Universidad Nacional de Tucumán
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología

Lógica de Proposiciones y de Predicado

Franco D. Menendez
LABIA
FACET - UNT

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

»Grafos: Definiciones y Ejemplos. Representación Matricial. Adyacencia de Nodos y Aristas. SubGrafos, Complementos e Isomorfismos de Grafos. Grado de un Vértices. Recorridos y Circuitos Eulerianos. Grafos Planos. Grafos Bipartitos. Grafos Coloreados. Aplicaciones y Ejemplos.

»Árboles: Definiciones, propiedades y ejemplos. Árboles con Raíz. Árboles Binarios. Búsqueda. Árboles Recubridores. Árboles

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

ISOMORFISMO DE GRAFOS

Observemos los dos grafos que aparecen dibujados. En ambos casos, el conjunto de vértices es {1, 2, 3, 4}. Pero son grafos distintos: en un caso, el conjunto de aristas es {{1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, {4, 1}}, mientras que en el otro es {{1, 2}, {1, 3}, {2, 4}, {3, 4}}. Aún siendo distintos, estos dos grafos contienen, en cierto sentido, la misma información (un simple cambio de nombres transforma uno en el otro). En ambos casos, hablaríamos del “grafo del cuadrado”. Esta idea es la que pretendemos desarrollar en esta subsección

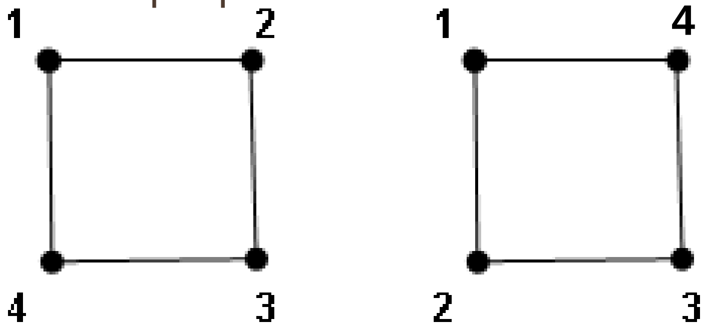


Figura 8: Grafos Isomorfos

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

ISOMORFISMO: *Sean **G** y **G'** dos grafos, con conjuntos de vértices y aristas* **(*V*, *A*)** *y* **(*V'*, *A'*)**, *respectivamente. Decimos que una aplicación biyectiva* $\boldsymbol{\varphi}: \boldsymbol{V \to V'}$ *es un* ***isomorfismo de grafos*** *si:*

$$\{v, w\} \in A \Leftrightarrow \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in A'.$$

Es decir, si φ *conserva las relaciones de vecindad entre vértices. Dos grafos se dicen* ***isomorfos*** *si existe una aplicación biyectiva entre sus conjuntos de vértices (un cambio de nombres, de etiquetas) que conserve las relaciones de vecindad: si dos vértices son adyacentes con el primer conjunto de etiquetas, tendrían que seguir siéndolo con el segundo*

En el caso de los dos grafos con los que abríamos esta subsección, el lector podría comprobar que la aplicación

$$\varphi: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$$

dada por $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 4$, $\varphi(3) = 2$ y $\varphi(4) = 3$ es un isomorfismo entre los dos grafos

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

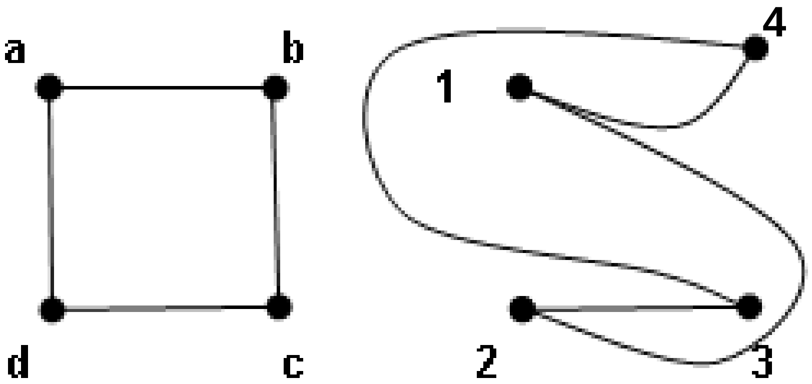


Figura 9: Grafos Isomorfos

»Los dos grafos que aparecen arriba también son isomorfos, pese a que la manera de dibujarlos no parezca indicarlo. Una manera de comprobar si dos grafos son isomorfos (que, por supuesto, habrían de tener el mismo número de vértices, digamos n), seria comprobar si alguna de las n! aplicaciones biyectivas entre los conjuntos de vértices respectivos cumple las propiedades necesarias para ser un isomorfismo entre los dos grafos. Pero esto, desde luego, no es un procedimiento razonable si n es grande

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

Sin embargo, para decidir que dos grafos no son isomorfos contamos con ciertas propiedades de un grafo que se han de conservar por isomorfismos:

1. Ambos grafos han de tener el mismo número de vértices (si no lo tienen, no podremos construir una aplicación biyectiva entre los conjuntos de vértices).

2. Cada vértice ha de mantener sus relaciones de vecindad. En particular, si $G = (V, A)$ y $G' = (V', A')$ son dos grafos isomorfos mediante φ, entonces, para cada $v \in V$:

$$\delta(v) = \delta(\varphi(v)).$$

3. Con más generalidad, si dos grafos son isomorfos, entonces han de tener la misma sucesión de grados. Sin embargo, el que dos grafos tengan la misma sucesión de grados no garantiza que sean isomorfos

4. La sucesión de grados ha de conservarse, y como sabemos que en todo grafo la suma de los grados coincide con (dos veces) el número de arista, deducimos que dos grafos isomorfos han de tener el mismo número de aristas.

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

ISOMORFISMO DE GRAFOS

Ejemplo: *Consideremos los dos grafos siguientes (nos olvidamos de las etiquetas de los vértices):*

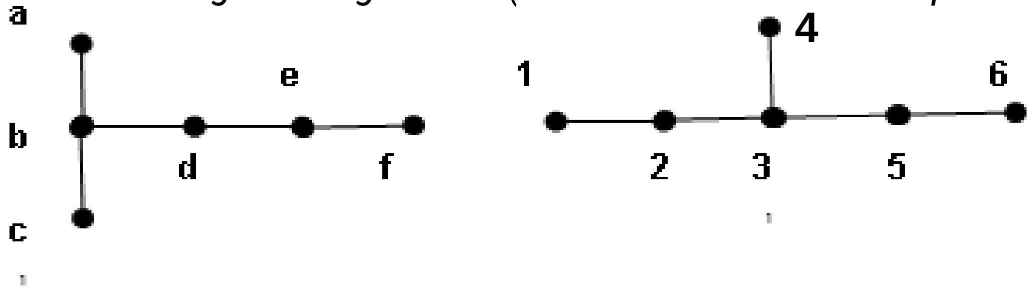


Figura 10: Grafos del Problema 4

Ambos grafos tienen seis vértices, cinco aristas y su sucesión de grados es (1, 1, 1, 2, 2, 3). Sin embargo, no son isomorfos pues, por ejemplo, el vértice de grado 3 es, en un caso, vecino de dos de grado 1 y de uno de grado 2; y en el otro, de uno de grado 1 y de dos de grado 2.

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

ISOMORFISMO DE GRAFOS

Hay otras propiedades que son conservadas bajo isomorfismos (todas las relacionadas con vecindades); por ejemplo, el llamado cuello de un grafo, del que hablaremos más adelante. Sin embargo, **no existe una caracterización** para el isomorfismo de dos grafos (una serie de propiedades que determinen si dos grafos son o no isomorfos).
El isomorfismo de dos grafos se puede interpretar también en términos de sus matrices correspondientes. Dados dos grafos ***G*** y ***G´***, con matrices de adyacencia ***M*** y ***M'***, respectivamente:

G y G´ son isomorfos ⇔ Existe una permutación tal que si la aplicamos sobre las filas y columnas de M, obtenemos M'.

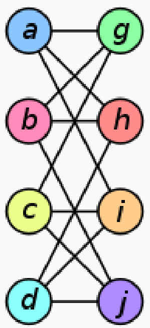
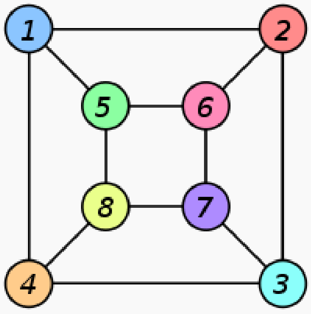
UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

ISOMORFISMO DE GRAFOS

Síntesis

un isomorfismo entre dos grafos G y H es una biyección f entre los conjuntos de sus vértices que preserva la relación de adyacencia. Es decir, cualquier par de vértices u y v de G son adyacentes si y solo si lo son sus imágenes, f(u) y f(v), en H.

