На правах рукописи

ЛАПТЕВА НАТАЛЬЯ СЕРГЕЕВНА

Математические модели регулирования численности сотрудников предприятий в условиях работы по трудовому договору

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Барнаул – 2011

Работа выполнена в лаборатории теоретико–вероятностных методов Омского филиала Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, профессор Перцев Николай Викторович

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук, профессор Алгазин Геннадий Иванович,

кандидат физико–математических наук, доцент Ломов Андрей Александрович

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского»

Защита диссертации состоится 15 июня 2011 года в 12-00 на заседании диссертационного совета Д 212.005.04 при ГОУ ВПО «Алтайский государственный университет» по адресу: 656049, Барнаул, пр. Ленина, 61.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУ ВПО «Алтайский государственный университет» по адресу: 656049, г. Барнаул, пр. Ленина, 61.

Автореферат разослан «11» мая 2011 года.

Учёный секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор С.А. Безносюк

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Метод математического моделирования является одним из основных инструментов исследования трудно-формализуемых объектов, к которым относятся различные предприятия, работающие в определенных экономических условиях. В настоящее время разработано большое количество моделей и методов, предназначенных для анализа деятельности предприятий, некоторые из которых схематически представлены ниже:

1		2		3
Сырьё Финансовые ресурсы Заказы	↔	Материальные ресурсы Помещения Оборудование Технологии	↔	Сотрудники предприятия Управление персоналом Рынок труда
модели эконометрического типа		*модели производственных процессов, методы исследования операций*		*модели социально - экономических процессов, модели активных и организационных систем*

Важнейшей проблемой в работе предприятий является их обеспеченность необходимым количеством трудовых ресурсов. Потребность конкретного предприятия в трудовых ресурсах зависит от многочисленных факторов демографического и социально-экономического характера, таких, как численность трудоспособного населения, размер предприятия, его бюджет, род деятельности, технология производства, подготовка и переподготовка кадров. Различные аспекты по разработке математических моделей управления работой предприятий с точки зрения состава сотрудников, их обучения, карьерного роста, необходимого числа сотрудников для выполнения поставленных задач рассмотрены в работах многих исследователей: Бурков В.Н. (1982), Бурков В.Н., Буркова И.В. и др., (1994, 2005), Новиков Д.А. (2005, 2009), Алгазин Г.И. (1999, 2006, 2009), Оскорбин Н.М. (2002, 2005), Иващенко А.А. (2006), Караваев А.П. (2003), Быков В.Е., Мартынов А.Н. (1998), Таха Х. (1985), Терехов А.И. (1991), Перцев Н.В. (1997), Зибров Г.В., Михайлов В.В. и др. (2009). Вместе с тем, для оперативного управления работой предприятий в изменяющихся экономических условиях необходимо совершенствование известных и разработка новых моделей, методов, алгоритмов и компьютерных программ, предназначенных для регулирования численности сотрудников предприятий в нестационарных условиях их работы, что и определяет актуальность темы диссертации.

Объектом моделирования в настоящей работе является некоторое предприятие, планирующее свою деятельность на период времени $t = 1, 2, \ldots, m$. Предполагается, что объем производства (заказы, услуги и т.д.) на этот период является известным и определяет необходимое количество сотрудников $b(t)$ одной специальности; считается известной величина $n(t)$ – количество необходимых специалистов на рынке труда. При приеме на работу сотрудники заключают бессрочный или срочный трудовой договор. Прием сотрудников или их досрочное увольнение осуществляется по решению администрации. Часть сотрудников может увольняться по причинам, не зависящим от работодателя.

Задача регулирования численности сотрудников предприятия состоит в следующем: необходимо поддерживать такое количество сотрудников одной специальности $x(t)$, чтобы минимизировать затраты предприятия из-за недостатка или излишка рабочей силы ($x(t) \neq b(t)$), а также суммарные расходы по заработной плате, найму и увольнению сотрудников за весь рассматриваемый период времени $t = 1, 2, \ldots, m$.

