CIMAT

Departamento de Matemáticas

Tesis

Para obtener el grado de

Maestro en Matemáticas.

Presenta

Mario Alejandro Huicochea Mason

Conjuntos Convexos Débilmente Movibles y Conjuntos Convexos Movibles

Director de tesis

Jesús Jerónimo Castro

Sínodo

Jesús Jerónimo Castro

Luis Montejano Peimbert

Francisco Sánchez Sánchez

Agradecimientos

Antes que nada, quisiera agradecer a mi familia por su apoyo; A mi mamá por todo lo que ha hecho por mi, a mi papá por todo lo que me ha enseñado, a mi hermano por ser mi gran amigo y a mi hermana por ser la alegrí de la casa. Tambié quiero agradecer a mis tíos y a mis abuelitas, en especial a mi tía Paty que me ha apoyado de numerosas formas.

Agradezco a todos los profesores que he tenido, en especial a los que he encontrado en la licenciatura y en la maestría. Quisiera mencionar especialmente a Pedro Luis Del Ángel, Xavier Gomez-Mont, Luis Montejano y Jesús Jerónimo quienes me han ayudado de diversas formas.

Por otro lado, este trabajo no hubiera podido ser concluido sin las valiosas observaciones y sugerencias de los sinodales Jesús Jerónimo, Luis Montejano y Francisco Sánchez.

Finalmente, no tengo palabras para agradecer a toda la gente con quien me encontré y fui feliz en Guanajuato. Agradezco a todos mis compañeros y sobre todo a mis amigos.

Introducción

Una pregunta bastante interesante es si dada una retícula en el plano, una figura convexa se puede mover o no continuamente de una posición a otra sin que toque los puntos de la retícula.

Otra pregunta igualmente interesante es saber si dada una retícula en el plano, una figura convexa se puede mover o no continuamente de una posición a otra sin que su interior toque puntos de la retícula.

En este trabajo, estudiamos las dos preguntas anteriores. Dicho de otra manera, haciendo algunas hipótesis intentamos determinar que figuras convexas responden a las preguntas antes mencionadas.

La estructura de nuestro trabajo es la siguiente. En el primer capítulo, estudiamos a las figuras convexas a las que no se les puede inscribir una copia de un polígono convexo no degenerado con vértices en la retícula y tal que los vértices de dicho polígono están en la frontera de nuestra figura. Determinamos si una figura convexa que satisface la condiciones antes mencionadas, cumple que se puede mover o no continuamente de una posición a otra sin que su interior toque puntos de la retícula. El resultado principal de este capítulo bajo las hipótesis anteriores, es:

La figura se puede mover continuamente de una posición a otra sin que su interior toque puntos de la retículas si y sólo si su ancho es menor o igual que la mínima distancia entre dos puntos distintos de la retícula.

En el segundo capítulo, estudiamos a las figuras convexas centralmente simétricas tales que si tienen una copia de un polígono convexo con vértices en la retícula y tal que los vértices de dicho polígono están en la frontera de nuestra figura entonces podemos girar nuestra figura en ambas direcciones sin que dichos vertices estén en el interior de la figura, para ver la definición correcta consulte el Capítulo 2. Determinamos si una figura convexa que satisface la condiciones antes mencionadas, cumple que se puede mover o no continuamente de una posición a otra sin que su interior toque puntos de la retícula. El resultado principal de este capítulo bajo las hipótesis anteriores, es:

La figura se puede mover continuamente de una posición a otra sin que su interior toque puntos de la retícula si y sólo si su ancho es menor o igual que la mínima distancia entre dos puntos distintos de la retícula y para toda rotación de la figura esta no es un dominio fundamental de la retícula.

Finalmente, el tercer capítulo realiza un trabajo análogo al de los primeros dos capítulos pero ahora preguntando si la figura convexa se puede mover o no continuamente de una posición a otra sin que toque los puntos de la retícula. Primero definimos algunos conceptos. En la segunda parte de este capítulo, obtenemos que bajo las hipótesis del Capítulo 1:

La figura se puede mover continuamente de una posición a otra sin que toque puntos de la retícula si y sólo si su ancho es menor que la mínima distancia entre dos puntos distintos de la retícula.

En la tercera sección de este capítulo, obtenemos que:

Si la figura es centralmente simétrica, entonces se puede mover continuamente de una posición a otra sin que toque puntos de la retículas si y sólo si su ancho es menor que la mínima distancia entre dos puntos distintos de la retícula y no existen copias de polígonos convexos no degenerados con vértices en la retícula tales que los vértices de dicho polígonos están en la frontera de nuestra figura.

En la última parte de este capítulo, mencionamos alguna conclusiones y preguntas derivadas de todo nuestro trabajo.

Quisiera mencionar que en el trabajo hacemos referencia a algunos términos de Convexidad, Geometría de los Números y Topología siendo nuestras referencias principales [V],[C] y [Mu] respectivamente.

Índice general

Capítulo 1

Figuras Convexas Débilmente Movibles Sin Polígonos Reticulares

En este capítulo, estudiaremos la geometría de las figuras convexas débilmente movibles con respecto a una retícula.

En la primera sección, daremos definiciones y resultados que nos permiten caracterizar a las figuras débilmente movibles en términos topológicos. Algunas de estas definiciones serán utilizadas en capítulos posteriores.

En la segunda sección, estudiaremos a las figuras convexas que son débilmente movibles tales que ninguna copia tiene inscrito un polígono convexo no degenerado con vértices en la retícula. En particular, caracterizaremos a las figuras convexas con la propiedad antes mencionada que son débilmente movibles.

1.1. Definiciones y Topología

Primero, enunciamos la notación que utilizaremos a lo largo del capítulo.

Denotaremos la rotación con centro en el origen por una dirección $\theta \in S^1$ por R_θ y la translación por un vector $v \in \mathbb{R}^2$ por T_v. Si $\theta_1, \theta_2 \in S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, tiene sentido definir $\theta_1 \cdot \theta_2$ como el producto de $\mathbb{C}$ restringido a S^1.

Una retícula $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ es un subgrupo discreto de rango 2 de $(\mathbb{R}^2, +)$

Si $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ es una retícula entonces r_Λ denota la menor distancia entre dos puntos distintos de Λ.

Si C es un subconjunto de un espacio topológico (X, τ), entonces denotamos por $\operatorname{int}(C)$ al interior de C y $\operatorname{Bd}(C)$ la frontera de C. Denotaremos por $B_r(x)$ a la bola abierta con centro en x y radio r.

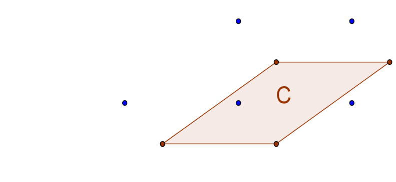
Entenderemos que una figura convexa C es un subconjunto del plano, compacto y convexo. Además, recordemos que para toda $\theta \in S^1$ el ancho de C en dirección v es la distancia entre las líneas soporte de C perpendiculares a θ y lo denotaremos por $w_\theta(C)$ y el ancho de C, que es igual a $\min_{\theta \in S^1} w_\theta(C)$, lo denotaremos por $w(C)$.

Si S es un conjunto, entonces su envolvente convexa la denotamos por $\operatorname{conv}(S)$. A la recta que pasa por dos puntos distintos $u, v \in \mathbb{R}^2$ la denotamos por $\overline{uv}$ y al segmento con extremos u y v lo denotamos por $[u, v]$.

Definición 1. Sean $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ una retícula y un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^2$. El conjunto C es un dominio fundamental si la proyección canónica

$$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Lambda, \quad \pi(P) = P + \Lambda$$

restringida al conjunto C es suprayectiva, esto significa que $\pi(C) = \mathbb{R}^n/\Lambda$.



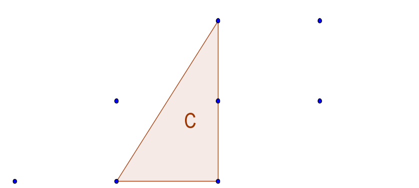


Fig.1a C es dominio fundamental **Fig.1b** C no es dominio fundamental

Observación 1. Es importante notar que si $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ es una retícula y C es un conjunto convexo, entonces C es un dominio fundamental si y sólo si $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{P \in \Lambda} T_P(C)$.

Definición 2. Sea C una figura convexa . El conjunto $C' \subseteq \mathbb{R}^2$ es una copia de C si existen una rotación R_θ y una translación T_v tales que $T_v(R_\theta(C)) = C'$.

Definición 3. Sea C una figura convexa. Una función continua

$$\phi : [0,1] \times C \to \mathbb{R}^2$$

es una transformación rígida de C si para toda $t \in [0,1]$ el conjunto $\phi(t,C)$ es una copia de C.

Definición 4. Sean $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ una retícula y C una figura convexa. La figura convexa C es débilmente movible con respecto a Λ si para cualesquiera dos copias C_0, C_1 de C tales que

$$\mathrm{int}(C_0) \cap \Lambda = \mathrm{int}(C_1) \cap \Lambda = \emptyset$$

existe una transformación rígida de C

$$\phi : [0,1] \times C \to \mathbb{R}^2$$

tal que para toda $t \in [0,1]$

$$\phi(t, \mathrm{int}(C)) \cap \Lambda = \emptyset$$

y $\phi(0,C) = C_0,\ \phi(1,C) = C_1$.

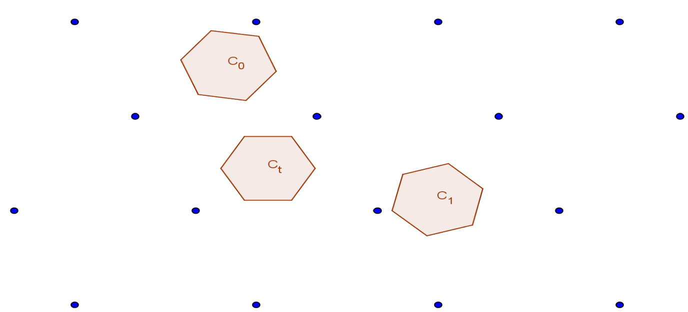


Fig.2 C es débilmente movible con $\phi(0,C) = C_0, \phi(1,C) = C_1$ y $\phi(t,C) = C_t$.

Si la figura convexa C tiene interior vacío, entonces es débilmente movible. Es por lo anterior que en adelante supondremos que la figura convexa C tiene interior no vacío. Si C es o no es débilmente movible con respecto a Λ diremos simpemente que C es o no es debilmente movible respectivamente, a menos de que exista confusión.

Definición 5. Sean $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ una retícula y C una figura convexa que contiene al origen en su interior. Definimos los conjuntos

$$C_\theta^* = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{P \in \Lambda} T_P(R_\theta(\mathrm{int}(C)))$$

y

$$C_\Lambda^* = \{(\theta, v) : \ \theta \in S^1, \ v \in C_\theta^*\}.$$

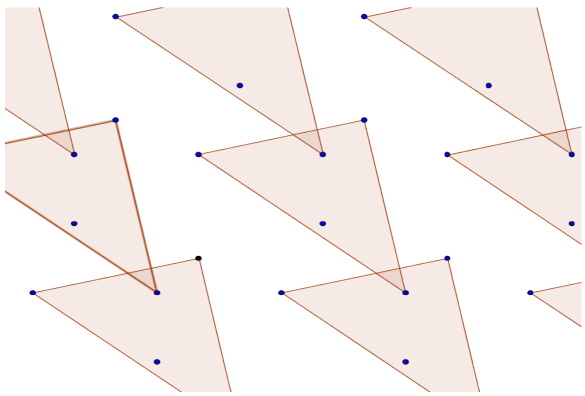


Fig.3 C_θ^* si C es un triángulo.

Observación 2. Es útil notar que

$$(\theta, v) \in C_\Lambda^* \quad \text{si y sólo si} \quad T_v(R_\theta(\mathrm{int}(C))) \cap \Lambda = \emptyset.$$

Observación 3. De sus definiciones, se sigue que para toda $\theta \in S^1$ el conjunto C_θ^* es cerrado en $\mathbb{R}^2$ y C_Λ^* es cerrado en $S^1 \times \mathbb{R}^2$. Mas aún, tenemos las siguientes identidades

$$\mathrm{Bd}(R_\theta(\mathrm{int}(C))) = R_\theta(\mathrm{Bd}(\mathrm{int}(C))) = R_\theta(\mathrm{Bd}(C)) = \mathrm{Bd}(R_\theta(C)).$$

El siguiente teorema caracteriza a las figuras convexas débilmente movibles con respecto a una retícula en términos de la arcoconexidad de C_Λ^*.

Teorema 1.1.1. *Sean $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ una retícula y C una figura convexa que contiene al origen en su interior.*

El conjunto C es débilmente movible con respecto a Λ si y sólo si C_Λ^* es arcoconexo.

Demostración. Supongamos que C es débilmente movible con respecto a Λ. Si $(\theta_0, v_0),\ (\theta_1, v_1) \in C^*_\Lambda$, la Observación 2 implica que

$$T_{v_0}(R_{\theta_0}(\mathrm{int}(C))) \cap \Lambda = T_{v_1}(R_{\theta_1}(\mathrm{int}(C))) \cap \Lambda = \emptyset.$$

Por hipótesis, existe una transformación rígida $\phi : [0,1] \times C \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T_{v_0}(R_{\theta_0}(C)) = \phi(0, C), \qquad T_{v_1}(R_{\theta_1}(C)) = \phi(1, C)$$

y

$$\phi(t, \mathrm{int}(C)) \cap \Lambda = \emptyset \qquad \text{para toda } t \in [0,1].$$

Denotemos por $\theta_t \in S^1$ y $v_t \in \mathbb{R}^2$ a los elementos tales que $\phi(t, C) = T_{v_t}(R_{\theta_t}(C))$. De nuevo por la Observación 2, $(\theta_t, v_t) \in C^*_\Lambda$ para toda $t \in [0,1]$ y consecuentemente la función

$$\varphi : [0,1] \to C^*_\Lambda, \qquad \varphi(t) = (\theta_t, v_t)$$

es un arco que une a (θ_0, v_0) con (θ_1, v_1) por lo que C^*_Λ es arcoconexo.

Supongamos que C_Λ es arcoconexo. Si $T_{v_0}(R_{\theta_0}(C))$ y $T_{v_1}(R_{\theta_1}(C))$ son copias de C que satisfacen

$$T_{v_0}(R_{\theta_0}(\mathrm{int}(C))) \cap \Lambda = T_{v_1}(R_{\theta_1}(\mathrm{int}(C))) \cap \Lambda = \emptyset$$

entonces, por la Observación 2, $(\theta_0, v_0),\ (\theta_1, v_1) \in C^*_\Lambda$.

Por hipótesis, existe un arco

$$\varphi : [0,1] \to C^*_\Lambda \qquad \text{con} \qquad \varphi(0) = (\theta_0, v_0) \text{ y } \varphi(1) = (\theta_1, v_1).$$

Sea $\varphi(t) = (\theta_t, v_t)$ para toda $t \in [0,1]$. La función

$$\phi : [0,1] \times C \to \mathbb{R}^2, \qquad \phi(t, P) = T_{v_t}(R_{\theta_t}(P))$$

es una transformación rígida que conecta a $T_{v_0}(R_{\theta_0}(C))$ con $T_{v_1}(R_{\theta_1}(C))$ y satisface que

$$\phi(t, \mathrm{int}(C)) \cap \Lambda = T_{v_t}(R_{\theta_t}(\mathrm{int}(C))) \cap \Lambda = \emptyset.$$

Por lo tanto, C es débilmente movible. □

Para un polígono convexo $K \subseteq \mathbb{R}^2$, denotaremos al conjunto de vértices de K por $\mathrm{vert}(K)$.

Definición 6. Sean $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ una retícula y C una figura convexa. Un polígono K convexo no degenerado es un polígono reticular de Λ en C si existe una copia C' de C tal que $\mathrm{vert}(K) \subseteq \Lambda \cap \mathrm{Bd}(C')$ y $\mathrm{int}(C') \cap \Lambda = \emptyset$.

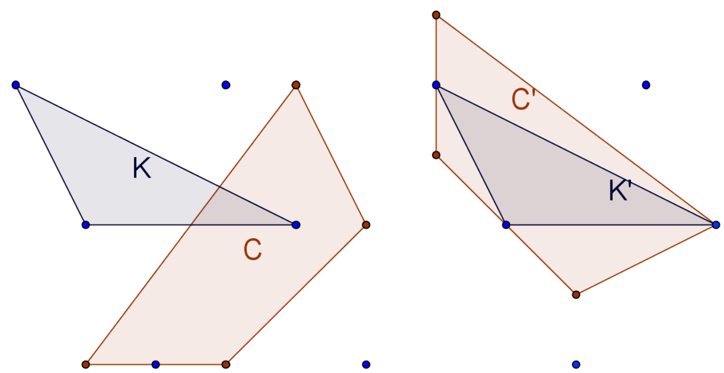


Fig.4 El polígono K es reticular y C' es una copia tal que $\mathrm{int}(C) \cap \Lambda = \emptyset$ $\mathrm{vert}(K) \subseteq \Lambda \cap \mathrm{Bd}(C')$.

Observación 4. De la Observación 2 se desprende que existe un polígono reticular de Λ en C si y sólo si existen $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\} \subseteq \Lambda$ no colineales y $\theta \in S^1$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} T_{P_i}(R_\theta(C)) \cap C_\theta^* \neq \emptyset.$$

Definición 7. Sean $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ una retícula y C una figura convexa que contiene al origen en su interior. Denotamos por $p_{S^1} : C_\Lambda^* \to S^1$ la proyección a la primera coordenada.

Definición 8. Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ una retícula. Sean $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2) \in \Lambda$ tal que $\{P, Q\}$ es un conjunto generador de Λ. Entonces, definimos el volumen de Λ como

$$\mathrm{vol}(\Lambda) = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right|$$

Observación 5. El volumen de una retícula está bien definido, esto significa que no depende del conjunto generador, ya que si $P' = (x'_1, y'_1), Q = (x'_2, y'_2) \in \Lambda$ son otros generadores entonces existe $A \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{Z})$ tal que

$$\begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

y, por la definición de, $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{Z})$, $|\det A| = 1$ lo que implica que el volumen está bien definido.

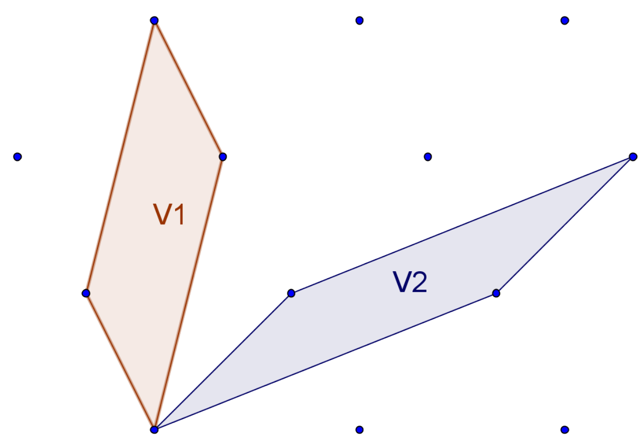


Fig.5 El volumen V_1 es igual al volumen V_2.

1.2. Caracterización

En esta sección, supondremos que $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ es una retícula y que C es una figura covexa que contiene al origen en su interior tal que no existen polígonos reticulares de Λ en C.

Lema 1.2.1. *Si para toda $\theta \in S^1$ el conjunto $R_\theta(\mathrm{int}(C))$ no es un dominio fundamental, entonces toda componente arcoconexa A de C^*_Λ satisface que $p_{S^1}(A) = S^1$.*

Demostración. Sea $P \in \Lambda$ tal que existe $(\theta_0, v_0) \in A \cap T_P(R_\theta(C))$. Definimos $A' = A \cap \{(\theta, v) : \ v \in T_P(R_\theta(C))\}$. Probaremos que $p_{S^1}(A')$ es abierto y cerrado en S^1 y por la conexidad de este último habremos probado que $p_{S^1}(A') = S^1$ y por ende $p_{S^1}(A) = S^1$.

Primero, probaremos que $p_{S^1}(A') \subseteq \text{int}(p_{S^1}(A'))$. Sean $\theta_1 \in p_{S^1}(A')$ y $v_1 \in \mathbb{R}^2$ tal que $(\theta_1, v_1) \in A'$.

Parametrizamos $T_P(R_{\theta_1}(\text{Bd}(C)))$ con una función continua

$$\phi : [0,1] \to T_P(R_{\theta_1}(\text{Bd}(C)))$$

tal que $\phi|_{[0,1)}$ es biyectiva, $\phi(0) = \phi(1)$ y $\phi(\frac{1}{2}) = v_1$.

Tenemos dos posibles casos:

i)Existe $\delta \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ **tal que si** $\lambda \in (0,1)$ **entonces** $\phi\left(\frac{1}{2} + \lambda\delta\right) \notin \bigcup_{Q \in \Lambda \setminus \{P\}} T_Q(R_{\theta_1}(C))$.

