

# Geometría casi-compleja

**Santiago Pareja Pérez**

Trabajo de fin de grado de Matemáticas  
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Luis Ugarte Vilumbrales  
1 de diciembre de 2022



**Universidad**  
Zaragoza



# Abstract

By analogy with the definition of “real smooth manifold”, we can define the concept of *complex manifold*: we just need to substitute  $\mathbb{R}^n$  by  $\mathbb{C}^n$ , and smoothness by holomorphicity. Since we can identify  $\mathbb{C}^n$  with  $\mathbb{R}^{2n}$  and holomorphic functions are smooth, every complex manifold of dimension  $n$  is, in particular, a real smooth manifold of dimension  $2n$ . This naturally leads to the question: when does the reverse implication hold true? That is, which real smooth manifolds admit a compatible complex structure?

In 1947, a little over a decade after Hassler Whitney proved that every smooth manifold admits a compatible real-analytic structure, Heinz Hopf posed this very same problem. Immediately after, he gave some counterexamples; in fact, infinitely many of them. And among those examples, there were the spheres  $\mathbb{S}^4$  and  $\mathbb{S}^8$ . But the missing link begs the question, still unanswered as of today: does  $\mathbb{S}^6$  admit a complex structure? Thus, the *Hopf problem for the 6-sphere* was born.

In order to get closer to answering these conundrums, we need to study the properties that a complex manifold induces upon its underlying real structure. By considering the differences between the *holomorphic* tangent bundle  $TM$  of a complex manifold and the tangent bundle  $T^{\mathbb{R}}M$  of its underlying real smooth manifold, we reach the definition of *almost complex structure*, which is a “way of multiplying by  $i$ ” on a real manifold. In particular, it is a  $(1, 1)$ -tensor field, which squares to minus the identity on each fiber.

Since accepting an almost complex structure is a necessary condition for the existence of a complex structure on the manifold, we can refine the aforementioned question: given a  $2n$ -dimensional smooth real manifold endowed with an almost complex structure, when does there exist an  $n$ -dimensional complex manifold—with the same underlying real structure—that induces it? That is, which almost complex structures are *integrable* to an actual complex manifold?

An almost complex structure  $J$  is an endomorphism on each fiber of the tangent bundle, so we want to study its eigenspaces. But since it squares to minus the identity, its eigenvalues will be  $\pm i$ , and (if our manifold isn’t already known to be complex) each tangent space is just a vector space over  $\mathbb{R}$ —we don’t have square roots of  $-1$ . We can proceed nonetheless, by *complexifying* the tangent bundle, formally extending the scalars of each fiber from  $\mathbb{R}$  to  $\mathbb{C}$ . Then,

$$T^{\mathbb{C}}M = T^{(1,0)}M \oplus T^{(0,1)}M,$$

with the terms being the *complexified* tangent bundle and the eigenspaces of  $J$  associated to the eigenvalues  $i$  and  $-i$ , respectively.

We study what happens, in this process, when our manifold is already known to be complex. The short answer is that  $T^{(1,0)}M$ , which we can identify with the non-complexified tangent bundle  $TM$ , is then closed under the Lie bracket of vector fields:

$$[\Gamma(T^{(1,0)}M), \Gamma(T^{(1,0)}M)] \subseteq \Gamma(T^{(1,0)}M).$$

Equivalently, the *Nijenhuis tensor*  $N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$  of the almost complex structure  $J$  vanishes everywhere. This is, in fact, a *characterization* of integrability for almost complex structures. Such is the claim of the Newlander-Nirenberg Theorem, which we prove in the case where the manifold is real analytic.

We end our first chapter with some direct corollaries, which show that any orientable real surface embedded in  $\mathbb{R}^3$  admits a compatible complex structure.

After that, we turn our view to study some manifolds with well-behaved properties, which will make the process of studying the intricacies of the problem more tractable. Those are *Lie groups* and *nilmanifolds*. We restrict ourselves to compact nilmanifolds in dimension 4, where we have a complete classification: the torus  $\mathbb{T}^4$ , which admits a Kähler metric; the Kodaira-Thurston manifold  $KT$ , which admits complex and symplectic structures, but not a Kähler one; and filiform 4-nilmanifolds, which don't admit complex structures, but admit symplectic ones. By using deep theorems in nilmanifold cohomology, pluriharmonic analysis and Hodge theory, we construct an argument to prove the latter non-existence property.

In between, we explore the surface of topics such as the relationship between Lie groups and Lie algebras, the classification of nilpotent Lie algebras, the de Rham's cohomology of a smooth manifold, Kähler metrics, the Poincaré duality, and the deep theorems connecting them.

Finally, we comment on some recent results of Fernandez, Shin, and Wilson [FSW21], where the theory of nilpotent Lie Algebras along with a mix of heuristics and trial-and-error is used in order to construct families of almost-complex structures whose Nijenhuis tensor can be made arbitrarily small, but not zero.

Furthermore, it was known—in the literature of the field—that three of the examples they give don't admit any complex structure, by topological reasons; by algebraic reasons, the other one doesn't admit *left-invariant* complex structures. In fact, their first example is a filiform 4-manifold, which we prove not to be complex in this text.

We end the main part of the text by giving an extension of our own, in which we prove that for every  $n \geq 2$  there exists a compact nilmanifold of real dimension  $2n$  which doesn't accept any left-invariant integrable almost-complex structure, but accepts an “arbitrarily close to integrable” one (in the sense of having a small Nijenhuis tensor).

As encore, we give a quick run-down on some related and deeply interesting topics, mainly the Dolbeault cohomology of a complex manifold and the Hodge decomposition of a compact Kähler manifold.

# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>1. Teoría general</b>	<b>1</b>
1.1. Variedades complejas y casi-complejas . . . . .	1
1.1.1. ¿Qué variedades suaves admiten estructura compleja? . . . . .	2
1.1.2. Variedades casi-complejas . . . . .	4
1.2. El Teorema de Newlander-Nirenberg . . . . .	7
1.2.1. Distribuciones y Teorema de Frobenius . . . . .	7
1.2.2. Demostración del caso analítico real . . . . .	8
1.2.3. Integrabilidad de superficies casi-complejas . . . . .	9
<b>2. Grupos de Lie y nilvariedades</b>	<b>11</b>
2.1. Grupos y álgebras de Lie . . . . .	11
2.2. Álgebras de Lie nilpotentes y nilvariedades . . . . .	14
<b>3. Nilvariedades compactas</b>	<b>15</b>
3.1. Clasificación en dimensión 4 . . . . .	15
3.1.1. Cohomología de de Rham . . . . .	16
3.1.2. Variedades Kähler . . . . .	17
3.1.3. Demostraciones . . . . .	19
3.2. Variedades casi-complejas con tensor de Nijenhuis pequeño . . . . .	21
3.2.1. Resumen del artículo . . . . .	21
3.2.2. Extensión a dimensión arbitraria . . . . .	21
<b>4. Comentarios finales</b>	<b>25</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>27</b>
<b>Apéndice A. Definiciones básicas de geometría diferencial</b>	<b>29</b>
A.1. Variedades topológicas y suaves . . . . .	29
A.2. El fibrado tangente . . . . .	30
A.3. Campos vectoriales y corchete de Lie . . . . .	31
A.4. Fibrado cotangente y formas diferenciales . . . . .	32
A.5. Álgebras tensorial y exterior . . . . .	32
A.6. Definiciones técnicas de geometría diferencial . . . . .	34
<b>Apéndice B. Álgebras de Lie reales nilpotentes de dimensión 6</b>	<b>37</b>



# Capítulo 1

## Teoría general

Este trabajo asume cierta familiaridad con las definiciones de geometría diferencial. Sin embargo, para intentar hacerlo más accesible, hemos incluido un pequeño apéndice [A] donde se dan las ideas y definiciones más importantes. Recomendamos consultarlo. Las principales obras de referencia para los temas de geometría compleja han sido [Voi02, cap. 2; WG08, cap. 1].

### 1.1. Variedades complejas y casi-complejas

Del mismo modo que las variedades diferenciables extienden las herramientas y métodos del análisis real a espacios más abstractos, queremos una noción que nos permita extender el análisis complejo a variedades topológicas. Para ello, queremos que las cartas tengan como codominio  $\mathbb{C}^n$ . Podemos identificar  $\mathbb{C}^n$  con  $\mathbb{R}^{2n}$  de modo canónico ( $a + bi \mapsto (a, b)$ , componente a componente), luego la variedad topológica subyacente deberá tener dimensión real  $2n$ . Además, la condición de compatibilidad entre cartas será la natural en el ámbito complejo: la holomorfía.

Esto propicia las siguientes definiciones, todas ellas análogas a las reales [A.4]:

**Definición 1.1.** Sean  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  cartas complejas sobre una variedad topológica  $M$  de dimensión  $2n$ ; esto es, homeomorfismos de los abiertos  $U$  y  $V$  de  $M$  con abiertos de  $\mathbb{C}^n$ . Se dice que las cartas son **holomorfalemente compatibles** si el cambio de cartas es un biholomorfismo<sup>1</sup>:

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{C}^n \longrightarrow \varphi(U \cap V) \subseteq \mathbb{C}^n \quad \text{biholomorfismo.}$$

**Definición 1.2.** Un **atlas holomorfo** sobre un espacio topológico  $M$  de dimensión  $2n$  es una colección de cartas complejas  $\mathcal{A} := \{\varphi_i : U_i \subseteq M \xrightarrow{\cong} \hat{U}_i \subseteq \mathbb{C}^n\}_{i \in I}$  recubriendo  $M$  tal que todas las cartas son holomorfalemente compatibles entre sí.

**Definición 1.3.** Una **variedad compleja** de dimensión (compleja)  $n$  es un par  $(M, \mathcal{A})$ , donde  $M$  es una variedad topológica de dimensión  $2n$  y  $\mathcal{A}$  es un atlas holomorfo sobre  $M$ .

**Observación 1.4.** En abiertos de  $\mathbb{C}^n$ , las funciones holomorfas son analíticas, y viceversa. Por lo tanto, una variedad compleja  $(M, \mathcal{A})$  de dimensión  $n$  es, en particular, una variedad analítica real de dimensión  $2n$ : si  $\varphi$  es una carta de  $\mathcal{A}$  y  $\kappa : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  es la identificación canónica,  $\kappa \circ \varphi$  será una carta de un atlas analítico  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ , y  $(M, \mathcal{A}_{\mathbb{R}})$  será una variedad analítica real.

Del mismo modo, se pueden considerar la estructura diferenciable suave inducida sobre  $M$ , o la estructura diferenciable  $C^k$  inducida sobre  $M$ .

La holomorfía es una condición mucho más fuerte<sup>2</sup> que la diferenciabilidad o la analicidad real, así que es razonable preguntarse cuando se cumple el recíproco. Esto es: ¿qué variedades suaves admiten estructura compleja?

<sup>1</sup>Una aplicación holomorfa cuya inversa es también holomorfa.

<sup>2</sup>Las condiciones de Cauchy-Riemann son más restrictivas de lo que a priori se podría pensar, y llevan a resultados como el Teorema de Liouville (cualquier función holomorfa y acotada cuyo dominio sea todo  $\mathbb{C}$  es constante).

### 1.1.1. ¿Qué variedades suaves admiten estructura compleja?

A priori, podríamos pensar que cualquier variedad suave de dimensión adecuada va a poder ser dotada de una estructura compleja compatible; al fin y al cabo, Whitney demostró en 1936 que cualquier variedad suave admite una estructura analítica real compatible<sup>3</sup>, y sabemos por análisis complejo que una función en un abierto complejo es analítica compleja si y solo si es holomorfa.

Hopf planteó en 1947 si el resultado análogo era cierto para estructuras complejas; esto es, si cualquier variedad suave y orientable<sup>4</sup> de dimensión real par admitía estructura compleja. En el mismo artículo da una respuesta negativa, construyendo infinitos contraejemplos, entre ellos las esferas  $\mathbb{S}^4$  y  $\mathbb{S}^8$ . El hueco entre ambas da pie, implícitamente, al *Problema de Hopf* para la esfera  $\mathbb{S}^6$ : ¿admite  $\mathbb{S}^6$  estructura compleja?

Desde entonces, se ha demostrado que las esferas  $\mathbb{S}^{2k}$  con  $k \geq 5$  no son complejas (como consecuencia de que las únicas esferas paralelizables<sup>5</sup> son  $\mathbb{S}^1$ ,  $\mathbb{S}^3$  y  $\mathbb{S}^7$ ), pero aún no se sabe si la 6-esfera admite o no estructura compleja. Este es el único caso que queda por resolver, entre las esferas; la esfera  $\mathbb{S}^2$ , que es la que nos faltaba por comentar, es compleja por ser una superficie real orientable embebible en  $\mathbb{R}^3$  (como demostraremos en el apartado 1.2.3).

Se puede encontrar una introducción histórica a dicho problema, así como citas para los resultados históricos, en [Agr+18].

**Observación 1.5.** De hecho, no solo existen variedades reales que no admiten ninguna estructura compleja, sino que también existen variedades reales que admiten infinitas estructuras complejas no biholomorfas entre sí. Además, muchas veces dichas estructuras complejas dependen de parámetros continuos, y se puede dotar por lo tanto de estructura geométrica al espacio de posibles estructuras. Surgen así *espacios de móduli*, de gran interés en geometría analítica y varias áreas relacionadas. Su estudio está muy fuera del alcance de este trabajo.

Esta situación recuerda a la de las variedades topológicas. Existen variedades que admiten infinitas estructuras diferenciables (como los  $\mathbb{R}^4$  exóticos y las esferas exóticas), y también existen variedades que no admiten ninguna estructura diferenciable (como la variedad  $E_8$  de Freedman, que surge de la obstrucción de Kirby-Siebenmann; a muy grandes rasgos, se debe a que las variedades suaves son siempre triangulables, mientras que las topológicas pueden no serlo).

Sin embargo, esto solo contesta a parte de nuestra pregunta; hemos podido responder que *no todas* las variedades van a admitir estructura compleja, pero nos falta por determinar *cuáles sí* van a hacerlo. Para ello, vamos a querer estudiar qué propiedades de las variedades complejas se reflejan en su estructura diferenciable real.

Recordemos que en [A.10] hemos descrito los espacios tangentes a una variedad suave. En variedades complejas, tenemos un concepto análogo: el espacio tangente *holomorfo* en un punto  $p$  es una copia de  $\mathbb{C}^n$  «pegada» a nuestra variedad en el punto. Lo más importante que saber al respecto es que la diferencial de un biholomorfismo  $F: M \rightarrow N$  en un punto  $p$  es un isomorfismo  $\mathbb{C}$ -lineal entre los espacios tangentes  $T_p M$  y  $T_p N$  [A.13], y que  $T_p \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$  [A.43].

No nos va a ser relevante la construcción formal, pero la incluimos por completitud. Es análoga a [A.40], sustituyendo  $\mathbb{R}^{2n}$  por  $\mathbb{C}^n$  y suavidad por holomorfía.

**Definición 1.6.** El *espacio tangente holomorfo*  $T_p M$  a una variedad compleja  $M$  en  $p$  es el conjunto de todas las derivaciones del  $\mathbb{C}$ -álgebra de gérmenes de funciones holomorfas en  $p$ .

Del mismo modo, análogamente a la definición A.15 se define el *fibrado tangente holomorfo*. Ahora bien, como la estructura compleja de  $M$  nos induce a su vez una estructura suave real, esto nos da dos conceptos a comparar. Vamos a fijar la notación:

<sup>3</sup>Por «compatibilidad» nos vamos a referir a la siguiente noción: un atlas analítico  $\mathcal{A}$  es compatible con un atlas suave  $\mathcal{B}$  si el atlas maximal suave que contiene a  $\mathcal{A}$  es el mismo que el que contiene a  $\mathcal{B}$ . Es decir: todas las cartas de  $\mathcal{A}$  son suavemente compatibles con todas las de  $\mathcal{B}$ .

<sup>4</sup>La orientabilidad se asume ya que cualquier variedad compleja es orientable. Esto se debe a que los biholomorfismos preservan la orientación, y de hecho es más fuerte: existe una elección canónica de orientación, inducida por la de  $\mathbb{C}^n$ .

<sup>5</sup>Una variedad se dice *paralelizable* si admite un marco suave global.



**Notación.** Sea  $M$  una variedad compleja. Sea  $M_{\mathbb{R}}$  la variedad suave real subyacente a  $M$ .

- Denotamos por  $TM$  al **fibrado tangente holomorfo** a  $M$ . Sus fibras son  $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales de dimensión  $n$ .
- Denotamos por  $T^{\mathbb{R}}M := TM_{\mathbb{R}}$  al **fibrado tangente real** a  $M$ ; es el fibrado tangente a  $M_{\mathbb{R}}$ . Sus fibras son  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales de dimensión  $2n$ .

Parece razonable asumir que van a ser «el mismo» espacio, pese a que uno tenga una estructura más fuerte. Vamos a hacer rigurosa esta noción. Primero, pongamos un ejemplo sencillo.

**Observación 1.7.** Como ya sabemos, se puede considerar a  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión 2, con una base dada por  $\{1, i\}$ . Sin embargo, al hacer esto, hemos «olvidado» parte de la estructura algebraica de  $\mathbb{C}$ : ya no podemos multiplicar por  $i$ , sino únicamente por escalares reales. Pero podemos recuperar esta estructura, sin pérdida, si la consideramos como una *acción* del grupo multiplicativo de  $\mathbb{C}$  sobre  $\mathbb{R}^2$  en el elemento  $i$ ; es decir, como la aplicación:

$$J: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x, y) \longmapsto (-y, x).$$

Entonces, podemos construir un nuevo  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión 1, que hereda la estructura de  $\mathbb{R}^2$ , pero donde además definimos la multiplicación por escalares complejos:

$$(a + bi) \cdot (x, y) = a(x, y) + bJ(x, y), \quad \forall a + bi \in \mathbb{C}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Se tiene que este espacio es isomorfo a nuestro  $\mathbb{C}$  original, así que hemos podido volver sin pérdidas a nuestra estructura original.

Y este va a ser el caso con nuestros espacios tangentes:  $T_p^{\mathbb{R}}M$  va a ser  $\mathbb{R}$ -linealmente isomorfo a  $T_pM$ , habiendo olvidado su estructura compleja. Pero por el camino, vamos a haber externalizado un «modo de multiplicar por  $i$ » que por isomorfía va a inducir uno equivalente en  $T_p^{\mathbb{R}}M$ .

Este endomorfismo biyectivo  $J$  es un ejemplo de *estructura compleja lineal*.

**Definición 1.8.** Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Una **estructura compleja lineal** sobre  $V$  es un automorfismo  $J: V \rightarrow V$  tal que  $J^2 = -\text{Id}_V$ .

Veamos cómo afecta esto a los espacios tangentes. Utilizaremos la notación de la obs. 1.4.

**Observación 1.9.** Sea  $(M, \mathcal{A})$  una variedad compleja y  $\kappa: \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  la identificación usual.

Sea  $\varphi: U \subseteq M \cong V \subseteq \mathbb{C}^n$  una carta del atlas  $\mathcal{A}$ . Al diferenciarla en un punto  $p \in U$ , nos da un isomorfismo  $\mathbb{C}$ -lineal natural entre  $T_pM$  y  $T_{\varphi(p)}\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$ .

Por otra parte, si consideramos la variedad real suave subyacente  $M_{\mathbb{R}} = (M, \mathcal{A}_{\mathbb{R}})$ , la diferencial de esa misma carta  $\kappa \circ \varphi \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  nos da un isomorfismo  $\mathbb{R}$ -lineal entre  $T_p^{\mathbb{R}}M$  y  $T_{\kappa(\varphi(p))}\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^{2n}$ . Ahora, podemos componer ambos entre sí, para obtener una relación entre los espacios tangentes:

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{d\varphi_p} & \mathbb{C}^n \\ \downarrow \rho & & \downarrow \kappa \\ T_p^{\mathbb{R}}M & \xrightarrow{d(\kappa \circ \varphi)_p} & \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

La flecha  $\Rightarrow$  es un isomorfismo  $\mathbb{C}$ -lineal, mientras que el resto son isomorfismos  $\mathbb{R}$ -lineales.

Como en la observación anterior, para poder considerar  $\mathbb{R}$ -lineal a  $\rho$  estamos «olvidando» que  $T_pM$  es un  $\mathbb{C}$ -espacio, y convertimos su multiplicación por  $i$  en meramente un automorfismo  $\tilde{J}_p: T_pM \rightarrow T_pM$ . Por ser  $\rho$  isomorfismo  $\mathbb{R}$ -lineal, se tiene que  $J_p := \rho \circ \tilde{J}_p \circ \rho^{-1}$  es una estructura compleja lineal sobre  $T_p^{\mathbb{R}}M$ .

