UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Ciencias e Ingenierías

Una aproximación a las funciones elípticas y sus aplicaciones

Ensayo Académico

Eddy Santiago Achig Andrango

Matemáticas

Trabajo de titulación presentado como requisito
para la obtención del título de
Licenciado en Matemáticas

Quito, 19 de diciembre de 2016

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

COLEGIO DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

HOJA DE CALIFICACIÓN
DE TRABAJO DE TITULACIÓN

Una aproximación a alas funciones elípticas y sus aplicaciones

Eddy Santiago Achig Andrango

Calificación:

Nombre del profesor, Título académico — David Fernando Hervas Ortega , PhD. en Matemáticas Aplicadas

Firma del profesor ____________________

Quito, 19 de diciembre de 2016

Derechos de Autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma del estudiante: _______________________________________

Nombres y apellidos: Eddy Santiago Achig Andrango

Código: 00118621

Cédula de Identidad: 171969160-0

Lugar y fecha: Quito, diciembre de 2016

Resumen

El presente trabajo realiza una aproximación a las funciones elípticas. En primer lugar, se definen las funciones elípticas sobre $\mathbb{C}$ y se estudian las propiedades que tiene. Después se plantea el problema de existencia de una función elíptica, para el cual se propone una solución constructiva a partir de la ecuación de conducción de calor. Se definen las funciones theta para poder construir las funciones elípticas de Jacobi. Además, se demuestran ciertas propiedades e identidades útiles de las funciones theta y de las funciones elípticas de Jacobi. A partir de las funciones elípticas de Jacobi, se estudian brevemente las integrales elípticas de primeras y de segunda especie. Finalmente, se presentan aplicaciones de las funciones elípticas de Jacobi en la física y la geometría.

El enfoque de esta aproximación es seguir los primeros pasos históricos de las funciones elípticas, empezando por las funciones theta que nos ayudarán a construir las primeras funciones elípticas como lo hizo Jacobi. Para encontrar las funciones theta se utiliza la ecuación de conducción de calor para mostrar que estas funciones no se encuentran lejos de la realidad física.

El estudio de las funciones elípticas, ha dado soluciones analíticas para varios problemas de la física y geometría. Además de estos resultado, una de las grandes aplicaciones de las funciones elípticas es en teoría de números, donde se utiliza el estudio de las funciones elípticas junto con las curvas elípticas. Esta aplicación ha dado grandes resultados como ser parte fundamental de la demostración del último teorema de Fermat.

Palabras clave: Funciones elípticas, Funciones theta, Análisis complejo, Funciones de Jacobi.

Abstract

The present work makes an approximation to the elliptic functions. First, elliptic functions on $\mathbb{C}$ are defined and their properties are studied. Then the problem of the existence of an elliptic function is proposed, for which a constructive solution is exposed from the heat conduction equation. Theta functions are defined to be able to construct Jacobi's elliptic functions. In addition, certain properties and useful identities of the theta functions and Jacobi's elliptic functions are demonstrated. From the elliptic functions of Jacobi, the elliptic integrals of first and second species are briefly studied. Finally, applications of Jacobi's elliptic functions in physics and geometry are presented.

The objective of this approach is to follow the first historical steps of the elliptic functions, beginning with theta functions that will help us to construct the first elliptic functions as Jacobi did. To find theta functions we use the heat conduction equation to show that these functions are not far from physical reality.

The study of elliptic functions, has given analytical solutions to various problems on physics and geometry. In addition to these results, one of the great applications of elliptic functions is in number theory, where the study of elliptic functions together with elliptic curves is used. This application has given great results as being a fundamental part of the demonstration of Fermat's last theorem.

Keywords: Elliptic functions, Theta functions, Complex analysis, Jacobi's functions.

Índice general

Índice de figuras

Introducción

En el presente trabajo vamos a considerar funciones definidas sobre $\mathbb{C}$ y a valores complejos. Una función $f(z)$ se define como una función **simple periódica** de z si existe una constante distinta de cero w tal que

$$f(z+w) = f(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Este número w es el periodo de $f(z)$. Claramente, si $n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, entonces nw es también un periodo. Si w es un periodo tal que ningún submúltiplo de w es periodo, entonces w es un **periodo fundamental** (Copson, 1935).

Por ejemplo, sabemos que e^z es periódica de periodo $2\pi i$

$$e^{z+2\pi i} = e^z = e^{z+2n\pi i}$$

y $2\pi i$ es el periodo fundamental de e^z.

Nosotros nos preguntamos si existen **funciones meromorfas** (funciones holomorfas excepto en sus polos) tales que para $w_1 \neq w_2$ y ambos diferentes de cero, tengamos:

$$f(z+w_1) = f(z)$$
$$f(z+w_2) = f(z)$$

donde w_1 y w_2 sean periodos fundamentales. Jacobi respondió a esta pregunta al analizar el caso en el cual la razón entre w_1 y w_2 es real, y cuando es imaginario (Stein y Shakarchi, 2010). En el siguiente texto utilizamos la terminología de **función holomorfa** para referirnos a una función analítica.

Capítulo 1

Funciones elípticas

1.1. Definición

Nuestro estudio se centrará en funciones meromorfas f en $\mathbb{C}$ que tienen dos periodos fundamentales, es decir, que existen dos números complejos diferentes de cero w_1 y w_2 tales que

$$f(z + w_1) = f(z) \text{ y } f(z + w_2) = f(z)$$

para toda $z \in \mathbb{C}$.

Definición 1.1. Una función con dos periodos fundamentales es llamada **doble periódica**.

Para tener dos periodos fundamentales es necesario que w_1 y w_2 sean linealmente independientes cuando consideramos a $\mathbb{C}$ como un espacio vectorial definido sobre C.

Supongamos que w_1 y w_2 son linealmente dependientes sobre $\mathbb{R}$, es decir, $w_2/w_1 \in \mathbb{R}$. Si w_2/w_1 es racional, digamos igual a p/q, donde p y q son relativamente primos. Entonces por el Teorema de Bachet-Bézout (Brochero, Moreira, Saldanha, y Tengan, 2015) existen m, $n \in \mathbb{Z}$ tal que $mq + np = 1$. Ahora consideremos:

$$f(z + mw_1 + nw_2) = f(z)$$

sabiendo que $w_2 = \frac{p}{q}w_1$, tenemos:

$$mw_1 + nw_2 = mw_1 + \tfrac{p}{q}w_1 = \tfrac{(mq+np)}{q}w_1 = \tfrac{1}{q}w_1$$

Concluimos que si w_2/w_1 es racional, entonces f es una función periódica con un simple periodo fundamental $w_0 = \frac{1}{q}w_1$.
Si w_2/w_1 es irracional igual a τ. Notemos que al fijar z_0, tenemos que

$$f(z_0 + mw_1 + nw_2) = f(z_0)$$

dado que $w_2 = \tau w_1$, por lo tanto $f(z_0) = f(z_0 + (m + n\tau)w_1)$. Dado que el conjunto $\{m + n\tau | m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$ (Brochero y cols., 2015), y por la continuidad de la función tenemos que $f(z_0) = f(z_0 + kw_1)$ para toda $k \in \mathbb{R}$.Lo que implica que la función f es constante. Por lo tanto es necesario que los periodos w_1 y w_2 sean linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

Describiremos a continuación una normalización que será útil. Sea $\tau = w_2/w_1$. Dado que $\tau \notin \mathbb{R}$, y que τ y $1/\tau$ tienen sus partes imaginarias con signos opuestos, vamos a asumir (después de posibles cambios entre w_1 y w_2) que $Im(\tau) > 0$. Observemos que la función f tiene periodos w_1 y w_2 si y solamente si la función $F(z) = f(w_1 z)$ tiene periodos 1 y τ, y además, la función f es meromorfa si y solamente si la función F es meromorfa. También, las propiedades de f son deducibles de las propiedades de F. Por lo tanto, vamos a asumir sin perdida de generalidad que f es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con periodos 1 y τ donde $Im(\tau) > 0$.

Notemos que tras aplicar varias veces las condiciones de periodicidad tenemos

$$f(z + n + m\tau) = f(z) \tag{1.1}$$

para todos los los enteros n, m y toda $z \in \mathbb{C}$, y por ello es natural considerar la cuadrícula en $\mathbb{C}$ definida por:

$$\Lambda = \{n + m\tau | n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Decimos que 1 y τ generan Λ.

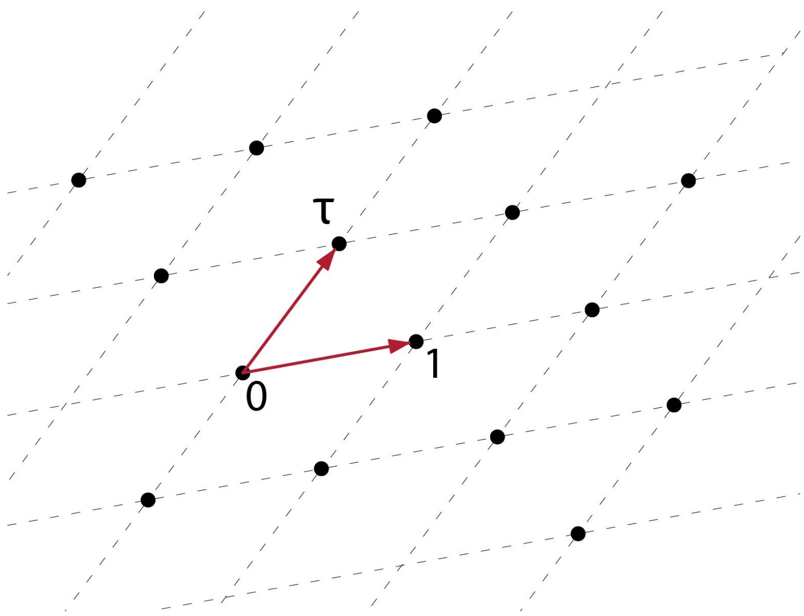

Figura 1.1: La cuadrícula Λ generada por 1 y τ

La ecuación (1.1) nos dice que f es constante bajo traslaciones de elementos de Λ.

Definición 1.2. El **paralelogramo fundamental** (P_0) es el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} | z = a + b\tau \text{ donde } 0 \leq a < 1 \text{ y } 0 \leq b < 1\}$$

El paralelogramo fundamental es de gran importancia ya que f está totalmente determinada por su comportamiento en P_0. Como consecuencia de la definición tenemos que:

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}} (n + m\tau + P_0)$$

es decir, la cuadrícula Λ es una cobertura disjunta del plano complejo.

Definición 1.3. Dos números complejos son **congruentes módulo** Λ si

$$z = w + n + m\tau \text{ para algún } n,\ m \in \mathbb{Z}$$

y escribimos $z \sim w$.

En otras palabras, z y w difieren por un punto en la cuadrícula Λ, es decir $z - w \in \Lambda$. Por (1.1) concluimos que $f(z) = f(w)$ cuando $z \sim w$.

Lema 1.4. *La relación de congruencia módulo es una relación de equivalencia*

Demostración.

1. *Reflexividad.* Tenemos que $z = z + 0 + 0\tau$, y $0 + 0\tau \in \Lambda$. Tenemos que $z \sim z$.

2. *Simetría.* Si tenemos $z \sim w$, entonces $z = w + h$, donde $h \in \Lambda$. Notemos que $w = z + (-h)$, donde $-h \in \Lambda$, por lo tanto $w \sim z$.

