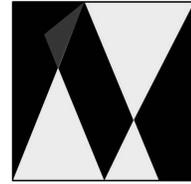




Universidad Veracruzana



Facultad de Matemáticas

UNIVERSIDAD VERACRUZANA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

VARIEDADES TÓRICAS Y ACCIONES
HAMILTONIANAS

TESIS

Que para obtener el Título de:

MAESTRO EN MATEMÁTICAS

Presenta:

Jorge Luis Arroyo Neri

Directores de tesis:

Dr. Armando Sánchez Nungaray

Dr. Luis Alfredo Dupont García

Junio del 2016, Xalapa-Enríquez, Ver.

Índice general

Introducción	III
1. Grupos y Álgebras de Lie	1
1.1. Grupos de Lie	1
1.1.1. Homomorfismos	3
1.1.2. Acciones en grupos de Lie	3
1.2. Álgebras de Lie	5
1.2.1. Mapeo Exponencial	11
2. Variedades Simpléticas	18
2.1. Formas Simpléticas	18
2.2. Espacios Vectoriales Simpléticos	20
2.2.1. Variedades Simpléticas	21
3. Mapeo de Momentos	25
3.1. Campos Simpléticos y Hamiltonianos	25
3.2. Acciones Simpléticas y Hamiltonianas	28
4. Reducción Simplética	33
4.1. Teorema de Marsden - Weinstein - Meyer	40
5. Politopos de Delzant	43
5.1. Equivarianza de Darboux	43
5.2. Convexidad Local	44
5.3. Convexidad Global	45
5.4. Politopos de Delzant	49
5.4.1. Descripción Algebraica	49
Conclusiones	59

Dedicado a Sebastián

Agradecimientos

Deseo agradecer al Doctor Armando Sánchez Nungaray, por su tiempo y disposición al realizar este trabajo. Más que un asesor, el Dr. Armando es un amigo.

Introducción

Las Variedades Tóricas han estado vigentes desde hace unos cuarenta años. Fueron introducidas por Demazure en sus trabajos de clasificación de subgrupos. Desde entonces, han aparecido diversas aplicaciones de las Variedades Tóricas, por ejemplo, los geométricos algebráicos las utilizan para estudiar la geometría de diferentes politopos convexos. También son útiles en la resolución de singularidades, compactificación de espacios localmente simétricos, para encontrar puntos críticos de funciones analíticas, etc.

Si tenemos un sistema completamente integrable en una variedad simpléctica M , obtenido a partir de una acción del grupo \mathbb{R}^n y si el Mapeo de Momentos asociado a esta acción es propio, entonces el grupo cociente $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ actúa libremente en un subconjunto abierto de M . Delzant probó que si este subconjunto era todo M , con M compacto, entonces debía tratarse de una Variedad Tórica. Además, comenzó la clasificación de todos estos espacios, poniéndolos en correspondencia biunívoca con unos objetos geométricos denominados Politopos de Delzant. De tal forma que la imagen del Mapeo de Momentos de una Variedad Simpléctica es un Politopo de Delzant. Y dado cualquier Politopo de Delzant es posible construir su correspondiente Variedad Tórica. A grandes rasgos, un Politopo de Delzant es la envolvente convexa de un conjunto de puntos que cumple algunas propiedades de racionalidad.

En este trabajo enfatizaremos la geometría del Mapeo de Momentos, pues su imagen determina la estructura simpléctica de las Variedades Tóricas. La noción de Mapeo de Momentos asociado a una acción de un Grupo de Lie generaliza el concepto de función hamiltoniana de un campo vectorial. Los Mapeos de Momentos han sido utilizados para estudiar problemas de geometría y topología donde existe un tipo particular de simetría. Este trabajo está dividido en cinco capítulos. A continuación se detalla cada uno de ellos.

- 1.- Grupos y Álgebras de Lie.** Comenzaremos definiendo los conceptos de Grupo y Álgebra de Lie, los cuales serán de suma importancia durante el desarrollo de todo este trabajo. De la misma manera, veremos lo que es una acción de Grupo de Lie en una Variedad Diferencial, así como el Mapeo Exponencial entre un Álgebra de Lie y su correspondiente Grupo de Lie.
- 2.- Variedades Simplécticas.** Definiremos los conceptos de Forma Simpléctica y de Variedad Simpléctica. Presentaremos algunos ejemplos y concluiremos con un

importante resultado, llamado el Teorema de Darboux, el cual nos indica que toda Forma Simpléctica puede escribirse de manera canónica.

- 3.- Mapeo de Momentos.** Distinguiremos entre dos tipos de acciones; simplécticas y hamiltonianas. Se definirán los conceptos de representación adjunta y representación coadjunta de un Grupo de Lie G en $GL(\mathfrak{g})$ y en $GL(\mathfrak{g}^*)$, correspondientemente. Y con ayuda de estos conceptos introduciremos una de las funciones más relevantes en este trabajo; el Mapeo de Momentos.
- 4.- Reducción Simpléctica.** Mostraremos que al conjunto de órbitas de una acción, de un Grupo de Lie en una Variedad Simpléctica se le puede inducir, de manera natural la estructura de Variedad Simpléctica. Esto, con ayuda del importante Teorema de reducción de Marsden-Weinstein-Meyer.
- 5.- Politopos de Delzant.** Finalmente, en este capítulo estudiaremos las acciones de Toros en Variedades Simplécticas que son compactas y conexas. Si dicha acción es hamiltoniana y efectiva entonces la variedad se llamará Variedad Tórica. Estudiaremos la relación existente entre las Variedades Tóricas y los Politopos de Delzant.

Capítulo 1

Grupos y Álgebras de Lie

1.1. Grupos de Lie

Definición 1.1.1 (Grupo de Lie) Consideremos una variedad diferencial G . Supongamos que adicionalmente G posee la estructura algebraica de grupo. Diremos que G es un grupo de Lie si las operaciones

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

son diferenciables (de clase C^∞).

De aquí en adelante, se escribirá xy en lugar de $x \cdot y$.

A continuación se describen algunos ejemplos de grupos de Lie.

Ejemplo 1.1.1 El conjunto $GL(n, \mathbb{R})$ de matrices de dimensión $n \times n$ con entradas reales, cuyo determinante es diferente de cero. Debido a que la función determinante

$$\det : \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

es continua, el conjunto

$$GL(n, \mathbb{R}) = \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \setminus \{\det^{-1}(0)\}$$

es abierto y por lo tanto se le puede heredar la estructura diferencial de $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Por otro lado, como $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ y $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$, la multiplicación de

matrices y la operación de obtener inversos son cerradas en $GL(n, \mathbb{R})$, así el conjunto de matrices invertibles resulta ser un grupo. Además, para $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ el producto AB es la matriz de tamaño $n \times n$ cuyo elemento i, j está dado por

$$\sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rj},$$

debido a la forma polinomial de las entradas de AB , tenemos que la multiplicación matricial es una función diferenciable. Finalmente, de la fórmula

$$A^{-1} = \frac{\text{cof}(A)}{\det(A)},$$

donde $\text{cof}(A)$ es la matriz de cofactores de A , vemos que la función obtener inversos también es diferenciable. Por lo tanto, $GL(n, \mathbb{R})$ resulta ser un grupo de Lie.

Ejemplo 1.1.2 Como caso particular del ejemplo anterior, tomando $n = 1$, vemos que $GL(1, \mathbb{R})$, los reales diferentes de cero, también son un grupo de Lie, con el producto usual.

Ejemplo 1.1.3 Análogamente al Ejemplo 1.1.1, dado un espacio vectorial V de dimensión finita, el conjunto de funciones biyectivas $\Phi : V \rightarrow V$, denotado por $GL(V)$, es un subconjunto abierto del conjunto de endomorfismos en V , $\text{End}(V)$. Considerando la composición de funciones $(\Phi_1, \Phi_2) \mapsto \Phi_1 \circ \Phi_2$ dotamos a $GL(V)$ de estructura de grupo. Finalmente, si V es real y $\dim(V) = n$ entonces $GL(V)$ es isomorfo a $GL(n, \mathbb{R})$.

Ejemplo 1.1.4 Sabemos que S^1 es variedad diferencial real. Además, puede identificarse de la siguiente manera

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Sean $z, w \in S^1$, debido a que $|zw| = |z||w|$ y $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$ tenemos que la multiplicación usual de números complejos y la función tomar inversos son cerradas en S^1 , luego S^1 es grupo. Más aún, utilizando cartas coordenadas puede probarse que dichas operaciones son diferenciables, así S^1 es un grupo de Lie.

El siguiente resultado nos será de utilidad para mostrar un ejemplo más.

Teorema 1.1.1 Sean G y H grupos de Lie. Entonces $G \times H$, con el producto entrada a entrada y la estructura diferencial inducida por el producto cartesiano, también es un grupo de Lie.

Ejemplo 1.1.5 El toro n -dimensional T^n es un grupo de Lie, pues

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ veces}}.$$

1.1.1. Homomorfismos

Definición 1.1.2 Sean G y H grupos de Lie. Si un homomorfismo (algebraico) entre ellos

$$F : G \rightarrow H$$

es de clase C^∞ , entonces se llama un homomorfismo de grupos de Lie.

Ejemplo 1.1.6 Consideremos $G = GL(n, \mathbb{R})$ y $H = \mathbb{R}^*$, el conjunto de números reales no nulos con la multiplicación usual. Debido a que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ y la función determinante es de clase C^∞ , tenemos que

$$\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$$

es un homomorfismo de grupos de Lie.

Ejemplo 1.1.7 Sean $G = \mathbb{R}$ con la suma usual y $H = S^1$ con el producto de números complejos. Entonces

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi it} \end{aligned}$$

es un homomorfismo entre grupos de Lie.

Ejemplo 1.1.8 De manera análoga, para $G = \mathbb{R}^n$ y $H = T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ la siguiente función también es un homomorfismo de grupos de Lie

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\rightarrow T^n \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto (e^{2\pi it_1}, \dots, e^{2\pi it_n}). \end{aligned}$$

Teorema 1.1.2 Si $F : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces

- rango F es constante
- $\ker F$ es un subgrupo de Lie
- $\dim(\ker F) = \dim G - \text{rango } F$

1.1.2. Acciones en grupos de Lie

Definición 1.1.3 Sean G un grupo de Lie y M una variedad diferencial. Una acción por la izquierda de G en M es una función

$$\psi : G \times M \rightarrow M$$

que satisface las siguientes propiedades

-
1. $\psi(e, p) = p$, para todo $p \in M$, con $e \in G$ el elemento neutro,
 2. $\psi(g_1, \psi(g_2, p)) = \psi(g_1 g_2, p)$, para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$ y $p \in M$.

De manera análoga se definen las acciones por la derecha. En ocasiones, $\psi(g, p)$ también se escribirá simplemente como $g \cdot p$.

Las acciones que más nos interesan son las de clase C^∞ , así pues, de ahora en adelante supondremos que todas las acciones son diferenciables.

Sea $\psi : G \times M \rightarrow M$ una acción, para un elemento fijo $g \in G$ la función

$$\begin{aligned} \psi_g : M &\rightarrow M \\ p &\mapsto \psi(g, p) \end{aligned}$$

resulta ser un difeomorfismo con inversa $\psi_g^{-1} = \psi_{g^{-1}}$. De esta manera, cada acción suave establece una correspondencia entre G y el conjunto de difeomorfismos de M en M

$$\begin{aligned} \psi : G &\rightarrow \text{diff}(M) \\ g &\mapsto \psi_g. \end{aligned}$$

Definición 1.1.4 Una acción ψ de G en M se llama

- *Efectiva*, si el único elemento $g \in G$ que satisface

$$\psi(g, p) = p,$$

para todo p en M , es el elemento neutro, es decir $g = e$.

- *Libre*, si $g \neq e$ implica

$$\psi(g, p) \neq p$$

para todo $p \in M$

- *Transitiva*, si para cualesquiera $p_1, p_2 \in M$ existe un $g \in G$ tal que

$$\psi(g, p_1) = p_2.$$

En este caso, diremos que la variedad M es homogénea bajo la acción ψ .

Definición 1.1.5 Sea p_0 un elemento en M .

- La G -órbita de p_0 está definido como el conjunto

$$G \cdot p_0 = \{\psi(g, p_0) : g \in G\} \subset M.$$

- Además, el estabilizador de p_0 está dado por

$$G_{p_0} = \{g \in G : \psi(g, p_0) = p_0\} \subset G.$$

A continuación veremos algunos ejemplos de acciones de grupos de Lie.

Ejemplo 1.1.9 *Todo grupo de Lie G actúa sobre sí mismo por conjugación*

$$\begin{aligned}\psi : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto ghg^{-1}.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.10 *Consideremos $GL(n, \mathbb{R})$ actuando en \mathbb{R}^n por multiplicación de matrices*

$$\psi(A, v) = Av.$$

Dicha acción es efectiva, pues $Av = v$ si y solo si $A = I$. No es libre; para $v = 0$ y $A \neq I$ tenemos $Av = 0 = v$. Finalmente, para $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ no nulos es posible resolver el sistema $Av_1 = v_2$, por lo tanto, la acción es casi transitiva.

Ejemplo 1.1.11 *Sea $\Phi : G \rightarrow H$ un homomorfismo entre grupos de Lie. Definamos $\psi(g, h) = \Phi(g)h$. La función ψ resulta ser una acción, que será efectiva y libre si y solo si $\ker \Phi = e$, además es transitiva si Φ es sobreyectiva.*

1.2. Álgebras de Lie

Definición 1.2.1 *Un álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre \mathbb{R} es un espacio vectorial \mathfrak{g} junto con un operador bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, llamado corchete, tal que para cualesquiera $x, y, z \in \mathfrak{g}$ se cumple*

- $[x, y] = -[y, x]$, (anticonmutatividad).
- $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$, (identidad de Jacobi).

Ejemplo 1.2.1 *Sean M una variedad diferencial, y \mathfrak{g} el conjunto de todos los campos vectoriales suaves en un punto particular $p \in M$. Resulta que \mathfrak{g} es un álgebra de Lie con el corchete entre campos vectoriales:*

$$[X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf).$$

Ejemplo 1.2.2 *El conjunto de matrices cuadradas con entradas reales $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ es un álgebra de Lie con el operador llamado conmutador de matrices:*

$$[A, B] = AB - BA.$$

Ejemplo 1.2.3 *El espacio euclideo \mathbb{R}^3 junto con el producto cruz de vectores.*

Definición 1.2.2 Sea G un grupo de Lie. Para $a \in G$ fijo, definimos la traslación izquierda y derecha por a como

$$\begin{aligned} l_a : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto ax, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_a : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto xa. \end{aligned}$$

Es claro que l_a y r_a son funciones diferenciables, más aún, son difeomorfismos con inversas $l_{a^{-1}}$ y $r_{a^{-1}}$, respectivamente.

Definición 1.2.3 Sean M y N variedades diferenciales suaves. Consideremos campos vectoriales X e Y en M y N , respectivamente. Sea $\varphi : M \rightarrow N$ una función suave, diremos que los campos X e Y están φ -relacionados si

$$d\varphi \circ X = Y \circ \varphi.$$

Teorema 1.2.1 Sean M y N variedades diferenciales suaves. Consideremos campos X_1, X_2 en M y Y_1, Y_2 en N . Sea $\varphi : M \rightarrow N$ una función suave. Si X_i y Y_i están φ -relacionados, entonces $[X_1, X_2]$ y $[Y_1, Y_2]$ están φ -relacionados.

Definición 1.2.4 Sean G un grupo de Lie y $X : G \rightarrow T(G)$ un campo vectorial. Si para cualquier $a \in G$ se cumple

$$dl_a \circ X = X \circ l_a,$$

entonces diremos que X es un campo vectorial invariante bajo traslaciones izquierdas. El conjunto de campos vectoriales invariantes se denotará por \mathfrak{g} .

