.

Lema 2.2.2 (*Brun*) Si $H=\{0,h_2\}$ se cumple que

$$\pi_H(x)\ll\frac{x(\log\log x)^2}{(\log x)^2}$$

Demostración. Sea $\mathsf{A}=\{n\in\mathbb{N}|n\leqslant x\}$ y P el conjunto de todos los primos. Dado un $z\in\mathbb{R}^+$, para cada $p\in\mathsf{P}$ menor a z distinguimos las dos clases residuales $-h_2(mod\ p)$ y $0(mod\ p)$. Notemos que x juega el papel de X, y que $k=2$ satisface la hipótesis de 2.2.1, así que

$$S(\mathsf{A},\mathsf{P},z)=xW(z)+O\left(x(\log z)^3\exp(-\log x/\log z)\right),$$

en donde $W(z)=\prod_{p<z}(1-2/p)$. Como $1-2/p\le e^{-2/p}$, tenemos que

$$W(z)\le\exp\left(-\sum_{p<z}\frac{2}{p}\right)\ll(\log z)^{-2}$$

Ahora tomamos z tal que $\log z=\log x/C\log\log x$, con C alguna constante

$$S(\mathsf{A},\mathsf{P},z)=O\left(x(\log z)^{-2}\right)+O\left(x(\log z)^3\exp(-\log x/\log z)\right)$$
$$=O\left(\frac{Cx(\log\log x)^2}{(\log x)^2}\right)+O\left(\frac{x(\log x)^2}{C^3(\log\log x)^3e^C}\right)$$

Habiendo probado este lema, 2.1.1 es también sencillo de probar.

Demostración de 2.1.1

Supongamos que $H=\{0<h_2<...<h_n\}$ (notemos que el caso $H=\{0\}$ es trivial), y definamos $H'=\{0,h_2\}$, claramente $P_H \subset P_{H'}$, y en consecuencia

$$\sum_{p\in P_H}\frac{1}{p} \leq \sum_{p\in P_{H'}}\frac{1}{p}.$$

Consideremos la sucesión a_n como la función indicadora de $P_{H'}$ (*e.i.* $a_n=1$ si $p\in P_{H'}$ y se anula si no), y la función $f(t)=1/t$. Por medio de sumación parcial obtenemos

$$\sum_{p\in P_{H'}}\frac{1}{p}=\sum_{n\geq 2}\frac{a_n}{n}=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=2}^{m}\frac{a_n}{n}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\pi_{H'}(m)}{m}-\int_2^m \pi_{H'}(t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt\right),$$

el lema 2.2.1 nos sirve para acotar el lado izquierdo y así obtener

$$\sum_{p\in P_H}\frac{1}{p}\ll \lim_{m\to\infty}\left(\frac{\log\log m}{\log m}\right)^2+\int_2^\infty\frac{(\log\log t)^2}{t(\log t)^2}dt=\int_2^\infty\frac{(\log\log t)^2}{t(\log t)^2}dt$$

y como esta integral existe, de hecho

$$\int_2^\infty\frac{(\log\log t)^2}{t(\log t)^2}dt=\left(\frac{2+2\log\log 2+(\log\log 2)^2}{\log 2}\right)\approx 2,$$

concluimos justamente con lo que queremos probar

$$\sum_{p\in P_H}\frac{1}{p} \leq \sum_{p\in P_{H'}}\frac{1}{p} <\infty$$

de donde resulta trivial concluir que $\mathbf{P}(\mathrm{P}_H)=0$ □

Lo interesante de este resultado, como ya habíamos mencionado, es el contraste que representa la combinación del mismo con la conjetura Hardy-Littlewood, y los argumentos eurísticos detrás de la misma. Por un lado, la probabilidad de que cada tupla prima permisible se repita infinitamente a lo largo de los naturales es 1, y por el otro, la proporción de estas es pequeña, no sólo en comparación a los naturales sino a los primos mismos.

