

Moto in un fluido

Un corpo che si muove in un fluido reale è soggetto ad una forza che prende il nome di resistenza del mezzo. Questa forza dipende soltanto dal moto relativo e non c'è differenza tra il moto di un oggetto in un fluido in quiete e lo scorrimento di un fluido in cui sia immerso un corpo in quiete. La resistenza del mezzo è l'espressione della viscosità del fluido ed è nulla per il moto in un fluido ideale (Figura 1-a); in questo caso si ha completa simmetria delle linee di flusso¹ e la pressione a monte e a valle dell'oggetto è la medesima e quindi su di esso non agisce nessuna forza (paradosso di D'Alembert).



Figura 1 Moto di una sfera in un fluido ideale (a) e reale (b)

Se la velocità relativa è alta, si forma una scia vorticoso, come si vede in Figura 1-b. A basse velocità è possibile invece osservare un flusso laminare. La resistenza del mezzo è proporzionale al quadrato della velocità in caso di flusso vorticoso, mentre è proporzionale alla velocità per flussi laminari. Nel caso particolare di oggetti sferici vale la legge di Stokes e la resistenza del mezzo ha espressione

$$F_{res} = 6\pi\eta Rv$$

Consideriamo un oggetto sferico che si muova in un fluido sotto l'azione del proprio peso. Se si trascura la spinta di Archimede², le forze che agiscono sulla sfera sono la resistenza del mezzo e la forza peso, come illustrato in Figura 2.

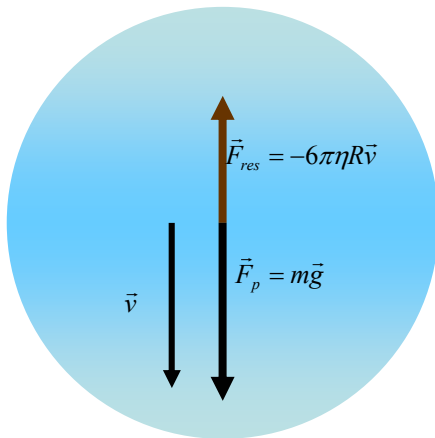


Figura 2 Caduta di un oggetto sferico in un fluido

La seconda legge della dinamica, applicata a questo problema dà:

$$mg - 6\pi\eta Rv = m \frac{dv}{dt}$$

che è un'equazione differenziale a variabili separabili. Si può quindi ottenere facilmente una relazione tra velocità e tempo. Se si assume che la velocità della sfera sia inizialmente nulla e si pone $\alpha = mg - 6\pi\eta Rv$ si ottiene;

¹ Una linea di flusso, o di corrente, è una linea orientata che in ogni punto ha direzione e verso della velocità

² La spinta di Archimede vale $F_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{fluido} g$ e nel caso di una goccia di acqua che cade in aria è di 3 ordini di grandezza inferiore al suo peso

$$dt = \frac{m dv}{mg - 6\pi\eta R v} \Rightarrow \int_0^t dt = m \int_0^{v(t)} \frac{dv}{mg - 6\pi\eta R v} \Rightarrow t = \frac{m}{6\pi\eta R} \int_{mg-6\pi\eta R v}^{mg} \frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{m}{6\pi\eta R} \ln\left(\frac{mg}{mg - 6\pi\eta R v}\right)$$

Facendo un'operazione di esponenziazione ad ambo i membri, si ottiene:

$$\frac{mg - 6\pi\eta R v}{mg} = \exp\left(-\frac{6\pi\eta R}{m} t\right) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (1)$$

dove $\tau = \frac{m}{6\pi\eta R}$ è la costante di tempo dell'esponenziale che figura a secondo membro. Risolvendo

la (1) per v si ottiene finalmente:

$$v(t) = \frac{mg}{6\pi\eta R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = v_L \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Quindi la sfera raggiunge la velocità limite v_L con andamento esponenziale. Questo significa che a $t = 5\tau$ la sua velocità è pari al 99% della velocità limite.

La velocità limite per una sfera dipende quadraticamente dal suo raggio come:

$$v_L = \frac{mg}{6\pi\eta R} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{g}{6\pi\eta R} = \frac{2}{9} \frac{\rho g}{\eta} R^2$$

Per gocce d'acqua di raggio pari a 10 micrometri che cadono in aria si ottiene ($\eta = 1,7 \times 10^{-5}$ Pa·s) una velocità limite di 1,28 cm/s, che si raggiunge con tempi scala dell'ordine di qualche millisecondo. Quindi per gocce di queste dimensioni (e così pure per le particelle di pulviscolo atmosferico per le quali valgono le stesse considerazioni) il moto di caduta compete con quello dovuto alla turbolenza dell'aria. Per oggetti decisamente più grandi occorre notare che il moto di caduta comporta ad un certo punto turbolenza e la dipendenza lineare della resistenza del mezzo dalla velocità cessa di essere valida.

Analisi dimensionale – Teorema di Buckingham – Numero di Reynolds

Consideriamo di nuovo il caso di un tubo orizzontale all'interno del quale scorra un fluido. Nel caso di flusso stazionario e laminare di un fluido incomprimibile abbiamo dimostrato la legge di Hagen Poiseuille e quindi che $\Delta p_L = v_m \frac{8\eta}{R^2}$. Nel caso di flusso non viscoso $\eta \rightarrow 0$, ma la velocità rimane finita. Quindi anche $\Delta p_L \rightarrow 0$. In effetti, il teorema di Bernoulli ci dice proprio che per mantenere un flusso con velocità v_m nel caso di un fluido ideale non occorre applicare alcun gradiente di pressione.

