Kombinatorika

Kombinatorika hrá v rozvoji matematického myslenia výraznú rolu.
Jej význam je predovšetkým v rozvoji logického myslenia a obecných kombinačných schopností a v neposlednom rade ju možno považovať za základ pre následné riešenie rôznych pravdepodobnostných problémov.

Kombinatorika je časť matematiky, ktorá sa (jak je z názvu jasné) zaoberá kombinovaním všetkého možného, napr. môžeme pri športových turnajoch kombinovať družstva, môžeme ich priraďovať do rôznych skupín atď.

Ako matematická disciplína sa kombinatorika začala objavovať približne v 17. storočí.
O jej rozvoj sa okrem iných zaslúžili: ***Pascal***, ***Fermat***, ***Bernoulli***, ***Leibniz***, ***Euler*** alebo ***Laplace***.
Predmetom ich skúmania boli hazardné hry. Veľký význam mala úloha o rozdelení stávky, ktorú Pascalovi predložil jeho priateľ, vášnivý hráč - Chevalier de Méré. Šlo o „Zápas“ hlava – orol, ktorý sa hrá do 6 vyhraných partií. Problém vznikol, keď musel byť prerušený v čase, keď jeden hráč mal 5 a druhý 4 vyhrané partie. Ako teda rozdeliť vsadené peniaze? Bolo jasné, že rozdelenie v pomere 5:4 by nebolo spravodlivé. Pascal použil metódy kombinatoriky a riešil tento problém v obecnom prípade, kedy jednému hráčovi ostáva ešte vyhrať ***r*** partií a druhému ***s*** partií. Touto úlohou sa zaoberal aj Pierre Fermat, ale ten došiel k inému riešeniu.

Ďalší rozvoj kombinatoriky je spojený s menami: ***Jakob Bernoulli***, ***G. W. Leibniz*** a ***Leonhard Euler***. Aj u nich boli hlavnými úlohami aplikácie na rôzne hry (*loto*, *pasiáns* atd.).

V západných kultúrach ju matematici objavili tiež v súvislosti s ***hazardnými*** hrami.
Vtedy v živote privilegovaných vrstiev spoločnosti zaujímali hazardné hry významné miesto.
V kartách a kockách sa vyhrávali a prehrávali brilianty, zlato, paláce a statky, kone i drahé šperky.
Taktiež boli rozšírené rozmanité lotérie.
Preto sa kombinatorické úlohy spočiatku týkali predovšetkým týchto hier.
Riešili sa napríklad problémy: koľkými spôsobmi môže pri danom počte vrhnutých kociek padnúť určitý počet ôk, alebo koľkými spôsobmi je možné získať dvoch kráľov v určitej kartovej hre.
Tieto problémy boli hybnou silou v rozvoji nielen ***kombinatoriky***, ale taktiež ***teórie pravdepodobnosti***, ktoré sa rozvíjali súbežne.

"Koľkými spôsobmi možno vybrať, zoradiť, usporiadať isté objekty?"
Takúto úlohu sa kombinatorika snaží roztriediť do skupín či typov a pre každý typ úlohy formuluje všeobecnú metódu riešenia - napríklad v podobe vzorca.

<u>Motivačný úloha:</u>
Určte počet všetkých prirodzených dvojciferných čísel, v ktorých v dekadickom zápise sa každá číslica vyskytuje najviac raz.

<u>Riešenie:</u>

Na mieste desiatok sa vyskytujú postupne číslice 1 – 9 a ku každej z nich možno z množiny {0, 1, 2, ..., 9} vytvoriť všetky dvojciferné číslo tak, že sa číslice neopakujú:
1 krát 9 zostávajúcich
2 krát 9 zostávajúcich
3 krát 9 zostávajúcich
atď. , celkom teda vytvoríme 9. 9 = 81 čísel

Bez toho, aby sme si uvedomili, sme k riešeniu použili prvé z kombinatorických pravidiel - ***pravidlo súčinu***.

KOMBINATORICKÉ PRAVIDLA

Predchádzajúca jednoduchá úloha vedie k zavedeniu kombinatorického ***pravidlá súčinu:***

Predpokladajme, že máme vybrať dva prvky **a**, **b** pričom vyberáme prvý z konečnej neprázdnej množiny **A** a druhy z konečnej neprázdnej množiny **B**.
V prípade, že vyber prvku **b** je nezávislý na výbere prvku **a** je celkom **A.B** možností, ako vybrať tieto prvky.
Jedná sa teda o počet všetkých usporiadaných k - tíc, ktorých prvý člen možno vybrať n_1 spôsobmi, druhý n_2 spôsobmi po výbere prvého, ..., každý k - ty člen n_1, n_2, ..., n_k spôsobmi po výbere (k - 1) ho člena. Tento počet je rovný súčinu $\mathbf{n_1 .\, n_2 .\, ...\, n_k}$.

Kombinatorickým pravidlom súčinu možno riešiť väčšinu kombinatorických úloh, riešenia však bývajú zdĺhavé.

Ak je úlohou zistiť počet prvkov nejakej množiny M, môžeme množinu M rozložiť na niekoľko ***disjunktných podmnožín Mj*** tak, že $\mathbf{M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup ... \cup M_k}$,
a potom určiť počty prvkov množín Mj.
Tým je zavedené kombinatorické ***pravidlo súčtu***.
Tento počet je rovný $\mathbf{| M | = | M1 | + | M2 | + | M3 | + ... + | Mk |}$

Pre riešenie úlohy nielen týmito pravidlami je nutne definovať najzákladnejší pojem kombinatoriky a to **faktoriál**.

Faktoriál

Faktoriál čísla n je ***súčin prirodzených čísel 1*** až ***n*** a označujeme ho výkričníkom za daným číslom, všeobecne **n!**.
Matematicky to najľahšie zapisujeme v tvare: **n! = n (n - 1) (n - 2) (n - 3). . . 3. 2. 1**
Nula nie je prirodzené číslo, ale ak sme nútení vyjadriť v niektorom vzťahu **0!** , definujeme to ako **1**, t.j. platí **0! = 1.**
Ak chceme faktoriál rozložiť len čiastočne, môžeme kedykoľvek prestať a posledný člen zase považovať za faktoriál teda, napr.: **n! = n (n - 1) (n - 2)!**
Na základe toho je možné určiť faktoriál zložitejších príkladov.