Las observaciones clave son que dicha  $J_p$  es independiente de la carta elegida, que podemos por lo tanto definirla globalmente sobre la variedad  $M$  (y no solo sobre entornos abiertos) y que varía suavemente respecto al punto  $p$ . Es decir,  $J \in \Gamma(T^{(1,1)}TM)$ : es un campo tensorial suave de grado  $(1, 1)$ . Esto se debe a que los cambios de cartas  $\varphi \circ \psi^{-1}$  son biholomorfos.

*Demostración.* Sean  $\varphi = (z^1, \dots, z^n)$ ,  $\psi = (w^1, \dots, w^n)$  cartas holomorfas de  $M$  alrededor de  $p$ , con  $z^j = x^j + iy^j$ ,  $w^j = u^j + iv^j$  sus componentes reales e imaginarias. Entonces,  $(x^1, y^1, \dots, x^n, y^n)$ ,  $(u^1, v^1, \dots, u^n, v^n)$  son cartas suaves de  $M_{\mathbb{R}}$ . Sea  $f = \varphi \circ \psi^{-1}$  el cambio de coordenadas. Su jacobiana real (respecto al marco local inducido por  $\psi$ ) consistirá en bloques  $2 \times 2$  de la forma:

$$M_{j,k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^j}{\partial x^k} & \frac{\partial u^j}{\partial y^k} \\ \frac{\partial v^j}{\partial x^k} & \frac{\partial v^j}{\partial y^k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v^j}{\partial y^k} & \frac{\partial u^j}{\partial y^k} \\ -\frac{\partial u^j}{\partial y^k} & \frac{\partial v^j}{\partial y^k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{para ciertas funciones } a, b: U \rightarrow \mathbb{R},$$

donde se han utilizado las ecuaciones de Cauchy-Riemann ( $f$  es holomorfa). Ahora, notar que poniendo  $J$  en forma matricial y descomponiendo en bloques  $2 \times 2$ :

$$Df = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,n} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & \dots & M_{n,n} \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} K & & & \\ & K & & \\ & & \ddots & \\ & & & K \end{bmatrix} \quad \left( K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Se comprueba que  $DfJ = JDf$ , y por tanto  $J$  es independiente de las coordenadas locales elegidas.

Falta comprobar que varía suavemente. Ya que requiere conceptos que no hemos visto con profundidad, no daremos mucho detalle. Sea  $p \in M$  y sea  $\Phi: \pi^{-1}(U) \subseteq TM|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$  una trivialización local [A.46] del fibrado tangente alrededor de  $p$ , que asumimos holomorfa. Por las propiedades de la trivialización local, tenemos definida en  $U$  una base de secciones holomorfas de cada fibra; es decir, tenemos aplicaciones holomorfas  $\{c^1, \dots, c^n\}$  que a cada  $q \in U$  le asignan un elemento de  $\{q\} \times \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$ , con  $\{c^1(q), \dots, c^n(q)\}$  base de  $\mathbb{C}^n$ . Cada sección se descompone como  $c^j = a^j + ib^j$  para  $a^j, b^j$  reales. Pasando a la variedad real subyacente, podemos considerar que  $\Phi$  es una aplicación de  $T^{\mathbb{R}}M|_U$  en  $U \times \mathbb{R}^{2n}$ . Entonces,  $\Phi \circ J|_U \circ \Phi^{-1}$  es, respecto a estas coordenadas:

$$\text{Id} \times \tilde{J}: U \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{2n}, \quad \tilde{J}(a^1, b^1, \dots, a^n, b^n) = (-b^1, a^1, \dots, -b^n, a^n).$$

Esta función es suave, y como la trivialización local  $\Phi$  era holomorfa (y por lo tanto suave),  $J|_U$  es suave. Como la suavidad es una propiedad local, ya hemos terminado.  $\square$

### 1.1.2. Variedades casi-complejas

Inspirados por la observación anterior, enunciamos la siguiente definición:

**Definición 1.10.** Una *variedad casi-compleja* es una variedad suave  $M$  equipada con un automorfismo  $J_p: T_pM \rightarrow T_pM$  de cada espacio tangente que varía suavemente y satisface  $J^2 = -\text{Id}$ .

Llamaremos al campo tensorial  $J$  *estructura casi-compleja* de la variedad. Como ya hemos visto, una variedad compleja induce sobre su fibrado tangente real una estructura casi-compleja. Por lo tanto, una condición necesaria para que una variedad real admita estructura compleja va a ser, precisamente, que admita una estructura casi-compleja. Esta condición no es suficiente, como veremos en el capítulo 3. Vamos a darle nombre a la propiedad deseada.

**Definición 1.11.** Una variedad casi-compleja  $(M, \mathcal{A}, J)$  se dice *integrable* si  $J$  viene inducida por una estructura compleja compatible sobre la variedad. Es decir: existe un atlas holomorfo  $\mathcal{B}$  sobre  $M$  tal que  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  es compatible con  $\mathcal{A}$  y  $d(\kappa \circ \varphi)_p(Jv) = i \cdot d\varphi_p(v)$ , para toda carta  $\varphi \in \mathcal{B}$ .

Daremos en el siguiente apartado una caracterización clásica de esta propiedad.

En todo caso, vamos a continuar estudiando estas estructuras. En muchas ocasiones usaremos notación global, pero implícitamente estaremos trabajando localmente; por ejemplo, si decimos que  $J$  es un endomorfismo de  $TM$ , nos referimos a que es un endomorfismo sobre cada fibra<sup>6</sup>.

Como  $J$  es un endomorfismo de un espacio vectorial, tendrá una serie de valores y vectores propios. Pero recordar que  $J^2 = -\text{Id}$ , luego dichos valores propios tendrán que ser raíces de  $-1$ ; es decir,  $\pm i$ . Vamos a querer separar el fibrado tangente  $TM$  en sus espacios propios, así que vamos a querer convertirlo en un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ . Utilizaremos la *complexificación*<sup>7</sup>, que no es más que una extensión de escalares de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$ .

**Definición 1.12.** Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Definimos su **complexificado** como el  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ , con la multiplicación compleja definida por extensión lineal:

$$\alpha(v \otimes \beta) = v \otimes (\alpha\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall v \in V.$$

Equivalentemente,  $V^{\mathbb{C}}$  es el conjunto de palabras formales<sup>8</sup>  $\{u + iv \mid u, v \in V\}$ , con las operaciones de espacio vectorial definidas del modo intuitivo:

$$(u + iv) + (u' + iv') = (u + u') + i(v + v'), \quad (a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(bu + av).$$

**Observación 1.13.** Sea  $T^{\mathbb{C}}M$  la complexificación de nuestro fibrado tangente; es decir, el fibrado  $\mathbb{C}$ -vectorial cuyas fibras son  $T_p^{\mathbb{C}}M := (T_p M)^{\mathbb{C}}$ , con las trivializaciones locales extendidas por linealidad. Tomando dichas extensiones como difeomorfismos, forzamos a que exista una estructura suave sobre  $T^{\mathbb{C}}M$ , inducida por la de  $TM$ .

Nuestro endomorfismo  $J$  se extiende a valores en el complexificado, por linealidad:

$$J(X + iY) = J(X) + iJ(Y), \quad \forall X, Y \in TM.$$

Podemos descomponer  $T^{\mathbb{C}}M$  como la suma directa de dos espacios de vectores propios de  $J$ ,

$$T^{\mathbb{C}}M = T^{(1,0)}M \oplus T^{(0,1)}M,$$

donde los sumandos son los subespacios propios asociados a  $i$  y a  $-i$ , respectivamente:

$$T^{(1,0)}M = \{X \in T^{\mathbb{C}}M \mid JX = iX\}, \quad T^{(0,1)}M = \{X \in T^{\mathbb{C}}M \mid JX = -iX\}.$$

Además, cualquier vector  $w \in T_p^{\mathbb{C}}M$  se descompone como  $w = w^{(1,0)} + w^{(0,1)}$ , con

$$w^{(1,0)} = \frac{1}{2}(w - iJw) \in T_p^{(1,0)}M, \quad w^{(0,1)} = \frac{1}{2}(w + iJw) \in T_p^{(0,1)}M.$$

Los llamaremos vectores propios **de tipo (1, 0)** y **de tipo (0, 1)**, respectivamente. Esto mismo ocurre para secciones del fibrado. La notación va a ser la natural:

$$\mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M) := \Gamma(T^{\mathbb{C}}M), \quad \mathfrak{X}^{(1,0)}(M) := \Gamma(T^{(1,0)}M), \quad \mathfrak{X}^{(0,1)}(M) := \Gamma(T^{(0,1)}M).$$

Cualquier campo  $Z \in \mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M)$  se puede poner como  $Z = X + iY$ , con  $X, Y \in \mathfrak{X}^{\mathbb{R}}(M) := \mathfrak{X}(M_{\mathbb{R}})$ , y descomponer como  $Z = Z^{(1,0)} + Z^{(0,1)}$ .

Esta construcción es, en cierto modo<sup>9</sup>, opuesta a cuando olvidábamos la estructura compleja de un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial en la obs. 1.9. Esto no significa que las operaciones sean perfectamente inversas: la complexificación nos duplica la dimensión real.

<sup>6</sup>Todo esto se puede formalizar (se pueden definir morfismos entre fibrados vectoriales, y forman una categoría tanto en el caso topológico como en el suave), pero no queremos que el trabajo consista únicamente de definiciones.

<sup>7</sup>El por qué no utilizamos simplemente el proceso descrito en la obs. 1.7 quedará claro eventualmente; básicamente, queremos que cada subespacio propio tenga dimensión compleja  $n$ .

<sup>8</sup>O lo que es lo mismo, el conjunto  $V \times V$ , identificando  $u + iv := (u, v)$ .

<sup>9</sup>En términos categóricos, la complexificación es el funtor *adjunto a izquierda* del funtor olvidadizo  $\text{Vec}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{R}}$ .

Asumiremos, ahora, que nuestra variedad  $M$  es *compleja* de dimensión  $n$ . Vamos a realizar unas cuantas manipulaciones algebraicas que al principio puede que parezcan complicaciones conceptuales innecesarias o sin interés, pero que van a llevar a una conclusión no trivial.

Sea  $M$  una variedad compleja, y sea  $J$  la estructura casi-compleja inducida naturalmente (por la multiplicación por  $i$ ) sobre su fibrado tangente real. Denotaremos por  $T^{\mathbb{C}}M$  al complexificado de  $T^{\mathbb{R}}M$ , como en el caso casi-complejo. Notar que este espacio *no* es isomorfo al fibrado tangente holomorfo  $TM$ , sino que meramente lo contiene:  $TM \cong \mathbb{C}^n$ , mientras que  $T^{\mathbb{C}}M \cong \mathbb{C}^{2n}$ . En resumen:

$$TM \xrightarrow{\rho} T^{\mathbb{R}}M \xrightarrow{-\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}} T^{\mathbb{C}}M,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} = n \dashrightarrow \dim_{\mathbb{R}} = 2n \dashrightarrow \dim_{\mathbb{C}} = 2n.$$

Si  $u + iv$  es un vector de  $T^{\mathbb{C}}M$  (con  $u, v \in T^{\mathbb{R}}M$ ), entonces  $J(u + iv) = (Ju) + i(Jv)$ . Instintivamente, querríamos simplificar esta expresión a  $(iu) + i(iv) = -v + iu$ . Pero hay que recordar las identificaciones en juego:  $u$  y  $v$  son elementos del fibrado tangente *real*, así que no tenemos definida (a nivel de espacio vectorial) una multiplicación por  $i$ , sino que viene dada por el endomorfismo  $J$ . La multiplicación por  $i$  solo está definida en el complexificado, y el endomorfismo  $J$  ya no coincide con esta multiplicación; de hecho, ahora se tiene  $J(w) = iw$  si y solo si  $w$  es vector propio de  $T^{(1,0)}M$ . Por lo tanto, para evitar confusión, no simplificaremos las expresiones de  $J$ .

**Observación 1.14.** Existe un isomorfismo natural entre los  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales  $T^{\mathbb{R}}M$  y  $T^{(1,0)}M$ . Viene dado por la composición

$$T^{\mathbb{R}}M \xhookrightarrow{\iota} T^{\mathbb{C}}M \xrightarrow{\text{pr}_1} T^{(1,0)}M,$$

donde  $\iota$  es la inclusión  $T^{\mathbb{R}}M \hookrightarrow T^{\mathbb{R}}M \otimes \{1\} \subseteq T^{\mathbb{R}}M \otimes \mathbb{C}$  y  $\text{pr}_1$  es la proyección  $w \mapsto \frac{1}{2}(w - iJw)$ . Su inversa es el doble de la aplicación *parte real*, restringida a  $T^{(1,0)}M$ :

$$2\text{Re}: T^{(1,0)}M \longrightarrow T^{\mathbb{R}}M, \quad u + iv \longmapsto 2u.$$

Además, es un isomorfismo de espacios  $\mathbb{C}$ -vectoriales entre  $TM$  y  $T^{(1,0)}M$ . Y lo que es más importante: la imagen de  $J$  coincide con la multiplicación por  $i$  en el complexificado, ya que por definición  $J(w) = iw$  para todo  $w \in T^{(1,0)}M$ .

También  $T^{(0,1)}M \cong T^{\mathbb{R}}M$ , aunque en este caso se invierte la multiplicación por  $i$ :  $J(w) = -iw$ . Es más visual considerarlo como la imagen de  $T^{(1,0)}M$  por la acción conjugación  $u + iv \mapsto u - iv$ ; es una copia del tangente donde cada fibra está «reflejada» respecto a la original.

Vamos a querer una base de secciones para ambos. Sea  $\varphi = (\tilde{z}^1, \dots, \tilde{z}^n)$  una carta de  $M$  en un entorno  $U$ , tal que  $\tilde{z}^j = x^j + Jy^j$  (con  $x^j, y^j$  coordenadas reales en  $\mathbb{R}^{2n}$ , y utilizando  $J$  en vez de  $i$  para no confundir las multiplicaciones de  $TM$  y del complexificado).

En dicho entorno,  $(\frac{\partial}{\partial \tilde{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{z}^n})$  es un marco local para  $TM|_U$ , y se puede comprobar que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z^j} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} - i \frac{\partial}{\partial y^j} \right) \mid 1 \leq j \leq n \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} + i \frac{\partial}{\partial y^j} \right) \mid 1 \leq j \leq n \right\}$$

son marcos locales para  $T^{(1,0)}M|_U$  y  $T^{(0,1)}M|_U$ , respectivamente. Además, por la suma directa, la unión de ambos es un marco local para  $T^{\mathbb{C}}M|_U$ .

Lo más interesante va a ser cómo afecta esto al corchete de campos (recordar [A.21] o [A.47]). El corchete se define, para secciones del complexificado, por bilinealidad:

$$[X + iY, U + iV] = ([X, U] - [Y, V]) + i([Y, U] + [X, V]), \quad \forall X, Y, U, V \in \mathfrak{X}^{\mathbb{R}}(M).$$

La fórmula del corchete en coordenadas (propiedad A.21) sigue siendo válida. Ahora bien, los campos  $X \in \mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$  son de la forma  $X = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial z^j} + 0 \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$ , siendo nulas las componentes de tipo  $(0, 1)$ . Por lo tanto, el corchete de dos campos de tipo  $(1, 0)$  va a ser otro campo de tipo  $(1, 0)$ .

En otras palabras,  $\mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$  es cerrado respecto al corchete de Lie:

$$\{[X, Y] \in \mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M) \mid X, Y \in \mathfrak{X}^{(1,0)}(M)\} =: [\mathfrak{X}^{(1,0)}(M), \mathfrak{X}^{(1,0)}(M)] \subseteq \mathfrak{X}^{(1,0)}(M).$$

Esto es lo que se esperaría naturalmente, y puede parecer que no hemos logrado gran cosa, pero es un resultado menos trivial de lo que parece. La parte interesante es que esto no va a ocurrir, necesariamente, en estructuras casi-complejas cualesquiera. Y lo que es todavía más: esta condición *caracteriza* las estructuras casi-complejas integrables; ese es el **Teorema de Newlander-Nirenberg**, que consideraremos con más detalle en el siguiente apartado.

Primero, veamos una caracterización adicional. Decir que  $\mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$  es cerrado respecto al corchete es decir que la parte de tipo (0, 1) del corchete de dos campos de tipo (1, 0) es nula:

$$\begin{aligned} -2[X - iJX, Y - iJY]^{(0,1)} &= ([JX, JY] + i[JX, Y] + i[X, JY] - [X, Y]) \\ &\quad + iJ([JX, JY] + i[JX, Y] + i[X, JY] - [X, Y]), \end{aligned}$$

y reorganizando los términos esto es

$$\begin{aligned} &= ([JX, JY] + i^2J[JX, Y] + i^2J[X, JY] - [X, Y]) \\ &\quad + (iJ[JX, JY] + i[JX, Y] + i[X, JY] - iJ[X, Y]) \\ &= N_J(X, Y) + iJN_J(X, Y), \end{aligned}$$

donde  $N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$  es el **tensor de Nijenhuis**<sup>10</sup> o *tensor de torsión*. Es un campo tensorial de grado (2, 1).

Hemos visto que el corchete es cerrado en  $\mathfrak{X}^{(1,0)}(M)$  si y solo si  $N_J = 0$ ; el tensor de Nijenhuis es una obstrucción para elevar una estructura casi-compleja a otra compleja.

## 1.2. El Teorema de Newlander-Nirenberg

Nuestro objetivo en esta sección va a ser justificar el siguiente resultado clásico:

**Teorema 1.15 (Newlander-Nirenberg).** Sea  $(M, J)$  una variedad casi-compleja. Entonces,  $M$  es integrable si y solo si el tensor de Nijenhuis  $N_J$  se anula.

Vamos a inspirar nuestra demostración en [Voi02, págs. 52-53]. Solo demostraremos el caso en el que la variedad casi-compleja sea además analítica real; el caso general es un problema complicado en el ámbito del análisis. En el artículo de 1956 que da nombre al teorema se demostró el caso  $C^{2n+1}$ , y desde entonces ha habido extensiones a órdenes menores de regularidad. Un pequeño repaso de las distintas demostraciones históricas del teorema, así como una demostración del caso<sup>11</sup>  $C^{1+\epsilon}$ , se puede encontrar en [Web89].

### 1.2.1. Distribuciones y Teorema de Frobenius

Vamos a necesitar un par de conceptos previos, así como otro teorema clásico.

**Definición 1.16.** Una *distribución* de rango  $k$  sobre  $M$  es un subfibrado  $D \subseteq TM$  de rango  $k$ .

Es decir, es una elección de subespacio  $D_p \subseteq T_p M$  para cada fibra, que además respeta la definición de fibrado. Como de costumbre, nos interesa que sea compatible con la estructura compleja.

**Definición 1.17.** Una distribución  $D$  sobre una variedad compleja  $M$  se dice *holomorfa* si es un subfibrado holomorfo de  $TM$ .

Esto es,  $D$  es un fibrado holomorfo y la inclusión  $D \hookrightarrow TM$  es holomorfa. Utilizaremos una versión adaptada del **Teorema de Frobenius**, que nos da una equivalencia entre *involuntividad* e *integrabilidad*.

<sup>10</sup>La convención de signo varía; a veces se toma  $N_J(X, Y) = [X, Y] + J[X, JY] + J[JX, Y] - [JX, JY]$ .

<sup>11</sup>Aquí, el índice real  $1 + \epsilon$  significa "espacio de Hölder de orden  $1 + \epsilon$ ".

**Definición 1.18.** Una distribución holomorfa  $D$  sobre  $M$  se dice *involutiva* si el corchete de dos secciones holomorfas cualesquiera de  $D$  es también una sección de  $D$ :  $[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subseteq \Gamma(D)$ .

(Utilizaremos la misma notación para referirnos a secciones suaves y a secciones holomorfas).

**Definición 1.19.** Sea  $D$  una distribución holomorfa de rango  $k$  sobre una variedad compleja  $M^n$ . Se dice que  $D$  es *integrable en el sentido holomorfo* si existe una colección de aplicaciones holomorfas  $\{\psi_i: U_i \subseteq M \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}\}_{i \in I}$  cubriendo  $M$  tales que, para cada  $p \in U_i$ , el subespacio vectorial  $D_p \subseteq T_p M$  es  $\text{Ker } d(\psi_i)_p$ .