Capítulo 3
Goldston-Pintz-Yildirim

3.1 Primos Cercanos

Como ya mencionamos en el primer capítulo, la distancia promedio entre primos consecutivos es $\log x$. También se mencionó que este hecho es consecuencia de que $\pi(x)$ se comporte de forma tan regular. Sin embargo, nuestro objeto de interés no es la distancia promedio entre primos, sino la distancia real entre cada pareja de primos consecutivos, ya que es en términos de la misma que se formulan nuestras conjeturas más fuertes.

Aunque no estamos en posición de exhibir de manera concreta el comportamiento de estas diferencias, podemos empezar a comparar dicho comportamiento con el de las distancias promedio, ¿existirán primos a distancias mucho mayores o mucho menores a ésta?, para responder esta pregunta nos valdremos de la sucesión

$$R_n = \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} .$$

De acuerdo a las conjeturas sobre la distribución de los primos gemelos y de las tuplas primas en general, esperamos que

$$\liminf_{n\to\infty} R_n = 0 ,$$

es decir, la conjetura IV. En este capítulo abordaremos este problema mediante el método recientemente desarrollado por Goldston, Pintz y Yildirim; a partir del análisis de tuplas primas y la distribución de los primos en progresiones aritméticas podremos concluir un par de resultados realmente profundos al respecto.

Sin embargo, antes de continuar con lo descrito arriba haremos un breve paréntesis para hablar de la sucesión en cuestión y de cómo esta nos ayuda a comprender la complejidad del problema de los saltos entre primos consecutivos. El siguiente resultado es obra de Paul Erdös.

Teorema 3.1.1 La sucesión R_n tiene infinitos puntos de acumulación.

Una de las cosas que podemos concluir a partir de 3.1.1 es que no podemos describir el comportamiento de las diferencias entre primos mediante una función tan sencilla como las que hemos utilizado hasta ahora.

Aunado a lo anterior, el siguiente resultado, también obra de Erdös, nos incita a creer que el problema de los saltos entre primos está aún más lejos de nuestras capacidades, ya que magnifica la complejidad del mismo exhibiendo la gran cantidad de saltos que resultan mucho más grandes que las distancias promedio.

Teorema 3.1.2

$$\limsup_{n\to\infty} R_n = \infty$$

Este par de resultados nos brinda evidencia de las dificultades que enfrentaremos al intentar construir funciones con propiedades asintóticas similares a aquella de los saltos entre primos. Por ello es que nos tendremos que limitar a estudiar la forma en la que se relaciona esta función con la de los saltos promedio, es decir, la sucesión R_n.

3.2 El Nivel de Distribución de los Primos

Como mencionamos en el capítulo 1, el nivel de distribución de los números primos refleja la velocidad a la que puede crecer el módulo q como potencia de x en el teorema de los números primos en progresiones aritméticas. Concretamente, si para algún θ se tiene que para todo $A>0$ existe una constante C, tal que

$$\sum_{1\le q\le x^{\theta}} \max_{(a,q)=1} \left| \pi(x;q,a) - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \right| \le \frac{C\,x}{(\log x)^A} ,$$

decimos que dicho θ es un nivel de distribución permisible. Si definimos

$$E(x;q) := \max_{(a,q)=1} \left| \pi(x;q,a) - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \right|$$

la relación se puede reescribir de la siguiente forma

$$\sum_{1\le q\le x^{\theta}} E(x;q) = O\left(x/(\log x)^A\right),\ \ \forall A>0 ,$$

que resulta fácil de interpretar; de acuerdo a esto, para un nivel de distribución permisible, la suma de los errores relativos $E(x;q)$ (las diferencias entre los valores de $\pi(x;q,a)$ y los de $\pi(x)/\varphi(q)$, que se espera sean asintóticamente similares) debe volverse arbitrariamente pequeña, de aquí la referencia hecha en el primer capítulo. De igual forma, podemos ahora enunciar la conjetura hecha por Elliott y Halberstam y el resultado de Bombieri y Vinogradov, ambos mencionados entonces.

Conjetura 3.2.1 (*Elliott-Halberstam*) Si $\varepsilon>0$, $\theta=1-\varepsilon$ es un nivel de distribución permisible.