Proposición 1.2.1 Sea G un grupo de Lie. Entonces

1. \mathfrak{g} es un espacio vectorial real, más aún, la función

$$\begin{aligned} \alpha : \mathfrak{g} &\rightarrow T_e(G) \\ X &\mapsto X(e) = X_e, \end{aligned}$$

es un isomorfismo, luego $\dim(\mathfrak{g}) = \dim T_e(G) = \dim(G)$.

2. Cada $X \in \mathfrak{g}$ es suave.
3. El corchete de Lie de dos campos invariantes por la izquierda es de nuevo un campo vectorial invariante por la izquierda.

4. \mathfrak{g} forma un álgebra de Lie con el corchete de Lie.

Demostración. Sean X, Y campos vectoriales invariantes por la izquierda.

1. Para cualquier $\sigma \in G$ se cumple

$$\begin{aligned} dl_\sigma \circ X &= X \circ l_\sigma \\ dl_\sigma \circ Y &= Y \circ l_\sigma, \end{aligned}$$

así, para $\beta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} dl_\sigma \circ (\beta X + Y) &= dl_\sigma \circ (\beta X) + dl_\sigma \circ Y \\ &= \beta(dl_\sigma \circ X) + dl_\sigma \circ Y \\ &= \beta(X \circ l_\sigma) + (Y \circ l_\sigma) \\ &= (\beta X + Y) \circ l_\sigma. \end{aligned}$$

Por lo tanto, \mathfrak{g} es un espacio vectorial real. Ahora veremos que la función

$$\begin{aligned} \alpha : \mathfrak{g} &\rightarrow T_e G \\ X &\mapsto X_e \end{aligned}$$

es lineal. Para ello, consideremos $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $\beta \in \mathbb{R}$, así tenemos

$$\begin{aligned} \alpha(\beta X + Y) &= (\beta X + Y)(e) \\ &= (\beta X)(e) + Y(e) \\ &= \beta X(e) + Y(e) \\ &= \beta \alpha(X) + \alpha(Y). \end{aligned}$$

Para verificar que α es inyectiva, supongamos que $\alpha(X) = \alpha(Y)$, esto es, $X(e) = Y(e)$. Para algún otro $\sigma \in G$ podemos calcular

$$X(\sigma) = dl_\sigma(X(e)) = dl_\sigma(Y(e)) = Y(\sigma),$$

por lo tanto, $X = Y$. Finalmente, α es sobreyectiva, pues para $v \in T_e(G)$ podemos definir

$$\begin{aligned} X : G &\rightarrow T(G) \\ \tau &\mapsto dl_\tau(v). \end{aligned}$$

Es claro que X es un campo vectorial suave, además

$$\alpha(X) = X(e) = dl_e(v) = d(id)(v) = v.$$

Para ver que X es invariante por la izquierda, tomemos $\sigma \in G$ y calculemos

$$\begin{aligned}
(X \circ l_\sigma)(\tau) &= X(\sigma\tau) \\
&= dl_{\sigma\tau}(v) \\
&= dl_\sigma(dl_\tau(v)) \\
&= dl_\sigma(X(\tau)) \\
&= (dl_\sigma \circ X)(\tau).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, \mathfrak{g} es isomorfo a T_eG .

2. Para probar esta parte del teorema debemos verificar que para cualquier función suave f tenemos que Xf es suave, pero

$$Xf(\sigma) = X_\sigma f = dl_\sigma(X_e)f = X_e(f \circ l_\sigma),$$

así, debemos probar que la asignación $\sigma \mapsto X_e(f \circ l_\sigma)$ es suave. Haremos esto descomponiendo a $X_e(f \circ l_\sigma)$ en funciones suaves. Denotemos por $\varphi : G \times G \rightarrow G$ al producto del grupo. Definamos las funciones suaves

$$\begin{aligned}
i^1(\tau) &= (\tau, e) \\
i^2(\tau) &= (\sigma, \tau).
\end{aligned}$$

Sea Y un campo vectorial suave tal que $Y(e) = X(e)$ y consideremos el campo vectorial suave $(0, Y)$ en $G \times G$. Debido a que i^1 y $f \circ \varphi$ son suaves, tenemos que $[(0, Y)(f \circ \varphi)] \circ i^1$ también lo es. Ahora

$$\begin{aligned}
[(0, Y)(f \circ \varphi)] \circ i^1(\sigma) &= (0, Y)_{\sigma, e}(f \circ \varphi) \\
&= 0_\sigma(f \circ \varphi \circ i_1) + Y_e(f \circ \varphi \circ i^2) \\
&= Y_e(f \circ \varphi \circ i^2) \\
&= X_e(f \circ \varphi \circ i^2) \\
&= X_e(f \circ l_\sigma).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los campos vectoriales invariantes son suaves.

3. Si X, Y son invariantes por la izquierda, entonces para todo σ son l_σ -relacionados consigo mismos, luego por el Teorema 1.2.1 $[X, Y]$ es l_σ -relacionado con $[X, Y]$, esto es

$$dl_\sigma \circ ([X, Y]) = l_\sigma \circ [X, Y],$$

lo que prueba que el producto de dos campos invariantes es de nuevo un campo invariante.

4. Ya hemos visto que el producto de campos vectoriales es lineal, antisimétrico y cumple la identidad de Jacobi, por lo tanto \mathfrak{g} resulta ser un álgebra de Lie.

□

Definición 1.2.5 Sea G un grupo de Lie. El álgebra de Lie de G se define como el conjunto \mathfrak{g} de campos invariantes por la izquierda. Alternativamente, puede definirse como el espacio tangente en la identidad $e \in G$, esto es, $T_e G = \mathfrak{g}$.

Ejemplo 1.2.4 Ya hemos visto que \mathbb{R} es un grupo de Lie. Los únicos campos que son invariantes por la izquierda son los campos constantes $\{\lambda \frac{d}{dr} : \lambda \in \mathbb{R}\}$. El corchete de dos de estos campos es igual a cero

$$\begin{aligned} \left[\lambda_1 \frac{d}{dr}, \lambda_2 \frac{d}{dr} \right] f &= \lambda_1 \frac{d}{dr} \left(\lambda_2 \frac{df}{dr} \right) - \lambda_2 \frac{d}{dr} \left(\lambda_1 \frac{df}{dr} \right) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \frac{d^2 f}{dr^2} - \lambda_2 \lambda_1 \frac{d^2 f}{dr^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el álgebra de Lie \mathfrak{r} de \mathbb{R} puede identificarse con \mathbb{R} , esto es $\mathfrak{r} \cong \mathbb{R}$.

Antes de mostrar el siguiente ejemplo recordemos que todo espacio vectorial puede dotarse de estructura diferencial, esto a través de la base dual. Además, si $\{e_i\}$ y $\{r_i\}$ son la base y la base dual de V , para $p \in V$ es posible identificar a $T_p V$ con V de la siguiente manera

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_p \leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

Ejemplo 1.2.5 Consideremos $GL(n, \mathbb{R})$. Notemos que las funciones

$$\begin{aligned} x_{ij} : \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto a_{ij} \end{aligned}$$

son suaves para todo $1 \leq i, j \leq n$. Para el neutro e de $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ sea

$$\alpha : T_e \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

la identificación arriba descrita. Si v es un elemento particular de $T_e \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tenemos

$$\alpha(v)_{ij} = v(x_{ij}).$$

Además, sabemos que $T_e \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) = T_e GL(n, \mathbb{R})$, pues $GL(n, \mathbb{R})$ es variedad abierta. Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} \beta : T_e GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ X &\mapsto \alpha(X_e). \end{aligned}$$

Probaremos que β es un isomorfismo entre álgebras de Lie, esto es $\beta([X, Y]) = [\beta(X), \beta(Y)]$, en otras palabras, β preserva el corchete. Es claro que β es lineal. Para $\sigma, \tau \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ notemos que

$$(x_{ij} \circ l_\sigma)(\tau) = x_{ij}(\sigma\tau) = \sum_{k=1}^n x_{ik}(\sigma)x_{kj}(\tau).$$

Además, para Y campo invariante

$$\begin{aligned} (Y(x_{ij}))(\sigma) &= dl_\sigma(Y_e)(x_{ij}) \\ &= Y_e(x_{ij} \circ l_\sigma) \\ &= \sum_{k=1}^n x_{ik}(\sigma)Y_e(x_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^n x_{ik}(\sigma)\alpha(Y_e)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n x_{ik}(\sigma)\beta(Y)_{kj}, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} \beta([X, Y])_{ij} &= [X, Y]_e(x_{ij}) \\ &= X_e(Y(x_{ij})) - Y_e(X(x_{ij})) \\ &= \sum_{k=1}^n (X_e(x_{ik})\beta(Y)_{kj} - Y_e(x_{ik})\beta(X)_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^n (\beta(X)_{ik}\beta(Y)_{kj} - \beta(Y)_{ik}\beta(X)_{kj}) \\ &= (\beta(X)\beta(Y))_{ij} - (\beta(Y)\beta(X))_{ij} \\ &= (\beta(X)\beta(Y) - \beta(Y)\beta(X))_{ij} \\ &= [\beta(X), \beta(Y)]_{ij}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, β es un isomorfismo entre álgebras de Lie, luego el álgebra de Lie correspondiente a $GL(n, \mathbb{R})$ es $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.2.6 Análogamente al ejemplo anterior, si V es un espacio vectorial real y $End(V)$ y $Aut(V)$ representan los conjuntos de endomorfismos y automorfismo, respectivamente, entonces, resulta que el álgebra de Lie de $Aut(V)$ es precisamente $End(V)$.

Proposición 1.2.2 Sean G y H grupos de Lie y $\varphi : G \rightarrow H$ un homomorfismo. Si $X \in \mathfrak{g}$, entonces X y $d\varphi(X)$ son φ -relacionados, esto es

$$d\varphi \circ X = d\varphi(X) \circ \varphi.$$

Demostración. Hagamos $d\varphi(X) = \tilde{X}$, así debemos probar que $d\varphi \circ X = \tilde{X} \circ \varphi$. Notemos que para todo $\sigma \in G$ tenemos $\varphi \circ l_\sigma = l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi$, pues φ es homomorfismo. Ahora, para $\sigma \in G$, aplicando la invarianza de X obtenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(\varphi(\sigma)) &= \tilde{X}(\varphi(\sigma)e) \\
&= dl_{\varphi(\sigma)}(d\varphi(X)(e)) \\
&= d(l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi)(X)(e) \\
&= d(\varphi \circ l_\sigma)(X)(e) \\
&= d\varphi(dl_\sigma(X)(e)) \\
&= d\varphi(X \circ l_\sigma)(e) \\
&= d\varphi(X)(\sigma).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $d\varphi \circ X = \tilde{X} \circ \varphi$, o bien $d\varphi \circ X = d\varphi(X) \circ \varphi$. □

Proposición 1.2.3 *Sea $\varphi : G \rightarrow H$ un homomorfismo entre grupos de Lie, entonces $d\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo entre álgebras de Lie.*

Demostración. Solo probaremos que $d\varphi$ preserva el corchete. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$, por el lema anterior X con $d\varphi(X)$ y Y con $d\varphi(Y)$ están φ -relacionados, de la misma manera $[X, Y]$ con $[d\varphi(X), d\varphi(Y)]$, así

$$d\varphi \circ [X, Y] = [d\varphi(X), d\varphi(Y)] \circ \varphi,$$

evaluando esta expresión en e_G tenemos

$$d\varphi([X, Y]_{e_G}) = [d\varphi(X), d\varphi(Y)]_{e_H},$$

por lo tanto $d\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo entre álgebras de Lie. □

Si G y H son grupos de Lie y $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ un homomorfismo entre sus álgebras, ¿bajo qué circunstancias podemos garantizar que existe $\varphi : G \rightarrow H$, homomorfismo entre grupos de Lie, tal que $\psi = d\varphi$?

El siguiente teorema nos da un recíproco parcial de la proposición anterior.

Teorema 1.2.2 *Sean G y H grupos de Lie. Supongamos que G es simplemente conexo. Si $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo, entonces existe un único $\varphi : G \rightarrow H$ tal que $d\varphi = \psi$.*

1.2.1. Mapeo Exponencial

Consideremos un grupo de Lie G y un homomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$, la imagen de \mathbb{R} bajo φ resulta ser un subgrupo de G . Por ello a este tipo de homomorfismos se les conoce como subgrupos uniparamétricos de G .

Sea $X \in \mathfrak{g}$ fijo, hagamos la siguiente asignación entre $T_0\mathbb{R}$ y \mathfrak{g}

$$\lambda \frac{d}{dr} \rightarrow \lambda X,$$

dicha correspondencia resulta ser un homomorfismo entre álgebras de Lie, pues es lineal y $[\lambda_1 \frac{d}{dr}, \lambda_2 \frac{d}{dr}] = [\lambda_1 X, \lambda_2 X] = 0$. Debido a que \mathbb{R} es simplemente conexo, por el Teorema 1.2.2, existe un único homomorfismo entre \mathbb{R} y G tal que su diferencial coincide con esta asignación, llamaremos \exp_x a dicho homomorfismo, así

$$\exp_X : \mathbb{R} \rightarrow G$$

cumple

$$d(\exp_X) \left(\lambda \frac{d}{dr} \right) = \lambda X.$$

De esta manera, tenemos que $t \mapsto \exp_X(t)$ es el único subgrupo uniparamétrico de G cuyo vector tangente en 0 es $X(e)$.

Definición 1.2.6 *El mapeo exponencial en un grupo de Lie G está dado por*

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ X &\mapsto \exp_X(1). \end{aligned}$$

Teorema 1.2.3 *El mapeo exponencial en grupos de Lie satisface propiedades similares a las de la función exponencial de los números reales, a saber*

- i) $\exp(tX) = \exp_X(t)$.
- ii) $\exp(t_1 + t_2)X = \exp(t_1X) \exp(t_2X)$.
- iii) $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}$.
- iv) $l_\sigma \circ \exp_X$ es la única curva integral de X que toma el valor σ en 0. Como consecuencia, tenemos que los campos vectoriales invariantes son completos.

Demostración.

i) Definamos las funciones φ y ψ de \mathbb{R} en G como sigue

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp_X(st) \\ \psi(t) &= \exp_{sX}(t), \end{aligned}$$

donde $s \in \mathbb{R}$. Observemos que ψ es la única curva integral de sX tal que $\psi(0) = e$. Ahora

$$d\varphi \left(\frac{d}{dr} \Big|_t \right) = d\exp_X \left(s \frac{d}{dr} \Big|_{st} \right) = sX|_{\exp_X(st)}.$$

Entonces φ es una curva integral de sX tal que $\varphi(0) = e$, así pues, por unicidad $\varphi = \psi$, entonces, para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$ y $X \in \mathfrak{g}$ se cumple

$$\exp_{sX}(t) = \exp_X(st),$$

tomando $t = 1$ y cambiando s por t tenemos

$$\exp(tX) = \exp_{tX}(1) = \exp_X(t).$$

ii) Por la primera parte del teorema y del hecho que \exp_X es un homomorfismo entre \mathbb{R} y G tenemos

$$\begin{aligned} \exp(t_1 + t_2)X &= \exp_X(t_1 + t_2) \\ &= \exp_X(t_1) \exp_X(t_2) \\ &= \exp(t_1X) \exp(t_2X). \end{aligned}$$

iii) De manera análoga

$$\begin{aligned} \exp(-tX) &= \exp_X(-t) \\ &= (\exp_X(t))^{-1} \\ &= (\exp(tX))^{-1}. \end{aligned}$$

iv) Por las Proposiciones 1.2.2 y 1.2.3 tenemos que (d/dr) y $d\exp_X(d/dr)$, que es igual a X , están \exp_X -relacionados. Entonces, \exp_X es la única curva integral de X tal que $\exp_X(0) = e$. Debido a que X es invariante por traslaciones izquierda, $l_\sigma \circ \exp_X$ también es curva integral, además $(l_\sigma \circ \exp_X)(\sigma) = 0$.