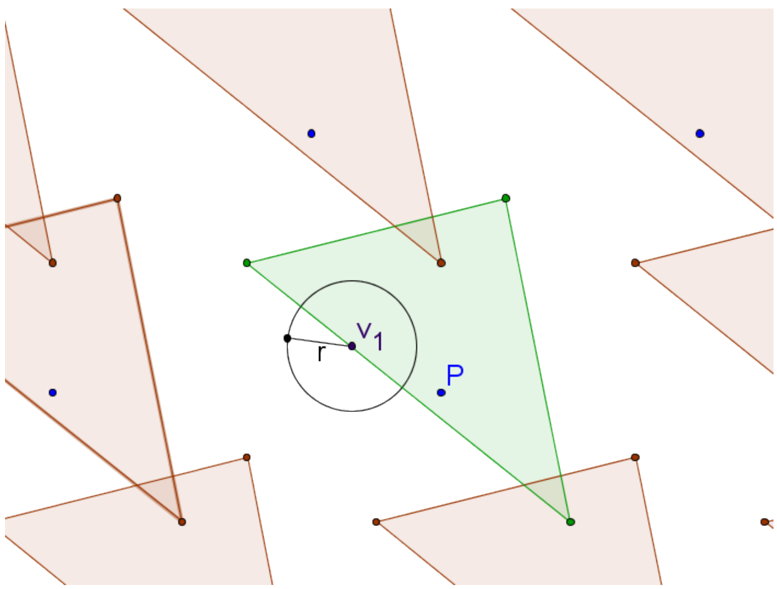


Fig.6 La existencia de la bola con radio positivo y centro v_1 que sólo intersecta $T_P(R_{\theta_1}(C))$ prueba la existencia de δ.

Entonces, para toda $\lambda \in [0,1)$ se cumple que $\left(\theta_1, \phi\left(\frac{1}{2} + \lambda\delta\right)\right) \in A'$ y existe $r > 0$ tal que

$$B_r\left(\phi\left(\frac{1+\delta}{2}\right)\right) \cap \bigcup_{Q \in \Lambda \setminus \{P\}} T_Q(R_{\theta_1}(\text{int}(C))) = \emptyset. \tag{1.1}$$

Las rotaciones son continuas y, por (1.1), podemos asegurar que existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\mu \in (-1, 1)$

$$T_P\left(R_{e^{i\mu\epsilon}}\left(T_{-P}\left(\phi\left(\frac{1+\delta}{2}\right)\right)\right)\right) \notin \bigcup_{Q\in\Lambda\setminus\{P\}} T_Q(R_{\theta_1\cdot e^{i\mu\epsilon}}(\mathrm{int}(C))).$$

Notemos que para toda $\mu \in (-1, 1)$

$$T_P\left(R_{e^{i\mu\epsilon}}\left(T_{-P}\left(\phi\left(\frac{1+\delta}{2}\right)\right)\right)\right) \in T_P(R_{\theta_1\cdot e^{i\mu\epsilon}}(\mathrm{Bd}(C))) \subseteq T_P(R_{\theta_1\cdot e^{i\mu\epsilon}}(C)). \tag{1.2}$$

Luego, (1.1) y (1.2) implican que para toda $\mu \in (-1, 1)$ se puede definir el arco

$$\varphi : [0,1] \to C^*_\Lambda, \quad \varphi(t) = \left(\theta_1 \cdot e^{it\mu\epsilon}, T_P\left(R_{e^{it\mu\epsilon}}\left(T_{-P}\left(\phi\left(\frac{1+\delta}{2}\right)\right)\right)\right)\right).$$

Como $\varphi(0) = \left(\theta_1, \phi\left(\frac{1+\delta}{2}\right)\right) \in A'$, entonces

$$\left(\theta_1 \cdot e^{i\mu\epsilon}, T_P\left(R_{e^{i\mu\epsilon}}\left(T_{-P}\left(\phi\left(\frac{1+\delta}{2}\right)\right)\right)\right)\right) \in A,$$

esto y (1.2) implican que

$$\left(\theta_1\cdot e^{i\mu\epsilon}, T_P\left(R_{e^{i\mu\epsilon}}\left(T_{-P}\left(\phi\left(\frac{1+\delta}{2}\right)\right)\right)\right)\right) \in A\cap\{(\theta, v) :\ v \in T_P(R_\theta(C))\} = A'.$$

En particular, tenemos que $e^{i\mu\epsilon} \cdot \theta_1 \in p_{S^1}(A')$ para toda $\mu \in (-1, 1)$ y por ende $\theta_1 \in \mathrm{int}(p_{S^1}(A'))$.

ii)No existe $\delta \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ **como en i)**.

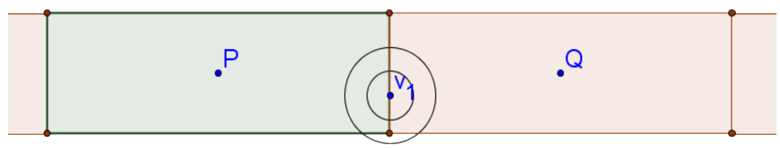


Fig.7 Toda bola con radio positivo intersecta
de $T_Q(R_{\theta_1}(C))$ y no existe δ.

En este caso, existen sucesiones $\{\delta_n\} \subseteq \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $\{\delta'_n\} \subseteq \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ que convergen a cero y para toda $n \in \mathbb{N}$ existen $Q_n, Q'_n \in \Lambda \setminus \{P\}$ tales que $\phi\left(\frac{1}{2} + \delta_n\right) \in T_{Q_n}(R_{\theta_1}(\text{int}(C)))$ y $\phi\left(\frac{1}{2} + \delta'_n\right) \in T_{Q'_n}(R_{\theta_1}(\text{int}(C)))$.

Sin embargo, $T_P(R_{\theta_1}(\text{Bd}(C)))$ es compacto y Λ es discreto lo que implica que existe una subsucesión $\{\epsilon_n\} \subseteq \{\delta_n\}$ y un $Q \in \Lambda \setminus \{P\}$ tal que $\phi\left(\frac{1}{2} + \epsilon_n\right) \in T_Q(R_{\theta_1}(\text{int}(C)))$. En particular

$$\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \phi\left(\frac{1}{2} + \epsilon_n\right) \in \overline{T_Q(R_{\theta_1}(\text{int}(C)))} = T_Q(R_{\theta_1}(C)).$$

Pero, $\phi\left(\frac{1}{2}\right) \notin T_Q(R_{\theta_1}(\text{int}(C)))$ por que $A' \subseteq C^*_\Lambda$, y por lo tanto $\phi\left(\frac{1}{2}\right) \in T_Q(R_{\theta_1}(\text{Bd}(C)))$.

Análogamente, existe una subsucesión $\{\epsilon'_n\} \subseteq \{\delta'_n\}$ y un $R \in \Lambda \setminus \{P\}$ tal que $\phi\left(\frac{1}{2} + \epsilon'_n\right) \in T_R(R_{\theta_1}(\text{int}(C)))$. Razonando como arriba, $\phi\left(\frac{1}{2}\right) \in T_R(R_{\theta_1}(\text{Bd}(C)))$.

Si $Q \neq R$, entonces P, Q y R son colineales por que en caso contrario $\triangle PQR$ es un polígono reticular de Λ en C.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $P \in [Q, R]$, en los otros casos únicamente reordenamos los puntos y seguimos el mismo razonamiento.

Debemos notar que para $\theta \in S^1$ si $P', Q', R' \in \Lambda$ son colineales tales que

$$T_{P'}(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_{Q'}(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_{R'}(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) \neq \emptyset,$$

entonces para todo v en esta intersección satisface que

$$\mathrm{conv}(T_{-P'}(v), T_{-Q'}(v), T_{-R'}(v)) \subseteq R_\theta(\mathrm{Bd}(C))$$

es un segmento. En caso contrario, si existen $P', Q', R' \in \Lambda$ y $v \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\mathrm{conv}(T_{-P'}(v), T_{-Q'}(v), T_{-R'}(v)) \subseteq R_\theta(\mathrm{Bd}(C))$$

es un segmento, entonces $P', Q', R' \in \Lambda$ son colineales y

$$v \in T_{P'}(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_{Q'}(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_{R'}(R_\theta(\mathrm{Bd}(C)))$$

Utilizando el análisis del párrafo anterior tenemos que

$$\mathrm{conv}(T_{-P}(v_1), T_{-Q}(v_1), T_{-R}(v_1)) \subseteq R_{\theta_1}(\mathrm{Bd}(C))$$

es un segmento y esto implica que existe $\epsilon_1 > 0$ tal que para todo $\lambda \in (-1,1) \setminus \{0\}$ no existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\mathrm{conv}(T_{-P}(v), T_{-Q}(v), T_{-R}(v)) \subseteq R_{\theta_1 \cdot e^{i\lambda\epsilon_1}}(\mathrm{Bd}(C))$$

lo que implica que

$$T_P(R_{\theta_1 \cdot e^{i\lambda\epsilon_1}}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_1 \cdot e^{i\lambda\epsilon_1}}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_R(R_{\theta_1 \cdot e^{i\lambda\epsilon_1}}(\mathrm{Bd}(C))) = \emptyset.$$

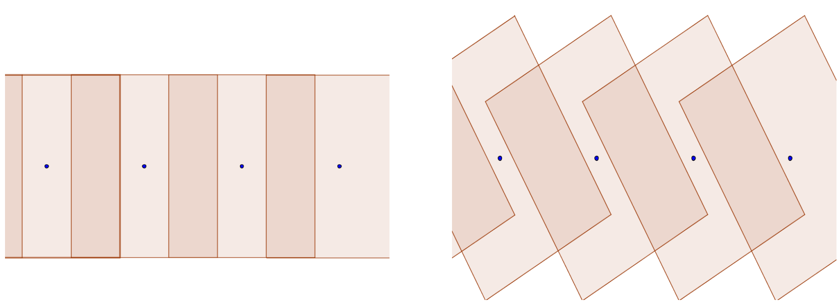


Fig. 8a $C^*_{\theta_1}$ **Fig. 8b** $C^*_{\theta_1 \cdot e^{i\lambda\epsilon_1}}$

En particular, para cada $\lambda \in (-1,1)\backslash\{0\}$ existen $x_\lambda \neq y_\lambda \in \mathrm{conv}(T_{-P}(v_1), T_{-Q}(v_1), T_{-R}(v_1))$ tales que $[x_\lambda, y_\lambda]$ son segmentos maximales que satisfacen que

$$T_P(R_{\theta_1 \cdot e^{i\lambda\epsilon_1}}([x_\lambda, y_\lambda])) \cap (T_Q(R_{\theta_1 \cdot e^{i\lambda\epsilon_1}}(\mathrm{Bd}(C))) \cup T_R(R_{\theta_1 \cdot e^{i\lambda\epsilon_1}}(\mathrm{Bd}(C)))) = \emptyset \tag{1.3}$$

y

$$v_1 \in \lim_{\lambda \to 0^+} T_P(R_{\theta_1 \cdot e^{i\lambda\epsilon_1}}([x_\lambda, y_\lambda])) \cap \lim_{\lambda \to 0^-} T_P(R_{\theta_1 \cdot e^{i\lambda\epsilon_1}}([x_\lambda, y_\lambda])) \tag{1.4}$$

Por otro lado, el hecho de que P se encuentre entre Q y R implica que

$$\begin{aligned} \mathrm{conv}(v_1, T_{P-Q}(v_1), T_{P-R}(v_1)) &= T_P(\mathrm{conv}(T_{-P}(v_1), T_{-Q}(v_1), T_{-R}(v_1))) \\ &\subseteq T_Q(\mathrm{conv}(T_{-P}(v_1), T_{-Q}(v_1), T_{-R}(v_1))) \\ &\quad \cup T_R(\mathrm{conv}(T_{-P}(v_1), T_{-Q}(v_1), T_{-R}(v_1))). \end{aligned}$$

Esto implica que si existe $S \in \Lambda$ tal que

$$T_S(R_{\theta_1}(C)) \cap \mathrm{conv}(v_1, T_{P-Q}(v_1), T_{P-R}(v_1)) \neq \emptyset,$$

entonces como

$$\mathrm{conv}(v_1, T_{P-Q}(v_1), T_{P-R}(v_1)) \nsubseteq T_S(R_{\theta_1}(\mathrm{int}(C)))$$

por que $v_1 \in C^*_{\theta_1}$, tenemos que

$$T_S(R_{\theta_1}(\mathrm{Bd}(C))) \cap \mathrm{conv}(v_1, T_{P-Q}(v_1), T_{P-R}(v_1)) \neq \emptyset$$

entonces P, Q, R, S tienen que ser colineales por que si no $\triangle PQS$ o $\triangle PRS$ es un polígono reticular.

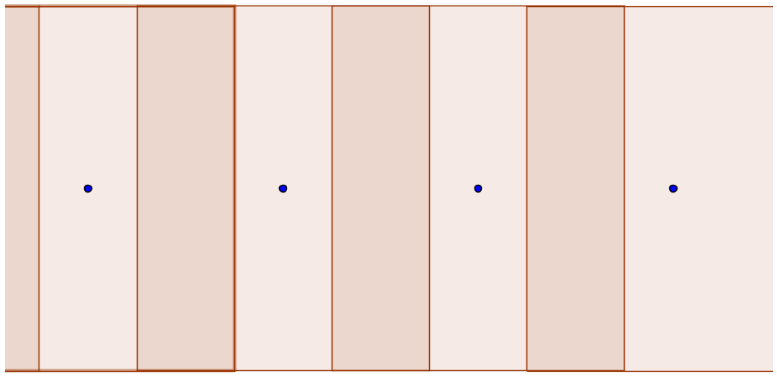


Fig. 9 $T_P(R_{\theta_1}(C))$ solo intersecta a $T_S(R_{\theta_1}(C))$ si $S \in \overline{PQ} \cap \Lambda$

El razonamiento anterior implica que

$$\bigcup_{S \in \Lambda \setminus \overline{PQ}} T_S(R_{\theta_1}(C)) \cap \mathrm{conv}(v_1, T_{P-Q}(v_1), T_{P-R}(v_1) = \emptyset$$

y por lo tanto existe $\epsilon_2 > 0$ tal que para toda $\lambda \in (-1, 1)$

$$\bigcup_{S \in \Lambda \setminus \overline{PQ}} T_S(R_{\theta_1 \cdot e^{i\lambda\epsilon_1}}(C)) \cap T_P(R_{e^{i\lambda\epsilon_1}}(\mathrm{conv}(T_{-P}(v_1), T_{-Q}(v_1), T_{-R}(v_1)))) = \emptyset. \tag{1.5}$$

Directamente de (1.3), (1.4) y (1.5) podemos concluir que existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\lambda \in (-1, 1)\setminus\{0\}$ tal que existen $x_\lambda \neq y_\lambda \in \mathrm{conv}(T_{-P}(v_1), T_{-Q}(v_1), T_{-R}(v_1))$ para toda λ tales que $[x_\lambda, y_\lambda]$ son segmentos maximales y satisfacen (1.3), (1.4) y además por (1.5)

$$\bigcup_{S \in \Lambda \setminus \overline{PQ}} T_S(R_{\theta_1 \cdot e^{i\lambda\epsilon_1}}(C)) \cap T_P(R_{e^{i\lambda\epsilon_1}}([x_\lambda, y_\lambda])) = \emptyset \tag{1.6}$$

lo que implica, junto con (1.4), que para toda $\lambda \in (-1, 1) \setminus \{0\}$

$$(\theta_1 \cdot e^{i\lambda\epsilon_1}, T_P(R_{e^{i\lambda\epsilon_1}}([x_\lambda, y_\lambda])) \subseteq A'$$

y $\theta_1 \in \mathrm{int}(p_{S^1}(A'))$

Supondremos en adelante que $Q = R$. Sea $\Gamma = \{t \in [0,1] : \ \phi(t) \in A \cap T_Q(R_{\theta_1}(\mathrm{Bd}(C)))\}$. Primero, observemos que Γ es cerrado por la continuidad de ϕ y que $\Gamma \neq \emptyset$. La compacidad de C implica que para cualesquiera $P_1, P_2 \in \Lambda$ distintos se cumple que $T_{P_1}(R_{\theta_1}(\mathrm{int}(C))) \nsubseteq T_{P_2}(R_{\theta_1}(\mathrm{int}(C)))$. Esta última propiedad aunada a la convexidad de C implica que $\Gamma \neq [0,1]$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $0 \notin \Gamma$, sino es así reparametrizamos para satisfacer esta condición. Sean $0 < t_0 = \text{mín}\{t \in \Gamma\}, t_1 = \text{máx}\{t \in \Gamma\} < 1$ y $(P_0, \theta_1) = \phi(t_0), (P_1, \theta_1) = \phi(t_1)$.

Si $\phi(t_0) \in T_S(R_{\theta_1}(C))$ para algún $S \in \Lambda \setminus \{P, Q\}$ entonces, como $\phi(t_0) \in A \subseteq C^*_\Lambda$, tenemos que $\phi(t_0) \notin T_S(R_{\theta_1}(\mathrm{int}(C)))$ y por lo tanto $\phi(t_0) \in T_S(R_{\theta_1}(\mathrm{Bd}(C)))$. De lo anterior, P, Q y S son colineales por que si no $\triangle PQS$ es un triángulo reticular de Λ en C y si estos puntos son colineales caemos en el caso analizado en la parte superior de este caso.

Por el análisis anterior, $\phi(t_0) \notin T_S(R_{\theta_1}(C))$ para todo $S \in \Lambda \setminus \{P, Q\}$ y luego

$$\phi(t_0) \notin \bigcup_{S \in \Lambda \setminus \{P,Q\}} T_S(R_{\theta_1}(C))).$$

Esto implica que existe $\delta \in (0, t_0)$ tal que para toda $\lambda \in (0,1)$

$$\phi(t_0 - \lambda\delta) \notin \bigcup_{S \in \Lambda \setminus \{P\}} T_S(R_{\theta_1}(\mathrm{int}(C)))).$$

Consecuentemente, podemos razonar como en **i)** y concluir que $\theta_1 \in \mathrm{int}(p_{S^1}(A'))$.

En cualquier caso, hemos probado que $\theta_1 \in \mathrm{int}(p_{S^1}(A'))$ y por consiguiente $\mathrm{int}(p_{S^1}(A')) = p_{S^1}(A')$, que es equivalente a que $p_{S^1}(A')$ sea abierto.

De la definición de C^*_Λ, se puede ver que es localmente arcoconexa (ver [M]). Lo que implica que A es cerrado en C^*_Λ, y como C^*_Λ es cerrado en $S^1 \times \mathbb{R}^2$, entonces A es cerrado en $S^1 \times \mathbb{R}^2$. Por otro lado, $\{(\theta, v) : \ v \in T_P(R_\theta(\mathrm{Bd}(C)))\}$ es compacto en $S^1 \times \mathbb{R}^2$ lo que implica que A' es compacto en $S^1 \times \mathbb{R}^2$. Las proyecciones son continuas y el análisis anterior implica que el conjunto $p_{S^1}(A')$ es compacto, en particular cerrado, y concluye la demostración del lema. $\square$

Observación 6. Un resultado conocido de la geometría convexa es que para una figura convexa C su ancho es igual a su mínimo diámetro afín, donde un diámetro afín es la máxima cuerda con respecto a cierta dirección.

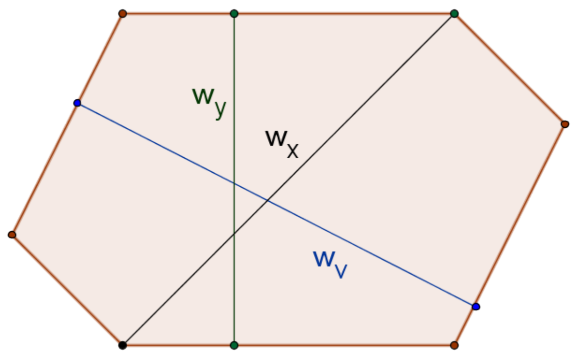


Fig.10 En la figura, $w(C) = w_y$.

Lema 1.2.2. *Supongamos que $w(C) \leq r_\Lambda$ y para toda $\theta \in S^1$ el conjunto $R_\theta(\operatorname{int}(C))$ no es un dominio fundamental.*

Sean $\theta_0 \in S^1$ y D, E componentes arcoconexas de $C^*_{\theta_0}$ tales que existen $P, Q \in \Lambda$ distintos que satisfacen que $[P, Q] \cap \Lambda = \{P, Q\}$,

$$D \cap T_P(R_{\theta_0}(\operatorname{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\operatorname{Bd}(C))) \neq \emptyset$$

y

$$E \cap T_P(R_{\theta_0}(\operatorname{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\operatorname{Bd}(C))) \neq \emptyset.$$

Entonces, existe un arco $\phi : [0,1] \to C^*_\Lambda$ con $\phi(0) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in D\}$ y $\phi(1) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in E\}$.

Demostración. Si $D = E$, el resultado se sigue de la definición de componente arcoconexa.

En adelante, supondremos que $D \neq E$. Definimos

$$f : S^1 \to \mathbb{R}, \quad f(\theta) = \text{máx}\left\{\lambda : \ x, \ x + \frac{\lambda}{|P-Q|}(P-Q) \in R_\theta(C)\right\}.$$

Es fácil ver que f es continua y por la Observación 6

$$\text{mín}\{f(\theta) : \ \theta \in S^1\} = w(C) \leq r_\Lambda \leq |P-Q|. \tag{1.7}$$

Además

$$\emptyset \neq T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \subseteq T_P(R_{\theta_0}(C)) \cap T_Q(R_{\theta_0}(C)). \quad (1.8)$$

En particular, (1.7) implica que existe $x \in R_{\theta_0}(C)$ tal que $T_{P-Q}(x) \in R_{\theta_0}(C)$ por lo que $f(\theta_0) \geq |P - Q|$.