Teorema 3.2.2 (*Bombieri-Vinogradov*) Sea $A>0$, si $x^{1/2}(\log x)^{-A}\leq Q\leq x^{1/2}$, entonces

$$\sum_{q\leq Q}\max_{y<x}\max_{(a,q)=1}\left|\psi(y;q,a)-\frac{y}{\varphi(q)}\right|=O(x^{1/2}Q(\log x)^5),$$

en donde $\psi(y;q,a)=\sum_{\substack{n\leq y\\ n\equiv a\ mod\ q}}\Lambda(n)$.

Esta función ψ es análoga a la utilizada en el primer capítulo para probar nuestra versión condicional del teorema de los números primos (teorema 1.2.3). y, como en aquel caso, se tiene que $\psi(y;q,a)\sim\pi(y;q,a)$.

3.3 El Método de Goldston, Pintz y Yildirim

El método de Goldston-Pintz-Yildirim consiste en evaluar asintóticamente una función que detecta primos en tuplas. Lo primero que haremos será proceder con la construcción de la misma, además claro, de la descripción de las ideas con las que se abordará el problema.

Sea N una variable que tiende a infinito y H, R tales que

$$H\ll\log N\ll\log R\leq\log N,$$

Sea $\mathsf{H}=\{h_1,\ldots,h_k\}\subset[0,H]\cap\mathbb{Z}$, Para un primo p, sea $\Omega_{\mathsf{H}}(p)$ el conjunto de las clases residuales $-h_i(mod\ p)$. Abusando de la notación, diremos que $n\in\Omega_{\mathsf{H}}(p)$ si $n(mod\ p)\in\Omega_{\mathsf{H}}(p)$. Llamamos a H admisible si

$$\#\Omega_{\mathsf{H}}(p)<p,\forall p\in P$$

Extendemos $\Omega_{\mathsf{H}}(\cdot)$ multiplicativamente; para $d\in\mathbb{Z}$ libre de cuadrados decimos que $n\in\Omega_{\mathsf{H}}(d)$ si para todo $p\in P$ tal que $p|d$ tenemos que $n\in\Omega_{\mathsf{H}}(p)$. Si definimos $P(n;\mathsf{H}):=(n+h_1)\ldots(n+h_2)$ se puede replantear esta condición a $d|P(n;\mathsf{H})$. Definimos las funciones

$$\lambda_R(d;a)=\begin{matrix}0 & si\ \ d>R\\ \frac{1}{a!}\mu(d)\left(\log\frac{R}{d}\right)^a & si\ \ d\leq R\end{matrix}$$

$$\Lambda_R(n;\mathsf{H},a)=\sum_{\substack{d\\ n\in\Omega_{\mathsf{H}}(d)}}\lambda_R(d;a)=\frac{1}{a!}\sum_{\substack{d|P(n;\mathsf{H})\\ d\leq R}}\mu(d)\left(\log\frac{R}{d}\right)^a$$

Sea $\varpi(n)$ igual a $\log n$ si $n\in P$ y nulo de lo contrario, similar a la de Von Mangoldt, salvo en las potencias de los primos. Ahora definimos

$$S:=\sum_{\substack{\mathsf{H}\subset[1,H]\\ \#\mathsf{H}=k}}\sum_{N<n\leq 2N}\left(\sum_{h\leq H}\varpi(n+h)-\log 3N\right)\Lambda_R(n;\mathsf{H},k+l)^2.$$

Observemos que si $S>0$ alguno de los sumando debería ser no nulo, y como $\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2$ nunca es negativo, esto es equivalente a que para algún $n\in[N,2N]$

$$\sum_{h\leq H}\varpi(n+h)>\log 3N,$$

de donde vemos que al menos dos números en el intervalo $[n,n+H]$ deberían ser primos, por que $h\leq H$ y $n\leq 2N$ implican que $\varpi(n+h)\leq\log 3N$. Tendremos entonces que

$$(*)\quad \min_{p_i,\,p_{i+1}\in(N,2\mathrm{N}]}(p_{i+1}-p_i)\leq H.$$

Para evaluar S necesitamos de los siguientes dos resultados.