Целью диссертационной работы является разработка семейства математических моделей, функций затрат, алгоритмов и программ, предназначенных для решения задачи регулирования численности сотрудников одной специальности в течение заданного периода планирования работы предприятия.

В задачи диссертационной работы входит:

• построение математических моделей, описывающих динамику численности сотрудников одной специальности с учетом их индивидуальных характеристик, работы на переменную величину ставки в условиях срочного или бессрочного трудового договора;

• постановка задач математического программирования, возникающих при формализация задачи регулирования численности сотрудников одной специальности;

• аналитическое исследование поставленных задач математического программирования, разработка алгоритмов и программ для численного решения этих задач на ЭВМ в среде Matlab;

• исследование решений задачи регулирования численности сотрудников одной специальности в зависимости от вариации параметров моделей и функций затрат предприятия.

Основные положения, выносимые на защиту:

1) математические модели динамики численности сотрудников одной специальности в нестационарных условиях функционирования предприятия,

2) постановки различных вариантов задачи регулирования численности сотрудников и свойства используемых функций затрат,

3) методы решения поставленных задач, реализация этих методов в среде Matlab;

4) результаты вычислительных экспериментов по обоснованию вариантов принятия решений по приёму увольнению сотрудников, обеспечивающих минимизацию затрат предприятия.

Личный вклад. Все основные результаты получены автором лично.

Методы исследования. Для решения поставленных в работе задач применялись неоднородные системы линейных разностных уравнений, кусочно-линейные и кусочно-квадратичные целевые функции, свойства выпуклых функций, методы линейного и нелинейного программирования, численные расчеты в пакете Matlab, вычислительные эксперименты с моделями.

Научная новизна работы состоит в следующем.

1. Построено семейство математических моделей, описывающих динамику численности сотрудников одной специальности с учетом их работы на переменную величину ставки в условиях срочного или бессрочного трудового договора; поставлены задачи регулирования численности сотрудников на основе информации в текущий момент времени и информации за весь период планирования деятельности предприятия.

2. Найдены аналитические решения нескольких из задач регулирования численности сотрудников предприятия, основанных на информации в текущий момент времени.

3. Для задач регулирования численности сотрудников предприятия с невыпуклыми функциями затрат найдены нижние оценки на минимальные значения этих функций и получены соотношения на параметры моделей, при которых ре-

шения записываются в явной форме с использованием вспомогательных задач линейного программирования.

4. Разработаны программы для решения поставленных задач регулирования численности сотрудников предприятия в среде Matlab.

5. Показано, что для минимизации затрат предприятия при регулировании численности сотрудников необходимо минимизировать функции затрат за весь период планирования деятельности предприятия. Установлено, что задачи регулирования численности сотрудников допускают решения, для которых: численность сотрудников может не совпадать с потребностью в них даже при достаточно большом числе необходимых специалистов на рынке труда; в условиях работы по срочному трудовому договору одновременно возможны приём и увольнение сотрудников.

Теоретическая значимость работы. Результаты работы могут быть использованы для постановки и решения задачи регулирования численности сотрудников предприятия в рамках стохастического или целочисленного подхода.

Практическая значимость работы состоит в разработке комплекса программ в среде Matlab, позволяющего оперативно решать задачу регулирования численности сотрудников предприятий и корректировать принятые решения в изменяющихся экономических условиях.

Реализация и использование результатов. Программный комплекс использован на предприятии ЗАО «Компания «ЭР–Телеком», г. Омск, что подтверждается актом об использовании результатов диссертационной работы.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Всероссийской научной молодёжной конференции «Под знаком «Сигма» (Омск, 2003), VI Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (Кемерово, 2005), III Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения» (Омск, 2006), II Международной научной конференции «Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования» (Воронеж, 2007), Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (Кемерово, 2008), IV Международной конференции по проблемам управления (Москва, 2009), на семинаре кафедры математического моделирования Омского госуниверситета (Омск, 2007), семинарах лаборатории дискретной оптимизации и лаборатории теоретико-вероятностных методов Омского филиала Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омск, 2003–2011), семинарах лаборатории активных систем Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (Москва, 2009, 2010).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 работ: 2 статьи в научных журналах, рекомендованных ВАК России, 1 статья в научном журнале, 2 статьи в материалах международных научных конференций, 5 тезисов докладов в материалах всероссийских и международной научных конференций.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и 10 приложений. Основной текст изложен на 143 страницах, содержит 28 рисунков и 25 таблиц. Список литературы включает 109 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении представлено описание объекта моделирования, приведены цели и задачи исследования.