3. *Transitividad.* Sea $z \sim w$ y $w \sim u$, entonces existen $h, k \in \Lambda$ tal que $z = w + h$ y $w = u + k$. Por lo tanto $z = (u + k) + h = u + (k + h)$, donde $k + h \in \Lambda$. Concluimos que $z \sim u$

Proposición 1.5. *Sea f una función meromorfa con dos periodos 1 y τ que genera la cuadrícula Λ. Entonces:*

1. *Todo punto en $\mathbb{C}$ es congruente a un único punto en el paralelogramo fundamental*

2. *Todo punto en $\mathbb{C}$ es congruente a un único punto en cualquier paralelogramo del tipo $P_0 + \alpha$, donde P_0 es el paralelogramo fundamental y α es cualquier número complejo.*

3. *La función f está completamente determinada por sus valores en cualquier paralelogramo del tipo $P_0 + \alpha$, donde P_0 es el paralelogramo fundamental y α es cualquier número complejo.*

Demostración. (Stein y Shakarchi, 2010)

1. Sea $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces podemos escribir $z = a + b\tau$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Esto es posible ya que 1 y τ son linealmente independientes sobre los reales, es decir, generan el plano complejo. Después, escogemos n, m como los mayores enteros $\leq a$ y $\leq b$ respectivamente. Consideremos ahora $w = z - n - m\tau$ donde $w \sim z$ y $w \in P_0$. Para demostrar unicidad, supongamos que existen w , $w' \in P_0$ con $w \sim z$ y $w' \sim z$. Tenemos entonces $w \sim w'$ (Por la transitividad de $\sim$ Lema 1.4). Si escribimos $w = a + b\tau$ y $w' = c + d\tau$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sigue que $w - w' = (a - c) + (b - d)\tau \in \Lambda$. Y por lo tanto, $a - c, b - d \in \mathbb{Z}$. Sin embrago, ya que $0 \leq a, b, c, d < 1$, entonces $-1 < a - c < 1$ y $-1 < b - d < 1$. Por lo que concluimos que $a = c$, $b = d$, y por lo tanto $w = w'$.

2. Sea un punto z_0 en el plano complejo y sea P un paralelogramo de la forma $P_0 + \alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$. Consideremos $z_0 - \alpha$, por la parte anterior tenemos que existe un único $w_0 \in P_0$ tal que $z_0 - \alpha \sim w_0$, es decir, existe $h \in \Lambda$ tal que $z_0 - \alpha = w_0 + h$. Por lo tanto, $z_0 = w_0 + \alpha + h$, donde $w_0 + \alpha \in P$. Por lo tanto podemos concluir que $w_0 + \alpha$ es el único punto congruente a z_0 en P.

3. De la parte 1. podemos concluir que la función f está totalmente determinada por sus valores en P_0. Y por la parte 2. aplicada a todos los puntos en P_0, concluimos que la función f está completamente determinada por sus valores en cualquier paralelogramo del tipo $P_0 + \alpha$, donde P_0 es el paralelogramo fundamental y α es cualquier número complejo.

Teorema 1.6. *Una función analítica en todo $\mathbb{C}$ y doble periódica es constante.*

Demostración. (Stein y Shakarchi, 2010) Por la Proposición 1.5 tenemos que la función está completamente determinada por sus valores en P_0, dado que la clausura de P_0 es un compacto, podemos concluir que la función está acotada. Por el teorema de Liouville, sabemos que toda función entera y acotada es constante.

Definición 1.7. Una función meromorfa doble periódica no constante es llamada una **función elíptica**.

1.2. Propiedades

Teorema 1.8. *Las funciones elípticas tienen finitos ceros y polos en el paralelogramo fundamental Po*

Demostración. (Stein y Shakarchi, 2010) Sabemos que una función meromorfa sólo puede tener finitos ceros y polos en cualquier disco, concluimos que las funciones elípticas van a tener finitos ceros y polos en el paralelogramo fundamental. En especial, podemos concluir que tendrá finitos ceros y polos en todos los paralelogramos P del tipo $P_0 + \alpha$, donde P_0 es el paralelogramo fundamental y α es cualquier número complejo. Como es usual, contamos los ceros y polos con su multiplicidad.

Teorema 1.9. *El número total de polos de una función elíptica en P_0 es siempre ≥ 2.*

Demostración. (Stein y Shakarchi, 2010) Supongamos que f no tiene polos en la frontera ∂P_0 del paralelogramo fundamental. Por el teorema del residuo tenemos:

$$\int_{\partial P_0} f(z)dz = 2\pi i \sum \text{res} f$$

Considerando la integral y rompiendo en sus cuatro caminos tenemos que:

$$\int_{\partial P_0} f(z)dz = \int_0^1 f(z)dz + \int_1^{1+\tau} f(z)dz + \int_{1+\tau}^{\tau} f(z)dz + \int_{\tau}^{0} f(z)dz$$

por la periodicidad de f, tenemos que

$$\int_1^{1+\tau} f(z)dz = \int_0^{\tau} f(z)dz \text{ y también tenemos, } \int_{1+\tau}^{\tau} f(z)dz = \int_1^{0} f(z)dz$$

y por tanto $\int_{\partial P_0} f(z)dz = 2\pi i \sum \text{res} f = 0$. Por lo tanto concluimos que f tiene por lo menos dos polos en P_0.
Ahora supongamos que f tiene un polo en ∂P_0, escojamos un $h \in \mathbb{C}$, con $||h||$ pequeño, tal que si $P = h + P_0$, entonces f no tiene polos en ∂P. Con el argumento anterior, sabemos que P tiene al menos dos polos en P, y por lo tanto f tiene al menos dos polos en P_0.

Lema 1.10. *Si f es una función holomorfa periódica con periodo ξ, entonces f' también es una función periódica con periodo ξ.*

Demostración. (Stein y Shakarchi, 2010)Por definición tenemos que para todo $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

por la periodicidad de f, tenemos:

$$f'(z_0+\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h+\xi) - f(z_0+\xi)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

En especial concluimos que si f es una función elíptica con periodos 1 y τ, entonces f'/f es una función doble periódica con periodos 1 y τ.

El número total de polo (contados acorde a su multiplicidad) se una función elíptica es llamado su **orden**. En el siguiente demostramos que el número de ceros contados acorde a su multiplicidad es igual al orden de la función elíptica.

Teorema 1.11. *Toda función elíptica de orden m tiene m ceros en P_0*

Demostración. (Stein y Shakarchi, 2010) Vamos a asumir en primer lugar que la función f no tiene ceros o polos en la frontera de P_0, sabemos por el principio del argumento de Cauchy que

$$\int_{\partial P_0} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(N-P)$$

donde N y P son el número de ceros y polos de f en P_0 respectivamente.

De la integral de la izquierda veamos que:

$$\int_{\partial P_0} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_0^1 \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_1^{1+\tau} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{1+\tau}^{\tau} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{\tau}^{0} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

por la periodicidad de f'/f (Lema 1.10), tenemos que

$$\int_1^{1+\tau} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_0^{\tau} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \text{ y también tenemos, } \int_{1+\tau}^{\tau} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_1^{0} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Tenemos: $\int_{\partial P_0} f'(z)/f(z)dz = 2\pi i(N-P) = 0$. Por lo tanto concluimos que $N = P$.

Ahora supongamos que f tiene un polo en ∂P_0, escojamos un $h \in \mathbb{C}$, con $||h||$ pequeño, tal que si $P = h + P_0$, entonces f no tiene polos en ∂P. Con el argumento anterior, sabemos que P tiene el mismo número de ceros y polos en P, y por lo tanto f tiene el mismo número de polos y ceros en P_0.

Como consecuencia, si f es una función elíptica entonces la ecuación $f(z) = c$ tiene tantas soluciones como el orden de f para cada $c \in \mathbb{C}$, simplemente porque $f - c$ es elíptica y tiene tantos polos como f.

Teorema 1.12. *Si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones elípticas con polos en los mismos puntos y con la misma parte principal en estos puntos, entonces $f(z) = g(z) + c$ para una constante c*

Demostración. (Jones y Singerman, 1987) Notemos que la función $f - g$ es una función entera doble periódica, y por el Teorema 1.6 tenemos que $f - g$ es constante.

Teorema 1.13. *Si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones elípticas con ceros y polos del mismo orden en los mismos puntos, entonces $f(z) = cg(z)$ para una constante c*

Demostración. (Jones y Singerman, 1987) Notemos que la función f/g es una función entera doble periódica, por lo tanto por el Teorema 1.6, f/g es constante.

A pesar de la naturaleza simple de las propiedades de las funciones elípticas, aún queda abierta la pregunta acerca de la existencia de las funciones elípticas. Ahora el objetivo es dar una demostración constructiva a esta pregunta a partir del estudio de las funciones theta que se estudiarán en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Funciones theta

2.1. La función theta como solución de la ecuación de conducción de calor

Introduciremos la función theta considerando un problema específico de conducción de calor. Sea θ la temperatura en el tiempo t en cualquier punto de un material sólido isotrópico cuya conductividad térmica es uniforme. Entonces, si ρ es la densidad del material, s es su calor específico, y k su conductividad térmica, θ satisface la ecuación diferencial

$$\kappa\nabla^2\theta = \partial\theta/\partial t$$

donde $\kappa = k/s\rho$ es la difusividad. Centraremos el problema en el caso particular en el cual no hay variación de temperatura en las direcciones x , y en el marco Cartesiano. El calor fluye en todos los lugares paralelo a eje z y la ecuación de conducción de calor se reduce a la forma

$$\kappa\partial^2\theta/\partial z^2 = \partial\theta/\partial t \tag{2.1}$$

por lo tanto, θ queda en función de z y t, es decir, $\theta = \theta(z,t)$ (Lawden, 2013).

El problema específico que estudiaremos es la conducción del calor en un bloque infinito de material limitado por los planos $z = 0, \pi$, cuando las condiciones sobre cada plano en el límite se mantienen uniformes para cada tiempo t. La conducción de temperatura es entonces enteramente en la dirección del eje z y la ecuación (2.1) se aplica.