Lema 3.3.1 Se tiene que

$$\sum_{N<n\leq 2\mathrm{N}}\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2=\frac{G(\mathcal{H})}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}N(\log R)^{k+2l}+O(N(\log N)^{k+2l-1}(\log\log N)^C).$$

Lema 3.3.2 Si θ es un valor permitido para el nivel de distribución de los primos y $R\leq N^{\theta/2}$, se cumple que

$$\sum_{N<n\leq 2\mathrm{N}}\varpi(n+h)\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2=$$

$$\begin{cases}\dfrac{G(\mathcal{H}\cup\{h\})}{(k+2l)!}\dbinom{2l}{l}N(\log R)^{k+2l}+O(N(\log N)^{k+2l-1}(\log\log N)^C) & si\, h\notin\mathcal{H}\\ \dfrac{G(\mathcal{H})}{(k+2l+1)!}\dbinom{2(l+1)}{l+1}N(\log R)^{k+2l+1}+O(N(\log N)^{k+2l}(\log\log N)^C) & si\, h\in\mathcal{H}.\end{cases}$$

Un bosquejo de una demostración corta pero con gran dificultad técnica se puede encontrar en [4], aquí proseguiremos directamente con la demostración de GPY.

Teorema 3.3.3 *(Saltos Inusualmente Pequeños Entre Primos Consecutivos, Goldston-Pintz-Yildirim)*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n}=0.$$

Demostración. Evaluemos

$$S:=\sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\ \#\mathcal{H}=k}}\sum_{N<n\leq 2\mathrm{N}}\left(\sum_{h\leq H}\varpi(n+h)-\log 3N\right)\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2.$$

Primero quitamos los paréntesis

$$(1)\quad S=\sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\ \#\mathcal{H}=k}}\sum_{h\le H}\sum_{N<n\le 2N}\varpi(n+h)\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2-\log 3\, N\sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\ \#\mathcal{H}=k}}\sum_{N<n\le 2N}\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2,$$

y tratamos el segundo término en base al lema 3.2.1

$$\sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\ \#\mathcal{H}=k}}\sum_{N<n\le 2N}\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2$$

$$=\sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\ \#\mathcal{H}=k}}\frac{G(\mathcal{H})}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}N(\log R)^{k+2l}+\sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\ \#\mathcal{H}=k}}O\left(N(\log N)^{k+2l-1}(\log\log N)^C\right),$$

aplicamos aquí un resultado de Gallagher en relación a $G(\cdot)$, que dice

$$(**)\quad \text{conforme}\quad H\to\infty,\ \sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\ \#\mathcal{H}=k}}G(\mathcal{H})=(1+o(1))H^k$$

el mismo se detalla en [3], y continuamos entonces con

$$=\frac{1}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}N(\log R)^{k+2l}(1+o(1))H^k+\sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\ \#\mathcal{H}=k}}O\left(N(\log N)^{k+2l-1}(\log\log N)^C\right).$$

observando que la cantidad de sumandos en el término de la derecha son menos que H^k llegamos a

$$(2)\quad \sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\ \#\mathcal{H}=k}}\sum_{N<n\le 2N}\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2=\frac{1}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}NH^k(\log R)^{k+2l}+o\left(NH^k(\log N)^{k+2l}\right).$$

Regresamos ahora a (1) para tratar con el primer término de la ecuación,

$$\sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\ \#\mathcal{H}=k}}\sum_{h\le H}\sum_{N<n\le 2N}\varpi(n+h)\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2$$

distinguimos entre los casos $h\notin\mathcal{H}$ y $h\in\mathcal{H}$,

$$\sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\ \#\mathcal{H}=k}}\sum_{\substack{h\le H\\ h\notin\mathcal{H}}}\sum_{N<n\le 2N}\varpi(n+h)\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2+\sum_{\substack{\mathcal{H}\subset[1,H]\\ \#\mathcal{H}=k}}\sum_{\substack{h\le H\\ h\in\mathcal{H}}}\sum_{N<n\le 2N}\varpi(n+h)\Lambda_R(n;\mathcal{H},k+l)^2$$

para aplicar los lemas 3.3.1 y 3.3.2 en los términos respectivos para proceder con $(**)$ y así obtener