□

Proposición 1.2.4 *Para el grupo de Lie $GL(n, \mathbb{C})$ el mapeo exponencial*

$$\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

está dado por la exponencial de matrices

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots$$

La demostración será dividida en tres etapas, en las cuales se probarán los siguientes hechos:

1) La serie $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$ es convergente. Aquí $A^0 = I$.

2) Dicho límite se encuentra en $GL(n, \mathbb{C})$.

3) Para cada $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, la asignación $t \mapsto e^{tA}$ de \mathbb{R} en $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, proporciona un subgrupo uniparamétrico, cuyo vector tangente en 0 es igual a A .

Demostración.

1) En realidad, se probará que la serie es absolutamente convergente. Análogamente al Ejemplo 1.2.5 tenemos que $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Sea $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, consideremos la siguiente norma

$$\|A\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}(A)|.$$

Hagamos $K = \overline{B_\mu(0)}$, donde $\mu = \|A\| + 1$. Es claro que para todo i, j se cumple $|a_{ij}(A)| \leq \mu$. Más aún, para A^2 tenemos

$$|x_{ij}(A^2)| = \left| \sum_{r=1}^n a_{ir} a_{rj} \right| \leq \sum_{r=1}^n |a_{ir} a_{rj}| \leq n\mu^2.$$

De manera inductiva, supongamos que la desigualdad $|x_{ij}(A^m)| \leq n^{m-1} \mu^m$ es válida. Así, haciendo $y_{ij} = x_{ij}(A^n)$ obtenemos

$$|x_{ij}(A^{m+1})| = \left| \sum_{r=1}^n y_{ir} a_{rj} \right| \leq \sum_{r=1}^n |y_{ir} a_{rj}| = n^m \mu^{m+1}.$$

Por lo tanto, la desigualdad $|a_{ij}(A^k)| \leq n^{k-1} \mu^k$ es válida para todo $k \in \mathbb{N}$.

Consideremos la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k-1} \mu^k}{k!}$, por el criterio de la razón

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n^k \mu^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{n^{k-1} \mu^k}{k!}} \right| = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{n\mu}{k+1} \right| = 0.$$

vemos que es convergente. Luego, por el hecho de que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x_{ij}(A^k)}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k-1} \mu^k}{k!}$$

y aplicando la prueba M de Weierstrass, cada una de las entradas de

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$$

es absolutamente convergente, por lo tanto, la serie misma también lo es para $A \in K$.

- 2) Para demostrar que $e^A \in GL(n, \mathbb{C})$ primero notemos que $B \mapsto AB$ es un mapeo continuo de $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ en si mismo, así

$$\left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} \right) \right] B = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} \right) B \right].$$

En particular, si $B \in GL(n, \mathbb{C})$ se cumple

$$\begin{aligned} Be^A B^{-1} &= B \left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots \right) B^{-1} \\ &= I + BAB^{-1} + \frac{BA^2 B^{-1}}{2!} + \cdots + \frac{BA^k B^{-1}}{k!} + \cdots \\ &= I + BAB^{-1} + \frac{BAIAB^{-1}}{2!} + \cdots + \frac{BAIA \cdots AIAB^{-1}}{k!} + \cdots \\ &= I + BAB^{-1} + \frac{(BAB^{-1})^2}{2!} + \cdots + \frac{(BAB^{-1})^k}{k!} + \cdots \\ &= e^{BAB^{-1}}. \end{aligned}$$

Para $A \in GL(n, \mathbb{C})$, mediante la forma canónica de Jordan, podemos encontrar una matriz invertible B tal que BAB^{-1} sea triangular superior. Los elementos de la diagonal principal de BAB^{-1} son los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la matriz A , algunos de ellos podrían repetirse. Resulta que $Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$ también es triangular superior, y los elementos de su diagonal están dados por $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$. De esta manera, tenemos que $\det(Be^A B^{-1}) = \det(e^{BAB^{-1}}) \neq 0$, luego $\det(e^A) \neq 0$ y $e^A \in GL(n, \mathbb{C})$.

- 3) Finalmente, consideremos la función $t \mapsto e^{tA}$ de \mathbb{R} en $GL(n, \mathbb{C})$, la cual es diferenciable, pues cada entrada de e^{tA} es una serie de potencias en t . Ahora, notemos que si $XY = YX$, con $X, Y \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ entonces

$$\begin{aligned} e^X e^Y &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{Y^m}{m!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m \frac{X^k}{k!} \frac{Y^{m-k}}{(m-k)!} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m \frac{\binom{m}{k} X^k Y^{m-k}}{m!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(X+Y)^m}{m!} \\ &= e^{X+Y}, \end{aligned}$$

de esta manera, $t_1 + t_2 \mapsto e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1 A} e^{t_2 A}$, así, la función antes descrita induce un subgrupo uniparamétrico. Además, el vector tangente en cero es A , en efecto

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tA)^m}{m!} \right) \right|_{t=0} = \left(A + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{m+1} A^m}{m!} \right) \Big|_{t=0} = A.$$

□

Ejemplo 1.2.7 En $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tenemos la exponencial usual de complejos

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^k}{k!} + \cdots$$

Ejemplo 1.2.8 Si V es un espacio vectorial, real o complejo, entonces el mapeo exponencial

$$\exp : \text{End}(V) \rightarrow \text{Aut}(V)$$

está dado por

$$\exp(l) = e^l = 1 + l + \frac{l^2}{2!} + \cdots + \frac{l^k}{k!} + \cdots$$

donde $l \in \text{End}(V)$ 1 representa la transformación identidad y l^k significa componer k veces l consigo mismo.

Teorema 1.2.4 Sea $\varphi : G \rightarrow H$ un homomorfismo entre grupos de Lie, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{h} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Demostración. Consideremos la siguiente asignación

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow G \\ t &\mapsto \varphi(\exp(tX)). \end{aligned}$$

Debido a que $\exp(tX) = \exp_X(t)$, esta asignación es un homomorfismo, es decir un subgrupo uniparamétrico de G , además su vector tangente en 0 es $d\varphi(X)(e)$. De la misma manera, la correspondencia

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow G \\ t &\mapsto \exp(t(d\varphi(X))) \end{aligned}$$

también es un subgrupo uniparamétrico, cuyo vector tangente en 0 es $d\varphi(X)(e)$. Por la unicidad de \exp_X tenemos que

$$\varphi(\exp(tX)) = \exp(t(d\varphi(X))).$$

□

Como caso particular podemos considerar el caso en que H es un subgrupo de G y φ es el mapeo inclusión.

Proposición 1.2.5 Sea $X \in \mathfrak{g}$. Si $X \in d\varphi(\mathfrak{h})$, entonces $\exp(tX) \in \varphi(H)$ para todo número real t . Inversamente, si $\exp(tX) \in \varphi(H)$ para t en algún intervalo abierto, entonces $X \in d\varphi(\mathfrak{h})$.

Demostración. Supongamos que $X \in \mathfrak{g}$ es tal que $X \in d\varphi(\mathfrak{h})$. Como el diagrama del teorema 1.2.4 conmuta tenemos que $\exp(X) \in d\varphi(\mathfrak{h})$. Más aún, al ser $d\varphi$ lineal $tX \in d\varphi(\mathfrak{h})$ para todo t , luego $\exp(tX) \in \varphi(H)$. Por otro lado, supongamos que dado $X \in \mathfrak{g}$ se cumple $\exp(tX) \in \varphi(H)$ para algún t en un intervalo abierto I . Entonces el mapeo $t \mapsto \exp(tX)$ puede ser expresado como una composición $\varphi \circ \alpha$, donde $\alpha : I \rightarrow H$ es una curva suave. Tomemos $t_0 \in I$, sea \tilde{X} el campo vectorial en H determinado por $\dot{\alpha}(t_0)$, dicho campo resulta ser invariante, además $d\varphi(\tilde{X}) = X$. \square

Teorema 1.2.5 Sean A un subgrupo de G , no necesariamente de Lie. Supongamos que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ es un subespacio. Sea U una vecindad de $0 \in \mathfrak{g}$ que es difeomorfa, bajo el mapeo exponencial, a una vecindad V del elemento identidad $e \in G$. Supongamos que

$$\exp(U \cap \mathfrak{a}) = V \cap A.$$

Entonces A con la topología relativa es un subgrupo de Lie de G y \mathfrak{a} es el subálgebra de Lie correspondiente a A .

Ejemplo 1.2.9 Consideremos el grupo de Lie $GL(n, \mathbb{R})$ y los siguientes subgrupos

a) Subgrupo Unitario $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^{-1} = A^t\}$.

b) Grupo Especial Lineal $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$.

Entonces sus álgebras de Lie están dadas por

a) $\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : A + A^t = 0\}$.

b) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \text{traza}(A) = 0\}$.

Capítulo 2

Variedades Simplécticas

2.1. Formas Simplécticas

Consideremos un espacio vectorial real V . Una función bilineal $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ se dirá antisimétrica si $\Omega(u, v) = -\Omega(v, u)$ para cualesquiera $u, v \in V$.

Observación 2.1.1 *Si Ω es una forma bilineal antisimétrica en V entonces para cualquier $u \in V$ se cumple*

- $\Omega(u, u) = -\Omega(u, u) = 0$
- $\Omega(0, u) = \Omega(u - u, u) = \Omega(u, u) - \Omega(u, u) = 0$

Teorema 2.1.1 *Si Ω es una función antisimétrica en V , entonces existe una base*

$$\{u_1, \dots, u_k, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$$

para la cual se cumple

$$\begin{aligned}\Omega(u_i, v) &= 0 \\ \Omega(e_i, e_j) &= 0 \\ \Omega(f_i, f_j) &= 0 \\ \Omega(e_i, f_j) &= \delta_{ij},\end{aligned}$$

para todo $v \in V$ y cualesquiera i, j .

Demostración. Sea $U = \{u \in V : \Omega(u, v) = 0 \forall v \in V\}$. Notemos que $U \neq \emptyset$ pues $0 \in U$. Además, si $u_1, u_2 \in U$ y $k \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\Omega(ku_1 + u_2, v) = k\Omega(u_1, v) + \Omega(u_2, v) = 0,$$

para todo $v \in V$, luego U es un espacio vectorial real. Escojamos una base $\{u_1, \dots, u_k\}$ de U y sea W la completación de V respecto a U , esto es

$$V = U \oplus W.$$

Tomemos algún elemento $e_1 \in W$. Debido a que $U \cap W = \{0\}$ debe existir $f_1 \in W$ tal que $\Omega(e_1, f_1) \neq 1$. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que $\Omega(e_1, f_1) = 1$. Hagamos

$$\begin{aligned} W_1 &= \text{span}\{e_1, f_1\} \\ W_1^\Omega &= \{w \in W : \Omega(w, v) = 0 \ \forall v \in W_1\}. \end{aligned}$$

Probaremos que $W_1 \cap W_1^\Omega = \{0\}$. En efecto, supongamos que $u = ae_1 + bf_1 \in W_1 \cap W_1^\Omega$, entonces para $e_1, f_1 \in W_1$ debe cumplirse

$$0 = \Omega(u, e_1) = \Omega(ae_1 + bf_1, e_1) = a\Omega(e_1, e_1) - b\Omega(e_1, f_1) = -b,$$

$$0 = \Omega(u, f_1) = \Omega(ae_1 + bf_1, f_1) = a\Omega(e_1, f_1) + b\Omega(f_1, f_1) = a.$$

Además, $W = W_1 \oplus W_1^\Omega$. Sea $v \in W$, supongamos que $\Omega(v, e_1) = c$ y $\Omega(v, f_1) = d$. Consideremos $v + cf_1 - de_1$, para $u \in W_1$ con $u = k_1e_1 + k_2f_1$ tenemos

$$\begin{aligned} \Omega(v + cf_1 - de_1, u) &= \Omega(v + cf_1 - de_1, k_1e_1 + k_2f_1) \\ &= k_1\Omega(v, e_1) + k_2\Omega(v, f_1) + ck_1\Omega(f_1, e_1) \\ &\quad + ck_2\Omega(f_1, f_1) - dk_1\Omega(e_1, e_1) - dk_2\Omega(e_1, f_1) \\ &= k_1c + k_2d - ck_1 - dk_2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, $v + cf_1 - de_1 \in W_1^\Omega$. Así, podemos descomponer a v como

$$v = \underbrace{(-cf_1 + de_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(v + cf_1 - de_1)}_{\in W_1^\Omega}.$$

Análogamente, tomamos $e_2 \in W_1^\Omega$ no nulo. Así, debe existir $f_2 \in W_1^\Omega$ tal que $\Omega(e_2, f_2) \neq 0$, se puede asumir que $\Omega(e_2, f_2) = 1$. Definimos $W_2 = \text{span}\{e_2, f_2\}$. Etc.

Debido a que $\dim V < \infty$, este proceso debe terminar. De esta manera, obtenemos

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n,$$

donde todos los sumando son simplécticamente ortogonales. Además cada espacio W_i tiene base $\{e_i, f_i\}$ y $\Omega(e_i, f_i) = 1$. □

2.2. Espacios Vectoriales Simpléticos

Sea V un espacio vectorial real de dimensión m y $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una función bilineal y antisimétrica. Consideremos la siguiente función

$$\tilde{\Omega} : V \rightarrow V^*,$$

definida como $\tilde{\Omega}(v)(u) = \Omega(v, u)$.

Definición 2.2.1 Una función bilineal y antisimétrica $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ se llamará *simplética* si $\tilde{\Omega}$ es biyectiva. Así mismo, el espacio (V, Ω) se dirá un *espacio vectorial simplético*.

Una de las consecuencias de esta definición junto con el Teorema 2.1.1 es que si (V, Ω) es un espacio vectorial simplético, entonces la dimensión de V es par.

Definición 2.2.2 Si Y es un subespacio vectorial de un espacio simplético (V, Ω) , entonces definimos su *complemento simplético* como

$$Y^\Omega = \{v \in V : \Omega(v, u) = 0 \forall u \in Y\}.$$

Las siguientes definiciones están relacionadas al complemento simplético.

Definición 2.2.3 Sean (V, Ω) un espacio simplético y $Y \subset V$ un subespacio, entonces

- Y se llama *simplético* si $Y \cap Y^\Omega = \{0\}$.
- Y se llama *isotrópico* si $Y \subseteq Y^\Omega$.
- Y se llama *lagrangiano* si $Y = Y^\Omega$.
- Y se llama *coisotrópico* si $Y^\Omega \subseteq Y$.

Además, tenemos las siguientes propiedades:

- $\dim Y + \dim Y^\Omega = \dim V$.
- $(Y^\Omega)^\Omega = Y$.
- Si Y y W son subespacios entonces $Y \subseteq W \iff W^\Omega \subseteq Y^\Omega$.
- Y es simplético $\iff V = Y \oplus Y^\Omega$.
- Si Y es isotrópico entonces $\dim Y \leq \frac{1}{2} \dim V$.
- Si Y es lagrangiano entonces $\dim Y = \frac{1}{2} \dim V$.

Un prototipo de espacio vectorial simpléctico es $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$, cuya base está dada por

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, \overbrace{1}^n, 0, \dots, 0),$$

$$f_1 = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n+1}, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad f_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Los valores de Ω_0 en la base están definidos como en el Teorema 2.1.1, y el valor en algún otro vector estará determinado por los elementos de la base y la bilinealidad de Ω_0 .