Primero, supongamos que como condiciones de frontera tenemos que las caras del bloque son mantenidas a temperatura cero, es decir, $\theta = 0$ para $z = 0, \pi$ y todo t. Inicialmente en $t = 0$, supongamos $\theta = f(z)$ para $0 < z < \pi$. Podemos observar que la ecuación de calor y las condiciones de frontera son homogéneas y lineales. En primer lugar, encontramos todas las soluciones a las condiciones lineales homogéneas de la forma

$$\theta(z,t) = h(z)g(t) \tag{2.2}$$

Por el principio de superposición, una superposición lineal arbitraria de estas soluciones va a seguir siendo una solución.
Sustituimos $\theta(z,t) = h(z)g(t)$ en la ecuación (2.1) y obtenemos

$$h(z)g'(t) = \kappa h''(z)g(t)$$

Separamos los términos que involucran t a la izquierda y los términos que involucran z a la derecha:

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \kappa \frac{h''(z)}{h(z)}$$

Como el lado izquierdo no depende de z y el lado derecho no depende de t, tenemos que ambos lados son iguales a una constante λ.

$$\frac{g'(t)}{\kappa g(t)} = \frac{h''(z)}{h(z)} = \lambda$$

Y obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$g'(t) = \lambda \kappa g(t) \tag{2.3}$$

y

$$h''(x) = \lambda h(x) \tag{2.4}$$

Las condiciones de frontera nos dicen que $\theta(0,t) = \theta(\pi,t) = 0$. Reemplazando en la ecuación (2.2) tenemos

$$h(0)g(t) = h(\pi)g(t)$$

Para todos los valores de t. La solución $g(t) = 0$ para todos los valores de t, nos lleva a la solución trivial $\theta(z,t) = 0$ para todo z y t. Por lo tanto consideraremos el caso en el que $g(t)$ no es siempre 0, tenemos:

$$h(0) = h(\pi) = 0$$

El caso en el cual $g(t)$ es siempre cero nos lleva a la respuesta trivial $\theta = 0$. Por lo tanto, para encontrar soluciones no triviales, debemos resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria con condiciones de frontera:

$$h''(x) = \lambda h(x)\ ,\ h(0) = 0 = h(\pi) \tag{2.5}$$

Si $\lambda = 0$, entonces (2.5) se convierte en:

$$h''(x) = 0\ ,\ h(0) = 0 = h(\pi)$$

por lo tanto esto nos lleva a la solución trivial $h = 0$.
Si $\lambda > 0$, entonces (2.5) se convierte en:

$$h''(x) - \lambda h(x) = 0$$

La solución general es:

$$h(x) = a\cosh(\sqrt{\lambda}x) + b\sinh(\sqrt{\lambda}x)$$

Dada la condición de frontera, tenemos:

$$h(0) = a = 0 \text{ entonces, } h(x) = b\sinh(\sqrt{\lambda}x)$$

y también
$$h(\pi) = b\sinh(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \text{ entonces, } h(x) = 0$$
por lo tanto esto nos lleva a la solución trivial $h = 0$.
Si $\lambda < 0$, en este caso definimos $w = \sqrt{-\lambda}$, y (2.5) se convierte en:

$$h''(x) + w^2 h(x) = 0 \ , \ h(0) = 0 = h(\pi)$$

, con solución general:
$$h(x) = a\cos(wx) + b\sin(wx)$$
Dada la condición de frontera, tenemos:

$$h(0) = a = 0 \text{ entonces, } h(x) = b\sin(wx)$$

y también
$$h(\pi) = b\sin(w\pi) = 0$$
entonces $b = 0$ o $\sin(w\pi) = 0$. La posibilidad $b = 0$, nos lleva a la solución trivial. La segunda posibilidad se cumple en el caso $w = n$, donde $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto las únicas soluciones no triviales para (2.5) son múltiplos constantes de:

$$h(x) = \sin(nx) \ , \ n \in \mathbb{Z}$$

con $\lambda = -n^2$.
Para cada una de estas soluciones, se debe encontrar la función $g(t)$ correspondiente con respecto a la ecuación (2.3).

$$g'(t) = \lambda\kappa g(t)$$

donde $\lambda = -n^2$, esta ecuación diferencial tiene como solución

$$g(t) = ae^{-n^2\kappa t}$$

donde a es una constante de integración por lo tanto encontramos que las soluciones no triviales al problema de la ecuación de calor junto con las condiciones de frontera dadas son múltiplos constantes de:

$$\theta_n(z,t) = \sin(nz)e^{-n^2\kappa t}$$

Por el principio de superposición, sigue que:

$$\theta(z,t) = b_1\sin(z)e^{-\kappa t} + b_2\sin(2z)e^{-2\kappa t} + ... \tag{2.6}$$

es también una solución al problema planteado.

Ahora determinaremos los coeficientes b_n en (2.6) de tal manera que la condición inicial $f(z) = \theta(z,0)$ se satisfaga. Fijando $t = 0$ en (2.6), tenemos:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nz)$$

Aplicando la teoría de series de Fourier, podemos encontrar b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(z)\sin(nz)dz$$

En el caso especial donde $f(z) = \pi\delta(z - \frac{1}{2})\pi$ (donde $\delta(z)$ es la función de impulso unitario de Dirac), el bloque está inicialmente a temperatura cero en todas partes, excepto en el plano $z = \frac{1}{2}\pi$, donde la temperatura en muy alta. Calculamos que:

$$b_n = 2\int_0^\pi \delta\left(z - \frac{1}{2}\pi\right)\sin(nz)dz = 2\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right)$$

Por lo tanto, la difusión de calor sobre el bloque está gobernada por la ecuación:

$$\theta(z,t) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(2n+1)^2\kappa t}\sin((2n+1)z)$$

Escribiendo $e^{-4\kappa t} = q$, θ asume la forma:

$$\theta_1(z,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin((2n+1)z) \tag{2.7}$$

La primera función theta $\theta_1(z,q)$ está definida por la ecuación (2.7) para todos los números complejos de z y q tal que $|q| < 1$. Reemplazando la función seno por su representación de Euler, obtenemos:

$$i\theta_1(z,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{i(2n+1)z} \tag{2.8}$$

Para establecer la convergencia, notamos u_n como el enésimo término en la serie. Entonces:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |q^{2n+2}e^{2iz}| = |q|^{2n+2}e^{-2y}$$

escribiendo $z = x + iy$. Siendo $|q| < 1$, la razón tiende a cero cuando $n \to +\infty$, por el test DÁlambert sabemos que la serie converge en $+\infty$. Cuando $n \to -\infty$ consideramos la razón $|u_n/u_{n+1}|$, claramente esta razón converge a cero, y por lo tanto la serie converge en $-\infty$ también.

Como notación alternativa, escribimos:

$$q = e^{i\pi\tau}$$

donde la parte imaginaria de τ debe ser positiva para obtener $|q| < 1$. Entonces tenemos:

$$i\theta_1(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{i(n+1/2)^2\pi\tau}e^{i(2n+1)z}$$

2.2. Propiedades

De manera general tenemos que la función theta está dada por las series:

$$\Theta(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2\tau}e^{2\pi i n z}$$

que converge para toda $z \in \mathbb{C}$, y τ con parte imaginaria mayor que cero ($\mathbb{H}$).

Proposición 2.1. *La función Θ satisface las siguiente propiedades:*

1. *Θ es entera en $z \in \mathbb{C}$ y holomorfa en $\tau \in \mathbb{H}$*
2. *$\Theta(z+1|\tau) = \Theta(z|\tau)$*
3. *$\Theta(z+\tau|\tau) = \Theta(z|\tau)e^{-\pi i\tau}e^{-2\pi iz}$*
4. *$\Theta(z|\tau) = 0$ cuando $z = 1/2 + \tau/2 + n + m\tau$ donde n, $m \in \mathbb{Z}$*

Demostración. (Stein y Shakarchi, 2010)

1. Supongamos que Im $(\tau) = t \geq t_0 > 0$ y $z = x + iy$ pertenece a un conjunto limitado de $\mathbb{C}$, digamos $|z| \leq M$. Entonces la serie definida por Θ es absolutamente y uniformemente convergente, porque

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |e^{\pi in^2\tau}e^{2\pi inz}| \leq C\sum_{n\geq 0} e^{-\pi n^2 t_0}e^{2\pi nM} < \infty$$

   Por lo tanto, para un $\tau \in \mathbb{H}$ fijo la función $\Theta(.|\tau)$ es entera, y para cada $z \in \mathbb{C}$ fija, la función $\Theta(z|.)$ es holomorfa en el medio plano superior ($\mathbb{H}$).

2. Tenemos:

$$\Theta(z+1|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2\tau}e^{2\pi i(n+1)z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2\tau}e^{2\pi inz}e^{2\pi i}$$

   Por la fórmula de Euler sabemos que $e^{2\pi i} = 1$. Por lo tanto $\Theta(z+1|\tau) = \Theta(z|\tau)$

3. Tenemos:

$$\begin{aligned}\Theta(z+\tau|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi in^2\tau}e^{2\pi in(z+\tau)}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n+1)^2\tau}e^{2\pi inz}e^{-\pi i\tau}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n+1)^2\tau}e^{2\pi i(n+1)z}e^{-\pi i\tau}e^{-2\pi inz}\\ &= \Theta(z|\tau)e^{-\pi i\tau}e^{-2\pi iz}\end{aligned}$$

4. Por los literales (2) y (3) anteriores, es suficiente mostrar que $\Theta(1/2+\tau/2|\tau) = 0$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\Theta(1/2+\tau/2|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi in^2\tau}e^{2\pi in(1/2+\tau/2)}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i(n^2+n)\tau}\end{aligned}$$

   Notemos que para $n \geq 0$, n y $-n-1$ tienen diferente pariedad y además: $(-n-1)^2 + (-n-1) = n^2 + n$. Por lo tanto:

$$\Theta(1/2+\tau/2|\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{\pi i(n^2+n)\tau} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{\pi i(n^2+n)\tau} = 0$$

Un hecho sobresaliente de la función theta es su naturaleza dual. Vista como una función de z, se encuentra en el campo de las funciones elípticas , dado que Θ es periódica con periodo 1 y çuasiperiodo" τ como se mostró arriba. Cuando la consideramos como una función de τ, Θ revela su naturaleza modular y su conexión cercana con la función de partición y el problema de representar enteros como la suma de cuadrados.

2.3. Definición de θ_1, θ_2, θ_3 , θ_4

En la sección 2.1, definimos θ_1 como la solución para un problema de conducción de calor específico. Otra función theta aparece como solución si cambiamos las condiciones de frontera. Supongamos que las caras del bloque son isoladas, de tal manera que el calor no puede escapar a través de ellas. Esta condición de frontera se escribe como $\partial\theta/\partial z = 0$ cuando $z = 0$, π, y el método de separación de variables nos lleva a la solución:

$$\theta(z,t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\kappa t}\cos nz$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(z)\cos nz dz$$

En el caso $f(z) = \pi\delta\left(z - \frac{1}{2}\pi\right)$ tenemos que

$$a_n = 2\cos\left(\frac{1}{2}n\pi\right)$$

y la solución al problema es:

$$\theta_4(z,q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos(2nz)$$

donde $q = e^{-4\kappa t}$.

Si cambiamos la función coseno por su expresión por exponenciales según la fórmula de Euler, tenemos una otra representación de θ_4

$$\theta_4(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2inz} \tag{2.9}$$

Definimos entonces:

$$\theta_2(z) = \theta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} e^{i(2n+1)z} \tag{2.10}$$

$$\theta_3(z) = \theta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2inz} \tag{2.11}$$

Si definimos $q = e^{i\pi\tau}$, con la parte imaginaria de τ es positiva. Donde tenemos que:

$$\theta_3(z,\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2\tau} e^{2inz} = \Theta\left(\frac{z}{\pi},\tau\right) \tag{2.12}$$

donde Θ es la serie definida en la sección 2.2.

2.4. Propiedades de las funciones θ_1, θ_2, θ_3 , θ_4

Estas cuatro funciones theta, son importantes ya que nos permiten definir las funciones elípticas de Jacobi. A continuación vamos a demostrar algunas relaciones útiles entre θ_1, θ_2, θ_3 y θ_4. Definiendo $q = e^{i\pi\tau}$:

Lema 2.2. *Las funciones θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, satisfacen:*

$$\theta_1(z) = -\theta_2\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) = -i\mu\theta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = -i\mu\theta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right)$$

donde $\mu = q^{1/4}e^{iz}$.