**Observación 1.20.** La definición de «distribución integrable» es en ocasiones la siguiente:

**Definición 1.21.** Una distribución  $D$  sobre  $M$  se dice *integrable* si cada punto de  $M$  está contenido en alguna variedad integral de  $D$ .

Aquí, *variedad integral* hace referencia a una subvariedad inmersa no vacía  $N \subseteq M$  tal que  $T_p N = D_p$  para cada  $p \in N$ . Es fácil ver que son equivalentes.

Utilizamos la versión del Teorema de Frobenius que aparece en [Voi02, págs. 51-52]:

**Teorema 1.22 (Frobenius holomorfo).** Una distribución holomorfa  $D$  sobre una variedad compleja  $M$  es integrable en el sentido holomorfo si y solo si es involutiva.

Finalmente, recordar que al final de la sección anterior habíamos demostrado lo siguiente<sup>12</sup>:

**Proposición 1.23.** Sea  $(M, J)$  una variedad casi-compleja. Entonces, son equivalentes:

- i) El tensor de Nijenhuis se anula:  $N_J(X, Y) = 0$ ,  $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .
- ii) El corchete de dos campos de tipo  $(1, 0)$  es de tipo  $(1, 0)$ .
- iii) El corchete de dos campos de tipo  $(0, 1)$  es de tipo  $(0, 1)$ :

$$[\Gamma(T^{(0,1)}M), \Gamma(T^{(0,1)}M)] \subseteq \Gamma(T^{(0,1)}M).$$

### 1.2.2. Demostración del caso analítico real

Ya vimos al final del apartado anterior que una variedad compleja inducía sobre su variedad real subyacente una estructura casi-compleja integrable con tensor  $N_J$  nulo.

Vamos a demostrar el recíproco. Como todas las definiciones son locales, vamos a asumir sin pérdida de generalidad que nuestra variedad casi-compleja  $M$  es un abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  y que  $J$  es una aplicación analítica de  $M$  en  $\text{End } \mathbb{R}^{2n}$ , que por supuesto satisface  $J^2 = -\text{Id}$ .

**Observación 1.24.** Pedirle a  $J$  que tome valores en  $\text{End } \mathbb{R}^{2n}$  es pedirle que para cada punto  $p \in U$  nos de un endomorfismo lineal  $J_p: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ . Como tenemos la identificación natural  $T_p \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^{2n}$ , esta notación es un atajo conveniente. Para comprobar que la analiticidad con valores en  $\text{End } \mathbb{R}^{2n}$  también es equivalente a tomar una sección analítica  $\tilde{J} \in \Gamma(T^{(1,1)}TM)$ , podemos razonar mediante trivializaciones locales de  $T^{(1,1)}T\mathbb{R}^{2n}$ , de modo similar a como hicimos en la demostración que sucede a la obs. 1.9.

Como de costumbre,  $J^2 = -\text{Id}$  significa  $J_p \circ J_p = -\text{Id}_{\mathbb{R}^{2n}}$ , trabajando fibra a fibra.

Podemos asumir, restringiendo el dominio  $U$  de ser necesario, que  $J$  viene dada por una serie de potencias convergente en todo el dominio. Por el Teorema de Extensión Analítica, esta serie se extiende a un dominio complejo, y en particular se extiende a un abierto  $U_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C}^{2n}$  que contiene a  $U$ . La extensión  $J: U_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End } \mathbb{C}^{2n}$  obtenida toma valores en<sup>13</sup>  $\text{End } \mathbb{C}^{2n}$ , y sigue satisfaciendo  $J^2 = -\text{Id}$ :  $(J|_U)^2$  es una función constante en  $U$ , así que su extensión analítica es constante en  $U_{\mathbb{C}}$ .

<sup>12</sup>En realidad, no hemos demostrado explícitamente iii), pero es completamente análogo al caso ii).

<sup>13</sup>Un endomorfismo lineal de  $\mathbb{R}^{2n}$  no es más que una matriz real  $2n \times 2n$ , y la extensión analítica nos da matrices complejas  $2n \times 2n$ . Es decir,  $\text{End } \mathbb{R}^{2n} \cong M_{2n}(\mathbb{R})$  y  $\text{End } \mathbb{C}^{2n} \cong M_{2n}(\mathbb{C})$ .

Definimos una distribución  $D$  en  $U_{\mathbb{C}}$ , en cada punto, como el subespacio propio de  $J$  asociado al valor propio  $-i$ . Por definición, a lo largo de  $U$  se tiene  $D_p = T_p^{(0,1)}U \subseteq T_p^{\mathbb{C}}U \cong \mathbb{C}^{2n}$ . En los valores complejos (es decir, en  $U_{\mathbb{C}} \setminus U$ ), son simplemente subespacios  $D_p \subseteq T_p U_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^{2n}$ , que no identificamos a priori con ningún otro espacio.

Por ser  $J$  holomorfa, la distribución  $D$  será holomorfa. Además, tiene rango  $n$ , ya que  $\dim T_p^{(0,1)}U = n$  para los  $p \in U$ . Que las fibras de  $U_{\mathbb{C}} \setminus U$  tengan también dimensión  $n$  se deduce de las propiedades de la extensión analítica<sup>14</sup>.

Recordar que las secciones de  $T^{(0,1)}U$  en  $U$  son de la forma  $X + iJX$ , con  $X \in \mathfrak{X}(U)$  un campo vectorial real. Por la extensión analítica, las secciones de  $D$  en  $U_{\mathbb{C}}$  serán de la forma  $X + iJX$ , con  $X \in \mathfrak{X}(U_{\mathbb{C}})$  un campo vectorial (real o complejo).

Recordar que  $J$  satisface por hipótesis la condición de integrabilidad del Teorema de Newlander-Nirenberg [1.15]; esto es, su tensor de Nijenhuis se anula, o equivalentemente:

$$[\Gamma(T^{(0,1)}M), \Gamma(T^{(0,1)}M)] \subseteq \Gamma(T^{(0,1)}M).$$

De aquí, y de la forma de las secciones de  $T^{(0,1)}M$  y  $D$ , se tiene automáticamente que  $D$  es involutiva; satisface la condición de integrabilidad del Teorema de Frobenius [1.22].

Luego  $D$  es integrable, y localmente nos da una submersión<sup>15</sup> holomorfa  $\psi: U_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , cuyas fibras  $\psi^{-1}(p)$  son las subvariedades integrales holomorfas de  $D$ . Ahora, vamos a mostrar que la restricción de  $\psi$  a  $U$  es un difeomorfismo local<sup>16</sup>, y que además la estructura compleja que induce en  $U$  tiene una multiplicación por  $i$  que es, precisamente, nuestra aplicación  $J$  de partida.

Sea  $V = \psi^{-1}(p) \subseteq U_{\mathbb{C}}$  la subvariedad integral en  $p$ , que cumple  $D_p = T_p V$ . Por definición,  $\psi(V) = p$ , constante; luego la diferencial  $d\psi_p|_{D_p}$  es nula. A lo largo de  $U$  podemos identificar  $T_p U \subseteq T_p U_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^{2n}$  con  $T_p^{(1,0)}U$ , y además como ya comentábamos  $D_p := T_p V$  se puede identificar (también a lo largo de  $U$ ) con  $T_p^{(0,1)}U$ . Estos dos espacios son transversales: su unión genera a  $T_p U_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^{2n}$ . Ahora bien,  $d\psi_p|_{D_p} = 0$ , como ya hemos visto. Pero  $d\psi_p: T_p U_{\mathbb{C}} = T_p U \oplus D_p \rightarrow T_p \mathbb{C}^n$  es un homomorfismo sobreyectivo, y se deduce que  $d\psi_p(T_p U) = \mathbb{C}^n$ ; y como el dominio y el codominio tienen dimensión real  $2n$ ,  $d\psi_p|_{T_p U}$  debe ser biyectiva. Es decir,  $d\psi_p|_{T_p U}$  es un isomorfismo, y  $\psi_p|_U$  es un difeomorfismo en un entorno de  $p$ . Llamemos  $\varphi := \psi|_U$ .

Finalmente, tenemos que comprobar que el isomorfismo  $d\varphi_p: T_p U \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{C}^n$  identifica  $J$  con la multiplicación por  $i$  en  $\mathbb{C}^n$ ; es decir,  $d\varphi_p(JX) = i \cdot d\varphi_p(X)$ , para cada  $X \in T_p U$ . Esto se reduce a comprobar que la siguiente composición de aplicaciones es  $\mathbb{C}$ -lineal:

$$T_p U \hookrightarrow T_p U_{\mathbb{C}} \rightarrow T_p U_{\mathbb{C}}/D_p;$$

donde el primer término está equipado con la estructura  $\mathbb{C}$ -lineal dada por  $J$ , mientras que el último la hereda de  $T_p U_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^{2n}$ .

A lo largo de  $U$ , el espacio vectorial  $D_p \subseteq T_p U_{\mathbb{C}} \cong T_p U \otimes \mathbb{C}$  está generado por vectores de la forma  $X + iJX$  para  $X \in T_p U$ , luego en el cociente  $T_p U_{\mathbb{C}}/D_p$  se tiene  $X = -iJX$ . Pero esto es precisamente la propiedad que buscábamos:  $iX = JX$ .

Concluimos, así, la demostración del teorema. □

### 1.2.3. Integrabilidad de superficies casi-complejas

Vamos a dar aquí un ejemplo sencillo de aplicación del teorema: demostraremos que cualquier estructura casi-compleja sobre una superficie real es integrable, y después que cualquier superficie real orientable embebida en  $\mathbb{R}^3$  admite una estructura compleja.

Recordemos que si  $V$  es un espacio vectorial,  $\{e_i\}_{i=1}^k$  una base de  $V$  y  $\langle -, - \rangle$  una forma bilineal sobre  $V$ , entonces  $\langle -, - \rangle$  es idénticamente nulo si y solo si  $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ , para todo  $1 \leq i, j \leq k$ . Lo

<sup>14</sup>El determinante  $\det: M_{2n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  es una función analítica, y se tiene (sobre valores en  $U$ )  $\det(zI_{2n} - J|_U) = (z - i)^n(z + i)^n$ . Por extensión analítica, también se tendrá esto para valores en todo  $U_{\mathbb{C}}$ .

<sup>15</sup>Una aplicación cuya diferencial es sobreyectiva en cada punto.

<sup>16</sup>Una aplicación cuya diferencial es biyectiva en cada punto.

comentamos, por supuesto, porque vamos a querer estudiar cuándo se anula el tensor de Nijenhuis  $N_J$ , que es bilineal.

**Corolario 1.25.** Si  $(M, J)$  es una variedad casi-compleja de dimensión 2,  $J$  es integrable.

*Demostración.* Recordemos que el corchete de campos es antisimétrico,  $[X, Y] = -[Y, X]$ , luego en particular  $[X, X] = 0$ . Para cualquier  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , el tensor de Nijenhuis de  $X$  y  $JX$  se anula:

$$\begin{aligned} N_J(X, JX) &= [JX, J^2X] - J[JX, JX] - J[X, J^2X] - [X, JX] \\ &= -[JX, X] - 0 - 0 - [X, JX] = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, como  $J^2 = -\text{Id}$ , para cualquier campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  no nulo se tendrá que  $X$  y  $JX$  son  $\mathbb{R}$ -linealmente independientes en cada punto; si no lo fueran, se tendría  $(JX)_p = tX_p$  para algún  $t \in \mathbb{R}$ , y por lo tanto  $(J^2X)_p = t(JX)_p = t^2X_p$  y o bien  $X_p = 0$  o bien  $t^2 = -1$ . Entonces, al menos localmente<sup>17</sup> alrededor de cada punto,  $\{X, JX\}$  es una base de  $\mathfrak{X}(M)$ .

Por lo tanto, cualquier campo vectorial  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  se puede escribir (localmente) como combinación de  $X$  y  $JX$ , y el tensor de Nijenhuis se anula localmente alrededor de cada punto; es decir, se anula globalmente.  $\square$

El paso fundamental de la demostración es que, con solo dos dimensiones reales, podemos tomar la base  $\{X, JX\}$ , y garantizar  $N_J(X, JX) = 0$ . Esto va a fallar en dimensiones superiores; si tenemos una base de la forma  $\{X, Y, JX, JY\}$ , se seguirá teniendo  $N_J(X, JX) = N_J(Y, JY) = 0$ , pero no tenemos suficiente control sobre el resto de parejas. No solo va a fallar la demostración, sino que no va a ser cierta en general la integrabilidad. En el capítulo 3 comentaremos un ejemplo interesante en dimensión real 4.

**Corolario 1.26.** Sea  $S$  una superficie orientable embebida en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces,  $S$  admite una estructura compleja.

*Demostración.* Por la proposición anterior, basta con construir una estructura casi-compleja  $J$  sobre  $S$ . Por la orientabilidad, existe un campo de vectores normal unitario suave  $N$  definido globalmente sobre  $S$ . Es decir:  $N_p \in (T_p S)^\perp$  (el subespacio de  $\mathbb{R}^3$  ortogonal al tangente en dicho punto),  $\|N_p\| = 1$  para cada  $p$  y además  $N$  es suave como función de  $S$  en  $\mathbb{R}^3$ .

Vamos a definir  $J$  puntualmente, para cada  $X \in \mathfrak{X}(S)$ , como:

$$(JX)_p = J_p X_p = N_p \times X_p,$$

donde  $\times$  es el producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$ . Notar que  $N_p \times X_p$  pertenece al plano tangente  $T_p S$  precisamente porque  $N_p$  es normal a la superficie en  $p$ .

Se cumple  $(J^2X)_p = N_p \times (N_p \times X_p) = -\|N_p\|^2 X = -X$ , ya que  $N$  es unitario. Luego  $J^2 = -\text{Id}$ , y además  $J$  es suave por ser  $N$  suave.  $\square$

Aquí, estamos usando el producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$  para definir nuestra «multiplicación por  $i$ ». Notar que por definición,  $N_p \times X_p$  es un giro de  $90^\circ$  de  $X_p$ , en la dirección marcada por la orientación  $N$ .

En particular, como comentábamos en la introducción del apartado 1.1.1, la esfera  $\mathbb{S}^2$  admite estructura compleja. Existen estructuras casi-complejas sobre  $\mathbb{S}^6$ , pero no se conoce ninguna integrable. Una de ellas la induce el producto de octoniones (o números de Cayley) puramente imaginarios unitarios; la no integrabilidad se debe, precisamente, a la falta de asociatividad de estos números [Agr+18].

<sup>17</sup>Esto es, para cada punto  $p \in M$  existe un abierto  $U \ni p$  donde  $\{X|_U, JX|_U\}$  es una base de  $\mathfrak{X}(U)$ .



## Capítulo 2

# Grupos de Lie y variedades

En este capítulo, vamos a estudiar unas estructuras especialmente ricas: los *grupos de Lie*. No son más que variedades suaves que son a su vez grupo algebraico, de modo compatible.

### 2.1. Grupos y álgebras de Lie

**Definición 2.1.** Un *grupo de Lie* es un grupo  $G$  dotado de estructura diferenciable suave, de modo que su multiplicación e inversión son aplicaciones suaves:

$$m: G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh; \quad i: G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}.$$

**Ejemplo 2.2.** Los ejemplos son numerosos. Vamos a comentar algunos importantes.

- i)  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{C}^n$  con la suma son grupos de Lie abelianos; su operación conmuta.
- ii) Dado un entero positivo  $n$ , el **grupo lineal general**  $GL_n(\mathbb{R})$  es el conjunto de matrices  $n \times n$  invertibles:

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}.$$

Como  $M_n(\mathbb{R})$  es un espacio vectorial, podemos dotarlo de una estructura diferenciable estándar [A.43], de modo que una base del espacio vectorial constituye una carta global. Entonces,  $GL_n(\mathbb{R})$  es una subvariedad abierta de  $M_n(\mathbb{R})$ .

- iii) La mayoría de subgrupos importantes del grupo lineal general también van a ser grupos de Lie. Por ejemplo, el **grupo lineal especial**  $SL_n(\mathbb{R})$  (formado por matrices con determinante 1), el **grupo ortogonal**  $O_n(\mathbb{R})$  (formado por matrices ortogonales) y el **grupo ortogonal especial**  $SO_n(\mathbb{R})$  (la intersección de ambos) son subgrupos de Lie de  $GL_n(\mathbb{R})$ .
- iv) Estas mismas construcciones se pueden hacer tomando  $\mathbb{C}$  en vez de  $\mathbb{R}$ , y más generalmente, tomando el grupo de automorfismos de un espacio vectorial  $V$ ;  $GL(V) = \text{Aut } V \subseteq \text{End } V$ . Si  $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ , entonces  $GL(V) \cong GL_n(\mathbb{R})$ . El isomorfismo depende de una elección de base.

Para más detalles y ejemplos, consultar [Lee12, cap. 7].

En el caso de variedades cualesquiera, teníamos que  $\mathfrak{X}(M)$  con el corchete de campos  $[-, -]$  era un álgebra de Lie de dimensión infinita. Recordamos su definición [A.22]:

**Definición 2.3.** Un **álgebra de Lie** sobre  $\mathbb{R}$  es un espacio vectorial real  $\mathfrak{g}$  equipado con una aplicación **corchete**  $[-, -]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  bilineal, antisimétrica y que cumple la identidad de Jacobi.

En el caso de grupos de Lie, vamos a poder identificar cierta subálgebra *de dimensión finita* de  $\mathfrak{X}(G)$  con el espacio tangente  $T_e G$ . Entonces, podremos extender la definición del tensor de Nijenhuis  $N_J$  (que requiere del corchete de campos) al espacio tangente, y trabajar a nivel de álgebra lineal. Pero es más: por la **Correspondencia de Lie** [2.8], podremos trabajar *exclusivamente* en álgebras de Lie, y obtener después el grupo de Lie simplemente conexo asociado, único salvo difeomorfismo. Haremos uso de esta correspondencia bastante a menudo durante el capítulo 3.

En primer lugar, vamos a querer restringirnos a campos vectoriales *invariantes a izquierda*. Un grupo de Lie actúa sobre si mismo mediante las **traslaciones a izquierda**:

$$L_g : G \longrightarrow G, \quad h \longmapsto L_g(h) := gh, \quad \text{donde } g \in G.$$

Por la propia definición de grupo de Lie, son difeomorfismos.

**Definición 2.4.** Un campo  $X \in \mathfrak{X}(G)$  se dice **invariante a izquierda** si es invariante bajo traslaciones a izquierda. Es decir:

$$d(L_g)_h(X_h) = X_{gh}, \quad \forall g, h \in G.$$

Equivalentemente, utilizando el pushforward [A.20],  $d(L_g)_*X = X$ .

La propiedad de «ser invariante a izquierda» se preserva por el corchete de Lie:

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X, Y], \quad \text{para todos } X, Y \in \mathfrak{X}(G) \text{ invariantes a izquierda.}$$

Luego el conjunto de campos invariantes a izquierda es cerrado respecto al corchete, y es fácil comprobar que también es subespacio lineal de  $\mathfrak{X}(G)$ . Por lo tanto, es un subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(G)$ , a la que denotaremos  $\text{Lie}(G)$  (el **álgebra de Lie asociada a G**).

Sea  $e$  la identidad de  $G$ . Notar que cada vector  $v \in T_e G$  se puede extender de modo único a un campo invariante a izquierda sobre  $G$ , que definimos como  $v^L|_g = d(L_g)_e(v)$ ; es decir,  $v^L \in \text{Lie}(G)$ . De hecho, esto nos da un isomorfismo lineal entre  $T_e G$  y  $\text{Lie}(G)$ ; su inversa es la *evaluación en e*:

$$\epsilon : \text{Lie}(G) \longrightarrow T_e G, \quad X \longmapsto \epsilon(X) := X_e.$$

En particular,  $\text{Lie}(G)$  tiene dimensión finita y  $\dim \text{Lie}(G) = \dim T_e G = \dim G$ .

**Ejemplo 2.5.** El álgebra de  $\mathbb{R}^n$  con la suma es  $\text{Lie}(\mathbb{R}^n) \cong \mathfrak{a}_n \cong \mathbb{R}^n$ , con el corchete idénticamente nulo  $[x, y] = 0$ ; es el *álgebra abeliana* de dimensión  $n$ .

Se puede comprobar que el álgebra de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  es  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) := \text{Lie}(\text{GL}_n(\mathbb{R})) \cong \text{M}_n(\mathbb{R})$ , donde el corchete de  $\text{M}_n(\mathbb{R})$  es el *conmutador* de matrices  $[A, B] = AB - BA$ .