Definición 2.2.4 *Un simplectomorfismo φ entre espacios vectoriales simplécticos (V, Ω) y (V', Ω') es un isomorfismo lineal $\varphi : V \rightarrow V'$ tal que*

$$\Omega(u, v) = \Omega'(\varphi(u), \varphi(v)).$$

2.2.1. Variedades Simplécticas

Sean M una variedad diferencial y ω una 2-forma, tal que para cada $p \in M$ la función $\omega_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ es antisimétrica y varía suavemente en p .

Definición 2.2.5 *La 2-forma ω es simpléctica si es cerrada y ω_p es simpléctica para cada $p \in M$.*

Definición 2.2.6 *Al par (M, ω) se le llama una variedad simpléctica.*

Ejemplo 2.2.1 *Sea $M = \mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$. La forma*

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k$$

es simpléctica, y el conjunto

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)_p \right\}$$

es una base simpléctica para $T_p M$.

Ejemplo 2.2.2 *Sea $M = \mathbb{C}^n$, consideremos las coordenadas*

$$z_k = x_k + iy_k$$

$$\bar{z}_k = x_k - iy_k.$$

Si multiplicamos por $-2i$ cada término de

$$\sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-2idx_k \wedge dy_k) &= \sum_{k=1}^n (-idx_k \wedge dy_k - idy_k \wedge dx_k) \\ &= \sum_{k=1}^n (-idx_k \wedge dy_k + idy_k \wedge dx_k) \\ &= \sum_{k=1}^n (dx_k \wedge dx_k - idy_k \wedge dx_k + idy_k \wedge dx_k + dy_k \wedge dy_k) \\ &= \sum_{k=1}^n (dx_k + idy_k) \wedge (dx_k - idy_k) \\ &= \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k. \end{aligned}$$

Así, una forma simpléctica en \mathbb{C}^n está dada por

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k.$$

De forma alternativa, utilizando coordenadas polares

$$\begin{aligned} x_k &= r_k \cos \theta_k \\ y_k &= r_k \sin \theta_k, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} dx_k &= d(r_k \cos \theta_k) \\ &= dr_k \cos \theta_k + r_k d(\cos \theta_k) \\ &= dr_k \cos \theta_k - r_k \sin \theta_k d\theta_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy_k &= d(r_k \sin \theta_k) \\ &= dr_k \sin \theta_k + r_k d(\sin \theta_k) \\ &= dr_k \sin \theta_k + r_k \cos \theta_k d\theta_k, \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}
dx_k \wedge dy_k &= (dr_k \cos \theta_k - r_k \sin \theta_k d\theta_k) \wedge (dr_k \sin \theta_k + r_k \cos \theta_k d\theta_k) \\
&= \cos \theta_k \sin \theta_k dr_k \wedge dr_k + r_k \cos^2 \theta_k dr_k \wedge d\theta_k \\
&\quad - r_k \sin^2 \theta_k d\theta_k \wedge dr_k - r_k^2 \sin \theta_k \cos \theta_k d\theta_k \wedge d\theta_k \\
&= r_k \cos^2 \theta_k dr_k \wedge d\theta_k + r_k \sin^2 \theta_k dr_k \wedge d\theta_k \\
&= r_k dr_k \wedge d\theta_k.
\end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que

$$\sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k = \sum_{k=1}^n r_k dr_k \wedge d\theta_k.$$

Ejemplo 2.2.3 Sea $M = S^2$, usando coordenadas cilíndricas, tenemos la forma

$$\omega = d\theta \wedge dh.$$

Ejemplo 2.2.4 Como caso particular del Ejemplo 2.2.1, sea $M = \mathbb{R}^2$, así $\omega = dx \wedge dy$. Si $v_1 = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y}$ y $v_2 = a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y}$ son vectores tangentes, podemos calcular

$$\begin{aligned}
\omega(v_1, v_2) &= dx \wedge dy(v_1, v_2) \\
&= (dx \otimes dy - dy \otimes dx) \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y}, a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
&= dx \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) dy \left(a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
&\quad - dy \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) dx \left(a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
&= a_1 b_2 - b_1 a_2 \\
&= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Definición 2.2.7 Para $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, una forma simpléctica está dada por

$$\begin{aligned}
\omega_{FS} &= \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log(|z|^2) \\
&= \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 (\log(|z|^2))}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k \\
&= \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^n \left(\frac{|z_j|^2 dz_k \wedge d\bar{z}_k}{|z|^4} - \frac{\bar{z}_j z_k dz_j \wedge d\bar{z}_k}{|z|^4} \right) \\
&= \frac{i}{2|z|^4} \sum_{k=1}^n \sum_{j \neq k}^n (|z_j|^2 dz_k \wedge d\bar{z}_k - \bar{z}_j z_k dz_j \wedge d\bar{z}_k).
\end{aligned}$$

Definición 2.2.8 Sean (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) variedades simplécticas $2n$ -dimensionales. Un difeomorfismo $g : M_1 \rightarrow M_2$ es un *simplectomorfismo* si para $u, v \in T_p M_1$ se satisface

$$(\omega_1)_p(u, v) = (\omega_2)_{g(p)}(dg_p(u), dg_p(v)).$$

Lo anterior se abreviará simplemente por $g^* \omega_2 = \omega_1$.

Teorema 2.2.1 (de Darboux) Sean (M, ω) una variedad simpléctica $2n$ -dimensional y $p \in M$. Entonces existe una carta $(U, (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n))$ centrada en p tal que en U la forma se escribe como

$$\omega = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k.$$

Una de estas cartas es llamada carta de Darboux.

Capítulo 3

Mapeo de Momentos

3.1. Campos Simplécticos y Hamiltonianos

Consideremos una variedad simpléctica (M, ω) . Para cualquier $p \in M$

$$\omega_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

es bilineal, antisimétrica y no degenerada. Además, fijando $v \in T_p M$ tenemos que

$$\omega_p(v, \cdot) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sea $H : M \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $dH_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Debido a que ω_p es no degenerada, existe $v_p \in T_p M$ tal que

$$\omega_p(v_p, \cdot) = dH_p.$$

Haciendo variar $p \in M$ obtenemos un campo vectorial $X_H : M \rightarrow TM$ tal que

$$\omega(X_H, \cdot) = dH.$$

De esta manera, tenemos la siguiente

Definición 3.1.1 *A uno de estos campos X_H se le llama campo vectorial hamiltoniano. Y a la función H se le conoce como función hamiltoniana.*

Supongamos que la variedad M es compacta, o que X_H es completo. Entonces para cada $p \in M$ sus curvas integrales están definidas en todo \mathbb{R} , digamos $\alpha_p : \mathbb{R} \rightarrow M$. Así, para cada $t \in \mathbb{R}$ definamos la familia uniparamétrica de difeomorfismos ρ_t generados por X_H

$$\begin{aligned} \rho_t : M &\rightarrow M \\ p &\mapsto \alpha_p(t). \end{aligned}$$

Tenemos los siguientes hechos

-
- $\rho_0 = \text{id}_M$.
 - $\frac{d\rho_t}{dt} \circ \rho_t^{-1} = X_H$.
 - Cada difeomorfismo preserva la forma simpléctica, es decir, $\rho_t^* \omega = \omega$.

Por lo tanto, cada función $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ induce una familia de simplectomorfismos ρ_t .

Definición 3.1.2 Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Un campo X en M se dirá simpléctico si preserva la forma ω , esto es $\mathcal{L}_X \omega = 0$.

Tenemos la siguiente caracterización de campos:

- i) X es simpléctico si y solo si $\iota_X \omega$ es cerrada.
- ii) X es hamiltoniano si y solo si $\iota_X \omega$ es exacta.

Ejemplo 3.1.1 Consideremos $(M, \omega) = (S^2, d\theta \wedge dh)$. Entonces el campo $X_H = \frac{\partial}{\partial \theta}$ es hamiltoniano, con función hamiltoniana $H(\theta, h) = h$, en efecto

$$\begin{aligned}
 \iota_{X_H}(d\theta \wedge dh) &= (d\theta \wedge dh) \left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \cdot \right) \\
 &= (d\theta \otimes dh - dh \otimes d\theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \cdot \right) \\
 &= d\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) dh - dh \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) d\theta \\
 &= dh.
 \end{aligned}$$

Sin embargo, el campo $X_\theta = \frac{\partial}{\partial h}$ es simpléctico pero no hamiltoniano, pues

$$\begin{aligned}
 \iota_{X_\theta}(d\theta \wedge dh) &= (d\theta \wedge dh) \left(\frac{\partial}{\partial h}, \cdot \right) \\
 &= (d\theta \otimes dh - dh \otimes d\theta) \left(\frac{\partial}{\partial h}, \cdot \right) \\
 &= d\theta \left(\frac{\partial}{\partial h} \right) dh - dh \left(\frac{\partial}{\partial h} \right) d\theta \\
 &= -d\theta
 \end{aligned}$$

es cerrada pero no exacta.

Teorema 3.1.1 Si X e Y son campos vectoriales simplécticos, entonces $[X, Y]$ es un campo vectorial hamiltoniano, con función hamiltoniana $\omega(X, Y)$.

Demostración. Calculando

$$\begin{aligned}
\iota_{[X,Y]}\omega &= \mathcal{L}_X\iota_Y\omega - \iota_Y\mathcal{L}_X\omega \\
&= d\iota_X\iota_Y\omega + \iota_Xd\iota_Y\omega - \iota_Yd\iota_X\omega - \iota_Y\iota_Xd\omega \\
&= d\iota_X\iota_Y\omega \\
&= d(\omega(X, Y)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $[X, Y]$ es hamiltoniano con función hamiltoniana $\omega(X, Y)$. □

Sabemos que $\mathfrak{X}(M)$ con el corchete de Lie forma un álgebra de Lie, la cual denotaremos por $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$. El Teorema 3.1.1, y el hecho de que todos los campos hamiltonianos son campos simplécticos, indican que el conjunto de campos simplécticos, denotados por $\mathfrak{X}(M)_{simpl}$, forman una subálgebra de Lie de $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$. Por otro lado, si dos campos vectoriales hamiltonianos X, Y son simplécticos, entonces $[X, Y]$ también lo será. Así, el conjunto de campos hamiltonianos, $\mathfrak{X}(M)_{ham}$, también es una subálgebra de Lie. Además, se cumple la siguiente contención

$$(\mathfrak{X}(M)_{ham}, [\cdot, \cdot]) \subseteq (\mathfrak{X}(M)_{simpl}, [\cdot, \cdot]) \subseteq (\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot]).$$

Definición 3.1.3 Sean (M, ω) una variedad simpléctica y $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. El corchete de Poisson entre f y g está dado por

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g),$$

donde X_f y X_g son los campos vectoriales hamiltonianos de f y g .

Para un $p \in M$ particular

$$\begin{aligned}
\{f, g\} : M &\rightarrow \mathbb{R} \\
p &\mapsto \omega_p(X_f(p), X_g(p)).
\end{aligned}$$

Lema 3.1.1 Tenemos el siguiente hecho

$$X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g].$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
X_{\{f,g\}} &= X_{\omega(X_f, X_g)} \\
&= [X_g, X_f] \\
&= -[X_f, X_g].
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.2 El par $(C^\infty, \{\cdot, \cdot\})$ forma un álgebra de Lie.

3.2. Acciones Simplécticas y Hamiltonianas

Consideremos una acción ψ de un grupo de Lie G en una variedad M , su mapeo de evaluación es la función

$$\begin{aligned} ev_\psi : M \times G &\rightarrow M \\ (p, g) &\mapsto \psi_g(p). \end{aligned}$$

Si una acción es suave, su mapeo de evaluación también lo es.

Si X es un campo vectorial completo en M entonces

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R} &\rightarrow \text{diff}(M) \\ t &\mapsto \rho_t, \end{aligned}$$

donde ρ_t denota el flujo de X en el tiempo t , define una acción suave. Así, todo campo vectorial completo induce una acción suave de \mathbb{R} en M . Recíprocamente, cada acción suave ψ de \mathbb{R} en M induce un campo vectorial completo, para ello definamos

$$\begin{aligned} ev_\psi : M \times \mathbb{R} &\rightarrow TM \\ p &\mapsto \left. \frac{d[\psi_t(p)]}{dt} \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Definición 3.2.1 Sean (M, ω) una variedad simpléctica, G un grupo de Lie y ψ una acción. Si para cada $g \in G$ se cumple que $\psi_g : M \rightarrow M$ es un simplectomorfismo, entonces diremos que ψ es una acción simpléctica.

Definición 3.2.2 Una acción simpléctica ψ de S^1 o \mathbb{R} en (M, ω) es hamiltoniana si el campo vectorial generado por ψ es hamiltoniano.

Ejemplo 3.2.1 Sea \mathbb{R}^{2n} con $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$. Entonces, la asignación

$$(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k, \dots, x_n, y_n) \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_k, y_k - t, \dots, x_n, y_n)$$

induce una acción, por traslación, de \mathbb{R} en \mathbb{R}^{2n} . Para el generador $X = \frac{d}{dr}$ de $\mathfrak{r} \cong \mathbb{R}$, el campo vectorial generado por la acción es

$$\left. \frac{d(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k - t, \dots, x_n, y_n)}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Además

$$\begin{aligned} \iota_\omega \left(-\frac{\partial}{\partial y_k} \right) &= \sum_{i=1}^{2n} dx_i \wedge dy_i \left(-\frac{\partial}{\partial y_k}, \cdot \right) \\ &= dx_k \wedge dy_k \left(-\frac{\partial}{\partial y_k}, \cdot \right) \\ &= (dx_k \otimes dy_k - dy_k \otimes dx_k) \left(-\frac{\partial}{\partial y_k}, \cdot \right) \\ &= dx_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el campo $-\frac{\partial}{\partial y_k}$ tiene por función hamiltoniana a $H(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = x_k$, luego, la acción es hamiltoniana.

Para saber cuándo una acción en general es llamada hamiltoniana serán necesarias algunas definiciones.

Primero, consideremos un grupo de Lie G y ψ su acción por conjugación, esto es, para cada $g \in G$ tenemos

$$\begin{aligned}\psi_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto ghg^{-1},\end{aligned}$$

notemos que $\psi_g(e) = geg^{-1} = e$. Ahora, como ψ_g es difeomorfismo

$$d(\psi_g)_e : T_eG = \mathfrak{g} \rightarrow T_eG = \mathfrak{g},$$

es una transformación lineal invertible. Así, a cada $g \in G$ le corresponde un elemento de $GL(\mathfrak{g})$, dicho elemento lo denotaremos por Ad_g , variando $g \in G$ obtenemos

Definición 3.2.3 *La representación adjunta de G en \mathfrak{g}*

$$\begin{aligned}Ad : G &\rightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto Ad_g.\end{aligned}$$

Por otro lado, para \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* hagamos

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, X) &\mapsto \langle \xi, X \rangle = \xi(X).\end{aligned}$$

Dado $\xi \in \mathfrak{g}^*$, $Ad_g^*(\xi)$ es el funcional que cumple

$$\langle Ad_g^*(\xi), X \rangle = \langle \xi, Ad_{g^{-1}}(X) \rangle$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. De esta manera, tenemos que

Definición 3.2.4 *La representación coadjunta de G en \mathfrak{g}^* está dada por*

$$\begin{aligned}Ad^* : G &\rightarrow GL(\mathfrak{g}^*) \\ g &\mapsto Ad_g^*.\end{aligned}$$

Definición 3.2.5 *Si ψ es una acción de G en M , y $X \in \mathfrak{g}$ definimos $X^\#$ como el campo vectorial en M creado por el subgrupo $\{\exp(tX) : t \in \mathbb{R}\} \subset G$, tal que para $x \in M$*

$$X^\#(x) = \left. \frac{d(\exp(tX) \cdot x)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Definición 3.2.6 Sea ψ una acción simpléctica de G en la variedad M . Diremos que es hamiltoniana si existe una aplicación

$$\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

tal que

1) Para cada $X \in \mathfrak{g}$, la componente de μ a lo largo de X

$$\begin{aligned} \mu^X : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \langle \mu(p), X \rangle \end{aligned}$$

satisface

$$d\mu^X = \iota_{X^\#}\omega,$$

es decir, μ^X es función hamiltoniana de $X^\#$.