I casi di fluido ideale e di flusso stazionario laminare di un fluido reale sono casi particolari: in generale non si può trascurare la viscosità e il flusso in generale non è laminare. Non è possibile trovare una relazione generale che fornisca il gradiente di pressione in funzione degli altri parametri che caratterizzano il fenomeno, ma è possibile trovare su basi fenomenologiche delle relazioni valide in casi particolari. Per questo problema i parametri da prendere in considerazione sono: il raggio (o il diametro D) del tubo, la densità del fluido, la viscosità e la velocità media del flusso. In definitiva, la relazione che si deve determinare empiricamente sarà del tipo:

$$\Delta p_L = f(D, \rho, \eta, v_m)$$

Determinare fenomenologicamente una relazione tra cinque parametri indipendenti è tutt'altro che semplice. Fortunatamente, si può dimostrare (teorema "Pi" di Buckingham) che queste cinque grandezze possono essere combinate in due gruppi adimensionali in modo tale che

$$\frac{D \Delta p_L}{\rho v_m^2} = \Phi\left(\frac{\rho v_m D}{\eta}\right)$$

In pratica da cinque variabili si passa a due: gli esperimenti per trovare la funzione Φ dovranno far variare soltanto i due gruppi adimensionali e non le cinque grandezze di partenza separatamente. Ad esempio, la quantità $\frac{\rho v_m D}{\eta}$ può essere variata di un fattore 2 facendo raddoppiare il diametro del tubo oppure facendo raddoppiare la velocità media del flusso. In entrambi i casi, si ottiene il medesimo valore per il gruppo adimensionale $\frac{D\Delta p_L}{\rho v_m^2}$.

Teorema "Pi" di Buckingham

Il teorema "Pi" di Buckingham³ afferma che un'equazione $u_1 = f(u_2, u_3, \dots, u_k)$, omogenea dal punto di vista dimensionale, che contenga k variabili può essere ridotta ad una relazione $\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{k-r})$ tra $k-r$ gruppi adimensionali indipendenti, dove r è il numero minimo di dimensioni che descrivono le variabili.

Con il simbolo Π_i (dal quale il teorema prende il nome) si indica l' i -mo gruppo adimensionale che è costruito come prodotto di $r+1$ variabili scelte secondo i criteri che vedremo tra poco, ciascuna di esse elevata ad una potenza opportuna, in modo tale che il prodotto sia adimensionale.

La determinazione dei gruppi adimensionali può essere schematizzata come segue:

1. Si elencano tutte le k variabili indipendenti da cui il problema dipende. Si tratta evidentemente del passo più difficile, che presuppone una buona comprensione del problema.
2. Si esegue l'analisi dimensionale delle variabili trovate al punto precedente, ciascuna di esse è espressa in termini di unità di misura fondamentali.
3. Si determina il numero dei gruppi adimensionali, come differenza tra il numero k di variabili ed il numero r di unità di misura indipendenti, trovato al punto 2.
4. Si selezionano r variabili **ripetibili**. Infatti se si devono formare $k-r$ gruppi a partire da k variabili, è possibile selezionare $k-r$ variabili che compariranno ciascuna in un gruppo soltanto. Per ciascun gruppo adimensionale si moltiplicherà una di queste con le rimanenti r , ognuna elevata ad una opportuna potenza in modo che il prodotto sia adimensionale. Non esiste una ricetta univoca per scegliere le variabili ripetibili. È comunque necessario che tutte le r dimensioni siano comprese tra le variabili ripetibili. Inoltre la variabile oggetto di studio non deve essere ripetibile, in quanto deve figurare in unico gruppo adimensionale.
5.
 - a) Si forma l' i -mo gruppo adimensionale moltiplicando l' i -ma variabile non ripetibile per un'opportuna combinazione di quelle ripetibili. Se ad esempio ci sono 3 variabili ripetibili u_1, u_2, u_3 si avrà $\Pi_i = u_i u_1^{a_i} u_2^{b_i} u_3^{c_i}$. Gli esponenti si scelgono in modo che Π_i sia adimensionale.
 - b) Si ripete il passo 5 $k-r$ volte.
6. Si esprime il risultato come $\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{k-r})$

Questa procedura sembra piuttosto involuta. La applichiamo qui al caso del flusso di un fluido in una condotta cilindrica orizzontale. Siamo interessati a trovare un'espressione per il gradiente di pressione Δp_L :

1. Le variabili sono in numero di $k = 5$ e corrispondono al gradiente di pressione Δp_L , al diametro del tubo D , alla densità del fluido ρ , alla sua viscosità η e alla velocità media v_m . Si tratta di variabili indipendenti che descrivono completamente il problema.

³ Edgar Buckingham, fisico statunitense, 1867-1940. Chi è interessato, può trovare una dimostrazione e riferimenti bibliografici alla pagina <http://www.math.ntnu.no/~hanche/notes/buckingham/>

2. Le dimensioni di queste grandezze sono 3:
$$\begin{cases} [\Delta p_L] = MT^{-2}L^{-2} \\ [D] = L \\ [\rho] = ML^{-3} \\ [\eta] = ML^{-1}T^{-1} \\ [v_m] = LT^{-1} \end{cases} \Rightarrow r = 3$$