También, (1.6), (1.7) y la continuidad de f implican, por el Teorema del Valor Intermedio, que existe $\theta_1 \in S^1$ tal que en uno de los arcos cerrados I definido por θ_0 y θ_1 cumple que $f(\theta) \geq |P - Q|$ para todo $\theta \in I$ y con $f(\theta_1) = |P - Q|$.

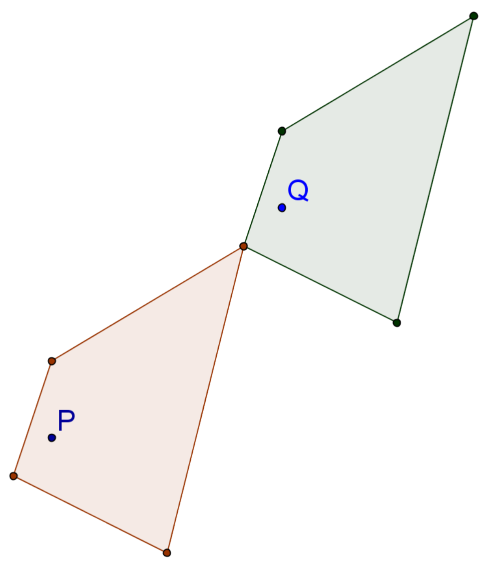


Fig.11 $f(\theta) = |P - Q|$.

Sean A y B las componentes arcoconexas de C^*_Λ que contienen a $\{(\theta_0, v) : v \in D\}$ y $\{(\theta_0, v) : v \in E\}$ respectivamente. Para toda $\theta \in I$, tenemos que $f(\theta) \geq |P - Q|$ por lo que existe $x \in R_\theta$ tal que $T_{P-Q}(x) \in R_\theta(C)$ y por lo tanto $T_Q(x) \in T_P(R_\theta(C)) \cap T_Q(R_\theta(C))$.

A partir de lo anterior, podemos concluir que

$$T_P(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) \neq \emptyset.$$

La demostración del lema se seguirá de las siguientes dos afirmaciones.

Afirmación 1. *Sean*

$$A' = \{(\theta, v) \in A \cap T_P(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) : \ \theta \in I\}.$$

y

$$B' = \{(\theta, v) \in B \cap T_P(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) :\ \theta \in I\}.$$

Entonces, $I = p_{S^1}(A') = p_{S^1}(B')$.

Demostración (Afirmación 1.) Basta probar que $I = p_{S^1}(A')$ ya que la otra igualdad se demuestra de la misma manera.

Como en el Lema 1.2.1, el conjunto A es cerrado en $S^1 \times \mathbb{R}^2$. Razonando como en el Lema 1.2.1, podemos concluir que $\{(\theta, v) :\ v \in T_P(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_\theta(\mathrm{Bd}(C)))\}$ es compacto en $S^1 \times \mathbb{R}^2$ y I es cerrado en S^1 lo que implica que A' es compacto en $S^1 \times \mathbb{R}^2$ y por lo tanto $p_{S^1}(A')$ es cerrado en S^1, en particular $\mathrm{int}(I) \cap p_{S^1}(A')$ es cerrado en $\mathrm{int}(I)$.

Siguiendo el mismo camino que en el Lema 1.2.1, podemos probar que para todo $\theta \in \mathrm{int}(I) \cap p_{S^1}(A')$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\theta \cdot e^{i\mu\epsilon} \in \mathrm{int}(I) \cap p_{S^1}(A')$ para toda $\mu \in (-1, 1)$.

Los dos párrafos anteriores implican que $\mathrm{int}(I) \cap p_{S^1}(A')$ es cerrado y abierto en $\mathrm{int}(I)$. De esto último y la conexidad de $\mathrm{int}(I)$ podemos concluir que $\mathrm{int}(I) \subseteq p_{S^1}(A')$. Finalmente, como $p_{S^1}(A') \subseteq I$ es cerrado en S^1 podemos concluir que $p_{S^1}(A') = I$, lo que termina la demostración de la afirmación.

Afirmación 2. *Existe* $\theta \in I$ *tal que*

$$C^*_\theta \cap T_P(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_\theta(\mathrm{Bd}(C)))$$

es arcoconexa.

Demostración (Afirmación 2.) Sea $\theta_2 \in I$ tal que $f(\theta_2) = |P - Q|$. Como probamos en la Afirmación 1

$$C^*_{\theta_2} \cap T_P(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \neq \emptyset.$$

Sin embargo

$$y \in T_P(R_{\theta_2}(\mathrm{int}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\mathrm{int}(C)))$$

implica que $T_{-P}(y), T_{-Q}(y) \in R_{\theta_2}(\mathrm{int}(C))$ y obtenemos la contradicción

$$|P - Q| = |T_{-Q}(y) - T_{-P}(y)| < f(\theta_2) = |P - Q|.$$

Consecuentemente

$$T_P(R_{\theta_2}(\mathrm{int}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\mathrm{int}(C))) = \emptyset \tag{1.9}$$

Si $C^*_{\theta_2} \cap T_P(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) = \{z\}$ para algún z, entonces la intersección es trivialmente arcoconexa.

Si $|C^*_{\theta_2} \cap T_P(R_{\theta_2}(\text{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\text{Bd}(C)))| > 1$, entonces, por (1.8) y la convexidad de C, para cualesquiera

$$a \neq b \in C^*_{\theta_2} \cap T_P(R_{\theta_2}(\text{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\text{Bd}(C)))$$

y $\lambda \in [0,1]$ se cumple que

$$\lambda a + (1-\lambda)b \in T_P(R_{\theta_2}(\text{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\text{Bd}(C))).$$

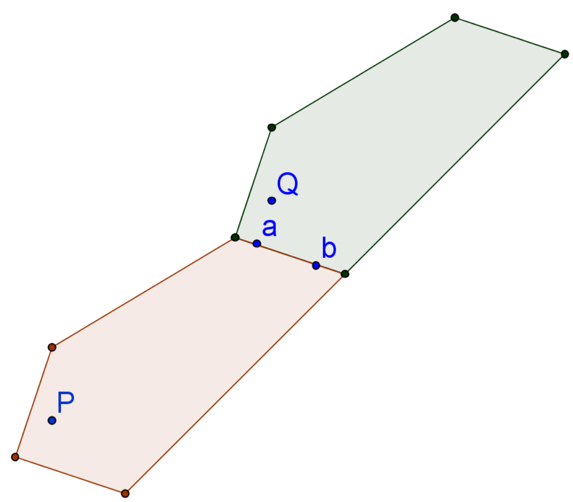


Fig.12 Suponiendo que
$|C^*_{\theta_2} \cap T_P(R_{\theta_2}(\text{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\text{Bd}(C)))| > 1$.

Afirmamos que para toda $\lambda a + (1-\lambda)b$ con $\lambda \in [0,1]$ tenemos que

$$\lambda a + (1-\lambda)b \notin \bigcup_{R \in \Lambda \setminus \{P,Q\}} T_R(R_{\theta_2}(\text{int}(C)))$$

y por lo tanto $\lambda a + (1-\lambda)b \in C^*_{\theta_2}$.

En efecto, si $\lambda a + (1-\lambda)b \in T_R(R_{\theta_2}(\text{int}(C)))$ para algún $R \in \Lambda \setminus \{P,Q\}$, como $a, b \in C^*_{\theta_2}$, existe $\lambda' \in [0,1]$ tal que $\lambda' a + (1-\lambda')b \in T_R((R_{\theta_2}(\text{Bd}(C))))$ y por lo tanto $\triangle PQR$ es un triángulo reticular de Λ en C a menos de que P, Q y R sean colineales. Sin embargo, P, Q y R no pueden ser colineales por que la recta $\overline{ab}$ separa a $T_P(R_{\theta_2}(C))$ y $T_P(R_{\theta_2}(C))$ en semiplanos cerrados distintos; Además, la hipótesis de que $[P,Q] \cap \Lambda = \{P,Q\}$ implica que $T_S(R_{\theta_2}(C))$

este contenido en uno de los semiplanos abiertos definidos por $\overline{ab}$ para todo $S \in \Lambda \cap \overline{PQ} \setminus \{P, Q\}$ y en particular no intersecta a $[a, b]$, lo que prueba nuestra aseveración.

Resumiendo lo anterior, para toda $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda a + (1 - \lambda)b \in C^*_{\theta_2} \cap T_P(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))).$$

Concluimos que $C^*_{\theta_2} \cap T_P(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C)))$ es arcoconexo, lo que termina la demostración de la Afirmación 2.

Regresando a la demostración del Lema 1.2.2, la Afirmación 2 indica que existe $\theta \in I$ tal que $C^*_\theta \cap T_P(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_\theta(\mathrm{Bd}(C)))$ es arcoconexo. Por la Afirmación 1, existen $(\theta, v) \in A' \subseteq A$ y $(\theta, u) \in B' \subseteq B$ y, por la conexidad de $C^*_\theta \cap T_P(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_\theta(\mathrm{Bd}(C)))$, existe un arco entre (θ, v) y (θ, u) lo que nos permite concluir que $A = B$ y termina la demostración del lema. $\square$

Lema 1.2.3. *Sean $P \in \Lambda$ y $\theta_0 \in S^1$. Supongamos que $w(C) \leq r_\Lambda$ y para todo $\theta \in S^1$ el conjunto $R_\theta(\mathrm{int}(C))$ no es un dominio fundamental. Si $D \neq E$ son componentes arcoconexas de $C^*_{\theta_0}$ que intersectan a $T_P(R_{\theta_0}(C))$, entonces existe un arco*

$$\psi : [0, 1] \to C^*_\Lambda$$

tal que

$$\psi(0) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in D\} \qquad y \qquad \psi(1) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in E\}$$

Demostración. Sea

$$\phi : [0, 1] \to T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$$

una función continua que parametriza $T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$ con $\phi|_{[0,1)}$ biyectiva y $\phi(0) = \phi(1)$.

Sean

$$I' = \{t \in [0, 1] : \ \phi(t) \in T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap C^*_{\theta_0} \text{ para algún } Q \in \Lambda \setminus \{P\}\}$$

y

$$J = \{t \in [0, 1] : \ \phi((t - \epsilon, t + \epsilon)) \nsubseteq C^*_{\theta_0} \text{ para toda } \epsilon > 0\}.$$

Definimos $I = I' \cap J$.

Como C es compacto existe un número finito de $Q \in \Lambda \setminus \{P\}$ tal que $T_Q(C) \cap T_P(C) \neq \emptyset$ y por cada $Q \in \Lambda \setminus \{P\}$ existen a lo mas dos $t_1, t_2 \in I$ distintos. En particular, I es finito y podemos ordenar sus elementos $I = \{0 \leq t_1 < \ldots < t_n < 1\}$.

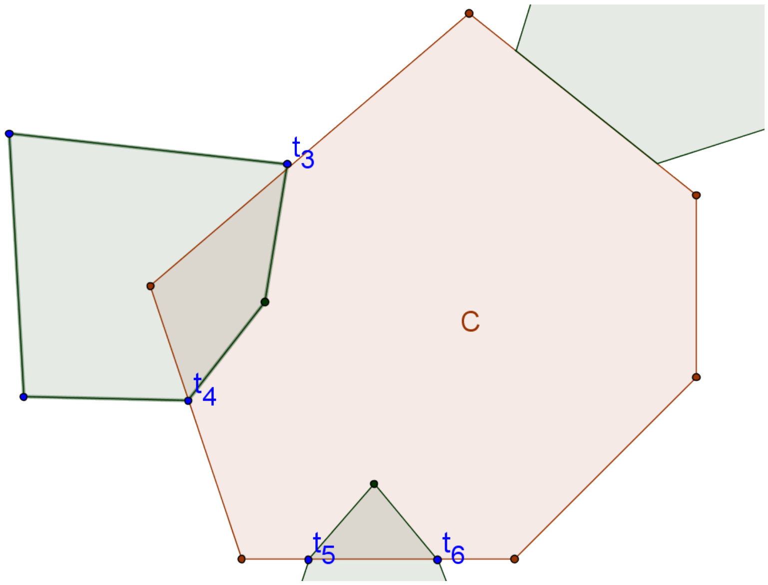


Figura 13

Lo que haremos es probar que si G_{i_0} la componente arcoconexa de $\phi(t_{i_0})$ en $C^*_{\theta_0}$ y G_{i_0+1} la componente arcoconexa de $\phi(t_{i_0+1})$ en $C^*_{\theta_0}$, entonces existe un arco

$$\psi : [0,1] \to C^*_\Lambda$$

tal que

$$\psi(0) \in \{(\theta_0, v) :\ v \in G_{i_0}\} \qquad \text{y} \qquad \psi(1) \in \{(\theta_0, v) :\ v \in G_{i_0+1}\}.$$

Haciendo inducción módulo n habremos terminado la demostración del lema.

Haremos algunas reducciones al problema. La primera es que si $G_{i_0} = G_{i_0+1}$, entonces no hay nada que probar. Esto implica que existe $t \in (t_{i_0}, t_{i_0+1})$ tal que $\phi(t) \notin C^*_{\theta_0}$ ya que en caso contrario $\phi|_{[t_{i_0}, t_{i_0+1}]}$ es un arco con $\phi(t_{i_0}) \in G_{i_0}$ y $\phi(t_{i_0+1}) \in G_{i_0+1}$. De lo anterior, podemos asegurar que existe $Q \in \Lambda \setminus \{P\}$ tal que

$$\phi(t_{i_0}) \in T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \quad \text{y} \quad \phi((t_{i_0}, t_{i_0+1})) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{int}(C))) \neq \emptyset \quad (1.10)$$

Otra reducción que podemos hacer es que si $Q \in \Lambda \setminus \{P\}$ satisface (1.9), podemos suponder que $[P,Q] \cap \Lambda = \{P, Q\}$. En efecto, si existe $R \in [P,Q] \cap \Lambda \setminus \{P, Q\}$, entonces como en el Lema 1.2.2

$$\mathrm{conv}(T_{-P}(\phi(t_{i_0})), T_{-Q}(\phi(t_{i_0})), T_{-R}(\phi(t_{i_0}))) \subseteq R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))$$

es un segmento cerrado con extremos $T_{-P}(\phi(t_{i_0}))$ y $T_{-Q}(\phi(t_{i_0}))$ lo que implica que $\phi(t_{i_0}) \in T_R(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$ y que $\phi((t_{i_0}, t_{i_0+1})) \cap T_R(R_{\theta_0}(\mathrm{int}(C))) \neq \emptyset$ por lo que R satisface (1.9,) y entonces podemos suponder que $[P, Q] \cap \Lambda = \{P, Q\}$.

Hechas todas las reducciones anteriores probaremos que $\phi(t_{i_0+1}) \in T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$ y por el Lema 1.2.2 habremos concluido.

Supongamos que $\phi(t_{i_0+1}) \notin T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$; Entonces, existe un único elemento $t_0 \in (t_{i_0}, t_{i_0+1})$ tal que

$$\phi(t_0) \in T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \setminus \{\phi(t_{i_0})\}.$$

Esto implica, por el orden y la definición de I, que $t_0 \notin I$ y por lo tanto $\phi(t_0) \notin C^*_{\theta_0}$ lo que nos deja que existe $R \in \Lambda \setminus \{P, Q\}$ tal que

$$\phi(t_0) \in T_R(R_{\theta_0}(\mathrm{int}(C))); \tag{1.11}$$

En particular

$$\phi(t_0) \in T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_R(R_{\theta_0}(\mathrm{int}(C))).$$

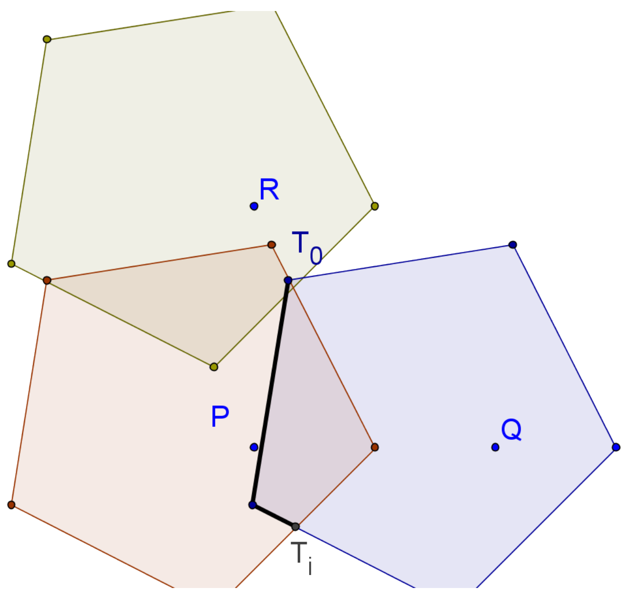


Fig.14 En la figura, $\phi(t_{i_0+1}) = T_i$ y $\phi(t_0) = T_0$.

Tenemos dos casos posibles.

i) Existen $Q \in \Lambda \setminus P$ que satisface (1.9), $[P, Q] \cap \Lambda = \{P, Q\}$ y $R \in \Lambda \setminus \{P, Q\}$ que satisface (1.10) tales que P, Q y R no son colineales.

Veremos que este caso no se puede dar por la hipótesis de que no existen polígonos reticulares.

Existe un arco maximal $I_Q \subseteq S^1$ que contiene a θ_0 tal que

$$T_P(R_\theta(\text{int}(C))) \cap T_Q(R_\theta(\text{int}(C))) \neq \emptyset \qquad \text{si } \theta \in I_Q$$

este arco es abierto y no puede ser todo S^1 por la hipótesis de que $w(C) = w(\text{int}(C)) \leq r_\Lambda$.

Para toda $\theta \in I_Q$ existen $x_Q, y_Q \in T_P(R_\theta(\text{Bd}(C))) \cap T_Q(R_\theta(\text{Bd}(C)))$ distintos tales que un arco abierto $\mathcal{A}_\theta \subseteq T_P(R_\theta(\text{Bd}(C)))$ definido por x_θ y y_θ esté contenido en $T_Q(R_\theta(\text{int}(C)))$. Notemos que

$$\mathcal{A}_{\theta_0} \cap T_R(R_{\theta_0}(\text{Bd}(C))) = \phi((t_{i_0}, t_0)) \cap T_R(R_{\theta_0}(\text{Bd}(C))) \neq \emptyset. \tag{1.12}$$

Como $\theta_0 \in I_Q$, afirmamos que para toda $\theta \in I_Q$

$$\mathcal{A}_\theta \cap T_R(R_\theta(\text{Bd}(C))) \neq \emptyset. \tag{1.13}$$

En efecto, si no es así, existe $\theta_1 \in I_Q$ tal que

$$\mathcal{A}_{\theta_1} \cap T_R(R_{\theta_1}(\text{Bd}(C))) = \emptyset; \tag{1.14}$$

Por el Teorema del Valor Intermedio, por (1.11), (1.13) y la continuidad de las rotaciones tenemos que existe un θ_2 en el arco cerrado definido por θ_0 y θ_1 contenido en I_Q tal que

$$\{x_{\theta_2}, y_{\theta_2}\} \cap T_R(R_{\theta_2}(\text{Bd}(C))) \neq \emptyset$$

implicando que

$$T_P(R_{\theta_2}(\text{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\text{Bd}(C))) \cap T_R(R_{\theta_2}(\text{Bd}(C)))$$

lo que contradice la hipótesis de que no existen polígonos reticulares de Λ en C.

Luego, tenemos que se cumple (1.12) y si $\theta_3 \in \text{Bd}(I_Q) \subseteq S^1$, como en el Lema 1.2.2, uno puede concluir que

$$T_P(R_{\theta_3}(\text{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_3}(\text{Bd}(C))) = T_P(R_{\theta_3}(C)) \cap T_Q(R_{\theta_3}(C)) \neq \emptyset$$

y

$$T_P(R_{\theta_3}(\text{int}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_3}(\text{int}(C))) = \emptyset.$$

Por continuidad y (1.12) tenemos que

$$T_R(R_{\theta_3}(\mathrm{Bd}(C))) \cap (T_P(R_{\theta_3}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_3}(\mathrm{Bd}(C)))) \neq \emptyset$$

lo que implica que $\triangle PQR$ es un polígono reticular de Λ en C por lo que en cualquier posibilidad caemos en una contradicción y este caso no es posible.

ii) Todos los $Q \in \Lambda \setminus P$ que satisfacen (1.9), $[P, Q] \cap \Lambda = \{P, Q\}$ **y $R \in \Lambda \setminus \{P, Q\}$ que satisfacen (1.10) son tales que P, Q y R son colineales.**

También veremos que este caso es imposible.