Demostración. (Lawden, 2013) Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\theta_2\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau(n+1/2)^2} e^{i(2n+1)(z+\pi/2)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau(n+1/2)^2} e^{i(2n+1)z} e^{in\pi} e^{i\pi/2} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau(n+1/2)^2} e^{i(2n+1)z} e^{in\pi} e^{i\pi/2} \\
&= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{i\pi\tau(n+1/2)^2} e^{i(2n+1)z} \\
&= -\theta_1(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{i\pi\tau n^2} e^{2in(z+\pi\tau/2)} \\
&= e^{-iz} e^{-i\pi\tau/4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{i\pi\tau(n+1/2)^2} e^{i(2n+1)z} \\
&= \mu^{-1} i\theta_1(z)
\end{aligned}$$

Para terminar la demostración, basta probar que: $\theta_3(z + \pi/2) = \theta_4(z)$:

$$\begin{aligned}
\theta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau n^2} e^{2in(z+\pi/2)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{i\pi\tau n^2} e^{2inz} \\
&= \theta_4(z)
\end{aligned}$$

El Lema 2.2 junto con la ecuación 2.12 nos muestra una manera natural de escribir las cuatro funciones theta definidas en esta sección, por medio de la función Θ definida por una serie en la sección 2.2. A continuación, demostraremos una propiedad importante de las funciones theta que juntamente con el Lema 2.2, será de gran importancia en el siguiente capítulo.

Lema 2.3. *Se cumple:*

$$\theta_4^2(x)\theta_4^2(y) - \theta_1^2(x)\theta_1^2(y) = \theta_4(x+y)\theta_4(x-y)\theta_4^2(0)$$

Demostración. Vamos a demostrar esta identidad multiplicando series absolutamente convergentes por lo cual el reordenar los términos de las series queda justificado. Según la ecuación (2.8) tenemos:

$$\theta_1(x,q)\theta_1(y,q) = -\sum_m\sum_n(-1)^{m+n}q^{(m+1/2)^2+(n+1/2)^2}e^{i(2m+1)x+i(2n+1)y} \tag{2.13}$$

Cambiando las variables enteras (m,n) a (r,s) con la relación:

$$m+n=r,\ m-n=s$$

Además, podemos escribir:

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(r+1)^2+\frac{1}{2}s^2$$

$$(2m+1)x+(2n+1)y=(r+1)(x+y)+s(x-y)$$

Entonces,

$$\theta_1(x,q)\theta_1(y,q) = -\sum(-1)^r q^{(1/2)(r+1)^2+(1/2)s^2}e^{i(r+1)(x+y)+is(x-y)}$$

Si (m,n) son ambos pares o ambos impares, (r,s) serán ambos pares. Si por el contrario, (m,n) tienen pariedad opuesta, (r,s) serán ambos impares. Entonces permitiendo a (r,s) recorrer todas las parejas de números pares y todas las parejas de números impares, cada pareja de enteros (m,n) se obtendrá una sola vez. Sigue que:

$$\begin{aligned}\theta_1(x,q)\theta_1(y,q) = &-\sum_r\sum_s q^{2(r+1/2)^2+2s^2}e^{i(2r+1)(x+y)+2is(x-y)}\\ &+\sum_r\sum_s q^{2r^2+2(s+1/2)^2}e^{2ir(x+y)+i(2s+1)(x-y)}\end{aligned}$$

Cada una de las dobles series de arriba, puede ser expresada como el producto de dos series simples, como sigue:

$$\begin{aligned}\theta_1(x,q)\theta_1(y,q) = &-\sum_r q^{2(r+1/2)^2}e^{i(2r+1)(x+y)}\sum_s q^{2s^2}e^{2is(x-y)}\\ &+\sum_r q^{2r^2}e^{2ir(x+y)}\sum_s q^{2(s+1/2)^2}e^{i(2s+1)(x-y)}\end{aligned}$$

Sustituyendo con las ecuaciones (2.10) y (2.11), obtenemos:

$$\theta_1(x,q)\theta_1(y,q) = \theta_3(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2) - \theta_2(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2) \tag{2.14}$$

Según la ecuación (2.11) tenemos:

$$\theta_3(x,q)\theta_3(y,q) = \sum_m\sum_n q^{n^2+m^2}e^{2inx+2imy} \tag{2.15}$$

Cambiando las variables enteras (m,n) a (r,s) con la relación:

$$m + n = r,\ m - n = s$$

Además, podemos escribir:

$$m^2 + n^2 = \frac{r^2 + s^2}{2}$$

$$2nx + 2my = r(x + y) + s(x - y)$$

Entonces,

$$\theta_3(x, q)\theta_3(y, q) = \sum q^{(r^2+s^2)/2} e^{ir(x+y)+is(x-y)}$$

Por el mismo argumento realizado arriba, notamos que debemos sumar sobre todas las parejas de números pares e impares (r, s). Sigue que:

$$\begin{aligned}\theta_3(x, q)\theta_3(y, q) = &\sum_r \sum_s q^{2r^2+2s^2} e^{2ir(x+y)+2is(x-y)} \\ &+ \sum_r \sum_s q^{2(r+1/2)^2+2(s+1/2)^2} e^{i(2r+1)(x+y)+i(2s+1)(x-y)}\end{aligned}$$

Cada una de las dobles series de arriba, puede ser expresada como el producto de dos series simples, como sigue:

$$\begin{aligned}\theta_1(x, q)\theta_1(y, q) = &-\sum_r q^{2r^2} e^{i2r(x+y)} \sum_s q^{2s^2} e^{2is(x-y)} \\ &+ \sum_r q^{2(r+1/2)^2} e^{i(2r+1)(x+y)} \sum_s q^{2(s+1/2)^2} e^{i(2s+1)(x-y)}\end{aligned}$$

Sustituyendo con las ecuaciones (2.10) y (2.11), obtenemos:

$$\theta_3(x, q)\theta_3(y, q) = \theta_3(x + y, q^2)\theta_3(x - y, q^2) + \theta_2(x + y, q^2)\theta_2(x - y, q^2) \tag{2.16}$$

Realizando un incremento de $\frac{1}{2}\pi$ en x, y, tenemos:

$$\theta_4(x, q)\theta_4(y, q) = \theta_3(x + y, q^2)\theta_3(x - y, q^2) - \theta_2(x + y, q^2)\theta_2(x - y, q^2) \tag{2.17}$$

Elevando al cuadrado y restando las ecuaciones (2.14) y (2.17), obtenemos:

$$\theta_4^2(x, q)\theta_4^2(y, q) - \theta_1^2(x, q)\theta_1^2(y, q) = [\theta_3^2(x+y, q^2) - \theta_2^2(x+y, q^2)][\theta_3^2(x-y, q^2) - \theta_2^2(x-y, q^2)] \tag{2.18}$$

Reemplazando $y = 0$ en la ecuación (2.17) tenemos:

$$\theta_3^2(x, q^2) - \theta_2^2(x, q^2) = \theta_4(x, q)\theta_4(0, q) \tag{2.19}$$

Utilizando las ecuaciones (2.18) y (2.19), tenemos:

$$\theta_4^2(x)\theta_4^2(y) - \theta_1^2(x)\theta_1^2(y) = \theta_4(x + y)\theta_4(x - y)\theta_4^2(0) \tag{2.20}$$

Las funciones definidas en la sección anterior tienen propiedades de periodicidad que se pueden escribir como en la siguiente proposición:

Proposición 2.4. *La funciones $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, satisfacen:*

1. $\theta_1(z) = -\theta_1(z + \pi) = -\lambda\theta_1(z + \pi\tau) = \lambda\theta_1(z + \pi + \pi\tau)$
2. $\theta_2(z) = -\theta_2(z + \pi) = \lambda\theta_2(z + \pi\tau) = -\lambda\theta_2(z + \pi + \pi\tau)$

3. $\theta_3(z) = \theta_3(z+\pi) = \lambda\theta_3(z+\pi\tau) = \lambda\theta_3(z+\pi+\pi\tau)$

4. $\theta_4(z) = \theta_4(z+\pi) = -\lambda\theta_4(z+\pi\tau) = -\lambda\theta_4(z+\pi+\pi\tau)$

donde $\lambda = e^{i(2z+\pi\tau)}$.

Demostración. (Lawden, 2013)

1. Usando la ecuación (2.8), tenemos:

$$\begin{aligned}\theta_1(z+\pi) &= -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{i\pi\tau(n+1/2)^2}e^{i(2n+1)(z+\pi)}\\ &= -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{i\pi\tau(n+1/2)^2}e^{i(2n+1)z}e^{i\pi(2n+1)}\\ &= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{i\pi\tau(n+1/2)^2}e^{i(2n+1)z}\\ &= -\theta_1(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_1(z+\pi\tau) &= -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{i\pi\tau(n+1/2)^2}e^{i(2n+1)(z+\pi\tau)}\\ &= -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{i\pi\tau(n+1/2)^2}e^{i(2n+1)z}e^{i\pi\tau(2n+1)}\\ &= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1} e^{i\pi\tau((n+1)+1/2)^2}e^{i(2(n+1)+1)z}e^{-i\pi\tau}e^{-2iz}\\ &= -\lambda^{-1}\theta_1(z)\end{aligned}$$

Utilizando lo demostrado arriba, resulta:

$$\begin{aligned}\theta_1(z+\pi+\pi\tau) &= -\theta_1(z+\pi\tau)\\ &= \lambda^{-1}\theta_1(z)\end{aligned}$$

2. Usando la ecuación (2.10), tenemos:

$$\begin{aligned}\theta_2(z+\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau(n+1/2)^2}e^{i(2n+1)(z+\pi)}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau(n+1/2)^2}e^{i(2n+1)z}e^{i\pi(2n+1)}\\ &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau(n+1/2)^2}e^{i(2n+1)z}\\ &= -\theta_2(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_2(z+\pi\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau(n+1/2)^2} e^{i(2n+1)(z+\pi\tau)}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau(n+1/2)^2} e^{i(2n+1)z} e^{i\pi\tau(2n+1)}\\ &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau((n+1)+1/2)^2} e^{i(2(n+1)+1)z} e^{-i\pi\tau} e^{-2iz}\\ &= \lambda^{-1}\theta_2(z)\end{aligned}$$

Utilizando lo demostrado arriba, resulta:

$$\begin{aligned}\theta_2(z+\pi+\pi\tau) &= -\theta_2(z+\pi\tau)\\ &= -\lambda^{-1}\theta_1(z)\end{aligned}$$

3. Utilizando la ecuación (2.11), tenemos:

$$\begin{aligned}\theta_3(z+\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau n^2} e^{2inz} e^{2in\pi}\\ &= \theta_3(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_3(z+\pi\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau n^2} e^{2inz} e^{2in\pi\tau}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau(n+1)^2} e^{2i(n+1)z} e^{-i\pi\tau} e^{-2iz}\\ &= \lambda^{-1}\theta_3(z)\end{aligned}$$

Utilizando lo demostrado arriba, resulta:

$$\begin{aligned}\theta_3(z+\pi+\pi\tau) &= \theta_3(z+\pi\tau)\\ &= \lambda^{-1}\theta_1(z)\end{aligned}$$

4. Utilizando la ecuación (2.9) tenemos:

$$\begin{aligned}\theta_4(z+\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{i\pi\tau n^2} e^{2inz} e^{2in\pi}\\ &= \theta_4(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_4(z+\pi\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{i\pi\tau n^2} e^{2inz} e^{2in\pi\tau}\\ &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{i\pi\tau(n+1)^2} e^{2i(n+1)z} e^{-i\pi\tau} e^{-2iz}\\ &= -\lambda^{-1}\theta_4(z)\end{aligned}$$