В первой главе «Математические модели в задачах управления трудовыми ресурсами (обзор)» приведен обзор работ, посвященных математическим моделям производственных процессов, динамики трудовых ресурсов, активных систем.

Во второй главе «Модель регулирования численности сотрудников в условиях срочного трудового договора» построена модель, описывающая динамику численности сотрудников одной специальности в условиях работы при заключении срочного трудового договора. Сотрудники являются взаимозаменяемыми и различаются продолжительностью времени работы после заключения договора. Приведена функция, отражающая затраты предприятия на выплату заработной платы, прием и увольнение сотрудников, а также затраты при недостатке или избытке сотрудников. Исследованы свойства решений модели и функции затрат. Поставлены и решены задачи регулирования численности сотрудников на основе информации в текущий момент времени и информации за весь период планирования работы предприятия.

В п. 2.1. представлено описание модели. Работа предприятия изучается в течение фиксированного периода времени $T=\{1, 2, ..., m\}$. Каждый сотрудник заключает трудовой договор продолжительностью τ. Положим $I_\tau=\{1,2,...,\tau\}$.

Пусть $x(t)=\sum_{i=0}^{\tau-1} y_i(t)$ означает общее количество сотрудников рассматриваемой специальности в момент времени $t\in T$. Здесь: $y_i(t)$ – количество сотрудников, которые проработали $i\in I_{\tau-1}$ единиц времени и остались работать на следующий период, $y_0(t)$ – количество принятых сотрудников (с учетом возможности продления трудового договора). Обозначим через $x(0)=\sum_{i=0}^{\tau-1} y_i^{(0)}$ первоначальное количество сотрудников, где $y_i^{(0)}\ge 0$ количество таких сотрудников, проработавших на предприятии i единиц времени, $i=0$, $i\in I_{\tau-1}$. Пусть переменная $v_0(t)\ge 0$ описывает прием новых сотрудников, а переменные $v_i(t)\ge 0$ задают количество сотрудников, проработавших i единиц времени и уволенных по инициативе администрации в момент времени t, $i\in I_{\tau-1}$. Обозначим через $0\le q_i\le 1$ средние доли сотрудников, проработавших $i-1$ единиц времени и продолжающих работу в i- ю единицу времени, $i\in I_{\tau-1}$. Определим параметр $0\le q_\tau\le 1$ как долю сотрудников, проработавших $\tau-1$ единиц времени, доработавших до завершения договора и желающих продлить договор на новый срок. Администрация продлевает договор для части сотрудников $q_\tau y_{\tau-1}(t-1)-v_\tau(t)\ge 0$. Количество принимаемых или увольняемых по инициативе администрации сотрудников задаем с помощью вектора $w(t)=(v_0(t)-v_\tau(t),-v_1(t),-v_2(t),...,-v_{\tau-1}(t))^*$, $t\in T$,

где символ «*» означает операцию транспонирования. Для $t=0$ полагаем, что $w(0)=(y_0^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_{\tau-1}^{(0)})^*$.

