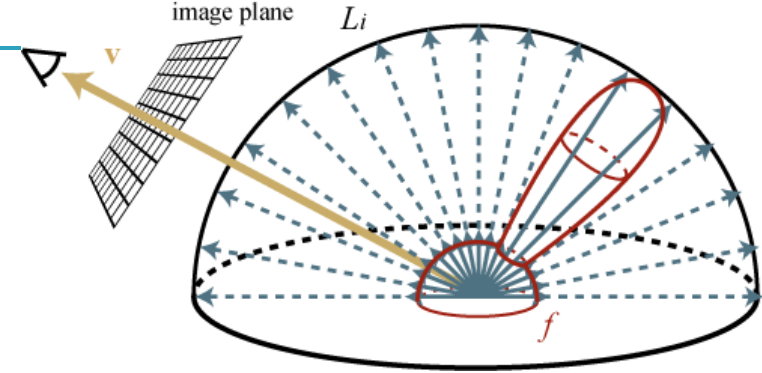

Počítačová grafika III – Zobrazovací rovnice a její řešení

Jaroslav Křivánek, MFF UK

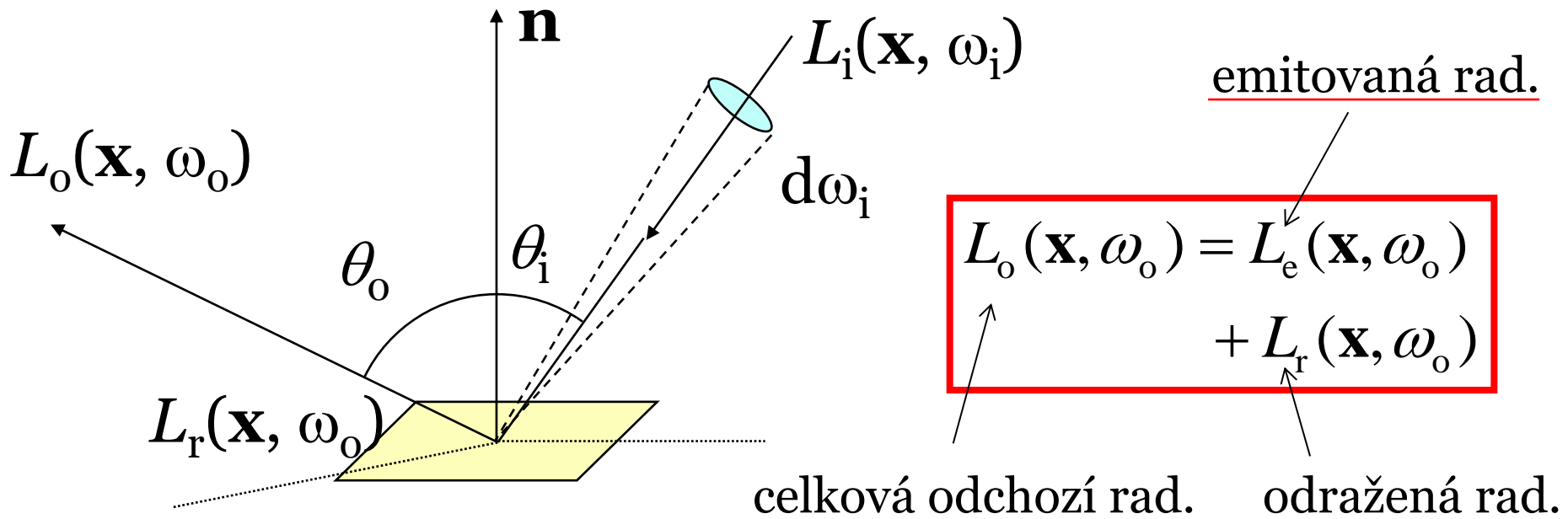
Jaroslav.Krivanek@mff.cuni.cz

Rovnice odrazu



- „Sečtení“ (integrál) příspěvků dL_r přes celou hemisféru:

$$L_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_{H(\mathbf{x})} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$