Dokážte, že platí : (n + 1)! - n! = n . n!

Riešenie : (n + 1)! = (n + 1) n! ... (n + 1).n! – n! = n . n! ... n!.(n + 1 –1) = n . n! ...
... n . n! = n . n!

Je dôležité si zapamätať, že faktoriál (**!**) je len symbol, ktorý sám o sebe nemožno ani vybrať pred zátvorky ani vykrátiť, práve tak ako s ním nemožno napríklad roznásobiť „zátvorky“.
Pri výskyte faktoriálov v zlomku je výhodné faktoriály väčších čísel rozpísať pomocou faktoriálov menších čísel a po úprave vykrátiť.

Príklad 1:

$$1)\ \frac{28!+29!}{30!}=\frac{28!+29*28!}{30*29*28!}=\frac{28!(1+29)}{30*29*28!}=\frac{28!*30}{30*29*28!}=\frac{1}{29}$$

$$2)\ \frac{(n+4)!}{(n+2)!}=\frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{(n+2)}=\underline{\underline{(n+4)(n+3)}};n+2\geq 0\ \ ;(0!=1)$$

$$n\geq -2\Rightarrow n\in N$$

$$3)\ \frac{n}{(n-3)!}-\frac{1}{(n-4)}=\frac{n}{(n-3)(n-4)}-\frac{1}{(n-4)}=\frac{n-(n-3)}{(n-3)(n-4)}=\frac{n-n+3}{(n-3)(n-4)!}=$$

$$\underline{\frac{3}{(n-3)}};n\geq 4,n\in N$$

$$4)\ \frac{(n+5)!}{(n+3)!}-2\frac{(n+4)}{(n+2)}+\frac{(n+3)}{(n+1)!}=\frac{(n+5)(n+4)(n+3)}{(n+3)!}-2\frac{(n+4)(n+3)(n+2)!}{(n+2)}$$

$$+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)}=(n+5)(n+4)-2(n+4)(n+3)+(n+3)(n+2)=$$

$$=n^2+9n+20-2(n^2+7n+12)+n^2+5n+6=n^2+9n+20-2n^2-14n-27$$

$$+n^2+5n+6=0n^2+0n+2=\underline{2};n\geq -3\wedge n\geq -2\wedge n\geq -1,n\in N$$

$$5)\ \frac{(3n-2)!}{(3n-3)}=\frac{(3n-2)(3n-3)!}{(3n-3)}=\underline{\underline{3n-2}};3n-3\geq 0$$

$$3n\geq 3$$

$$n\geq 1,n\in N$$

Úloha:

Upravte:

$a)\ (n+1)!-n\,n!$ (n!)

$b)\ \frac{(n+1)!}{n!}-\frac{n!}{(n-1)!}$ (1)

$c)\ \frac{(n+2)!}{n!}-\frac{2(n+1)!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-2)!}$ (2)

Variácie, Permutácie, Kombinácie

1. Variácie bez opakovania

Definícia:

Variácie bez opakovania k-tej triedy z n prvkov je ***každá usporiadaná k-tica*** ***rôznych*** ***prvkov***, vybraných z ***n-prvkovej*** množiny.

Nech množina ***M*** obsahuje ***n rôznych prvkov*** a nech $p_i \in M$.
Potom každá $[p_1; p_2; p_3; ...; p_k]$ je ***variácia k-tej triedy z n prvkov bez opakovania***.

<u>Poznámky:</u> 1) ***záleží na poradí*** prvkov
2) prvky sa ***nemôžu*** opakovať

Počet takýchto variácií sa určuje podľa vzorca: $V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$

<u>Príklad 2:</u>

Daná je množina ***M = {a, b, c, d}***.
Z prvkov tejto množiny vytvorte ***variácie 2.triedy bez opakovania***. Vypočítajte ich počet.

<u>Riešenie:</u>

$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
$$V(2,4) = \frac{4!}{2!}$$
$$V(2,4) = 4.3$$
$$V(2,4) = 12$$
$$V(2,4) = \begin{Bmatrix} ab, ac, ad \\ ba, bc, bd \\ ca, cb, cd \\ da, db, dc \end{Bmatrix}$$

<u>Príklad 3:</u>

Do školského výboru zvolili 7 žiakov.
Koľkými spôsobmi sa dá z nich vybrať ***predseda, podpredseda, tajomník a pokladník***?

<u>Riešenie:</u>

Sú to variácie: n = 7, k = 4

$$V(4,7) = \frac{7!}{(7-4)!}$$
$$V(4,7) = \frac{7!}{3!}$$
$$V(4,7) = \frac{7.6.5.4.3!}{3!}$$
$$V(4,7) = 7.6.5.4$$
$$V(4,7) = 840$$

Funkcionári výboru sa dajú vybrať ***840*** spôsobmi.

<u>Príklad 4:</u>

Z koľkých rôznych prvkov môžeme vytvoriť ***240 variácií 2. triedy***?

<u>Riešenie:</u>

Sú to variácie: n = x, k = 2

$$V(2,x)=240$$
$$\frac{x!}{(x-2)!}=240$$
$$\frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!}=240$$
$$x(x-1)=240$$
$$x^2-x-240=0$$
$$(x-16)(x+15)=0$$
$$x_1=16$$
$$x_2=-15, nevyhovuje$$
$$K=\{16\}$$

Potrebujeme ***16*** prvkov.

Príklad 5:

Ak sa počet prvkov zväčší o 2, zväčší sa počet variácií 3. triedy o 384. Koľko je prvkov?

Riešenie:

$$V(3,x+2)-V(3,x)=384$$
$$\frac{(x+2)!}{(x-1)!}-\frac{x!}{(x-3)!}=384$$
$$(x+2)(x+1)x-x(x-1)(x-2)=384$$
$$x^3+3x^2+2x-x^3+3x^2-2x=384$$
$$6x^2=384$$
$$x^2=64$$
$$x^2-64=0$$
$$(x-8)(x+8)=0$$
$$x_1=8$$
$$x_2=-8 nevyhovuje$$

$$K=\{8\}$$

Prvkov je ***8***.   x – y

Príklad 6:

Koľko jedno až štvorciferných čísel možno zostaviť pomocou cifier 0,1,2,3 ak sa v žiadnom z čísel nijaká cifra nemá opakovať ?