Система уравнений модели имеет вид:

$$\begin{cases} y_0(t)=v_0(t)+q_\tau\, y_{\tau-1}(t-1)-v_\tau(t), \\ y_1(t)=q_1 y_0(t-1)-v_1(t), \\ y_2(t)=q_2 y_1(t-1)-v_2(t), \quad t\in T, \\ \dots\dots\dots, \\ y_{\tau-1}(t)=q_{\tau-1}y_{\tau-2}(t-1)-v_{\tau-1}(t), \\ y_i(0)=y_i^{(0)},\ \mathrm{i}=0,\ \mathrm{i}\in \mathrm{I}_{\tau-1}. \end{cases} \tag{1}$$

Из (1) следует, что

$$x(t)=x_A(t)=v_0(t)+\sum_{i=1}^{r}(q_i y_{i-1}(t-1)-v_i(t))=s\cdot\sum_{j=0}^{t}A^j w(t-j),\quad t\in T, \qquad (2)$$

где $s=(1,1,\ldots,1,1)_{1\times r}$ – вектор-строка, элементы матрицы $A=(a_{ij})$ равны: $a_{1r}=q_r$, $a_{21}=q_1$, $a_{32}=q_2$, …, $a_{r\,r-1}=q_{r-1}$, остальные $a_{ij}=0$. Переменные $v_i(t)$, входящие в уравнения (1), должны удовлетворять ограничениям:

$$0\le v_0(t)\le n(t),\quad 0\le v_i(t)\le q_i\,y_{i-1}(t-1),\quad i\in I_r,\ t\in T. \qquad (3)$$

Соотношения (1), (2), (3) будем называть А – модель.

П. 2.2 посвящен описанию функции затрат F. Эта функция предусматривает такое регулирование численности сотрудников, при котором возможен перевод части сотрудников на минимальную оплату труда. Функция F имеет следующие параметры ($t\in T$): $\beta_1(t)>0$ – расходы предприятия на выплату заработной платы; $\beta_2(t)>0$ – минимальная заработная плата ($\beta_1(t)>\beta_2(t)$); $\mu_0(t)\ge 0$ – расходы на прием новых сотрудников; $\mu(t)\ge 0$ – расходы на увольнение сотрудников по решению администрации; $\gamma_1(t)>0$ – убытки (потери) предприятия при недостатке рабочей силы; $\gamma_2(t)\ge 0$ – убытки предприятия при избытке рабочей силы. Обозначим: $F_1(x(t))$ – денежные расходы по оплате труда сотрудников, $F_2(w(t))$ – затраты при приеме или увольнении сотрудников, $F_3(x(t))$ – потери предприятия при недостатке (избытке) сотрудников в момент времени $t\in T$. Полагаем, что

$$F=F(w(1),w(2),\ldots,w(m))=\sum_{t=1}^{m}(F_1(x(t))+F_2(w(t))+F_3(x(t))),$$

где $F_1(x(t))=\min\{\beta_1(t)x(t),\ \beta_1(t)b(t)+\beta_2(t)(x(t)-b(t))\}$,

$$F_2(w(t))=\mu_0(t)v_0(t)+\mu(t)\sum_{i=1}^{r-1}v_i(t),\quad F_3(x(t))=\max\{\gamma_1(t)(b(t)-x(t)),\ \gamma_2(t)(x(t)-b(t))\},$$

В п. 2.3 исследуются свойства решений А – модели и функций затрат F.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены неравенства (3) и $y_i^{(0)}\ge 0$, $i=0$, $i\in I_{r-1}$. Тогда решение системы (1) является неотрицательным для всех $t\in T$.*

Лемма 2.2. *Множество значений переменных $w(1)$, $w(2)$, …, $w(m)$, задаваемое с помощью неравенств (3), является выпуклым.*

Теорема 2.1. *Пусть параметры функции затрат* $F = F(w(1), w(2), ..., w(m))$ *таковы, что для каждого* $t \in T$ *верно* $\beta_1(t) \le \beta_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$. *Тогда* F *является выпуклой на множестве изменения своих аргументов* $w(1)$, $w(2), ...,$ $w(m)$.

Замечание 2.1. Функцию $F_3(x(t))$ можно рассматривать как функцию «штрафа» за недовыполненный объём работ. Условимся, что параметры функции F таковы, что для каждого $t \in T$ верно $\beta_1(t) \le \gamma_1(t)$, и хотя бы одно из этих неравенств является строгим. В противном случае, при $\sum_{t=1}^{m} \gamma_1(t)b(t) < \sum_{t=1}^{m} \beta_1(t)b(t)$ наименьшее значение F может достигаться при $x(t) = 0$, $w(t) = 0$, $t \in T$, что противоречит экономическому смыслу задачи.