3. Il numero di gruppi adimensionali è $k-r=2$.
 4. Il gradiente di pressione non può figurare tra le variabili ripetibili, in quanto è la variabile di studio. Conviene prendere come ripetibili D, ρ, v_m visto che sono quelle dimensionalmente più semplici.
 5. I gruppi adimensionali da determinare sono 2:

a) $\Pi_1 = \Delta p_L D^a v_m^b \rho^c$. Questa relazione si traduce in un'equazione dimensionale:

$$MT^{-2}L^{-2}L^aL^bT^{-b}M^cL^{-3c} = M^0L^0T^0 \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ b = -2 \\ a = 1 \end{cases} \text{ Pertanto il primo gruppo}$$

adimensionale è $\Pi_1 = \frac{\Delta p_L D}{v_m^2 \rho}$.

b) Il secondo gruppo invece contiene la viscosità del fluido ed è definito come $\Pi_2 = \eta D^a v_m^b \rho^c$. L'equazione dimensionale corrispondente è

$$MT^{-1}L^{-1}L^aL^bT^{-b}M^cL^{-3c} = M^0L^0T^0 \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ b = -1 \\ a = -1 \end{cases} \text{ che implica } \Pi_2 = \frac{\eta}{Dv_m\rho}. \text{ Occorre}$$

notare che la determinazione del coefficiente non è univoca; ad esempio si può prendere $\Pi_2 = \frac{Dv_m\rho}{\eta}$, che è ancora adimensionale: le differenti scelte

implicano semplicemente una diversa forma funzionale tra i gruppi.

6. Il risultato sarà quindi del tipo $\frac{\Delta p_L D}{v_m^2 \rho} = \tilde{\Phi}\left(\frac{\eta}{Dv_m\rho}\right)$ oppure $\frac{\Delta p_L D}{v_m^2 \rho} = \Phi\left(\frac{Dv_m\rho}{\eta}\right)$

L'espressione $\Re = \frac{Dv_m\rho}{\eta} = \frac{Dv_m}{\mu}$ (dove si è introdotta la viscosità cinematica $\mu = \frac{\eta}{\rho}$) ricorre

frequentemente in fluidodinamica e D in generale rappresenta una lunghezza scala nel problema esaminato. Si tratta di un rapporto tra inerzia (ρ) e viscosità (η) ed è stato introdotto nel 1883 dal fisico statunitense Osborne Reynolds ed è noto proprio come *numero di Reynolds*. Il numero di Reynolds non è l'unico parametro adimensionale in uso, ovviamente, ma è il più noto perché consente di discriminare facilmente tra flusso laminare e flusso turbolento.

Nella Figura 3 sono rappresentati i tre differenti regimi di flusso di un fluido reale: flusso laminare, di transizione e turbolento. La visualizzazione del regime di flusso è possibile inserendo opportunamente del colorante in un condotto in cui scorra il fluido da studiare.

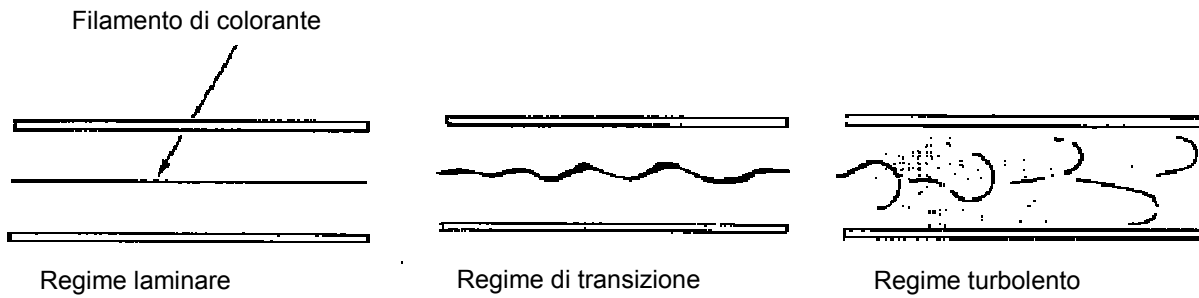


Figura 3 Esperimento di Reynolds: un colorante evidenzia il tipo di flusso (laminare, di transizione, turbolento)

L'esperienza fu realizzata da Reynolds e permise di evidenziare che il tipo di flusso dipende dal numero di Reynolds: per bassi valori di questo parametro ($\mathfrak{R} < 2300$) si ha flusso laminare; per elevati valori ($\mathfrak{R} > 4000$) invece si ha moto turbolento. Per valori intermedi del numero di Reynolds si ha un regime di flusso caratterizzato da una certa tortuosità delle linee di corrente, anche se mancano vortici veri e propri; questo regime è detto di transizione. La transizione tra flusso laminare e turbolento è mostrata nella Figura 4, che rappresenta una realizzazione dell'esperienza di Reynolds.



Figura 4 Regime di transizione (esperimento di Reynolds)

Bassi numeri di Reynolds si ottengono tipicamente nel flusso a bassa velocità media in condotti regolari. La velocità critica al di sopra della quale cessa la laminarità del flusso è data dalla relazione $v_c = \frac{\eta \mathfrak{R}_c}{\rho D} \cong \frac{2300 \eta}{\rho D}$. La legge di Hagen Poiseuille ci dice che basse velocità si ottengono nei tubi capillari, nei quali il flusso è tipicamente laminare. Quando ci si avvicina alla transizione, la relazione $\Delta p_L = v_m \frac{8\eta}{R^2}$ prevista dalla legge di Hagen Poiseuille cessa di valere. In particolare, a parità di gradiente di pressione applicato, cala la portata (legata alla velocità media di flusso) e si ha un regime di flusso instabile. Aumentando il gradiente di pressione si raggiunge un flusso turbolento stabile, per il quale si osserva $\Delta p_L = k v_m^2 \frac{\rho}{2R}$. Quindi il gradiente di pressione è proporzionale al quadrato della velocità (e quindi della portata). La costante k (costante su un paio di ordini di grandezza di variazione per \mathfrak{R}) è detta coefficiente di resistenza.