Primero notemos que $\phi(t_0) \in T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$ implica que

$$T_{-P}(\phi(t_0)), T_{-Q}(\phi(t_0)) \in R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)) \quad \text{y} \quad [T_{-P}(\phi(t_0)), T_{-Q}(\phi(t_0))] \subseteq R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))$$

lo que implica por la convexidad de C que

$$T_{-(\lambda P+(1-\lambda)Q)}(\phi(t_0)) \in R_{\theta_0}(C) \qquad \text{para todo } \lambda \in [0, 1]$$

pero

$$T_{-(\lambda P+(1-\lambda)Q)}(\phi(t_0)) \notin R_{\theta_0}(C) \qquad \text{para todo } \lambda \notin [0, 1].$$

Luego, como $R \in \overline{PQ}$ y $[P, Q] \cap \Lambda = \{P, Q\}$, entonces $R \notin [P, Q]$ lo que implica que $T_{-R}(\phi(t_0)) \notin R_{\theta_0}(C)$ y $\phi(t_0) \notin T_R(R_{\theta_0}(C))$. En particular

$$\phi(t_0) \notin T_R(R_{\theta_0}(\mathrm{int}(C)))$$

y esta contradicción nos lleva a que este caso tampoco es posible.

En cualquier caso, hemos visto que no es posible que exista $R \in \Lambda \setminus \{P, Q\}$ lo que permite conlcuir que $\phi(t_{i_0+1}) \in T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$ y por lo antes mencionado hemos concluido la prueba del lema.

□

Lema 1.2.4. *Si $w(C) \leq r_\Lambda$, entonces para todo $\theta \in S^1$ $R_\theta(\mathrm{int}(C))$ no es un dominio fundamental.*

Demostración. Definimos

$$\Delta_C : S^1 \to \{0, 1\}, \quad \Delta_C(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } R_\theta(\mathrm{int}(C)) \text{ es dominio fundamental} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

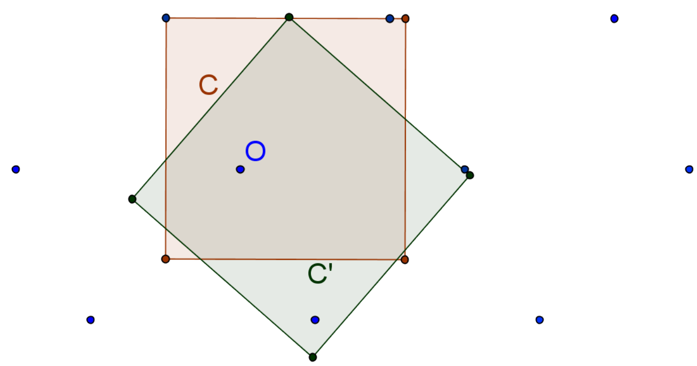


Fig. 15 Si $C' = R_\theta(C)$ y $C = R_{(1,0)}(C)$, entonces $\Delta_C((1,0)) = 1$ y $\Delta_C(\theta) = 0$.

Por la definición, basta probar que Δ_C es la función constante cero o lo que es lo mismo que $\Delta_C^{-1}(0) = S^1$.

Supongamos que $\Delta_C^{-1}(1) \neq S^1$. Entonces, existe $\theta_0 \in \Delta^{-1}(0)$ y por ende existen $P \in \Lambda$ y $v_0 \in C^*_{\theta_0}$ tales que $v_0 \in T_P(R_{\theta_0}(C))$. Sean A la componente arcoconexo de (θ_0, v_0) en C^*_Λ y

$$A' = A \cap \{(\theta, v) : \ v \in T_P(R_\theta(C))\}.$$

En el Lema 1.2.1, probamos, en particular, que $p_{S^1}(A') = S^1$ lo que implica que $\Delta_C^{-1}(0) = S^1$.

Supongamos que $\Delta_C^{-1}(1) = S^1$. Sea $\{P, Q\} \subseteq \Lambda$ un conjunto generador de la retícula con $|P| = r_\Lambda$. Para toda $\theta \in \Delta_C^{-1}(1) = S^1$ existe $v \in R_\theta(\mathrm{Bd}(C))$ tal que tiene una línea soporte l de C en v paralela a Q. Como $R_\theta(\mathrm{int}(C))$ es un dominio fundamental entonces existen $n \neq 0, m \in \mathbb{Z}$ tales que

$$T_{nP+mQ}(v) \in R_\theta(\mathrm{int}(C))$$

lo que implica que existe $v' \in R_\theta(\mathrm{int}(C))$ tal que $T_{nP+mQ}(v') \in R_\theta(\mathrm{int}(C))$ y el segmento que une a v' con $T_{nP+mQ}(v')$ está contenido en $R_\theta(\mathrm{int}(C))$. En particular, el ancho de $R_\theta(\mathrm{int}(C))$ en la dirección $nP + mQ$ es mayor a r_Λ.

Lo anterior implica que

$$w_\theta(C) = w_\theta(\text{int}(C)) > r_\Lambda \qquad \text{para toda } \theta \in S^1$$

y como S^1 es compacto, entonces $w(C) > r_\Lambda$ lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, $\Delta_C^{-1}(0) = S^1$. $\square$

Lema 1.2.5. *C es débilmente movible si y sólo si $w(C) \leq r_\Lambda$ y para todo $\theta \in S^1$ $R_\theta(\text{int}(C))$ no es un dominio fundamental.*

Demostración. Por el Teorema 1.1.1, basta probar que C^*_Λ es arcoconexo si y sólo si $w(C) \leq r_\Lambda$ y para todo $\theta \in S^1$ $R_\theta(\text{int}(C))$ no es un dominio fundamental.

Supongamos que existe un $\theta_0 \in S^1$ tal que $R_{\theta_0}(\text{int}(C))$ es un dominio fundamental. Entonces, también $R_{-\theta_0}(\text{int}(C))$ es un dominio fundamental. De esta forma, tenemos que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{P\in\Lambda} T_P(R_{\theta_0}(\text{int}(C))) = \bigcup_{P\in\Lambda} T_P(R_{-\theta_0}(\text{int}(C))),$$

y $C^*_{\theta_0} = C^*_{-\theta_0} = \emptyset$.

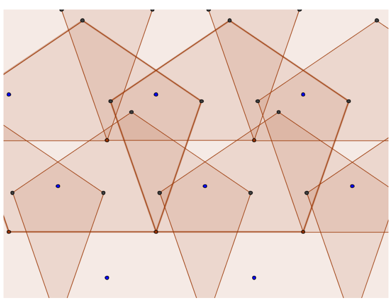


Fig. 16a$C^*_{\theta_0} = \emptyset$

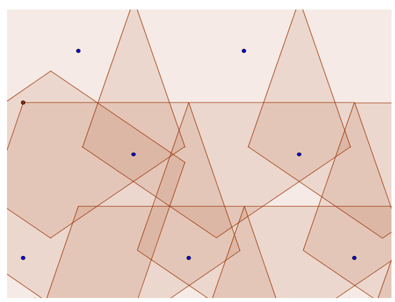


Fig. 16b $C^*_{-\theta_0} = \emptyset$

Sean A_1 y A_2 los arcos abiertos de S^1 definidos por θ_0 y $-\theta_0$. Entonces

$$C^*_\Lambda = \{(\theta, v) : \theta \in A_1\ v \in C^*_\theta\} \cup \{(\theta, v) : \theta \in A_2\ v \in C^*_\theta\}. \tag{1.15}$$

Por (1.14), C^*_Λ es la unión de dos abiertos suyos disjuntos. Luego, C^*_Λ es disconexo y en particular no es arcoconexo.

Supongamos que $w(C) > r_\Lambda$. Sea $\{P, Q\} \subseteq \Lambda$ un conjunto generador de Λ tal que $|P| = r_\Lambda$. Entonces, para toda $\theta \in S^1$ existe $x_\theta \in R_\theta(\text{int}(C))$ tal que $T_P(x_\theta) \in R_\theta(\text{int}(C))$ lo que implica que

$$x_\theta \in R_\theta(\text{int}(C)) \cap T_{-P}(R_\theta(\text{int}(C))).$$

De lo anterior y de la convexidad de C se sigue que

$$\{T_{\lambda P}(x_\theta) : \ \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T_{nP}(R_\theta(\mathrm{int}(C)))$$

y para toda $m \in \mathbb{Z}$

$$\{T_{\lambda P+mQ}(x_\theta) : \ \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T_{nP+mQ}(R_\theta(\mathrm{int}(C))).$$

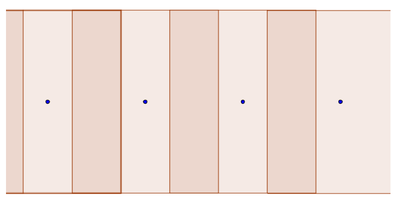


Fig. 17a C con $w(C) > r_\Lambda$

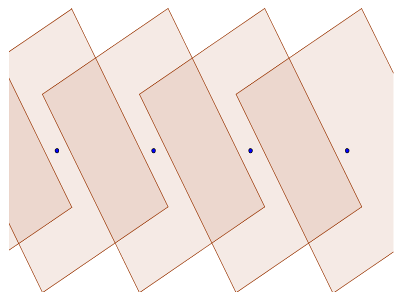


Fig. 17b $R_{e^{-\frac{i\pi}{6}}}(C)$ con $w(C) > r_\Lambda$

De esta manera podemos asegurar que existe $\nu \in (0, 1]$ tal que

$$\{T_{\lambda P+\nu Q}(x_\theta) : \ \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T_{nP+\nu Q}(R_\theta(\mathrm{int}(C))).$$

Definimos

$$\mu : S^1 \to (0, 1],$$

$$\mu(\theta) = \sup\{\nu : \ \{T_{\lambda P+\nu Q}(x_\theta) : \ \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T_{nP+\nu Q}(R_\theta(\mathrm{int}(C)))\}.$$

De la definición, se sigue que μ es continua. Definimos

$$C_1 = \{(\theta, \lambda P + \nu Q) \in C^*_\Lambda : \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \nu \geq \mu(\theta)\}$$

y

$$C_2 = \{(\theta, \lambda P + \nu Q) \in C^*_\Lambda : \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \nu < \mu(\theta)\}.$$

La continuidad de μ asegura que C_1 y C_2 son cerrados de C^*_Λ. Además, la unión de C_1 y C_2 es C^*_Λ y son ajenos lo que implica que C^*_Λ es disconexo y por lo tanto no es arcoconexo, esto prueba una implicación.

Supongamos que $w(C) \leq r_\Lambda$ y para toda $\theta \in S^1$ $R_\theta(\text{int}(C))$ no es dominio fundamental.

Sean A y B componentes arcoconexas de C^*_Λ y $\theta_0 \in S^1$. Por el Lema 1.2.1

$$\{v \in C^*_{\theta_0} : \ (\theta_0, v) \in A\} \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad \{v \in C^*_{\theta_0} : \ (\theta_0, v) \in B\} \neq \emptyset.$$

Sean D una componente arcoconexa de $\{v \in C^*_{\theta_0} : \ (\theta_0, v) \in A\}$ en $C^*_{\theta_0}$ y E otra componente arcoconexa de $\{v \in C^*_{\theta_0} : \ (\theta_0, v) \in B\}$ en $C^*_{\theta_0}$.

Es fácil convencerse que existen $P_1, P_2 \in \Lambda$ que generan a Λ tales que D intersecta a $T_{P_1}(R_{\theta_0}(C))$ y $T_{P_2}(R_{\theta_0}(C))$. Para cualquier componente arcoconexa E' en $C^*_{\theta_0}$ que intersecte a $T_{P_1}(R_{\theta_0}(C))$ existe un arco

$$\phi : [0,1] \to C^*_\Lambda$$

tal que

$$\phi(0) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in D\} \qquad \text{y} \qquad \phi(1) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in E'\}$$

por el Lema 1.2.3. Lo mismo ocurre para cualquier componente arcoconexa E' en $C^*_{\theta_0}$ que intersecte a $T_{P_2}(R_{\theta_0}(C))$.

Luego, la componente arcoconexa $T_{P_2-P_1}(D)$ a intersecta a $T_{P_2}(R_{\theta_0}(C))$ y $T_{2P_2-P_1}(R_{\theta_0}(C))$ lo que implica que para cualquier componente arcoconexa E' en $C^*_{\theta_0}$ que intersecte a $T_{2P_2-P_1}(R_{\theta_0}(C))$ existe un arco

$$\phi : [0,1] \to C^*_\Lambda$$

tal que

$$\phi(0) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in D\} \qquad \text{y} \qquad \phi(1) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in E'\}.$$

De esta manera, como P_1 y P_2 son generadores de Λ, se justifica que para culaquier E' componente arcoconexa en $C^*_{\theta_0}$ que intersecte a $T_{mP_2+nP_1}(R_{\theta_0}(C))$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, existe un arco

$$\phi : [0,1] \to C^*_\Lambda$$

tal que

$$\phi(0) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in D\} \qquad \text{y} \qquad \phi(1) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in E'\}.$$

En particular, existen $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ tales que E intersecta a $T_{m_0P_2+n_0P_1}(R_{\theta_0}(C))$ existe un arco

$$\phi : [0,1] \to C^*_\Lambda$$

tal que

$$\phi(0) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in D\} \qquad \text{y} \qquad \phi(1) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in E\}.$$

Por lo tanto, $\phi(0) \in A$ y $\phi(1) \in B$ y $A = B$, lo que prueba que C^* es arcoconexo. □

Finalmente, hemos llegado al resultado mas importante de la sección.

Teorema 1.2.6. *C es débilmente movible si y solo si $w(C) \leq r_\Lambda$.*

Demostración. En el Lema 1.2.5, probamos que si C es débilmente movible, entonces $w(C) \leq r_\Lambda$.

Supongamos que $w(C) \leq r_\Lambda$. Entonces, el Lema 1.2.4 implica que para toda θ el conjunto $R_\theta(\text{int}(C))$ no es un dominio fundamental y podemos concluir que C es débilmente movible por el Lema 1.2.5. □

Corolario 1.2.7. *Si C es una figura convexa tal que su área es menor a $\frac{vol(\Lambda)}{2}$ y $w(C) \leq r_\Lambda$, entonces C es débilmente movible.*

Demostración. Un resultado muy sencillo de Geometría Analítica dice que si $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2), R = (x_3, y_3) \in \Lambda$ y A es el área de la envolvente convexa de dichos puntos, entonces

$$A = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

y en particular $A \in \frac{\text{vol}(\Lambda)}{2}\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Lo anterior implica que no existen polígonos reticulares de Λ en C. Además, se satisface la hipótesis del Teorema 1.2.6 y el resultado se sigue. □

Capítulo 2

Figuras Convexas Centralmente Simétricas Débilmente Movibles.

En este capítulo, supondremos que Λ es una retícula y que C es una figura convexa que tiene al origen en el interior.

Si existen polígonos reticulares de Λ en C, entonces determinar si C es o no débilmente movible parece imposible. En este caso, puede ser que haya figuras C con $w(C) \leq r_\Lambda$ y tales que para todo $\theta \in S^1$ $R_\theta(\text{int}(C))$ no es un dominio fundamental que sean débilmente movibles, como en la Figura 19, o que no sean débilmente movibles, como en la Figura 18.

Sin embargo, si le añadimos la hipótesis a C de ser centralmente simétrico, podemos caracterizar a las figuras convexas centralmente simétricas débilmente movibles y esto será lo que haremos en la siguientes secciones.

La caracterización es parecida a la que dimos en el primer capítulo, también la demostración seguirá las mismas ideas generales. Sin embargo, la pérdida de la hipótesis de la no existencia de los polígonos reticulares y la ganancia de saber que la figura es centralmente simétrica hace que las ideas de los lemas auxiliares sean diferentes y enriquecedoras.

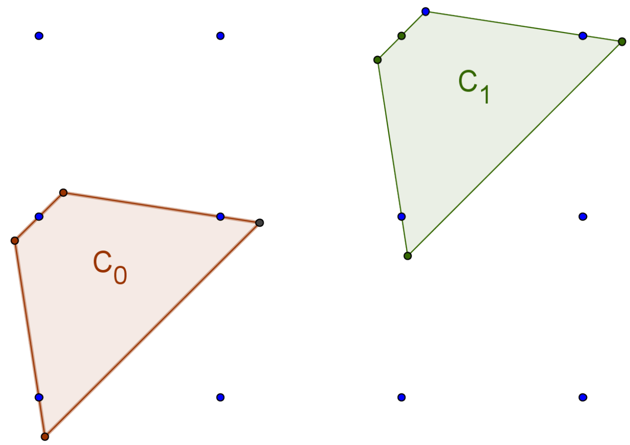


Fig. 18 Toda transformación rígida que lleva C_0 a C_1 satisface que existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\phi(t_0, \mathrm{int}(C)) \cap \Lambda \neq \emptyset$

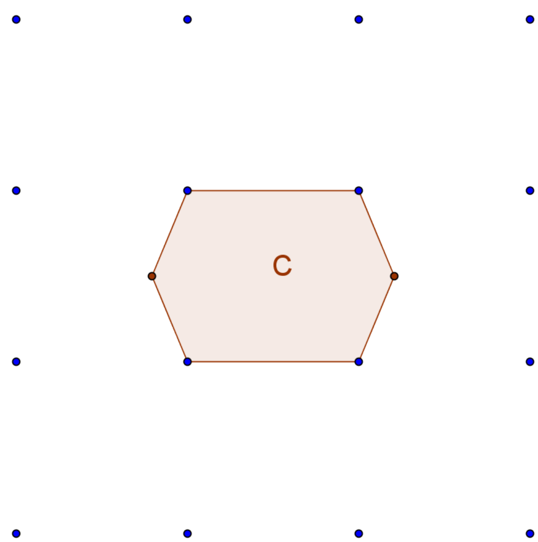


Fig. 19 La figura C es débilmente movible a pesar de que C tiene mas de un polígono reticular de Λ en C.

En la primera sección de este capítulo, recordearemos y definiremos algunos conceptos que utilizaremos en este capítulo. En la segunda parte, realizaremos la caracterización de las figuras convexas centralmente simétricas débilmente movibles utilizando lemas auxiliares análogos a los del Capítulo 1. Finalmente, en la tercera sección estudiamos mas profundamente las obstrucciones reticulares y su significado geométrico.

2.1. Definiciones

Como en el capítulo anterior, necesitamos definir algunos conceptos.

Definición 9. Sea C una figura convexa y $S \subseteq \mathrm{Bd}(C)$ conjunto finito. Decimos que S es un sistema de fijación si para toda copia C' de C pero distinta a ella y toda transformado rígida

$$\phi : [0,1] \times K \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{con } \phi(0,C) = C, \phi(1,C) = C'$$

tenemos que $S \cap \phi(t, \mathrm{int}(C)) \neq \emptyset$ para algún $t \in [0,1]$.

Para saber mas de los sistemas de fijación se puede consultar [BMU] y [CSU].

Definición 10. Sea C una figura convexa y $S \subseteq \mathrm{Bd}(C)$ un conjunto finito de puntos. Decimos que S es una obstrucción de C si no existen $\epsilon > 0$ y una transformación rígida

$$\phi : [0,1] \times C \to \mathbb{R}^2$$

tal que existen $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^2$ y $t_0 \in [0,1]$

$$\phi(0,C) = T_{v_0}(R_{e^{-i\epsilon}}(C)), \quad \phi(1,C) = T_{v_1}(R_{e^{i\epsilon}}(C)) \quad \text{y} \quad \phi(t_0,C) = C,$$

$$\phi(t,C) = T_{v_t}(R_{e^{i\lambda_t}}(C))$$

con $\lambda_t \in [-\epsilon, 0]$ si $t \in [0, t_0]$ y $\lambda_t \in [0, \epsilon]$ si $t \in [t_0, 1]$ y

$$\phi(t, \mathrm{int}(C)) \cap S = \emptyset \qquad \text{para todo } t \in [0,1].$$

Definición 11. Si Λ es una retícula, C una figura convexa y $S \subseteq \Lambda$ un conjunto finito de puntos, entonces diremos que S es una obstrucción reticular de C si existe una copia C' de C tal que $\mathrm{int}(C) \cap \Lambda = \emptyset$, $S \subseteq \mathrm{Bd}(C')$ y S es una obstrucción de C'.

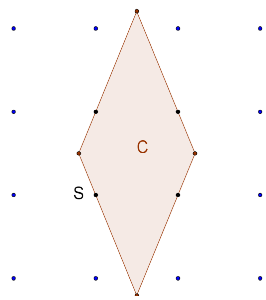


Fig. 20a S es un sistema de fijación y en particular una obstrucción

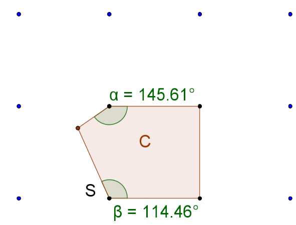


Fig. 20b S no es un sistema de fijación (se puede girar en una dirección) pero si es una obstrucción.

Observación 7. Es importante notar que una obstrucción reticular de Λ en C tiene al menos dos puntos, i.e. $|S| \geq 2$. En efecto, si $S = \{s\}$ es fácil convencerse que existe un vector $v \in \mathbb{R}^2$ (por ejemplo la normal exterior a C en s) y $\epsilon > 0$ tal que

$$T_{\lambda v}(R_\theta(C)) \cap S = \emptyset \qquad \text{para toda } \lambda \in (0, \epsilon].$$

Definición 12. Sea C una figura convexa centralmente simétrica con centro en el origen. Abusando de la notación, diremos que $(\theta, v) \in C^*_\Lambda$ es una obstrucción reticular de Λ en C si existe $S \subseteq \Lambda$ tal que S es una obstrucción de $T_v(R_\theta(C))$

El contexto aclarará cuando estemos hablando de obstrucciones reticulares como subconjuntos de Λ o como puntos de C^*_Λ.