В п. 2.4 рассматривается задача регулирования численности сотрудников предприятия на основе информации в текущий момент времени $t \in T$. Фиксируем t и считаем, что $y_{i-1}(t-1)$ являются известными. Полагаем, что $y(t) = Ay(t-1) + \overline{w}(t)$, где вектор $\overline{w}(t) = (\overline{v}_0(t) - \overline{v}_r(t), -\overline{v}_1(t), -\overline{v}_2(t), ..., -\overline{v}_{r-1}(t))^*$ находится как решение следующий задачи.

Задача I: $F_{(t)}(v_0(t), v_1(t), ..., v_r(t)) =$

$$= F_1(x(t)) + F_2(v_0(t), v_1(t), ..., v_r(t)) + F_3(x(t)) \to \min,$$

$$x(t) = \hat{x}(t) + v_0(t) - v(t), \quad 0 \le v_0(t) \le n(t), \ 0 \le v_i(t) \le q_i\, y_{i-1}(t-1), \quad i \in I_r,$$

где $\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{r-1} q_i y_{i-1}(t-1)$, $v(t) = \sum_{i=1}^{r-1} v_i(t)$.

Задача I представляет собой задачу кусочно-линейного программирования. Решение этой задачи найдено как в аналитической, так и в численной форме. Для численного решения использована функция *linprog()* модуля ToolBox Optimization пакета Matlab 6.5.

В п. 2.5 приводится постановка и решение задачи регулирования численности сотрудников предприятия на основе информации за весь период планирования. Полагаем, что $y(0) = w(0)$, $y(t) = Ay(t-1) + \overline{w}(t)$, $t = 1, 2, ..., m$, где векторы $\overline{w}(t) = (\overline{v}_0(t) - \overline{v}_r(t), -\overline{v}_1(t), -\overline{v}_2(t), ..., -\overline{v}_{r-1}(t))^*$, $t \in T$, находятся как решение следующий задачи.

Задача II: $F(w(1), w(2), ..., w(m)) = \sum_{t=1}^{m} (F_1(x(t)) + F_2(w(t)) + F_3(x(t))) \to \min,$

$$w(0) = (y_0^{(0)},\ y_1^{(0)},\ \ldots,\ y_{r-1}^{(0)})^*,\quad w(t) = (v_0(t) - v_r(t), -v_1(t), \ldots, -v_{r-1}(t))^*,$$

$$x(t) = x_A(t),\quad 0 \le v_0(t) \le n(t),\quad 0 \le \left(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_r(t)\right)^* \le \sum_{j=1}^{t} A^j w(t-j),\quad t \in T.$$

Задача II представляет собой задачу нелинейного программирования для выпуклой целевой функции. Для численного решения использована функция *fmincon()* модуля ToolBox Optimization пакета Matlab 6.5. Точка начального приближения задается с помощью последовательного решения задачи I для $t = 1, 2, \ldots, m$.

В п. 2.6 представлены результаты вычислений по исследованию зависимости решений поставленных задач от параметров функции затрат. Кроме того, приведены результаты тестирования функции *fmincon()*, основанные на сравнении решения задачи II, полученного с помощью сведения этой задачи к набору задач линейного программирования.

В третьей главе «Модели регулирования численности сотрудников в условиях бессрочного трудового договора» рассматриваются две модели, описывающие динамику количества сотрудников одной специальности при заключении бессрочного трудового договора. В первой модели предполагается, что сотрудники являются взаимозаменяемыми и неразличимыми. Во второй модели принято, что сотрудники не являются полностью взаимозаменяемыми и различаются продолжительностью времени работы по трудовому договору, профессиональными характеристиками, величиной заработной платы и затратами предприятия на их принудительное увольнение. Приводится постановка и решение задач регулирования численности сотрудников предприятия для каждой из этих моделей.