2) La función μ es equivariante con respecto a la acción de G en M y a la acción coadjunta Ad^* de G en \mathfrak{g}^* , esto es, para todo $g \in G$ se cumple

$$\mu \circ \psi_g = Ad_g^* \circ \mu.$$

Cuando el grupo G es abeliano entonces $Ad_g^* = Id$ para todo $g \in G$, así la segunda condición se simplifica

$$\mu \circ \psi_g = \mu.$$

A (M, ω, G, μ) se le llama un G -espacio hamiltoniano y a la función μ se le conoce como mapeo de momentos.

Ejemplo 3.2.2 Si $G = S^1, \mathbb{R}$ entonces $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}$. Para $X \in \mathfrak{g}$, con $X = k_1 \frac{d}{dr}$, el mapeo de momentos $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ debe cumplir

$$\begin{aligned} \mu^X(p) &= \mu(p)(X) \\ &= \mu(p) \left(k_1 \frac{d}{dr} \right) \\ &= (k_p dr) \left(k_1 \frac{d}{dr} \right) \\ &= k_p k_1 \\ &= k_1 \mu(p). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mu^X = k_1 \mu$. Tomando $X = \frac{d}{dr}$ tenemos $\mu^X = \mu$.

Ejemplo 3.2.3 En $(\mathbb{R}^2, \omega = dx \wedge dy)$ consideremos la acción por traslación de \mathbb{R}

$$\begin{aligned}\psi_t : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + t, y).\end{aligned}$$

Para el generador $X = \frac{d}{dt}$ de $\mathfrak{r} \cong \mathbb{R}$ tenemos que

$$\begin{aligned}X^\# &= \left. \frac{d(\exp(tX) \cdot (x, y))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d(x + t, y)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}.\end{aligned}$$

Reduciendo

$$\begin{aligned}\iota_{X^\#}\omega &= dx \wedge dy \left(\frac{\partial}{\partial x}, \cdot \right) \\ &= (dx \otimes dy - dy \otimes dx) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \cdot \right) \\ &= dy \\ &= d\mu^X \\ &= d\mu,\end{aligned}$$

por lo tanto, $\mu(x, y) = y$ es el mapeo de momentos para esta acción.

Ejemplo 3.2.4 Consideremos $(\mathbb{C}^n, \omega = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k = \sum_{k=1}^n r_k dr_k \wedge d\theta_k)$. Entonces la acción ψ de S^1 en \mathbb{C}^n , tal que para cada $t \in S^1$

$$\begin{aligned}\psi_t : \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ (r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n}) &\mapsto (r_1 e^{i(t+\theta_1)}, \dots, r_n e^{i(t+\theta_n)}),\end{aligned}$$

es hamiltoniana, con mapeo de momentos

$$\begin{aligned}\mu : \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto -\frac{|z|^2}{2}.\end{aligned}$$

En efecto, para el generador $X = 1$, ya habíamos visto que $\mu^X = \mu$. Además, similar al Ejemplo 3.1.1 tenemos

$$X^\# = \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial \theta_n},$$

así

$$\begin{aligned} i_{X\#}\omega &= \left(\sum_{k=1}^n r_k dr_k \wedge d\theta_k \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta_j}, \cdot \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (r_k dr_k \wedge d\theta_k) \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j}, \cdot \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n r_k (dr_k \otimes d\theta_k - d\theta_k \otimes dr_k) \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j}, \cdot \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n r_k \left(dr_k \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) d\theta_k - d\theta_k \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) dr_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-r_k dr_k) \\ &= d \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n r_k^2 \right) \\ &= d \left(-\frac{1}{2} |z|^2 \right). \end{aligned}$$

Capítulo 4

Reducción Simpléctica

Lema 4.0.1 Sean $p \in M$ y $G_p \subset G$ su estabilizador. Entonces

$$\mathfrak{g}_p = \{X \in \mathfrak{g} : X_p^\# = 0\}.$$

Demostración. Si $X \in \mathfrak{g}_p$, entonces $\exp(tX) \in G_p$. Así $\exp(tX) \cdot p = p$ para todo t , derivando y evaluando en $t = 0$ obtenemos

$$\frac{d}{dt} (\exp(tX) \cdot p)|_{t=0} = \frac{d}{dt} (p)|_{t=0} = 0,$$

luego $X_p^\# = 0$. Ahora bien, si $X \in \mathfrak{g}$ es tal que $X_p^\# = 0$ entonces la curva constante $t \mapsto p$ es una curva integral en p . Pero, por definición, la curva

$$t \mapsto \exp(tX) \cdot p$$

es curva integral de $X^\#$ en p . Así, tenemos que $\exp(tX) \cdot p = p$. Por lo tanto, $\exp(tX) \in G_p$ y $tX \in \mathfrak{g}_p$ para todo t , en particular tomando $t = 1$. \square

Lema 4.0.2 Sea \mathfrak{g}_p el álgebra de Lie del estabilizador de $p \in M$. Entonces, para $d\mu_p : T_pM \rightarrow \mathfrak{g}^*$ se cumple

$$\begin{aligned} \ker d\mu_p &= (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p} \\ \text{imd}\mu_p &= \mathfrak{g}_p^0, \end{aligned}$$

donde \mathcal{O}_p es la órbita de G a través de p y $\mathfrak{g}_p^0 = \{\xi \in \mathfrak{g}^* : \langle \xi, X \rangle = 0, \forall X \in \mathfrak{g}_p\}$ es el anulador de \mathfrak{g}_p .

Demostración. La prueba de este lema se basa en el hecho de que $\omega_p(X_p^\#, v) = \langle d\mu_p(v), X \rangle$ para cualesquiera $v \in T_pM$ y $X \in \mathfrak{g}$. Así, para verificar la primera igualdad, tomemos $v \in (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p}$, entonces $\omega_p(w, v) = 0$ para todo $w \in T_p\mathcal{O}_p$, en particular $X_p^\# \in T_p\mathcal{O}_p$ para $X \in \mathfrak{g}$, luego

$$0 = \omega_p(X_p^\#, v) = \langle d\mu_p(v), X \rangle,$$

para cualquier X del álgebra, así $d\mu_p(v) = 0$ y $v \in \ker d\mu_p$. Por otra parte, supongamos que $v \in \ker d\mu_p$, entonces $d\mu_p(v) = 0$. Ahora, para $u \in T_p\mathcal{O}_p$ sabemos que existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $u = X_p^\#$, así

$$\omega_p(X_p^\#, v) = \langle d\mu_p(v), X \rangle = 0,$$

luego $v \in (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p}$.

Finalmente, probaremos que $\text{im}d\mu_p = \mathfrak{g}_p^0$. Tomemos $\xi \in \text{im}d\mu_p$, entonces existe $v \in T_pM$ tal que $d\mu_p(v) = \xi$, así para $X \in \mathfrak{g}_p$ tenemos

$$\langle \xi, X \rangle = \langle d\mu_p(v), X \rangle = \omega_p(X_p^\#, v) = 0,$$

pues $X_p^\# = 0$. Así, $\text{im}d\mu_p \subset \mathfrak{g}_p^0$. Contando dimensiones tenemos

$$\begin{aligned} \dim(\text{im}d\mu_p) &\leq \dim \mathfrak{g}_p^0, \\ \dim G - \dim G_p &\leq \dim \mathfrak{g}_p^0, \\ \dim G - \dim \mathfrak{g}_p &\leq \dim G - \dim \mathfrak{g}_p. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la igualdad $\text{im}d\mu_p = \mathfrak{g}_p^0$. □

Observación 4.0.1 *A continuación tenemos algunas consecuencias del lema anterior.*

1.- *Los siguientes enunciados son equivalentes*

- *La acción es localmente libre en p*
- $\mathfrak{g}_p = \{0\}$
- $d\mu_p$ es sobreyectivo
- p es un valor regular de μ

2.- *Si G actúa libremente en $\mu^{-1}(0)$ entonces*

- 0 es un valor regular de μ
- $\mu^{-1}(0)$ es una subvariedad cerrada de M de dimensión igual a $\dim M - \dim G$
- $T_p\mu^{-1}(0) = \ker d\mu_p$, para todo $p \in \mu^{-1}(0)$
- $T_p\mu^{-1}(0)$ es el complemento simpléctico de $T_p\mathcal{O}_p$ en T_pM

Lema 4.0.3 *Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico. Supongamos que $I \subset V$ es un subespacio isotrópico, esto es $\omega|_I \equiv 0$, entonces es posible definir una forma simpléctica canónica en el espacio cociente I^ω/I .*

Demostración. Sean $u, v \in I^\omega$, entonces

$$[u] = \{w : w = u + i, \text{ con } i \in I\},$$

$$[v] = \{z : z = v + i, \text{ con } j \in I\}.$$

Definamos la función

$$\begin{aligned} \Omega : I^\omega/I \times I^\omega/I &\rightarrow \mathbb{R} \\ ([u], [v]) &\mapsto \omega(u, v). \end{aligned}$$

Veremos que

- Ω está bien definida, pues

$$\begin{aligned} \Omega([u], [v]) &= \omega(u + i, v + j) \\ &= \omega(u, v) + \underbrace{\omega(u, j)}_0 + \underbrace{\omega(i, v)}_0 + \underbrace{\omega(i, j)}_0 \\ &= \omega(u, v). \end{aligned}$$

- Ω es no degenerada. Supongamos que para $[u] \in I^\omega/I$ se cumple $\Omega([u], [v]) = 0$ para todo $[v] \in I^\omega/I$, entonces $\omega(u, v) = 0$ para todo $v \in I^\omega$, luego $u \in (I^\omega)^\omega = I$, así $[u] = [0]$.
- Finalmente, como ω es bilinear y antisimétrica, se sigue que Ω también lo es.

□

Definición 4.0.1 Una acción ψ de un grupo de Lie G en una variedad M se llama propia si el mapeo

$$\begin{aligned} \Psi : G \times M &\rightarrow M \times M \\ (g, p) &\mapsto (g \cdot p, p) \end{aligned}$$

es propio. Esto es, la imagen inversa de algún subconjunto compacto es compacta.

Lema 4.0.4 Sea G un grupo de Lie actuando en una variedad M . Entonces la acción es propia si y solo si, para todo subconjunto compacto $K \subset M$ se cumple que

$$G_K = \{g \in G : (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\} \subset G$$

es compacto.

Demostración. Supongamos que G actúa libremente, así $\Psi : G \times M \rightarrow M \times M$ es un mapeo propio. Notemos que para cualquier subconjunto $K \subset M$ tenemos

$$\begin{aligned}
G_K &= \{g \in G : (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\} \subset G \\
&= \{g \in G : \exists p \in K \text{ tal que } g \cdot p \in K\} \\
&= \{g \in G : \exists p \in K \text{ tal que } \Psi(g, p) = (g \cdot p, p) \in K \times K\} \\
&= \pi_G(\Psi^{-1}(K \times K)).
\end{aligned}$$

En particular, si K es compacto, utilizando la continuidad de π_G y el hecho de que Ψ es propio, obtenemos que G_K es compacto.

Por otro lado, supongamos que para todo $K \subset M$ el conjunto G_K es compacto. Probaremos que Ψ es un mapeo propio. Así, sea $L \subset M \times M$ compacto. Hagamos $K = \pi_1(L) \cup \pi_2(L) \subset M$, notemos que $L \subset K \times K$. Además, K y G_K son compactos. Observemos que

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1}(L) &\subset \Psi^{-1}(K \times K) \\
&\subset \{g \in G : g \cdot p \in K, p \in K\} \\
&\subset G_K \times K.
\end{aligned}$$

Como L es compacto en el espacio Hausdorff $M \times M$, entonces L es cerrado. Por la continuidad de Ψ , vemos que $\Psi^{-1}(L)$ es un subconjunto cerrado del compacto $G_K \times K$, por lo tanto $\Psi^{-1}(L)$ es compacto. \square

Corolario 4.0.1 *Todo grupo de Lie compacto actúa propiamente.*

Demostración. Ya hemos visto que

$$G_K = \pi_G(\Psi^{-1}(K \times K))$$

para todo subconjunto K . En particular, si K es compacto, entonces G_K será cerrado en G . \square

Lema 4.0.5 *Supongamos que $F : M \rightarrow N$ es una función propia y continua entre dos variedades diferenciales. Entonces, F es una función cerrada.*

Demostración. Sea $K \subset M$ cerrado, debemos probar que $F(K)$ es cerrado. Tomemos $y \in \overline{F(K)}$, entonces existe una sucesión $\{y_n\} \subset F(K)$ tal que $y_n \rightarrow y$. Sea $\{x_n\} \subset K$ la sucesión que satisface $F(x_n) = y_n$. Consideremos una vecindad paracompacta U de y . Entonces, para n suficientemente grande se cumple $y_n \in U \subset \overline{U}$. Como F es función propia, $F^{-1}(\overline{U})$ es compacto en M , luego la sucesión $\{x_n\} \subset F^{-1}(\overline{U})$ contiene una

subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente. Como K es cerrado, tenemos que $x_{n_k} \rightarrow x \in K$, de la continuidad de F obtenemos

$$F(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y,$$

así $y = F(x) \in F(K)$. Por lo tanto, F es una función cerrada. \square

Teorema 4.0.1 *Sea G un grupo de Lie compacto actuando suave y libremente en una variedad M . Entonces, para todo $p \in M$ la órbita $G \cdot p$ es una subvariedad compacta de M , inmersa y que es difeomorfa a G .*

Demostración. Como la acción es suave, el mapeo de evaluación también lo es

$$\begin{aligned} ev : G \times M &\rightarrow M \\ (g, p) &\mapsto g \cdot p. \end{aligned}$$

Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} ev_p : G &\rightarrow M \\ g &\mapsto ev(g, p) = g \cdot p, \end{aligned}$$

es claro que ev_p es suave y su imagen $ev_p(G) = G \cdot p$ es un subconjunto compacto de M . Además, como la acción es libre ev_p es inyectiva.

Ahora, veremos que $d(ev_p)$ es inyectivo. Primero, consideremos el caso

$$d(ev_p)_e : \mathfrak{g} \rightarrow T_p M,$$

para $X \in \mathfrak{g}$, por ser la acción libre, tenemos que

$$d(ev_p)_e(X) = 0 \iff X_p^\# = 0 \iff X = 0.$$

Por otro lado, para $g \in G$ y $X \in T_g G$ tenemos

$$d(ev_p)_g(X = 0) \iff (d(ev_p \circ R_g)_e \circ (dR_{g^{-1}})_g)(X) = 0,$$

pero

$$\begin{aligned} (ev_p \circ R_g)(g') &= ev_p(g'g) \\ &= ev(g'g, p) \\ &= ev(g', ev(g, p)) \\ &= ev_{g \cdot p}(g'). \end{aligned}$$

Luego, como $ev_p \circ R_g = ev_{g \cdot p}$ tiene diferencial inyectivo en $e \in G$ y $d(R_{g^{-1}})_g$ es un isomorfismo, concluimos que $d(ev_p)_g$ es inyectivo. \square

Teorema 4.0.2 *Sea G un grupo de Lie actuando libre y propiamente en una variedad M . Entonces, el espacio de órbitas M/G es una variedad diferencial, de dimensión igual a $\dim M - \dim G$, con la propiedad de que*

$$\pi : M \rightarrow M/G$$

es una submersión.