Utilizando lo demostrado arriba, resulta:

$$\begin{aligned}\theta_4(z+\pi+\pi\tau) &= \theta_4(z+\pi\tau)\\ &= -\lambda^{-1}\theta_4(z)\end{aligned}$$

A continuación estudiaremos las derivadas de razones con las funciones θ_1, θ_2, θ_3, θ_4. Para lo cual primero vamos a demostrar una identidad importante:

Lema 2.5. *Se cumple la identidad*

$$\theta_1'(0) = \theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0) \tag{2.21}$$

Demostración. (Lawden, 2013) En la ecuación (2.14) incrementamos el valor de y en $\frac{1}{2}\pi$, en la misma ecuación incrementamos el valor de x, y en $\frac{1}{2}\pi$, en la ecuación (2.16) incrementamos el valor de y en $\frac{1}{2}\pi$, y utilizando el Lema 2.2, obtenemos las siguientes ecuaciones respectivamente:

$$\theta_1(x,q)\theta_2(y,q) = \theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2) + \theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2) \tag{2.22}$$

$$\theta_2(x,q)\theta_2(y,q) = \theta_2(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2) + \theta_3(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2) \tag{2.23}$$

$$\theta_3(x,q)\theta_4(y,q) = \theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2) - \theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2) \tag{2.24}$$

Si derivamos parcialmente la ecuación (2.22) con respecto a x, y utilizamos $x = y = 0$, obtenemos:

$$\theta_1'(0,q)\theta_2(0,q) = 2\theta_1'(0,q^2)\theta_4(0,q^2) \tag{2.25}$$

Después, al utilizar $x = y = 0$ en las ecuaciones (2.23) y (2.24), y dado que $\theta_1(0) = 0$, tenemos:

$$\theta_2^2(0,q) = 2\theta_2(0,q^2)\theta_3(0,q^2)$$
$$\theta_3(0,q)\theta_4(0,q) = \theta_4^2(0,q^2)$$

Dividimos la ecuación (2.25) para las identidades de arriba y obtenemos:

$$\frac{\theta_1'(0,q)}{\theta_2(0,q)\theta_3(0,q)\theta_4(0,q)} = \frac{\theta_1'(0,q^2)}{\theta_2(0,q^2)\theta_3(0,q^2)\theta_4(0,q^2)}$$

Repitiendo el resultado, podemos demostrar que:

$$\frac{\theta_1'(0,q)}{\theta_2(0,q)\theta_3(0,q)\theta_4(0,q)} = \frac{\theta_1'(0,q^{2^n})}{\theta_2(0,q^{2^n})\theta_3(0,q^{2^n})\theta_4(0,q^{2^n})}$$

para todo entero positivo n. Dado que $|q| < 1$, al tener $n \to \infty$ tenemos $q^{2^n} \to 0$, por lo tanto:

$$\frac{\theta_1'(0,q)}{\theta_2(0,q)\theta_3(0,q)\theta_4(0,q)} = \lim_{q\to 0} \frac{\theta_1'(0,q)}{\theta_2(0,q)\theta_3(0,q)\theta_4(0,q)} \tag{2.26}$$

Con referencia a las ecuaciones (2.8), (2.9), (2.10) y (2.11), sabemos que:

$$\theta_1'(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n(2n+1)q^{(n+1/2)^2} = 2q^{1/4} + O(q^{9/4})$$

$$\theta_2(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} = 2q^{1/4} + O(q^{9/4})$$

$$\theta_3(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = 1 + O(q)$$

$$\theta_4(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = 1 + O(q)$$

Por lo que el límite de la ecuación (2.26) es 1. De donde obtenemos:

$$\theta_1'(0) = \theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)$$

Teorema 2.6. *Se cumplen las siguientes derivadas:*

$$\frac{d}{dx}(\theta_1/\theta_4) = \theta_4^2(0)\theta_2(x)\theta_3(x)/\theta_4^2(x) \tag{2.27}$$

$$\frac{d}{dx}(\theta_2/\theta_4) = -\theta_3^2(0)\theta_1(x)\theta_3(x)/\theta_4^2(x) \tag{2.28}$$

$$\frac{d}{dx}(\theta_3/\theta_4) = -\theta_2^2(0)\theta_1(x)\theta_2(x)/\theta_4^2(x) \tag{2.29}$$

Demostración. (Lawden, 2013) Intercambiando x, y en la ecuación en la ecuación (2.24) y multiplicándola por la ecuación (2.22) obtenemos:

$$\begin{aligned}\theta_1(x,q)\theta_2(y,q)\theta_3(y,q)\theta_4(x,q) = {} & [\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2) + \theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)] \\ & \times [\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2) + \theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)]\end{aligned} \tag{2.30}$$

Intercambiando x, y en la ecuación (2.30) y sumando con la misma ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned}&\theta_1(x,q)\theta_2(y,q)\theta_3(y,q)\theta_4(x,q) + \theta_1(y,q)\theta_2(x,q)\theta_3(x,q)\theta_4(y,q) \\ &= 2\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x+y,q^2)[\theta_4^2(x-y,q^2) + \theta_1^2(x-y,q^2)]\end{aligned} \tag{2.31}$$

Al reemplazar $y = 0$ en la ecuación (2.22) y $x = 0$ en la ecuación (2.24), tenemos las siguientes identidades:

$$\theta_1(x,q)\theta_2(0,q) = 2\theta_1(x,q^2)\theta_4(x,q^2)$$

$$\theta_3(0,q)\theta_4(y,q) = \theta_4^2(y,q^2) + \theta_1^2(y,q^2)$$

Usando estas identidades en la ecuación (2.31), se reduce a la forma:

$$\theta_1(x+y)\theta_4(x-y)\theta_2(0)\theta_3(0) = \theta_1(x)\theta_4(x)\theta_2(y)\theta_3(y) + \theta_2(x)\theta_3(x)\theta_1(y)\theta_4(y) \tag{2.32}$$

Derivamos la ecuación (2.32) parcialmente con respecto a y, y obtenemos:

$$\begin{aligned}&[\theta_1'(x+y)\theta_4(x-y) - \theta_1(x+y)\theta_4'(x-y)]\theta_2(0)\theta_3(0) \\ &= \theta_1(x)\theta_4(x)[\theta_2'(y)\theta_3(y) + \theta_2(y)\theta_3'(y)] + \theta_2(x)\theta_3(x)[\theta_1'(y)\theta_4(y) + \theta_1(y)\theta_4'(y)]\end{aligned} \tag{2.33}$$

Si ponemos $y = 0$ en la ecuación (2.33), tenemos que:

$$\begin{aligned}&\theta_1'(x)\theta_4(x) - \theta_1(x)\theta_4'(x) \\ &= \frac{\theta_1(x)\theta_4(x)[\theta_2'(0)\theta_3(0) + \theta_2(0)\theta_3'(0)] + \theta_2(x)\theta_3(x)[\theta_1'(0)\theta_4(0) + \theta_1(0)\theta_4'(0)]}{\theta_2(0)\theta_3(0)}\end{aligned} \tag{2.34}$$

Utilizando que $\theta_1(0) = \theta_2'(0) = \theta_3'(0) = \theta_4'(0) = 0$ en la ecuación (2.34), obtenemos:

$$\theta_1'(x)\theta_4(x) - \theta_1(x)\theta_4'(x) = \frac{\theta_2(x)\theta_3(x)\theta_1'(0)\theta_4(0)}{\theta_2(0)\theta_3(0)} \tag{2.35}$$

Utilizando la identidad (2.21), tenemos:

$$\frac{d}{dx}(\theta_1/\theta_4) = \theta_4^2(0)\theta_2(x)\theta_3(x)/\theta_4^2(x)$$

Con lo que queda demostrada la identidad (2.27).
Incrementamos el valor de y en $\pi\tau/2 + \pi/2$, en la ecuación (2.20). Y obtenemos:

$$\theta_4^2(x)\theta_2^2(y) = \theta_2(x+y)\theta_2(x-y)\theta_4^2(0) + \theta_1^2(x)\theta_3^2(y) \tag{2.36}$$

Con $y = 0$ en la última ecuación tenemos:

$$\theta_4^2(x)\theta_2^2(0) = \theta_2^2(x)\theta_4^2(0) + \theta_1^2(x)\theta_3^2(0)$$

Podemos escribir esta última ecuación como:

$$\left[\frac{\theta_1(x)}{\theta_4(x)}\right]^2 \theta_3^2(0) + \left[\frac{\theta_2(x)}{\theta_4(x)}\right]^2 \theta_4^2(0) = \theta_2^2(0)$$

Si diferenciamos parcialmente con respecto a x, tenemos:

$$\left[\frac{\theta_1(x)}{\theta_4(x)}\right] \frac{d}{dx}(\theta_1/\theta_4)\theta_3^2(0) + \left[\frac{\theta_2(x)}{\theta_4(x)}\right] \frac{d}{dx}(\theta_2/\theta_4)\theta_4^2(0) = 0$$

Utilizando la identidad (2.27), obtenemos:

$$\frac{d}{dx}(\theta_2/\theta_4) = -\theta_3^2(0)\theta_1(x)\theta_3(x)/\theta_4^2(x)$$

Al incrementar los valores de x, y en $\pi/2$ en la ecuación (2.20), tenemos:

$$\theta_4(x+y)\theta_4(x-y)\theta_4^2(0) = \theta_3^2(x)\theta_3^2(y) + \theta_2^2(x)\theta_2^2(y) \tag{2.37}$$

Al poner $y = 0$ en la anterior igualdad, tenemos:

$$\theta_4^2(x)\theta_4^2(0) = \theta_3^2(x)\theta_3^2(0) + \theta_2^2(x)\theta_2^2(0)$$

Podemos escribir esta última ecuación como:

$$\left[\frac{\theta_2(x)}{\theta_4(x)}\right]^2 \theta_2^2(0) + \left[\frac{\theta_3(x)}{\theta_4(x)}\right]^2 \theta_3^2(0) = \theta_4^2(0)$$

Si diferenciamos parcialmente con respecto a x, tenemos:

$$\left[\frac{\theta_2(x)}{\theta_4(x)}\right] \frac{d}{dx}(\theta_2/\theta_4)\theta_2^2(0) + \left[\frac{\theta_3(x)}{\theta_4(x)}\right] \frac{d}{dx}(\theta_3/\theta_4)\theta_3^2(0) = 0$$

Utilizando la identidad (2.28), tenemos:

$$\frac{d}{dx}(\theta_3/\theta_4) = -\theta_2^2(0)\theta_1(x)\theta_2(x)/\theta_4^2(x)$$

Capítulo 3

Funciones elípticas de Jacobi

3.1. Definición de las funciones elípticas de Jacobi

Las funciones elípticas $sn(u)$, $cn(u)$ y $dn(u)$ quedan definidas como razones de funciones theta.

$$sn(u) = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}.\frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}$$

$$cn(u) = \frac{\theta_4(0)}{\theta_2(0)}.\frac{\theta_2(z)}{\theta_4(z)}$$

$$dn(u) = \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)}.\frac{\theta_3(z)}{\theta_4(z)}$$

donde $z = u/\theta_3^2(0)$.