Riešenie:

V(4,1) + V(4,2) + V(4,3) + V(4,4) = 64............keby medzi ciframi nebola 0
V(3,0) + V(3,1) + V(3,2) + V(3,3) =16............počet čísel s 0 na začiatku
Spolu tých čísel bude 64 –16 = ***48***

Úlohy

1. Ak sa počet prvkov zväčší o dva, zväčší sa počet variácií tretej triedy bez opakovania o 384. Koľko je prvkov? (8)

2. Vo vrecku je 6 rôznych lístkov označených číslicami 1 až 6. Koľkými rôznymi spôsobmi môžeme postupne, s prihliadnutím na poradie vybrať tri z nich, ak vybrané lístky sa do vrecka nevracajú ? (120 spôsobmi)

3. Počet trojčlenných variácií bez opakovania je 10 násobkom dvojčlenných variácií bez opakovania tej istej množiny prvkov. Koľko prvkov má táto množina? (12 prvkov)

4. V slovenskej hokejovej lige hrá 10 mužstiev. Hrá sa o zlaté, strieborné a bronzové medaily. Koľkými spôsobmi môžu byť rozdelené? (720)

5. Koľko rôznych trikolór môžeme vytvoriť z bielej, žltej, červenej, modrej a zelenej látky? Pruhy trikolór majú rovnakú šírku a zošívame ich vodorovne. (60)

6. O telefónnom čísle svojho spolužiaka vedel Peter len to, že je šesťmiestne, začína sedmičkou, neobsahuje dve rovnaké číslice a je deliteľné 25. Urči, koľko telefónnych čísel prichádza do úvahy. (420)

2. Variácie s opakovaním

Definícia:

Variácie k-tej triedy z n prvkov s opakovaním je ***každá usporiadaná k-tica prvkov***, vybraných z ***n-prvkovej*** množiny. V k-tici sa ***môžu prvky ľubovoľne opakovať***.

Poznámky: 1) ***záleží na poradí*** prvkov
2) prvky sa ***môžu*** opakovať

Počet takýchto variácií sa určuje podľa vzorca: $\mathbf{V'(k, n) = n^k}$

Príklad 7:

Vo vrecku je 6 rôznych lístkov označených číslicami 1 až 6. Koľkými rôznymi spôsobmi môžeme postupne, s prihliadnutím na poradie vybrať tri z nich, ak vybrané lístky sa do vrecka vracajú ?

Riešenie:

$V'(3, 6) = 6^3 = 216$

Kartičky môžeme z vrecka vybrať ***216*** spôsobmi.

Príklad 8:

Koľko rôznych telefónnych staníc možno zapojiť na telefónnu centrálu,
ak sú všetky čísla staníc 5-ciferné?

Riešenie:

$n = 10, \ k = 5$
$V'(k, n) = V'(5, 10) = \boldsymbol{10^5}$

Príklad 9:

Koľko môže byť týchto staníc, ak sa ich číslo nemôže začínať nulou?

Riešenie:

Počet čísel, ktoré sa začínajú nulou (0 . . . .) je $n = 10$ a $k = 4$
$V'(k, n) = V'(4, 10) = 10^4$

Počet čísel, ktoré sa nezačínajú nulou je
$V'(5, 10) - V'(4, 10) = 10^5 - 10^4 = \boldsymbol{90\,000}$.

Príklad 10:

Koľko znakov, ktoré sú zložené z 1 až 4 signálov môže obsahovať Morseova abeceda?

Riešenie:

n = 2 (• ; ,) : z jedného signálu ... k = 1 ... $V'(1, 2) = 2^1 = \boldsymbol{2}$
z 2 signálov ... k = 2 ... $V'(2, 2) = 2^2 = \boldsymbol{4}$
z 3 signálov ... k = 3 ... $V'(3, 2) = 2^3 = \boldsymbol{8}$
zo 4 signálov ... k = 4 ... $V'(4, 2) = 2^4 = \boldsymbol{16}$
spolu (z 1 ... 4 signálov) ... $V'(1, 2) + V'(2, 2) + V'(3, 2) + V'(4, 2) = 2 + 4 + 8 + 16 = \boldsymbol{30}$

Príklad 11:

Koľko rôznych päťciferných prirodzených čísel, väčších ako 30 000 môžeme napísať z číslic 0, 1, 2, 3?

Riešenie:

Tu je jasné, že ide o variácie s opakovaním, lebo máme k dispozícii štyri čísla a z nich máme vytvárať päťciferné čísla.
Každé číslo musí mať na prvom mieste číslicu tri a na ďalšie štyri miesta môžeme kombinovať hociktoré z číslic 0, 1, 2, 3.
Teda: $V'(4, 4) = 4^4 = 256$. Medzi týmito číslami je však aj číslo 30 000, ktoré nevyhovuje zadaniu príkladu.

Konečný výsledok je preto $256 - 1 = \boldsymbol{255}$

Úlohy

1. Koľko päťciferných čísel môžeme zostaviť z cifier 2, 3, 4, 6, 7, 9, ak sa cifry môžu opakovať? (7776 čísel)

2. V urne je 6 lístkov označených číslami 1 až 6. Koľkými spôsobmi s prihliadnutím na poradie môžeme vytiahnuť 3 z nich, pričom sa lístky do urny vracajú? (216 možností)

3. Koľko rôznych vrhov možno vykonať 4 kockami so stenami označenými jednou až šiestimi bodmi ? (1296 možností)

4. V istom kasíne možno staviť aj na uhádnutie troch čísel, ktoré vyjdú v troch za sebou idúcich hrách. V každej hre môže vyjsť číslo od 0 do 36. Ak uhádnete výsledok troch hier za sebou, vyplatia vám 48 000 - násobok vkladu. Oplatí sa staviť na všetky možné trojvýsledky (aký je počet všetkých trojvýsledkov) ? (50 653 trojvýsledkov, neoplatí sa)

5. Koľko štátnych poznávacích značiek, začínajúcich sa na BA môžeme vytvoriť, ak za tromi číslami nasledujú ešte dve písmená? (máme k dispozícii 27 písmen). (V´(3, 10) . V´(2, 27) = 729 000)