Observación 8. Una observación importante es que si (θ_0, v) es una obstrucción reticular, entonces para todo v' en la componente arcoconexa de v en C^*_Λ el punto (θ_0, v') es una obstrucción reticular.

Definición 13. Recordemos que un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^2$ es centralmente simétrico si existe un punto O, conocido como centro de simetría, tal que si $X \in K$, entonces $2O - X \in K$.

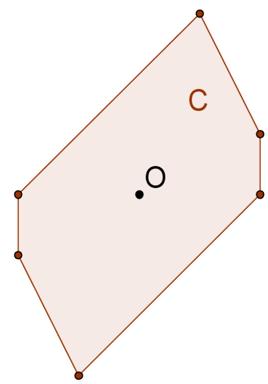


Fig. 21 C es centralmente simétrico con centro en O.

Habiendo recordado lo que es un conjunto centralmente simétrico, supondremos por lo que queda de capítulo que C es una figura convexa centralmente simétrica con el origen como centro de simetría.

2.2. Caracterización

Antes que nada, demostramos el siguiente lema.

Lema 2.2.1. *Sean $P, Q, R \in \Lambda$ no colineales y $O \in \mathbb{R}^2$ un punto cualquiera. Si $K = \operatorname{conv}(\{P, Q, R, 2O-P, 2O-Q, 2O-R\})$, entonces K es un dominio fundamental.*

Demostración. Obsevemos que K es centrálmente simétrico con centro en O. Sean $P' = 2O-P, Q' = 2O-Q$ y $R' = 2O-R$. Tratemos dos casos distintos.

Supogamos primero que $\operatorname{ver}(K) \subsetneq \{P, Q, R, P', Q', R'\}$, ver Figura 22. Notemos que si $U \in \{P, Q, R\}$, $U \in \operatorname{ver}(K)$ si y solo si $2O-U \in \operatorname{ver}(K)$. Además, como P, Q, R no son colineales, podemos concluir que $|\operatorname{ver}(K)| = 4$.

Supongamos que $\operatorname{ver}(K) = \{P, Q, 2O-P, 2O-Q\}$ sin pérdida de generalidad. Sean S la intersección de la recta paralela a $P-Q$ por R con $\overline{PQ'}$ y T la intersección de la recta paralela a $P-Q$ por R con $\overline{QP'}$. Entonces

$$\operatorname{conv}(\{P, R, S\}) = T_{P-Q}(\operatorname{conv}(\{Q, R+Q-P, S+Q-P\})).$$

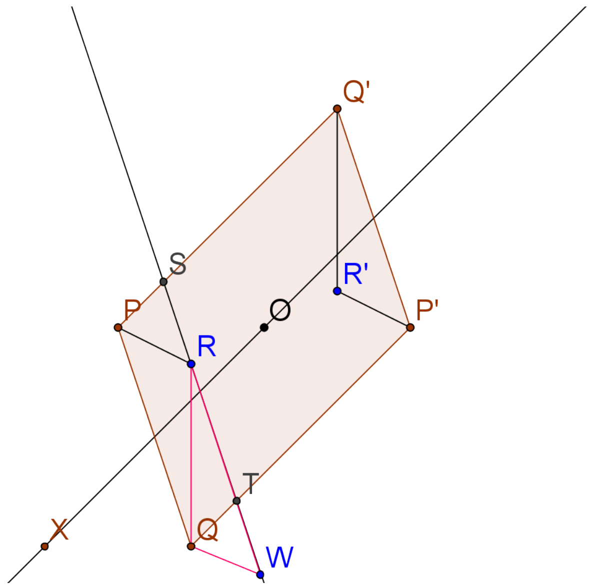


Fig. 22 Sean $X = P + Q - 2O$ y $W = R + Q - P$.

Además, por construcción $S + Q - P = T$ por lo que

$$\mathrm{conv}(\{P, R, S\}) = T_{P-Q}(\mathrm{conv}(\{Q, R + Q - P, T\})). \tag{2.1}$$

Tenemos la descomposición

$$\mathrm{conv}(\{P, Q, T, S\}) = \mathrm{conv}(\{P, Q, R\}) \cup \mathrm{conv}(\{Q, R, T\}) \cup \mathrm{conv}(\{P, R, S\})$$

donde la intersecciones de los conjuntos del lado derecho son segmentos o puntos.

La igualdad anterior junto con (2.1) implican las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\pi(\mathrm{conv}(\{P, Q, T, S\})) &= \pi(\mathrm{conv}(\{P, Q, R\}) \cup \mathrm{conv}(\{Q, R, T\}) \\
&\quad \cup \mathrm{conv}(\{P, R, S\})) \\
&= \pi(\mathrm{conv}(\{P, Q, T, R\}) \cup \mathrm{conv}(\{P, R, S\})) \\
&= \pi(\mathrm{conv}(\{P, Q, T, R\})) \cup \pi(\mathrm{conv}(\{P, R, S\})) \\
&= \pi(\mathrm{conv}(\{P, Q, T, R\})) \\
&\quad \cup \pi(T_{P-Q}(\mathrm{conv}(\{Q, R + Q - P, T\}))) \\
&= \pi(\mathrm{conv}(\{P, Q, T, R\})) \cup \pi(\mathrm{conv}(\{Q, R + Q - P, T\})) \\
&= \pi(\mathrm{conv}(\{P, Q, T, R\}) \cup \mathrm{conv}(\{Q, R + Q - P, T\})) \\
&= \pi(\mathrm{conv}(\{P, Q, R, R + Q - P\})) \\
&= \mathbb{R}^2/\Lambda.
\end{aligned}$$

Finalmente, $\pi(\text{conv}\{P,Q,T,S\}) \subseteq \pi(K)$ implicando que $\pi(K) = \mathbb{R}^2/\Lambda$ y K es un dominio fundamental.

Supogamos ahora que $\text{ver}(K) = \{P,Q,R,P',Q',R'\}$. Tratemos dos subcasos diferentes.

Primero, supongamos que $O \notin \text{conv}\{P,Q,R\}$, ver Figura 23. Como $P,Q,R \in \text{ver}(K)$ por el Teorema de Radon existen $U,V \in \{P,Q,R\}$ distintos tales que si $W \in \{P,Q,R\} \setminus \{U,V\}$ entonces O y W están en distintos semiplanos abiertos definidos por la recta que pasa por U y V y

$$[U,V] \cap [W,O] \neq \emptyset. \tag{2.2}$$

Sin pérdida de generalidad, sean $U = P$, $V = R$ y $W = Q$. Por un lado, el vector $2O - R - P + Q$ satisface que

$$|(2O - R - P + Q) - Q| = |R' - P| = |P' - R|. \tag{2.3}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\text{ver}(\text{conv}(\{P,Q,R,P',R'\})) = \{P,Q,R,P',R'\}.$$

Los puntos $2O-R-P+Q$ y Q se encuentran en diferentes semiplanos con respecto a $\overline{PR}$ y por (2.3) tenemos que $2O-R-P+Q$ está en la banda cerrada definida por $\overline{PR}$ y $\overline{P'R'}$. Por otro lado, (2.2) implica que Q se encuentra en la banda cerrada definida por $\overline{PR'}$ y $\overline{P'R}$ pero $\overline{2O-R-P+QQ}$, $\overline{PR'}$ y $\overline{P'R}$ son paralelas y concluimos que $2O - R - P + Q$ está en la banda cerrada definida por $\overline{PR'}$ y $\overline{P'R}$.

Resumiendo lo que hemos visto en los últimos dos párrafos

$$2O - R - P + Q \in \text{conv}(\{P,R,P',R'\}) \subseteq K$$

lo que a su vez implica que $R + P - Q \in \text{conv}(\{P,R,P',R,\}) \subseteq K$.

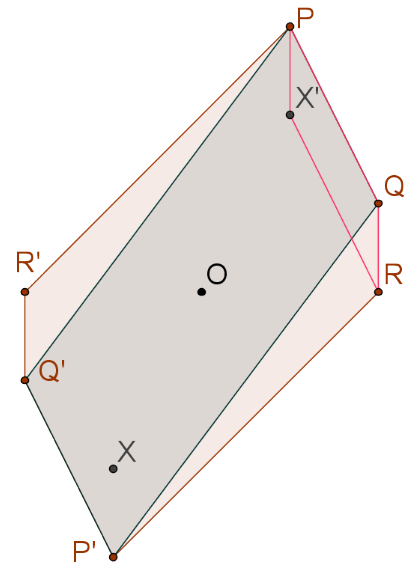


Fig. 23 Sean $X = 2O - R - P + Q$ y $X' = R + P - Q$.

Por lo tanto

$$\text{conv}(\{P, Q, R, R + P - Q\}) \subseteq \text{conv}(\{P, Q, R, P', R'\}) \subseteq K.$$

Concluimos que

$$\mathbb{R}^2/\Lambda = \pi(\text{conv}(\{P, Q, R, R + P - Q\})) \subseteq \pi(K) \subseteq \mathbb{R}^2/\Lambda$$

y por lo tanto K es un dominio fundamental.

Para el segundo subcaso, supongamos que $O \in \text{conv}(\{P, Q, R\})$, ver Figura 24. Entonces por hipótesis, P y P' están en distintos semiplanos abiertos con respecto a $\overline{QR}$, Q y Q' están en distintos semiplanos abiertos con respecto a $\overline{PR}$, y R y R' están en distintos semiplanos abiertos con respecto a $\overline{PQ}$.

Sean $l' = \overline{QR}$ y $l = \overline{PQ}$. Luego, tenemos que las siguientes contenciones

$$\text{conv}(\{P, Q, R, Q'\}) \cap \text{conv}(\{Q, R, P'\}) \subseteq l'$$

y

$$\text{conv}(\{P, Q, R, Q'\}) \cap \text{conv}(\{Q, P, R'\}) \subseteq l.$$

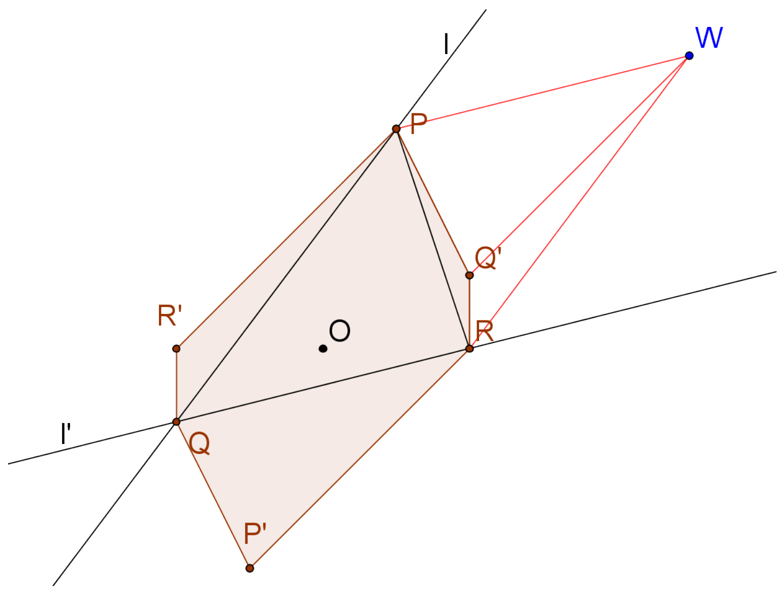


Fig. 24 Sea $W = R + P - Q$.

Estas contenciones implican las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\pi(K) &= \pi(\mathrm{conv}(\{P,Q,R,Q'\}) \cup \mathrm{conv}(\{Q,R,P'\}) \cup \mathrm{conv}(\{Q,P,R'\})) \\
&= \pi(\mathrm{conv}(\{P,Q,R,Q'\}) \cup [T_{Q-P}(\mathrm{conv}(\{P,P+R-Q,Q'\}))] \\
&\quad \cup [T_{Q-R}(\mathrm{conv}(\{R,P+R-Q,Q'\}))]) \\
&= \pi(\mathrm{conv}(\{P,Q,R,Q'\})) + \pi(T_{Q-P}(\mathrm{conv}(\{P,P+R-Q,Q'\}))) \\
&\quad + \pi(T_{Q-R}(\mathrm{conv}(\{R,P+R-Q,Q'\}))) \\
&= \pi(\mathrm{conv}(\{P,Q,R,Q'\})) + \pi(\mathrm{conv}(\{P,P+R-Q,Q'\})) \\
&\quad + \pi(\mathrm{conv}(\{R,P+R-Q,Q'\})) \\
&= \pi(\mathrm{conv}(\{P,Q,R,Q'\}) \cup \mathrm{conv}(\{P,P+R-Q,Q'\}) \\
&\quad \cup \mathrm{conv}(\{R,P+R-Q,Q'\})) \\
&= \pi(\mathrm{conv}(\{P,Q,R,R+P-Q\})) \\
&= \mathbb{R}^2/\Lambda.
\end{aligned}$$

y K es un dominio fundamental en cualquier caso. $\square$

Lema 2.2.2. *Supongamos que para todo $\theta \in S^1$ el conjunto $R_\theta(\mathrm{int}(C))$ no es un dominio fundamental y todo polígono reticular de Λ en C no es una obstrucción reticular. Entonces, toda componente arcoconexa A de C^*_Λ satisface que $p_{S^1}(A) = S^1$.*

Demostración. La idea general de la demostración es exactamente la misma que la del Lema 1.2.1.

Sea $P \in \Lambda$ tal que existe $(\theta_0, v_0) \in A$ el cual satisface que $v_0 \in T_P(R_{\theta_0}(C))$. Definimos

$$A' = \{(\theta, v) : \ v \in T_P(R_\theta(C))\} \cap A$$

Sea $\theta_1 \in p_{S^1}(A')$. Parametrizamos $T_P(R_{\theta_1}(C))$ con una función continua

$$\phi : [0,1] \to T_P(R_{\theta_1}(C))$$

tal que $\phi|_{[0,1)}$ es biyectiva, $\phi(0) = \phi(1)$ y $\phi\Big(\frac{1}{2}\Big) = v_1$.

Al igual que en Lema 1.2.1, tenemos dos casos posibles. El primero es que exista $\delta \in \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) \setminus \{0\}$ tal que si $\lambda \in (0,1)$, entonces $\phi\Big(\frac{1}{2} + \lambda\delta\Big) \notin \cup_{Q \in \Lambda \setminus \{P\}} T_P(R_{\theta_0}(C))$, se prueba igual que el caso **i)** en el Lema 1.2.1 que $\theta_1 \in \operatorname{int}(p_{S^1}(A'))$, esto por que no utilizamos que no existían polígonos reticulares de Λ en C.

La diferencia viene en el segundo caso. Supongamos que no existe δ como en el primer caso.

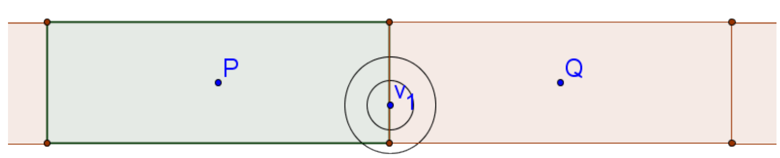


Fig. 25

Entonces, como en el caso **ii)** del Lema 1.2.1 se prueba que existen $Q, R \in \Lambda \setminus \{P\}$ tales que

$$\phi\Big(\frac{1}{2}\Big) = v_1 \in T_Q(R_{\theta_1}(C)) \cap T_R(R_{\theta_1}(C)).$$

Si $Q \neq R$ y P, Q, R no son colineales, entonces $\triangle PQR$ es un polígono reticular de Λ en C. Por hipótesis, $\triangle PQR$ no es una obstrucción reticular y, por la definición, existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\lambda \in (-1, 1)$ tenemos que $\theta_1 \cdot e^{i\lambda\epsilon} \in p_{S^1}(A')$, y de nuevo $\theta_1 \in \operatorname{int}(p_{S^1}(A'))$. Si P, Q y R son colineales, entonces se prueba como en el Lema 1.2.1 que $\theta_1 \in \operatorname{int}(p_{S^1}(A'))$

Si $Q = R$, definimos

$$\Gamma = \{t \in [0, 1] : \ \phi(t) \in T_Q(R_{\theta_1}(C)), \ (\theta_1, \phi(t))\}.$$

Como en el Lema 1.2.1, Γ es cerrado, $\emptyset \subsetneqq \Gamma \subsetneqq [0, 1]$ y podemos suponer que $0 \notin \Gamma$. Sea $t_0 = \text{mín}\{t \in \Gamma\}$. De nuevo como en el Lema 1.2.1, si existe $S \in \Lambda \setminus \{P, Q\}$ tal que $\phi(t_0) \in T_S(R_{\theta_1}(C))$, entonces $\phi(t_0) \in T_S(R_{\theta_1}(\operatorname{Bd}(C)))$; Como en el penúltimo párrafo, tenemos que en cualquier caso $\theta_1 \in \operatorname{int}(p_{S^1}(A'))$.

Si no existe $S \in \Lambda \setminus \{P, Q\}$ tal que $\phi(t_0) \in T_S(R_{\theta_1}(C))$, entonces, como en el caso **ii)** del Lema 1.2.1, se demuestra que $\theta_1 \in \operatorname{int}(p_{S^1}(A'))$.

En cualquier caso, $\theta_1 \in \operatorname{int}(p_{S^1}(A'))$, luego $p_{S^1}(A') \subseteq \operatorname{int}(p_{S^1}(A'))$ y $p_{S^1}(A')$ es abierto.

Finalmente, la argumentación de que $p_{S^1}(A')$ es compacta, en particular cerrada, es exactamente la misma que la del Lema 1.2.1. Concluimos que $p_{S^1}(A')$ es abierto, cerrado y no vacío y por lo tanto es S^1, se sigue que $p_{S^1}(A) = S^1$. $\square$

Lema 2.2.3. *Supongamos que $w(C) \leq r_\Lambda$, para toda $\theta \in S^1$ el conjunto $R_\theta(\operatorname{int}(C))$ no es un dominio fundamental y todo polígono reticular de Λ en C no es una obstrucción reticular.*

Sean $\theta_0 \in S^1$ y D, E componentes arcoconexas de $C^*_{\theta_0}$ tales que existen $P, Q \in \Lambda$ distintos que satisfacen que $[P, Q] \cap \Lambda = \{P, Q\}$,

$$D \cap T_P(R_{\theta_0}(\operatorname{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\operatorname{Bd}(C))) \neq \emptyset$$

y

$$E \cap T_P(R_{\theta_0}(\operatorname{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\operatorname{Bd}(C))) \neq \emptyset.$$

Entonces, existe un arco $\phi : [0, 1] \to C^*_\Lambda$ con $\phi(0) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in D\}$ y $\phi(1) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in E\}$.

Demostración. Si $D = E$ no hay nada que probar. Sea

$$f : S^1 \to \mathbb{R}, \quad f(\theta) = \text{máx}\Big\{\lambda : \ x, x + \frac{\lambda}{|P - Q|}(P - Q) \in R_\theta(C)\Big\}.$$

Como en el Lema 1.2.2, podemos definir un arco $I \subseteq S^1$ tal que $f(\theta) \geq |P - Q|$ para todo $\theta \in I$ y existe $\theta_2 \in I$ tal que $f(\theta_2) = |P - Q|$.

Sean A y B las componentes arcoconexas de C^*_Λ que contienen a $\{(\theta_0, v) : v \in D\}$ y $\{(\theta_0, v) : v \in E\}$ respectivamente.

Definimos

$$A' = \{(\theta, v) : A \cap T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) : \theta \in I\}$$

y

$$B' = \{(\theta, v) : B \cap T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) : \theta \in I\}.$$

Se demuestra que $p_{S^1}(A') = p_{S^1}(B') = I$ como en el Lema 1.2.2, únicamente sustituimos el papel que juega en la demostración el Lema 1.2.1 por el Lema 2.2.2. Probemos la misma aseveración que en la Afirmación 2 del Lema 1.2.2

Afirmación. *Existe $\theta \in I$ tal que*

$$C^*_\theta \cap T_P(R_\theta(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_\theta(\mathrm{Bd}(C)))$$

es arcoconexa.

Demostración (Afirmación)

Por hipótesis, existe $\theta_2 \in I$ tal que $f(\theta_2) = |P - Q|$. Como en el Lema 1.2.2

$$T_P(R_\theta(\mathrm{int}(C))) \cap T_Q(R_\theta(\mathrm{int}(C))) = \emptyset$$

y la intersección

$$C^*_{\theta_2} \cap T_P(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C)))$$

puede ser un punto, en este caso el resultado es trivial, o contiene a mas de un punto.

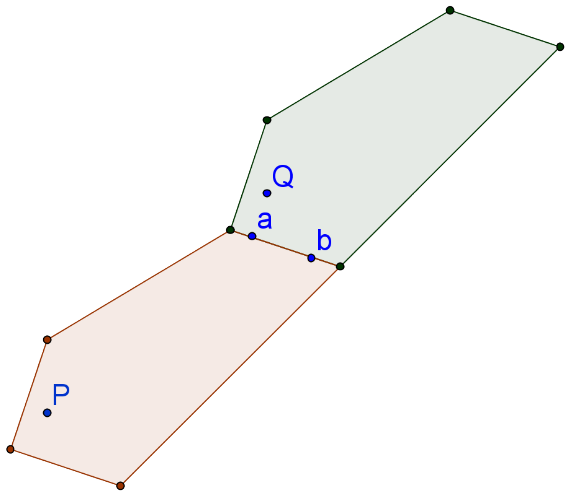


Fig. 26 En este caso la intersección consta de mas de un punto.