$$(3)\quad \sum_{\substack{\mathsf{H}\subset[1,H]\\ \#\mathsf{H}=k}} \sum_{\substack{h\le H\\ h\notin\mathsf{H}}} \sum_{N<n\le 2N} \varpi(n+h)\Lambda_R(n;\mathsf{H},k+l)^2$$

$$=\sum_{\substack{\mathsf{H}\subset[1,H]\\ \#\mathsf{H}=k}} \sum_{\substack{h\le H\\ h\notin\mathsf{H}}} \left(\frac{G(\mathsf{H}\cup\{h\})}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}N(\log R)^{k+2l}+O\left(N(\log N)^{k+2l-1}(\log\log N)^C\right)\right)$$

$$=\sum_{\substack{\mathsf{H}\subset[1,H]\\ \#\mathsf{H}=k}} \sum_{\substack{h\le H\\ h\notin\mathsf{H}}} \left(\frac{G(\mathsf{H}\cup\{h\})}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}N(\log R)^{k+2l}\right)+\sum_{\substack{\mathsf{H}\subset[1,H]\\ \#\mathsf{H}=k}} \sum_{\substack{h\le H\\ h\notin\mathsf{H}}} O\left(N(\log N)^{k+2l-1}(\log\log N)^C\right)$$

$$=\frac{k+1}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}N(\log R)^{k+2l}\sum_{\substack{\mathsf{H}\subset[1,H]\\ \#\mathsf{H}=k+1}} G(\mathsf{H})+O\left(N H^{k+1}(\log N)^{k+2l-1}(\log\log N)^C\right)$$

$$=\frac{k+1}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}N(\log R)^{k+2l}(1+o(1))H^{k+1}+O\left(N H^{k+1}(\log N)^{k+2l-1}(\log\log N)^C\right)$$

$$=\frac{k+1}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}N H^{k+1}(\log R)^{k+2l}+o\left(N H^{k+1}(\log N)^{k+2l}\right)$$

debido a que $H \ll \log N$, el error es $o\left(N H^k(\log N)^{k+2l+1}\right)$. Por otra parte

$$(4)\quad \sum_{\substack{\mathsf{H}\subset[1,H]\\ \#\mathsf{H}=k}} \sum_{\substack{h\le H\\ h\in\mathsf{H}}} \sum_{N<n\le 2N} \varpi(n+h)\Lambda_R(n;\mathsf{H},k+l)^2$$

$$=\sum_{\substack{\mathsf{H}\subset[1,H]\\ \#\mathsf{H}=k}} \sum_{\substack{h\le H\\ h\in\mathsf{H}}} \left(\frac{G(\mathsf{H})}{(k+2l+1)!}\binom{2(l+1)}{l+1}N(\log R)^{k+2l+1}+O\left(N(\log N)^{k+2l}(\log\log N)^C\right)\right)$$

$$=\sum_{\substack{\mathsf{H}\subset[1,H]\\ \#\mathsf{H}=k}} \sum_{\substack{h\le H\\ h\in\mathsf{H}}} \left(\frac{G(\mathsf{H})}{(k+2l+1)!}\binom{2(l+1)}{l+1}N(\log R)^{k+2l+1}\right)+\sum_{\substack{\mathsf{H}\subset[1,H]\\ \#\mathsf{H}=k}} \sum_{\substack{h\le H\\ h\in\mathsf{H}}} O\left(N(\log N)^{k+2l}(\log\log N)^C\right)$$

$$=\frac{1}{(k+2l+1)!}\binom{2(l+1)}{l+1}N(\log R)^{k+2l+1}k\sum_{\substack{\mathsf{H}\subset[1,H]\\ \#\mathsf{H}=k}} G(\mathsf{H})+O\left(N H^k(\log N)^{k+2l}(\log\log N)^C\right)$$

$$=\frac{k}{(k+2l+1)!}\binom{2(l+1)}{l+1}N(\log R)^{k+2l+1}(1+o(1))H^k+O\left(N H^k(\log N)^{k+2l}(\log\log N)^C\right)$$

$$=\frac{k}{(k+2l+1)!}\binom{2(l+1)}{l+1}N H^k(\log R)^{k+2l+1}+o\left(N H^k(\log N)^{k+2l+1}\right)$$