В п. 3.1 представлено описание модели для взаимозаменяемых и неразличимых сотрудников, а также функции затрат. Обозначим через $x(t)$ количество сотрудников одной специальности в момент времени $t \in T$. Пусть переменная $u(t)$ означает количество сотрудников, принятых с рынка труда ($u(t) \ge 0$) или уволенных по решению администрации ($u(t) < 0$) в момент времени $t \in T$. Параметр $0 < q < 1$ считается известным и означает среднюю долю сотрудников, оставшихся после увольнений по собственной инициативе и продолжающих работу далее (за один период времени). Динамика $x(t)$ описывается с помощью разностного уравнения с заданным начальным условием

$$x(t) = q\,x(t-1) + u(t),\ t \in T,\ x(0) = x_0, \tag{4}$$

где x_0 – количество сотрудников при $t = 0$. Полагая $u(0) = x(0)$, получаем, что

$$x(t) = x_q(t) = \sum_{i=0}^{t} q^{t-i} u(i), \quad t \in T. \tag{5}$$

Переменная $u(t)$, входящая в (4), должна удовлетворять неравенствам

$$-q\,x(t-1) \le u(t) \le n(t), \quad t \in T. \tag{6}$$

Соотношения (4), (5), (6) будем называть q – модель.

Затраты предприятия задаем с помощью функции P, аналогичной функции F, представленной в главе 2. Отличие проявляется в описании функции затрат на приём и увольнение сотрудников, которая становится нелинейной. Остальные функции – неизменны. Полагаем, что

$$P = P(u(1), u(2), \ldots, u(m)) = \sum_{t=1}^{m} (P_1(x(t)) + P_2(u(t)) + P_3(x(t))),$$

где $P_1(x(t)) = \min\{\beta_1(t)x(t),\ \beta_1(t)b(t) + \beta_2(t)(x(t) - b(t))\}$ – денежные расходы по оплате труда сотрудников, $P_2(u(t)) = \max\{\mu_0(t)u(t),\ -\mu(t)u(t)\}$ – затраты при приеме или увольнении сотрудников, $P_3(x(t)) = \max\{\gamma_1(t)(b(t) - x(t)),\ \gamma_2(t)(x(t) - b(t))\}$ – потери предприятия при недостатке или избытке рабочей силы.

П. 3.2 содержит утверждения о свойствах решений q – модели и функции затрат P. Доказаны **леммы 3.1, 3.2** о неотрицательности решения $x_q(t)$, выпуклости множества ограничений на переменные $u(1)$, $u(2)$, …, $u(m)$ и **теорема 3.1** о достаточных условиях выпуклости функции затрат P.

В п. 3.3 решается задача регулирования численности сотрудников предприятия на основе q – модели и информации в текущий момент времени $t \in T$. Для фиксированного $t \in T$ считаем, что $x(t-1)$ является известным. Полагаем, что $x(t) = q\,x(t-1) + \bar{u}(t)$, где переменная $\bar{u}(t)$ находится как решение следующей задачи.

Задача III: $P_{(t)}(u(t)) = P_1(x(t)) + P_2(u(t)) + P_3(x(t)) \to \min$,

$$x(t) = q\,x(t-1) + u(t), \quad -q\,x(t-1) \le u(t) \le n(t).$$

Решение задачи III найдено в аналитическом виде среди точек недифференцируемости функции $P_{(t)}$ и точек – концов отрезка ограничений для $u(t)$.

П. 3.4 посвящен постановке и решению задачи регулирования численности сотрудников предприятия на основе q – модели и информации за весь период планирования. Полагаем, что $u(0) = x_0$, $x(t) = q\,x(t-1) + \bar{u}(t)$, $t = 1, 2, \ldots, m$, где переменные $\bar{u}(t)$, $t \in T$, являются решением описанной ниже задачи.