En este segundo caso, podemos argumentar como en el Lema 1.2.2 que

$$T_P(R_{\theta_2}(C)) \cap T_Q(R_{\theta_2}(C)) = T_P(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \qquad (2.4)$$

es convexo y es arcoconexo. Mas aún, como es un convexo de dimensión uno es un segmento.

Basta probar que

$$T_P(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \subseteq C^*_{\theta_2}$$

o, lo que es lo mismo, que

$$T_P(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \cap \bigcup_{R\in\Lambda} T_R(R_{\theta_2}(\mathrm{int}(C))) = \emptyset,$$

por que tendríamos entonces que

$$T_P(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \cap C^*_{\theta_2} = T_P(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C)))$$

es arcoconexo.

Supongamos que existe $R \in \Lambda$ tal que

$$T_P(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_R(R_{\theta_2}(\mathrm{int}(C))) \neq \emptyset.$$

Entonces, existe un v_2 en dicha intersección tal que

$$T_{-P}(v_2), T_{-Q}(v_2) \in R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C)) \qquad \text{y} \qquad T_{-R}(v_2) \in R_{\theta_2}(\mathrm{int}(C)).$$

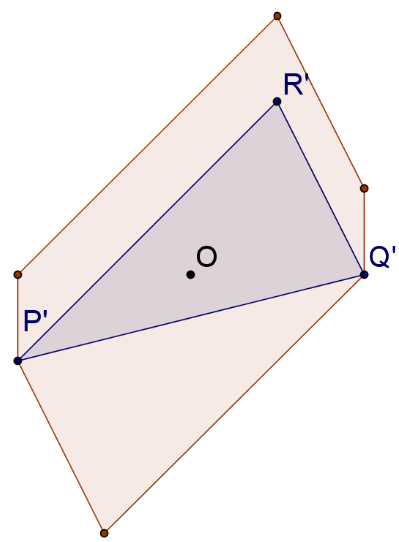


Fig. 27 Sean $T_{-P}(v_2) = P'$, $T_{-Q}(v_2) = Q'$ y $T_{-R}(v_2) = R'$.

Como (2.4) es un segmento, podemos elegir v_2' tal que

$$T_{-P}(v_2'), T_{-Q}(v_2') \in R_{\theta_2}(\mathrm{Bd}(C)) \qquad \text{y} \qquad T_{-R}(v_2') \in R_{\theta_2}(\mathrm{int}(C))$$

y

$$T_{-P}(v_2'), T_{-Q}(v_2'), T_{-R}(v_2') \notin \mathrm{ver}(R_{\theta_2}(C)).$$

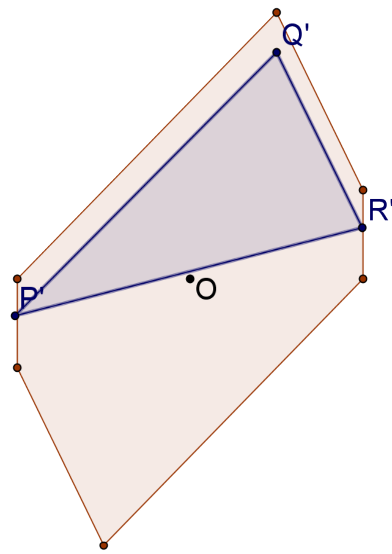


Fig. 28 Sean $T_{-P}(v_2') = P'$, $T_{-Q}(v_2') = Q'$ y $T_{-R}(v_2') = R'$.

Por lo anterior, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $v_2 = v_2'$, esto significa que $T_{-P}(v_2), T_{-Q}(v_2), T_{-R}(v_2) \notin \text{ver}(R_{\theta_2}(C))$

Sea O' el punto medio del segmento que pasa por $T_{-P}(v_2)$ y $T_{-Q}(v_2)$. Entonces, existe $\epsilon_1 > 0$ y $u \in \{\pm 1\}$ tal que la rotación de $T_{-P}(v_2)$ y $T_{-Q}(v_2)$ con centro en O' por $e^{i\lambda u}$ con $\lambda \in (0, \epsilon_1)$ satisface que sus imágenes están en $R_\theta(\text{int}(C))$.

Como $T_{-R}(v_2) \in R_{\theta_2}(\text{int}(C))$, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que para toda $\lambda \in (-1, 1)$ $T_{O'}(R_{e^{i\lambda\epsilon_2}}(T_{-(O'+R)}(v_2))) \in R_{\theta_2}(\text{int}(C))$.

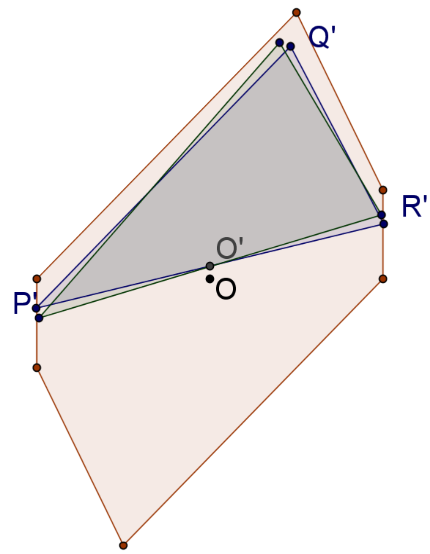


Fig. 29 Sean $T_{-P}(v_2') = P'$, $T_{-Q}(v_2') = Q'$ y $T_{-R}(v_2') = R'$. Luego, hacemos una rotación pequeña con centro en O'.

Por el análisis realizado en los últimos dos párrafos y suponiendo sin pérdida de genralidad que $u = 1$, tenemos que existe $0, \epsilon = \text{mín}\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ tal que para toda $\lambda \in (0, 1)$

$$T_{O'}(R_{e^{i\lambda\epsilon}}(T_{-(O'+P)}(v_2))), T_{O'}(R_{e^{i\lambda\epsilon}}(T_{-(O'+Q)}(v_2))), T_{O'}(R_{e^{i\lambda\epsilon}}(T_{-(O'+R)}(v_2))) \in R_{\theta_2}(\text{int}(C))$$

y como C es centralmente simétrico los negativos de estos puntos también están en $R_{\theta_2}(\text{int}(C))$.

Por el Lema 2.2.1 y por el párrafo anterior, concluimos que $R_{\theta_2}(\text{int}(C))$ es un dominio fundamental lo que contradice la hipótesis y termina la prueba de la Afirmación.

Regresando a la prueba del lema, se concluye exactamente como en el Lema 1.2.2 que $A = B$, lo que prueba este lema. $\square$

Lema 2.2.4. *Sean $P \in \Lambda$ y $\theta_0 \in S^1$. Supongamos que $w(C) \leq r_\Lambda$, para todo $\theta \in S^1$ el conjunto $R_\theta(\text{int}(C))$ no es un dominio fundamental y todo polígono reticular de Λ en C no es una obstrucción reticular. Si $D \neq E$ son componentes arcoconexas de $C^*_{\theta_0}$ que intersectan a $T_P(R_{\theta_0}(C))$, entonces existe un arco*

$$\psi : [0, 1] \to C^*_\Lambda$$

tal que

$$\psi(0) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in D\} \qquad y \qquad \psi(1) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in E\}$$

Demostración. Sea

$$\phi : [0,1] \to T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$$

una función continua que parametriza $T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$ con $\phi_{[0,1)}$ biyectiva y $\phi(0) = \phi(1)$.

Sean

$$I' = \{t \in [0,1] : \ \phi(t) \in T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap C^*_{\theta_0} \text{ para algún } Q \in \Lambda \setminus \{P\}\}$$

$$J = \{t \in [0,1] : \ \phi((t-\epsilon, t+\epsilon)) \nsubseteq C^*_{\theta_0} \text{ para } \epsilon > 0, Q \in \Lambda \setminus \{P\}\}$$

Definimos $I = I' \cap J$.

Como en el Lema 1.2.3, I es finito y se puede ordenar

$$I = \{t_1, t_2, \ldots, t_n : 0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq 1\}.$$

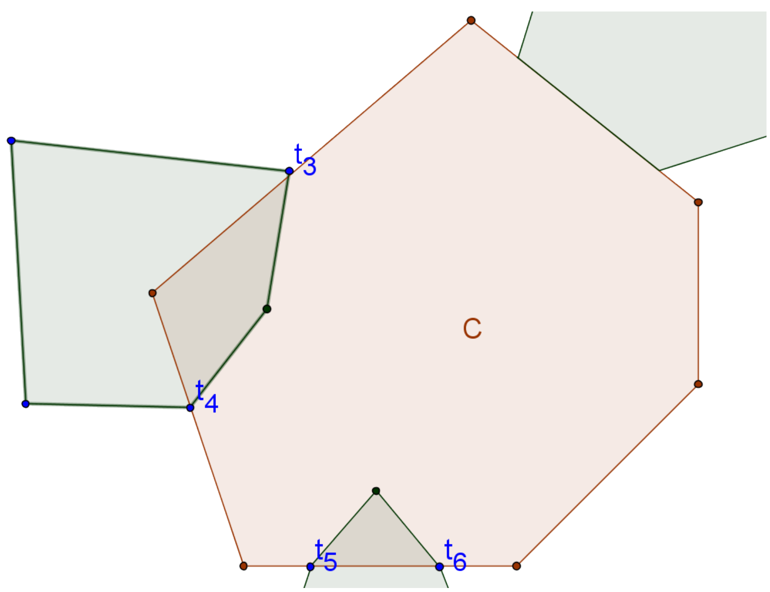


Figura 30

Al igual que en el Lema 1.2.3, lo que haremos será probar que si G_{i_0} es la componente arcoconexa de $\phi(t_{i_0})$ en $C^*_{\theta_0}$ y G_{i_0+1} es la componente arcoconexa de $\phi(t_{i_0+1})$ en $C^*_{\theta_0}$, entonces existe un arco

$$\psi : [0,1] \to C^*_\Lambda$$

tal que

$$\psi(0) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in G_{i_0}\} \qquad \text{y} \qquad \psi(1) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in G_{i_0+1}\}$$

Haciendo inducción, módulo n, habremos terminado la demostración del lema.

De la misma manera que en el Lema 1.2.3, si $G_{i_0} = G_{i_0+1}$, no hay nada que probar. Por lo tanto, existe $Q \in \Lambda \setminus \{P\}$ tal que

$$\phi(t_{i_0}) \in T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \quad \text{y} \qquad \phi((t_{i_0}, t_{i_0+1})) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{int}(C))) \neq \emptyset. \quad (2.5)$$

Otra cosa que se sustenta como en el Lema 1.2.3 es que si $Q \in \Lambda \setminus \{P\}$ satisface (2.5), entonces podemos suponer que $[P, Q] \cap \Lambda = \{P, Q\}$.

Deseamos probar que para $Q \in \Lambda \setminus \{P\}$ que satisface (2.5) se satisface que

$$\phi(t_{i_0+1}) \in T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))).$$

Supongamos que no es asi; Entonces, existe un único $t_0 \in (t_{i_0}, t_{i_0+1})$ tal que

$$\phi(t_0) \in T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \setminus \{\phi(t_{i_0})\}$$

lo que implica que, como en el Lema 1.2.3, existe $R \in \Lambda \setminus \{P, Q\}$ tal que

$$\phi(t_0) \in T_R(R_{\theta_0}(\mathrm{int}(C))); \quad (2.6)$$

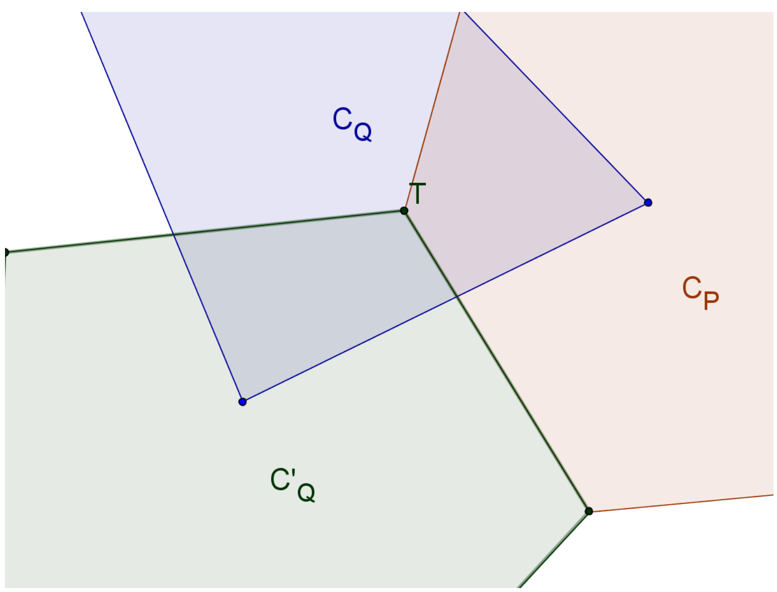


Fig. 31 En la figura $T = \phi(t_0), C_P = T_P(R_{\theta_0}(C))$, $C_Q = T_R(R_{\theta_0}(C))$ y $C'_Q = T_Q(R_{\theta_0}(C))$.

En particular

$$T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_R(R_{\theta_0}(\mathrm{int}(C))) \neq \emptyset \tag{2.7}$$

pero, como ya vimos en el Lema 2.2.3, con todas las hipótesis que tenemos no es posible que se cumpla (2.7).

Por lo tanto, no existe $R \in \Lambda \setminus \{P, Q\}$ que satisfaga (2.6) y concluimos que $\phi(t_{i_0+1}) \in T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$, lo que termina la demostración del lema. $\square$

Lema 2.2.5. *Si existe S una obstrucción reticular de C, entonces C no es débilmente movible.*

Demostración. Sea $(\theta_0, v_0) \in C^*_\Lambda$ tal que S es una obstrucción de $T_{v_0}(R_{\theta_0}(C))$; En particular, (θ_0, v_0) es una obstrucción reticular . Notemos que

$$-v_0 \in \bigcap_{P \in S} T_{-P}(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))),$$

Sea A la componente arcoconexa de (θ_0, v_0). Afirmamos que $p_{S^1}(A)$ está contenida en uno de los dos arcos C_1, C_2 cerrados definidos por θ_0 y $-\theta_0$.

Si $p^1_S(A) = \{\theta_0\}$ la afirmación es cierta por que S movible implica $A = C^*_\Lambda$ y $p_{S^1}(C^*_\Lambda) = S^1$; En adelante supondremos que $\{\theta_0\} \neq p_{S^1}(A)$.

Supongamos que

$$p_{S^1}(A) \cap C_1 \setminus \{\theta_0\} \neq \emptyset$$

y sea $(\theta_1, v_1) \in A$ tal que $\theta_1 \in C_1 \setminus \{\theta_0, -\theta_0\}$.

Por la simetría central de la retícula y de C

$$-v_0 \in \bigcap_{P \in S} T_{-P}(R_{-\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))),$$

luego $(-\theta_0, v_0)$ es una obstrucción reticular. Denotamos por A' la componente arcoconexa de $(-\theta_0, v_0)$ y también por la simetría central de C debe de ser claro que

$$A' = \{(\theta, v) : \ (-\theta, v) \in A\} \quad \text{y por lo tanto} \quad p_{S^1}(A') \cap C_2 \setminus \{\theta_0\} \neq \emptyset. \tag{2.8}$$

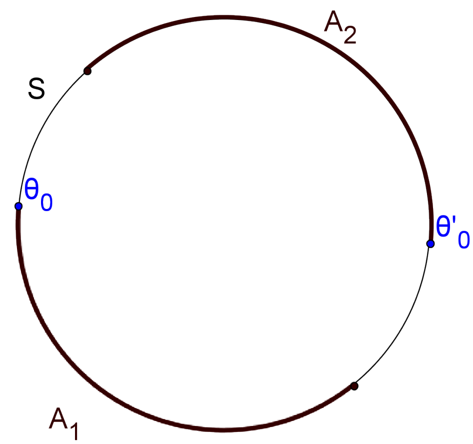


Fig. 32 En la figura $S = S^1, \theta_0' = -\theta_0, A_1 = p_{S^1}(A)$ y $A_2 = p_{S^1}(A')$

Si $p_{S^1}(A) \nsubseteq C_1$, entonces existe $(\theta_2, v_2) \in A$ tal que $\theta_2 \in C_2 \setminus \{\theta_0, -\theta_0\}$. Luego existe un arco

$$\phi : [0,1] \to C^*$$

tal que $\phi(0) = (\theta_2, v_2)$ con $\phi(1) = (\theta_1, v_1)$. La composición $p_{S^1} \circ \phi$ es continua y por lo tanto existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $p_{S^1}(\phi(t_0)) \in \{\theta_0, -\theta_0\}$.

Si $p_{S^1}(\phi(t_0)) = \theta_0$, entonces existe $t_0 > \epsilon_0 > 0$ tal que

$$p_{S^1}(\phi((t_0 - \epsilon_0, t_0])) \subseteq C_2 \quad y \quad p_{S^1}(\phi([t_0, t_0 + \epsilon_0))) \subseteq C_1. \tag{2.9}$$

Sin embargo, por el Lema 2.3.2, para todo $(\theta_0, v) \in C^*_{\theta_0}$ el punto es una obstrucción reticular y luego $\phi(t_0)$ es una obstrucción reticular de C lo que contradice (2.9) y por lo tanto $p_{S^1}(A) \subseteq C_1$.

De la misma manera y por (2.8), $p_{S^1}(A') \subseteq C_2$ pero esto implica que $p_{S^1}(A) \neq p_{S^1}(A')$ y en particular $A \neq A'$ lo que culmina en que C^*_Λ no es arcoconexo. $\square$

Teorema 2.2.6. *C es débilmente movible si y sólo si $w(C) \leq r_\Lambda$, para todo $\theta \in S^1$ el conjunto $R_\theta(\mathrm{int}(C))$ no es un dominio fundamental y todo polígono reticular de Λ en C no es una obstrucción reticular.*

Demostración. La prueba de que C débilmente movible implica $w(C) \leq r_\Lambda$ y que para todo $\theta \in S^1$ el conjunto $R_\theta(\mathrm{int}(C))$ no es un dominio fundamental no utiliza la hipótesis de que C tenga o no tenga polígonos reticulares, asi que esta implicación ya fue probada en el Lema 1.2.5.

La prueba de que C débilmente movible implica que todo polígono reticular de Λ en C no es una obstrucción reticular es exactamente el Lema 2.2.5

La dirección contraria se demuestra como sigue. Sean A, B componentes arcoconexas de C_Λ^* y $\theta_0 \in S^1$. Por el Lema 2.2.2

$$\{v \in C_{\theta_0}^* : \ (\theta_0, v) \in A\} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \{v \in C_{\theta_0}^* : \ (\theta_0, v) \in B\} \neq \emptyset.$$

Si D es una componente arcoconexa de $\{v \in C_{\theta_0}^* : \ (\theta_0, v) \in A\}$ en $C_{\theta_0}^*$ y E una componente arcoconexa de $\{v \in C_{\theta_0}^* : \ (\theta_0, v) \in B\}$ en $C_{\theta_0}^*$. Entonces, razonando como en el Lema 1.2.5 y utilizando reiteradamente el Lema 2.2.4 en lugar del Lema 1.2.3, podemos concluir que existe un arco

$$\phi : [0,1] \to C_\Lambda^*$$

tal que

$$\phi(0) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in D\} \qquad \text{y} \qquad \phi(1) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in E\}.$$

Por lo tanto, $\phi(0) \in A$ y $\phi(1) \in B$ y $A = B$, lo que prueba que C_Λ^* es arcoconexo y C es débilmente movible por el Teorema 1.1.1. $\square$

2.3. Obstrucciones reticulares

La definición de obstrucción reticular parece complicada, o al menos no se puede visualizar fácilmente cuales figuras convexas centralmente simétricas tienen dicha propiedad y cuales no. El objetivo de esta sección es estudiar la geometría de las figuras convexas centralmente simétricas que tienen obstrucciones reticulares.

Lema 2.3.1. *Sean K_1 y K_2 hexágonos convexos centralmente simétricos y congruentes entre si con centros O_1 y O_2 respectivamente. Supongamos que*

$$K_1 \cap K_2 = [X, Y] \qquad \textit{con } X, Y \in \operatorname{ver}(K_1) \cap \operatorname{ver}(K_2).$$

Entonces, para todos $x, y \in [X, Y] \setminus \{X, Y\}$ existe $\epsilon > 0$ tal que ó para todo $\lambda \in (-\epsilon, 0)$

$$T_{O_2}(R_{e^i\lambda}(T_{-O_2}([x, y]))) \subseteq T_{O_1}(R_{e^i\lambda}(T_{-O_1}(\operatorname{int}(K_1))))$$

y para toda $\mu \in (0, \epsilon)$

$$T_{O_2}(R_{e^i\mu}(T_{-O_2}(K_2))) \cap T_{O_1}(R_{e^i\mu}(T_{-O_1}(K_1))) = \emptyset$$

ó para todo $\lambda \in (0, \epsilon)$

$$T_{O_2}(R_{e^i\lambda}(T_{-O_2}([x, y]))) \subseteq T_{O_1}(R_{e^i\lambda}(T_{-O_1}(\text{int}(K_1))))$$

y para toda $\mu \in (-\epsilon, 0)$

$$T_{O_2}(R_{e^i\mu}(T_{-O_2}(K_2))) \cap T_{O_1}(R_{e^i\mu}(T_{-O_1}(K_1))) = \emptyset.$$

Demostración. Sean $l = \overline{XY}$ y B_1, B_2 los pies de las alturas de O_1 y O_2 a l. Denotamos por S_1 a la circunferencia con centro en O_1 que pasa por B_1 y S_2 a la circunferencia con centro en O_2 que pasa por B_2. Sea l' la otra recta tangente a S_1 y S_2 que deja a estas circunferencias en semiespacios distintos y sean B'_1 y B'_2 los puntos en los que intersecta a S_1 y S_2 respectivamente. Sea A_1 el arco cerrado menor de S_1 que tiene como extremo a B_1 y B'_1, ver Figura 33.