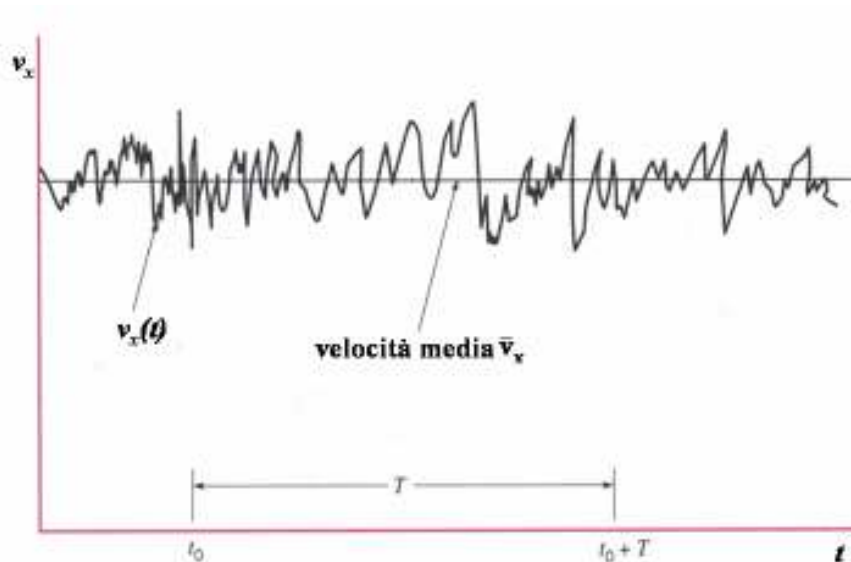


Figura 5 Fluttuazioni della velocità in un flusso turbolento

La principale differenza tra il flusso laminare e quello turbolento consiste nel comportamento caotico, casuale dei parametri che caratterizzano il moto del fluido. In Figura 5 è mostrato un tracciato tipico dell'andamento temporale $v_x(t)$ della componente assiale (i.e. lungo l'asse del condotto, indicato come asse x) della velocità misurata in un dato punto del condotto: il flusso è caratterizzato da variabilità notevole della velocità, che mostra importanti fluttuazioni attorno ad un

valore medio $\bar{v}_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_x(x, y, z, t) dt$ determinato su un periodo temporale T considerevolmente maggiore della scala temporale delle fluttuazioni.

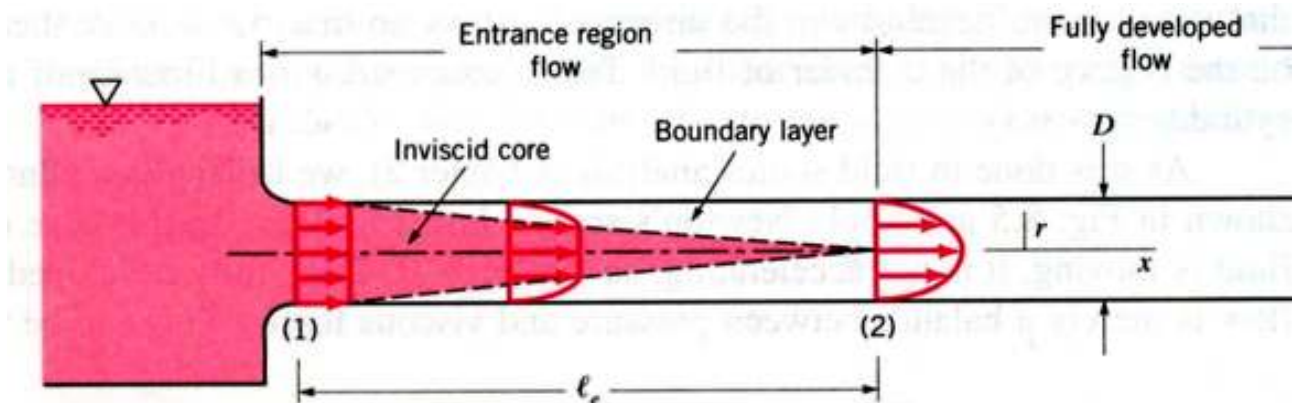


Figura 6 Regione di ingresso e flusso pienamente sviluppato

È importante sottolineare che le osservazioni fatte sia per il flusso laminare che turbolento valgono per un flusso pienamente sviluppato, ossia valgono lontano dall'imbocco del tubo che si sta considerando. Infatti, lo strato limite a contatto con le pareti del tubo rallenta gli strati più interni di fluido, ma questo non avviene istantaneamente: esiste una regione di ingresso, mostrata in Figura 6, nella quale gli effetti delle forze di attrito viscoso si propagano fino alla regione di fluido più interna al tubo. La regione di ingresso ha un'estensione ℓ_e il cui valore può essere parametrizzato come:

$$\begin{cases} \frac{\ell_e}{D} = 0,06 \Re & \text{flusso laminare} \\ \frac{\ell_e}{D} = 4,4 \Re^{1/6} & \text{flusso turbolento} \end{cases}$$

In questa regione, anche nel caso di flusso laminare, il profilo radiale di velocità è diverso da quello parabolico che si osserva per il moto pienamente sviluppato. In particolare, nella regione centrale la velocità non dipende da r , come per i fluidi non viscosi.