De acuerdo a (2), (3) y (4) vemos que

$$\sum_{\substack{\mathsf{H}\subset[1,H]\\ \#\mathsf{H}=k}} \sum_{N<n\le 2N} \left(\sum_{h\le H}\varpi(n+h)-\log 3N\right)\Lambda_R(n;\mathsf{H},k+l)^2$$

$$=\frac{k+1}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}NH^{k+1}(\log R)^{k+2l}+\frac{k}{(k+2l+1)!}\binom{2(l+1)}{l+1}NH^{k}(\log R)^{k+2l+1}$$
$$-\frac{1}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}NH^{k}(\log N)(\log R)^{k+2l}+o(NH^{k}(\log N)^{k+2l+1})$$
$$\sim\left((k+1)\frac{H}{\log N}+\frac{k}{k+2l+1}\cdot\frac{2(2l+1)}{l+1}\frac{\log R}{\log N}-1\right)\frac{1}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}NH^{k}(\log R)^{k+2l}\log N .$$

que es positivo siempre y cuando

$$\left((k+1)\frac{H}{\log N}+\frac{k}{k+2l+1}\frac{2(2l+1)}{l+1}\frac{\log R}{\log N}-1\right)>0 ,$$

según nuestra elección de R (lema 3.3.2), esto pasa sí

$$\frac{(k+1)H}{\log N}>1-\frac{k}{k+2l+1}\frac{2(2l+1)}{l+1}\frac{\log R}{\log N}=1-\frac{k}{k+2l+1}\frac{2(2l+1)}{l+1}\frac{\theta}{2} .$$

Dado $\varepsilon>0$, podemos escoger H de manera que se satisfaga lo anterior tomando

$$(5)\ \frac{H}{\log N}=1+\varepsilon-\frac{k}{k+2l+1}\frac{2(2l+1)}{l+1}\frac{\theta}{2} -$$

Como mencionamos antes, esto implica que se cumple $(*)$, que implica a su vez

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n} < \lim_{N\to\infty}\frac{H}{\log N} .$$

Si además tomamos $l=[\sqrt{k}]$ y hacemos tender k al infinito lentamente, de (5) llegamos a que

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n} \le \max\{0,1+\varepsilon-2\theta\}$$

De acuerdo al teorema de Bombieri-Vinogradov, θ se puede tomar tan cercano a $1/2$ como queramos. Lo que implica que

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n} \le \max\{0,\varepsilon\} ,$$

como esto se cumple para cualquier $\varepsilon>0$, llegamos a lo que queríamos demostrar. □

Así hemos concluido con el teorema principal de este trabajo, mismo del que hablamos en el primer capítulo. Es interesante como contrasta el mismo con el teorema de los números primos; por un lado la distribución de los primos es tan regular que nos es difícil distinguir entre las gráficas de $\pi(x)$ y de las funciones $x/\log x$ y li x , y por otro, la sucesión R_n tiene infinitos puntos de acumulación y estos van desde 0 hasta ∞ .

Apéndice A

Sumación Parcial

A.1 Sumación Parcial

Teorema A.1.1 Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, y S la función sobre $\mathbb{Z}$ definida por:

$$S(x)=\sum_{n\leq x} a_n$$

Si $a_i=0$ siempre que $i<n_0$, para algún entero positivo n_0, y si f tiene derivada continua en el intervalo $[n_{0,}\infty]$, para $x>n_0$ se tiene

$$\sum_{n\leq x} a_n f(n)=S(x)f(x)-\int_{n_0}^{x} S(t)f'(t)\,dt$$

Demostración. Apelando al hecho de que $a_n=S(n)-S(n-1)$ tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} a_n f(n) &= \sum_{n\leq x} S(n)f(n)-\sum_{n\leq x} S(n-1)f(n)\\ &= \sum_{n\leq x} S(n)f(n)-\sum_{n\leq x-1} S(n)f(n+1)\\ &= S(x)f(x)-\sum_{n\leq x-1} S(n)(f(n+1)-f(n))\\ &= S(x)f(x)-\sum_{n\leq x-1} S(n)\int_{n}^{n+1} f'(t)\,dt\end{aligned}$$

ya que S es constante en cada intervalo $[n,n+1]$ en realidad tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} a_n f(n) &= S(x)f(x)-\sum_{n\leq x-1}\int_{n}^{n+1} S(n)f'(t)\,dt\\ &= S(x)f(x)-\int_{n_0}^{x} S(t)f'(t)\,dt\end{aligned}$$