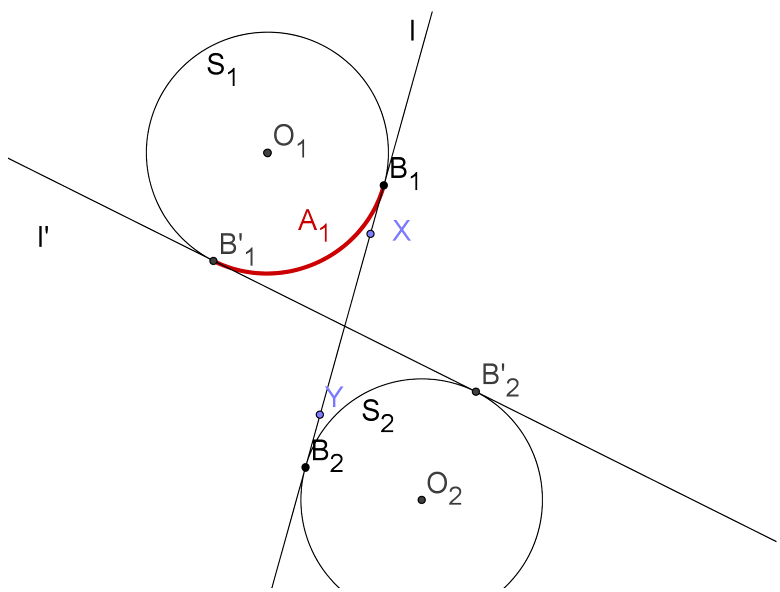


Figura 33

Notemos que K_1 y K_2 están en distintos semiplanos con respecto a l y sean H_1 y H_2 los semiplanos que los contienen respectivamente. Además, para todo $\theta \in S^1$

$$T_{O_1}(R_\theta(T_{-O_1}(S_1))) = S_1 \quad \text{y} \quad T_{O_2}(R_\theta(T_{-O_2}(S_2))) = S_2.$$

De esta manera, si $T_{O_1}(R_\theta(T_{-O_1}(B_1))) \in A_1$, entonces

$$T_{O_1}(R_\theta(T_{-O_1}(H_1))) \cap T_{O_2}(R_\theta(T_{-O_2}(H_2))) = \emptyset$$

lo que implica que

$$T_{O_1}(R_\theta(T_{-O_1}(K_1))) \cap T_{O_2}(R_\theta(T_{-O_2}(K_2))) = \emptyset$$

y por lo tanto existe $\epsilon > 0$ tal que

$$T_{O_1}(R_{e^{i\mu}}(T_{-O_1}(K_1))) \cap T_{O_2}(R_{e^{i\mu}}(T_{-O_2}(K_2))) = \emptyset \tag{2.10}$$

para toda $\mu \in (-\epsilon, 0)$ o para toda $\mu \in (0, \epsilon)$, dependiendo de si para toda $\mu \in (-\epsilon, 0)$ o para toda $\mu \in (0, \epsilon)$ $T_{O_1}(R_{e^{i\mu}}(T_{-O_1}(B_1))) \in A_1$ respectivamente.

Supongamos sin pérdida de generalidad que para toda $\mu \in (0, \epsilon)$ ocurre (2.10); Luego, si $\lambda \in (-\epsilon, 0)$, $T_{O_1}(R_{e^{i\lambda}}(T_{-O_1}(B_1))) \notin A_1$ y

$$T_{O_1}(R_{e^{i\lambda}}(T_{-O_1}(H_1))) \cap T_{O_2}(R_{e^{i\lambda}}(T_{-O_2}(H_2))) \neq \emptyset.$$

Recordemos que $K_1 \cap K_2 = [X, Y]$ lo que implica por la continudad de las rotaciones que existe $0 < \epsilon' \leq \epsilon$ tal que para toda $\lambda \in (-\epsilon', 0)$

$$T_{O_1}(R_{e^{i\lambda}}(T_{-O_1}(\mathrm{int}(K_1)))) \cap T_{O_2}(R_{e^{i\lambda}}(T_{-O_2}(\mathrm{int}(K_2)))) \neq \emptyset.$$

En particular, como $x, y \in [X, Y] \setminus \{X, Y\}$, entonces existe $0 < \epsilon_0 \leq \epsilon'$ tal que para todo $\lambda \in (-\epsilon_0, 0)$

$$T_{O_1}(R_{e^{i\lambda}}(T_{-O_1}(\{x, y\}))) \subseteq T_{O_2}(R_{e^{i\lambda}}(T_{-O_2}(\mathrm{int}(K_2))))$$

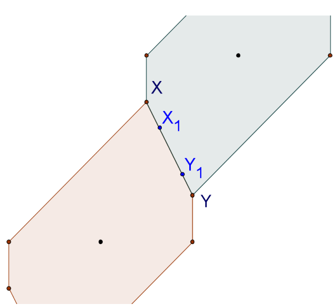


Fig. 34a Sean $X_1 = x$ y $Y_1 = y$

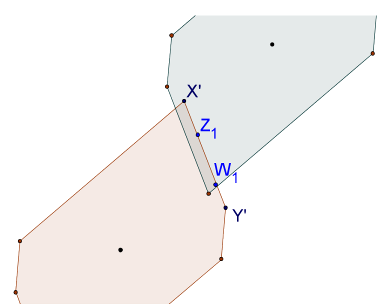


Fig. 34b Con X', Y', Z_1 y W_1 las imágenes de X, Y, X_1 y Y_1 respectivamente

implicando que

$$T_{O_1}(R_{e^{i\lambda}}(T_{-O_1}([x,y]))) \subseteq T_{O_2}(R_{e^{i\lambda}}(T_{-O_2}(\mathrm{int}(K_2))))$$

lo que prueba el lema. $\square$

Lema 2.3.2. *Supongamos que $S \subseteq \Lambda$, $\theta_0 \in S^1$ y $v_0 \in \mathbb{R}^2$ satisfacen que S es una obstrucción de $T_{v_0}(R_{\theta_0}(C))$, en particular (θ_0, v_0) es una obstrucción reticular. Entonces, $\mathrm{int}(C^*_{\theta_0}) = \emptyset$ y (θ_0, v) es una obstrucción reticular para todo $v \in C^*_{\theta_0}$.*

Demostración. Sea D la componente arcocnexa de v_0 en $C^*_{\theta_0}$. La Observación 8 implica que (θ_0, v) es una obstrucción reticular para todo $v \in D$.

Afirmación 1. *Existe $v_1 \in D$ y $P, Q, R \in \Lambda$ no colineales tales que*

$$v_1 \in T_P(R_{\theta_0}(C)) \cap T_Q(R_{\theta_0}(C)) \cap T_R(R_{\theta_0}(C))$$

Demostración (Afirmación 1) Primero, todo $v \in D$ satisface que (θ_0, v) es una obstrucción reticular por lo que existe $S_v \subseteq \Lambda$ tal que es una obstrucción de $T_v(R_{\theta_0}(C))$ y $|S_v| \geq 2$ por la Observación 7; Esto implica que para toda $v \in D$ existen $P_v, Q_v \in \Lambda$ distintos tales que

$$v \in T_{P_v}(R_{\theta_0}(C)) \cap T_{Q_v}(R_{\theta_0}(C)). \tag{2.11}$$

Además, podemos suponer, como en el Lema 2.2.3, que $[P_v, Q_v] \cap \Lambda = \{P_v, Q_v\}$.

Sea $v_2 \in D$ y $P_{v_2} \in \Lambda$ como en (2.11). Definimos también una función continua

$$\phi : [0,1] \to T_{P_{v_2}}(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$$

una parametrización de la frontera con $\phi|_{[0,1)}$ biyectiva y $\phi(0) = \phi(1)$. Sean $I \subseteq [0,1]$ un intervalo maximal tal que $\phi(I) \subseteq D$, podemos reparametrizar $T_{P_{v_2}}(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$ de tal manera que I sea conexo, y t_0 uno de sus extremos, sin pérdida de generalidad supongamos que $0 < t_0 = \inf I$; Notemos que I es cerrado por que D es cerrada. Como I es maximal, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $0 < \lambda < \epsilon$ tal que

$$\phi(t_0 - \lambda) \notin C^*_{\theta_0};$$

Esto último junto con el hecho de que Λ es discreto implica, como en el Lema 1.2.1, que existe $Q_0 \in \Lambda \setminus \{P_{v_2}\}$ y $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\phi(t_0) \in T_{Q_0}(R_{\theta_0}(C)) \quad \text{y} \quad \phi(t_0 - \lambda) \in T_{Q_0}(R_{\theta_0}(\mathrm{int}(C))) \text{ si } 0 < \lambda \leq \epsilon_0 \tag{2.12}$$

y como $\phi(t_0) \in C^*_{\theta_0}$, entonces $\phi(t_0) \in T_{Q_0}(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$.

Si $I = \{t_0\}$, entonces $t_0 = \sup I$. De manera análoga al caso del ínfimo, existe $Q_1 \in \Lambda \setminus \{P_{v_2}, Q_0\}$ y $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$\phi(t_0) \in T_{Q_1}(R_{\theta_0}(C)) \quad \text{y} \quad \phi(t_0 + \lambda) \in_{Q_1} (R_{\theta_0}(\mathrm{int}(C))) \text{ si } 0 < \lambda \leq \epsilon_1 \tag{2.13}$$

y $\phi(t_0) \in T_{Q_1}(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$. Además, notemos que si P_{v_2}, Q_0 y Q_1 son colineales, entonces

$$\mathrm{conv}(\{T_{-P_{v_2}}(\phi(t_0)), T_{-Q_0}(\phi(t_0)), T_{-Q_1}(\phi(t_0))\}) \subseteq R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))$$

es un segmento lo que implica que existe $\epsilon_2 > 0$ y $u \in \{\pm 1\}$ tal que $\lambda \in (0, \epsilon_2)$

$$\phi(t_0 + \lambda u) \in T_{P_{v_2}}(\mathrm{conv}(\{T_{-P_{v_2}}(\phi(t_0)), T_{-Q_0}(\phi(t_0)), T_{-Q_1}(\phi(t_0))\}))$$

y entonces no se satisface ó (2.12) ó (2.13) lo cual es una contradicción; Por lo tanto, P_{v_2}, Q_0 y Q_1 no son colineales y se cumple la afirmación en este caso.

Si $\{t_0\} \neq I$, la convexidad de C implica que no es posible tener que $\phi(t) \in T_{Q_0}(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$ para algún $t \in I \setminus \{t_0\}$. Esto aunado a (2.11) implica que para todo $v \in I$ existe $Q_v \in \Lambda \setminus \{P_{v_2}, Q_0\}$ tal que $v \in T_{Q_v}(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$. De nuevo, como Λ es discreto tenemos que existe $Q_{v_2} \in \Lambda \setminus \{P_{v_2}, Q_0\}$ y $\epsilon_3 > 0$ tal que

$$\phi(t_0 + \lambda) \in T_{Q_{v_2}}(R_{\theta_0}(C)) \text{ si } 0 < \lambda \leq \epsilon_3 \tag{2.14}$$

lo que implica, por ser C cerrado, que $\phi(t_0) \in T_{Q_{v_2}}(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$.

Afirmamos Q_0, P_{v_2} y Q_{v_2} no pueden ser colineales por que como $I \neq \{t_0\}$, entonces por (2.14)

$$\phi(t_0 + \lambda) \in T_{Q_{v_2}}(R_{\theta_0}(C)) \cap D \text{ si } 0 < \lambda \leq \mathrm{mín}\{\epsilon_3, \sup I\}$$

lo que implica que

$$\phi([t_0, t_0 + \mathrm{mín}\{\epsilon_3, \sup I\})]) \subseteq T_{Q_{v_2}}(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_{P_{v_2}}(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap D;$$

en particular por la convexidad de C tenemos que $\phi([t_0, t_0 + \mathrm{mín}\{\epsilon_3, \sup I\}])$ es un segmento y por ser $(\theta_0, \phi(t_0 + \lambda))$ una obstrucción reticular para toda $\lambda \in [0, \mathrm{mín}\{\epsilon_3, \sup I\}]$ podemos suponer sin pérdida de genralidad que $T_{Q_{v_2}}(R_{\theta_0}(C))$ y $T_{Q_{v_2}}(R_{\theta_0}(C))$ se encuentran en diferentes semiplanos con respecto a $\overline{\phi(t_0)\phi(t_0 + \mathrm{mín}\{\epsilon_3, \sup I\})}$; Recordemos que podíamos suponer que $[P_{v_2}, Q_{v_2}] \cap \Lambda = \{P_{v_2}, Q_{v_2}\}$ esto implica que $T_{Q_0}(R_{\theta_0}(C))$ se encuentra contenido en uno de los semiespacios abiertos definidos por la recta $\overline{\phi(t_0)\phi(t_0 + \text{mín}\{\epsilon_3, \sup I\})}$ lo que nos permite concluir que

$$T_{Q_{v_2}}(R_{\theta_0}(\text{Bd}(C))) \cap T_{P_{v_2}}(R_{\theta_0}(\text{Bd}(C))) \cap T_{Q_0}(R_{\theta_0}(\text{Bd}(C))) = \emptyset$$

y por lo tanto $\phi(t_0)$ no está en dicha intersección.

Lo anterior nos dice que Q_0, P_{v_2} y Q_{v_2} no son colineales, la Afirmación 2 también ha sido probada en este caso y hemos concluido la demostración de esta afirmación en cualquier caso.

Regresando al lema, la Afirmación 1 implica que existen $P, Q, R \in \Lambda$ no colineales y $v_1 \in D$ tales que

$$v_1 \in T_P(R_{\theta_0}(\text{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\text{Bd}(C))) \cap T_R(R_{\theta_0}(\text{Bd}(C))) \neq \emptyset$$

y sus negativos también están en lo que da como resultado que

$$T_{-P}(v_1), T_{-Q}(v_1), T_{-R}(v_1) \in R_{\theta_0}(\text{Bd}(C))$$

y sus negativos también están en $R_{\theta_0}(\text{Bd}(C))$ por la simetría central de C y de Λ; Lo anterior nos da como resultado que $R_{\theta_0}(C)$ es un dominio fundamental por el Lema 2.2.1.

Consecuentemente, tenemos que

$$\bigcup_{P \in \Lambda} T_P(R_{\theta_0}(\text{Bd}(C))) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus C^*_{\theta_0}) = \bigcup_{P \in \Lambda} T_P(R_{\theta_0}(C)) = \mathbb{R}^2$$

y por ende $\text{int}(C^*_{\theta_0}) = \emptyset$ lo que culmina la primera parte de nuestro lema.

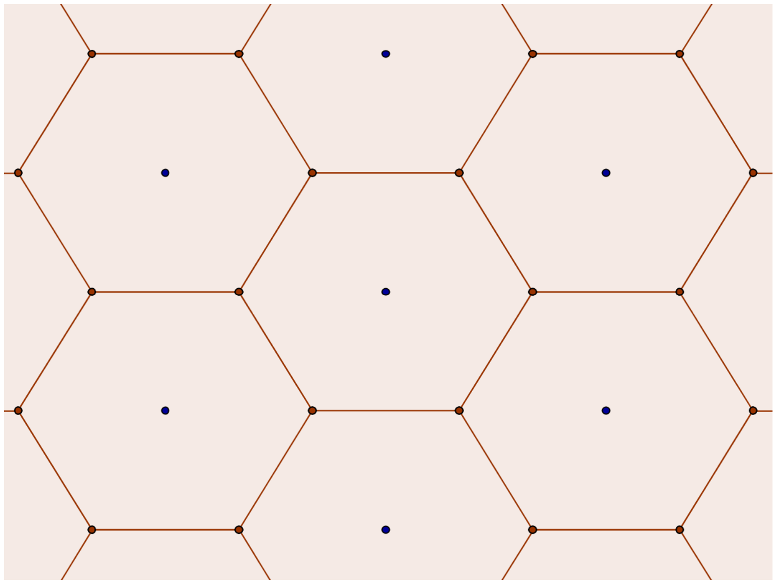


Fig. 35 $\operatorname{int}(C^*_{\theta_0}) = \emptyset$.

Sea $v_1 \in D$ y $P, Q, R \in \Lambda$ no colineales tales que

$$v_1 \in T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_Q(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_R(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))),$$

luego

$$T_{-P}(v_1), T_{-Q}(v_1), T_{-R}(v_1) \in R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)) \cap C^*_{\theta_0}$$

y por la simetría central de C y Λ tenemos que

$$T_P(-v_1), T_Q(-v_1), T_R(-v_1) \in R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)) \cap C^*_{\theta_0}$$

lo que implica que la envolvente convexa de estos seis puntos es un hexágono no degenerado, centralmente simétrico con centro en el origen.

De nuevo por el Lema 2.2.1

$$K = \mathrm{conv}(\{T_{-P}(v_1), T_{-Q}(v_1), T_{-R}(v_1), T_P(-v_1), T_Q(-v_1), T_R(-v_1)\})$$

es un dominio fundamental y por lo analizado en el último párrafo

$$\mathrm{ver}(K) = \{T_{-P}(v_1), T_{-Q}(v_1), T_{-R}(v_1), T_P(-v_1), T_Q(-v_1), T_R(-v_1)\}.$$

Como (θ_0, v_1) es una obstrucción reticular, podemos justificar como en el Lema 2.2.5, que $(\theta_0, -v_1)$ es una obstrucción reticular. También , es fácil convencerse que las obstrucciones reticulares son $\Lambda-$invariantes, esto significa que $(\theta_0, T_S(v_1))$ es una obstrucción reticular para toda $S \in \Lambda$, por lo que $\{(\theta_0, v) : \ v \in \text{ver}(K)\}$ son obstrucciones reticulares.

Por otro lado,

$$K \subseteq R_{\theta_0}(C) \quad \text{y} \quad \text{int}(K) \subseteq R_{\theta_0}(\text{int}(C))$$

y K es un dominio fundamental por el Lema 2.2.1 lo que implica que

$$C^*_{\theta_0} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{P \in \Lambda} T_P(R_{\theta_0}(\text{int}(C))) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{P \in \Lambda} T_P(\text{int}(K)) \subseteq \bigcup_{P \in \Lambda} T_P(\text{Bd}(K)).$$

Ahora, probaremos la siguiente afirmación la cual ayudará a terminar la prueba de este lema.

Afirmación 2. *Si* $X, Y \in \text{ver}(K)$ *son adyacentes, entonces existe* $S \in \Lambda \setminus \{0\}$ *tal que* $X, Y \in T_S(K)$ *y en particular* $[X, Y] \in T_S(K)$

Demostración (Afirmación 2) Supongamos sin pérdida de generalidad que $X = T_{-P}(v_1)$, entonces Y solo puede ser $T_{-Q}(v_1), T_{-R}(v_1), T_Q(-v_1)$ ó $T_R(-v_1)$ y esencialmente hay dos casos que son $Y = T_{-Q}(v_1)$ ó $Y = T_Q(-v_1)$, ya que en los otros casos solo se cambia R por Q.

Si $Y = T_{-Q}(v_1)$, entonces alguno de los vértices de K restantes adyacentes a X ó Y es $Z = T_{-R}(v_1)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que X es adyacente a Z. Luego, $T_{-P}(v_1), T_{-Q}(v_1), T_{-R}(v_1)$ son como en el primer subcaso del segundo caso del Lema 2.2.1, esto significa que el origen no está contenido en $\text{conv}(\{T_{-P}(v_1), T_{-Q}(v_1), T_{-R}(v_1)\})$, ya que en caso de que estuviese contenido el origen tendríamos que X no sería adyacente a Y y Z. Al igual que en el Lema 2.2.1, podemos deducir que

$$Z - X + Y = v_1 + P - R - Q \in K$$

y por ende $v_1 - Q = T_{-Q}(v_1) \in T_{R-P}(K)$

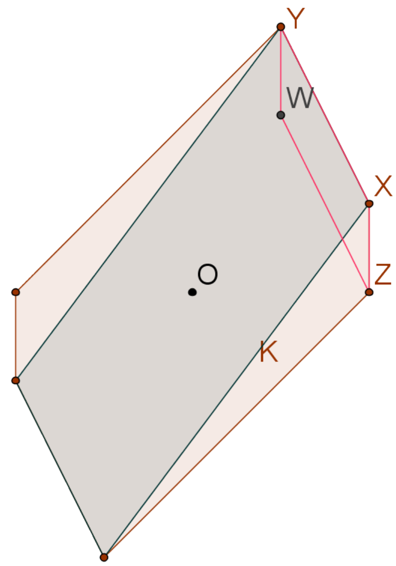


Fig. 36 Sea $W = Z - X + Y$.