Od lokálního odrazu ke globálnímu šíření světla

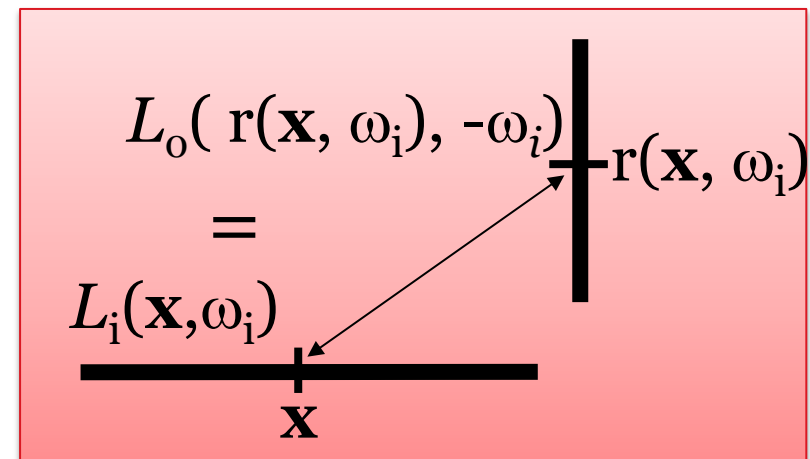
- Rovnice odrazu (lokální odraz)

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{H(\mathbf{x})} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

- Odkud přichází radiance $L_i(\mathbf{x}, \omega_i)$?
 - Z ostatních míst ve scéně !!!

$$L_i(\mathbf{x}, \omega_i) = L_o(\mathbf{r}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i)$$

Funkce vržení paprsku
(ray casting function)



Od lokálního odrazu ke globálnímu šíření světla

- Dosazení za L_i do rovnice odrazu

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{H(\mathbf{x})} L_o(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

- Příchozí radiance L_i vyloučena.
- Odchozí radiance L_o popsána jako funkce L_o jinde ve scéně.

Zobrazovací rovnice – Rendering equation

- Odstranění indexu „o“ u odchozí radiance:

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{H(\mathbf{x})} L(\mathbf{r}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

- Popis ustáleného stavu = **energetické rovnováhy** ve scéně.
- **Rendering** = výpočet $L(\mathbf{x}, \omega_o)$ pro místa viditelná přes pixely.

Rovnice odrazu vs. zobrazovací rovnice

Podobný tvar – jiný význam

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{H(\mathbf{x})} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

■ Rovnice odrazu (reflection equation)

- popisuje **lokální odraz světla** v jednom místě
- Integrál, pomocí něhož lze spočítat odchozí radianci z příchozí radiance v daném bodě

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{H(\mathbf{x})} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

■ Zobrazovací rovnice (rendering equation)

- Podmínka na **globální rozložení světla ve scéně**
- Integrovaná rovnice – neznámá L vlevo i vpravo