Lo que cuncluye el problema. □

A.2 Ejemplos

Para ejemplificar la aplicación en la práctica de la técnica de sumación parcial recurriremos a un resultado clasicos.

Teorema A.2.1 (*Serie Armónica*) Se cumple que

$$\sum_{n\leq N}\frac{1}{n}\sim\log N$$

en particular, esta serie diverge.

Demostración. Sea $a_n=1$ y $f(t)=1/t$, según el teorema A.1.1 se tiene que

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}=N(1/N)-\int_1^N[t]\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=1+\int_1^N[t]\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$$

debido a que $(t-1)\leq[t]\leq t$, se tiene que

$$\int_1^N\frac{t-1}{t^2}dt\leq\int_1^N[t]\left(\frac{1}{t^2}\right)dt\leq\int_1^N\frac{1}{t}dt$$

evaluamos ambas integrales

$$\log N-(1-1/N)\leq\int_1^N[t]\left(\frac{1}{t^2}\right)dt\leq\log N$$

así que

$$\log N+1/N\leq\sum_{n\leq N}\frac{1}{n}\leq\log N+1$$

con lo que concluimos el problema. □

Teorema A.2.2 Si $r>1$, entonces

$$\sum_{n\leq N}\frac{1}{n^r}\ \text{converge}$$

Demostración. Sea $a_n=1$ y $f(t)=1/t^r$, por A.1.1 se tiene

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n^r}=N(1/N^r)-\int_1^N[t]\left(-\frac{r}{t^{r+1}}\right)dt=1+\int_1^N[t]\left(\frac{r}{t^{r+1}}\right)dt$$

como $[t]\leq t$, se tiene que

$$\int_1^N [t]\left(\frac{r}{t^{r+1}}\right)dt \leq \int_1^N \frac{r}{t^r}\,dt$$

evaluamos la integral de la derecha

$$\int_1^N [t]\left(\frac{r}{t^{r+1}}\right)dt \leq \frac{r}{r-1}\left(1-\frac{1}{N^{r-1}}\right) < \frac{r}{r-1}$$

así que

$$\sum_{n\leq N} \frac{1}{n^r} \leq \frac{r}{r-1}$$

y por lo tanto converge. □

Teorema A.2.3 Se cumple que

$$\sum_{n\leq x} \log n \sim x \log x$$

Demostración. Sea $a_n = 1$ y $f(t) = \log t$, por A.1.1 se tiene

$$\sum_{n\leq x} \log n = x \log x - \int_1^x [t]\left(\frac{1}{t}\right)dt$$

como $[t] \leq t$, se tiene que

$$0 \leq \int_1^x [t]\left(\frac{1}{t}\right)dt \leq \int_1^x t\left(\frac{1}{t}\right)dt = x-1\ .$$

y como $x-1 = o(x \log x)$, concluimos el problema. □

Apéndice B

Funciones Aritméticas

B.1 La Función de Möbius

La función de Möbius, denotada por $\mu(\cdot)$, está definida en los enteros positivos por las siguientes propiedades:

1) $\mu(1)=1$
   si p es primo
2) $\mu(p)=-1$ y
3) $\mu(p^a)=0$ para $a\geq 2$
4) $\mu(\cdot)$ es multiplicativa

De manera inmediata podemos observar que si n no es libre de cuadrado, se tiene que $\mu(n)=0$, y si n es el producto de k primos distintos, entonces $\mu(n)=(-1)^k$.