A pesar de su diferente aspecto, los dos grafos que se muestran a continuación son isomorfos:

Grafo G	Grafo H	Un isomorfismo entre G y H
		$f(a)=1$ $f(b)=6$ $f(c)=8$ $f(d)=3$ $f(g)=5$ $f(h)=2$ $f(i)=4$ $f(j)=7$

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

CLASES DE GRAFOS

GRAFO LINEAL: Diremos que un grafo es un L_n un **grafo lineal** con n vértices ($n \geq 2$) si tiene n vértices (dos de grado 1 y el resto, si los hay, de grado 2) y es isomorfo a:

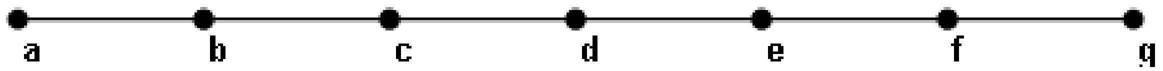
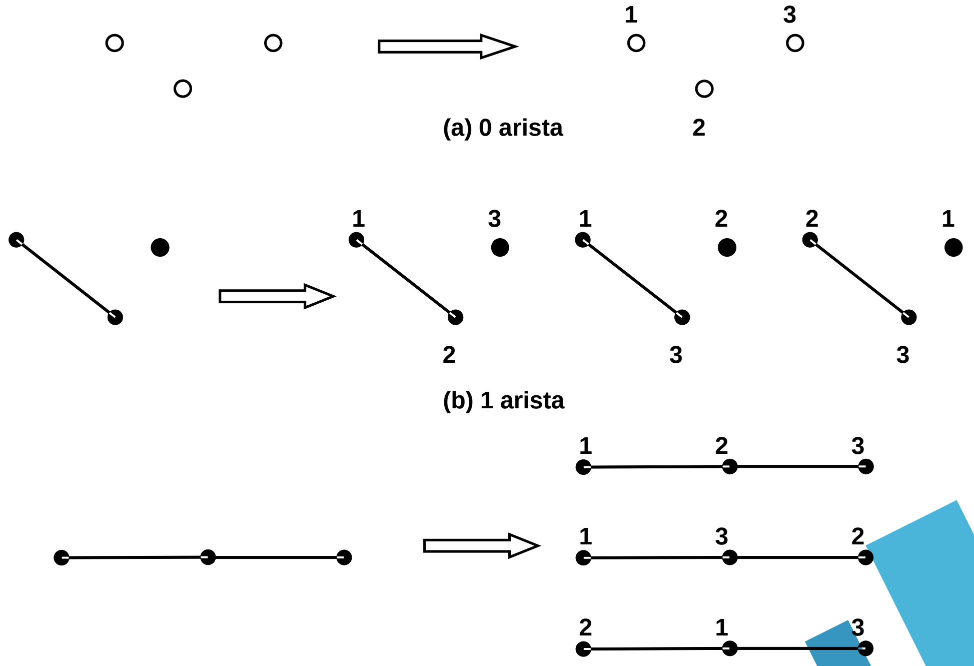


Figura 11: Grafo Lineal

Ejemplo : *Clasifiquemos por clases todos los grafos distintos que podemos formar con el conjunto de tres vértices* $V = \{1, 2, 3\}$, *en la Figura 12.*

Como hay tres posibles aristas, habría $2^3 = 8$ grafos distintos. Vistos salvo isomorfismos, ¿cuántos hay? Sin aristas, hay sólo uno. Con una arista, hay una única configuración, a la que corresponden tres grafos distintos, pues basta decidir qué vértice va solo. Con dos aristas hay, de nuevo, una única configuración (un único grafo salvo isomorfismo), aquél en el que los tres vértices forman una "cadena". En total, los 8 grafos distintos se engloban en cuatro clases, un grafo sin aristas, tres grafos distintos con una arista, otros tres con dos aristas, y uno con las tres aristas.

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES



(a) 0 arista

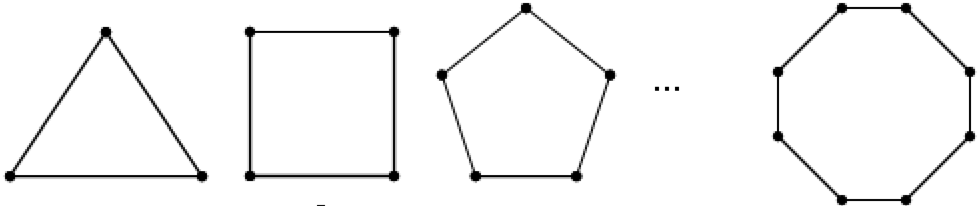
(b) 1 arista

(c) 2 aristas

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

CLASES DE GRAFOS

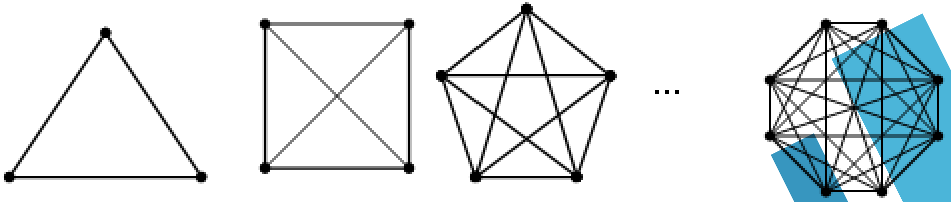
GRAFO CIRCULAR: *Otra clase de grafos muy relevante son los llamados* **grafos circulares** con ***n*** vértices (todos de grado 2), para $n \geq 3$, que denotaremos por $\boldsymbol{C_n}$:



C_3 C_4 C_5 C_8

Figura 13: Grafo Circular

GRAFO COMPLETO: *Si un grafo con n vértices tiene todas las ($n \geq 2$) combinaciones de posibles aristas, diremos que estamos ante el grafo completo con n vértices, Kn:*



K_3 K_4 K_5 K_8

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

CLASES DE GRAFOS

GRAFO VACIO: En los otros extremos encontramos los **grafos vacíos** N_n, con n vértices y ninguna arista.

GRAFO BIPARTITO: Una clase de grafos que tienen relevancia en diversos problemas (por ejemplo, en los problemas de asignación de tareas), son los llamados **grafos bipartitos**. Se trata de aquéllos en los que podemos partir el conjunto de vértices en dos clases, de manera que no haya aristas entre vértices de la misma clase. Un caso particular son los **grafos bipartitos completos**, que nombraremos como ***Kr,s***. En el dibujo de la derecha aparece un $K_{4,6}$. Un grafo ***Kr,s*** consta de $r+s$ vértices, divididos en dos clases; e incluye las $r \times s$ aristas que van de los vértices de un tipo a los del otro. Obsérvese que un grafo bipartito con r vértices de un tipo y s de otro se puede obtener del ***Kr,s*** escogiendo un subconjunto de las aristas.

Bipartito: *Un Grafo* $G = (V, A)$ ***es bipartito*** *si* $V = V_1 \cup V_2$ *y* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ *y cada arista de* G *es de la forma* $[a, b]$ *con* $a \in V_1$ *y con* $b \in V_2$. *Si cada vértice de* V_1 *está unido con los vértices de* V_2 *se tiene un grafo bipartito completo.*

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

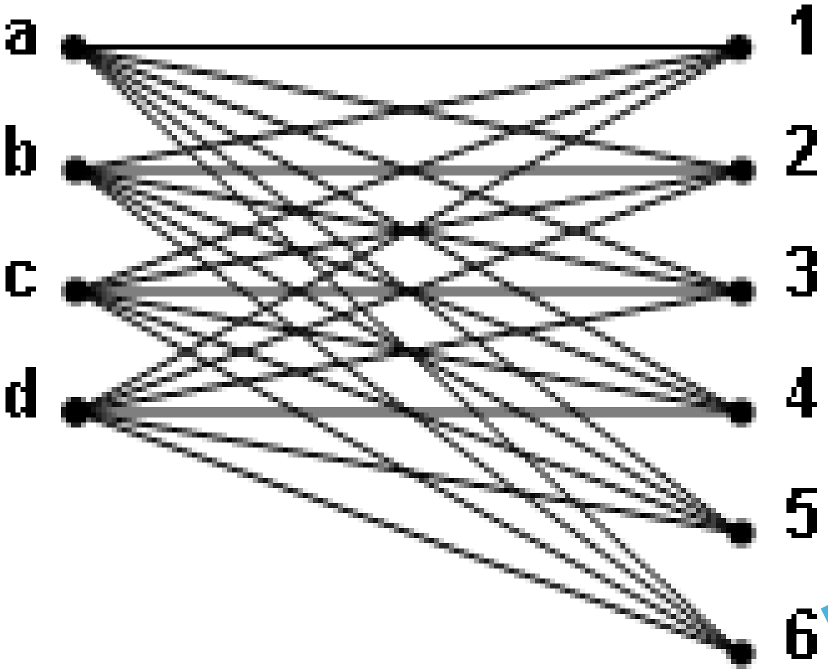


Figura 15: Grafo Bipartito

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

CONEXIÓN DE GRAFOS

Consideremos los dos siguientes grafos:

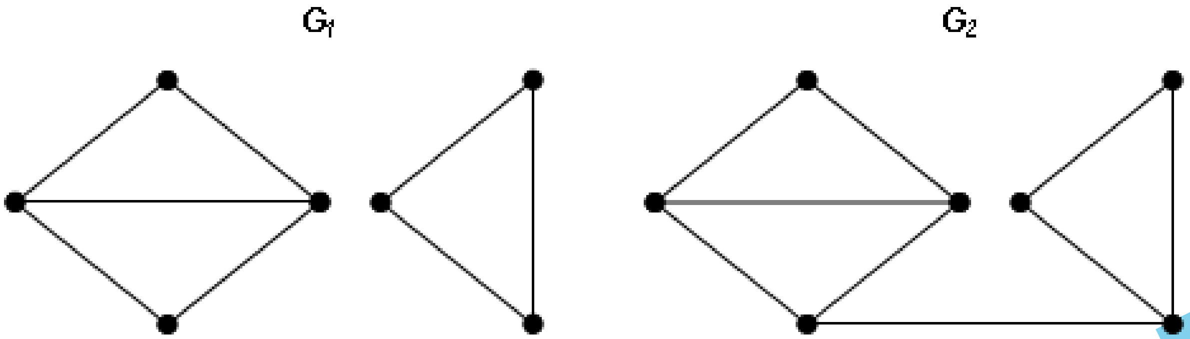


Figura 17: Conectividad en Grafo

¿En qué se diferencian? Parece claro que en el de la derecha las aristas del grafo nos permiten "llegar" de un vértice a cualquier otro; algo que no podemos hacer en el de la izquierda. El objetivo de esta subsección es el de entender el concepto de "conexión" en grafos.

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

CONEXIÓN DE GRAFOS

Camino: *Sean x, y vértices (no necesariamente distintos) de un grafo* **G = (V, A)**. *Un* **camino x – y** *en* **G** *es una sucesión alternada finita (sin lazos):*

$$x = x_0, a_1, x_1, a_2, x_2, a_3 \dots a_{n-1}, x_{n-1}, a_n, x_n = y$$

de vértices y aristas de **G**, *que comienza en el vértice* **x** *y termina en el vértice* **y** *y que contiene las n aristas* $a_i = \{x_{i-1}, x_i\}$ *donde* $1 \leq i \leq n$.

La ***longitud de un camino es n***, *el número de aristas que hay en el camino. (Si n = 0, no existen aristas, x = y, y el camino se denomina* ***trivial.***

Cualquier camino x – y, donde x = y (y n > 1) es un ***camino cerrado***. *En caso contrario es un* ***camino abierto.***

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

CONEXIÓN DE GRAFOS

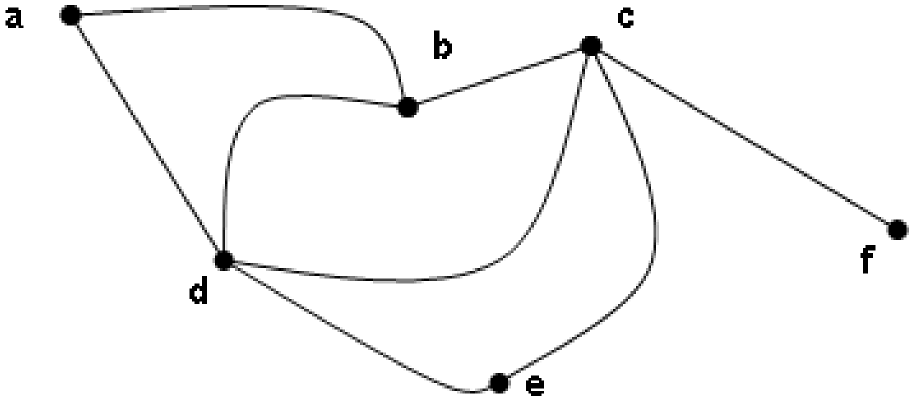


Figura 18: Grafo del Ejemplo

DEFINICIÓN 17.- *Consideremos un* ***camino x − y*** *en un grafo no dirigido* ***G = (V, A)****:*
Si no se repite ninguna arista en el camino x − y, entonces el camino es un ***recorrido x − y****. Un recorrido cerrado es un* ***circuito****.*
Cuando ningún vértice del camino x − y se presenta más de una vez,el camino es un ***camino simple*** *x − y.*
El término ***ciclo*** *se usa para describir un* ***camino simple cerrado*** *x − y.*

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

CONEXIÓN DE GRAFOS

Los términos que utilizamos aquí, paseo, camino, etc., podrían no coincidir con los usados en otros textos. Para un ***grafo dirigido*** utilizaremos el adjetivo ***dirigido***, como se usa, por ejemplo, en ***caminos dirigidos, caminos simples dirigidos*** y ***ciclos dirigidos.***

Cuello: *Si G es un grafo, se llama* ***cuello*** *del grafo G al mínimo de las longitudes de los ciclos de G.*

Tabla 2: Terminología de caminos en la Teoría de Grafos

Vértices Repetidos	Aristas Repetidas	Abierto	Cerrado	Nombres
Si	Si	Si		Camino
Si	Si		Si	Camino Cerrado
Si	No	Si		Recorrido
Si	No		Si	Circuito
No	No	Si		Camino Simple
No	No		Si	Ciclo

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

CONEXIÓN DE GRAFOS

TEOREMA 3: *Sea **G = (V, A)** un grafo no dirigido, con **a, b** $\in$ **V,** con **a** $\neq$ **b.** Si existe un recorrido (en G) de **a** a **b,** entonces existe un camino simple (en G) de **a** a **b**.*

Conexo: *Sea **G = (V, A)** un grafo no dirigido. Diremos que G es conexo si existe un camino simple entre cualesquiera dos vértices distintos de G.*

Ejemplo: En la Figura 19 tenemos un grafo no dirigido sobre *V = {a, b, c, d, e, f, g}*. Este grafo no es conexo ya que, por ejemplo, no existe un camino simple desde ***a*** a **e.** Sin embargo, el grafo esta compuesto por piezas, donde los conjuntos de vértices son V_1 = {a, b, c, d} y V_2 = {e, f, g} y los conjuntos de aristas son A_1 = {{a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, d}} y el conjunto A_2 = {{e, f}, {f, g}} que son conexos, estas piezas son las ***componentes conexas*** del grafo.

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

CONEXIÓN DE GRAFOS

Por lo tanto un grafo no dirigido ***G = (V, A)*** es ***disconexo*** si y solo si V puede separarse en al menos dos subconjuntos V_1 y V_2 tales que no haya una arista de A de la forma {x, y} donde $x \in V_1$, e $y \in V_2$,. Un grafo es conexo si y solo si tiene solamente una componente.

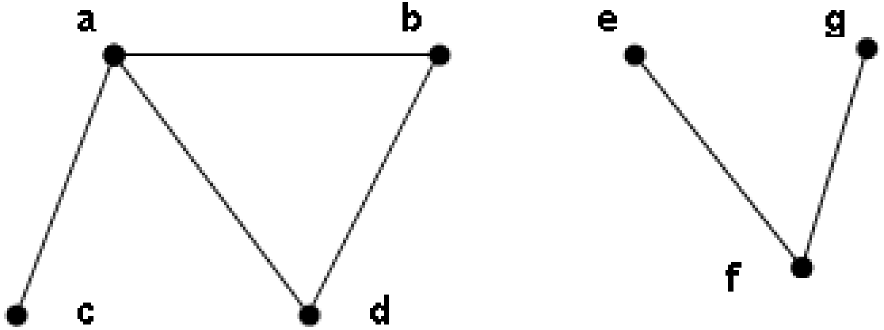


Figura 19: Grafo del Ejemplo

Componente Conexa: Dado un grafo **G = (V, A)**, una **componente conexa** de G sería el grafo que se obtiene al tomar todos los vértices que están en la componente conexa de un cierto vértice de V y todas las aristas del grafo que conectan estos vértices.

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

CONEXIÓN DE GRAFOS

DEFINICIÓN: *Para cualquier grafo* **G = (*V, A*)***, el número de* ***componentes conexas*** *de G se denota por* K **(G).**
Puente: *Diremos que una arista a de un grafo* **G** *es un* ***puente*** *si el grafo* **G \ {*a*}** *que se obtiene de* **G** *al quitar la arista a (y dejar los mismos vértices) tiene más componentes conexas que G.*
Por ejemplo, en el siguiente grafo conexo *a* es la única arista del grafo que es puente. En particular, si el grafo *G* de partida es conexo, entonces se tiene el siguiente resultado:

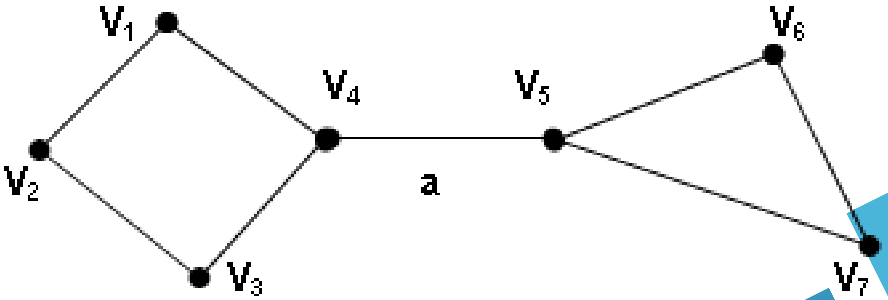


Figura 20: Puente a en el Grafo G

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

CONEXIÓN DE GRAFOS

LEMA 1.- *Si G es un grafo conexo y a es una arista puente de G, entonces G \ {a} tiene exactamente dos componentes conexas.*

PROPOSICIÓN 1.- *Si G es un grafo conexo, entonces*

$$|A(G)| \geq |V(G)| - 1.$$

PROPOSICIÓN 2.- *Si **G** es un grafo con **k** componentes conexas, entonces* $|A| \geq |V| - k$.