Rendering Equation – Kajiya 1986

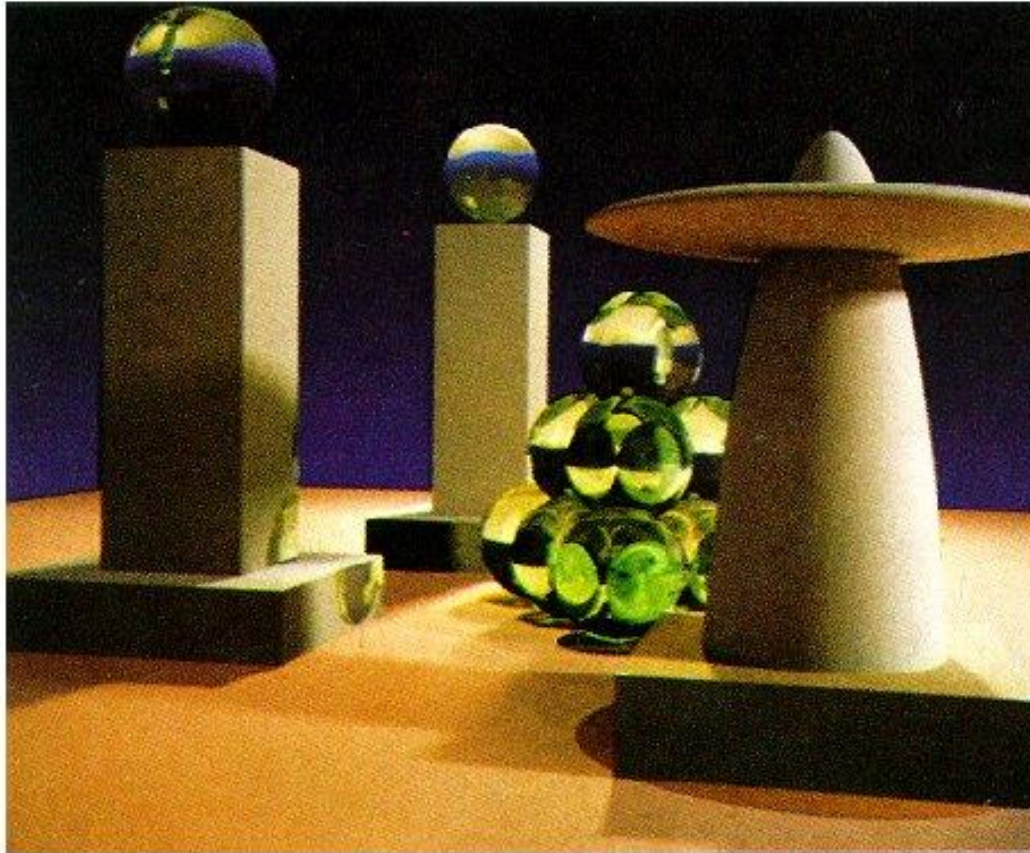


Figure 6. A sample image. All objects are neutral grey. Color on the objects is due to caustics from the green glass balls and color bleeding from the base polygon.

Kompletní formulace úlohy

■ Dáno

- M ... plocha, geometrie scény
 - $r(\mathbf{x}, \omega)$... funkce vržení paprsku
 - $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$... funkce viditelnosti
- $L_e(\mathbf{x}, \omega)$... emitovaná radiance (zdroje světla)
- $f_r(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o)$... BRDF (materiál povrchů)

■ Cíl

- Vypočítat hodnotu radiance v ustáleném stavu pro množinu bodů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ na M s příslušnými směry $\omega_{o,1}, \omega_{o,2}, \dots, \omega_{o,n}$

■ Matematická úloha

- Nyní už žádná fyzika, jen matematika a algoritmy

Směrová a plošná forma ZR

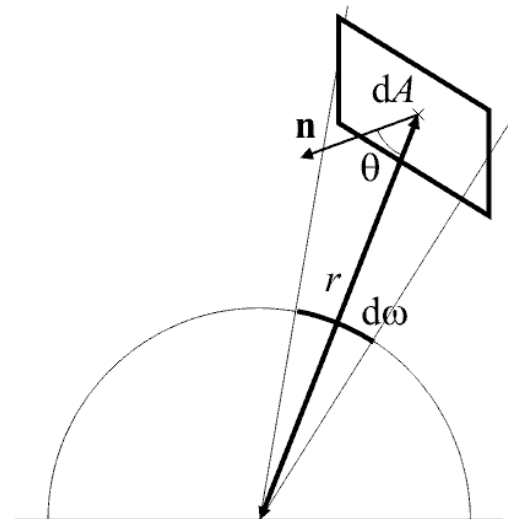
Zobrazovací rovnice – směry vs plochy

- **Úhlová forma:** integrál přes směry

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{H(\mathbf{x})} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

- Substituce:

$$d\omega = dA \frac{\cos \theta}{r^2}$$



Zobrazovací rovnice – úhly vs plochy

- **Plošná forma:** integrál přes plochy scény

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o)$$

$$+ \int_M L(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) \cdot f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_o) \cdot G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) \cdot V(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) dA_y$$

povrch scény

geometrický člen

$$G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) = \frac{\cos \theta_x \cdot \cos \theta_y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}$$

viditelnost

1 ... \mathbf{y} viditelné z \mathbf{x}
0 ... jinak

Integrál přes směry

- Sčítání příspěvků světla do bodu ze všech směrů
- Pro každý směr najdu nejbližší plochu
- Implementace ve stochastickém sledování paprsku:
 - Pro dané místo \mathbf{x} , generuj náhodné směry, pro každý najdi nejbližší průsečík, v něm spočítej odchozí radianci. To vše sečti přes všechny vygenerované náhodné směry.
- Typické použití: výpočet **nepřímého osvětlení** v bodě nebo výpočet přímého osvětlení z velkých zdrojů a/nebo na velmi lesklých plochách.