6. Na paneli je **r** žiariviek, z ktorých môže každá svietiť na zeleno, žlto alebo červeno. Určte, koľko rôznych stavov môže panel signalizovať . Koľko žiariviek by sme potrebovali, keby sme chceli rozlíšiť 50 rôznych stavov? ($V'(r,3)=3^r$; 4)

7. Kufrík má heslový zámok, ktorý sa otvorí, keď na každom z piatich kotúčov nastavíme správnu číslicu a týchto číslic je na každom kotúči deväť. Určte najväčší počet pokusov, ktoré je potrebné vykonať, ak chceme kufrík otvoriť. (59 049)

8. Máme 4 škatule s pastelkami. V každej škatuli je mnoho pasteliek jednej farby a žiadne dve škatule neobsahujú pastelky inej farby. Máme teda napríklad jednu so zelenými a jednu s modrými pastelkami. Koľko rôznych trojíc pasteliek môžeme vytvoriť? (64)

9. Určte počet päťciferných prirodzených čísel, zložených z cifier 6,7,8,9. Koľko z nich je menších ako 90 000? (1024; 768 = 3. 44)

10. Koľko rôznych päťciferných čísel môžeme vytvoriť z číslic 2 a 5 ? (32)

11. V množine prirodzených čísel riešte rovnicu: $V'(2, x) - x \cdot V'(2, 3) = 10$ (10)

12. Meno a priezvisko každého človeka bývajúceho v mestečku s 1 500 obyvateľmi začína jedným z 32 písmen. Dokážte, že aspoň dvaja obyvatelia mestečka majú rovnaký monogram. (1024)

3. Permutácie bez opakovania

Definícia:

Variácie n-tej triedy bez opakovania z n - prvkovej množiny nazývame ***permutácie***.

Počet všetkých permutácií z n prvkov budeme označovať **P(n).**

Pretože platí P(n) = V(n, n) = $\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$ = **n!** ... **$\forall$ n$\in$N : P(n)=n!**

<u>Poznámky:</u> 1) ***záleží na poradí*** prvkov
2) prvky sa ***nemôžu*** opakovať

<u>Príklad 12:</u>

Dané sú tri prvky a, b, c. Vytvorte z nich permutácie bez opakovania.

<u>Riešenie:</u> {***abc, acb, bac, bca, cab, cba***} ... P(3)= 3 ! = ***6***

<u>Príklad 13:</u>

Koľko rôznych päťciferných prirodzených čísiel možno napísať pomocou číslic 1,2,3,4,5, ak:
a) číslica sa v čísle použije len raz?
b) Koľko z napísaných čísiel sa bude začínať číslicou 5?
c) Koľko z napísaných čísiel bude párnych?

<u>Riešenie:</u>

a) P(5) = 5! = 5.4.3.2.1 = 120
b) P(4) = 4! = 4.3.2.1 =24
c) končiacich 2: P(4) = 4! =24
končiacich 4: P(4) = 4! = 24
spolu : S = 2.4! = 2.24 = ***48***

<u>Príklad 14:</u>

Štyri české a tri slovenské knihy treba usporiadať na poličke tak, aby boli zoradené najprv české a potom slovenské knihy. Koľkorakým spôsobom sa to dá urobiť?

<u>Riešenie:</u>

Usporiadanie českých kníh: P(4) = 4! =24
Usporiadanie slovenských kníh: P(3) = 3! = 6
N = P(4).P(3) = 24.6 = 144
Knihy sa dajú usporiadať ***144*** spôsobmi.

<u>Príklad 15:</u>

Pätnásti svadobčania sa nemohli dohodnúť, kto kde bude stáť na svadobnej fotografii.
Ženích navrhol, aby sa urobili všetky možné zostavy svadobčanov na fotografiách.
a) Koľko fotografií treba urobiť?
b) Koľko by fotografovanie trvalo, keby vyfotografovanie jednej fotky trvalo 10 sekúnd a fotografovalo by sa deň aj noc?

<u>Riešenie:</u>

a) P(15) = 15! = $1{,}307.10^{12}$ ... Treba urobiť $1{,}307.10^{12}$ fotografií.
b) t = $1{,}307.10^{12}.10$ s = $1{,}307.10^{13}$ s ... t = 414 377 rokov
Fotografovanie by trvalo ***414 377*** rokov.

Príklad 16:

Ak sa zväčší počet prvkov o 2, zväčší sa počet permutácií (bez opakovania) 42 krát.
Koľko prvkov na to potrebujeme?

Riešenie:

$P(x + 2) = 42.P(x)$ ... $(x + 2)! = 42.x!$ ... $(x + 2)(x +1)x! = 42x!/: x!$ ... $(x + 2)(x + 1) = 42$ ...
$x^2 + 3x +2 - 42 = 0$ ... $x^2 +3x – 40 = 0$ ... $(x – 5)(x + 8) = 0$ ... $x_1 = 5$ a $x_2= - 8$ nevyhovuje
K={5} Potrebujeme ***5*** prvkov.