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

CAMINOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS

DEFINICIÓN: *Sea **G = (V, A)**, un grafo o multigrafo no dirigido sin vértices aislados. Entonces G tiene un circuito euleriano si existe un circuito de G que recorra cada arista del grafo exactamente una vez. Si existe un recorrido abierto de x a y en G que recorra cada arista de G exactamente una vez, este recorrido se denominara recorrido euleriano. Un camino euleriano es un camino simple que contiene todas las aristas de G.*

Ejemplo.- ¿Cuales de los grafos de la Figura 22 contienen un circuito euleriano? Entre aquellos que no lo contienen, ¿Cuáles contienen un camino euleriano?:

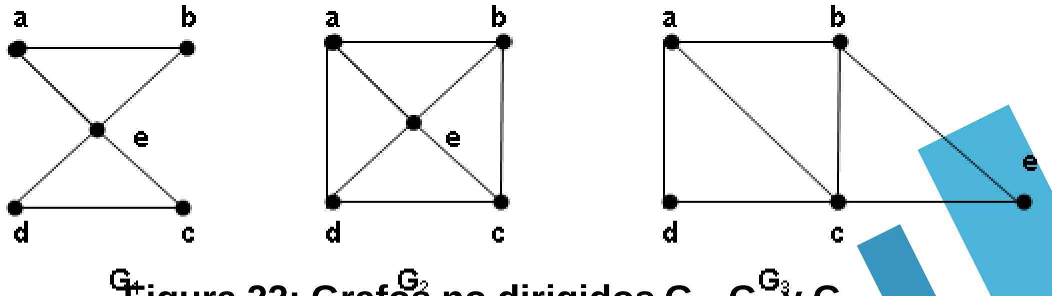


Figura 22: Grafos no dirigidos G_1, G_2 y G_3

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

CAMINOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS

TEOREMA: *Sea **G = (V, A)** un grafo o multigrafo no dirigido, sin vértices aislados. Entonces **G** tiene un **circuito euleriano** en G si y sólo si **G** es conexo y todo vértice de **G** tiene grado par.*

COROLARIO: *Sea **G = (V, A)** un grafo o multigrafo no dirigido, sin vértices aislados, entonces podemos construir un **recorrido euleriano** si y sólo si **G** es conexo y tiene exactamente dos vértice de **G** grado impar.*

Camino Hamiltoniano: *Se dice que un camino $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ del grafo **G = (V, A)**, es un **camino hamiltoniano** si $V = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ y $x_i \neq x_j$ para el siguiente rango $0 \leq i < j \leq n$.*

Circuito Hamiltoniano: *Se dice que un circuito $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_0$ (con $n>1$) del grafo **G = (V, A)** es un **circuito hamiltoniano** si la secuencia $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ es un camino hamiltoniano.*

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

CAMINOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS

Ejemplo: ¿Cuales de los grafos de la Figura 23 contienen un circuito hamiltoniano o sino un camino hamiltoniano?

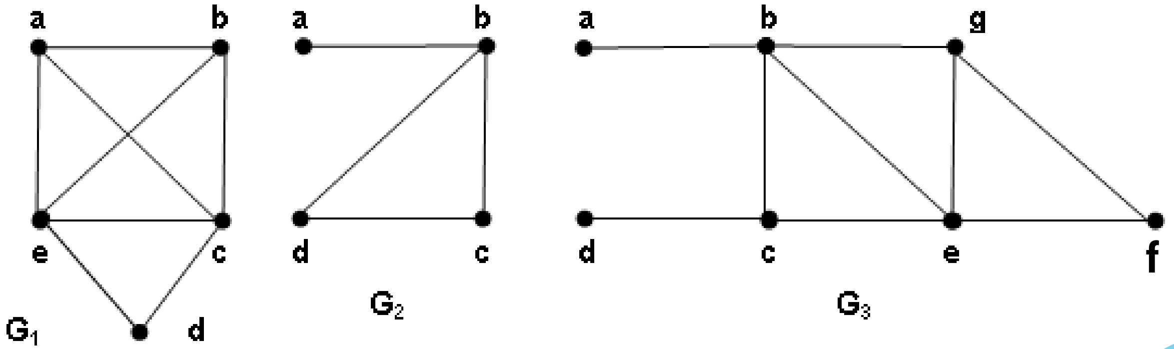


Figura 23: Grafos no dirigidos G_1, G_2 y G_3 con o sin caminos hamiltonianos

El grafo $\boldsymbol{G_1}$ contiene un circuito hamiltoniano, por ejemplo, ***a, b, c, d, e, a.*** No hay circuito hamiltoniano en $\boldsymbol{G_2}$ (esto puede verse porque cualquier circuito que pase por todos los vértices tiene que contener dos veces la arista {a, b}), pero $\boldsymbol{G_2}$ contiene un camino hamiltoniano, que es ***a, b, c, d.*** El grafo $\boldsymbol{G_3}$, no contiene ni un circuito hamiltoniano, ya que cualquier camino que pase por todos los vértices tiene que contener más de una vez a una de las siguientes aristas: ***{a, b}, {e, f}*** y ***{c, d}***

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

GRAFOS PLANOS

TEOREMA DE DIRAC: *Sea* ***G = (V, A)*** *un grafo simple con* ***n*** *vértices para* ***n*** $\geq$ ***3,*** *tal que todos los vértices de* ***G*** *tienen grado mayor o igual a* ***n/2****. Entonces* ***G*** *contiene un circuito hamiltoniano.*

TEOREMA DE ORE: *Sea* ***G = (V, A)*** *un grafo simple con n vértices para* ***n*** $\geq$ ***3****, tal que* $\delta(u) + \delta(v) \geq n$, *para cada par de vértices no adyacentes* ***u*** *y* ***v*** *de* ***G. Entonces*** ***G*** *tiene un circuito hamiltoniano..*

Grafo Plano: *Un grafo* ***G = (V, A)****, es* ***plano*** *si podemos dibujar a* ***G*** *en el plano de modo que sus aristas se intersequen sólo en los vértices de* ***G****. Este dibujo de* ***G*** *se conoce como una* ***inmersión (embebido o encaje)*** *de* ***G*** *en el plano*

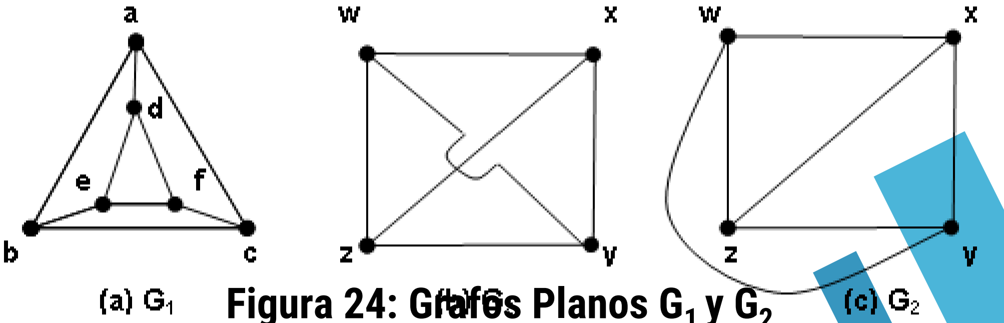


Figura 24: Grafos Planos G_1 y G_2

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

GRAFOS PLANOS

TEOREMA: *Sea **G = (V, A)** un grafo o multigrafo plano conexo con* $|V| = \nu$ *y* $|A| = a$. *Sea **r** el número de regiones en el plano determinadas por una inmersión (o representación) plana de **G**, una de estas regiones tiene un área infinita y se conoce como región infinita. Entonces:* $\nu - a + r = 2$

COROLARIO: *Sea **G = (V, A)** un grafo o multigrafo plano conexo sin lazos con los valores* $|V| = \nu$ *y* $|A| = a > 2$. *y **r** regiones. Entonces se deben cumplir las siguientes condiciones* $3r \leq 2a$ ***y*** $a \leq 3\nu - 6$.

Ejemplo: El grafo K_5 no tiene lazos y es conexo con 10 aristas y cinco vértices. En consecuencia: $3\nu - 6 = 15 - 6 = 9 < 10 = a$. Por lo tanto por el Corolario 5.2, vemos que K_5 no es plano.