**Observación 2.6.** También se tiene el dual: si consideramos las  $k$ -formas invariantes a izquierda,  $E_L^k(G) := \{\omega \in \Lambda^k G \mid L_g^* \omega = \omega\}$ , la aplicación evaluación  $\epsilon : E_L^k(G) \rightarrow \Lambda^k \mathfrak{g}$  es un isomorfismo. En particular, el dual  $\mathfrak{g}^*$  de  $\mathfrak{g}$  se identifica con las 1-formas invariantes a izquierda.

Recordar [A.36] que la diferencial de una 1-forma  $\omega \in \Omega(G)$  se puede expresar como

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]);$$

pero si asumimos  $X, Y \in \mathfrak{g}$  y  $\omega \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\omega(X)$  es una constante y por lo tanto  $Y\omega(X)$  se anula, y análogamente para  $X\omega(Y)$ . Luego se tiene  $d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y])$ , y podemos describir el corchete  $[-, -]$  utilizando la diferencial exterior  $d$  de  $\mathfrak{g}^*$ .

Esto da lugar a las *fórmulas de Maurer-Cartan* o **ecuaciones de estructura** del álgebra  $\mathfrak{g}$ : si  $\{e^i\}_{i=1}^n$  es una base de  $\mathfrak{g}^*$ , se tiene

$$de^k = - \sum_{i < j} c_{ij}^k e^i \wedge e^j,$$

donde  $c_{ij}^k$  son las *constantes de estructura* respecto a la base dual  $\{e_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathfrak{g}$ .

**Definición 2.7.** Dada una base  $\{e_i\}_{i=1}^n$  de un álgebra de Lie, sus **constantes de estructura**  $c_{ij}^k$  son las coordenadas de los corchetes básicos:  $[e_i, e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k$ .

Estas identificaciones son válidas, también, definiendo todo a partir de traslaciones *a derecha*.

Como ya comentábamos, otra de las características más importantes de estas estructuras es la Correspondencia de Lie, que establece una equivalencia entre grupos y álgebras de Lie satisfaciendo ciertas propiedades.

**Teorema 2.8 (Correspondencia de Lie).** Existe una correspondencia biunívoca (salvo isomorfismo) entre los grupos de Lie simplemente conexos y las álgebras de Lie sobre  $\mathbb{R}$  de dimensión finita, obtenida asignándole a cada grupo su álgebra:

$$\{\text{Grupos de Lie simplemente conexos}\} \xrightleftharpoons[\Gamma]{\text{Lie}} \{\text{Álgebras de Lie reales de dimensión finita}\}.$$

No vamos a demostrar aquí este resultado; se puede consultar, por ejemplo, [Lee12, pág. 531]. En términos categóricos, **Lie** es un funtor<sup>1</sup> (covariante) completo, fiel y esencialmente sobreyectivo en los objetos; es decir, es una equivalencia categórica.  $\Gamma$  es su adjunto a izquierda. Por definición de equivalencia categórica,  $\text{Lie}(\Gamma(\mathfrak{g})) \cong \mathfrak{g}$  y  $\Gamma(\text{Lie}(G)) \cong G$ .

En su demostración se utiliza el siguiente resultado, muy potente:

**Teorema 2.9 (Teorema de Ado).** Todo álgebra de Lie real de dimensión finita  $\mathfrak{g}$  admite una representación fiel de dimensión finita  $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ .

**Corolario 2.10.** Todo álgebra de Lie real de dimensión finita es isomorfa a alguna subálgebra de Lie de algún álgebra de matrices  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  (con el corchete dado por el conmutador).

La utilidad de estos resultados va a recaer en que nos van a permitir realizar argumentos puramente algebraicos para lograr resultados geométricos: podemos trabajar sobre un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  definida, y después asumir que existe un grupo de Lie simplemente conexo  $G$  tal que  $\text{Lie}(G) \cong T_e G \cong \mathfrak{g}$ . Es decir, a partir del álgebra, podemos definir un grupo  $G$  tal que su espacio tangente (con el corchete de campos invariantes a izquierda) es isomorfo al álgebra  $\mathfrak{g}$ . Esto nos va a permitir acelerar inmensamente la búsqueda de contraejemplos para nuestras conjeturas.

**Observación 2.11.** Del mismo modo que con los campos vectoriales y  $k$ -formas, una estructura compleja lineal  $J: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  (definición 1.8) nos induce una estructura casi-compleja *invariante a izquierda*  $J^L: G \rightarrow G$ , del siguiente modo. Dada una base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathfrak{g}$ , los campos invariantes a izquierda correspondientes  $\{e_1^L, \dots, e_n^L\}$  formarán un marco global sobre  $G$ . Entonces, podemos definir  $J^L(e_j^L) = (J(e_j))^L$ , para cada  $j$ , y extenderla al resto de campos por linealidad:

$$J^L\left(\sum_{j=1}^n X^j e_j^L\right) = \sum_{j=1}^n X^j J^L(e_j^L), \quad X^j: G \rightarrow \mathbb{R} \text{ funciones suaves.}$$

Volviendo al álgebra de Lie, podemos definir una torsión  $N_J: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , dada por

$$N_J(X, Y) := [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y].$$

Si la torsión  $N_J$  se anula, también lo hará el tensor de Nijenhuis de  $J^L$  en el grupo de Lie. Por analogía, definimos que una estructura compleja sobre un álgebra de Lie es **integrable** si esta torsión  $N_J$  se anula. En ocasiones, por énfasis, llamaremos «estructura casi-compleja» a una estructura compleja sobre  $\mathfrak{g}$  que no sea necesariamente integrable.

Si un grupo de Lie  $G$  no admite estructuras casi-complejas integrables, es claro que su álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  no admitirá tampoco estructura compleja integrable. Ahora bien, el recíproco es falso: que un álgebra  $\mathfrak{g}$  no admita estructura compleja integrable significa que el grupo  $G$  no admite estructuras casi-complejas integrables *invariantes a izquierda*, que es una condición más débil.

Si bien el corchete de Lie y la estructura casi-compleja  $J$  son propiedades locales, su comportamiento en un punto dado depende de las propiedades infinitesimales del espacio en dicho punto; es decir, depende de las propiedades *diferenciables* del espacio. Al restringirnos al álgebra de Lie, consideramos solo las estructuras compatibles con la acción de grupo, y perdemos parte de la información diferenciable de la variedad.

<sup>1</sup>Hemos descrito la acción del funtor sobre los objetos,  $G \mapsto \text{Lie}(G)$ , pero nos falta por describir su acción sobre los morfismos. Esta viene dada por la diferencial en el elemento neutro:  $f \mapsto df_e$ .

## 2.2. Álgebras de Lie nilpotentes y nilvariedades

Para el resto del trabajo, nos va a interesar considerar álgebras y cocientes de grupos de Lie con propiedades especialmente buenas. Se tratan de las *álgebras nilpotentes* y de las *nilvariedades*. Primero, definimos la *sucesión central descendente* de un álgebra de Lie.

**Definición 2.12.** Sea  $(\mathfrak{g}, [-, -])$  un álgebra de Lie. Su *sucesión central descendente* es la siguiente sucesión de subálgebras de Lie:

$$\mathfrak{g} \supseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \supseteq [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]] \supseteq \dots$$

**Definición 2.13.** Denotamos  $\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g}^k := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]$ . Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se dice *nilpotente de paso  $k$*  (o  *$k$ -step*) si llega a  $\{0\}$  en  $k$  pasos:  $\mathfrak{g}^k = \{0\}$  y  $\mathfrak{g}^l \neq \{0\}$  para  $l < k$ .

No todo álgebra de Lie es nilpotente<sup>2</sup>. A las álgebras nilpotentes de paso 1 se les llama *abelianas*, ya que todo elemento conmuta con cualquier otro:  $[X, Y] = [Y, X]$ . Como el corchete es antisimétrico, esto implica necesariamente  $[X, Y] = 0$ .

**Observación 2.14.** También se puede considerar la *sucesión central ascendente*, que parte del álgebra trivial  $\{0\}$  y va creciendo:

$$\mathfrak{g}_0 := \{0\} \subseteq \mathfrak{g}_1 := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}_0\} \subseteq \mathfrak{g}_2 := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}_1\} \subseteq \dots$$

El álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  será nilpotente de paso  $k$  si y solo si  $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}$  (y  $\mathfrak{g}_l \neq \mathfrak{g}$  para  $l < k$ ).

Notar que  $\mathfrak{g}_1 = Z(\mathfrak{g})$  es el *centro* de  $\mathfrak{g}$ : son los elementos  $X \in \mathfrak{g}$  que conmutan con los demás.

Un grupo de Lie  $G$  se dirá *nilpotente* si su álgebra de Lie es nilpotente. Pero para nuestros propósitos, queremos pedir algo más: queremos que nuestra variedad  $M$  sea *homogénea*, que es<sup>3</sup> pedirle que sea cociente de un grupo de Lie por un subgrupo cerrado (en el sentido topológico).

**Definición 2.15.** Sea  $G$  un grupo de Lie. Un  *$G$ -espacio homogéneo* o *variedad homogénea* es un cociente  $M = \Gamma \backslash G$  por un subgrupo cerrado  $\Gamma \subseteq G$ .

Como ya comentábamos, obtenemos así la definición de nilvariedad:

**Definición 2.16.** Una *nilvariedad*  $M = \Gamma \backslash G$  es un  $G$ -espacio homogéneo donde  $G$  es un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo.

También vamos a pedirle compacidad. Se tiene el siguiente resultado, debido a Mal'cev:

**Proposición 2.17 (Mal'cev).** Una nilvariedad es compacta si y solo si puede escribirse como un cociente  $M = \Gamma \backslash G$  por un subgrupo discreto  $\Gamma \subseteq G$ .

Se dice que  $\Gamma$  es un subgrupo discreto si es a la vez subgrupo algebraico y subespacio discreto de  $G$ . A este tipo de subgrupos se les llama *retículos* en  $G$ . Una caracterización adicional, el **Criterio de Mal'cev**, nos determina los grupos de Lie nilpotentes que admiten retículos.

**Teorema 2.18 (Mal'cev).** Un grupo de Lie nilpotente  $G$  admite un retículo si y solo si su álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  admite una base con constantes de estructura racionales.

Una de las razones por las que las nilvariedades compactas son especialmente útiles es porque sus grupos de cohomología de de Rham son relativamente sencillos de calcular, gracias al **Teorema de Nomizu**. Hablaremos de esto con más detalle en el siguiente capítulo.

<sup>2</sup>Considerar  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$ . La sucesión es constante:  $[\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})] = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ . A las álgebras con sucesión central descendente constante se les llama *perfectas*. El álgebra  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$  es perfecta, pero  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  no es ni perfecta ni nilpotente:  $[\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})] = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ , donde la sucesión estaciona.

En general, las álgebras de Lie se clasifican en *semisimples* (engloban a las perfectas), *resolubles* (engloban a las nilpotentes; se definirán en la obs. 3.25), y sumas directas de ambos tipos; así dice el Teorema de Levi [SW14, cap. 2].

<sup>3</sup>La definición que se suele dar es distinta (que  $M$  sea una variedad suave equipada con una acción transitiva suave por  $G$ ), pero existe una correspondencia biunívoca entre ambas [Lee12, págs. 552-553].

## Capítulo 3

# Nilvariedades compactas

### 3.1. Clasificación en dimensión 4

Las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor o igual a 7 están completamente clasificadas<sup>1</sup>, y se conocen resultados parciales para dimensiones 8 y 9. Hemos reproducido en el apéndice B la clasificación en dimensión 6, como aparece en [Sal01]. La teoría general de clasificación de álgebras de Lie es muy amplia, y está fuera del alcance de este trabajo.

En dimensión 4 hay, salvo isomorfismo, solo tres álgebras de Lie reales nilpotentes: la abeliana  $\mathfrak{a}_4$ , la suma directa  $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{a}_1$  (donde  $\mathfrak{h}_3$  es el álgebra de Heisenberg) y la filiforme  $\mathfrak{f}_4$ . Daremos las definiciones más adelante. Pasando a grupos de Lie mediante la Correspondencia de Lie [2.8], y a nilvariedades compactas mediante cocientes por retículos, obtenemos la siguiente clasificación:

**Teorema 3.1 (Clasificación de las nilvariedades compactas de dimensión 4).**

Una nilvariedad compacta de dimensión 4 es de una de las siguientes clases:

- i) cocientes de  $\mathbb{R}^4$  (como el toro  $\mathbb{T}^4 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{Z}^4 \backslash \mathbb{R}^4$ );
- ii) cocientes del grupo de Heisenberg  $H$  (como la variedad de Kodaira-Thurston  $KT$ );
- iii) cualquier nilvariedad  $M^4$  cuyo álgebra de Lie asociada es  $\mathfrak{f}_4$ , la filiforme de dimensión 4.

Los elementos de una misma clase son difeomorfos si y solo si los retículos son isomorfos [Aus73]. Tenemos que definir a qué nos referimos en las dos últimas clases.

**Definición 3.2.** El *grupo de Heisenberg*  $H$  es el grupo de Lie de dimensión 3

$$H := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

con la operación del producto de matrices.

**Observación 3.3.** Vamos a calcular el álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{h}_3$ , que es la asociada a  $H$ . Tenemos coordenadas globales  $\{x, y, z\}$ . Las traslaciones a izquierda vienen dadas por:

$$L_{(a,b,c)}(x, y, z) = (a + x, b + y, c + z + ay).$$

Fijemos  $g = (a, b, c)$ . Si  $\alpha = u dx + v dy + w dz$  es una 1-forma, su pullback [A.27] es

$$\begin{aligned} L_g^* \alpha &= (u \circ L_g) d(x \circ L_g) + (v \circ L_g) d(y \circ L_g) + (w \circ L_g) d(z \circ L_g) \\ &= (u \circ L_g) d(a + x) + (v \circ L_g) d(b + y) + (w \circ L_g) d(c + z + ay) \\ &= (u \circ L_g) dx + (v \circ L_g) dy + (w \circ L_g) (dz + ay). \end{aligned}$$

<sup>1</sup>En dimensiones menores a 7 existe un número finito de clases de isomorfismo, mientras que a partir de ahí existen familias 1-paramétricas infinitas de álgebras de Lie mutuamente no isomorfas. Las referencias están en [SW14, pág. 93].

Ahora, si queremos que  $\alpha$  sea invariante a izquierda, debe cumplir  $\alpha = L_g^* \alpha$ ; pero esto es:

$$u dx + v dy + w dz = (u \circ L_g) dx + (v \circ L_g + aw \circ L_g) dy + (w \circ L_g) dz.$$

Se tiene que  $\{\alpha^1 = dx, \alpha^2 = dy, \alpha^3 = dz - x dy\}$  es una base para el espacio de 1-formas invariantes a izquierda, que ya vimos que se identifica con  $\mathfrak{h}_3^*$ . Sus ecuaciones de estructura son:

$$d\alpha^1 = d\alpha^2 = 0, \quad d\alpha^3 = -\alpha^1 \wedge \alpha^2.$$

Pasando al dual, sabemos que los coeficientes son los opuestos:

$$[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0, \quad [e_1, e_2] = e_3.$$

En particular, se observa que  $\mathfrak{h}_3$  es nilpotente de paso 2.

**Observación 3.4.** El grupo de Heisenberg es simplemente conexo, y admite un retículo. Por ejemplo, podemos construir (respecto a las coordenadas anteriores)  $\Gamma := \{(a, b, c) \in H \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ .

**Definición 3.5.** La *variedad de Kodaira-Thurston* es el cociente  $KT := (\Gamma \times \mathbb{Z}) \backslash (H \times \mathbb{R})$ .

Es decir: la variedad de Kodaira-Thurston  $KT$  es el producto de la nilvariedad  $\Gamma \backslash H$  (construida a partir del grupo de Heisenberg) por la circunferencia  $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{Z} \backslash \mathbb{R}$ .

**Definición 3.6.** Un álgebra de Lie de dimensión  $k$  se dice *filiforme* si es nilpotente de paso  $k - 1$  (el máximo posible).

**Observación 3.7.** La forma más sencilla que puede tener un álgebra filiforme es la siguiente:

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad \text{para } 2 \leq i \leq k - 1,$$

donde  $\{e_i\}_{i=1}^k$  es una base y los corchetes sin definir son nulos o (en el caso de los  $[e_i, e_1]$ ) se obtienen por antisimetría. En dimensión 4 es la única (salvo isomorfismo), y la llamaremos  $\mathfrak{f}_4$ .

Dedicaremos el resto del apartado a demostrar que  $\mathbb{T}^4$  es Kähler (es decir, compleja y simpléctica de modo compatible),  $KT$  es compleja y simpléctica pero no Kähler y  $M^4$  admite formas simplécticas y estructuras casi-complejas, pero no es compleja.

De hecho, de entre las nilvariedades compactas *en cualquier dimensión*, los toros son las únicas que admiten métricas Kähler; véase [BG88]. Utilizaremos en nuestra demostración principal (proposición 3.23) un argumento similar al de dicho artículo, pero lo particularizaremos.

Primero, vamos a definir estos términos. También necesitaremos varios resultados importantes, para la mayoría de los cuales una demostración formal se sale del alcance del trabajo.

### 3.1.1. Cohomología de de Rham

La primera herramienta que vamos a necesitar es un invariante de carácter topológico pero que se puede definir diferenciablemente, la *cohomología de de Rham*. Damos brevemente las definiciones de *complejo de cocadenas* y *cohomología* de  $R$ -módulos (en nuestro caso,  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales).

**Definición 3.8.** Un *complejo de cocadenas* es una sucesión de espacios vectoriales  $\{A^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  conectados mediante homomorfismos  $d^k: A^k \rightarrow A^{k+1}$  (llamados conjuntamente *operador diferencial*), con composición nula:  $d^k \circ d^{k-1} = 0$ .

Notar que  $d^k \circ d^{k-1} = 0$  implica en particular  $\text{Im } d^{k-1} \subseteq \text{Ker } d^k$ , y como es un subespacio (por ser  $d^k$  homomorfismos), podemos tomar el cociente.

**Definición 3.9.** Sea  $\dots \xrightarrow{d^{-1}} A^0 \xrightarrow{d^0} A^1 \xrightarrow{d^1} A^2 \xrightarrow{d^2} A^3 \xrightarrow{d^3} \dots$  un complejo de cocadenas. Definimos sus *grupos de cohomología* como  $H^k = \text{Ker } d^k / \text{Im } d^{k-1}$ .

**Observación 3.10.** En este contexto, los grupos de cohomología son en realidad espacios vectoriales, y en particular son un grupo abeliano con la operación de suma de vectores. Se pueden definir (co)homologías sobre otras estructuras algebraicas, como grupos o módulos<sup>2</sup>, pero el nombre de los cocientes sigue siendo «grupos».

Estas nociones son duales a las de *complejo de cadenas* y *homología*, y en ocasiones se definen así. Nosotros no las vamos a utilizar, sin embargo, así que preferimos definir las directamente<sup>3</sup>. Cuando quede claro por contexto, suprimiremos los índices de las diferenciales; por ejemplo,  $d \circ d = 0$ .

Tomamos como  $A^k$  los espacios de formas diferenciales  $\Omega^k(M)$ , y como operador la diferencial de formas. Va a ser un complejo *acotado*; los espacios  $A^k$  con  $k < 0$  ó  $k > n$  serán el trivial, 0.

**Definición 3.11.** Sea  $M^n$  una variedad suave. Definimos el **complejo de de Rham**:

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \xrightarrow{d} 0.$$

Los **grupos de cohomología de de Rham** son  $H_{\text{dR}}^k(M) = \text{Ker } d^k / \text{Im } d^{k-1}$ . En el caso compacto, sus dimensiones definen los **números de Betti** de  $M$ ,  $b_k(M) = \dim H_{\text{dR}}^k(M)$ .

Notar que los elementos de  $\text{Ker } d^k$  son las  $k$ -formas cerradas ( $d\alpha = 0$ ), mientras que los elementos de  $\text{Im } d^{k-1}$  son las  $k$ -formas exactas (existe  $f \in \Omega^{k-1}(M)$  tal que  $\alpha = df$ ).

La cohomología de de Rham tiene muy buenas propiedades; entre otras, es un invariante *topológico* que coincide con la cohomología singular, como enuncia el Teorema de de Rham. Nosotros vamos a querer utilizarla para dos propósitos: para calcular los números de Betti de nuestra nilvariedad y para hacer uso del Teorema fuerte de Lefschetz [3.20].