Se si considera invece il caso del moto pienamente sviluppato, ci sono differenze tra flusso laminare e flusso turbolento. Nel primo caso abbiamo derivato la seguente relazione:

$$\frac{v(r)}{v_0} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \text{con } v_0 = \frac{\Delta p_L R^2}{4\eta}$$

Nel caso di flusso turbolento, invece, il profilo radiale della velocità media è dato dalla relazione empirica:

$$\frac{\bar{v}(r)}{v_0} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \quad \text{con } n \text{ variabile tra 6 e 10 in funzione del numero di Reynolds.}$$

La differenza tra i due andamenti è rappresentata in Figura 7, dove si vede che nel caso turbolento la velocità media tende a mantenersi prossima al valore massimo in una regione più ampia rispetto al caso del flusso laminare; in altri termini il profilo è parabolico in quest'ultimo caso e più "piatto" in regime turbolento.

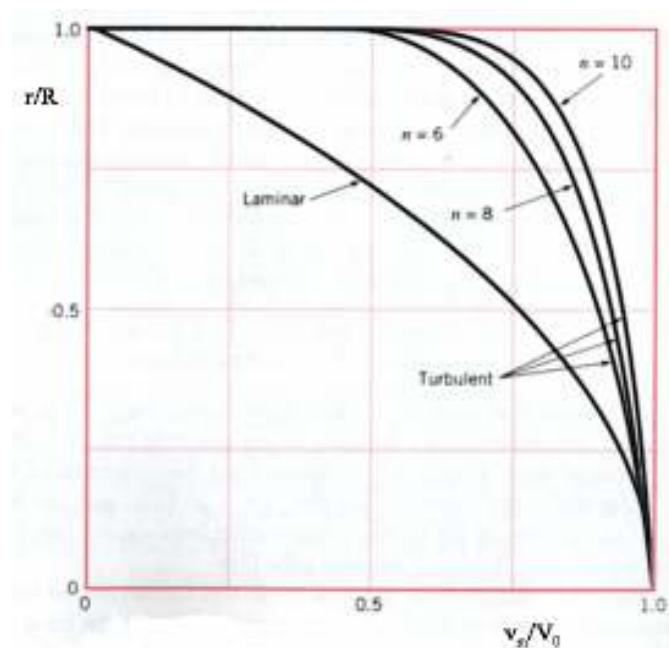


Figura 7 Profili di velocità

Fenomeni di turbolenza si osservano infine anche quando vi siano ostacoli (cfr Figura 1-b) o brusche variazioni nella forma del condotto all'interno del quale scorre il fluido, in quanto le deformazioni delle linee di flusso indotte dall'ostacolo o dal condotto vengono propagate dalla viscosità del fluido, con possibile generazione di vortici.

Il tipo di flusso attorno ad un oggetto può ancora essere descritto in termini del numero di Reynolds

$$\Re = \frac{Dv_m \rho}{\eta} = \frac{Dv_m}{\mu}, \quad \text{dove } D \text{ rappresenta la lunghezza scala dell'oggetto considerato. In Figura 8 è}$$

mostrato il flusso attorno ad un cilindro avente base con diametro D , disposto con l'asse ortogonale alla figura in tre regimi di flusso diversi. Si ricordi che il numero di Reynolds rappresenta il

rapporto tra effetti inerziali ed effetti viscosi. A bassi valori di \Re (Figura 8-a) prevale la viscosità : la presenza dell'ostacolo influenza le linee di corrente in un'ampia regione⁴ del campo di flusso in tutte le direzioni rispetto ad esso.

Al crescere di \Re (Figura 8-b) la regione a monte del cilindro interessata dalla distorsione viscosa delle linee di flusso si riduce: gli effetti della presenza dell'ostacolo si spostano a valle ed il flusso perde la sua simmetria. Un'altra conseguenza dell'importanza degli effetti inerziali è rappresentata dalla separazione dello strato fluido a contatto con l'oggetto , come illustrato in Figura 8-b, dove è indicato il punto di distacco delle linee di corrente.

A numeri di Reynolds molto elevati, la regione perturbata dalla presenza dell'ostacolo è situata quasi interamente a valle del medesimo in una scia molto lunga, irregolare, instabile, eventualmente caratterizzata da turbolenza. La regione perturbata a monte e attorno all'ostacolo riguarda soltanto uno strato di consine che ha un'estensione molto inferiore al diametro del cilindro.