Úlohy

1. V urne je vložených 6 lístkov označených 1, 2, ..., 6. Koľkými rôznymi spôsobmi je možné ich postupne vytiahnuť, ak sa lístky do urny nevkladajú a prihliadame na poradie ťahania lístkov? (720 spôsobov)
2. Do jedálne prišlo 7 detí. Koľkými možnými spôsobmi sa môžu postaviť do radu? (5040)
3. Koľkými spôsobmi môžeme uložiť 6 kníh v polici? (720)
4. Koľkými spôsobmi môže stáť v zástupe 5 vojakov A,B,C,D,E tak, aby vojak bol A bol prvý a vojak E posledný? (6- A a E sú stabilné, menia sa iba B,C,D)
5. Koľkými rôznymi spôsobmi možno usporiadať množinu čísel {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, ak má byť číslica 2 na treťom a číslica 9 na piatom mieste? (40 320)
6. V kvalifikačnej skupine na MS vo futbale je 5 dobrých mužstiev. Koľko rôznych poradí môže nastať? (120)
7. Z koľkých prvkov môžeme utvoriť 40 320 permutácií bez opakovania? (n=8)
8. V počítačovej hre je potrebné pozbierať v miestnosti 5 predmetov: kľúč, meč, obraz, prsteň a mincu. Záleží však na poradí, v akom jednotlivé predmety pozbierame, pri zlom poradí prídeme o život. Koľko je všetkých poradí? (120)
9. Koľkými spôsobmi sa dajú postaviť do rady 4 Angličania, 5 Francúzi a 3 Turci, ak osoby tej istej národnosti musia stáť vedľa seba? (3!.4!.5!.3!)
10. Na lavičke v parku sedí 5 chlapcov. Koľkokrát sa môžu presadiť, keď dvaja priatelia chcú sedieť vedľa seba? (24)
11. Známa je hra, pozostávajúca zo škatuľky 4 x 4, v ktorej je 15 štvorčekov 1 x 1 očíslovaných číslami 1, 2, 3, ..., 15 a jedno políčko je prázdne. Teraz nás nebude zaujímať, čo je cieľom hry. Stačí nám vedieť, že škatuľka je vždy otočená tak, aby názov hry bol hore a štvorčeky nemožno preklápať, ani otáčať. Určte koľko je možných rozložení 15 štvorčekov 1 x 1 v škatuľke? (20 922 789 888 000)
12. Koľkými spôsobmi môžeme postaviť 20 žiakov do radu pri nástupe na telocvik? (20!)
13. Koľkými spôsobmi môžeme postaviť do rady na poličku 10 rôznych slovenských kníh a 5 anglických tak, že najprv budú knihy slovenské a vedľa nich knihy anglické? (435 456 000)

14. Určte koľkými spôsobmi môže nastúpiť 10 táborníkov pri nástupe na rannú rozcvičku
    do radu (10!)
    do radu, v ktorej je Aleš na kraji (9!)
    do radu v ktorom Aleš a Zdeno nestoja vedľa seba (8.9!)

15. Určte koľkými spôsobmi sa v šesťmiestnej lavici môže posadiť 6 chlapcov, ak
    a) dvaja chcú sedieť vedľa seba (240)
    b) dvaja chcú sedieť vedľa seba a tretí chce sedieť na kraji (96)

4. Permutácie s opakovaním

Def:
Premutácie s opakovaním**.** n je počet prvkov uvažovanej množiny. Z toho n_1 je 1. druhu, n_2 je 2. druhu, ... n_k je k-teho druhu, pričom $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Každé usporiadanie prvkov nazývame permutáciou s opakovaním.

$$P'_{n1,n2,...nk}(n) = \frac{n!}{n_1!.n_2!...n_k!}$$

- na poradí prvkov záleží
- prvky sa môžu opakovať

Definícia:

Nech ***n*** je počet prvkov uvažovanej množiny, v ktorej ***1. druh*** sa vyskytuje ***n_1- krát***, ***2. druh*** sa vyskytuje ***n_2- krát***, ..., ***k-tý druh*** sa vyskytuje ***n_k- krát***, pričom $\boldsymbol{n_1 + n_2 + ... + n_k = n}$.
Každé takéto usporiadanie prvkov nazývame permutáciou s opakovaním.

Počet všetkých takýchto permutácií s opakovaním z ***n prvkov*** budeme označovať $\mathbf{P'_{n1,\, n2,\, ...,\, nk}\,(n)}$

a platí: $\mathbf{P'_{n1,\, n2,\, ...,\, nk}\,(n)} = \dfrac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$ **.**

Poznámky: 1) ***záleží na poradí*** prvkov
2) prvky sa ***môžu*** opakovať

Príklad 16:

Koľko permutácií s opakovaním možno vytvoriť z písmen slova OKOLO?

Riešenie:

Všetkých písmen je 5. ***O*** sa opakuje ***3-krát***, ***K*** sa opakuje ***1-krát***, ***L*** sa opakuje ***1-krát***, preto počet všetkých permutácií s opakovaním je

$P'_{3,1,1}\,(5) = \dfrac{5!}{3!.1!.1!} = 20$

1.

Príklad 17:

V krabičke je 10 farbičiek, z toho 4 rovnaké červené, 3 rovnaké modré, 2 rovnaké žlté a 1 zelená. Koľkými spôsobmi môžeme farbičky v krabičke usporiadať?

Riešenie: $P'_{4,3,2,1}(10) = \dfrac{10!}{4!.3!.2!.1!} = 12\,600$

Príklad 18:

Dané sú tri prvky a, b, c. Vytvorte permutácie s opakovaním, v ktorých sa „ a“ vyskytne 2 - krát,“ b“ raz a „c“ raz.

Riešenie: $P'_{2,1,1}(4) = \dfrac{4!}{2!.1!.1!} = 12$

$$P^{*}_{2,1,1}(4) = \begin{Bmatrix} aabc, aacb, acab, abca \\ bcaa, cbaa, caba, baca \\ baac, caab, acab, abac \end{Bmatrix}$$

Príklad 19:

Osem študentov má na internáte pripravené ubytovanie v troch izbách. Dve sú trojposteľové a jedna dvojposteľová. Koľko je spôsobov rozdelenia študentov do izieb?

Riešenie:

Prvá izba: $n_1 = 3$, druhá izba: $n_2 = 3$, tretia izba: $n_3 = 2$ ... $n = 3 + 3 + 2 = 8$

$P'_{3,3,2}(8) = \dfrac{8!}{3!.3!.2!} = 560$ **...** Existuje 560 spôsobov rozdelenia študentov do izieb.

Príklad 20:

Šesťciferný kód uzatvárania trezoru v banke je vytvorený z tých istých číslic ako číslo 926002.
Koľko je možností vytvorenia príslušného kódu?
Aký čas by trvalo zlodejovi vytočiť všetky možnosti, ak vytočiť jeden kód mu trvá 5 sekúnd?

Riešenie:

0 ~ $n_1 = 2$, **2** ~ $n_2 = 2$, **6** ~ $n_3 = 1$, **9** ~ $n_4 = 1$ ... $n = 6$

$P'_{2,2,1,1}(6) = \dfrac{6!}{2!.2!.1!.1!} = 180$

t = 180.5sec. = 900 sec. = ***15 min***út

Možností je 180 a zlodejovi by to trvalo 15 minút (ak správny je až posledný vytočený kód).