Por desgracia, pese a su utilidad, la cohomología de de Rham de una variedad no siempre es sencilla de computar. Por suerte, en nilvariedades, podemos hacer uso del **Teorema de Nomizu**:

**Teorema 3.12 (Nomizu).** Sea  $M = \Gamma \backslash G$  una nilvariedad compacta y sea  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  el álgebra de Lie de  $G$ . Entonces, para cada  $k \in \mathbb{Z}$ , se tiene un isomorfismo  $H_{\text{dR}}^k(M) \cong H^k(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ .

Se puede consultar el artículo original en [Nom54].

**Observación 3.13.** No hemos definido la cohomología de álgebras de Lie. Describimos aquí la *cohomología de Chevalley-Eilenberg*. Podemos definir el álgebra exterior de  $\mathfrak{g}$  de modo idéntico a como se hizo para fibrados [A.30], con la derivada exterior definida (dada una base) como en [A.34]. Tenemos, pues, el complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow \Lambda^0 \mathfrak{g} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^{k-1} \mathfrak{g} \xrightarrow{d} \Lambda^k \mathfrak{g} \xrightarrow{d} \Lambda^{k+1} \mathfrak{g} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^n \mathfrak{g} \xrightarrow{d} 0.$$

( $\Lambda^0 \mathfrak{g} = \mathbb{R}$ , y  $d^0 = 0$ ). Esto, junto a las ecuaciones de estructura (que nos dan una forma explícita para la diferencial de 1-formas), será lo que utilicemos para hacer los cálculos relevantes.

### 3.1.2. Variedades Kähler

Definimos brevemente los conceptos de *métrica riemanniana* y *forma simpléctica*. Ambos son casos particulares de campos tensoriales suaves de grado (0, 2).

**Definición 3.14.** Una **métrica de Riemann**  $g \in \Gamma(T^{(0,2)}TM)$  sobre una variedad  $M$  es una elección para  $p \in M$  de un producto escalar sobre su espacio tangente,  $g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , que varía suavemente a lo largo de  $M$ .

Recordamos que un producto escalar es una forma bilinear simétrica y definida positiva.

<sup>2</sup>Concretamente, sobre cualquier categoría *abeliana*, donde se pueden tomar núcleos y conúcleos.

<sup>3</sup>Además, en el caso compacto, la homología y cohomología singulares son duales:  $H^p(M, \mathbb{R}) \cong H_p(M, \mathbb{R})^*$ . Esto es consecuencia del Teorema de coeficientes universales para cohomología; véase [Mun84, pág. 326]. Esto es relevante, por ejemplo, en los números de Betti; en espacios topológicos generales se definen respecto a los grupos de *homología*.

**Definición 3.15.** Una *forma simpléctica*  $\omega \in \Omega^2(M)$  sobre una variedad  $M$  es una 2-forma diferencial cerrada y no degenerada.

Que  $\omega$  sea *no degenerada* significa que, si existe un  $u \in T_p M$  tal que  $\omega_p(u, -) = 0$ , entonces  $u = 0$ . Se puede comprobar que esto implica necesariamente que  $n$  es par, y además es equivalente a pedir que  $\omega^{n/2} = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$  no se anule<sup>4</sup>. Como  $\omega$  es cerrada, determina una clase  $[\omega] \in H_{\text{dR}}^2(M)$ .

Las variedades Kähler son un caso particular de *estructuras hermíticas*. Definimos estas primero.

**Definición 3.16.** Una *estructura hermítica* sobre una variedad  $M$  es un par  $(J, g)$ , donde  $J$  es una estructura casi-compleja integrable y  $g$  es una métrica riemanniana, satisfaciendo:

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

(Si  $J$  no es necesariamente integrable, obtenemos la definición de *estructura casi-hermítica*).

**Definición 3.17.** Una *variedad Kähler* es una variedad hermítica  $(M, J, g)$  cuya 2-forma asociada  $\omega(X, Y) := g(JX, Y)$  es cerrada:  $d\omega = 0$ .

**Observación 3.18.** La 2-forma asociada a una variedad Kähler es simpléctica, ya que las condiciones sobre  $g$  y  $J$  implican que la forma  $\omega$  es no degenerada. Es decir: una variedad Kähler es a la vez variedad compleja y variedad simpléctica, de modo compatible. Tenemos las siguientes relaciones entre  $J, g$  y  $\omega$ :

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y), \quad g(JX, JY) = g(X, Y); \quad g(X, Y) = \omega(X, JY), \quad \omega(JX, JY) = \omega(X, Y).$$

Hemos dado nuestra definición utilizando las dos primeras, pero se llega a otra equivalente con las dos últimas. Por supuesto, tenemos que pedirle a dicha  $g$  que sea una métrica de Riemann.

La condición de ser Kähler es muy fuerte, e impone fuertes obstrucciones a su topología; por ejemplo, en el caso compacto, los números de Betti de orden impar  $b_{2k+1}(M)$  deben ser pares<sup>5</sup>.

Haremos uso de una caracterización fuerte para superficies complejas compactas ( $\dim_{\mathbb{C}} M = 2$ ).

**Teorema 3.19 (Buchdahl-Lamari).** Sea  $M$  una superficie compleja compacta. Entonces,  $M$  admite una métrica Kähler si y solo si su primer número de Betti  $b_1(M)$  es par.

Este hecho se demostró por primera vez como consecuencia de la clasificación de superficies complejas compactas de Enriques-Kodaira, pero en ocasiones se le llama **Teorema de Buchdahl-Lamari** en honor a las demostraciones que publicaron ambos independientemente en 1999 y que no requerían del estudio exhaustivo de cada caso de la clasificación [Buc99; Lam99].

Esta caracterización puramente topológica falla en dimensiones superiores. Como hemos comentado, en [BG88] se demuestra que las únicas nilvariedades Kähler son los toros. Ahora bien, existen álgebras de Lie con primer número de Betti par que sí admiten estructura compleja, como se aprecia en la clasificación de Salamon [B.1]. Por los teoremas de Mal'cev [2.18] y Nomizu [3.12], existen nilvariedades compactas complejas asociadas a ellas con los mismos números de Betti.

Otra propiedad muy fuerte de las variedades Kähler que nos será útil es la siguiente:

**Teorema 3.20 (Teorema fuerte de Lefschetz).** Sea  $M$  una variedad Kähler compacta de dimensión compleja  $n$ . Entonces, para cada  $k \leq n$ , la siguiente aplicación es un isomorfismo:

$$L^{n-k} : H_{\text{dR}}^k(M) \xrightarrow{-\wedge[\omega^{n-k}]} H_{\text{dR}}^{2n-k}(M)$$

Es decir, en variedades Kähler, tenemos una realización explícita de la Dualidad de Poincaré:

**Teorema 3.21 (Dualidad de Poincaré).** Sea  $M$  una variedad diferenciable orientable y compacta de dimensión  $m$ . Entonces  $H_{\text{dR}}^k(X) \cong H_{\text{dR}}^{m-k}(X)^*$ , para todo  $k \leq m$ .

<sup>4</sup>Entonces,  $\omega^{n/2}$  es una *forma de volumen*: en cada carta local, es un múltiplo no nulo de  $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ .

<sup>5</sup>Esto es consecuencia directa de la descomposición de Hodge, que comentaremos muy brevemente en el capítulo 4.



Se pueden hallar demostraciones de ambos resultados en [Voi02, págs. 148, 134], respectivamente.

Tenemos todas las piezas para demostrar lo que queríamos. Vamos a juntarlas.

### 3.1.3. Demostraciones

Vamos a empezar demostrando el resultado más directo, que es el del toro. Podemos dar una estructura Kähler explícita, inducida por la estructura Kähler natural de  $\mathbb{C}^n$ . Vamos a demostrar el resultado general, en  $n$  dimensiones complejas.

**Proposición 3.22.** El toro  $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{Z}^{2n} \backslash \mathbb{R}^{2n}$  admite estructura Kähler.

*Demostración.* En  $\mathbb{R}^2$ , respecto a la base canónica, podemos definir las siguientes estructuras:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se comprueba fácilmente que cada una cumple lo debido, y que se pueden pasar al cociente sin problemas. Para  $\mathbb{R}^{2n}$ , las definimos como matrices por bloques  $2 \times 2$ , con los bloques de la diagonal siendo los de  $\mathbb{R}^2$  y el resto nulos.  $\square$

**Proposición 3.23.** Sea  $M = \Gamma \backslash G$  una nilvariedad compacta tal que  $\text{Lie}(G) \cong \mathfrak{f}_4$ , la filiforme de dimensión 4. Entonces, no existe ninguna estructura compleja sobre  $M$ .

*Demostración.* En primer lugar, utilizamos el Teorema de Nomizu [3.12] para calcular los grupos de cohomología de de Rham. Recordar los coeficientes de estructura de la filiforme  $\mathfrak{f}_4$  (obs. 3.7):

$$d\alpha^1 = 0, \quad d\alpha^2 = 0, \quad d\alpha^3 = -\alpha^1 \wedge \alpha^2, \quad d\alpha^4 = -\alpha^1 \wedge \alpha^3.$$

En particular,  $\alpha^1$  y  $\alpha^2$  son las únicas 1-formas cerradas, y  $H^1(\mathfrak{f}_4, \mathbb{R}) = \langle [\alpha^1], [\alpha^2] \rangle$  (no hay 1-formas exactas). Ahora, consideramos las derivadas exteriores de 2-formas. Utilizaremos la notación  $\alpha^{ijk} = \alpha^i \wedge \alpha^j \wedge \alpha^k$ .

$$\begin{aligned} d\alpha^{12} &= -(d \circ d)\alpha^3 = 0, & d\alpha^{23} &= d\alpha^2 \wedge \alpha^3 - \alpha^2 \wedge d\alpha^3 = 0 + \alpha^{212} = 0, \\ d\alpha^{13} &= -(d \circ d)\alpha^4 = 0, & d\alpha^{24} &= d\alpha^2 \wedge \alpha^4 - \alpha^2 \wedge d\alpha^4 = 0 + \alpha^{213} = \alpha^{213}, \\ d\alpha^{14} &= d\alpha^1 \wedge \alpha^4 - \alpha^1 \wedge d\alpha^4 = 0 + \alpha^{113} = 0, & d\alpha^{34} &= d\alpha^3 \wedge \alpha^4 - \alpha^3 \wedge d\alpha^4 = -\alpha^{124} + \alpha^{313} = -\alpha^{124}. \end{aligned}$$

Las 2-formas cerradas son  $\mathcal{Z}^2 = \langle \alpha^{12}, \alpha^{13}, \alpha^{14}, \alpha^{23} \rangle$ . Cocientamos por las 2-formas exactas, que son  $\mathcal{B}^2 = \langle \alpha^{12}, \alpha^{13} \rangle$ , y obtenemos  $H^2(\mathfrak{f}_4, \mathbb{R}) = \langle [\alpha^{14}], [\alpha^{23}] \rangle$ . En las 3-formas, tenemos:

$$\begin{aligned} d\alpha^{123} &= -(d \circ d)\alpha^{24} = 0, & d\alpha^{134} &= d\alpha^{13} \wedge \alpha^4 + \alpha^{13} \wedge d\alpha^4 = 0 - \alpha^{1313} = 0, \\ d\alpha^{124} &= -(d \circ d)\alpha^{34} = 0, & d\alpha^{234} &= d\alpha^{23} \wedge \alpha^4 + \alpha^{23} \wedge d\alpha^4 = 0 - \alpha^{2313} = 0. \end{aligned}$$

Es decir:

$$\mathcal{Z}^3 = \langle \alpha^{123}, \alpha^{124}, \alpha^{134}, \alpha^{234} \rangle, \quad \mathcal{B}^3 = \langle \alpha^{123}, \alpha^{124} \rangle, \quad H^3(\mathfrak{f}_4, \mathbb{R}) = \langle [\alpha^{134}], [\alpha^{234}] \rangle.$$

Las 4-formas están generadas por  $\alpha^{1234}$ , que es cerrada pero no exacta:  $H^4(\mathfrak{f}_4, \mathbb{R}) = \langle [\alpha^{1234}] \rangle$ .

Por el Teorema de Nomizu, existen isomorfismos entre estos grupos de cohomología y los de  $M$ . Llamémoslos  $\Phi: H^k(\mathfrak{f}_4, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H_{\text{DR}}^k(M)$ ; será claro por contexto el orden  $k$ . Podemos asumir que respetan el wedge<sup>6</sup>:  $\Phi[\alpha] \wedge \Phi[\beta] = \Phi[\alpha \wedge \beta]$ .

<sup>6</sup>De hecho, en [Nom54, apdo. 3] se toma la inclusión del conjunto de las formas de  $G$  invariantes a derecha (que se identifica con  $\mathfrak{g}^*$ ) en el conjunto de las formas de  $G$  invariantes a derecha por elementos de  $\Gamma$  (que se identifica con las formas del cociente  $M$ ). Se induce así un isomorfismo en las cohomologías.

En resumen:

$$\begin{aligned} H_{\text{dR}}^1(M) &= \langle \Phi[\alpha^1], \Phi[\alpha^2] \rangle, & H_{\text{dR}}^2(M) &= \langle \Phi[\alpha^{14}], \Phi[\alpha^{23}] \rangle, \\ H_{\text{dR}}^3(M) &= \langle \Phi[\alpha^{134}], \Phi[\alpha^{234}] \rangle, & H_{\text{dR}}^4(M) &= \langle \Phi[\alpha^{1234}] \rangle. \end{aligned}$$

Asumamos que existe una estructura compleja sobre  $M$ . Esto nos llevará a contradicción. Notar que el primer grupo de cohomología tiene 2 generadores; es decir, el número de Betti  $b_1(M)$  es 2, par. Y por hipótesis  $M$  es una superficie compleja compacta, luego por el Teorema de Buchdahl-Lamari [3.19] debe admitir una métrica Kähler. Sea, pues,  $(M, J, \omega)$  una variedad Kähler. Como  $\omega$  es cerrada, pertenece a una clase de equivalencia del segundo grupo de cohomología de de Rham de  $M$ . Luego  $[\omega] = a \cdot \Phi[\alpha^{14}] + b \cdot \Phi[\alpha^{23}]$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Como  $M$  es Kähler compacta, por el Teorema fuerte de Lefschetz [3.20] para  $k = 1$ , el wedge por  $[\omega]$  es un isomorfismo entre los grupos de cohomología:

$$- \wedge [\omega]: H_{\text{dR}}^1(M) \xrightarrow{\cong} H_{\text{dR}}^3(M).$$

Calculamos la imagen de  $\Phi[\alpha^1]$ :

$$\Phi[\alpha^1] \wedge [\omega] = \Phi[\alpha^1 \wedge (a \cdot \alpha^{14} + b \cdot \alpha^{23})] = \Phi[b \cdot \alpha^{123}] = [0].$$

Luego uno de los generadores se anula, el núcleo de la aplicación no es nulo, y la aplicación no puede ser nunca un isomorfismo. Hemos llegado a contradicción; y volviendo hacia atrás, se ve que esta ha surgido de asumir que  $M$  admite estructura compleja<sup>7</sup>.  $\square$

**Proposición 3.24.** La variedad de Kodaira-Thurston  $KT$  admite estructura compleja y estructura simpléctica, pero no es Kähler.

*Demostración.* Recordar que  $\text{Lie}(KT) = \mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{a}_1 =: \mathfrak{kt}$ . Con las ecuaciones de estructura de  $\mathfrak{h}_3$  (que vimos en la obs. 3.3), y tomando la suma directa con  $\mathfrak{a}_1$ , obtenemos las de  $\mathfrak{kt}$ :

$$d\alpha^1 = d\alpha^2 = d\alpha^4 = 0, \quad d\alpha^3 = -\alpha^1 \wedge \alpha^2.$$

En este caso vamos a ahorrarnos las cuentas explícitas.

$$\begin{aligned} H^1(\mathfrak{kt}, \mathbb{R}) &= \langle [\alpha^1], [\alpha^2], [\alpha^4] \rangle, & H^2(\mathfrak{kt}, \mathbb{R}) &= \langle [\alpha^{13}], [\alpha^{14}], [\alpha^{23}], [\alpha^{24}] \rangle, \\ H^3(\mathfrak{kt}, \mathbb{R}) &= \langle [\alpha^{123}], [\alpha^{134}], [\alpha^{234}] \rangle, & H^4(\mathfrak{kt}, \mathbb{R}) &= \langle [\alpha^{1234}] \rangle. \end{aligned}$$

Aplicando Nomizu, el primer número de Betti de  $KT$  es 3, impar, luego no puede ser Kähler<sup>8</sup>.

Con la notación de la demostración anterior,  $\omega \in \Phi[\alpha^{13} + \alpha^{24}]$  es simpléctica: es cerrada (no está en la clase nula de  $H_{\text{dR}}^2(KT)$ ), y  $\omega^2 \in \Phi[\alpha^{13} \wedge \alpha^{24} + \alpha^{24} \wedge \alpha^{13}] = \Phi[-2\alpha^{1234}] \neq [0]$ .

Vamos a dar una estructura casi-compleja explícita. Tomamos la base dual de  $\{\alpha^j\}_{j=1}^4$ , que son los campos  $\{X = \frac{\partial}{\partial x}, Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}, Z = \frac{\partial}{\partial z}, W = \frac{\partial}{\partial w}\}$  (con  $(x, y, z)$  coordenadas de  $H$  y  $w$  de  $\mathbb{R}$ ). Entonces, podemos definir  $JX = Y, JW = Z$  y (para forzar  $J^2 = -\text{Id}$ )  $JY = -X, JZ = -W$ .

Veamos que es integrable. Como el único corchete no nulo de la base es  $[X, Y] = Z$  y se tiene  $N_J(JU, V) = -JN_J(U, V)$  (además de bilinealidad y antisimetría), basta con considerar:

$$N_J(X, Z) = [JX, JZ] - J[JX, Z] - J[X, JZ] - [X, Z] = [Y, -W] - J[Y, Z] - J[X, -W] - 0 = 0.$$

Por el Teorema de Newlander-Nirenberg [1.15],  $J$  es integrable y  $KT$  admite estructura compleja.  $\square$

<sup>7</sup>Notar que sí admite estructura simpléctica; basta con que sea  $ab \neq 0$  para que  $\omega^2 \neq 0$ .

<sup>8</sup>También podríamos haberlo razonado utilizando el Teorema fuerte de Lefschetz y el hecho de que una forma simpléctica  $\omega$  debe satisfacer  $\omega^{n/2} \neq 0$ , que como comentábamos permite un argumento más general.

## 3.2. Variedades casi-complejas con tensor de Nijenhuis pequeño

### 3.2.1. Resumen del artículo

Comentaremos aquí algunos resultados de [FSW21]. En dicho artículo, Fernandez, Shin y Wilson detallan varios ejemplos explícitos de (familias de) estructuras casi-complejas sobre unas variedades fijas en las que el tensor de Nijenhuis puede ser arbitrariamente pequeño.

Las razones que les llevan a ello son el intento de Shin en [Shi19; Shi21]<sup>9</sup> de deformar ciertas estructuras casi-complejas en otras integrables. Esto le lleva, de forma natural, a querer estudiar qué variedades admiten estructuras casi-complejas arbitrariamente cercanas a una integrable; es decir, con tensor de Nijenhuis tan pequeño como queramos, respecto a cierta norma fija. En su caso, toman la norma del supremo. Sobre sus métodos, comentan:

La técnica utilizada para construir estos ejemplos involucra prueba y error considerable, ayudada por *software* de álgebra computacional, y en algunos casos guiada por el método de descenso del gradiente y la suposición de funciones racionales. Hallar una técnica general sigue siendo un problema práctico interesante.

Buscar dicho procedimiento general está fuera del alcance de este trabajo; sin embargo, sí que daremos una extensión de uno de sus ejemplos.

En [FSW21] dan 4 ejemplos en total, que se dividen en dos nilvariedades y dos *solvariedades*.

**Observación 3.25.** Las nilvariedades son un tipo particular de una clase más general de espacios homogéneos, que tienen propiedades menos fuertes: las *solvariedades*. La definición es análoga a las del apartado 2.2, pero cambiando «nilpotente» por «resoluble».

Un grupo de Lie se dice resoluble si su álgebra es resoluble, y un álgebra de Lie se dice *resoluble* si su *sucesión derivada* estaciona en 0:

$$\mathfrak{g} \supseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \supseteq \left[ [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]], [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \right] \supseteq \dots$$

Las nilvariedades son las asociadas a álgebras filiformes de dimensiones 4 y 6; como acabamos de demostrar, la primera no admite ninguna estructura compleja. La segunda no admite estructuras complejas invariantes a izquierda, y no se sabe si admite estructura compleja. El álgebra filiforme de dimensión 6 que toman es la que tiene la forma que comentamos en la obs. 3.7; es decir, es la tercera en la clasificación de Salamon (cuadro B.1), con coeficientes de estructura (0, 0, 12, 13, 14, 15). Las *solvariedades* son ambas de dimensión 4 y no admiten estructura compleja.