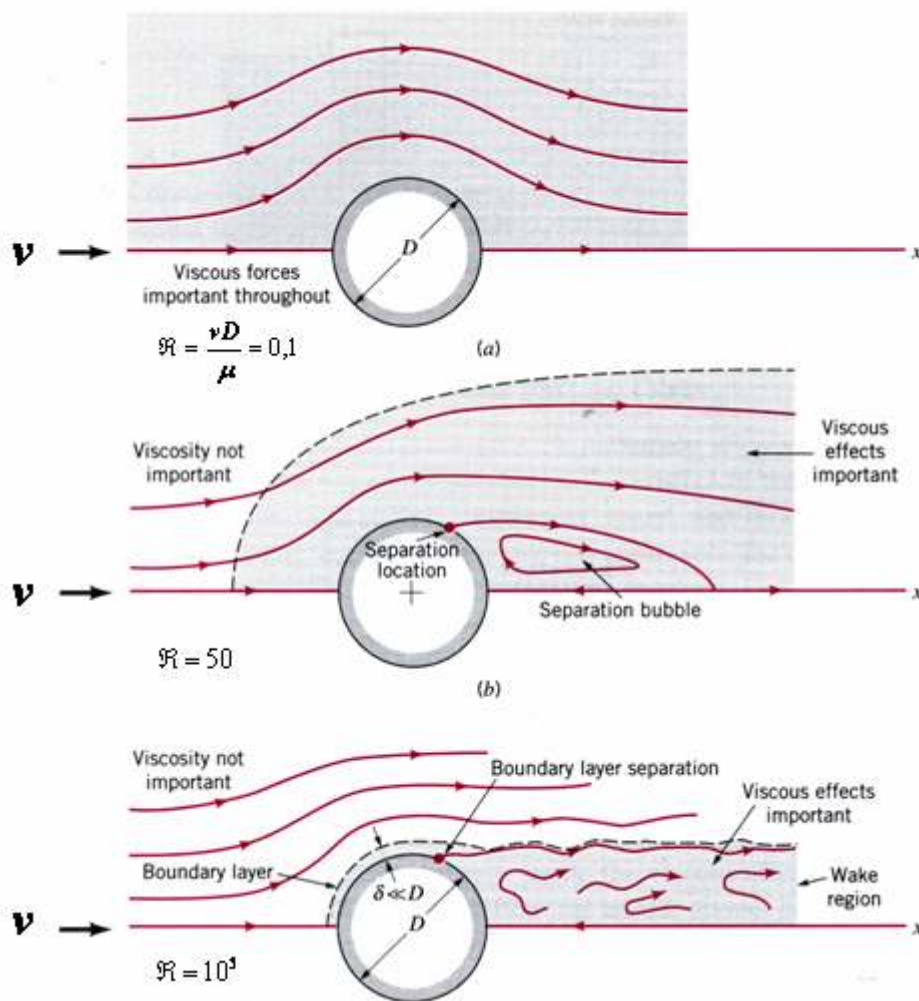


Figura 8 Flusso stazionario attorno ad un cilindro a diversi numeri di Reynolds (\Re). Cilindro normale al piano del foglio. ("Wake region" significa scia).

⁴ ampia rispetto a D

Tensione superficiale - Capillarità

Affrontiamo brevemente l'argomento dei fenomeni di superficie, che interessano le superfici che delimitano i liquidi. I liquidi sono dotati di volume proprio in quanto le forze di coesione tra le molecole sono importanti e le vincolano a stare ad una distanza media r_0 l'una dall'altra, il cui valore dipende dal materiale. In altri termini, ogni molecola si trova ad un minimo di potenziale quando è ad una distanza dell'ordine di r_0 dalle altre; quindi è soggetta ad una forza repulsiva per distanze inferiori ed attrattiva per distanze superiori. Come illustrato in Figura 9, le molecole che si trovano lontano dalla superficie, sono attratte dalle molecole vicine in tutte le direzioni. In questo modo la forza risultante netta è nulla.

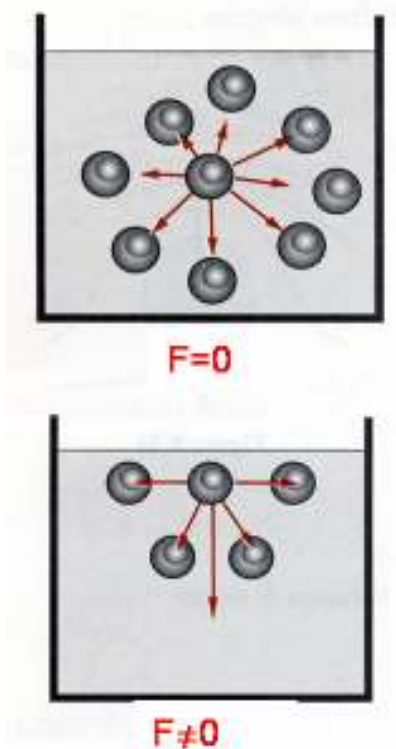


Figura 9 Le molecole in prossimità della superficie sono soggette ad una forza attrattiva verso l'interno del volume occupato dal liquido

Le molecole che si trovano in prossimità della superficie, invece, risentono di una forza netta diretta verso l'interno del volume occupato dal liquido. La conseguenza importante di questo fatto è che la superficie che delimita un liquido non aumenta spontaneamente. Al contrario, la superficie di un liquido assume l'estensione minima compatibile con le condizioni al contorno: ad esempio, nei laboratori orbitanti, in condizioni di microgravità, i liquidi che non siano confinati in un recipiente assumono una forma sferica che rende minima la superficie di interfaccia liquido-aria. Per aumentare l'estensione di una superficie liquida, occorre compiere del lavoro. Questo è illustrato nella Figura 10, dove è schematizzato un telaietto che sostiene una lamina di liquido (ad esempio acqua saponata), provvisto di un lato mobile. La lamina tende spontaneamente a contrarsi (Figura 10-a) sotto l'azione delle forze di superficie esercitate dalle superfici liquido-aria che essa forma con il gas circostante. L'entità della forza con la quale il lato mobile è attratto verso sinistra è proporzionale alla sua lunghezza. Si definisce tensione superficiale, la forza per unità di lunghezza esercitata dalle superfici:

$$\tau \equiv \frac{F}{2l}$$

dove il fattore 2 tiene conto del fatto che la lamina ha due facce. La tensione superficiale si esprime in Nm^{-1} . Se si applica una forza esterna al lato mobile del telaietto (Figura 10-b) in modo da

contrastare la tensione superficiale, si vede che per spostare il proprio punto di applicazione di una quantità dx , la forza esterna deve compiere un lavoro $dL = Fdx = 2\tau dx = \tau dS$