Úlohy

1. Koľko rôznych aj bezvýznamných slov možno vytvoriť z písmen slova MATEMATIKA ? (151 200)
2. Malý Janko má 4 rovnaké žlté kocky a 3 rovnaké modré kocky.
   Koľko rôznych farebných hadov z nich môže urobiť? (35)
3. Koľko rôznych 11-písmenkových slov možno vytvoriť zo slova ABRAKADABRA? (83 160)
4. Určte koľkými spôsobmi je možné zrovnať do radu 2 sivé, 3 modré a 4 čierne kocky ? (1 260)
5. Určte počet usporiadaní týchto šiestich prvkov: a ,a, a, b ,b, c. (60)
6. Určte počet všetkých päťciferných prirodzených čísel, ktoré je možné zostaviť z číslic 5 a 7, ak má v každom z nich byť číslica 5
   a) práve trikrát (10)
   b) najviac trikrát ($P'_{3,2}(5) + P'_{2,3}(5) + P'_{1,4}(5) + P'_5(5) = 10 + 10 + 5 + 1 = 26$)
   c) aspoň trikrát ($P'_{3,2}(5) + P'_{4,1}(5) + P'_5(5) = 10 + 5 + 1 = 16$)
7. Zo siedmych guliek, z ktorých sú 4 modré, 1 biela, 1 červená, 1 zelená, máme vybrať a položiť do radu 5 guliek. Koľkými spôsobmi to môžeme urobiť? (135)
8. Traja chlapci a štyri dievčatá. Koľkými spôsobmi je možné ich podľa pohlavia postaviť vedľa seba? (35)
9. Koľko znakov môžeme vytvoriť z dvoch čiarok a štyroch bodiek? (15)
10. Určte počet všetkých päťciferných prirodzených čísel, ktoré sa dajú zostaviť z číslic 5 a 7, ak v každom z nich má byť číslica 5:
    a) práve trikrát (10)
    b) najviac trikrát (26)
    c) aspoň trikrát (16)

5. Kombinácie bez opakovania

Definícia:

Nech je daná ***konečná*** množina ***M***, ktorá má ***n prvkov***. ***Každá podmnožina*** tejto množiny, ***ktorá má k prvkov***, sa nazýva ***kombinácia k-tej triedy z n prvkov bez opakovania***.

$$\mathbf{n, k \in N_0 : \; k \leq n}$$

<u>Poznámky:</u> 1) ***nezáleží na poradí*** prvkov
2) prvky sa ***nemôžu*** opakovať

Počet takýchto kombinácií sa určuje podľa vzorca: $C(k,n) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!.k!}$

$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!.k!}$ ... nazývame ***kombinačné číslo***

Príklad 21:

Určte, koľkými rôznymi spôsobmi sa dá vypísať tiket športky, ak tipujeme šesť čísel zo 49.
Pri akom Jackpote by sa už oplatilo vsadiť toľko tiketov, aby sme zaručene vyhrali 1. cenu ?
Cena jedného typu je 0,70 €.

Riešenie:

V športke nie je dôležité, či zaškrtneme najprv číslo 12 alebo 64, a preto to budú kombinácie bez opakovania šiestej triedy zo 49 prvkov.

$$C(6,49) = \binom{49}{6} = \frac{49!}{43!.6!} = 13983816$$

13 983 816 x 0,70 = ***9 788 671,2 €***
Hrozí tu však to, že aj ďalší typujúci s minimálnym vkladom môže vyhrať 1. cenu, čím sa celá suma delí na polovicu.

Príklad 22:

V rovine je 6 rôznych bodov (žiadne 3 neležia na jednej priamke).
Koľko rôznych úsečiek dostaneme pospájaním všetkých týchto bodov navzájom?

Riešenie:

$$C(6.2) = \binom{6}{2}$$

$$C(6.2) = \frac{6!}{4!2!}$$

Dostaneme ***15 rôznych úsečiek***.

$$C(6.2) = \frac{6.5}{2}$$

$$C(6.2) = 15$$

Príklad 23:

Na kružnici je rozmiestnených 9 bodov.
Koľko existuje rôznych trojuholníkov, ktorých vrcholy sú tieto body?

Riešenie:

$$C(3,9) = \binom{9}{3}$$

$$C(3,9) = \frac{9!}{6!3!}$$

Existuje ***84 takýchto trojuholníkov***.

$$C(3,9) = \frac{9.8.7.6!}{6!6}$$

$$C(3,9) = \frac{9.8.7}{6}$$

$$C(3,9) = 84$$

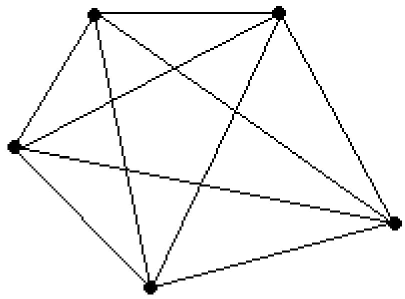
Príklad 24:

a) Odvoďte vzorec pre počet N uhlopriečok vypuklého - konvexného n-uholníka!
b) Koľko uhlopriečok má konvexný 10-uholník?

Riešenie:

Počet priamok, ktoré spájajú 2 ľubovoľné vrcholy konvexného *n*-uholníka je $C(2, n)$.
Aby sme zistili počet uhlopriečok N, odčítame od tohto počtu počet strán *n*-uholníka.

$$a)\, N = \binom{n}{2} - n = \frac{n!}{(n-2)!2!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$



$$N = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$b)\, N = \binom{10}{2} - 10 = 45 - 10 = 35$$

$$N = 35$$

Konvexný ***10-uholník má 35 uhlopriečok***.

Príklad 25:

Na pomaturitnom stretnutí po rokoch si účastníci štrngli pohármi. Uskutočnilo sa 253 štrngnutí. Koľko účastníkov bolo na stretnutí?

Riešenie:

$$C(2, x) = 253$$

$$\binom{x}{2} = 253$$

$$\frac{x!}{(x-2)!.2!} = 253$$

$$\frac{x(x-1)}{2} = 253 / .2$$

$$x^2 - x = 506$$

$$x^2 - x - 506 = 0$$

$$(x-23)(x+22) = 0$$

$$x_1 = 23$$

$$x_2 = -22 \, nevyhovuje$$

$$K = \{23\}$$

Na stretnutí bolo 23 účastníkov.

Príklad 26:

Koľko priamok je určených šiestimi bodmi, ak tri z nich ležia na jednej priamke.