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

ARBOLES: DEFIINICION Y CARACTERISTICAS

DEFINICIÓN 1.- *Un **árbol** es un grafo **conexo** y **sin ciclos**.*

En el mismo tono botánico, se define un **bosque** como un grafo sin ciclos (si es conexo, sería un árbol; si no lo es, sus componentes conexas serían árboles). Por ejemplo, los grafos lineales L_n son árboles, mientras que los circulares C_n o los completos K_n no lo son en cuanto $n \geq 3$. Los grafos bipartitos completos $K_{r,s}$, que son siempre conexos, sólo son árboles si $s = 1$ ó $r = 1$ (si $r \geq 2$ y $s \geq 2$ hay al menos un ciclo de orden cuatro).

Esta primera definición no recoge una de las características fundamentales de los árboles, que los hace especialmente útiles en ciertas cuestiones: son los conexos "más baratos" (en cuanto al número de aristas) que podemos tener. Los siguientes enunciados nos proporcionan caracterizaciones alternativas que recogen esta idea:

PROPOSICIÓN 1.- *Un grafo G es un árbol (un conexo sin ciclos) $\Leftrightarrow$ Es conexo y tiene la propiedad de que al eliminar una arista cualquiera del grafo, éste deja de ser conexo.*

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

ARBOLES: DEFINICION Y CARACTERISTICAS

PROPOSICIÓN 2.- *Un grafo **G** es un árbol (un conexo sin ciclos)* $\Leftrightarrow$ *No tiene ciclos y, si añadimos una arista cualquiera, se forma un ciclo.*

PROPOSICIÓN 3.- *Un grafo G es un árbol (un conexo sin ciclos)* $\Leftrightarrow$ *Es conexo y se cumple que:* ***|A(G)| = |V (G)| - 1.***

TEOREMA 1: *Todo árbol con* $|V| \geq 2$ *tiene, al menos, dos vértices de grado 1.*

Demostración: Supongamos que no hay vértices de grado 1, es decir, que $\delta(v) \geq 2$, para todo $v \in V$. Entonces,

$$2|V|-2=\sum_{v \in V}\delta(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V|$$

lo que resulta imposible. Pero tampoco puede ocurrir que haya un sólo vértice *w* de grado 1, porque tendríamos

$$2|V|-2=\sum_{v \in V}\delta(v)=\delta(w)+\sum_{v \neq w}\delta(v) \geq 1+2(|V|-1)=2|V|-1$$

Así que al menos ha de haber dos de grado 1.

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

ARBOLES DEFINICION Y CARACTERISTICAS

Ejemplo 1.- *¿Cómo son los árboles con **n** vértices que tienen el menor y el mayor número posible de vértices de grado 1?*

Sabemos que el mínimo número de vértices de grado 1 es 2. Así que, si un árbol con *n* vértices tiene exactamente dos vértices, digamos *w* y *u*, de grado 1, se cumplirá que

$$2n-2=\sum_{v\in V}\delta(v)=1+1+\sum_{v\neq u,w}\delta(v)$$

En la suma final tenemos ***n*−2** términos, todos ellos mayores o iguales que 2; la única forma de conseguir la igualdad será que $\boldsymbol{\delta(v) = 2}$ para todo $\boldsymbol{v \in V, v \neq u, w}$. Y esta configuración de grados es la del grafo lineal con ***n*** vértices, $\boldsymbol{L_n}$.

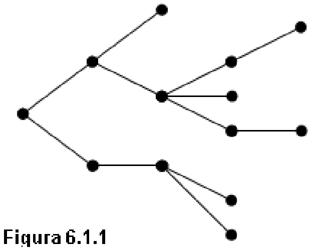


Figura 6.1.1

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

ARBOLES DEFINICION Y CARACTERISTICAS

En el otro extremo, es imposible que todos los vértices tengan grado 1 (pues no se cumpliría la fórmula de los grados). Pero sí podría ocurrir que hubiera ***n* – *1*** de grado 1. El vértice restante, **w,** tendría grado

$$2n-2=\sum_{v\in V}\delta(v)=(n-1)+\delta(w)\Rightarrow\delta(w)=n-1$$

que, por cierto, es el máximo grado que puede tener un vértice en un grafo con *n* vértices. En este caso, tenemos el grafo estrellado de la izquierda.

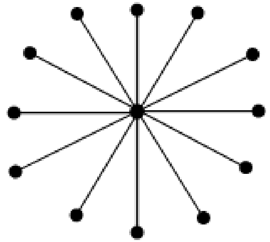


Figura 6.1.2

TEOREMA 2.- *Sea G = (V, A) un grafo no dirigido, entonces g es conexo si y sólo si G tiene un árbol recubridor.*

TEOREMA 3.- *Si a y b son vértices distintos en un árbol T = (V, A), entonces hay un único camino que conecta a esos vértices.*

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

NUMERO DE ARBOLES DIFERENTES

Ejemplo 2. Contemos el número de árboles distintos con 2, 3 y 4 vértices.

Si tenemos dos vértices, sólo cabe una posibilidad, que el árbol sea isomorfo a un *L*2. Y si el conjunto de vértices es **{1, 2}**, hay también un único árbol (los dos posibles etiquetados de los vértices dan el mismo resultado).
Los árboles con tres vértices también han de ser isomorfos al grafo lineal correspondiente, L3. Si el conjunto de vértices es {1, 2, 3}, basta con decidir qué símbolo va, por ejemplo, en la posición central (cuál es el vértice de grado 2). Esto se puede hacer de tres formas distintas, así que hay 3 árboles distintos con vértices {1, 2, 3}.
Vamos con el caso de cuatro vértices. Para asegurarnos de no olvidarnos ningún caso, ayudémonos de la relación:

$$\delta(v_1) + \delta(v_2) + \delta(v_3) + \delta(v_4) = 6.$$

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

NUMERO DE ARBOLES DIFERENTES

Ninguno de los cuatro números puede ser ≥ 4 (no puede haber vértices de grado 4) y un simple análisis nos lleva a concluir que sólo puede haber dos sucesiones de grados aceptables, ***(1, 1, 1, 3) y (1, 1, 2, 2).*** La primera de ellas se corresponde con el grafo que dibujamos a la izquierda y arriba, mientras que la segunda se traduce en el debajo. Para etiquetar el primer grafo con conjunto de vértices **{1, 2, 3, 4}**, observamos que basta con decidir el símbolo que va en la posición central; así que hay cuatro maneras distintas de hacerlo. El etiquetado del grafo de la derecha es un poco más delicado: elegimos primero los dos vértices de grado 2 (se puede hacer de ***(4 2)*** formas); y para cada elección de éstas, hay luego dos posibilidades para elegir los vecinos. En total, 12 maneras distintas. En resumen, con 4 vértices hay dos árboles no isomorfos y 16 árboles distintos con vértices **{1, 2, 3, 4}**.

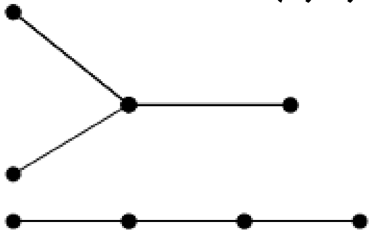


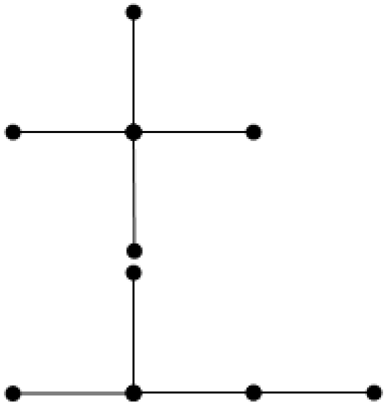
Figura 6.1.3

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

Ejemplo 3: Un poco más difícil: árboles con 5 vértices. Se debe cumplir que

$$\sum_{i=1}^{5} \delta(v_i) = 8$$

así que no puede haber vértices de grado 5 o mayor. Si hay de grado 4, la sucesión de grados ha de ser ***(1, 1, 1, 1, 4)***, a la que le corresponde un único árbol, el que aparece en la Figura 6.1.4 (a). Etiquetarlo con **{1, 2, 3, 4, 5}** es muy sencillo, pues basta decidir qué situamos en el vértice central: en total, 5 posibilidades.



Si no hay de grado 4, pero sí de grado 3, la única sucesión de grados posible es (1, 1, 1, 2, 3), y tenemos el grafo de la Figura 6.1.4 (b). Para etiquetarlo con {1, 2, 3, 4, 5}, fijamos el símbolo del vértice de grado 3 (5 posibilidades), el del vértice de grado 2 (4 posibilidades) y, finalmente, elegimos el vecino de grado 1 del vértice de grado 2 (3 posibilidades, las mismas que obtendríamos eligiendo los dos vecinos de grado 1 del vértice de grado 3). En total, 5 × 4 × 3 = 60 posibilidades. Por último, si no hay vértices de grado 3, entonces sólo podremos tener la sucesión de grados (1, 1, 2, 2, 2), que corresponde a un L5. Para etiquetarlo, elegimos el símbolo del vértice central (5 posibilidades), luego los otros dos de grado 2 ((4 2) = 6 posibilidades) y ya sólo quedan dos posibilidades para etiquetar los vértices finales. En total, 5 × 6 × 2 = 60 formas distintas.