### 3.2.2. Extensión a dimensión arbitraria

Finalizamos este trabajo con algunos resultados que, hasta donde hemos podido comprobar, no están en la literatura. Vamos a demostrar que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , una nilvariedad compacta asociada al álgebra de Lie  $\mathfrak{f}_4 \oplus \mathfrak{a}_{2k}$  no admite estructura casi-compleja invariante a izquierda integrable, pero sí admite estructuras casi-complejas con tensor de Nijenhuis arbitrariamente pequeño.

Esto no es tan trivial como pueda parecer a simple vista. Por supuesto, si  $K, L$  son estructuras complejas integrables sobre álgebras de Lie  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ , entonces  $J := K \oplus L$  es una estructura compleja integrable sobre  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ . Pero el recíproco no tiene por qué ser cierto; una  $J$  sobre  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$  no tiene por qué ser descomponible, y no siempre vamos a poder levantarla a estructuras complejas integrables sobre  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$ . De hecho, tenemos un contraejemplo sencillo:  $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{h}_3$  admite estructura compleja integrable (es el álgebra descomponible 3 + 3 en el cuadro B.1), pero  $\mathfrak{h}_3$  no admite siquiera estructura compleja; para empezar, su dimensión es impar<sup>10</sup>.

<sup>9</sup>El paper de 2021 es una versión revisada y expandida del de 2019, y es posterior al primer preprint de [FSW21].

<sup>10</sup>Los contraejemplos en dimensión estrictamente par son más difíciles, ya que todo álgebra de Lie de dimensión 2 admite estructura compleja integrable, por el mismo argumento que en el corolario 1.25. Por lo tanto, para que ninguno de los dos términos admita estructura compleja integrable, cada uno tiene que tener dimensión mínima 4, y su producto debe tener dimensión mínima 8. Como ya comentamos, los resultados de clasificación a partir de dimensión 7 son bastante más complejos, y están fuera del alcance de este trabajo.

No vamos a demostrar aquí el caso  $k = 1$ ,  $\mathfrak{f}_4 \oplus \mathfrak{a}_2$ , por falta de espacio. Se puede consultar para ello la clasificación de Salamon [B.1], donde  $\mathfrak{f}_4 \oplus \mathfrak{a}_2$  corresponde al álgebra descomponible  $1 + 1 + 4$ .

**Proposición 3.26.** Para todo  $k \geq 1$  y para toda estructura compleja  $J$  sobre  $\mathfrak{f}_4 \oplus \mathfrak{a}_{2k}$ ,  $N_J \neq 0$ .

*Demostración.* Lo demostramos por inducción sobre  $k$ . Como ya hemos comentado, damos por hecho el caso base  $k = 1$ . Sea  $k \geq 2$ , y asumamos que el resultado es cierto para  $k - 1$ .

Por simplicidad, llamamos  $\mathfrak{g} := \mathfrak{f}_4 \oplus \mathfrak{a}_{2k}$ . Las constantes de estructura de  $\mathfrak{g}$  son  $[e_1, e_2] = e_3$  y  $[e_1, e_3] = e_4$ , con el resto de corchetes nulos (salvo los obtenibles por antisimetría). En particular, el centro de  $\mathfrak{g}$  es  $Z(\mathfrak{g}) = \langle e_4, e_5, \dots, e_{2k+4} \rangle$ , y tiene dimensión  $2k + 1$ .

Sea  $J$  una estructura compleja sobre  $\mathfrak{g}$ . La intersección  $J(Z(\mathfrak{g})) \cap Z(\mathfrak{g})$  debe ser no nula; en caso contrario, como ambos son subespacios de  $\mathfrak{g}$ , se tendría

$$2k + 4 = \dim \mathfrak{g} \geq \dim(J(Z(\mathfrak{g})) \oplus Z(\mathfrak{g})) = \dim J(Z(\mathfrak{g})) + \dim Z(\mathfrak{g}) = 2 \dim Z(\mathfrak{g}) = 4k + 2,$$

y esto solo es cierto para  $k \leq 1$ . (Hemos usado que  $J$  es un isomorfismo, luego preserva las dimensiones de los subespacios).

Por lo tanto, existe un elemento no nulo  $u \in J(Z(\mathfrak{g})) \cap Z(\mathfrak{g})$ . Es directo que  $u$  y  $Ju$  son linealmente independientes: si no lo fueran, se tendría  $Ju = au$  y por lo tanto  $-u = J^2u = J(au) = a^2u$  para algún  $a \in \mathbb{R}$ .

Consideramos el subespacio  $\mathfrak{i} = \langle u, Ju \rangle$ . Como  $u, Ju \in Z(\mathfrak{g})$ , se tiene que  $\mathfrak{i}$  está contenido en el centro de  $\mathfrak{g}$ , luego es un ideal. Además, es  $J$ -invariante:  $J(\mathfrak{i}) = \mathfrak{i}$ .

Vamos a denotar  $\tilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  al cociente, y  $\tilde{x} := x + \mathfrak{i}$  a la clase de cada elemento. Por ser  $\mathfrak{i}$  ideal, el corchete de  $\mathfrak{g}$  nos induce otro sobre el cociente  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , del modo claro:  $[x + \mathfrak{i}, y + \mathfrak{i}] = [x, y] + \mathfrak{i}$ . Además, como  $\mathfrak{i}$  es  $J$ -invariante,  $J$  nos induce una estructura compleja sobre  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , del mismo modo:  $\tilde{J}(x + \mathfrak{i}) = J(x) + \mathfrak{i}$ . Finalmente, el tensor de torsión  $N_{\tilde{J}}$  sobre el cociente  $\tilde{\mathfrak{g}}$  (que recordemos que se define a partir de  $\tilde{J}$  y del corchete) va a coincidir con el de  $\mathfrak{g}$ :  $N_{\tilde{J}}(x + \mathfrak{i}, y + \mathfrak{i}) = N_J(x, y) + \mathfrak{i}$ .

Vamos a distinguir dos casos, según si  $e_4$  pertenece o no al ideal  $\mathfrak{i}$ .

**Caso  $e_4 \notin \mathfrak{i}$ .** Como  $\tilde{e}_4 \neq 0$ , se tiene que los elementos  $\tilde{e}_1$  hasta  $\tilde{e}_4$  son linealmente independientes. Si  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i \tilde{e}_i = 0$  (para  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ), entonces  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i e_i \in \mathfrak{i} \subseteq \langle e_4, \dots, e_{2k+4} \rangle$ . Esto implica  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , y (como por hipótesis  $e_4 \notin \mathfrak{i}$ ) también  $\lambda_4 = 0$ .

Nuestras ecuaciones de estructura son las mismas que antes, pero en 2 dimensiones menos:

$$[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] = \tilde{e}_3, \quad [\tilde{e}_1, \tilde{e}_3] = \tilde{e}_4.$$

Es decir, nuestro álgebra es  $\tilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{f}_4 \oplus \mathfrak{a}_{2k-2}$ . Por la hipótesis de inducción,  $J$  no puede ser integrable: si lo fuera, nos induciría una estructura compleja  $\tilde{J}$  sobre  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , y se tendría  $N_{\tilde{J}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = N_J(x, y) + \mathfrak{i} = 0$  para todo  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\mathfrak{g}}$ . Contradicción.

**Caso  $e_4 \in \mathfrak{i}$ .** En este caso nos varía la estructura algebraica. El segundo de los corchetes se anula,  $[\tilde{e}_1, \tilde{e}_3] = \tilde{e}_4 = 0$ , así que el único corchete básico no nulo es  $[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] = \tilde{e}_3$ . Es decir: ahora  $\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3 \rangle$  es el álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{h}_3$ , y  $\tilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{a}_{2k-1}$ .

Esto es un problema:  $\tilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{a}_{2k-2}$  (donde  $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{a}_1$  es el álgebra de Kodaira-Thurston), y  $\mathfrak{h}_3$  sí admite estructura compleja integrable. Y también la admite  $\mathfrak{a}_{2k-2}$ , luego aquí el cociente admite estructura compleja integrable, y vamos a necesitar una línea de razonamiento distinta.

Como  $e_4 \in \mathfrak{i}$ , podemos poner  $\mathfrak{i} = \langle e_4, Je_4 \rangle$ . Por otra parte, como  $\mathfrak{i} \subseteq Z(\mathfrak{g})$ , se tendrá  $Je_4 = \mu e_4 + z$  para algún  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $z \in \mathfrak{a}_{2k} = \langle e_5, \dots, e_{2k+4} \rangle$ . Mediante un cambio de base, suponemos sin pérdida de generalidad  $z = e_5$ .

Tenemos  $Je_4 = \mu e_4 + e_5$ , y por lo tanto  $-e_4 = J^2 e_4 = J(\mu e_4 + e_5) = \mu(\mu e_4 + e_5) + Je_5$ . De aquí se deduce  $Je_5 = -(1 + \mu^2)e_4 - \mu e_5$ .

Vamos a considerar el subálgebra de Lie  $\mathfrak{h} = \langle e_1, \dots, e_5 \rangle = \mathfrak{f}_4 \oplus \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{g}$ . Consideramos el endomorfismo  $K = \pi \circ J \circ \iota$ , donde  $\iota: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$  es la inclusión y  $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  la proyección. Por supuesto, ahora  $K^2 \neq -\text{Id}_{\mathfrak{h}}$ , ya que la dimensión es impar, pero no nos es relevante.

Se tiene  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$ , con  $\mathfrak{h}' = \langle e_6, \dots, e_{2k+4} \rangle$  abeliana. Por lo tanto,  $N_J = 0$  implica  $\tilde{N}_K = 0$ , donde<sup>11</sup>

$$\tilde{N}_K(x, y) := [Kx, Ky] - K[Kx, y] - K[x, Ky] - [x, y].$$

Asumamos, pues, que  $J$  es integrable,  $N_J = 0$  y por lo tanto  $\tilde{N}_K = 0$ . Queremos ver que esto es imposible. Por las relaciones anteriores, se tiene que la matriz de  $K$  es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \mu & -1 - \mu^2 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 1 & -\mu \end{bmatrix}.$$

Calculamos<sup>12</sup> algunos valores de  $\tilde{N}_K$ , que nos van a imponer restricciones.

$$\begin{aligned} -\tilde{N}_K(e_1, e_3) &= (a_{13}a_{23}) \cdot e_1 + (a_{23}^2) \cdot e_2 + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} + a_{23}a_{33}) \cdot e_3 \\ &\quad + (a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33} + a_{23}a_{43} + a_{11}\mu + a_{33}\mu + 1) \cdot e_4 + (a_{23}a_{53} + a_{11} + a_{33}) \cdot e_5. \end{aligned}$$

Del coeficiente de  $e_2$  se deduce que  $a_{23} = 0$ , y del coeficiente de  $e_5$  que  $a_{11} = -a_{33}$ . Con eso, el coeficiente de  $e_4$  queda  $1 + a_{11}^2 + a_{13}a_{31}$ . Esto obliga a que sea  $a_{13} \neq 0 \neq a_{31}$ : en caso contrario se tendría  $1 + a_{11}^2 = 0$ , contradiciendo que  $a_{11}$  sea real. Calculamos el siguiente par de valores:

$$\begin{aligned} -\tilde{N}_K(e_2, e_3) &= (-a_{13}^2) \cdot e_1 + (-a_{13}a_{23}) \cdot e_2 + (a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23} - a_{13}a_{33}) \cdot e_3 \\ &\quad + (a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} - a_{13}a_{43} + a_{12}\mu) \cdot e_4 + (-a_{13}a_{53} + a_{12}) \cdot e_5. \end{aligned}$$

Del coeficiente de  $e_1$  se obtiene  $a_{13} = 0$ , contradiciendo lo comentado en el párrafo anterior. Y la contradicción surge de asumir que  $J$  es integrable.  $\square$

**Proposición 3.27.** Para cada  $n \geq 2$ , existe una nilvariedad compacta de dimensión real  $2n$  que no admite ninguna estructura compleja invariante a izquierda pero sí admite estructuras casi-complejas con tensor de Nijenhuis arbitrariamente pequeño.

*Demostración.* Tomamos  $k = 2n - 4$  y consideramos el álgebra de Lie  $\mathfrak{g} := \mathfrak{f}_4 \oplus \mathfrak{a}_{2k}$ . Las constantes de estructura son racionales, luego por el Criterio de Mal'cev [2.18] existe un retículo  $\Gamma$  del grupo de Lie simplemente conexo asociado  $G$ . Sea  $M = \Gamma \backslash G$  nuestra nilvariedad.

Por la proposición 3.26, cualquier estructura casi-compleja sobre  $\mathfrak{g}$  cumple  $N_J \neq 0$ , y por lo tanto  $G$  (y pasando al cociente,  $M$ ) no admite ninguna estructura casi-compleja invariante a izquierda integrable (obs. 2.11). Notar que en la proposición 3.23 habíamos demostrado que el caso  $k = 0$  no admite *ninguna* estructura compleja, que es una condición mucho más fuerte.

Consideramos la base  $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$  de  $\mathfrak{g}$ , que es una base global de campos invariantes a izquierda de  $G$ . Definimos para cada  $0 \neq t \in \mathbb{R}$  las estructuras casi-complejas que, respecto a dicha base, tienen matriz  $J_t$  dada por:

$$J_t = \begin{bmatrix} H_t & \\ & K \end{bmatrix}; \quad \text{donde } H_t = \begin{bmatrix} 1 & -2 \operatorname{csch} t & 0 & 0 \\ \sinh t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \sqrt{2} & -2(2 + \sqrt{2}) \operatorname{csch} t \\ 0 & 0 & \sinh t & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} & -I_k \\ I_k & \end{bmatrix}.$$

La matriz  $H_t$  es la dada en [FSW21] para el álgebra  $\mathfrak{f}_4$ . Las únicas componentes no nulas de  $N_t := N_{J_t}$  son<sup>13</sup> las calculadas en [FSW21], ya que las nuevas componentes abelianas  $\{e_5, \dots, e_{2n}\}$  no influyen (por bilinealidad). Son múltiplos constantes de la cosecante hiperbólica de  $t$  (o de su cuadrado), y tienden a 0 cuando  $t$  tiende a infinito. Luego también lo hace la norma de  $N_t$ .  $\square$

<sup>11</sup>Algunos autores denotan  $N_A(x, y) := [Ax, Ay] - A[Ax, y] - A[x, Ay] + A^2[x, y]$  para cualquier endomorfismo  $A$  (que coincide con nuestra definición si y solo si  $A^2 = -\operatorname{Id}$ ), así que hemos preferido desambiguarlo.

<sup>12</sup>Preferiblemente con ayuda de algún programa de cálculo simbólico, pero no juzgamos los gustos personales.

<sup>13</sup>Por referencia:  $N_t(e_1, e_3) = -4(1 + \sqrt{2}) \operatorname{csch} t \cdot e_3$ ,  $N_t(e_1, e_4) = -4 \operatorname{csch} t (2(3 + 2\sqrt{2}) \operatorname{csch} t \cdot e_3 - (1 + \sqrt{2}) \cdot e_4)$ ,  $N_t(e_2, e_4) = 4(2 + \sqrt{2})(\operatorname{csch} t)^2 \cdot e_4$ ,  $N_t(e_2, e_3) = -4 \operatorname{csch} t ((2 + \sqrt{2}) \operatorname{csch} t \cdot e_3 - (1 + \sqrt{2}) \cdot e_4)$ .



## Capítulo 4

# Comentarios finales

No queríamos despedirnos sin comentar muy por encima algunas cuestiones muy interesantes que hemos dejado en el aire. Un pequeño bis, si se nos permite.

Sea  $M$  una variedad compleja de dimensión compleja  $n$ . El mismo proceso de complexificación y descomposición del fibrado tangente  $TM$ , que realizamos en el capítulo 1, nos induce en el fibrado dual  $T^*M$  una descomposición  $(T^*)^{\mathbb{C}}M = (T^*)^{(1,0)}M \oplus (T^*)^{(0,1)}M$ . Esto a su vez induce una descomposición en las secciones, las 1-formas:

$$\Omega_{\mathbb{C}}(M) = \Omega^{(1,0)}(M) \oplus \Omega^{(0,1)}(M).$$

Ahora bien, queremos ver cómo afecta esto a la derivada exterior. Primero, notar que el espacio de  $k$ -formas se puede descomponer, en general, como:

$$\Omega_{\mathbb{C}}^k(M) := \Lambda^k \Omega_{\mathbb{C}}(M) = \sum_{p+q=k} \Omega^{(p,q)}(M), \quad \text{donde } \Omega^{(p,q)}(M) = \Lambda^p \Omega^{(1,0)}(M) \otimes \Lambda^q \Omega^{(0,1)}(M);$$

identificando el fibrado y sus secciones por brevedad. Tenemos, pues, una *bigraduación*  $(p, q)$  de las formas diferenciales: cada  $k$ -forma  $\alpha \in \Omega_{\mathbb{C}}^k(M)$  se descompone como  $\alpha^{(0,k)} + \alpha^{(1,k-1)} + \dots + \alpha^{(k,0)}$  de forma única, con cada  $\alpha^{(p,q)}$  siendo una  $k$ -forma de  $\Omega^{(p,q)}(M)$ .

Las derivadas exteriores se descomponen como  $d = \partial + \bar{\partial}$ , con

$$\begin{aligned} d: \Omega_{\mathbb{C}}^k(M) &\rightarrow \Omega_{\mathbb{C}}^{k+1}(M), \\ \partial: \Omega^{(p,q)}(M) &\rightarrow \Omega^{(p+1,q)}(M), \quad \bar{\partial}: \Omega^{(p,q)}(M) \rightarrow \Omega^{(p,q+1)}(M). \end{aligned}$$

Se tienen las relaciones  $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$ ,  $\partial \circ \partial = 0$  y  $\partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial = 0$ ; se deducen todas de  $d \circ d = 0$ . De hecho, si  $M$  es una variedad *casi-compleja*, que exista una descomposición  $d = \partial + \bar{\partial}$  de esta forma es equivalente a la condición de integrabilidad del Teorema de Newlander-Nirenberg [1.15], y en ocasiones (por ejemplo, [WG08, pág. 34]) se enuncia así.

Fijando un  $p$  y creando los complejos de cocadenas de  $\bar{\partial}$  (*operador  $d$ -barra*), obtenemos la **cohomología de Dolbeault** de la variedad compleja. Sus grupos de cohomología se denotan  $H_{\text{Dolb}}^{p,q}(M)$ .

Ahora, asumamos que nuestra variedad es Kähler compacta, con forma simpléctica asociada  $\omega$ . En ese caso, la cohomología de Dolbeault se relaciona con la singular (ahora con coeficientes en  $\mathbb{C}$ ) mediante la **descomposición de Hodge**:

$$H^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H_{\text{Dolb}}^{p,q}(M).$$

De hecho, la descomposición es independiente de la métrica Kähler elegida sobre la variedad, pero no existe un análogo para variedades complejas cualesquiera. Los grupos del lado derecho dependen de la estructura diferencial compleja de  $M$ , mientras que el de la izquierda es el grupo de cohomología singular; un invariante topológico.

Tenemos un análogo a los números de Betti, llamados **números de Hodge**, y definidos como  $h^{p,q}(M) = \dim_{\mathbb{C}} H_{\text{Dolb}}^{p,q}(M)$ .