Riešenie:

C(2,6) – C(2,3) + 1= 15 – 3 +1=***13***

<u>Príklad 27:</u>

Určte, koľkými spôsobmi sa dá na šachovnici (8x8) vybrať
a) trojica políčok,
b) trojica políčok neležiacich v tom istom stĺpci

<u>Riešenie:</u>

a) vyberáme 3 políčka zo 64, nezáleží nám na poradí výberu, nemôžeme vybrať dvakrát to isté políčko (nebola by to trojica), ide teda o kombinácie bez opakovania

$$C_3(64) = \binom{64}{3} = \frac{63!}{61!.3!} = 41664$$

b) Trojíc, ktoré ležia v jednom stĺpci, je $C_3(8)$, stĺpcov máme 8, trojice, ktoré neležia v jednom stĺpci vypočítame keď od všetkých možností odpočítame tie možnosti, keď

ležia v jednom stĺpci. $C_3(64) - 8.C_3(8) = 41664 - 8.\binom{8}{3} = 41664 - 8.\frac{8!}{5!.3!} = 41216$

<u>Príklad 28:</u>

V obchode predávajú 3 druhy sirupov – jablkový, malinový, pomarančový. Koľkými spôsobmi možno kúpiť 4 fľaše sirupu?

- nezáleží na poradí : nie sú to variácie
- môžu sa opakovať : sú to kombinácie

J	4	0	0	3	3	0	1	1	0	2	2	0	2	1	1
B	0	4	0	1	0	3	3	0	1	2	0	2	1	2	1
P	0	0	4	0	1	1	0	3	3	0	2	2	1	1	2

15 možností

máme kúpiť 4 fliaš $k = 4$
vyberáme z 3 druhov $n = 3$

$$C'(k,n) = C(k, n+k-1)$$

$$C'(4,3) = C(4, 3+4-1) = C(4,6) = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!.4!} = \frac{6.5.4!}{2.4!} = 15$$

Úlohy

1. Koľkými spôsobmi možno vytiahnuť 8 z 32 hracích kariet, keď na ich poradí nezáleží ? (10 518 300)
2. Skúšajúci má pripravených 20 príkladov z aritmetiky a 30 z geometrie. Na písomku chce dať:
   a) 3 aritmetické a 2 geometrické príklady (495 900)
   b) 1 aritmetický a 2 geometrické príklady (8 700)
   Koľko má možností zostavenia rôznych zadaní?

3. V rovine je 10 ľubovoľných bodov. Koľko najviac kružníc je nimi určených ? (120)

4. Zo siedmych mužov a štyroch žien sa má vybrať šesťčlenná skupina, v ktorej sú aspoň tri ženy. Určte, koľkými spôsobmi sa dá výber urobiť. (161)

5. Na kružnici sú dané body $A_1, A_2, ..., A_{12}$. Vypočítajte:
   a) počet tetív určených týmito bodmi, (66)
   b) počet trojuholníkov s vrcholmi v týchto bodoch, (220)
   c) počet konvexných štvoruholníkov s vrcholmi v týchto bodoch. (495)

6. Na brigáde bolo 15 chlapcov a 20 dievčat. Koľko rôznych služieb možno určiť, ak sa majú skladať z 2 chlapcov a 1 dievčaťa ? (2 100)

7. Cestovné lístky dopravného podniku majú 9 očíslovaných okienok. Koľkými spôsobmi môžu byť nastavené navzájom rôzne kódy u označujúcich strojčekoch, ak sa 3 alebo 4 okienka? (210)

8. Určte všetky n, pre ktoré platí $C(2, n) = 28$ (8)

9. Určte, koľkými spôsobmi môžeme náhodným výberom vybrať 4 výrobky z 30 kusov. (27 405)

10. Určte, koľko rôznych priamok je určených vrcholmi kocky. (28)

11. V podkroví je 6 bielych a 5 čiernych párov ponožiek.
    Koľkými spôsobmi je možné vybrať dve ponožky ? (231)

12. Koľko priamok je určených ôsmimi bodmi, ak štyri z nich ležia na jednej priamke ? (23)

13. Koľko priamok je určených devätnástimi bodmi, ak šesť z nich leží na jednej priamke ? (157)

14. Hokejové družstvo má 20 hráčov – 13 útočníkov, 5 obrancov a 2 brankárov. Určte, koľko zostáv by mohol tréner vytvoriť, ak zostava má mať 3 útočníkov, 2 obrancov a 1 brankára. (5 720)
15. Na maturitnom večierku je 15 chlapcov a 12 dievčat. Určte, koľkými spôsobmi sa z nich dajú vybrať 4 tanečné páry. (16 216 200)

6. Kombinácie s opakovaním

Definícia:

Kombinácie k-tej triedy z n prvkov (s opakovaním) je každá k-tica prvkov vybraných z n-prvkovej množiny (v k-tici nezáleží na poradí prvkov a môžu sa v nej prvky ľubovoľne opakovať).

Poznámky: 1) ***nezáleží na poradí*** prvkov
2) prvky sa ***môžu*** opakovať

Počet takýchto kombinácií sa určuje podľa vzorca: $C'(k,n)=\binom{n+k-1}{k}$

Príklad 29:

V cukrárni majú 5 druhov zmrzlín. Otec chce pre rodinu kúpiť 15 porcií.
Koľkými spôsobmi môže zmrzlinu kúpiť?

Riešenie:

$$C'(15,5)=\binom{5+15-1}{15}$$
$$C'(15,5)=\binom{19}{15}$$
$$C'(15,5)=\frac{19!}{4!.15!}$$
$$C'(15,5)=\frac{19.18.17.16}{4.3.2.1}$$
$$C'(15,5)=3876$$

Otec môže zmrzlinu kúpiť ***3 876*** spôsobmi.

Príklad 30:

Koľko potrebujeme prvkov, aby sme z nich mohli vytvoriť 15 kombinácií 2.triedy s opakovaním?
Riešenie:

$$C'(2,x)=15$$
$$\binom{x+2-1}{2}=15$$
$$\binom{x+1}{2}=15$$
$$\frac{(x+1)!}{(x-1)!.2}=15$$
$$\frac{(x+1)x}{2}=15/.2$$
$$x^2+x=30$$
$$x^2+x-30=0$$
$$(x-5)(x+6)=0$$
$$x_1=5$$
$$x_2=-6\,\mathit{nevyhovuje}$$

K = {5} ... Potrebujeme ***5*** prvkov.