Resumiendo, con 5 vértices hay tres árboles no isomorfos, y 125 árboles distintos con vértices **{1, 2, 3, 4, 5}.**

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

Tabla 1: Árboles No Isomorfos Y Distintos

n	*Árboles no isomorfos*	*Árboles distintos*
2	1	$1 = 2^0$
3	1	$3 = 3^1$
4	2	$16 = 4^2$
5	3	$125 = 5^3$
6	6	$1296 = 6^4$
7	11	$16807 = 7^5$
8	23	$32768 = 8^6$

TEOREMA 4.- (Cayley) *El número de árboles distintos que se pueden formar con el conjunto de vértices* **{1, . . . , *n*}** *es* n^{n-2}.

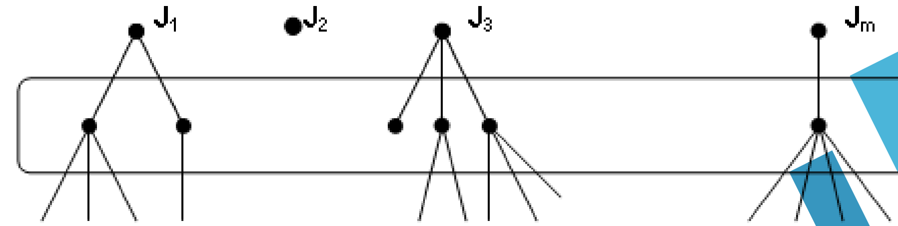


Figura 6.1.6

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

ARBOLES CON RAIZ

Se trata de un árbol en el que designamos un vértice especial, la raíz, que sirve de origen de coordenadas. Algunos de los algoritmos de optimización que hemos visto anteriormente producen estructuras de este tipo, donde la raíz es el vértice en el que comienza el algoritmo. En un árbol con raíz, los vértices se agrupan en niveles:

Nivel 0 = {raíz}
Nivel 1 = {vecinos de la raíz}
Nivel 2 = {vecinos de los vértices del nivel 1} \ {raíz}
Nivel 3 = {vecinos de los vértices del nivel 2} \ {Nivel 1}.
.....
Nivel j = {vecinos de los vértices del nivel j − 1} \ {Nivel j − 2}
....
...

Llamaremos a, la **altura del árbol**, al máximo nivel no vacío. Es importante recordar que el valor de a depende de la raíz elegida. Por ejemplo, si partimos del árbol que aparece dibujado en la Figura 6.2.1, cualquiera de sus vértices puede servir como raíz. Elegir, por ejemplo, el vértice 1 o el 3 lleva a que la altura del árbol sea 2 ó 4, como sugieren los siguientes esquemas, indicados en la Figura 6.2.1:

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

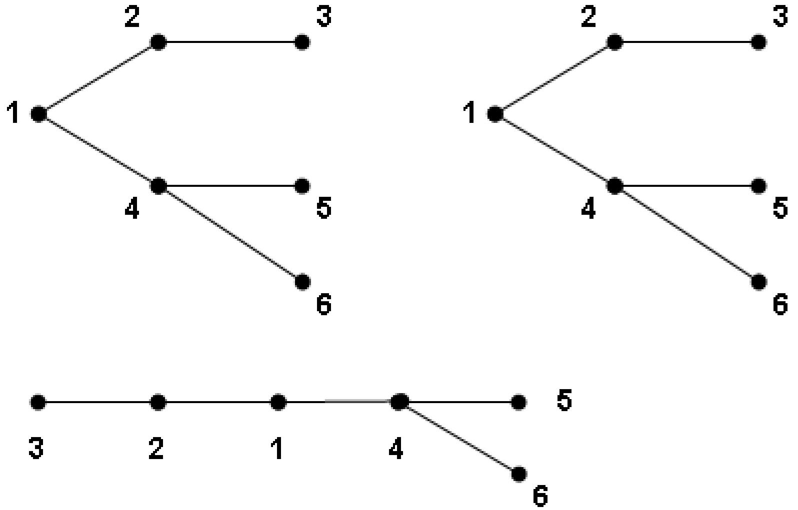


Figura 6.2.1

DEFINICIÓN 2. *Si G es un grafo no dirigido, entonces G es un* ***árbol dirigido*** *si el grafo no dirigido asociado con G es un árbol. Si G es un árbol dirigido, G es un* ***árbol con raíz*** *si existe un único vértice r en G, llamado* ***raíz****, tal que el grado de entrada de r es igual a* $\delta_E(r) = 0$ *y para todos los demás vértices v, el grado de entrada es* $\delta_E(r) = 1$

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

ARBOLES CON RAIZ

Definamos algunos conceptos:

Los **descendientes** de un vértice *v* son los vértices del nivel siguiente al de *v* que sean vecinos suyos (al vértice *v* se le dice **progenitor** de sus descendientes).

Un vértice es **hoja** de un árbol con raíz si no tiene descendientes.

Un árbol con raíz serla *q*-**ario** si cada progenitor tiene exactamente *q* descendientes (es decir, el número de descendientes es 0 si el vértice es hoja y *q* si es progenitor). Seria **casi** *q*-**ario** si el número de descendientes de cada vértice está comprendido entre 0 y *q*.

Los parámetros que manejaremos en un árbol con raíz serán

»el número de vértices, ***n***;

»la altura del árbol, ***a***;

»el número de hojas, ***h***;

»y el tipo de árbol, definido por el entero positivo ***q*** (podría ser *q*-ario o casi *q*-ario).

La importancia de estos árboles con raíz radica en que se utilizan para representar algoritmos en los que intervienen operaciones binarias (o *q*-arias) sucesivas. Veamos algunos ejemplos.

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

ARBOLES CON RAIZ

Ejemplo 5: **Un árbol de decisión**.

Tenemos 4 monedas, {1, 2, 3, 4}, y, a lo sumo, una de ellas no tiene el peso correcto (no es legal). Disponemos además de una moneda patrón, la 0, con el peso correcto. El problema es el siguiente: con una balanza, que tiene tres resultados posibles, queremos averiguar de la manera más económica posible (con menos usos de la balanza) cuál es la no legal. Podemos, por supuesto, comparar sucesivamente la moneda patrón con las otras cuatro. Este procedimiento emplea, en el peor de los casos, cuatro pesadas para obtener la respuesta (aunque a veces la podamos obtener con menos). Diseñemos un procedimiento alternativo, el que se recoge en el siguiente esquema:

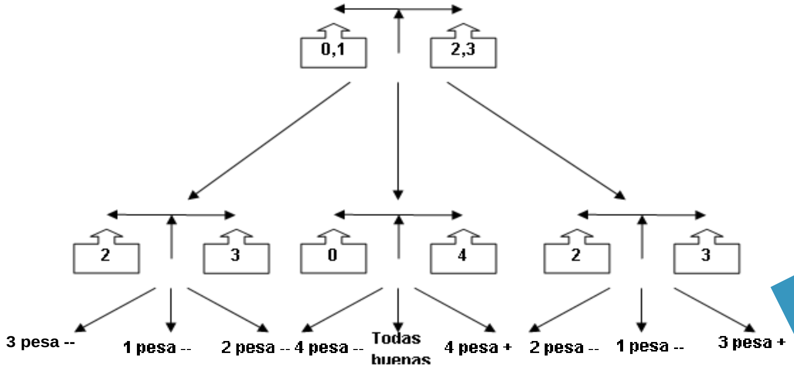


Figura 6.2.2

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

RELACION ENTRE A Y H EN UN ARBOL Q-ARIO

En los ejemplos anteriores, la clave para que los algoritmos (representados por árboles *q*-arios, o casi *q*-arios) funcionaran era que el número de hojas cubriera todas las posibles respuestas. Estos dos parámetros, la altura y el número de hojas, no son independientes, y las cotas que obtendremos nos permitirán establecer estimaciones *a priori* sobre, por ejemplo, el mínimo número de pasos que puede tener un cierto algoritmo.

Supongamos fijados a y q. Queremos estimar el número de hojas que puede tener un árbol con raíz con esas características. Parece que la configuración con mayor número de hojas es aquélla en la que *todas* las hojas están en el último nivel. En el otro extremo, el árbol *q*-ario con menor número de hojas (para a fijo) seria aquél en el que las hojas van apareciendo lo antes posible.

Esto nos sugiere, por un lado, que $h \leq q^a$. Para la otra situación extrema, como en cada nivel, desde el 1 hasta el $a - 1$, aparecen $q - 1$ hojas nuevas y en el nivel a hay q hojas, sospechamos que

$$h \geq (a - 1)(q - 1) + q = (q - 1)a + 1.$$

PROPOSICIÓN 4.- *En todo árbol con raíz casi q-ario,* $h \leq q^a$.

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

RELACION ENTRE A Y H EN UN ARBOL Q-ARIO

PROPOSICIÓN 5.- *En todo árbol con raíz q-ario, **h = s (q – 1) + 1**, donde **s** es el número de vértices interiores del árbol (esto es, con descendientes).*

Como $a \geq s$ (porque en cada nivel, desde el 0 hasta el ***a* – 1**, ha de haber al menos un vértice interior), deducimos que $h \geq a\,(q - 1) + 1$, como afirmábamos antes.