Por otro lado, $T_{-R}(v_1) \in K$ lo que implica que $T_{-P}(v_1) \in T_{R-P}(K)$ y $X, Y \in T_{R-P}(K)$.

Si $Y = T_Q(-v_1)$, entonces $-X = T_P(-v_1), -Y = T_{-Q}(v_1) \in K$ y por lo tanto $X, Y \in T_{Q-P}(K)$ y en cualquier caso hemos demostrado la Afirmación 2.

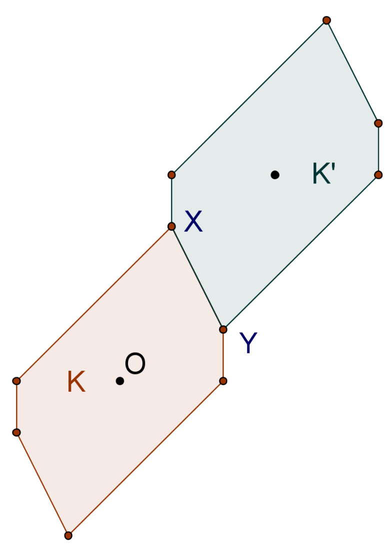


Fig. 37 En la figura $K' = T_{Q-P}(K)$.

Regresemos a la demostración del lema. Para toda componente arcoconexa E de $C^*_{\theta_0}$ existen dos posibilidades. La primera es que exista $P \in \Lambda$ y $X \in \mathrm{ver}(K)$ tal que $T_P(X) \in E$, luego $(\theta_0, T_P(X))$ es una obstrucción reticular por lo mencionado antes de la Afirmación 2 y todo punto (θ_0, v) con $v \in E$ es una obstrucción reticular.

La otra posibilidad es que

$$\bigcup_{P\in\Lambda} T_P(\mathrm{ver}(K)) \cap E = \emptyset$$

y como K es un hexágono convexo tal que $E \subseteq \bigcup_{P\in\Lambda} T_P(\mathrm{Bd}(K))$ concluimos que E es la unión de segmentos que no tiene sus extremos en $\bigcup_{P\in\Lambda} T_P(\mathrm{ver}(K))$.

Supongamos que

$$E = \bigcup_i [X_i, Y_i] \subseteq \bigcup_{P\in\Lambda} T_P(\mathrm{Bd}(K)) \qquad \text{con } [X_i, Y_i] \text{ segmentos maximales.}$$

Como tenemos que para toda i tenemos que $\bigcup_{P\in\Lambda} T_P(\mathrm{ver}(K)) \cap [X_i, Y_i] = \emptyset$, existe $P_i \in \Lambda$ tal que $[X_i, Y_i] \subseteq T_{P_i}(\mathrm{Bd}(K))$ y X_i, Y_i se encuentran en el interior relativo de una arista de $T_{P_i}(\mathrm{Bd}(K))$. Sin embargo, como E es una componente arcoconexa, si $E \neq [X_1, Y_1]$, entonces existe $i \neq 1$ tal que $[X_1, Y_1] \cap [X_i, Y_i] \neq \emptyset$. La Afirmación 2 implica que existe $Q_1 \in \Lambda \setminus \{P_1\}$ tal que

$$[X_1, Y_1] \subseteq T_{P_1}(\mathrm{Bd}(K)) \cap T_{Q_1}(\mathrm{Bd}(K))$$

y luego

$$[X_i, Y_i] \cap T_{P_1}(\mathrm{int}(K)) = \emptyset \quad \text{y} \quad [X_i, Y_i] \cap T_{Q_1}(\mathrm{int}(K)) = \emptyset$$

lo que implica que

$$[X_i, Y_i] \subseteq T_{P_1}(\mathrm{Bd}(K)) \cap T_{Q_1}(\mathrm{Bd}(K))$$

por lo que los segmentos $[X_1, Y_1]$ y $[X_i, Y_i]$ están sobre la misma arista y se intersectan lo que permite concluir que alguno de los intervalos no es maximal y por esta contradicción $E = [X_1, Y_1]$.

Sean $X, Y \in \mathrm{ver}(K)$ tales que $[X_1, Y_1] \subseteq T_{P_1}([X, Y])$; Recordemos que $[X_1, Y_1]$ no contiene ni a $T_{P_1}(X)$ ni a $T_{P_1}(Y)$. Lo anterior junto con el hecho de que

$$[X_1, Y_1] \subseteq T_{P_1}(\mathrm{Bd}(K)) \cap T_{Q_1}(\mathrm{Bd}(K))$$

implica que se satisfacen las hipótesis del Lema 2.3.1 por lo que existe $\epsilon_1 > 0$ tal que ó para toda $\lambda \in (0, \epsilon_1)$

$$T_{Q_1}(R_{e^{i\lambda}}(T_{-Q_1}([X_1, Y_1]))) \subseteq T_{P_1}(R_{e^{i\lambda}}(\text{int}(K))) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus C^*_{\theta_0 \cdot e^{i\lambda}} \tag{2.15}$$

y

$$T_{Q_1}(R_{e^{i\mu}}(K)) \cap T_{P_1}(R_{e^{i\mu}}(K)) = \emptyset$$

si $\mu \in (-\epsilon_1, 0)$, ó para toda $\lambda \in (-\epsilon_1, 0)$

$$T_{Q_1}(R_{e^{i\lambda}}(T_{-Q_1}([X_1, Y_1]))) \subseteq T_{P_1}(R_{e^{i\lambda}}(\text{int}(K))) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus C^*_{\theta_0 \cdot e^{i\lambda}}$$

y

$$T_{Q_1}(R_{e^{i\mu}}(K)) \cap T_{P_1}(R_{e^{i\mu}}(K)) = \emptyset$$

si $\mu \in (0, \epsilon_1)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que ocurre la primera opción. Afirmamos que no existe $\epsilon > 0$ tal que hay un arco

$$\phi : [0, 1] \to C^*_\Lambda$$

el cual cumple que $p_{S^1}(\phi(0)) = \theta_0 \cdot e^{-i\epsilon}$, $p_{S^1}(\phi(1)) = \theta_0 \cdot e^{i\epsilon}$, $\phi(t_0) = (\theta_0, v)$ para algún $t_0 \in (0, 1)$ con $v \in E$ y $p_{S^1}(\phi(t)) = \theta_0 \cdot e^{i\lambda}$ con $\lambda \leq 0$ si $t \in [0, t_0]$ y $\lambda \geq 0$ si $t \in [t_0, 1]$. En efecto, si dichos ϕ y $\epsilon > 0$ que satisfacen las condiciones antes mencionadas existen, entonces $p_{S^1}(\phi(t)) = \theta_0 \cdot e^{i\lambda}$ con $\lambda \geq 0$ si $t \in [t_0, 1]$ y $\phi(t_0) = (\theta_0, v)$ para algún $t_0 \in (0, 1)$ con $v \in E$ contradicen (2.15)

Lo anterior implica que (θ_0, v) es una obstrucción reticular si $v \in [X_1, Y_1] = E$. Esto demuestra que en cualquier caso todos los puntos v de cualquier componente arcoconexa de $C^*_{\theta_0}$ satisfacen que (θ_0, v) es una obstrucción reticular. $\square$

Capítulo 3

Conjuntos Convexos Movibles

El siguiente capítulo tiene como objetivo el estudiar a los figuras convexas movibles. El concepto y los resultados de los figuras convexas movibles son muy parecidos a los de los conjuntos débilmente movibles por lo que damos las definiciones y resultados correspondientes a las figuras convexas débilmente movibles pero omitimos las demostraciones ya que consisten de las mismas ideas antes desarrolladas salvo unas lígeras diferencias técnicas.

En caso de ser necesario comentaremos las diferencias y similitudes de los resultados de los conjuntos convexos movibles con respecto a los resultados de los conjuntos convexos débilmente movibles.

En la primera sección del capítulo, definimos lo que es que una figura sea movible y como saber si una figura es movible en términos topológicos. Los resultados y la caracterización análogos a los del Capítulo 2 se encuentran en la segunda sección. En la tercera sección, notamos que analizar si una figura convexa centralmente simétrica es movible o no, es mucho mas sencillo que para el caso de la propiedad de ser débilmente movible. Finalmente, en la cuarta sección recalcamos algunas conclusiones y preguntas que emanan de todo el tabajo.

En este capítulo, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ es una retícula y C es una figura convexa

3.1. Definiciones y Topología

A continuación presentamos definiciones y un resultado que necesitaremos para la última sección del presente capítulo.

Definición 14. El conjunto C es movible con respecto a Λ si para cualesquiera dos copias C_0, C_1 de C tales que

$$C_0 \cap \Lambda = C_1 \cap \Lambda = \emptyset$$

existe una transformación rígida de C

$$\phi : [0,1] \times C \to \mathbb{R}^2$$

tal que

$$\phi(t, C) \cap \Lambda = \emptyset \qquad \text{para todo } t \in I,$$

y $\phi(0, C) = C_0,\ \phi(1, C) = C_1$.

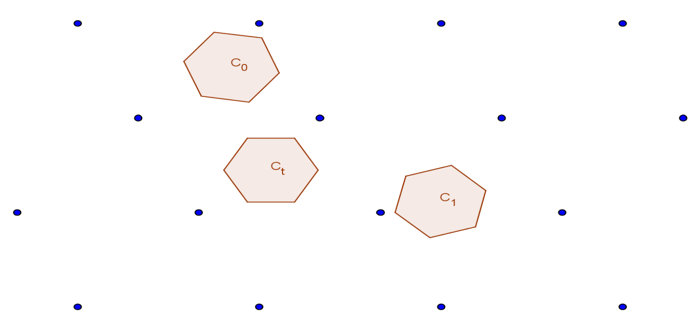


Fig.38 C es movible con $\phi(0, C) = C_0, \phi(1, C) = C_1$ y $\phi(t, C) = C_t$.

Definición 15. Definimos los conjuntos

$$C_\theta = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{P \in \Lambda} T_P(R_\theta(C))$$

y

$$C_\Lambda = \{(\theta, v) :\ \theta \in S^1,\ v \in C_\theta\}.$$

Una observación trivial pero muy útil es que

$$(\theta, v) \in C_\Lambda \quad \text{si y solo si} \quad T_v(R_\theta(C)) \cap \Lambda = \emptyset.$$

El siguiente teorema caracteriza la propiedad de movilidad con respecto a una retícula.

Teorema 3.1.1. *Sean $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ una retícula y C una figura convexa que contiene al origen.*

El conjunto C es movible con respecto a Λ si y sólo si C_Λ es arcoconexo.

La prueba de este teorema es idéntica a la prueba del Teorema 1.1.1 cambiando C por $\mathrm{int}(C)$ y C_Λ por C_Λ^*.

3.2. Figuras Convexas Movibles Sin Polígonos Reticulares

En esta sección supondremos que C es una figura convexa sin polígonos reticulares con el origen en su interior.

El camino para caracterizar a las figuras convexas movibles sin polígonos reticulares es análogo al camino que seguimos en el capítulo.

Lema 3.2.1. *Si para todo $\theta \in S^1$ el conjunto $R_\theta(C)$ no es un dominio fundamental entonces toda componente conexa A de C_Λ satisface que $p_{S^1}(A) = S^1$*

La demostración de este lema sigue la misma idea del Lema 1.2.1. La demostración se integra de la siguiente manera. El conjunto $A \neq \emptyset$. Además, fácilmente se prueba que A es abierto, luego $p_{S^1}(A)$ es abierto, y la parte que requiere un poco mas de trabajo es que $p_{S^1}(A)$ es cerrado y por lo tanto $p_{S^1}(A) = S^1$.

Lema 3.2.2. *Supongamos que $w(C) < r_\Lambda$ y para todo $\theta \in S^1$ el conjunto $R_\theta(C)$ no es un dominio fundamental.*

Sean $\theta_0 \in S^1$ y D, E componentes arcoconexas de C_{θ_0} tales que existen $P, Q \in \Lambda$ distintos que satisfacen que $[P,Q] \cap \Lambda = \{P,Q\}$,

$$\widetilde{D} \cap T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \neq \emptyset$$

y

$$\widetilde{E} \cap T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \cap T_P(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C))) \neq \emptyset$$

donde $\widetilde{D}$ y $\widetilde{E}$ son las cerraduras de D y E en C_Λ^* respectivamente.

Entonces, existe un arco $\phi : [0,1] \to C_\Lambda$ tal que $\phi(0) \in \{(\theta_0, v) : v \in D\}$ y $\phi(1) \in \{(\theta_0, v) : v \in E\}$.

Retomemos la notación del Lema 1.2.2. Por la hipótesis de $w(C) < r_\Lambda$, existe $\theta_1 \in S^1$ tal que $f(\theta_2) < |P-Q|$ y θ_1 entre θ_0 y θ_2 tal que el arco cerrado I entre θ_0 y θ_1 y el arco cerrado J entre θ_1 y θ_2 satisfacen que $f(\theta) \geq |P-Q|$ para todo $\theta \in I$ $f(\theta) \leq |P-Q|$ para todo $\theta \in J$, en particular $f(\theta_1) = |P-Q|$.

Sea A' la componenente arcoconexa de C_Λ que contiene a $\{(\theta_0, v) : v \in D\}$ y B' la componenente arcoconexa de C_Λ que contiene a $\{(\theta_0, v) : v \in E\}$.

Se demuestra como en el Lema 1.2.2 que

$$I \subseteq p_{S^1}(A') \cap p_{S^1}(B')$$

y para $\theta \in J$

$$\{v : \ (\theta, v) \in A'\} \cap \{v : \ (\theta, v) \in B'\} \neq \emptyset$$

por lo que $A' = B'$ y se demuestra el lema.

Lema 3.2.3. *Sean $P \in \Lambda$ y $\theta_0 \in S^1$. Supongamos que $w(C) < r_\Lambda$ y para todo $\theta \in S^1$ el conjunto $R_\theta(C)$ no es un dominio fundamental. Si $D \neq E$ son componentes arcoconexas de C_{θ_0} tales que su cerraduras en $C^*_{\theta_0}$ intersectan a $T_P(R_{\theta_0}(C))$, entonces existe un arco*

$$\psi : [0 : 1] \to C_\Lambda$$

tal que

$$\psi(0) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in D\} \qquad y \qquad \psi(1) \in \{(\theta_0, v) : \ v \in E\}$$

La idea de la demostración es la misma que la del Lema 1.2.3. Primero, para todo $P \in \Lambda$ existe un número finito de componentes arcoconexas de C_{θ_0} tal que sus cerraduras en $C^*_{\theta_0}$ intersectan a $T_P(R_{\theta_0}(C))$. Luego, como en el Lema 1.2.3, podemos ordenar, por ejemplo en el sentido de las manecillas del reloj, dichas componentes y con ayuda del Lema 3.2.3 podemos pasar de una componente arcoconexa a otra lo que termina la demostración.

Lema 3.2.4. *Si $w(C) < r_\Lambda$, entonces para todo $\theta \in S^1$ $R_\theta(C)$ no es un dominio fundamental.*

La demostración de este lema es como la del Lema 1.2.4.

Al igual que en el Capítulo 1, el Lema 3.2.5 será fundamental para caracterizar a las figuras convexas sin polígonos reticulares.

Lema 3.2.5. *C es débilmente movible si y sólo si $w(C) < \Lambda$ y para todo $\theta \in S^1 R_\theta(C)$ no es un dominio fundamental.*

La demostración de este lema se estructura como el Lema 1.2.5. Primero se demuestra que si $w(C) \geq \Lambda$ ó existe $\theta_0 \in S^1$ tal que $R_\theta(C)$ es un dominio fundamental, entonces C_Λ no es conexo y por lo tanto no es arcoconexo. Luego, si $w(C) < \Lambda$ y para todo $\theta \in S^1$ tenemos que $R_\theta(C)$ no es un dominio fundamental, entonces el Lema 3.2.1 y el Lema 3.2.3 implican que C_Λ es arcoconexo.

Teorema 3.2.6. *C es movible si y sólo si $w(c) < r_\Lambda$.*

La demostración de este teorema es como en la del Teorema 1.2.6. y es consecuencia de los lemas 3.2.4 y 3.2.5.Finalmente, presentamos el corolario correspondiente al Corolario 1.2.7.

Corolario 3.2.7. *Si C es una figura convexa tal que su área es menor a $\frac{\mathrm{vol}(\Lambda)}{2}$ y $w(C) < r_\Lambda$, entonces C es movible.*

3.3. Figuras Convexas Centralmente Simétricas Movibles

En esta sección haremos un trabajo similar al del capítulo 2. También para las figuras convexas con polígonos reticulares en general es difícil determinar si son movibles o no.

A diferencia del capítulo 2, el cambiar la hipótesis de que no existan polígonos reticulares por la hipótesis de que C es una figura convexa centralmente simétrica no hace interesante el problema. En efecto, el Lema 2.2.1 implica que si existe un polígono reticular de Λ en C, digamos que existe $\theta_0 \in S^1, v_0 \in C_{\theta_0}$ y $P, Q, R \in \Lambda$ no colineales tales que $P, Q, R \in T_{v_0}(R_{\theta_0}(\mathrm{Bd}(C)))$, entonces $R_{\theta_0}(C)$ es un dominio fundamental y por lo tanto C no es movible.

El siguiente teorema resume el análisis hecho en el párrafo anterior y también es resultado del Teorema 3.2.6.

Teorema 3.3.1. *Supongamos que C es una figura convexa centralmente simétrica. Entonces, C es movible si y sólo si no existen polígonos reticulares de Λ en C y $w(C) < r_\Lambda$.*

3.4. Conclusiones y Preguntas

En esta última sección, remarcaremos algunas conclusiones del trabajo y luego realizaremos algunas preguntas que quedan pendientes del problema de ver cu figuras convexas son débilmente movibles y cuales son movibles.

Conclusión 1. *El determinar si una figura convexa C es débilmente movible o movible es equivalente a ver si C_Λ^* ó C_Λ son arcoconexos respectivamente. Por lo tanto, podemos decir que nuestro problema es topológico pero para determinar la arcoconexidad de los conjuntos mencionados nos ayudamos de la geometría.*

Conclusión 2. *Saber si una figura convexa C para la que no existen polígonos reticulares es débilmente movible depende solamente de su ancho y del radio de la retícula, i.e. la mínima distancia entre dos puntos distintos de la retícula.*

Conclusión 3. *Saber si una figura convexa centralmente simétrica C para la que no existen obstrucciones reticulares es débilmente movible depende solamente de su ancho, de que ninguna de sus rotaciones sea un dominio fundamental y del radio de la retícula.*

Conclusión 4. *Saber si una figura convexa C para la que no existen polígonos reticulares es movible depende solamente de su ancho y del radio de la retícula.*

Conclusión 5. *Saber si una figura convexa centralmente simétrica C movible depende solamente de su ancho, de que no existan polígonos reticulares y del radio de la retícula.*

Conclusión 6. *Determinar si una figura convexa arbitraria es o no es débilmente movible o movible conociendo su ancho, el radio de la retícula y que ninguna de sus rotaciones sea un dominio fundamental es bastante difícil.*

Ahora, mencionamos algunos de las preguntas o problemas que se deriva de nuestro trabajo.

Pregunta 1. *Caracterizar a las figura convexa arbitraria que son débilmente movibles en términos geométricos. Hacer lo mismo para la propiedad de ser movible.*

Pregunta 2. *Generalizar la teoría desarrollada en este trabajo a* $\mathbb{R}^n$*.*

Pregunta 3. *Determinar familias interesantes en las cuales se puedan caracterizar a las figuras convexas débilmente movibles o movibles en* $\mathbb{R}^n$*.*

Pregunta 4. *¿ Se podrá caracterizar a las figura convexa arbitraria que son débilmente movibles en términos geométricos en* $\mathbb{R}^n$ *?, ¿ y a las figura convexa arbitraria que son movibles ?*

Pregunta 5. *Si en lugar de tomar una retícula en el plano tomamos un conjunto discreto de puntos centralmente simétricos ¿Cómo saber cuales figuras convexas son débilmente movibles y cuales movibles con respecto al conjunto de puntos?. Mejor aún, responder las mismas preguntas si solamente sabemos que el conjunto de puntos es discreto.*

Pregunta 6. *En* $\mathbb{R}^n$*, responder todas las preguntas anteriores pero si en lugar de tomar una retícula, tomamos una retícula por la que pasan planos de dimencion* $l < n$*, por ejemplo nosotros trabajamos con* $n = 2$ *y* $l = 0$*.*

Bibliografía

[BMU] J. Bracho, L. Montejano, J Urrutia. *Immobilization of Smooth Convex Figures*, Geometriae Dedicata 53 (1994), 119-131.

[C] J. Cassels. *An Introduction to the Geometry of Numbers*,Springer (1997).

[CSU] J. Czyzowic, I. Stojmenovic, J. Urrutia. *Immobilizing a Shape*, RR90/11-18, Department d'informatique, Universit6 du Quebec Hull, 1990.

[Mu] J. Munkres. *Topology, A First Course*,Prentice-Hall (1975).

[V] F. Valentine. *Convex sets*, McGraw-Hill (1964)