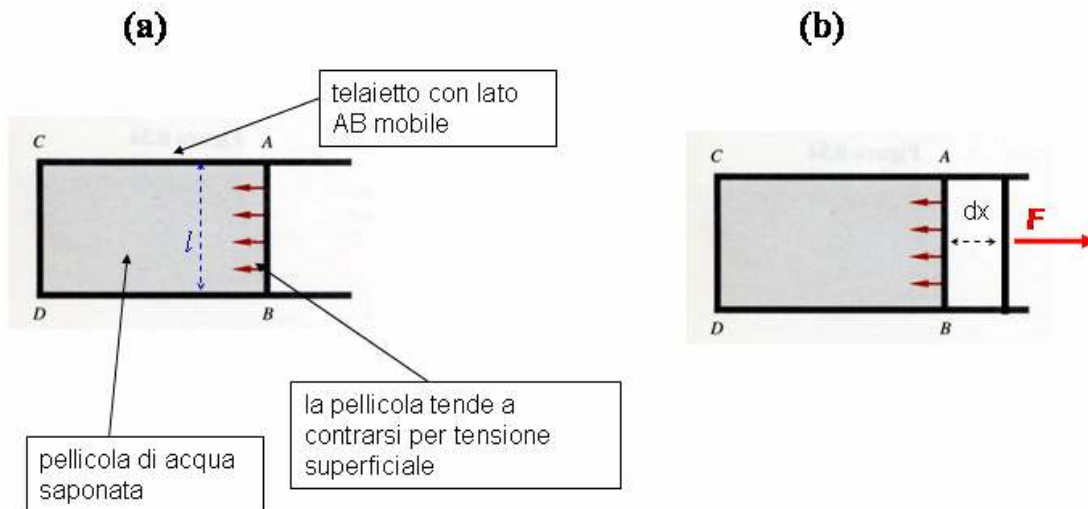


Figura 10 Lamina liquida sostenuta da un telaietto provvisto di lato AB mobile: la lamina tende spontaneamente a contrarsi

dove con dS si è indicata la variazione complessiva della superficie di interfaccia. Si vede quindi che per aumentare una superficie di dS occorre compiere un lavoro proporzionale a dS . La costante di proporzionalità è proprio la tensione superficiale. Questo è un modo alternativo ed equivalente al primo per definire la tensione superficiale.

Tabella 1 Valori di tensione superficiale

Tensione superficiale			
Liquido	Mezzo a contatto	T (°C)	τ (N/m)
alcool etilico	aria	0	$23.5 \cdot 10^{-3}$
alcool etilico	aria	20	$22.3 \cdot 10^{-3}$
alcool etilico	aria	70	$17.3 \cdot 10^{-3}$
acqua	aria	20	$75.6 \cdot 10^{-3}$
acqua	aria	90	$62.9 \cdot 10^{-3}$
acqua	benzene	20	$35.0 \cdot 10^{-3}$
acqua	etere etilico	20	$20.7 \cdot 10^{-3}$
benzene	aria	20	$28.9 \cdot 10^{-3}$
etere etilico	aria	20	$16.8 \cdot 10^{-3}$
glicerina	aria	20	$65.0 \cdot 10^{-3}$
mercurio	aria	20	$52.0 \cdot 10^{-2}$
mercurio	acqua	20	$37.5 \cdot 10^{-2}$
mercurio	benzene	20	$35.7 \cdot 10^{-2}$
olio d'oliva	aria	20	$34.0 \cdot 10^{-3}$

In Tabella 1 sono riportati alcuni valori di tensione superficiale. Questa quantità è una caratteristica dei due mezzi posti a contatto e dipende dalla temperatura. A proposito del telaietto rappresentato in Figura 10, abbiamo parlato di acqua saponata e non semplicemente di acqua; questo perché i saponi alterano la tensione superficiale dell'acqua. Segnatamente l'abbassano in quanto fanno parte di un'ampia classe di sostanze, dette tensioattive. In molti processi industriali si è interessati a variare

le proprietà di superficie dei liquidi; ad esempio nella preparazione di inchiostri, di fitofarmaci, che devono aderire alle piante quando somministrati per irrorazione, di detergenti, etc.

Consideriamo ora delle superfici liquide curve. Ad esempio una bolla di sapone. Vogliamo calcolare quanto deve valere la differenza di pressione $p_i - p_e$ tra l'aria contenuta all'interno della bolla e quella situata all'esterno. Se partiamo da una bolla di raggio R , per aumentarne ulteriormente il raggio di dR dobbiamo compiere un lavoro

$$dL = (p_i - p_e)SdR = 4\pi(p_i - p_e)R^2dR$$

A questo aumento si oppone la tensione superficiale che compie un lavoro di segno opposto valutabile come (si noti il fattore 2, dovuto al fatto che la bolla ha due facce):

$$dL_\tau = -2\tau dS = -2\tau d(4\pi R^2) = -16\pi\tau R dR$$

In condizioni di equilibrio si deve avere

$$p_i - p_e = \frac{4\tau}{R}$$

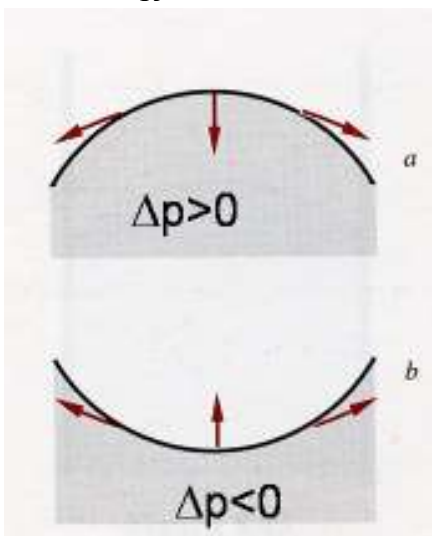


Figura 11 Menischi sferici

Nel caso di una superficie sferica che separi un liquido da un gas (cfr. Figura 11) l'eccesso di pressione che c'è nella parte interna al liquido rispetto a quella esterna è

$$\Delta p = \frac{2\tau}{R}$$

visto che c'è una sola superficie di interfaccia. Se il menisco è convesso, la pressione interna è maggiore di quella esterna, mentre per menischi concavi la situazione è opposta.