Ejemplo 8.- *Apliquémoslas al algoritmo para ordenar n números con comparaciones binarias.*

El número de resultados posibles es *n*!, así que necesitaremos que

$$2^{\#pasos} \geq n! \Rightarrow \#\,pasos \geq \log_2(n!)$$

Por ejemplo,

$$n = 3 \rightarrow \#pasos \geq \log_2(3!) = \log_2(6) \Rightarrow \#pasos \geq 3$$

$$n = 4 \rightarrow \#pasos \geq \log_2(4!) = \log_2(24) \Rightarrow \#pasos \geq 5$$

$$n = 5 \rightarrow \#pasos \geq \log_2(5!) = \log_2(120) \Rightarrow \#pasos \geq 7$$

Utilizando las estimaciones sobre el tamaño de ***n*!**, podemos asegurar que

$$\#\,pasos \geq \log_2(n!) > \log_2((n/e)^n) = n \log_2(n/e).$$

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

ARBOLES RECUBRIDORES

DEFINICIÓN 3.- *Consideremos un grafo* **G = (*V*, *A*)**. *Diremos que un árbol* ***H*** *es* ***árbol recubridor o recubridor*** *de G si cumple que:*

$V(H) = V(G)$ *(tiene los mismos vértices que* **G***).*

$A(H) \subseteq A(G)$ *(tiene algunas —o todas— las aristas de* **G***).*

Es decir, es un subgrafo recubridor del grafo inicial que, además, es un árbol. Asegurémonos primero de que tales árboles existen si, como es razonable, partimos de un grafo conexo.

TEOREMA 5.- *Un grafo G es conexo si y sólo si tiene, al menos, un árbol recubridor.*

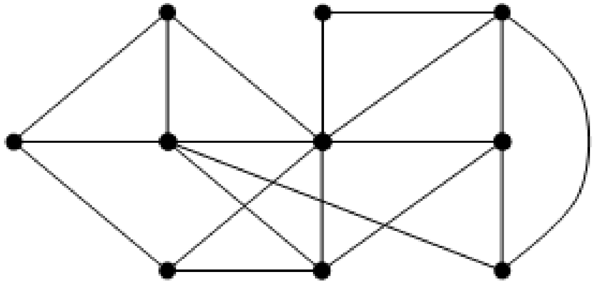


Figura 6.3.1

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

NUMERO DE ARBOLES RECUBRIDORES

Ejemplo: El número de árboles recubridores de los grafos C_n, L_n y K_n.

Consideremos el grafo circular con **n** vértices, C_n, para el que $|A(C_n)| = |V(C_n)|$. Formar un árbol recubridor consiste, simplemente, en quitar una arista; y cualquiera de las **n** que hay vale para ello. Así que C_n tiene **n** posibles árboles recubridores.

El grafo lineal con **n** vértices, Ln, es ya un árbol. Así que L_n es el único árbol recubridor que tenemos. Esto es un resultado general: si **G** es un árbol, sólo tiene un árbol recubridor (él mismo).

Por último, consideremos el grafo completo con **n** vértices, K_n. Buscamos subgrafos **H** de K_n que sean árboles, que tengan $V(H) = V(K_n) = \{1, \ldots, n\}$. Pero en K_n están todas las aristas posibles, así que:

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

$$\#\left\langle \begin{matrix} \text{árboles} \\ \text{recubridores de } K_n \end{matrix} \right\rangle = \#\left\langle \begin{matrix} \text{árboles distintos con el conjunto} \\ \text{de vértices}\{1,\ldots\ldots,n\} \end{matrix} \right\rangle = n^{n-2}$$

K_n es, claro, el grafo con n vértices que más árboles recubridores tiene.

Ejemplo .- *¿Cuántos árboles recubridores distintos contiene un* $K_{r,s}$*?*

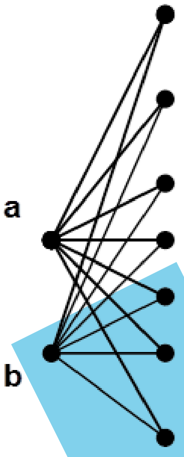


Figura 6.3.2

Empecemos con el grafo bipartito completo $K_{2,s}$, $s \geq 2$. El grafo tiene $2s$ aristas y $s + 2$ vértices, así que tendremos que quitar $s - 1$ aristas sin que se desconecte el grafo. Es complicado localizar los ciclos del grafo para ir rompiéndolos, así que pensemos de otra manera. Un árbol recubridor del grafo contendría a una serie de vértices de los de la derecha que se conectan al vértice *a* y otros que se conectan al vértice ***b***. Pero ha de haber al menos uno que se conecte a ambos, para que sea conexo. Y sólo uno, porque si hubiera dos (o más) vértices a la derecha que conservaran sus dos aristas, se formaría un ciclo. Con esta información podemos contar el número de árboles recubridores distintos.

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

NUMERO DE ARBOLES RECUBRIDORES

A* = {vértices de {1, . . . , *s*}** que comparten arista con ***a en el árbol recubridor}

B* = {vértices de {1, . . . , *s*}** que comparten arista con ***b en el árbol recubridor}

Lo que buscamos son conjuntos ***A*** y ***B*** tales que entre los dos tengamos todos los vértices de la derecha y de forma que su intersección conste de un único vértice:

Elegir un árbol recubridor de $K_{2,s}$ ⇔ Elegir dos conjuntos, *A* y *B* de manera que $A \cup B = \{1,\dots, s\}$ y de forma que $|A \cap B| = 1$

Para contar el número de maneras de elegir ***A*** y ***B*,** sigamos el siguiente proceso: Elegimos el elemento de la intersección (hay *s* posibilidades).

Una vez elegido el elemento especial, basta decidir si el resto de los elementos están en ***A*** *ó* en ***B*.** O, lo que es equivalente, basta formar una lista de longitud $s - 1$ con repetición permitida con dos símbolos (uno corresponde a estar en ***A*** y el otro a estar en ***B***). Esto se puede hacer de 2^{s-1} formas distintas.

En total tenemos que hay $s\,2^{s-1}$ árboles recubridores de $K_{2,s}$. El resultado general es el siguiente: un grafo $K_{r,s}$ tiene $s^{r-1}\, r^{s-1}$ árboles recubridores distintos .

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

ARBOL BINARIO

DEFINICIÓN: *Un árbol con raíz es* ***binario*** *si para cada vértice v, el grado del mismo es* δ***(v)=0, 1 o 2****; es decir, si* ***v*** *tiene cuando mucho dos hijos. Si* δ ***(v)= 0 o 2*** *para todo* ***v,*** *entonces el árbol con raíz es un árbol binario completo.*

Ejemplo 12:

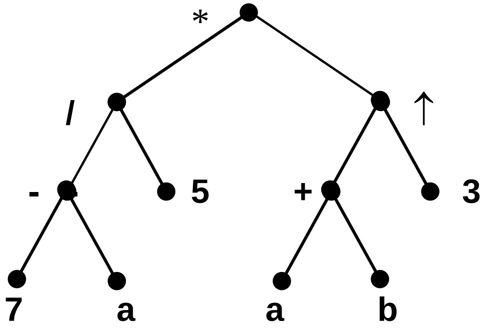


Figura 6.4.1

Ejemplo 13:

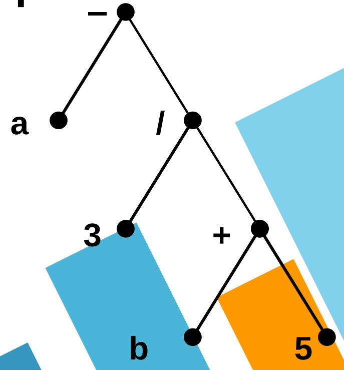


Figura 6.4.2

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

OPERACIÓN BINARIA

DEFINICIÓN: *Una **operación binaria** * tiene tres formas de representación:*

- *1. **Notación infija:** a * b*
- *2. **Notación prefija (o polaca)** : * a b*
- *3. **Notación postfija:** a b **

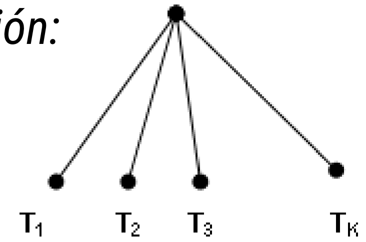


Figura 6.4.3

DEFINICIÓN: *Sea **T = (V, A)** un árbol con raíz r. Si **T** no tiene otros vértices, entonces la misma raíz el recorrido en orden previo y posterior de **T.** Si **|V| >1**. Sean T1, T2, T3,. . ., Tn, los subárboles de T, de izquierda a derecha, entonces:*

- *1. El recorrido de orden previo de T visita primero r y después recorre todos los vértices de T1, en orden previo, después los vértices de T2 en orden previo y así sucesivamente hasta recorrer los vértices de TK en orden previo.*
- *2. El recorrido de orden posterior de T recorre en orden posterior los vértices de los subárboles T1, T2, T3,. . ., TK para después llegar a la raíz.,*