Integrál přes plochy

- Sčítání příspěvků světla do bodu z ploch scény
- Příspěvek započítán pouze pokud je plocha viditelná
- Implementace ve stochastickém sledování paprsku:
 - Generuj náhodně místa \mathbf{y} na geometrii. Pro každé otestuj viditelnost mezi \mathbf{x} a \mathbf{y} . Pokud viditelné, přičti k osvětlení v \mathbf{x} odchozí radianci z \mathbf{y} váženou geometrickým faktorem.
- Typické použití: výpočet **přímého osvětlení** v bodě (plošné zdroje světla)

Způsoby řešení zobrazovací rovnice

- **Lokální osvětlení (OpenGL)**
 - výpočet integrálu odrazu pro bodové zdroje světla
 - bodové zdroje: integrál \rightarrow suma
 - Neposkytuje ustálenou radianci, není řešením ZR
- **Metoda konečných prvků (radiační metoda, radiozita), [Goral, '84]**
 - diskretizace plochy scény (konečné prvky)
 - zanedbává směrovost odrazu
 - nezobrazuje lesklé odrazy světla

Způsoby řešení ZR

- **Sledování paprsku (ray tracing)** [Whitted, '80]
 - pouze přímé osvětlení na lesklých a difúzní plochách a nepřímé osvětlení pouze na ideálně zrcadlových plochách (odraz, lom)
 - nepostihuje nepřímé osvětlení na difúzních a lesklých plochách, měkké stíny, ...
- **Distribuované sledování paprsku** [Cook, '84]
 - odhad lokálního integrálu metodou Monte Carlo
 - počítá měkké odrazy, stíny, hloubku ostrosti, ..

Způsoby řešení ZR

- **Sledování cest (Path tracing)** [Kajiya, '86]
 - řešení zobrazovací rovnice metodou Monte Carlo
 - výpočet náhodné cesty (“náhodné procházky”)
 - postihuje nepřímé osvětlení vyšších řádů

Od zobrazovací rovnice k radiální metodě

Od zobrazovací rovnice k radiozitě

- Formulace ZR pomocí integrálu přes plochy:

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_M L(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) \cdot f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_o) \cdot G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) \cdot V(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) dA_y$$

- Radiozita – **předpoklady**
 - Pouze difúzní plochy (BRDF konstantní v ω_i a ω_o)
 - Elementy plochy mají konstantní radiozitu

Od zobrazovací rovnice k radiozitě

- Pouze difúzní plochy
 - BRDF konstantní v ω_i a ω_o

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \frac{\rho(\mathbf{x})}{\pi} \int_M L(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) \cdot V(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) dA_y$$

- Odchozí radiance je nezávislá na ω a je rovna radiozitě B děleno π

$$B(\mathbf{x}) = B_e(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \cdot \int_M B(\mathbf{y}) \cdot \underbrace{\frac{G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) \cdot V(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y})}{\pi}}_{G'(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y})} dA_y$$

Od zobrazovací rovnice k radiozitě

- Konstantní radiozita B **přispívajících** plošných elementů

$$B(\mathbf{x}) = B_e(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \cdot \sum_{j=1}^N B_j \cdot \left(\int_{A_j} G'(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) dA_{y,j} \right)$$

radiozita j -tého elementu

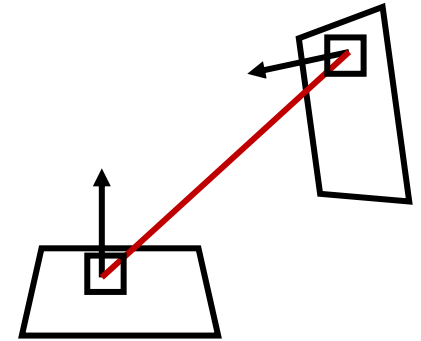
geometrický faktor mezi
ploškou j a bodem \mathbf{x}