Dos de las propiedades más importantes de los números de Hodge son:

- la **simetría de Hodge**:

$$h^{p,q}(M) = h^{q,p}(M),$$

ya que  $H_{\text{Dolb}}^{p,q}(M) \cong \overline{H_{\text{Dolb}}^{q,p}(M)}$  son conjugados complejos;

- la **dualidad de Serre**:

$$h^{p,q}(M) = h^{n-p,n-q}(M).$$

De la descomposición de Hodge se deduce:

$$b_k(M) = \sum_{k=p+q} h^{p,q}(M);$$

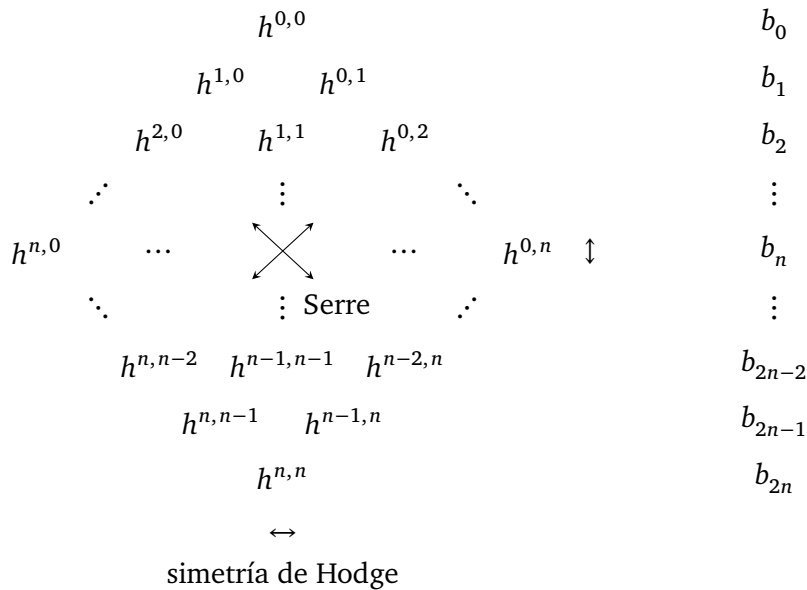
y esta es, junto a la simetría de Hodge, la razón por la que los números de Betti de orden impar son pares. Los términos de la derecha son enteros simétricos dos a dos, y queda:

$$b_k(M) = 2h^{0,k}(M) + 2h^{1,k-1}(M) + \dots + 2h^{(k-1)/2,(k+1)/2}(M).$$

En los números de Betti de orden par, sin embargo, tenemos un elemento central ( $p = q = k/2$ ), que determina la paridad de la suma.

Los números de Hodge se pueden listar formando el **diamante de Hodge**, que permite resumir visualmente las propiedades comentadas.

Figura 4.1: Diamante de Hodge.



La simetría vertical se obtiene por composición de las otras dos. Notar que en el caso de los números de Betti de variedades compactas orientables es consecuencia directa de la Dualidad de Poincaré [3.21], que en el caso de variedades Kähler compactas se realiza mediante el Teorema fuerte de Lefschetz [3.20]. Todo esto se trata con mucho más detalle en [Voi02; WG08], entre otros.



# Bibliografía

- [Agr+18] I. AGRICOLA, G. BAZZONI, O. GOERTSCHES, P. KONSTANTIS y S. ROLLENKE. «On the History of the Hopf Problem». En: *Differential Geometry and its Applications* 57 (2018): (Non)-existence of complex structures on  $S^6$ , págs. 1-9. DOI: [10/gmwqm5](https://doi.org/10/gmwqm5).
- [Aus73] L. AUSLANDER. «An Exposition of the Structure of Solvmanifolds. Part I: Algebraic Theory». En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 79.2 (1973), págs. 227-261. DOI: [10.1090/S0002-9904-1973-13134-9](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1973-13134-9).
- [BG88] C. BENSON y C. S. GORDON. «Kähler and Symplectic Structures on Nilmanifolds». En: *Topology* 27.4 (1988), págs. 513-518. DOI: [10.1016/0040-9383\(88\)90029-8](https://doi.org/10.1016/0040-9383(88)90029-8).
- [Buc99] N. BUCHDAHL. «On Compact Kähler Surfaces». En: *Annales de l'Institut Fourier* 49.1 (1999), págs. 287-302. DOI: [10.5802/aif.1674](https://doi.org/10.5802/aif.1674).
- [FSW21] L. FERNANDEZ, T. SHIN y S. O. WILSON. «Almost Complex Manifolds with Small Nijenhuis Tensor». En: *Complex Manifolds* 8.1 (2021), págs. 329-335. DOI: [10.1515/coma-2020-0122](https://doi.org/10.1515/coma-2020-0122).
- [Lam99] A. LAMARI. «Courants Kählériens et Surfaces Compactes». En: *Annales de l'Institut Fourier* 49.1 (1999), págs. 263-285. DOI: [10.5802/aif.1673](https://doi.org/10.5802/aif.1673).
- [Lee12] J. M. LEE. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2.<sup>a</sup> ed. Graduate Texts in Mathematics 218. New York: Springer, 2012. DOI: [10.1007/978-1-4419-9982-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5).
- [Mun84] J. R. MUNKRES. *Elements of Algebraic Topology*. Menlo Park, Calif: Addison-Wesley, 1984. ISBN: 978-0-201-04586-4.
- [Nom54] K. NOMIZU. «On the Cohomology of Compact Homogeneous Spaces of Nilpotent Lie Groups». En: *Annals of Mathematics* 59.3 (1954), págs. 531-538. DOI: [10.2307/1969716](https://doi.org/10.2307/1969716).
- [Sal01] S. M. SALAMON. «Complex Structures on Nilpotent Lie Algebras». En: *Journal of Pure and Applied Algebra* 157.2 (2001), págs. 311-333. DOI: [10.1016/S0022-4049\(00\)00033-5](https://doi.org/10.1016/S0022-4049(00)00033-5).
- [Shi19] T. SHIN. *Almost Complex Manifolds Are (Almost) Complex*. Ver. 1. 2019. arXiv: [1903.10043v1](https://arxiv.org/abs/1903.10043v1) [math].
- [Shi21] T. SHIN. «Directed Immersions for Complex Structures». En: *Comptes Rendus. Mathématique* 359.7 (2021), págs. 773-793. DOI: [10.5802/crmath.221](https://doi.org/10.5802/crmath.221).
- [SW14] L. SNOBL y P. WINTERNITZ. *Classification and Identification of Lie Algebras*. CRM Monograph Series 33. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2014. DOI: [10.1090/crmm/033](https://doi.org/10.1090/crmm/033).
- [Voi02] C. VOISIN. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry*. Vol. 1. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 76. New York: Cambridge University Press, 2002. DOI: [10.1017/CB09780511615344](https://doi.org/10.1017/CB09780511615344).
- [Web89] S. M. WEBSTER. «A New Proof of the Newlander-Nirenberg Theorem». En: *Mathematische Zeitschrift* 201.3 (1989), págs. 303-316. DOI: [10.1007/BF01214897](https://doi.org/10.1007/BF01214897).
- [WG08] R. O. WELLS y O. GARCÍA-PRADA. *Differential Analysis on Complex Manifolds*. 3. ed. Graduate Texts in Mathematics 65. New York, NY: Springer, 2008. DOI: [10.1007/978-0-387-73892-5](https://doi.org/10.1007/978-0-387-73892-5).



## Apéndice A. Definiciones básicas de geometría diferencial

Para intentar que el trabajo sea accesible a un público no familiarizado con las definiciones formales, daremos una revisión informal y trabajaremos casi exclusivamente en coordenadas. Por completitud, hemos incluido las definiciones formales de algunos de los conceptos empleados en el apartado A.6. La principal obra de referencia para geometría diferencial real ha sido [Lee12], y se puede consultar en caso de necesitar más detalle de lo que podemos dar aquí.

### A.1. Variedades topológicas y suaves

La geometría diferencial es el estudio de las *variedades diferenciables*, así que esa va a ser nuestra primera definición. Primero, necesitamos recordar qué es una variedad *topológica*.

**Definición A.1.** Una *carta* (o *carta topológica*)  $(U, \varphi)$  de un espacio topológico  $M$  es un homeomorfismo  $\varphi: U \subseteq M \xrightarrow{\cong} \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  ( $U$  y  $\hat{U}$  abiertos).

**Definición A.2.** Una *variedad topológica* de dimensión  $n$  es un espacio topológico Hausdorff, 2-numerable<sup>1</sup> y localmente euclídeo de dimensión  $n$ .

**Observación A.3.** *Localmente euclídeo de dimensión  $n$*  significa que para cada punto  $p \in M$  podemos hallar una carta  $\varphi_p: U_p \subseteq M \rightarrow \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  con  $p \in U_p$ . Las condiciones sobre la topología se ponen para evitar espacios con comportamiento patológico, como la recta con dos orígenes (que no es Hausdorff: no podemos separar por abiertos disjuntos los dos orígenes) o la recta larga (que no es 2-numerable: no admite una base de abiertos numerable).

Vamos a querer extender el análisis real a las variedades. Para ello, tenemos que asegurarnos de poder hablar de diferenciabilidad de funciones definidas sobre la variedad. Como las cartas nos dan una vía para pasar de nuestra variedad a  $\mathbb{R}^n$ , serán el modo natural de extender esta noción a variedades: una función  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$  será diferenciable en  $p \in M$  si existe una carta  $\varphi$  (en un entorno de  $p$ ) tal que  $f \circ \varphi^{-1}$  es diferenciable en  $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ , donde ahora  $f \circ \varphi^{-1}$  es una función de un abierto de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^k$ .

Para que esta definición tenga sentido, sin embargo, tenemos que asegurarnos de que es invariante respecto a la carta empleada; si  $\varphi, \psi$  son cartas alrededor de  $p$ , se debe cumplir que  $f \circ \varphi^{-1}$  es diferenciable en  $\varphi(p)$  si y solo si  $f \circ \psi^{-1}$  es diferenciable en  $\psi(p)$ . Un modo sencillo de asegurarnos de ello es pedir que los cambios de cartas sean difeomorfismos.

**Definición A.4.** Diremos que dos cartas  $(U, \varphi), (V, \psi)$  sobre  $M$  son *suavemente compatibles* si la intersección de sus dominios es vacía<sup>2</sup> o el cambio de cartas es un  $C^\infty$ -difeomorfismo:

$$\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \quad C^\infty\text{-difeomorfismo.}$$

De nuevo, como el dominio y codominio de los cambios de cartas son subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , podemos utilizar el concepto de diferenciabilidad ya existente.

Como vamos a querer discutir estructuras de distintos grados de regularidad sobre una misma variedad topológica, emplearemos el concepto de *atlas*.

<sup>1</sup>En ocasiones la condición de 2-numerabilidad se sustituye por la de paracompacidad; para variedades conexas, la definición resultante es equivalente.

<sup>2</sup>Si el dominio de las cartas no se interseca,  $U \cap V = \emptyset$ , no nos interesa cómo interactúan entre sí; por lo tanto, vamos a considerarlas siempre como compatibles.

**Definición A.5.** Sea  $M$  una variedad topológica. Un *atlas suave* sobre  $M$  es una colección de cartas  $\mathcal{A} := \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  tal que cualquier par de cartas es suavemente compatible.

**Definición A.6.** Una *variedad diferenciable suave* de dimensión  $n$  es un par  $(M, \mathcal{A})$ , donde  $M$  es una variedad topológica de dimensión  $n$  y  $\mathcal{A}$  es un atlas suave sobre  $M$ .

**Observación A.7.** Técnicamente, bajo esta definición, los atlas  $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})\}$  y  $\mathcal{A}_2 = \{(B(x, 1), \text{Id}_{B(x, 1)}) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$  definen distintas estructuras diferenciables sobre  $\mathbb{R}^n$ , a pesar de que claramente ambos atlas son compatibles.

Para evitar esto (y para asegurarnos de que existen cartas en entornos tan pequeños como queramos) a veces se pide al atlas  $\mathcal{A}$  que sea *maximal*; es decir, que cualquier carta compatible con  $\mathcal{A}$  esté ya en  $\mathcal{A}$ . Una aplicación rutinaria del Lema de Zorn demuestra la existencia, para cada atlas  $\mathcal{A}$  sobre  $M$ , de un único atlas maximal  $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ . Por lo tanto, para definir una estructura de variedad suave sobre  $M$  basta con definir un atlas  $\mathcal{A}$ , sin importarnos que este sea maximal, y no nos vamos a preocupar de este tipo de detalles técnicos.

La condición de compatibilidad entre las cartas se puede debilitar o reforzar, de distintos modos: por ejemplo, podemos considerar variedades diferenciables no necesariamente suaves ( $C^k$ ), o variedades analíticas ( $C^\omega$ ). En nuestro caso, vamos a querer extenderla al ámbito complejo, que es a lo que dedicaremos el capítulo 1.

Desde este momento, «carta» significará «carta suave»; es decir, compatible con el atlas.

**Definición A.8.** Una función  $f: M \rightarrow N$  entre variedades suaves se dice *suave* en el punto  $p \in M$  si  $\psi \circ f_p \circ \varphi^{-1}$  es suave para cartas  $\varphi, \psi$  de  $M$  y  $N$  respectivamente.

**Definición A.9.** Dada una carta  $\varphi$ , sus *aplicaciones coordenadas* son las funciones<sup>3</sup>  $x^i = \pi_i \circ \varphi$ , donde  $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la proyección sobre la  $i$ -ésima componente.

Ya tenemos concepto de «diferenciabilidad», pero para lograr un concepto de «diferencial» vamos a necesitar bastante más maquinaria. A partir de aquí, varias nociones serán informales. Incluiremos una referencia a la definición relevante del apartado A.6.

## A.2. El fibrado tangente

Utilizamos la notación  $M^n$  para referirnos a una variedad suave de dimensión  $n$ .

**Concepto A.10.** El *espacio tangente*  $T_p M$  a  $M^n$  en un punto  $p \in M$  es un espacio vectorial isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , que podemos visualizar como «pegado» a la variedad en dicho punto. Sus elementos actúan linealmente sobre funciones alrededor de  $p$  y devuelven otra función en un entorno de  $p$ . Si actúan sobre una función constante, el resultado es la función nula 0. [A.40] Si  $U \subset M$  es un abierto,  $T_p U \cong T_p M$ . [A.42]

**Observación A.11.** Utilizaremos la siguiente notación para los cálculos en coordenadas. Sea una función  $f: M^m \rightarrow N^n$ . Si  $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$  es una carta de  $M$  alrededor de  $p$  y  $\psi = (y^1, \dots, y^n)$  es una carta de  $N$  alrededor de  $f(p)$ , podemos escribir  $f = \psi^{-1} \circ \hat{f} \circ \varphi$ , donde:

$$\hat{f}: \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \hat{f}(p) = (\hat{f}^1(x^1, \dots, x^m), \dots, \hat{f}^n(x^1, \dots, x^m)).$$

**Propiedad A.12.** Sea  $\varphi = \{x^1, \dots, x^n\}$  una carta de  $M^n$  alrededor de  $p$ . Entonces, las derivadas parciales  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}_{i=1}^n$  forman una base de  $T_p M$ . No vamos a definir las aquí. [A.45]

**Concepto A.13.** Dada una función suave  $f: M^m \rightarrow N^n$ , su *diferencial* en un punto  $p \in M$  es un homomorfismo  $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ . Si  $f$  es un difeomorfismo, entonces  $df_p$  es un isomorfismo.

<sup>3</sup>Utilizamos la convención de superíndices para las coordenadas, que no debe confundirse con la exponenciación.

En coordenadas, viene dada por:

$$df_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{f}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)} \quad (\text{donde } \hat{p} = \varphi(p)).$$

Notar que los términos  $\hat{f}^j$  y  $x^i$  «viven» en  $\mathbb{R}^k$ , así que (con suficientes saltos de fe) podemos considerar que la diferencial es la matriz jacobiana de  $f$ ,  $Df = \left\{ \frac{\partial \hat{f}^j}{\partial x^i} \right\}_{i,j}$ . [A.41]

Nos va a ser muy útil poder considerar a la vez *todos* los espacios tangentes a cada punto de la variedad; para ello, los consideramos como *fibrado vectorial*.

**Concepto A.14.** Un *fibrado vectorial* de rango  $k$  sobre  $M$  es una colección de espacios vectoriales de dimensión  $k$  «pegados» a la variedad en cada punto. Más concretamente, es un espacio topológico  $E$  junto a una proyección continua y sobreyectiva  $\pi: E \rightarrow M$ , donde cada fibra  $\pi^{-1}(p)$  es un espacio vectorial de dimensión  $k$ . Debe satisfacer ciertas propiedades de compatibilidad, que aseguran que los espacios vectoriales «varían continuamente» a lo largo de  $M$ . [A.46]

**Definición A.15.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Su *fibrado tangente* es el fibrado  $(TM, \pi)$ , donde  $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$  y  $\pi: TM \rightarrow M$  es la proyección dada por  $p \in T_p M \mapsto p$ .

**Propiedad A.16.** El fibrado tangente  $TM$  admite una topología y una estructura diferenciable naturales que le convierten en una variedad suave de dimensión  $2n$  tal que la proyección  $\pi$  es una aplicación suave. [Lee12, pág. 66]

### A.3. Campos vectoriales y corchete de Lie

Un campo vectorial es una colección de «flechas» tangentes a nuestra variedad en cada punto.

**Definición A.17.** Un *campo vectorial*  $X$  es la asignación para cada punto  $p \in M$  de un vector  $X_p \in T_p M$ . Es decir: es una sección del fibrado tangente, una aplicación  $X: M \rightarrow TM$  tal que  $\pi \circ X = \text{Id}_M$ . Si la sección es suave, se dirá que el campo es suave. Denotamos al conjunto de campos vectoriales suaves sobre  $M$  por  $\mathfrak{X}(M)$ .

**Definición A.18.** Un *marco* en un entorno  $U \subseteq M^n$  es una colección de campos vectoriales  $\{X_1, \dots, X_n\}$  tales que  $\{X_1|_p, \dots, X_n|_p\}$  es una base de  $T_p M$  para cada  $p \in U$ . Si los campos son suaves, el marco se dice *suave*. Si  $U = M$ , el marco se dice *global*.

**Propiedad A.19.** Cada carta  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  nos induce un marco suave local  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$ , con los campos definidos en cada punto de su dominio como la derivada parcial correspondiente en dicho punto,  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ . Entonces, cada campo suave en dicho entorno se puede expresar como  $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , donde las componentes  $X^i: M \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones suaves.

Un difeomorfismo entre variedades nos relaciona los campos vectoriales sobre cada una:

**Definición A.20.** Sea  $F: M \rightarrow N$  un difeomorfismo y  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo suave. Se define el *pushforward* (o *progradiente*) de  $F$  como el campo vectorial suave sobre  $N$  dado por:

$$(F_* X)_q = dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)}).$$

Vamos a definir en coordenadas una operación bilineal entre los campos suaves, llamada *corchete de Lie* [A.47], que va a dotar a  $\mathfrak{X}(M)$  con estructura de *álgebra de Lie*.

**Propiedad A.21.** En coordenadas, el *corchete de Lie* de dos campos vectoriales suaves  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$\mathfrak{X}(M)$  es un nuevo campo vectorial suave que viene dado por:

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

**Definición A.22.** Un **álgebra de Lie** sobre  $\mathbb{R}$  es un espacio vectorial real  $\mathfrak{g}$  equipado con una aplicación **corchete**  $[-, -]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  bilineal, antisimétrica y que cumple la *identidad de Jacobi*:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Se puede comprobar que  $(\mathfrak{X}(M), [-, -])$  satisface la definición de álgebra de Lie. Estas estructuras serán muy relevantes a partir del capítulo 2, aunque ahí serán de dimensión finita.

## A.4. Fibrado cotangente y formas diferenciales

Nos va a interesar considerar el espacio vectorial dual al tangente.

**Definición A.23.** El **espacio cotangente** a una variedad  $M$  en un punto  $p$  es el dual del espacio tangente en dicho punto,  $T_p^*M := (T_pM)^*$ . Es decir: es el espacio  $T_p^*M = \{f: T_pM \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lineal}\}$ .

De modo análogo al apartado anterior, la unión disjunta de espacios cotangentes nos define el **fibrado cotangente**  $T^*M$ , al que dotamos de estructura diferenciable de modo que es una variedad suave de dimensión  $2n$  tal que la proyección es suave. Sus secciones van a llamarse 1-formas. Varias propiedades van a ser análogas (o duales) a las de los campos vectoriales.

**Definición A.24.** Una **1-forma** (o *campo de covectores*) es una sección del fibrado cotangente. Si la sección es suave, la llamaremos 1-forma *diferencial*. Denotamos por  $\Omega(M)$  al conjunto de 1-formas diferenciales sobre  $M$ .

**Definición A.25.** Un **comarco** en un entorno  $U \subseteq M^n$  es una colección de 1-formas  $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$  tales que  $\{\epsilon^1|_p, \dots, \epsilon^n|_p\}$  es una base de  $T_p^*M$  para cada  $p \in M$ . Si las 1-formas son diferenciales, el comarco se dice *suave*. Si  $U = M$ , el comarco se dice *global*.

**Propiedad A.26.** Cada carta  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  nos induce un comarco local  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ , donde  $dx^i|_p$  es el dual de  $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in T_pM$ . Es decir:  $dx^i|_p: T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  tiene coordenadas  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (con el 1 en la posición  $i$ ) respecto a la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}_{i=1}^n$  de  $T_pM$ .

Cada 1-forma diferencial en dicho entorno se puede expresar como  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$ , donde las componentes  $\alpha_i: M \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones suaves.

Para acabar con los espacios cotangentes, veamos la noción dual al pushforward: el *pullback*.