Demostración. Primero probaremos que M/G es segundo numerable. Para ello, consideremos la topología inducida por π , esto es, $A \subset M/G$ es abierto si y solo si $\pi^{-1}(A) \subset M$ es abierto.

Denotemos por $\psi : G \times M \rightarrow M \times M$ a la acción. Si $U \subset M$ abierto, tenemos que

$$\bigcup_{g \in G} \psi_g(U) = \pi^{-1}(\pi(U)) \subset M,$$

donde $\psi_g : M \rightarrow M$ es la restricción de la acción a g . Como cada ψ_g es un difeomorfismo, el conjunto $\psi_g(U)$ es abierto, luego $\pi^{-1}(\pi(U))$ también lo es, así $\pi(U)$ es abierto en M/G . De esta manera, la función π es abierta. Por lo tanto, si $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base numerable de M , entonces $\{\pi(U_n)\}_{n=1}^{\infty}$ será una base numerable de M/G .

Ahora, veremos que M/G es Hausdorff. Definamos la siguiente relación orbital

$$\mathcal{O} = \Psi(G \times M) = \{(g \cdot p, p) \in M \times M : p \in M, g \in G\},$$

llamada así, debido a que $(q, p) \in \mathcal{O}$ si y solo si p y q están en la misma órbita. Si $\pi(p)$ y $\pi(q)$ son elementos distintos en M/G , entonces se encuentran en distintas órbitas, luego $(p, q) \notin \mathcal{O}$. Debido a que todos los mapeos propios son cerrados, tenemos que \mathcal{O} es un subconjunto cerrado de $M \times M$, así existe un abierto U que contiene a (p, q) y $U \cap \mathcal{O} = \emptyset$. Dicho abierto puede tomarse como el producto de dos variedades ajenas V y W de p y q , esto es $U = V \times W$. Así $\pi(V)$ y $\pi(W)$ serán abiertos y ajenos en M/G tales que $\pi(p) \in \pi(V)$ y $\pi(q) \in \pi(W)$. Por lo tanto, M/G es Hausdorff.

Para continuar, hagamos $k = \dim G$ y $n = \dim M - \dim G$. Diremos que una carta (U, φ) de $p \in M$, con coordenadas $(x, y) = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$, es adaptada a la acción de G en M si

- i) $\varphi(U)$ es un producto de abiertos $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$
- ii) Cada órbita interseca a U en el vacío o en una sola rebanada de la forma $\{y_1 = c_1, \dots, y_n = c_n\}$

Probaremos que para cada punto $p \in M$ existe una carta adaptada centrada en p . Para ello, comenzaremos tomando una carta $(U', \varphi' = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n))$ en la órbita $G \cdot p$, de tal forma que $G \cdot p \cap U'$ sea la rebanada definida por $\{v_1 = \dots = v_n = 0\}$.

Tomemos como S la subvariedad definida por la rebanada perpendicular a U , esto es, aquella definida por $\{u_1 = \cdots = u_k = 0\}$. Entonces

$$T_p M = T_p(G \cdot p) \oplus T_p S.$$

Utilizando el Teorema de la Función Inversa, se puede probar que la acción restringida $\psi : G \times S \rightarrow M$ es un difeomorfismo de una vecindad W de $(e, p) \in G \times S$ en una vecindad U de p . Podemos asumir que $W = X \times Y$. Más aún, es posible tomar a X e Y como conjuntos precompactos, tales que sean difeomorfos a bolas abiertas en \mathbb{R}^k y \mathbb{R}^n , respectivamente. Lo siguiente es probar que Y puede ser tan pequeño, de tal forma que interseque a cada G -órbita en a lo más un punto. Supongamos que lo anterior es falso. Tomemos una base numerable $\{Y_n\}$ de Y , dicha base puede tomarse como bolas abiertas cuyos radios vayan decreciendo. Para cada n hay $p_n, p'_n \in Y_n$ que pertenecen a la misma órbita, esto es, existe $g_n \in G$ tal que $g_n \cdot p_n = p'_n$. Así, para todo n se cumple

$$\Psi(g_n, p_n) = (g_n \cdot p_n, p_n) = (p'_n, p_n) \in \bar{Y} \times \bar{Y}.$$

Como $\bar{Y} \times \bar{Y}$ es compacto y Ψ es propio, las imágenes inversas (g_n, p_n) deben estar en un compacto $L \subset G \times M$, luego $\pi_G(L) = \{g_n\}$ se encuentra en G . Recordemos que el grupo G es compacto. Entonces, $\{g_n\}$ contiene una subsucesión convergente, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que dicha subsucesión es la propia $\{g_n\}$. Digamos que $g_n \rightarrow g \in G$. Además, por cómo se tomó la base $\{Y_n\}$ vemos que $p_n \rightarrow p$ y $p'_n \rightarrow p$. Por la continuidad de la acción

$$g \cdot p = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \cdot p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p'_n = p.$$

Además, debido a que la acción es libre, tenemos $g = e$. Por otro lado, como X es paracompacto, para n lo suficientemente grande, ocurre que $g_n \in X$, así

$$\psi(g_n, p_n) = p'_n = \psi(e, p'_n)$$

contradice el hecho de que ψ sea un difeomorfismo en $X \times Y$. Por lo tanto, cada órbita interseca a Y en a lo más un punto.

Ahora, tomemos difeomorfismos

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{B}^k &\rightarrow X \\ \beta : \mathbb{B}^n &\rightarrow Y, \end{aligned}$$

donde \mathbb{B}^k y \mathbb{B}^n son bolas abiertas en \mathbb{R}^k y \mathbb{R}^n , respectivamente. Y definamos el difeomorfismo

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^n &\rightarrow U \\ (x, y) &\mapsto \psi(\alpha(x), \beta(y)). \end{aligned}$$

De esta manera, la carta adaptada y centrada en p estará dada por $(U, \varphi = \gamma^{-1})$. Corroboremos las condiciones

-
- i) Esta propiedad se satisface, pues $\varphi(U) = \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^n$
- ii) Cada rebanada de la forma $y = c$ está contenida en una sola órbita, pues

$$\psi(X \times \{p_0\}) \subset \psi(G \times \{p_0\}) = G \cdot p_0,$$

donde $p_0 \in Y$ es el punto cuya y -ésima entrada es constante. Además, cada órbita interseca a Y es a lo más un punto y cada rebanada de la forma $y = c$ tiene un punto de Y . Entonces, si una órbita arbitraria interseca a U , debe hacerlo en una unión de rebanadas de la forma $y_k = c_k$.

Esto concluye la prueba de la existencia de cartas adaptadas a la acción.

Finalmente, estas cartas adaptadas nos permitirán definir cartas coordenadas en M/G . Para $\pi(p) = q \in M/G$, tomemos una carta coordenada $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n))$, con $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$. Hagamos $V = \pi(U)$, como π es abierta, tenemos que V es abierto. Sea $Y \subset U$ la rebanada definida por $\{x_1 = \dots = x_n = 0\}$. De la definición de carta adaptada, tenemos que $\pi : Y \rightarrow V$ es biyectiva. Más aún, si $W \subset Y$ es abierto, entonces

$$\pi(W) = \pi(\{(x, y) : (0, y) \in W\})$$

es abierto en M/G , luego $\pi|_Y$ es un homeomorfismo. Tomemos $\sigma = (\pi|_Y)^{-1} : V \rightarrow Y$ y definamos

$$\eta = \pi_2 \circ \varphi \circ \sigma : V \rightarrow U_2,$$

donde $\pi_2 : U \rightarrow U_2$ es la proyección, entonces η es homeomorfismo y (V, η) es una carta coordenada para $q = \pi(p)$. \square

4.1. Teorema de Marsden - Weinstein - Meyer

Teorema 4.1.1 (Marsden - Weinstein - Meyer) *Sea (M, ω, G, μ) un G -espacio hamiltoniano, con G un grupo de Lie compacto. Sea $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ el mapeo de inclusión. Asumamos que G actúa libremente en $\mu^{-1}(0)$, entonces*

- i) El espacio de órbitas $M_{red} = \mu^{-1}(0)/G$ es una variedad.*
- ii) $\pi : \mu^{-1}(0) \rightarrow M_{red}$ es un G -fibrado principal.*
- iii) Existe una forma simpléctica ω_{red} en M_{red} que satisface $i^*\omega = \pi^*\omega_{red}$.*

Demostración. Debido a que G actúa libremente en $\mu^{-1}(0)$, tenemos las siguientes implicaciones

- $d\mu_p$ es sobreyectivo para todo $p \in \mu^{-1}(0)$.

- 0 es un valor regular.
- $\mu^{-1}(0)$ es una subvariedad de dimensión igual $\dim M - \dim G$.

Para las primeras dos partes del Teorema es suficiente aplicar el Teorema 4.0.2 a la acción libre de G en $\mu^{-1}(0)$. Para $p \in \mu^{-1}(0)$ el espacio tangente a la órbita $T_p\mathcal{O}_p$ es un subespacio isotrópico del espacio simpléctico (T_pM, ω_p) , es decir, $T_p\mathcal{O}_p \subseteq (T_p\mathcal{O}_p)^\omega$, además

$$(T_p\mathcal{O}_p)^\omega = \ker d\mu_p = T_p\mu^{-1}(0).$$

El Lema 4.0.3 asegura la existencia de una estructura simpléctica en el espacio cociente $T_p\mu^{-1}(0)/T_p\mathcal{O}_p$. El punto $[p] \in M_{red} = \mu^{-1}(0)/G$ tiene por espacio tangente

$$T_{[p]}M_{red} \simeq T_p\mu^{-1}(0)/T_p\mathcal{O}_p.$$

Entonces, dicho Lema, define una 2-forma no degenerada ω_{red} en M_{red} , la cual está bien definida pues ω es invariante bajo la acción. Finalmente, por construcción, tenemos que $i^*\omega = \pi^*\omega_{red}$, donde

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(0) & \xrightarrow{i} & M \\ \downarrow \pi & & \\ M_{red} & & \end{array}$$

Además, $\pi^*d\omega_{red} = d\pi^*\omega_{red} = di^*\omega = i^*d\omega = 0$. La cerradura de ω_{red} se sigue de la inyectividad de π^* . □

Definición 4.1.1 Al par (M_{red}, ω_{red}) se le llama el espacio reducido de (M, ω) .

Ejemplo 4.1.1 Sea $\omega = \frac{i}{2} \sum dz_k \wedge d\bar{z}_k = \sum dx_k \wedge dy_k = \sum r_k dr_k \wedge d\theta_k$ la forma simpléctica estándar en \mathbb{C}^{n+1} . Consideremos la acción de S^1 en $(\mathbb{C}^{n+1}, \omega)$ dada por

$$t \in S^1 \rightarrow \psi_t = \text{multiplicación por } t.$$

Entonces el generador infinitesimal $X^\#$ para la acción está dado por

$$X^\# = \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial \theta_{n+1}}.$$

Luego

$$\iota_{X^\#}\omega = \omega(X^\#, \cdot) = -\sum_{k=1}^{n+1} r_k dr_k = -\frac{1}{2}d\left(\sum_{k=1}^{n+1} r_k^2\right).$$

Por lo que $d\mu = -\frac{1}{2}d\left(\sum_{k=1}^{n+1} r_k^2\right)$. Así

$$\begin{aligned}\mu : \mathbb{C}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto -\frac{|z|^2}{2} + \text{constante}.\end{aligned}$$

Si escogemos la constante igual a $1/2$, entonces

$$\mu^{-1}(0) = S^{2n+1}$$

es la esfera unitaria. Claramente S^1 actúa libre y propiamente en $\mu^{-1}(0)$. Luego, por el Teorema de Marsden-Weinstein-Meyer el espacio de órbitas $\mu^{-1}(0)/S^1$ es una variedad donde la forma simpléctica reducida cumple

$$\text{inc}^*\omega = \pi^*\omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n},$$

donde $\text{inc} : S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ es la inclusión y π es la proyección estándar $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Además se tiene

$$\mu^{-1}(0)/S^1 = S^{2n+1}/S^1 = \mathbb{C}\mathbb{P}^n.$$

Consideremos la inclusión dada por

$$\text{inc}(z) = \frac{1}{\rho}(z, 1),$$

donde $\rho = \sqrt{1 + \|z\|^2}$. Haremos el pullback correspondiente a la inclusión. Para esto $\text{inc}_j = \frac{z_j}{\rho}$, luego

$$\begin{aligned}d\text{inc}_j &= \partial\text{inc}_j + \bar{\partial}\text{inc}_j \\ &= \frac{1}{\rho}dz_j - \frac{z_j}{2\rho^3} \sum_k (\bar{z}_k dz_k + z_k d\bar{z}_k)\end{aligned}$$

Así

$$d\text{inc}_j \wedge \overline{d\text{inc}_j} = \frac{1}{\rho^2} dz_j \wedge d\bar{z}_j - \frac{\bar{z}_j dz_j \wedge z_j d\bar{z}_j}{\rho^4}.$$

De esta forma

$$\text{inc}^*\omega = \frac{i}{2} \sum_j d\text{inc}_j \wedge \overline{d\text{inc}_j} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\rho^2} \sum_j dz_j \wedge d\bar{z}_j - \frac{\sum_j \bar{z}_j dz_j \wedge \sum_j z_j d\bar{z}_j}{\rho^4} \right) \quad (4.1)$$

A esta ecuación se le llama forma de Fubini-Study en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. De manera abreviada puede escribirse como

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2} \partial\bar{\partial} \log(|z|^2).$$

Capítulo 5

Politopos de Delzant

Teorema 5.0.1 (De Atiyah) Sean (M, ω) una variedad simpléctica compacta y \mathbb{T}^m un toro. Supongamos que $\psi : \mathbb{T}^m \rightarrow \text{Simpl}(M, \omega)$ es una acción hamiltoniana con moment map $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Entonces $\mu(M)$ es la envolvente convexa de las imágenes de los puntos fijos de la acción

Para la prueba de este teorema se enunciarán algunos resultados.

5.1. Equivarianza de Darboux

Si $p \in M$ sabemos que existe una carta $(U, (z_1, \dots, z_n))$ en la cual, la forma simpléctica se escribe como

$$\omega = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k.$$

En particular, si p es un punto fijo de la acción, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.1.1 Sea p un punto fijo de la acción de G en M , entonces existen valores $\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{n,p} \in \mathfrak{g}^*$ con los cuales, la acción puede verse de forma lineal en \mathbb{C}^n con pesos $\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{n,p}$. Además, el mapeo de momentos, para $q \in U$, se calcula con la expresión

$$\mu(q) = \mu(p) + \sum_{k=1}^n \alpha_{k,p} \frac{|z_k|^2}{2}.$$

Aunque este Teorema no será probado, sí veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 5.1.1 1) La acción lineal de \mathbb{S}^1 en $(\mathbb{C}, \frac{1}{2i} dz \wedge d\bar{z} = r dr \wedge d\theta)$ está dada por

$$\theta \cdot z = e^{i\theta} z,$$

como el mapeo de momentos $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{s} = \mathbb{R}^* \cong \mathbb{R}$ debe cumplir

$$\begin{aligned} d\mu &= \iota_{\frac{\partial}{\partial \theta}} (rdr \wedge d\theta) \\ &= rdr \\ &= -\frac{d(r^2)}{2} \end{aligned}$$

tenemos que

$$\mu(z) = -\frac{|z|^2}{2} + cte.$$

2) La acción lineal de \mathbb{S}^1 en \mathbb{C} con peso α está dada por

$$\theta \cdot z = e^{i\alpha\theta} z.$$

En este caso, el mapeo de momentos es

$$\mu(z) = -\alpha \frac{|z|^2}{2} + cte.$$

3) Finalmente, la acción lineal del toro \mathbb{T}^n en \mathbb{C} , con peso $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$, $\alpha \cong (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, es

$$(\theta_1, \dots, \theta_n) \cdot z = e^{i(\alpha_1\theta_1, \dots, \alpha_n\theta_n)} z.$$

Para cada campo $\frac{\partial}{\partial \theta_k}$ el mapeo de momentos satisface

$$d\mu_{\frac{\partial}{\partial \theta_k}} = \alpha_k \frac{|z|^2}{2} + cte.$$

5.2. Convexidad Local

Teorema 5.2.1 Sean $p \in M$ un punto fijo de la acción y $(U, (z_1, \dots, z_n))$ la carta con las propiedades del Teorema de Equivarianza de Darboux. Entonces, la imagen de U bajo el mapeo de momentos es

$$\begin{aligned} \mu(U) &= \left\{ \mu(p) + \sum_{k=1}^n S_k \alpha_{k,p} : S_k \geq 0 \right\} \\ &= \mu(p) + S(\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{n,p}), \end{aligned}$$

donde $S(\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{n,p}) = \left\{ \mu(p) + \sum_{k=1}^n S_k \alpha_{k,p} : S_k \geq 0 \right\} \subset \mathfrak{g}^*$ es un cono con vértice en $\mu(p)$.