Od zobrazovací rovnice k radiozitě

- Konstantní radiozita elementu i **přijímajícího** světlo:
 - Střední hodnota („průměr“) radiozity přes plochu elementu

$$B_i = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} B(\mathbf{x}) dA_i =$$

$$= B_{e,i} + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^N B_j \cdot \left(\frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} G'(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) dA_{y,j} dA_{x,i} \right)$$



F_{ij} ... konfigurační faktor
(„form factor“)

Klasická radiozitní rovnice

- Soustava lineárních rovnic

$$B_i = B_{e,i} + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^N B_j \cdot F_{ij}$$

- Konfigurační faktory

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} G'(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) dA_{\mathbf{y},j} dA_{\mathbf{x},i}$$

Radiační metoda

■ Klasická radiozita

- Výpočet konfiguračních faktorů (Monte Carlo, hemicube, ...)
- Řešení radiozitivní rovnice (Gathering, Shooting, ...)

■ Stochastická radiozita

- Obchází explicitní výpočet konfiguračních faktorů
- Metoda Monte Carlo

■ Nepraktická, nepoužívá se v praxi

- Rozdělení na plošky -> citlivost na kvalitu modelu
- Vysoké paměťové nároky, Náročná implementace

Vyjádření ZR pomocí integrálního operátoru

ZR je integrální rovnice

Obecný tvar Fredholmovy integrální rovnice druhého druhu

$$f(x) = g(x) + \int k(x, x') f(x') dx'$$

neznámá fce

známé fce

„jádro“ (kernel) rce

Zobrazovací rovnice:

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{H(\mathbf{x})} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta d\omega_i$$

Lineární operátory

- Lineární operátory **působí** na funkce
 - jako matice na vektory

$$h(x) = (L \circ f)(x)$$

- Působení je lineární

$$L \circ (af + bg) = a(L \circ f) + b(L \circ g)$$

- Příklady lineárních operátorů

$$(K \circ f)(x) \equiv \int k(x, x') f(x') dx'$$

$$(D \circ f)(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x)$$

Transportní operátor

$$(T \circ L)(\mathbf{x}, \omega_o) \equiv \int_{H(\mathbf{x})} L(\mathbf{x}, \omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

- Zobrazovací rovnice

$$L = L_e + T \circ L$$

Řešení ZR v operátorovém tvaru

- Zobrazovací rovnice

$$L = L_e + T \circ L$$

- Formální řešení

$$(I - T) \circ L = L_e$$

$$L = (I - T)^{-1} \circ L_e$$

- v praxi nepoužitelné – inverzi nelze explicitně vyjádřit

Expanze zobrazovací rovnice

- Rekurzivní substituce L

$$\begin{aligned}L &= L_e + TL \\ &= L_e + T(L_e + TL) \\ &= L_e + TL_e + T^2L\end{aligned}$$

- n -násobným opakováním vznikne Neumannova řada

$$L = \sum_{i=0}^n T^i L_e + T^{n+1} L$$

Expanze zobrazovací rovnice

- Pokud je T kontrakce (tj. $\|T\| < 1$, v ZR platí), pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1} L = 0$$

- **Řešení zobrazovací rovnice** je pak dáno

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} T^i L_e$$

Jiné odvození Neumannovy řady

- Formální řešení zobrazovací rovnice

$$L = (I - T)^{-1} \circ L_e$$

- Platí

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \dots$$

- Důkaz

$$\begin{aligned}(I - T) \circ (I - T)^{-1} &= (I - T) \circ (I + T + T^2 + \dots) \\ &= (I + T + T^2 + \dots) - (T + T^2 + T^3 + \dots) \\ &= I\end{aligned}$$

Postupné aproximace

- Každá aplikace T odpovídá jednomu odrazu & přenosu světla

$$L = L_e + TL_e + T^2 L_e + T^3 L_e + \dots$$

emise z povrchu
zdrojů

přímé
osvětlení

nepřímé osvětlení
prvního řádu
(one-bounce indirect)

nepřímé osvětlení
druhého řádu
(two-bounce indirect)