**Definición A.27.** Sea  $F: M \rightarrow N$  una función *suave* y  $\alpha \in \Omega(N)$  una 1-forma diferencial. Se define el **pullback** (o *regrediente*) de  $F$  como la 1-forma diferencial sobre  $M$  dada por  $(F^*\alpha)_p = dF_p^*(\alpha_{F(p)})$ , donde  $dF_p^*: T_{F(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$  es la aplicación dual a la diferencial  $dF_p$ . En coordenadas:

$$F^*\alpha = F^*\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i dx^i\right) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i \circ F) d(x^i \circ F).$$

Notar que aquí  $F$  no necesita ser difeomorfismo.

## A.5. Álgebras tensorial y exterior

Vamos a necesitar construir los fibrados tensoriales. Se da por conocida la definición de producto tensorial [A.48].

**Definición A.28.** El *fibrado tensorial de grado  $(k, l)$*   $T^{(k,l)}TM$  es aquel cuyas fibras son:

$$T^{(k,l)}TM = \coprod_{p \in M} \overbrace{T_p^*M \otimes \cdots \otimes T_p^*M}^{k \text{ veces}} \otimes \overbrace{T_pM \otimes \cdots \otimes T_pM}^{l \text{ veces}}.$$

Si  $k = l = 0$ , se toma  $T^{(0,0)}TM = M \times \mathbb{R}$ . Si  $k = 0$  y  $l \neq 0$  o viceversa, se ignora el término nulo. Notar que  $T^{(0,1)}TM = TM$  y  $T^{(1,0)}TM = T^*M$ .

Estos fibrados también van a ser variedades suaves cuya proyección sobre  $M$  es suave. A sus espacios de secciones suaves los vamos a denotar de un modo más genérico:  $\Gamma(T^{(k,l)}TM)$ .

**Propiedad A.29.** Podemos identificar los tensores  $v \in \otimes^k V^* \otimes \otimes^l V$  con aplicaciones  $k$ -lineales de  $V^k$  en  $V^l$ . En particular, los tensores de grado  $(1, 1)$  son endomorfismos de  $V$ .

**Definición A.30.** Definimos el *fibrado alternado de grado  $k$*  como

$$\Lambda^k T^*M = \coprod_{p \in M} \Lambda^k T_p^*M,$$

donde  $\Lambda^k T_p^*M$  es el subespacio de tensores *alternados*<sup>4</sup> de  $\otimes^k T_p^*M$ . (El álgebra exterior de  $T_p^*M$ ). Las secciones suaves  $\alpha \in \Omega^k(M) := \Gamma(\Lambda^k T^*M)$  se llaman  *$k$ -formas diferenciales*.

**Definición A.31.** El pullback de una  $k$ -forma  $\alpha \in \Omega^k(N)$  por una aplicación suave  $F: M \rightarrow N$  es la  $k$ -forma sobre  $M$  dada por  $(F_p^*(\alpha))_p(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k))$ .

**Concepto A.32.** El *wedge*  $\wedge: \Lambda^k V \times \Lambda^l V \rightarrow \Lambda^{k+l} V$  es un operador bilineal, asociativo y anticonmutativo ( $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$ ).

**Observación A.33.** Si  $\beta$  es una  $k$ -forma con  $k$  impar, por la anticonmutatividad del wedge se tiene  $\beta^2 = \beta \wedge \beta = (-1)^{k^2} \beta \wedge \beta = -\beta \wedge \beta$  y por lo tanto  $\beta^2 = 0$ .

**Definición A.34.** Podemos definir una *derivada exterior*  $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  entre  $k$ -formas, que nos devolverá una  $k + 1$ -forma.

$$d\left(\sum_J' \alpha_J dx^J\right) = \sum_J' d\alpha_J \wedge dx^J.$$

Aquí,  $J = \{j_1, \dots, j_k\}$  es un multiíndice, y el apóstrofo indica que sumamos solo sobre índices crecientes (es decir,  $j_1 < \dots < j_k$ ).

**Propiedad A.35.** La derivada exterior de un wedge se calcula de la siguiente forma:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta, \quad \text{donde } k \text{ es el grado de } \alpha.$$

**Propiedad A.36.** Sea  $\alpha \in \Omega(M)$  una 1-forma diferencial y sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  campos vectoriales suaves. Se tiene la siguiente fórmula, debida a Cartan:  $d\alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y])$ .

Finalmente, vamos a dar las definiciones de carácter especialmente técnico.

<sup>4</sup>Una función  $k$ -multilineal  $v$  se dice alternada si intercambiar dos de sus argumentos invierte el signo del resultado.

## A.6. Definiciones técnicas de geometría diferencial

Vamos a empezar definiendo formalmente los espacios tangentes. Existen varias definiciones equivalentes entre sí, y aún más si nos restringimos al caso suave. Como vamos a trabajar con funciones holomorfas (luego analíticas), la definición más adecuada<sup>5</sup> va a ser la que hace uso de *gérmenes* de funciones.

**Definición A.37.** Sea  $M$  una variedad suave y sea  $p \in M$  un punto. Consideramos el conjunto de funciones suaves con valores en  $\mathbb{R}$  que toman como dominio un abierto alrededor de  $p$ :

$$F_p = \{f: U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R} \mid p \in U, f \text{ suave}\}.$$

Ahora, definimos una relación de equivalencia sobre este conjunto, donde dos elementos se relacionarán si y solo si coinciden en un entorno de  $p$ :

$$f \sim g \iff f|_U = g|_U, \text{ para algún } U \text{ entorno abierto de } p.$$

Denotamos por  $\mathcal{C}_p^\infty(M) := F_p/\sim$  al cociente por esta relación de equivalencia, y llamamos a sus elementos *gérmenes* de funciones suaves en  $p$ .

Los gérmenes dan un modo cómodo de trabajar con las propiedades locales de un espacio, a cambio de generar una complicación conceptual extra.

**Observación A.38.** Si  $f$  es una función suave con valores reales en un entorno de  $p$ , llamamos a  $[f]_p \in \mathcal{C}_p^\infty(M)$  el *gérmen de  $f$  en  $p$* .

Se puede comprobar que  $\mathcal{C}_p^\infty(M)$  es un  $\mathbb{R}$ -álgebra asociativa, con las operaciones<sup>6</sup>:

$$c[f]_p = [cf]_p, \quad [f]_p + [g]_p = [f + g]_p, \quad [f]_p [g]_p = [fg]_p.$$

Para poder definir el espacio tangente, necesitamos un último paso.

**Definición A.39.** Sea  $\mathcal{C}_p^\infty(M)$  el conjunto de gérmenes de funciones suaves en  $p$ . Una *derivación* de  $\mathcal{C}_p^\infty(M)$  es una aplicación lineal  $\nu: \mathcal{C}_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfaciendo la siguiente regla del producto:

$$\nu[fg]_p = f(p)\nu[g]_p + g(p)\nu[f]_p.$$

**Definición A.40.** El *espacio tangente*  $T_p M$  a una variedad  $M$  en un punto  $p$  es el conjunto de todas las derivaciones del  $\mathbb{R}$ -álgebra de gérmenes de funciones suaves en  $p$ .

Es decir: los elementos del espacio tangente (**vectores** tangentes) toman una función (alrededor de un punto) como argumento, y devuelven un número real, de acuerdo a ciertas condiciones que vienen dadas por la linealidad y la regla del producto.

Esto nos va a permitir, entre otras cosas, definir la *diferencial* de una función con dominio nuestra variedad.

**Definición A.41.** Sea  $F: M \rightarrow N$  una función suave entre variedades, y sea  $p \in M$  un punto. Definimos la *diferencial* de  $F$  en  $p$  como:

$$dF_p: T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N, \quad \nu \longmapsto dF_p(\nu) := \nu(- \circ F).$$

Es decir, la diferencial de una función nos convierte un vector tangente a  $p \in M$  a un vector tangente a  $F(p) \in N$ ; en particular, dado un  $\nu \in T_p M$ , nos da la siguiente derivación de  $\mathcal{C}_{F(p)}^\infty(N)$ :

$$dF_p(\nu) = \nu(- \circ F): \mathcal{C}_{F(p)}^\infty(N) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad [f]_{F(p)} \longmapsto dF_p(\nu)([f]_{F(p)}) = \nu(f \circ F).$$

<sup>5</sup>Como consecuencia de que una función analítica definida sobre un abierto de  $\mathbb{R}^n$  es 0 en un subconjunto denso si y solo si es 0 en todo el abierto, nuestra definición debe ser puramente local.

<sup>6</sup>Los representantes de las clases de equivalencia están definidos en los dominios donde tienen sentido; es decir, en la intersección de dominios.



Las siguientes dos proposiciones [Lee12, págs. 57-59] nos identifican el espacio tangente de un subespacio abierto y de un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

**Proposición A.42.** Sea  $M$  una variedad suave y  $U \subset M$  una subvariedad abierta. Si  $\iota: U \hookrightarrow M$  es la inclusión, su diferencial nos da en cada punto un isomorfismo:  $d\iota_p: T_p U \xrightarrow{\cong} T_p M$ .

Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita. Una norma cualquiera induce una topología sobre  $V$  (independiente de la elección de norma). Si  $(E_1, \dots, E_n)$  es una base ordenada de  $V$ , consideramos el isomorfismo  $E: \mathbb{R}^n \rightarrow V$  dado por  $E(x) = \sum_{i=1}^n x^i E_i$ . Entonces,  $(V, E^{-1})$  es una carta, y se puede comprobar que es compatible con la definida análogamente para cualquier otra base. Esto nos induce una estructura suave canónica sobre  $V$ .

**Proposición A.43.** Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita con su estructura suave estándar y sea  $a \in V$  un punto. Definimos para cada  $v \in V$  la derivación:

$$D_v|_a: C_p^\infty(V) \rightarrow \mathbb{R}, \quad D_v|_a[f]_a := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv).$$

Entonces,  $v \mapsto D_v|_a$  es un isomorfismo canónico de  $V$  a  $T_a V$ , de modo que para cada aplicación lineal  $L: V \rightarrow W$  el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\cong} & T_a V \\ \downarrow L & & \downarrow dL_a \\ W & \xrightarrow{\cong} & T_{L(a)} W. \end{array}$$

En particular, uniendo estas dos proposiciones:

**Observación A.44.** La diferencial de una carta  $\varphi$  en un punto  $p$  nos da un isomorfismo natural entre el espacio tangente  $T_p M$  y el espacio euclídeo  $T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ .

También podemos, por ejemplo, identificar el espacio tangente de  $GL_n(\mathbb{R})$  con el espacio completo de matrices  $M_n(\mathbb{R})$ . Así, se puede comprobar que el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie  $GL_n(\mathbb{R})$  es  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) := (M_n(\mathbb{R}), [-, -])$ , donde el corchete es el conmutador de matrices  $[A, B] = AB - BA$ .

**Definición A.45.** Sea  $\varphi = \{x^1, \dots, x^n\}$  una carta de  $M^n$  en un entorno  $U$  de  $p$ . Definimos sus **derivadas parciales** como las siguientes derivaciones de gérmenes en  $p$ :

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p: C_p^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p [f]_p := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)).$$

Se puede comprobar que forman una base para el espacio tangente  $T_p M$  [Lee12, pág. 60].

**Definición A.46.** Un **fibrado vectorial** de rango  $k$  sobre  $M$  es un par  $(E, \pi)$  donde  $E$  es un espacio topológico y  $\pi: E \rightarrow M$  es una aplicación continua sobreyectiva, satisfaciendo:

- i) Para cada  $p \in M$ , la fibra  $E_p = \pi^{-1}(p)$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $k$ .
- ii) Para cada  $p \in M$ , existe un entorno  $U$  de  $p$  y un homeomorfismo  $\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  (trivialización local) satisfaciendo:
  - a)  $\text{pr}_1 \circ \Phi = \pi$  (donde  $\text{pr}_1: U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$  es la proyección sobre la primera componente);
  - b) para cada  $q \in U$ , la restricción  $\Phi|_{E_q}: E_q \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$  es un isomorfismo lineal.

Un fibrado vectorial se dice **suave** si  $E$  y  $M$  son variedades suaves, la proyección  $\pi$  es suave y las trivializaciones locales son difeomorfismos. En el caso complejo, se cambia  $\mathbb{R}$  por  $\mathbb{C}$  y suavidad por holomorfía. Se obtiene así la definición de fibrado **holomorfo**.

**Definición A.47.** El *corchete de Lie* de dos campos suaves  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  se define como:

$$[-, -]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \longmapsto [X, Y](-) := XY(-) - YX(-).$$

Es decir,  $[X, Y]_p(f) = X_p(Y_p([f]_p)) - Y_p(X_p([f]_p))$ .

Comprobar que está bien definido es una cuenta sencilla [Lee12, pág. 186].

**Definición A.48.** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ . Vamos a definir su *producto tensorial* mediante una propiedad universal.

Considerar el siguiente diagrama, donde  $Z$  es otro espacio vectorial y todas las flechas son homomorfismos ( $\varphi$  y  $h$  son bilineales y  $\tilde{h}$  es lineal):

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\varphi} & V \otimes W \\ & \searrow h & \downarrow \tilde{h} \\ & & Z \end{array}$$

Definimos el producto tensorial  $V \otimes W$  como el único espacio (salvo isomorfismo) tal que para cada aplicación bilineal  $h: V \times W \rightarrow Z$  existe una única aplicación lineal  $\tilde{h}: V \otimes W \rightarrow Z$  que hace que el diagrama conmute. (Es decir,  $h = \tilde{h} \circ \varphi$ , y  $h(v, w) = \tilde{h}(\varphi(v, w)) := \tilde{h}(v \otimes w)$ ).

**Observación A.49.** Una realización del producto tensorial para un número finito de espacios la da el cociente

$$\mathcal{F}(V_1 \times \cdots \times V_k) / \mathcal{R},$$

donde  $\mathcal{F}(S)$  denota al  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial libre sobre  $S$  y  $\mathcal{R}$  es el subespacio formado por los elementos de alguna de las dos formas siguientes:

$$\begin{aligned} & (v_1, \dots, av_i, \dots, v_k) - a(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k), \\ & (v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_k) - (v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) - (v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k). \end{aligned}$$

( $v_j, v'_j \in V_j$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$  y  $a \in \mathbb{R}$ ).

Recordar que el  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial libre sobre un conjunto  $S$  es el formado por las *combinaciones lineales formales* de elementos de  $S$ , que podemos definir como el conjunto de funciones  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(s) \neq 0$  para un número finito de  $s \in S$  (con la suma y el producto por escalares).

## Apéndice B. Álgebras de Lie reales nilpotentes de dimensión 6

Replicamos aquí el Cuadro A.1 de [Sal01]. En primer lugar, explicamos qué representa cada columna.

- Las dos primeras columnas,  $b_1$  y  $b_2$ , son los números de Betti.
- La tercera columna es  $6 - s$ , donde  $s$  es el paso de nilpotencia.
- La cuarta columna son las ecuaciones de estructura del álgebra, sin espacios; por ejemplo, la primera de ellas,  $(0, 0, 12, 13, 14 + 23, 34 + 52)$ , significa:

$$\begin{aligned} de^1 &= 0, & de^2 &= 0, & de^3 &= e^1 \wedge e^2, \\ de^4 &= e^1 \wedge e^3, & de^5 &= e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3, & de^6 &= e^3 \wedge e^4 + e^5 \wedge e^2. \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -e_3, & [e_1, e_3] &= -e_4, & [e_1, e_4] &= -e_5, \\ [e_2, e_3] &= -e_5, & [e_3, e_4] &= -e_6, & [e_5, e_2] &= -e_6. \end{aligned}$$

Notar que el convenio de signo es el contrario al que elegimos en la definición 2.7. La distinción no es muy importante, ya que cambiar el signo de un término es un isomorfismo; lo único que nos cambia es la orientación.

- $\oplus$  son las dimensiones de las subálgebras irreducibles de  $\mathfrak{g}$  (vacío si  $\mathfrak{g}$  es irreducible); por ejemplo, el álgebra con descomposición  $1 + 1 + 4$  es  $\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{f}_4$ .
- $\mathcal{C}(\mathfrak{g}) \neq \emptyset$  indica si existen estructuras complejas integrables sobre  $\mathfrak{g}$ .
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{S}(\mathfrak{g})$  es una cota superior del número de estructuras reales simplécticas sobre  $\mathfrak{g}$  (vacío si no existen).

La notación de las últimas dos columnas se debe a que en la construcción de [Sal01, §4],  $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$  y  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$  son *espacios de móduli*; son una colección de objetos algebraicos dotados de estructura geométrica diferenciable. Los puntos de  $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$  son estructuras complejas integrables sobre  $\mathfrak{g}$ , mientras que los puntos de  $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$  son estructuras reales simplécticas sobre  $\mathfrak{g}$ . Si queremos clasificarlas salvo isomorfismo, tenemos que tomar el cociente de dichos espacios por los automorfismos de  $\mathfrak{g}$ ,  $\text{Aut } \mathfrak{g}$ .

El artículo de Salamon daba en el cuadro una cota rudimentaria de  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(\mathfrak{g})$ , que para nuestros propósitos es innecesario. La clasificación completa de estructuras complejas salvo isomorfismo en álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6 se obtendría más tarde<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>M. Ceballos González y col. «Invariant Complex Structures on 6-Nilmanifolds: Classification, Frölicher Spectral Sequence and Special Hermitian Metrics». En: *The Journal of Geometric Analysis* 26.1 (2016), págs. 252-286. doi: [10.1007/s12220-014-9548-4](https://doi.org/10.1007/s12220-014-9548-4).

$b_1$	$b_2$	$6-s$	Estructura	$\oplus$	$\mathcal{C}(\mathfrak{g}) \neq \emptyset$	$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{S}(\mathfrak{g})$
2	2	1	(0, 0, 12, 13, 14+23, 34+52)		—	—
2	2	1	(0, 0, 12, 13, 14, 34+52)		—	—
2	3	1	(0, 0, 12, 13, 14, 15)		—	7
2	3	1	(0, 0, 12, 13, 14+23, 24+15)		—	7
2	3	1	(0, 0, 12, 13, 14, 23+15)		—	7
2	4	2	(0, 0, 12, 13, 23, 14)		—	8
2	4	2	(0, 0, 12, 13, 23, 14-25)		—	8
2	4	2	(0, 0, 12, 13, 23, 14+25)		✓	8
3	4	2	(0, 0, 0, 12, 14-23, 15+34)		—	7
3	5	2	(0, 0, 0, 12, 14, 15+23)		—	8
3	5	2	(0, 0, 0, 12, 14, 15+23+24)		—	8
3	5	2	(0, 0, 0, 12, 14, 15+24)	1+5	—	8
3	5	2	(0, 0, 0, 12, 14, 15)	1+5	—	8
3	5	3	(0, 0, 0, 12, 13, 14+35)		—	—
3	5	3	(0, 0, 0, 12, 23, 14+35)		—	—
3	5	3	(0, 0, 0, 12, 23, 14-35)		✓	—
3	5	3	(0, 0, 0, 12, 14, 24)	1+5	✓	—
3	5	3	(0, 0, 0, 12, 13+42, 14+23)		✓	8
3	5	3	(0, 0, 0, 12, 14, 13+42)		✓	8
3	5	3	(0, 0, 0, 12, 13+14, 24)		✓	8
3	6	3	(0, 0, 0, 12, 13, 14+23)		✓	9
3	6	3	(0, 0, 0, 12, 13, 24)		✓	9
3	6	3	(0, 0, 0, 12, 13, 14)		✓	9
3	8	4	(0, 0, 0, 12, 13, 23)		✓	9
4	6	3	(0, 0, 0, 0, 12, 15+34)		—	—
4	7	3	(0, 0, 0, 0, 12, 15)	1+1+4	—	9
4	7	3	(0, 0, 0, 0, 12, 14+25)	1+5	✓	9
4	8	4	(0, 0, 0, 0, 13+42, 14+23)		✓	10
4	8	4	(0, 0, 0, 0, 12, 14+23)		✓	10
4	8	4	(0, 0, 0, 0, 12, 34)	3+3	✓	10
4	9	4	(0, 0, 0, 0, 12, 13)	1+5	✓	11
5	9	4	(0, 0, 0, 0, 0, 12+34)	1+5	✓	—
5	11	4	(0, 0, 0, 0, 0, 12)	1+1+1+3	✓	12
6	15	5	(0, 0, 0, 0, 0, 0)	1+...+1	✓	15

Cuadro B.1: Álgebras de Lie reales nilpotentes de dimensión 6 [Sal01, Cuadro A.1].