Si p no es un punto fijo, podemos considerar la acción restringida a su estabilizador $H \subset G$ y aplicar el resultado. El mapeo de momentos μ_H se obtiene a partir de μ en composición y la función $\pi : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$, inducida por la inclusión de H en G , a saber

$$\mu_H = \pi \circ \mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*.$$

Entonces

$$\mu_H(U) = \mu_H(p) + S_H(\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{n,p}) \subset \mathfrak{h}^*,$$

con $\alpha_{k,p} \in \mathfrak{h}^*$. De esta manera

$$\begin{aligned} \mu(U) &= \pi^{-1}(\mu_H(U)) \\ &= \pi^{-1}(\mu_H(p) + S_H(\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{n,p})) \\ &= \mu(p) + \pi^{-1}(S_H(\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{n,p})) \\ &= \mu(p) + S'(\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{n,p}), \end{aligned}$$

por notación, hemos puesto $\pi^{-1}(S_H(\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{n,p})) = S'(\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{n,p})$.

5.3. Convexidad Global

La convexidad global de la imagen del mapeo de momentos será probada utilizando la convexidad local y el siguiente

Lema 5.3.1 *Para cualquier $X \in \mathfrak{g}$, la función*

$$\begin{aligned} \mu^X : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \langle \mu(p), X \rangle \end{aligned}$$

tiene un máximo local.

Debido a que M es variedad compacta, $\mu(M)$ es cerrado y acotado en $\mathfrak{g}^* = (\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$. Sea $\xi \in \mathfrak{g}^*$ un punto en la frontera y tomemos $p \in \mu^{-1}(\xi)$. Hagamos $H \subset G$ el estabilizador de p . Sean $\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{d,p} \in \mathfrak{h}^*$ los correspondientes pesos. Entonces

$$\mu(U) = \xi + S'(\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{d,p}).$$

Sea S_k una componente conexa de la frontera de $S'(\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{d,p})$, debido a que S_k tiene codimensión al menos uno, podemos tomar $X \in \mathfrak{g}$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \rho, X \rangle &\equiv 0 \quad \forall \quad \rho \text{ en } S_k \\ \langle \rho, X \rangle &< 0 \quad \forall \quad \rho \text{ en el interior de } S'(\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{d,p}). \end{aligned}$$

Así, si $\langle \xi, X \rangle = a$, entonces para $q \in U$ tenemos

$$\begin{aligned}\mu^X(q) &= \langle \mu(q), X \rangle \\ &= \langle \mu(p) + S'(q), X \rangle \\ &= \langle \mu(p), X \rangle + \langle S'(q), X \rangle \\ &\leq a.\end{aligned}$$

De esta manera, a es un máximo local de μ^X . Pero por el Lema anterior, en realidad se tiene $\mu^X(M) \leq a$, esto es, a es un máximo global. Aplicando este argumento a todas las caras S_k de $S'(\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{d,p})$ concluimos que $\mu(M)$ se encuentra dentro de un cono

$$\mu(M) \subset \xi + S'(\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{d,p})$$

Definición 5.3.1 Una acción de un grupo de Lie G en una variedad M se llama efectiva si cada elemento g distinto de la identidad mueve al menos a un $p \in M$, o bien, si

$$\bigcap_{p \in M} G_p = \{e\},$$

donde G_p es el estabilizador de p .

Proposición 5.3.1 Bajo las condiciones del teorema de convexidad, si una acción de \mathbb{T}^m en la variedad $2n$ -dimensional M es efectiva, entonces existen al menos $m+1$ puntos fijos.

Demostración. Si la acción es efectiva, entonces existe al menos un punto $p \in M$ para el cual el mapeo de momentos es una submersión, esto es, el conjunto $(d\mu_1)_p, \dots, (d\mu_m)_p$ es linealmente independiente. Así, $\mu(p)$ es un punto interior del politopo convexo $\mu(M)$, donde cada vértice es la imagen, bajo el mapeo de momentos, de un punto fijo. Además, todo politopo en \mathbb{R}^n no degenerado tiene al menos $m+1$ vértices. \square

Proposición 5.3.2 Sea $(M, \omega, \mathbb{T}^m, \mu)$ un \mathbb{T}^m -espacio hamiltoniano. Si \mathbb{T}^m actúa de manera efectiva, entonces $\dim M \geq 2m$.

Demostración. Cada órbita \mathcal{O} de la acción tiene dimensión igual a m . Además, debido a que el mapeo de momentos es invariante bajo la acción, en cada órbita es constante, digamos $\mu(\mathcal{O}) = \xi$. De esta manera, para $p \in \mathcal{O}$ tenemos que $d\mu_p : T_p M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ satisface $d\mu_p(T_p \mathcal{O}) = 0$. Luego

$$T_p \mathcal{O} \subseteq \ker d\mu_p = (T_p \mathcal{O})^\omega,$$

así, las órbitas son subvariedades isotrópicas de M , por lo tanto

$$\dim \mathcal{O} = m \leq \frac{1}{2} \dim M.$$

\square

Definición 5.3.2 Una variedad tórica (M, ω) es una variedad simpléctica compacta y conexa equipada con una acción hamiltoniana y efectiva de un toro \mathbb{T} tal que

$$\dim \mathbb{T} = \frac{1}{2} \dim M.$$

A continuación se muestran algunos ejemplos de politopos obtenidos mediante acciones tóricas.

Ejemplo 5.3.1 Si \mathbb{S}^1 actúa por rotaciones en $(\mathbb{S}^2, \omega = d\theta \wedge dh)$, sabemos que el mapeo de momentos está dado por $\mu = h$. Entonces el politopo generado en \mathbb{R} es $[-1, 1]$.

Ejemplo 5.3.2 Consideremos \mathbb{T}^2 actuando en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ de la siguiente manera

$$(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \cdot [z_0, z_1, z_2] = [z_0, e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_2} z_2].$$

Ya hemos visto que la forma simpléctica en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ está dada por

$$\mu(z) = \partial\bar{\partial} \log(1 + |z|^2),$$

de esta manera, el mapeo de momentos es

$$\mu[z_0, z_1, z_2] = -\frac{1}{2} \left(\frac{|z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2}, \frac{|z_2|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2} \right).$$

Los puntos fijos de la acción son

$$\begin{aligned} p_1 &= [1, 0, 0] \\ p_2 &= [0, 1, 0] \\ p_3 &= [0, 0, 1], \end{aligned}$$

y sus imágenes bajo el mapeo de momentos

$$\begin{aligned} \mu(p_1) &= -\frac{1}{2}(0, 0) = (0, 0) \\ \mu(p_2) &= -\frac{1}{2}(1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \\ \mu(p_3) &= -\frac{1}{2}(0, 1) = \left(0, -\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3.3 Análogamente al ejemplo anterior, sea \mathbb{T}^3 actuando en $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ como

$$(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) \cdot [z_0, z_1, z_2, z_3] = [z_0, e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_2} z_2, e^{i\theta_3} z_3].$$

En este caso, el mapeo de momentos es

$$\mu[z_0, z_1, z_2, z_3] = -\frac{1}{2} \left(\frac{|z_1|^2}{\sum |z_i|^2}, \frac{|z_2|^2}{\sum |z_i|^2}, \frac{|z_3|^2}{\sum |z_i|^2} \right).$$

Los puntos fijos de la acción son

$$\begin{aligned} p_1 &= [1, 0, 0, 0] \\ p_2 &= [0, 1, 0, 0] \\ p_3 &= [0, 0, 1, 0] \\ p_4 &= [0, 0, 0, 1] \end{aligned}$$

y sus imágenes

$$\begin{aligned} \mu(p_1) &= (0, 0, 0) \\ \mu(p_2) &= \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right) \\ \mu(p_3) &= \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right) \\ \mu(p_4) &= \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3.4 Finalmente, \mathbb{T}^2 actuando en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ de la siguiente manera

$$(e^{i\theta}, e^{in}) \cdot ([z_0, z_1], [w_0, w_1]) = ([z_0, e^{i\theta} z_1], [w_0, e^{in} w_1]).$$

El mapeo de momentos está dado por

$$\mu([z_0, z_1], [w_0, w_1]) = -\frac{1}{2} \left(\frac{|z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2}, \frac{|w_1|^2}{|w_0|^2 + |w_1|^2} \right).$$

Los puntos fijos de la acción y sus imágenes bajo el mapeo de momentos son

$$\begin{aligned} p_1 = ([1, 0], [1, 0]) &\mapsto -\frac{1}{2}(0, 0) = (0, 0) \\ p_2 = ([1, 0], [0, 1]) &\mapsto -\frac{1}{2}(0, 1) = \left(0, -\frac{1}{2}\right) \\ p_3 = ([0, 1], [1, 0]) &\mapsto -\frac{1}{2}(1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \\ p_4 = ([0, 1], [0, 1]) &\mapsto -\frac{1}{2}(1, 1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

5.4. Polítopos de Delzant

Definición 5.4.1 Un polítopo convexo $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ se llama de Delzant si es:

- *Simple:* en cada vértice se encuentran n aristas.
- *Racional:* las aristas que se encuentran en un vértice p son de la forma $p + tu_i$, con $0 \leq t < \infty$ y $u_i \in \mathbb{Z}^n$.
- *Suave:* para cada vértice p , los vectores u_1, \dots, u_n pueden tomarse de tal forma que sean base de \mathbb{Z}^n .

Los siguientes conjuntos son ejemplos de Polítopos de Delzant:

Los siguientes conjuntos no son Polítopos de Delzant:

Definición 5.4.2 Sea Δ un polítopo de Delzant con $n = \dim \Delta$ y $d = \text{número de caras}$. Un elemento $v \in \mathbb{Z}^n$ es primitivo si no es posible escribirlo como

$$v = ku$$

con $u \in \mathbb{Z}^n$ y $|k| > 1$.

Equivalentemente, si todas sus entradas no tienen divisores comunes.

Ejemplo 5.4.1

<i>Son primitivos</i>	<i>No son primitivos</i>
$(1, 1), (4, 3), (1, 0)$	$(2, 2), (4, 6)$

5.4.1. Descripción Algebraica

Consideremos el siguiente polítopo Δ :

En cada arista tomemos un vector ortogonal. Dichos vectores pueden reducirse hasta que sus entradas no tengan divisores comunes, esto es, hasta que sean vectores primitivos, digamos v_1, v_2, v_3 . Ahora, notemos que para todo $x \in \Delta$ se cumplen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}\langle x, v_1 \rangle &\leq \langle p_2, v_1 \rangle \\ \langle x, v_2 \rangle &\leq \langle p_2, v_2 \rangle \\ \langle x, v_3 \rangle &\leq \langle p_3, v_3 \rangle.\end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \langle p_2, v_1 \rangle \\ \lambda_2 &= \langle p_2, v_2 \rangle \\ \lambda_3 &= \langle p_2, v_3 \rangle\end{aligned}$$

podemos expresar el politopo de la siguiente manera

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^2)^* : \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i, \text{ con } i = 1, 2, 3\}.$$

En general, un politopo en \mathbb{R}^n de dimensión d puede escribirse como

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i, \text{ con } i = 1, \dots, d\}.$$

Teorema 5.4.1 (de Delzant) *Todas las variedades tóricas son clasificadas por politopos de Delzant. Más específicamente, existe una correspondencia biunívoca*

$$\begin{aligned} \{\text{variedades tóricas}\} &\longleftrightarrow \{\text{Politopos de Delzant}\} \\ (M^{2n}, \omega, \mathbb{T}^n, \mu) &\longmapsto \mu(M) \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ un politopo de Delzant de dimensión d . Digamos que

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i, \text{ con } i = 1, \dots, d\}.$$

Consideremos la siguiente aplicación lineal

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ e_k &\longmapsto v_k, \end{aligned}$$

donde $\{e_1, \dots, e_d\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^d . Afirmamos que π es sobreyectiva y mapea \mathbb{Z}^d sobre \mathbb{Z}^n . En efecto, notemos que $\{e_1, \dots, e_d\}$ genera a \mathbb{Z}^d . Ahora, recordemos que en cada vértice los vectores $u_1, \dots, u_n \in (\mathbb{R}^n)^*$ forman una base de $(\mathbb{Z}^n)^*$, podemos suponer que dicha base es la canónica. Entonces, si v_i es el correspondiente vector primitivo ortogonal a las caras que se encuentran en un punto p , debe cumplirse que $v_i = -u_{k_i}$, para algún k_i . Así, $\{v_1 = -u_{k_1}, \dots, v_d = -u_{k_d}\}$ es base de \mathbb{Z}^n .

Podemos inducir un mapeo en los cocientes, (que también llamaremos π)

$$\begin{array}{ccc} \pi : & \mathbb{T}^d & \longrightarrow & \mathbb{T}^n \\ & \parallel & & \parallel \\ & \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n. \end{array}$$

Sea $N = \ker \pi \subset \mathbb{T}^d$, entonces N es subgrupo de Lie compacto, con $\dim N = d - n$. En los grupos y álgebras de Lie, tenemos las siguientes sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow N \longrightarrow \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^n \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow \mathfrak{n} \longrightarrow \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Y en los duales de las álgebras

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow (\mathbb{R}^d)^* \longrightarrow \mathfrak{n}^* \longrightarrow 0.$$

Ahora, consideremos la acción hamiltoniana de \mathbb{T}^d en $(\mathbb{C}^d, \omega_0 = \frac{i}{2} \sum dz_k \wedge d\bar{z}_k)$

$$(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d}) \cdot (z_1, \dots, z_d) = (e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_d} z_d),$$

cuyo mapeo de momentos $\mu : \mathbb{C}^d \rightarrow (\mathbb{R}^d)^*$ está dado por

$$\mu(z) = -\frac{1}{2} (|z_1|^2, \dots, |z_d|^2) + \text{constante},$$

la constante que se tomará será igual a $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (\mathbb{R}^d)^*$. Si $i : \mathfrak{n} \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ es la inclusión entre las álgebras de Lie, entonces, el mapeo dual está dado por la proyección $i^* : (\mathbb{R}^d)^* \rightarrow \mathfrak{n}^*$. Y el mapeo de momentos, de la acción restringida del subtoro N , es

$$\mu_N = i^* \circ \mu : \mathbb{C}^d \rightarrow (\mathbb{R}^d)^* \rightarrow (\mathfrak{n})^*.$$

Hagamos $Z = (\mu_N)^{-1}(0)$. Afirmamos que $Z \subset \mathbb{C}^d$ es subvariedad compacta con

$$\dim_{\mathbb{R}} Z = 2d - (d - n) = d + n,$$

y que N actúa libremente en Z .