OpenGL stínování

Zobrazovací rovnice – Kajiya 1986

$$L = L_e + T \circ L$$

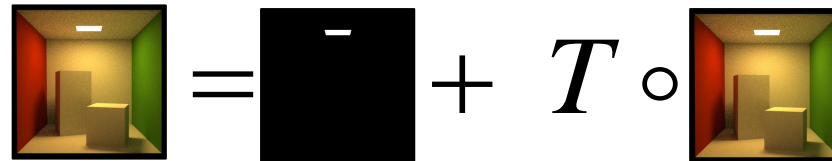


- L : Ustálená zář
- L_e : Emitovaná zář
- T : Operátor přenosu & odrazu světla

$$(T \circ L)(\mathbf{x}, \omega_o) \equiv \int_M L(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) \cdot f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_o) \cdot G(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}) dA_y$$

Zobrazovací rovnice – Kajiya 1986

$$L = L_e + T \circ L$$

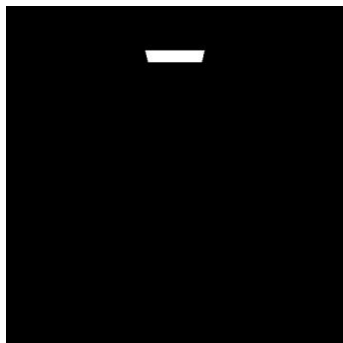


- **Řešení:** Neumannova řada

$$L = L_e + TL_e + T^2 L_e + T^3 L_e + \dots$$



Postupné aproximace



L_e



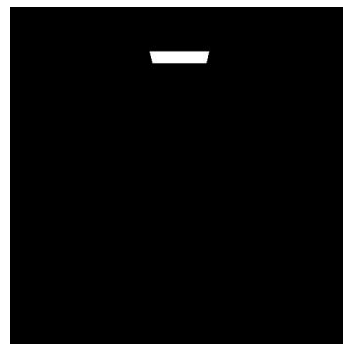
$T \circ L_e$



$T \circ T \circ L_e$



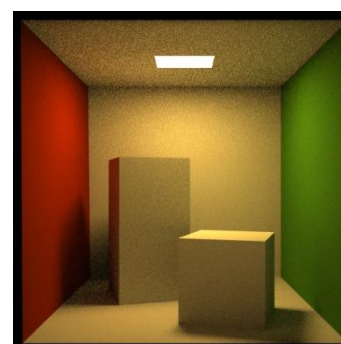
$T \circ T \circ T \circ L_e$



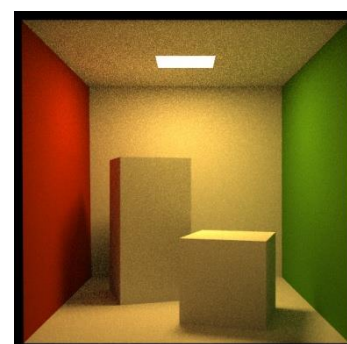
L_e



$L_e + T \circ L_e$



$L_e + T L_e + T^2 L_e$



$L_e + \dots + T^3 L_e$

Kontraktivita T

- Platí pro fyzikálně korektní modely
 - Vyplývá ze zachování energie
- Znamená, že opakované aplikace operátoru snižují energii (odrazivosti všech ploch jsou < 1)
- Scény s velmi lesklými povrchy
 - odrazivost blízká 1
 - konvergence vyžaduje simulovat větší množství odrazů světla než v difúzních scénách

Čeho jsme tím dosáhli?

- Nahradili jsme integrální rovnici řadou integrálů s postupně rostoucí dimenzí
- Numericky vyhodnocovat integrály umíme (metoda Monte Carlo) -> umíme řešit zobrazovací rovnici -> umíme renderovat obrázky, hurá!
- Rekurzivní aplikace T odpovídá rekurzivnímu sledování paprsku od kamery

Co to tedy vlastně počítáme?

$$L(\mathbf{x}, \omega_0) = L_e(\mathbf{x}, \omega_0) +$$

$$\int_M L_e(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) \cdot f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_0) \cdot G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) \cdot V(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) dA_y +$$

$$\iint_M L_e(\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y}) \cdot [f_r(\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{z}) \cdot V(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{z})] \cdot$$
$$\cdot [f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_0) \cdot G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}) \cdot V(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y})] dA_y dA_z +$$

$$\iiint_M L_e(\check{\mathbf{z}} \rightarrow \mathbf{z}) \dots dA_y dA_z dA_{\check{z}}$$