Proposición 3.1. *$sn(u)$ y $cn(u)$ satisfacen: $sn^2(u) + cn^2(u) = 1$*

Demostración. (Lawden, 2013) Por el Lema 2.2, después de aumentar $\pi/2+\tau\pi/2$ al valor de y en (2.20), tras simplificar obtenemos:

$$\theta_4^2(x)\theta_2^2(y) - \theta_1^2(x)\theta_3^2(y) = \theta_2(x+y)\theta_2(x-y)\theta_4^2(0) \tag{3.1}$$

Reemplazando $y = 0$,

$$\theta_4^2(x)\theta_2^2(0) - \theta_1^2(x)\theta_3^2(0) = \theta_2^2(x)\theta_4^2(0)$$

$$\frac{\theta_3^2(0)\theta_1^2(x)}{\theta_2^2(0)\theta_4^2(x)} + \frac{\theta_4^2(0)\theta_2^2(x)}{\theta_2^2(0)\theta_4^2(x)} = 1$$

Utilizando $x = u/\theta_3^2(0)$, tenemos:

$$sn^2(u) + cn^2(u) = 1$$

Definición 3.2. $k = \theta_2^2(0)/\theta_3^2(0)$ es el **módulo** de las funciones elípticas y $k' = \theta_4^2(0)/\theta_3^2(0)$ es el **módulo complementario**.

Proposición 3.3. *Se cumple que:*

1. $dn^2(u) + k^2 sn^2(u) = 1$

2. $dn^2(u) - k^2 cn^2(u) = k'^2$

3. $k^2 + k'^2 = 1$

Demostración. (Lawden, 2013)

1. En la ecuación (2.20) aumentamos $\pi/2$ al valor de y. Por el Lema 2.2, obtenemos:
$$\theta_3(x+y)\theta_3(x-y)\theta_4^2(0) = \theta_4^2(x)\theta_3^2(y) - \theta_1^2(x)\theta_2^2(y)$$
Utilizando $y = 0$, obtenemos:
$$\theta_4^2(x)\theta_3^2(0) = \theta_1^2(x)\theta_2^2(0) + \theta_3^2(x)\theta_4^2(0)$$
De donde:
$$\frac{\theta_1^2(x)\theta_2^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)} + \frac{\theta_3^2(x)\theta_4^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)} = 1$$
$$\frac{\theta_2^4(0)}{\theta_3^4(0)}\frac{\theta_1^2(x)\theta_3^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_2^2(0)} + \frac{\theta_3^2(x)\theta_4^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_3^2(0)} = 1$$
Con $x = u/\theta_3^2(0)$, concluimos:
$$dn^2(u) + k^2 sn^2(u) = 1$$

2. En la ecuación (2.20) aumentamos $\pi/2$ al valor de x y de y. Por el Lema 2.2, obtenemos:
$$\theta_4(x+y)\theta_4(x-y)\theta_4^2(0) = \theta_3^2(x)\theta_3^2(y) - \theta_2^2(x)\theta_2^2(y)$$
Utilizando $y = 0$, obtenemos:
$$\theta_3^2(x)\theta_3^2(0) - \theta_2^2(x)\theta_2^2(0) = \theta_4^2(x)\theta_4^2(0) \tag{3.2}$$
$$\frac{\theta_3^2(x)\theta_3^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_4^2(0)} - \frac{\theta_2^2(x)\theta_2^2(0)}{\theta_4^2(x)\theta_4^2(0)} = 1$$
$$\frac{\theta_4^2(0)\theta_3^2(x)}{\theta_3^2(0)\theta_4^2(x)} - \frac{\theta_2^4(0)\theta_4^2(0)\theta_2^2(x)}{\theta_3^4(0)\theta_2^2(0)\theta_4^2(x)} = \frac{\theta_4^4(0)}{\theta_3^4(0)}$$
Con $x = u/\theta_3^2(0)$, concluimos:
$$dn^2(u) - k^2 cn^2(u) = k'^2$$

3. Utilizando $x = 0$ en (3.2), tenemos:
$$\theta_2^4(0) + \theta_4^4(0) = \theta_3^4(0)$$
$$\frac{\theta_2^4(0)}{\theta_3^4(0} + \frac{\theta_4^4(0)}{\theta_3^4(0)} = 1$$
De donde sigue:
$$k^2 + k'^2 = 1$$

Concluiremos esta sección comprobando la doble periodicidad de las funciones definidas.

Proposición 3.4. *Se cumple que:*

1. *$sn(u)$ tiene dos periodos $2\pi\theta_3^2(0)$ y $\pi\tau\theta_3^2(0)$*
2. *$cn(u)$ tiene dos periodos $2\pi\theta_3^2(0)$ y $\pi\theta_3^2(0)+\pi\tau\theta_3^2(0)$*
3. *$dn(u)$ tiene dos periodos $\pi\theta_3^2(0)$ y $2\pi\tau\theta_3^2(0)$*

Demostración. (Lawden, 2013) Usando la proposición 2.4 y las definiciones dadas al principio del capítulo, tenemos:

1.

$$\begin{aligned} sn(u+2\pi\theta_3^2(0)) &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1(\mu/\theta_3^2(0)+2\pi)}{\theta_4(\mu/\theta_3^2(0)+2\pi)} \\ &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1(\mu/\theta_3^2(0))}{\theta_4(\mu/\theta_3^2(0))} \\ &= sn(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sn(u+\pi\tau\theta_3^2(0)) &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1(\mu/\theta_3^2(0)+\pi\tau)}{\theta_4(\mu/\theta_3^2(0)+\tau\pi)} \\ &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{-\lambda^{-1}\theta_1(\mu/\theta_3^2(0))}{-\lambda^{-1}\theta_4(\mu/\theta_3^2(0))} \\ &= sn(u) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} cn(u+2\pi\theta_3^2(0)) &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_2(\mu/\theta_3^2(0)+2\pi)}{\theta_4(\mu/\theta_3^2(0)+2\pi)} \\ &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_2(\mu/\theta_3^2(0))}{\theta_4(\mu/\theta_3^2(0))} \\ &= cn(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cn(u+\pi\theta_3^2(0)+\pi\tau\theta_3^2(0)) &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_2(\mu/\theta_3^2(0)+\pi+\pi\tau)}{\theta_4(\mu/\theta_3^2(0)+\pi+\tau\pi)} \\ &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{-\lambda^{-1}\theta_2(\mu/\theta_3^2(0))}{-\lambda^{-1}\theta_4(\mu/\theta_3^2(0))} \\ &= cn(u) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} dn(u+\pi\theta_3^2(0)) &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_3(\mu/\theta_3^2(0)+\pi)}{\theta_4(\mu/\theta_3^2(0)+\pi)} \\ &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_3(\mu/\theta_3^2(0))}{\theta_4(\mu/\theta_3^2(0))} \\ &= dn(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dn(u + 2\pi\tau\theta_3^2(0)) &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1(\mu/\theta_3^2(0) + 2\pi\tau)}{\theta_4(\mu/\theta_3^2(0) + 2\tau\pi)} \\
&= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\lambda^{-2}\theta_1(\mu/\theta_3^2(0))}{\lambda^{-2}\theta_4(\mu/\theta_3^2(0))} \\
&= dn(u)
\end{aligned}$$

La proposición 3.4, nos garantiza que las funciones sn, cn y dn son funciones elípticas ya que son funciones meromorfas con doble periodo. Para facilitar la notación, definiremos:

$$K = \frac{1}{2}\pi\theta_3^2(0)$$

$$iK' = \frac{1}{2}\pi\tau\theta_3^2(0)$$

Por lo que la proposición 3.4 resulta:

$$\begin{aligned}
sn(u) &= sn(u + 4K) = sn(u + 2iK') \\
cn(u) &= cn(u + 4K) = cn(u + 2K + 2K') \\
dn(u) &= dn(u + 2K) = dn(u + 4iK')
\end{aligned}$$

3.2. Propiedades

Teorema 3.5. *Las derivadas de las funciones elípticas de Jacobi son:*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}sn(u) &= cn(u)dn(u) \\
\frac{d}{du}cn(u) &= -sn(u)dn(u) \\
\frac{d}{du}dn(u) &= -k^2 sn(u)cn(u)
\end{aligned}$$

Demostración. (Lawden, 2013) Utilizando la ecuación (2.27) al diferenciar la definición de sn, tenemos:

$$\frac{d}{du}sn(u) = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_4^2(0)\theta_2(z)\theta_3(z)}{\theta_3^2(0)\theta_4^2(z)} = cn(u)dn(u)$$

Utilizando la ecuación (2.28) al diferenciar la definición de cn, tenemos:

$$\frac{d}{du}cn(u) = -\frac{\theta_4(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_3^2(0)\theta_1(z)\theta_3(z)}{\theta_3^2(0)\theta_4^2(z)} = -sn(u)dn(u)$$

Utilizando la ecuación (2.29) y la Definición 3.2, al diferenciar la definición de cn, tenemos:

$$\frac{d}{du}dn(u) = -\frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)}\frac{\theta_2^2(0)\theta_1(z)\theta_2(z)}{\theta_3^2(0)\theta_4^2(z)} = -k^2 sn(u)cn(u)$$

Otra propiedad importante son las correspondientes a la adición, para lo cuál primero demostraremos las siguientes identidades:

Lema 3.6. *Se cumplen las siguiente identidades:*

$$\theta_2(x+y)\theta_4(x-y)\theta_2(0)\theta_4(0) = \theta_2(x)\theta_4(x)\theta_2(y)\theta_4(y) - \theta_1(x)\theta_3(x)\theta_1(y)\theta_3(y) \tag{3.3}$$

$$\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)\theta_3(0)\theta_4(0) = \theta_3(x)\theta_4(x)\theta_3(y)\theta_4(y) - \theta_1(x)\theta_2(x)\theta_1(y)\theta_2(y) \tag{3.4}$$

Demostración. (Lawden, 2013) Al multiplicar la ecuación (2.22) por la ecuación (2.24), obtenemos:

$$\begin{aligned}\theta_1(x,q)\theta_2(y,q)\theta_3(x,q)\theta_4(y,q) = {} & [\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2) + \theta_4(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)] \\ & \times [\theta_4(x+y,q^2)\theta_4(x-y,q^2) - \theta_1(x+y,q^2)\theta_1(x-y,q^2)]\end{aligned} \tag{3.5}$$

Intercambiando x, y en la ecuación en la ecuación (3.5) y sumando con la misma ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned}&\theta_1(x,q)\theta_2(y,q)\theta_3(x,q)\theta_4(y,q) + \theta_1(y,q)\theta_2(x,q)\theta_3(y,q)\theta_4(x,q) \\ &= 2\theta_1(x+y,q^2)\theta_4(x+y,q^2)[\theta_4^2(x-y,q^2) - \theta_1^2(x-y,q^2)]\end{aligned} \tag{3.6}$$

Al reemplazar $y = 0$ en la ecuación (2.22) y en la ecuación (2.24), tenemos las siguientes identidades:

$$\theta_1(x,q)\theta_2(0,q) = 2\theta_1(x,q^2)\theta_4(x,q^2)$$

$$\theta_3(x,q)\theta_4(0,q) = \theta_4^2(x,q^2) - \theta_1^2(x,q^2)$$

Usando estas identidades en la ecuación (3.36), se reduce a la forma:

$$\theta_1(x+y)\theta_3(x-y)\theta_2(0)\theta_4(0) = \theta_1(x)\theta_3(x)\theta_2(y)\theta_4(y) + \theta_2(x)\theta_4(x)\theta_1(y)\theta_3(y)$$