Queste considerazioni sono importanti per comprendere il fenomeno della capillarità, che si verifica quando si considerano oltre alle forze di coesione del liquido, che ne determinano la tensione superficiale, anche le forze di adesione con i solidi che lo contengono (ed eventualmente con altri liquidi non miscibili posti a contatto).

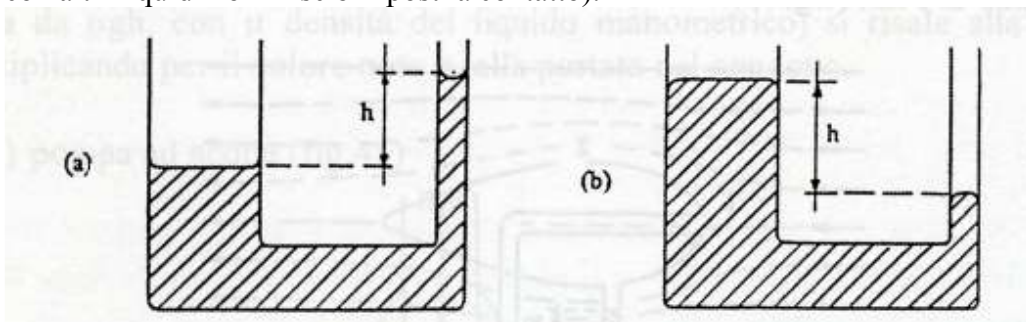


Figura 12 Capillarità. Nel caso (a) le forze di adesione con le pareti sono prevalenti

Nella Figura 12 sono illustrate le due situazioni possibili: nella prima, le forze di adesione del liquido con il solido che lo contiene sono prevalenti; quindi la superficie libera a contatto con la parete si presenta con forma concava. Si dice, in questo caso, che il liquido bagna la parete. È il caso dell'acqua contenuta nel vetro. Nel secondo caso, la coesione prevale sull'adesione e quindi il menisco è convesso. In questo caso il liquido non bagna la parete: è il caso del mercurio in un contenitore di vetro.

Nella Figura 12 sono rappresentati dei recipienti comunicanti. il recipiente di destra (in entrambe le figure) è costituito da un tubo di piccola sezione (di diametro dell'ordine del millimetro o inferiore). Si nota che il liquido non raggiunge la stessa altezza nei recipienti posti in comunicazione, in apparente violazione del principio dei vasi comunicanti. In realtà la spiegazione è legata alla differenza di pressione gas-liquido che si riscontra in presenza di menischi sferici. Se applichiamo la legge di Stevino al caso rappresentato in Figura 12-a, in cui il capillare presenta un menisco concavo di raggio R , otteniamo:

$$p_0 = p_0 + \rho gh - \frac{2\tau}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\tau}{R} = \rho gh$$

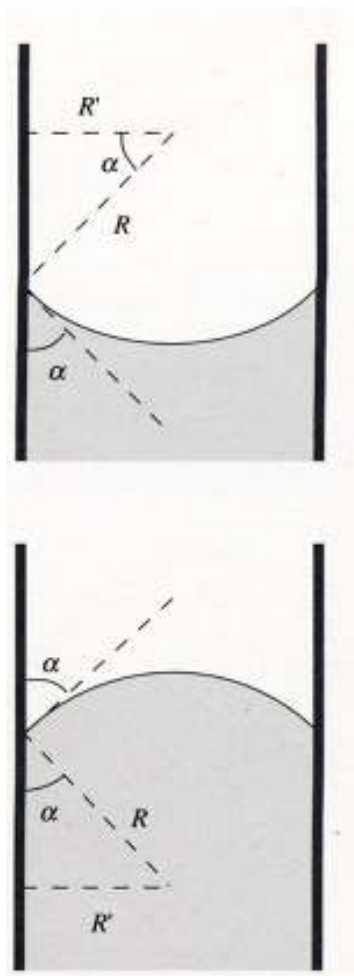


Figura 13 Relazione tra raggio di curvatura del menisco e raggio del capillare

Se il liquido non bagna la parete, il calcolo eseguito per valutare il dislivello non cambia. Cambia soltanto il segno del dislivello, legato al segno della differenza di pressione in corrispondenza del menisco. Questo fenomeno prende il nome di capillarità. L'acqua sale per capillarità nei materiali porosi (ad esempio la terra non arata, che inaridisce perché una volta raggiunta la superficie l'acqua evapora). L'entità del dislivello può essere espressa in funzione di parametri più facilmente misurabili rispetto al raggio di curvatura della superficie, rappresentati in Figura 13. Il raggio di curvatura R è legato al raggio del capillare R' dalla relazione $R' = R \cos \alpha$, dove α è l'angolo di

contatto tra il liquido e la parete, formato dalla tangente alla superficie liquida nel punto di contatto e la parete stessa. Quindi il dislivello h si esprime come:

$$h = \frac{2\tau \cos \alpha}{\rho g R'}$$

Questa espressione è nota come legge di Jurin. Nel caso di un capillare del diametro di un millimetro contenente acqua, l'innalzamento previsto dalla legge di Jurin è di circa 31 millimetri, con un angolo di contatto nullo. L'effetto è inversamente proporzionale al raggio del capillare.