Cesty vs. rekurze: Otázka interpretace

- Nezávislé cesty ve vysokodimenzionálním prostoru

$$L = L_e + TL_e + T^2 L_e + T^3 L_e + \dots$$

- Rekurzivní řešení dvojných integrálů přes (hemi)sféru:

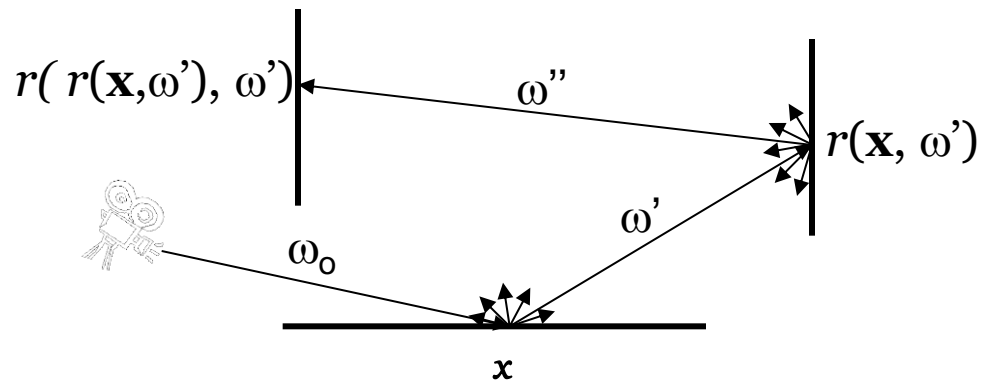
$$L = L_e + T(L_e + T(L_e + T(L_e + \dots$$

Rekurzivní interpretace

- Úhlová formulace ZR

$$L(\mathbf{x}, \omega_0) = L_e(\mathbf{x}, \omega_0) + \int_{H(\mathbf{x})} L(r(\mathbf{x}, \omega'), -\omega') \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega' \rightarrow \omega_0) \cdot \cos \theta' d\omega'$$

- Pro výpočet $L(\mathbf{x}, \omega_0)$ potřebuji spočítat $L(r(\mathbf{x}, \omega'), -\omega')$ pro všechny směry ω' okolo bodu \mathbf{x} .
- Pro výpočet každého $L(r(\mathbf{x}, \omega'), -\omega')$ potřebuji spočítat $L(r(r(\mathbf{x}, \omega'), -\omega''), -\omega')$ pro všechny směry ω'' okolo bodu $r(\mathbf{x}, \omega')$
- Atd... => rekurze



Path tracing, v. 0

getLi (x, ω):

$\mathbf{y} = \text{traceRay}(\mathbf{x}, \omega)$

return

$\text{Le}(\mathbf{y}, -\omega) +$ // emitted radiance

$\text{Lr}(\mathbf{y}, -\omega)$ // reflected radiance

Lr(x, ω):

$\omega' = \text{genUniformHemisphereRandomDir}(\mathbf{n}(\mathbf{x}))$

return $2\pi * \text{brdf}(\mathbf{x}, \omega, \omega') * \text{dot}(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \omega') * \text{rayRadianceEst}(\mathbf{x}, \omega')$

Path tracing, v. 2012, Arnold Renderer



© 2012 Columbia Pictures Industries, Inc. All Rights Reserved.

PG III (NPGR010) - J. Křivánek 2014

Závěr

- Potřebujeme nástroj pro numerické integrování
 - Přes hemisféru
 - Přes plochy
 - A přes Kartézské součiny předchozího
 - **Mnohodimenzionální integrály**
- Nástroj
 - **Monte Carlo metody**

Sledování cest (Path tracing, Kajiya86)

- Pouze jeden sekundární paprsek
 1. Náhodný výběr interakce (ideální lom, difúzní odraz, ...)
 2. Importance sampling podle vybrané interakce
- Přímé osvětlení
 - Doufej, že náhodně vygenerovaný paprsek trefí zdroj, anebo
 - Vyber náhodně jeden vzorek na jednom zdroji světla
- Trasuj stovky cest přes každý pixel a zprůměruj výsledek
- Výhoda: žádná exploze počtu paprsků kvůli rekurzi