En efecto, veremos que Z es cerrado y acotado. Claramente Z es cerrado, pues es la imagen inversa de 0. Para comprobar que Z es acotado hagamos

$$\Delta' = \pi^*(\Delta),$$

mostraremos que $\mu(Z) = \Delta'$. Sea $y \in (\mathbb{R}^d)^*$, entonces

$$y \in \Delta' \Leftrightarrow y \in \mu(Z).$$

Ahora, el valor de y está en la imagen de Z por μ si, y solo si, se siguen las condiciones:

1. y está en la imagen de μ
2. $i^*(y) = 0$

De la definición del mapeo de momentos

$$\mu(z_1, \dots, z_d) = -\frac{1}{2} (|z_1|^2, \dots, |z_d|^2) + (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$$

y usando la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow (\mathbb{R}^d)^* \longrightarrow \mathfrak{n}^* \longrightarrow 0,$$

las dos condiciones anteriores son equivalentes a

1. $\langle y, e_i \rangle \leq \lambda_i$ para $i = 1, \dots, d$

2. $y = \pi^*(x)$ para algún $x \in (\mathbb{R}^n)^*$

Supongamos que la segunda condición se cumple, esto es $y = \pi^*(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle y, e_i \rangle \leq \lambda_i, \quad \forall i &\Leftrightarrow \langle \pi^*(x), e_i \rangle \leq \lambda_i, \quad \forall i \\ &\Leftrightarrow \langle x, \pi^*(e_i) \rangle \leq \lambda_i, \quad \forall i \\ &\Leftrightarrow \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i, \quad \forall i \\ &\Leftrightarrow x \in \Delta. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y \in \mu(Z) \Leftrightarrow y \in \pi^*(\Delta) = \Delta'.$$

Por otro lado, notemos que $\Delta' = \mu(Z)$ es compacto. Como μ es un mapeo propio tenemos que $Z \subset \mu^{-1}(\Delta)$ es acotado, luego es compacto.

Ahora, veremos que N actúa libremente en Z . Fijemos un vértice p en Δ , sea $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ el conjunto de índices para las n caras que inciden en p . Tomemos $z \in Z$ tal que $\mu(z) = \pi^*(p)$. Entonces p está caracterizado por las n ecuaciones

$$\langle p, v_i \rangle = \lambda_i, \quad \text{donde } i \in I.$$

Pero

$$\begin{aligned} \langle p, v_i \rangle = \lambda_i &\Leftrightarrow \langle p, \pi(e_i) \rangle = \lambda_i \\ &\Leftrightarrow \langle \pi^*(p), e_i \rangle = \lambda_i \\ &\Leftrightarrow \langle \mu(z), e_i \rangle = \lambda_i \\ &\Leftrightarrow \text{i-ésima coordenada de } \mu(z) \text{ es } \lambda_i \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} |z_i|^2 + \lambda_i = \lambda_i \\ &\Leftrightarrow z_i = 0. \end{aligned}$$

Estos puntos z son aquellos cuyas coordenadas en el conjunto I son cero y las otras no. Sin pérdida de generalidad, asumiremos que $I = \{1, \dots, n\}$. El estabilizador de z es

$$(\mathbb{T}^d)_z = \{(t_1, \dots, t_n, \underbrace{1, \dots, 1}_{d-n}) \in \mathbb{T}^d\}.$$

Como la restricción

$$\pi : (\mathbb{R}^d)_z \rightarrow \mathbb{R}^n$$

envía los vectores e_1, \dots, e_n a la base v_1, \dots, v_n de \mathbb{Z}^n , a nivel de grupos

$$\pi : (\mathbb{T}^d)_z \rightarrow \mathbb{T}^n$$

debe ser biyectiva. Como

$$N = \ker(\pi : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^n),$$

concluimos que

$$N \cap (\mathbb{T}^d)_z = \{e\},$$

es decir

$$N_z = \{e\}.$$

Luego, los estabilizadores en puntos que mapean hacia los vértices son triviales. Pero esto es el caso más grande, debido a que los otros estabilizadores $N_{z'}$, con $z' \in Z$, están contenidos en los estabilizadores de los vértices.

Para concluir, aplicaremos el Teorema de reducción de Marsden - Weinstein - Meyer. Hagamos $M_\Delta = Z/N$, entonces

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} M_\Delta &= \dim Z - \dim N \\ &= d + n - (d - n) \\ &= 2n. \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} p: Z &\longrightarrow M_\Delta \\ x &\longmapsto \mathcal{O}_x, \end{aligned}$$

así, existe una forma simpléctica ω_Δ en M_Δ tal que

$$p^*\omega_\Delta = j^*\omega_0.$$

Veremos que la variedad $(M_\Delta, \omega_\Delta)$ es un \mathbb{T}^n -espacio hamiltoniano, cuyo mapeo de momentos μ_Δ , satisface $\mu_\Delta(M_\Delta) = \Delta$.

Si F es una cara de $\Delta' = \pi^*(\Delta) = \mu(Z)$, con $\dim F = n - r$. Entonces, F está caracterizado por las r ecuaciones

$$\langle y, e_i \rangle = \lambda_i, \text{ con } i = i_1, \dots, i_r.$$

Escribamos $F = F_I$, donde $I = (i_1, \dots, i_r)$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq d$. Para $z = (z_1, \dots, z_d) \in Z$, su estabilizador, con respecto a la \mathbb{T}^d -acción, es $(\mathbb{T}^d)_I$ y satisface

$$(\mathbb{T}^d)_I \cap N = \{e\}.$$

Aún en el caso más extremo, cuando F_I es un vértice, $(\mathbb{T}^d)_I$ es un subgrupo de \mathbb{T}^d y existe un mapeo inverso

$$\pi^{-1}: \mathbb{T}^n \rightarrow (\mathbb{T}^d)_I.$$

Para la acción de $\mathbb{T}^d = N \times \mathbb{T}^n$ en $(M_\Delta, \omega_\Delta)$ el mapeo de momentos es

$$\phi: \mathbb{C}^d \rightarrow (\mathbb{R}^d)^* = \mathfrak{n}^* \oplus (\mathbb{R}^n)^*.$$

Consideremos la inclusión $j : Z \hookrightarrow \mathbb{C}^d$ y las proyecciones

$$\begin{aligned} \text{pr}_1 : (\mathbb{R}^d)^* &\rightarrow \mathfrak{n}^* \\ \text{pr}_2 : (\mathbb{R}^d)^* &\rightarrow (\mathbb{R}^n)^*. \end{aligned}$$

Como

$$\text{pr}_2 \circ \phi \circ j : Z \hookrightarrow \mathbb{C}^d \rightarrow (\mathbb{R}^d)^* \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$$

es constante en las N -órbitas, entonces existe un mapeo

$$\mu_\Delta : M_\Delta \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$$

tal que

$$\mu_\Delta \circ p = \text{pr}_2 \circ \phi \circ j,$$

donde $p : Z \rightarrow M_\Delta$ manda a cada x a su órbita \mathcal{O}_x .

La imagen de μ_Δ es igual a la imagen de $\text{pr}_2 \circ \phi \circ j$. Como $\phi(Z) = \mu(Z) = \pi^*(\Delta) = \Delta'$ tenemos

$$\mu_\Delta(M_\Delta) = \text{pr}_2(\Delta') = \underbrace{\text{pr}_2 \circ \pi^*}_{\text{identidad}}(\Delta) = \Delta.$$

□

Ejemplo 5.4.2 Consideremos $d = 2$, $n = 1$. Sea $\Delta = [0, 1] \subset \mathbb{R}^*$. Tomemos $v = 1$ y

$$\begin{aligned} v_1 &= -v \\ v_2 &= v. \end{aligned}$$

De esta manera, el politopo está caracterizado de la siguiente manera

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^* : \langle x, v_1 \rangle \leq 0, \langle x, v_2 \rangle \leq 1\}.$$

La función

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ e_1 &\mapsto -v \\ e_2 &\mapsto v, \end{aligned}$$

cumple

$$\pi(e_1 + e_2) = -v + v = 0,$$

así, $N = \ker \pi = \text{span}(e_1 + e_2)$, es decir, la diagonal de $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

Tenemos la sucesión

$$0 \rightarrow \mathfrak{n} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R} \rightarrow 0,$$

donde

$$\pi = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Además, la sucesión dual es

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^* \xrightarrow{\pi^*} (\mathbb{R}^2)^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{n}^* \rightarrow 0$$

con

$$\pi^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La acción de la diagonal $N = \{(e^{i\theta}, e^{i\theta}) \in S^1 \times S^1\}$ en \mathbb{C}^2 está dada por

$$(e^{i\theta}, e^{i\theta}) \cdot (z_1, z_2) = (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2),$$

con mapeo de momentos

$$\begin{aligned} (i^* \circ \mu)(z_1, z_2) &= i^* (-(|z_1|^2, |z_2|^2) + (0, 1)) \\ &= i^* (-|z_1|^2, -|z_2|^2 + 1) \\ &= -(|z_1|^2 + |z_2|^2) + 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(i^* \circ \mu)^{-1}(0) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, y el espacio reducido es

$$(i^* \circ \mu)^{-1}(0)/N = \mathbb{C}\mathbb{P}^1.$$

Ejemplo 5.4.3 Ahora, consideremos el politopo:

Con

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, -1) \\ v_2 &= (1, 1) \\ v_3 &= (-1, 0) \end{aligned}$$

entonces, podemos describirlo como

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^2)^* : \langle x, v_1 \rangle \leq 0, \langle x, v_2 \rangle \leq 1, \langle x, v_3 \rangle \leq 0\}.$$

La aplicación lineal

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ e_i &\mapsto v_i \end{aligned}$$

cumple que $N = \ker \pi = \text{span}(e_1 + e_2 + e_3)$.

Así, en las sucesiones

$$0 \rightarrow \mathfrak{n} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^2 \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^* \xrightarrow{\pi^*} (\mathbb{R}^3)^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{n}^* \rightarrow 0$$

tenemos

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \pi^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i^* = (1 \ 1 \ 1).$$

La acción de N en \mathbb{C}^3 tiene por mapeo de momentos

$$\begin{aligned} (i^* \circ \mu)(z_1, z_2, z_3) &= i^* (-(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2) + (0, 1, 0)) \\ &= -(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) + 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(i^* \circ \mu)^{-1}(0) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1\}$ y el espacio reducido

$$(i^* \circ \mu)^{-1}(0)/N = \mathbb{C}\mathbb{P}^2.$$

Ejemplo 5.4.4 Esta es la versión en 3 dimensiones del ejemplo anterior. Consideremos el siguiente politopo donde

$$\begin{aligned} v_1 &= (-1, 0, 0) \\ v_2 &= (0, -1, 0) \\ v_3 &= (0, 0, -1) \\ v_4 &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Entonces

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^4)^* : \langle x, v_1 \rangle \leq 0, \langle x, v_2 \rangle \leq 0, \langle x, v_3 \rangle \leq 0, \langle x, v_4 \rangle \leq 1\}.$$

El kernel de la función $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ está dado por $N = \ker \pi = \text{span}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$, es decir, la diagonal de \mathbb{T}^4 . En las sucesiones

$$0 \rightarrow \mathfrak{n} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^3 \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow (\mathbb{R}^3)^* \xrightarrow{\pi^*} (\mathbb{R}^4)^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{n}^* \rightarrow 0$$

tenemos

$$\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \pi^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad i^* = (1 \ 1 \ 1 \ 1).$$

Luego, la acción de N en \mathbb{C}^4 tiene por mapeo de momentos

$$\begin{aligned}(i^* \circ \mu)(z_1, z_2, z_3, z_4) &= i^*(-(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2, |z_4|^4) + (0, 0, 0, 1)) \\ &= -(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2) + 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(i^* \circ \mu)^{-1}(0) = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = 1\}$ y el espacio reducido es

$$(i^* \circ \mu)^{-1}(0)/N = \mathbb{C}\mathbb{P}^3.$$

Ejemplo 5.4.5 Finalmente, consideremos el politopo:

Con

$$\begin{aligned}v_1 &= (1, 0) \\ v_2 &= (-1, 0) \\ v_3 &= (0, 1) \\ v_4 &= (0, -1).\end{aligned}$$

Entonces

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^2)^* : \langle x, v_1 \rangle \leq 1, \langle x, v_2 \rangle \leq 0, \langle x, v_3 \rangle \leq 1, \langle x, v_4 \rangle \leq 0\}.$$

El kernel de la aplicación

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ e_i &\mapsto v_i\end{aligned}$$

está dado $N = \text{span}\{\text{span}(e_1 + e_2) + \text{span}(e_3 + e_4)\}$. Podemos escribirlo como $N = (t_1, t_1, t_2, t_2)$. De esta manera, en la sucesión

$$0 \rightarrow \mathfrak{n} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^2 \rightarrow 0,$$

tenemos

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además, en

$$0 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^* \xrightarrow{\pi^*} (\mathbb{R}^4)^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{n}^* \rightarrow 0$$

tenemos

$$\pi^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad i^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, el mapeo de momentos de la acción de N en \mathbb{C}^3 está dado por

$$\begin{aligned}(i^* \circ \mu)(z_1, z_2, z_3, z_4) &= i^* (-(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2, |z_4|^2) + (1, 0, 1, 0)) \\ &= i^* (-|z_1|^2 + 1, -|z_2|^2, -|z_3|^2 + 1, -|z_4|^2) \\ &= (-|z_1|^2 - |z_2|^2 + 1, -|z_3|^2 - |z_4|^2 + 1).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(i^* \circ \mu)^{-1}(0) = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2 + |z_4|^2 = 1\}$ y el espacio reducido

$$(i^* \circ \mu)^{-1}(0)/N = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1.$$

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se introdujo al estudio de los conceptos básicos de Grupos y Álgebras de Lie, así como al estudio de algunos ejemplos. De la misma manera, se conocieron y estudiaron las Variedades Simpléticas. Además, se mostraron dos tipos de acciones de Grupos de Lie; Simpléticas y Hamiltonianas. Las segundas resultaron de suma importancia, pues son necesarias para definir el concepto de Mapeo de Momentos. Así mismo, el Mapeo de Momentos es imprescindible para aplicar la reducción simpléctica. Con la cual, se obtiene una nueva Variedad Simplética a partir de otra ya conocida.

El mayor logro alcanzado durante este trabajo fue el desarrollo del Teorema de Delzant, pues con él se caracterizan las Variedades Tóricas poniéndolas en correspondencia biunívoca con los Polítopos de Delzant.

Bibliografía

- [1] Arnold V., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, USA, 1978.
- [2] Boothby William M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press Inc., USA. 1986.
- [3] Bryant Robert L., *An Introduction to Lie Groups and Symplectic Geometry*. bryant@math.duke.edu
- [4] Cannas Da Silva Ana, *Lectures on Symplectic Manifolds*. Springer-Verlag, USA, 2006.
- [5] Cannas Da Silva Ana, *Symplectic Toric Manifolds*. acannas@math.ist.utl.pt
- [6] Guillemin Victor, Pollack Alan, *Differential Topology*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1974.
- [7] Guillemin Victor, *Moment Maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian \mathbb{T}^n – spaces*. Springer Science + Bussines Media, USA, 1994.
- [8] Lee Jhon M., *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, USA, 2013.
- [9] Lee Jhon M., *Introduction to Topological Manifolds*. Springer-Verlag, USA. 2011.
- [10] Perdigao Docarmo Manfredo, *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Basel, 1993.
- [11] Spivak Michael, *Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, Inc., Wilmington, 1979.
- [12] Warner Frank W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag, USA, 1995.