Incrementando x por $\pi/2$, la identidad anterior se transforma en:

$$\theta_2(x+y)\theta_4(x-y)\theta_2(0)\theta_4(0) = \theta_2(x)\theta_4(x)\theta_2(y)\theta_4(y) - \theta_1(x)\theta_3(x)\theta_1(y)\theta_3(y)$$

Con lo que queda demostrada la primera identidad.
Multiplicando la ecuación (2.16) y la ecuación (2.17), encontramos que:

$$\theta_3(x,q)\theta_3(y,q)\theta_4(x,q)\theta_4(y,q) = \theta_3^2(x+y,q^2)\theta_3^2(x-y,q^2) - \theta_2^2(x+y,q^2)\theta_2^2(x-y,q^2) \tag{3.7}$$

Reemplazando $y = 0$, en la ecuación (2.16) y (2.17), tenemos

$$2\theta_3^2(x,q^2) = \theta_3(x,q)\theta_3(0,q) + \theta_4(x,q)\theta_4(0,q)$$

$$2\theta_2^2(x,q^2) = \theta_3(x,q)\theta_3(0,q) - \theta_4(x,q)\theta_4(0,q)$$

Sustituyendo estas dos identidades en la ecuación (3.7), tenemos:

$$2\theta_3(x)\theta_3(y)\theta_4(x)\theta_4(y) = [\theta_3(x+y)\theta_4(x-y) + \theta_4(x+y)\theta_3(x-y)]\theta_3(0)\theta_4(0) \tag{3.8}$$

Incrementando el valor de x, y por $\tau\pi/2$ por el Lema 2.2, tenemos:

$$2\theta_2(x)\theta_2(y)\theta_1(x)\theta_1(y) = [\theta_4(x+y)\theta_3(x-y) - \theta_3(x+y)\theta_4(x-y)]\theta_3(0)\theta_4(0) \tag{3.9}$$

Restando la ecuación (3.9) de la ecuación (3.8), encontramos:

$$\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)\theta_3(0)\theta_4(0) = \theta_3(x)\theta_4(x)\theta_3(y)\theta_4(y) - \theta_1(x)\theta_2(x)\theta_1(y)\theta_2(y)$$

Con lo que se demuestra la segunda identidad.

Teorema 3.7. *Las fórmulas de adición de las funciones elípticas de Jacobi son:*

$$sn(u+v) = \frac{sn(u)cn(v)dn(v) + sn(v)cn(u)dn(u)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^2(v)}$$
$$cn(u+v) = \frac{cn(u)cn(v) - sn(u)sn(v)dn(u)dn(v)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^2(v)}$$
$$dn(u+v) = \frac{dn(u)dn(v) - k^2 sn(u)sn(v)cn(u)cn(v)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^2(v)}$$

Demostración. (Lawden, 2013) Utilizando la definición de $sn(u)$, tenemos que:

$$sn(u+v) = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}.\frac{\theta_1(x+y)}{\theta_4(x+y)}$$

donde $x = u/\theta_3^2(0)$, $y = v/\theta_3^2(0)$.
Si dividimos la ecuación (2.32) para la ecuación (2.20), tenemos que:

$$\frac{\theta_1(x+y)}{\theta_4(x+y)} = \frac{\theta_4^2(0)[\theta_1(x)\theta_4(x)\theta_2(y)\theta_3(y) + \theta_2(x)\theta_3(x)\theta_1(y)\theta_4(y)]}{\theta_2(0)\theta_3(0)[\theta_4^2(x)\theta_4^2(y) - \theta_1^2(x)\theta_1^2(y)]}$$

Usando las definiciones al inicio de este capítulo, tenemos que:

$$sn(u+v) = \frac{sn(u)cn(v)dn(v) + sn(v)cn(u)dn(u)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^2(v)}$$

Utilizando la definición de $cn(u)$, tenemos que:

$$cn(u+v) = \frac{\theta_4(0)}{\theta_2(0)}.\frac{\theta_2(x+y)}{\theta_4(x+y)}$$

donde $x = u/\theta_3^2(0)$, $y = v/\theta_3^2(0)$.
Si dividimos la ecuación (3.3) para la ecuación (2.20), obtenemos:

$$\frac{\theta_2(x+y)}{\theta_4(x+y)} = \frac{\theta_4(0)[\theta_2(x)\theta_4(x)\theta_2(y)\theta_4(y) - \theta_1(x)\theta_3(x)\theta_1(y)\theta_3(y)]}{\theta_2(0)[\theta_4^2(x)\theta_4^2(y) - \theta_1^2(x)\theta_1^2(y)]}$$

Usando las definiciones al inicio de este capítulo, tenemos:

$$cn(u+v) = \frac{cn(u)cn(v) - sn(u)sn(v)dn(u)dn(v)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^2(v)}$$

Utilizando la definición de $dn(u)$, tenemos que:

$$dn(u+v) = \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)}.\frac{\theta_3(x+y)}{\theta_4(x+y)}$$

donde $x = u/\theta_3^2(0)$, $y = v/\theta_3^2(0)$.
Si dividimos la ecuación (3.4) para la ecuación (2.20), obtenemos:

$$\frac{\theta_3(x+y)}{\theta_4(x+y)} = \frac{\theta_4(0)[\theta_3(x)\theta_4(x)\theta_3(y)\theta_4(y) - \theta_1(x)\theta_2(x)\theta_1(y)\theta_2(y)]}{\theta_3(0)[\theta_4^2(x)\theta_4^2(y) - \theta_1^2(x)\theta_1^2(y)]}$$

Usando las definiciones al inicio de este capítulo, tenemos:

$$dn(u+v) = \frac{dn(u)dn(v) - k^2 sn(u)sn(v)cn(u)cn(v)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^2(v)}$$

Con lo que se demuestra el teorema.

Utilizando el Teorema 3.5 se demuestran las siguientes identidades:

$$\int sn(u)du = \frac{1}{k}\ln(dn(u) - kcn(u)) \tag{3.10}$$

$$\int cn(u)du = \frac{1}{k}\arcsin(ksn(u)) \tag{3.11}$$

$$\int dn(u)du = \arcsin(sn(u)) \tag{3.12}$$

Definimos entonces $am(u)$ como:

$$am(u) = \int_0^u dn(v)dv$$

. Utilizando la ecuación (3.12), tenemos:

$$sn(u) = \sin(am(u)) \tag{3.13}$$

Capítulo 4

Integrales elípticas

4.1. Integrales elípticas de primera especie

A lo largo de este capítulo, el argumento u y el módulo k de todas las funciones elípticas será asumido real y, también, supondremos que $0 < k < 1$, si no se establece otra cosa.
Empezaremos por calcular la derivada de la función inversa $sn^{-1}(x, k)$. En este capítulo todas las funciones inversas serán tomadas en el rango $(0, K)$, esto se hace para que los valores que tome estén bien definidos evitando la doble periodicidad. Con $u = sn^{-1}(x, k)$, entonces $x = snu$, y por lo tanto usando el Teorema 3.5, la Proposición 3.1 y la Proposición 3.3:

$$\frac{dx}{du} = cn(u)dn(u) = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}$$

Integrando esta ecuación en el rango $(0, x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ para x y el rango correspondiente $(0, u)$ $(0 \leq u \leq K)$ para u, da como resultado:

$$sn^{-1}(x, k) = u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2t^2)}} \tag{4.1}$$

para $(0 \leq x \leq 1)$. Esta integral es llamada una **integral elíptica de primera especie**.
Dado que $sn^{-1} = K$, un caso especial de la ecuación (4.1) es:

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2t^2)}} \tag{4.2}$$

Esta es la **integral elíptica completa de primera especie**.
Ya que $K'(k) = K(k')$, también tenemos

$$K'(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2t^2)}}$$

Si reemplazamos $t = \sin\alpha$ en la ecuación (4.1), esta se reduce a la forma:

$$F(\phi, k) = sn^{-1}(\sin\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}} \tag{4.3}$$

donde $x = \sin\phi$. Si reemplazamos $\phi = \pi/2$, tenemos:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} \tag{4.4}$$

Esta ecuación se puede expandir en potencias ascendentes de k^2, y puede ser integrado término a término:

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1{,}3}{2{,}4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1{,}3{,}5}{2{,}4{,}6}\right)^2 k^6 - ...\right] \tag{4.5}$$

Si tenemos $u = cn^{-1}(x)$, tal que $x = cn(u)$. Entonces

$$\frac{d}{du}x = -sn(u)dn(u) = -\sqrt{(1-x^2)(k'^2 + k^2x^2)}$$

Integrando en el intervalo $(0, u)$ para u y $(1, x)$ para x nos lleva al resultado:

$$cn^{-1}(x,k) = \int_x^1 \frac{dt}{(1-t^2)(k'^2+k^2t^2)} \tag{4.6}$$

4.2. Integrales elípticas de segunda especie

La **integral elíptica de segunda especie** está definida por:

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt$$

Si tenemos $t = \sin\phi$, entonces:

$$E(k,\phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}d\phi$$

Además, si utilizamos $sn(u) = t = \sin\phi$ tenemos que cualquier integral elíptica de la segunda especie puede ser reducida a evaluar la **función elíptica de Jacobi** $E(u,k)$ definida como:

$$E(u,k) = \int_0^u dn^2 v dv = \int_0^{\tau} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt$$

donde $t = sn(v)$ y $\tau = sn(u)$

La forma de Legendre de esta integral se deriva al hacer la transformación $sn(v) = \sin\theta$, $sn(u) = \sin\phi$. Viendo como una función de ϕ y k, la integral será denotada por $D(\phi,k)$. Entonces

$$D(\phi,k) = \int_0^{\phi} \sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}d\theta$$

Por la ecuación (3.13), $\phi = am(u)$, la relación entre las dos notaciones es expresada por:

$$E(u,k) = D(am(u),k) \tag{4.7}$$

La **integral elíptica completa de segunda especie** denotada por E es definida por la ecuación:

$$E = E(k) = \int_0^K dn^2(u)du = E(K,k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta \tag{4.8}$$

Esta ecuación puede ser expandida en potencias de k^2, y después ser integrada término a término y tenemos como resultado:

$$E = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1{,}3}{2{,}4}\right)^2 k^4 - \frac{1}{5}\left(\frac{1{,}3{,}5}{2{,}4{,}6}\right)^2 k^6 - ...\right] \tag{4.9}$$

Teorema 4.1. *La fórmula de adición de la función elíptica de segunda especie es:*

$$E(u_1+u_2) = E(u_1) + E(u_2) - k^2 sn(u_1)sn(u_2)sn(u_1+u_2)$$

Demostración. (Bowman, 1953)Por la fórmula de adición de dn en el Teorema 3.7, tenemos que:

$$dn(x+y) + dn(x-y) = \frac{2dn(x)dn(y)}{1-k^2sn^2(x)sn^2(y)}$$

$$dn(x+y) - dn(x-y) = \frac{-2k^2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)}{1-k^2sn^2(x)sn^2(y)}$$