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

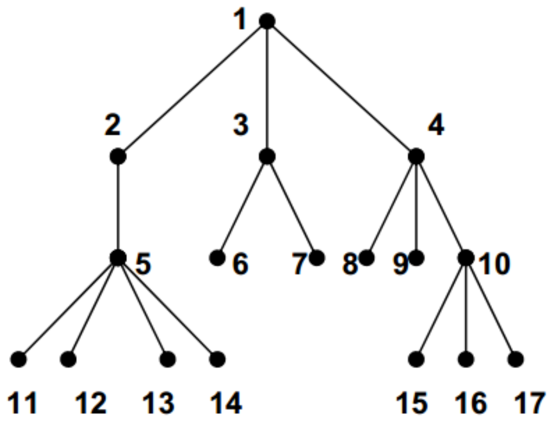


Figura 6.4.4

Ejemplo 14: El recorrido en orden previo de los vértices de este árbol es: 1, 2, 5, 11, 12, 13, 14, 3, 6, 7, 4, 8, 9, 10, 15, 16, 17.
El recorrido en orden posterior visita los vértices en el orden: 11, 12, 13, 14, 5, 2, 6, 7, 3, 8, 9, 15, 16, 17, 10, 4, 1

»**DEFINICIÓN 7.-** Recorrido en orden simétrico. Sea T = (V, E) un árbol binario con raíz, donde r es la raíz.

»1) Si | V | = 1, entonces el vértice r es el recorrido en orden simétrico de T.
»2) Si | V | > 1, sean TI y TD los subárboles izquierdo y derecho de T. El recorrido en orden simétrico de T recorre primero los vértices de TI, en orden simétrico, después visita la raíz y luego recorre, en el orden simétrico, los vértices de TD.

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

PODA DE UN ARBOL BINARIO

Tomemos el árbol binario (con raíz) infinito. En él vamos a seleccionar k vértices de manera que *ninguno de ellos sea antecesor de ningún otro*. Llamemos $\boldsymbol{v_1, \ldots, v_k}$ a estos vértices señalados, que estarían a alturas (generaciones) $\boldsymbol{h_1, \ldots, h_k}$. Observemos que esta elección de vértices se corresponde con una *poda* del árbol en la que las hojas supervivientes están a alturas $\boldsymbol{h_1, \ldots, h_k}$. En la siguiente figura hemos escogido cuatro vértices, $\boldsymbol{v_1, \ldots, v_4}$:

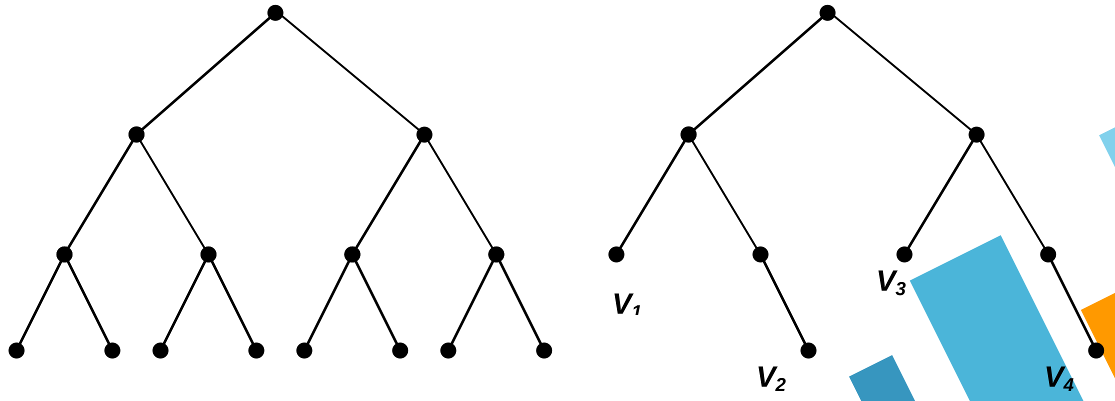


Figura 6.4.6

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

PODA DE UN ARBOL BINARIO

Exigir esta condición hace pensar que los vértices seleccionados no pueden estar todos muy “arriba” en el árbol, es decir, que los ***hj*** no pueden ser arbitrariamente pequeños. De manera más precisa, y esto es lo que nos interesa comprobar, en una poda cualquiera, los ***hj*** correspondientes han de cumplir que

$$\sum_{j=1}^{k} 2^{-h_j} \leq 1$$

Veámoslo: hemos seleccionado unos vértices $v_1, \ldots, v_k$ que están a alturas $h_1, \ldots, h_k$. Llamemos $H = \text{máx.}\{h_1, \ldots, h_k\}$ a la mayor altura a la que encontramos alguno de los vértices señalados.

Vamos ahora, a partir de esta elección inicial, a seleccionar un conjunto de vértices en el árbol infinito con el siguiente procedimiento: tomamos el vértice v_1 y escogemos sus 2^{H-h1} descendientes que están en la generación H (quizás solo el propio $v1$, si es que es uno de los que vive en esa máxima generación). Esto lo hacemos, sucesivamente, con el resto de los vértices $v_2, \ldots, v_k$. Nótese que los vértices que seleccionamos de esta manera son todos distintos

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

En el dibujo de la Figura 6.4.7 tenemos un ejemplo de este procedimiento. Los vértices escogidos en primer lugar son $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ **y** $\boldsymbol{v_4}$: dos de la segunda generación y otros dos de la tercera. La máxima altura es $\boldsymbol{H = 3}$. En trazo más grueso hemos señalado los vértices de esta tercera generación que seleccionamos en segundo lugar. Si sumamos los números $\boldsymbol{2^{-hj}}$ para cada vértice $\boldsymbol{vj}$ obtenemos **1/4+1/4+1/8+1/8 = 3/4,** un número no mayor que 1. El cálculo análogo, pero ahora para los vértices seleccionados en segundo lugar, nos lleva al mismo resultado.

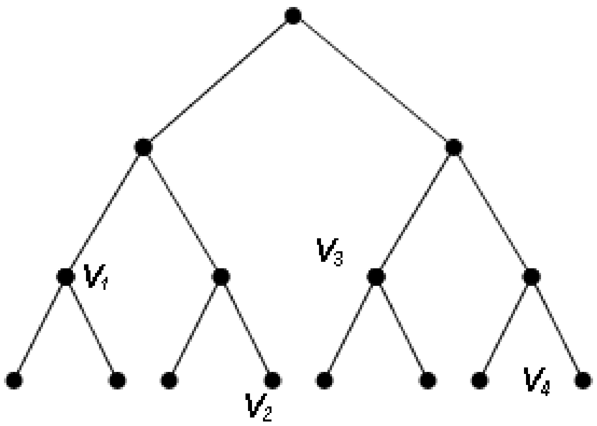


Figura 6.4.7

UT4: TEORÍA DE GRAFOS Y ÁRBOLES

Vamos ahora a interpretar este resultado etiquetando con listas de ceros y unos los vértices seleccionados. Digamos que elegir, en el arbol binario infinito, la rama de la izquierda es un 1, y elegir la de la derecha un 0. Seleccionar un vértice de altura $h \geq 1$ no es, entonces, sino dar una lista de ceros y unos de longitud h. En el ejemplo que hemos estado considerando, al vértice v_1 le correspondería la lista ***(1,1)***, al vértice v_2 la lista ***(1, 0, 0)***, y a los vértices v_3 y v_4, las listas ***(0, 1)*** y ***(0, 0, 0)***, respectivamente. Elegir, como en el ejemplo, vértices con la restricción de que unos no sean antecesores de otros se traduce en que ninguna de las listas correspondientes puede coincidir con el comienzo de ninguna otra.

Mas adelante llamaremos a esta restricción ***condición de prefijo*** y veremos que será fundamental a la hora de construir ciertos códigos. Veamos ahora otro ejemplo en el que esta condición de prefijo es relevante.

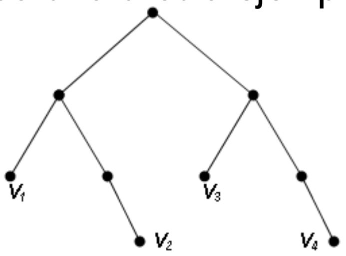


Figura 6.4.8

Universidad Nacional de Tucumán
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología

BIBLIOGRAFIA

»ESTRUCTURAS DE MATEMÁTICAS DISCRETAS. Bernard Kolman. Robert Busby & Sharon Ross. – 2003.

»MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA. Roberto H. Fanjul – 2005.

»MATEMÁTICAS DISCRETAS - SEXTA EDICIÓN Richard Johnsonbaugh - PRENTICE HALL INC. – 2005.

»LÓGICA COMPUTACIONAL. Roberto H. Fanjul. Autor y Editor. Primera Edición – 2005.

»MATEMÁTICAS DISCRETA Y COMBINATORIA Ralph P. Grimaldi- Addison Wesley Longman – 2001.

¡GRACIAS!

Preguntas?

» fmenendez@herrera.unt.edu.ar