Príklad 31:

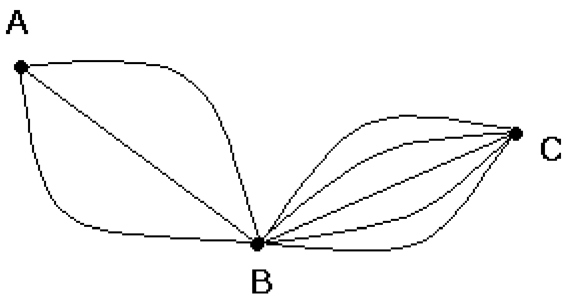
V obchode majú 3 druhy kávy A, B, C v balíkoch po 50 g.
Koľkými spôsobmi možno kúpiť 200 g kávy (4 balíčky)?

Riešenie:

$$C'(4,3)=\binom{3+4-1}{4}=15$$

Príklad 32:

Z mesta A do mesta B vedie **m** ciest, z mesta B do mesta C **n** ciest.
Koľko ciest vedie z A do C cez B?



Riešenie:

A → B 3 cesty
B → C 5 ciest
A → C 3.5 = 15 ciest

Z mesta A do mesta C cez mesto B vedie ***m. n*** ciest.

Úlohy

1. Pán Jozef si chce v obchode kúpiť 6 čokolád. V obchode majú 3 druhy. Koľká má možností ? (28)
2. Klenotník vyberá do prsteňa 4 drahokamy. K dispozícií má rubíny, smaragdy a zafíry. Koľko má možností ? (15)
3. Pán Karfiol dostane od zamestnávateľa tri nové autá a môže si vybrať zo šiestich farieb. Koľko má možností ? (56)
4. Pán Telekom mieni vybaviť firmu siedmimi mobilnými telefónmi a má na výber z piatich druhov. Koľko má možností ? (330)
5. Vo vrecku sú červené, modré a zelené guľky. Guľky rovnakej farby sú nerozlíšiteľné. Určte, koľkými spôsobmi možno vybrať 5 guliek, ak vo vrecku je aspoň 5 guliek rovnakej farby. (21)
6. Určte počet kvádrov, ktorých dĺžky hrán sú prirodzené čísla menšie ako 11. Určte, koľko z nich je kociek. (220; 10)
7. Určte počet všetkých trojuholníkov, z ktorých žiadne dva nie sú zhodné a ktorých každá strana má dĺžku vyjadrenú jedným z čísel 4, 5, 6, 7. (20)
8. Určte počet všetkých trojuholníkov, z ktorých žiadne dva nie sú zhodné a ktorých každá strana má dĺžku vyjadrenú jedným z čísel 4, 5, 6, 7, 8, 9. (53)

9. V sade 32 kariet je každá z hodnôt kariet - sedmička, osmička, deviatka, desiatka, dolník, horník, kráľ a eso - štyrikrát. Karty rovnakej hodnoty sa líšia farbou - červeň, zeleň, guľa, žaluď. Určte, koľkými spôsobmi možno vybrať 4 karty, ak je dôležitá:
   a) len farba jednotlivých kariet (35)
   b) len hodnota jednotlivých kariet (330)

KOMBINAČNÉ ČÍSLA

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$ ... nazývame ***kombinačné číslo***

VLASTNOSTI KOMBINAČNÝCH ČÍSEL $\binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{10}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n \qquad \binom{5}{1} = 5$$

$$\binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{6}{6} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{6}{2} = \binom{6}{4}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$$

PASCALOV TROJUHOLNÍK

$$\begin{array}{lccccccccc}
n = 0 & & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
n = 1 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
n = 2 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
n = 3 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
n = 4 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

PASCALOV TROJUHOLNÍK - vlastnosti

Platí : $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

alebo

$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$

Súčet kombinačných čísel ležiacich vedľa seba sa rovná kombinačnému číslu ležiacemu pod nimi.

<u>Príklad 33:</u>

Zapíšte jedným kombinačným číslom:

a) $\binom{10}{4}+\binom{10}{5}$ b) $\binom{13}{2}+\binom{13}{10}$ c) $\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}$

<u>Riešenie:</u>

a) $\binom{10}{4}+\binom{10}{5}=\binom{11}{5}$ b) $\binom{13}{2}+\binom{13}{10}=\binom{13}{2}+\binom{13}{3}=\binom{14}{3}$

c) $\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}=\binom{7}{4}+\binom{7}{5}=\binom{8}{5}$

BINOMICKÁ VETA

∀ a, b∈ R, ∀ n∈ N:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+....+\binom{n}{n-1}a\ b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

$$(a-b)^n=\binom{n}{0}a^n+(-1)^1.\binom{n}{1}a^{n-1}b+(-1)^2.\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+(-1)^3.\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+....+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}a\ b^{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}b^n$$

<u>Príklad 34:</u>

Pomocou binomickej vety dokážte , že pre ∀ **n** ∈**N** platí :

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$$

Riešenie:

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}.1^n + \binom{n}{1}.1^{n-1}.1^1 + \binom{n}{2}.1^{n-2}.1^2 + \ldots + \binom{n}{n}.1^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Príklad 35:

Vypočítajte 10-člen binomického rozvoja : $(2x - y)^{15}$

Riešenie:

10. člen = $\binom{15}{9}.(2x)^{15-9}.(-y)^9 = \frac{15!}{6!.9!}.(2x)^6.(-y)^9 = \frac{15.14.13.12.11.10.9!}{6.5.4.3.2.9!}.2^6.x^6.(-1)^9.y^9 =$

$= -13.35.64.x^6.y^9 =$ ***$-29\,120.x^6.y^9$***

Príklad 36:

Ktorý člen binomického rozvoja $(5 - 2x)^7$ obsahuje $\mathbf{x^4}$?

Riešenie:

k-tý člen = $\binom{7}{k-1}.5^{7-(k-1)}.(-2x)^{k-1} = \binom{7}{k-1}.5^{8-k}.(-2)^{k-1}.x^{k-1}$ ... $x^{k-1} = x^4 \Rightarrow k - 1 = 4 \Rightarrow \mathbf{k = 5}$