Lema B.1.1 *(La propiedad fundamental de la función de Möbius)*

$$\sum_{d|n}\mu(d)=0\ .$$

Demostración. Sea $n=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ la factorización única de n en potencias de primos distintos. Sea $N=p_1\dots p_k$ (*i.e.* el radical de n). Ya que los únicos términos en la suma que no se anulan son aquellos en los que d es libre de cuadrado, tenemos

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|N}\mu(d)\ .$$

Podemos pensar el lado derecho de la ecuación de una manera sencilla mediante un par de consideraciónes. Si para cada subconjunto I de $K=\{1,\dots,k\}$ denotamos $N_I:=\prod_{i\in I}p_i$, tenemos lo siguiente

$$\sum_{d|N}\mu(d)=\sum_{I\subset K}\mu(N_I)\ ,$$

que puede ser evaluado fácilmente mediante el teorema del binomio de Newton

$$\sum_{I\subset K}\mu(N_I)=\sum_{I\subset K}(-1)^{\# I}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}=(1+(-1))^k=0$$

con lo que concluimos la demostración.□

A partir del lema B.1.1 podemos obtener una relación de extrema utilidad. Misma que constiye la base de las cribas de Eratosthenes y de Brun.

Lema B.1.2 *(Formula de inversión de Möbius)* Sean f y g dos funciones aritméticas. Entonces

$$f(n)=\sum_{d|n}g(d)$$

si y sólo si

$$g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f(n/d).$$

Demostración. Debido a que la demostración de ambas implicaciones es similar, aquí supondremos la primera ecuación como cierta y probaremos que se cumple la segunda.

Dando por hecho la primera ecuación, podemos reescribir el lado derecho de la segunda de la siguiente manera

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(n/d)=\sum_{d|n}\mu(n/d)f(d)=\sum_{d|n}\mu(n/d)\sum_{d_1|d}g(d_1),$$

reordenando los terminos de la última suma, obtenemos lo siguiente

$$\sum_{d|n}\mu(n/d)\sum_{d_1|d}g(d_1)=\sum_{d_1|n}g(d_1)\sum_{d_1|d|n}\mu(n/d)=\sum_{d_1|n}g(d_1)\sum_{d_2|m}\mu(m/d_2),$$

en donde $m=n/d_1$ y $d_2=d/d_1$. Por el lema B.1.1, la suma que aparece en el último término de la ecuación es distinta de cero sólo cuando $m=1$, es decir, cuando $d_1=n$, entonces tenemos

$$\sum_{d_1|n}g(d_1)\sum_{d_2|m}\mu(m/d_2)=g(d)$$

con lo que concluimos. □

B.2 La Función de Von Mangoldt

La función de Von Mangoldt se denota por $\Lambda(\cdot)$, y se define como $\Lambda(n)=\log n$ si $n=p^k$ para algunos $p\in P$ y $k\in\mathbb{N}$. Esta función cumple lo siguiente propiedad que resulta de gran utilidad.

Lema B.2.1 *(La propiedad fundamental de la función de Von Mangoldt)* Para cualquier $n\in\mathbb{Z}$ se cumple que

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$$

Demostración. Sólo basta eliminar los términos que se anulan y contar para cada $p \in P$ cuántas veces aparece en la suma el término $\log p$, tenemos

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{p^k|n} \Lambda(p^k) = \sum_{p^k|n} \log p = \sum_{p^k|n} \log p = \sum_{p|n} \nu_p(n) \log p$$

$$= \sum_{p|n} \log\left(p^{\nu_p(n)}\right) = \log \prod_{p|n} p^{\nu_p(n)} = \log n$$

□

Bibliografía

[1] P. Pollack, *Not always buried deep: a second course in elementary number theory.* American Mathematical Society. 2004

[2] A.C. Cojocaru & M.R. Murty, *An introduction to sieve methods and their aplications,* Cambridge University Press, 2005.

[3] P. X. Gallagher, *On the distribution of primes in short intervals*, Mathematika 23 (1976), no. 1, 4-9; Corrigendum, ibid, 26 (1981), 86.

[4] D. A. Goldston, Y. Motohashi, J. Pintz, C.Y. Yıldırım *Small gaps between primes exist,* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume 82, N. 4 (2006), 61-65.