Multiplicando ambas identidades obtenemos:

$$dn^2(x+y) - dn^2(x-y) = \frac{-4k^2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y)}{(1-k^2sn^2(x)sn^2(y))^2}$$

y, integrando ambos lados con respecto a y junto con el Teorema 3.5, resulta:

$$E(x+y) + E(x-y) = -\frac{2sn(x)cn(x)dn(x)}{sn^2(x)(1-k^2sn^2(x)sn^2(y))} + C \tag{4.10}$$

donde C es una constante que depende solo de x. Si $y = x$, tenemos:

$$E(2x) = -\frac{2sn(x)cn(x)dn(x)}{sn^2(x)(1-k^2sn^4(x))} + C$$

y restando esta ecuación de la ecuación (4.10) tenemos:

$$E(x+y) + E(x-y) - E(2x) = \left(\frac{2k^2sn(x)cn(x)dn(x)}{1-k^2sn^4(x)}\right)\left(\frac{sn^2(x)-sn^2(y)}{1-k^2sn^2(x)sn^2(y)}\right)$$

Usando nuevamente el Teorema 3.7 tenemos que:

$$sn(x+y)sn(x-y) = \frac{sn^2(x)-sn^2(y)}{1-k^2sn^2(x)sn^2(y)} \tag{4.11}$$

De igual manera,

$$sn(2x) = \frac{2sn(x)cn(x)dn(x)}{1-k^2sn^4(x)} \tag{4.12}$$

Por lo tanto, utilizando las ecuaciones (4.11) y (4.12), tenemos:

$$E(x+y) + E(x-y) - E(2x) = k^2sn(2x)sn(x+y)sn(x-y)$$

Finalmente, si utilizamos $u_1 = x+y$, $u_2 = x-y$, entonces la ecuación anterior resulta:

$$E(u_1+u_2) = E(u_1) + E(u_2) - k^2 sn(u_1)sn(u_2)sn(u_1+u_2)$$

Capítulo 5

Aplicación de las funciones elípticas de Jacobi

5.1. El péndulo simple

Definición 5.1. Un **péndulo simple** consiste en una partícula suspendida de un hilo inextensible y sin peso, moviéndose libremente en un plano vertical bajo la fuerza de la gravedad.

Sea l la longitud del hilo de suspensión, g la aceleración gravitacional, y m la masa de la partícula. Entonces, si β es el ángulo que forma el hilo con el eje vertical y v es la velocidad de la masa en cualquier tiempo t, por la conservación de energía tenemos:

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgl\cos\beta = \text{constante}$$

Dado que $v = l\dot{\beta}$, con $\omega^2 = g/l$, esta ecuación puede ser escrita como:

$$\dot{\beta}^2 - 2\omega^2\cos\beta = \text{constante}$$

donde $\dot{\beta}$ es la derivada de β con respecto al tiempo. Sea α la amplitud de la oscilación, entonces $\dot{\beta} = 0$ cuando $\beta = \alpha$, por lo tanto

$$\dot{\beta}^2 = 2\omega^2(\cos\beta - \cos\alpha) = 4\omega^2\left(\sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\beta\right)\right)$$

Integrando, tenemos el siguiente resultado:

$$\omega t = \frac{1}{2}\int_0^\beta \frac{d\beta}{\left(\sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\beta\right)\right)} \tag{5.1}$$

donde t es el tiempo que toma la partícula en ir desde la posición más baja hasta llegar a la posición en la cual el hilo está inclinado a un ángulo β con respecto al eje vertical.
Haciendo un cambio de variable a ϕ, donde

$$\sin\frac{1}{2}\beta = \sin\frac{1}{2}\alpha\sin\phi$$

Usando la ecuación (4.3) de la integral elíptica de primera especie, tenemos:

$$\omega t = \frac{1}{2}\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{\left(1-\sin^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\phi\right)}} = sn^{-1}\left(\sin\phi, \sin\frac{1}{2}\alpha\right)$$

Invirtiendo obtenemos:

$$\sin\phi = sn\left(\omega t, \sin\frac{1}{2}\alpha\right)$$

Entonces:

$$\sin\frac{1}{2}\beta = \sin\frac{1}{2}\alpha sn(\omega t, k) \tag{5.2}$$

donde $k = \sin\frac{1}{2}\alpha$ mostrando que $\sin\frac{1}{2}\beta$ oscila con amplitud $\sin\frac{1}{2}\alpha$ y periodo

$$T = 4K/\omega$$

donde

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{\left(1-\sin^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\phi\right)}}$$

notemos que:

$$\cos\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\left(1-\sin^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\phi\right)} = \sqrt{(1-k^2sn^2\omega t)} = dn\omega t \tag{5.3}$$

Diferenciando la ecuación (5.2), tenemos:

$$\frac{1}{2}\dot{\beta}\cos\frac{1}{2}\beta = \omega\sin\frac{1}{2}\alpha cn\omega t dn\omega t$$

Y utilizando la ecuación (5.3):

$$\dot{\beta} = 2\omega\sin\frac{1}{2}\alpha cn\omega t$$

(Lawden, 2013).

5.2. La ecuación de Duffing

Definición 5.2. La **ecuación de Duffing** gobierna las oscilaciones de una masa adherida al final de un resorte cuya tensión (o compresión) T está relacionada con su extensión x por una ecuación de la forma.

$$T = \alpha x + \beta x^3$$

donde α es siempre positivo.

Si $\beta = 0$, el resorte obedece la ley de Hooke y las oscilaciones son armónicas simples. Si $\beta > 0$, la tensión incrementa con la extensión más rápido que en la ley de Hooke y el resorte se dice *duro*. Si $\beta < 0$, la tensión incrementa más lento que en

la ley de Hooke y el resorte se dice *suave*.
La ecuación del movimiento de la masa puede ser puesta en la forma:

$$\ddot{x} + x + \epsilon x^3 = 0$$

que es la forma canónica de la **ecuación de Duffing**.
Consideremos, primero el caso del resorte duro, para el cual $\epsilon > 0$. Supongamos que en el momento inicial tenemos: $t = 0$, $x = a$, $\dot{x} = 0$. Dado que $\ddot{x} = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\dot{x}^2$, podemos integrar con respecto a x para obtener:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\epsilon x^4 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}\epsilon a^4$$

Integrando con respecto a t, obtenemos:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \int_x^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(2/\epsilon + a^2 + x^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 + \epsilon a^2)}} cn^{-1} \left[\frac{x}{a}, \sqrt{\left(\frac{\epsilon a^2}{2 + 2\epsilon a^2} \right)} \right] \end{aligned}$$

Haciendo referencia a la ecuación (4.6). Invirtiendo tenemos que:

$$x = acn(\sqrt{(1 + \epsilon a^2)}t) \tag{5.4}$$

con módulo:

$$k^2 = \frac{\epsilon a^2}{2 + 2\epsilon a^2}$$

Si trabajamos con el primer orden de ϵ. Entonces, $k^2 = \frac{1}{2}\epsilon a^2$ y la ecuación (4.5) nos dice que $K = \frac{1}{2}\pi(1 + \frac{1}{8}\epsilon a^2)$. Y en ese caso tenemos:

$$T = 2\pi(1 - \frac{3}{8}\epsilon a^2)$$

Para un resorte suave, $\epsilon < 0$ y escribiremos $\epsilon = -\eta$. Ya que $x - \eta x^3$ tiene el máximo en $x = 1/\sqrt{3\eta}$, teóricamente la tensión debería disminuir mientras la extensión aumenta para valores suficientemente grandes de x, sin embargo este no es un caso real, por lo que asumiremos $a < 1/\sqrt{3\eta}$.

Teniendo, $x = 0$ en $t = 0$, la ecuación para el tiempo es:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2}{\eta}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(2/\eta - a^2 - x^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{2 - \eta a^2}} sn^{-1} \left[\frac{x}{a}, \sqrt{\left(\frac{\eta a^2}{2 - \eta a^2} \right)} \right] \end{aligned}$$

haciendo referencia la ecuación (4.1). Invirtiendo la última ecuación obtenemos:

$$x = asn(\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\eta a^2)t})$$

donde el módulo es determinado por

$$k^2 = \frac{\eta a^2}{2 - \eta a^2}$$

Por lo tanto el periodo de oscilación está dado por:

$$T = \frac{4K}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\eta a^2)}}$$

y, para pequeños η consideraremos solo el primer grado de η, esto junto a la ecuación (4.5) nos lleva a

$$T = 2\pi(1 + \frac{3}{8}\eta a^2)$$

(Lawden, 2013).

5.3. Geometría de la elipse

Tomando una elipse parametrizada como:

$$x = a \sin\theta,\ y = b\cos\theta$$

con $a > b$ y el ángulo excéntrico θ es medido desde el eje menor. Si s es la longitud de arco medido en sentido horario alrededor de la curva empezando desde el punto $(0, b)$, entonces: $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)}d\theta = a\sqrt{(1 - e^2\sin^2\theta)}d\theta$ donde $e = \sqrt{(1 - b^2/a^2)}$ es la excentricidad. Entonces, la longitud de arco desde el punto $(0, b)$ a cualquier punto P donde $\theta = \phi$ está dado por:

$$s = a\int_0^{\phi} \sqrt{(1 - e^2\sin^2\theta)}d\theta = aE(u, e)$$

donde $\phi = am(u, e)$. Esto es por la ecuación (4.7)
Si ponemos $\phi = \frac{1}{2}\pi, u = K$ tenemos aE para la longitud de un cuadrante de la elipse.
Si introducimos un parámetro alternativo u al poner $\theta = am(u, e)$, entonces por la ecuación (3.13), la forma paramétrica puede ser expresada como:

$$x = asn\theta,\ y = bcs\theta$$

Esto nos muestra como las funciones elípticas nos ayudan a describir objetos geométricos (Lawden, 2013).

Conclusiones

Se ha presentado una aproximación histórica a las funciones elípticas por medio de su construcción usando funciones theta. Estas funciones fueron encontradas como lo hizo Jacobi y así llegamos al origen del estudio sobre las funciones elípticas. Además, gracias a estas funciones se han podido resolver de manera analítica problemas en geometría y física. Es importante además que las derivadas e integrales de las funciones elípticas de Jacobi sn, cn y dn pueden ser expresadas en base a sí mismas.

En el primer capítulo hemos trabajado analíticamente mostrando las propiedades que tienen las funciones elípticas. La relevancia de esta parte está dada por su aplicación sobre curvas elípticas. Los capítulos siguientes estudian de manera constructiva cómo hallar funciones elípticas y demuestran sus propiedades. Esta perspectiva, permite que el tema de funciones elípticas pueda ser entendido con facilidad aún sin mucho conocimiento de análisis complejo, y se pueda apreciar completamente las aplicaciones en el capítulo final.

Uno de los objetivos de este trabajo fue presentar aplicaciones de las funciones elípticas por medio del trabajo de Jacobi. Sin embargo para aplicaciones recientes es necesario un paso más profundo dentro del estudio de estas funciones. El estudio de las funciones elípticas de Weistrass es el siguiente paso para poder comprender mejor las aplicaciones que tienen estas funciones en teoría de números que se ha convertido en una de las más importantes aplicaciones de las funciones elípticas.

Bibliografía

Bowman, F. (1953). *Introduction to Elliptic Functions: With Applications.* English Universities Press.

Brochero, F., Moreira, C., Saldanha, N., y Tengan, E. (2015). *Teoria dos números - um passeio pelo mundo inteiro com primos e outros números familiares.* Projeto Euclides, IMPA.

Copson, E. (1935). *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable.* Clarendon Press.

Jones, G., y Singerman, D. (1987). *Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint.* Cambridge University Press.

Lawden, D. (2013). *Elliptic Functions and Applications.* Springer New York.

Stein, E., y Shakarchi, R. (2010). *Complex Analysis* (n.º v. 13). Princeton University Press.