Задача IV: $P(u(1),u(2),\ldots,u(m)) = \sum_{t=1}^{m}(P_1(x(t)) + P_2(u(t)) + P_3(x(t))) \to \min,$

$$u(0) = x_0,\ \ x(t) = x_q(t),\ \ -\sum_{i=0}^{t-1} q^{t-i}u(i) \le u(t) \le n(t),\ t \in T.$$

Для решения задачи IV применяется функция *fmincon()* модуля ToolBox Optimization пакета Matlab 6.5 (точка начального приближения задается с помощью последовательного решения задачи III при $t = 1, 2, \ldots, m$).

В п. 3.5 приводится построение модели и функции затрат, которые учитывают индивидуальные характеристики сотрудников в зависимости от времени их работы на предприятии. Для описания численности сотрудников $y_i(t)$ и переменных $w(t)$, отражающих прием и увольнение сотрудников, используются обозначения из п. 2.1 главы 2. Уравнения модели таковы:

$$\begin{cases} y_0(t) = v_0(t), \\ y_1(t) = q_1 y_0(t-1) - v_1(t), \\ y_2(t) = q_2 y_1(t-1) - v_2(t), \quad t \in T, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ y_{\tau-1}(t) = q_{\tau-1} y_{\tau-2}(t-1) - v_{\tau-1}(t), \\ y_\tau(t) = q\,y_\tau(t-1) + q_\tau\,y_{\tau-1}(t-1) - v_\tau(t), \\ y_i(0) = y_i^{(0)},\ \mathrm{i} = 0,\ \mathrm{i} \in \mathrm{I}_\tau. \end{cases} \tag{7}$$

Переменная $y_\tau(t)$ задает численность сотрудников, проработавших на предприятии не менее τ единиц времени. Параметры $0 \le q_i \le 1$, $i \in I_\tau$, имеют тот же смысл, что и в А – модели, параметр $0 < q < 1$ аналогичен параметру, используемому в q – модели (см. п.3.1).

Полагая $x(t) = \sum_{i=0}^{\tau} y_i(t)$, из (7) находим, что

$$x(t) = x_B(t) = v_0(t) + \sum_{i=1}^{\tau}(q_i y_{i-1}(t-1) - v_i(t)) + q\,y_\tau(t-1) = s \cdot \sum_{j=0}^{t} B^j\,w(t-j),\ t \in T, \tag{8}$$

где $s=(1,1,...,1,1)_{1\times(r+1)}$ – вектор-строка, $B=(b_{ij})$ – матрица системы линейных разностных уравнений (7). Переменные $v_i(t)$, входящие в уравнения (7), должны удовлетворять ограничениям:

$$0\le v_0(t)\le n(t),\ \ 0\le v_i(t)\le q_i\,y_{i-1}(t-1),\ \ i\in I_{r-1},$$

$$0\le v_r(t)\le q\,y_r(t-1)+q_r\,y_{r-1}(t-1),\ \ t\in T. \tag{9}$$

Соотношения (7), (8), (9) будем называть В – модель.

Пусть переменная $x^{(\pi)}(t)=\sum_{i=0}^{r}\pi_i(t)y_i(t)$ означает фактическое выполнение работ с учётом опыта, стажа работы сотрудников предприятия, фиксированной доли ставки и профессиональных характеристик, которые учтены с помощью коэффициентов $\pi_i(t)>0$, $i\in I_r$, $t\in T$, и указывают на то, что сотрудники не являются полностью взаимозаменяемыми.

Полагаем, что для каждого $t\in T$ известны величины: $\beta_i(t)>0$ – заработная плата сотрудника; $\mu_i(t)\ge 0$ – расходы, связанные с принудительным увольнением сотрудника, проработавшего i единиц времени по трудовому договору; $\mu_0(t)\ge 0$ – расходы на приём нового сотрудника; $\gamma_1(t)>0$ – убытки (потери) предприятия при низком уровне эффективного количества сотрудников; $\gamma_2(t)\ge 0$ – затраты предприятия при избыточной величине количества сотрудников. Величины $\beta_i(t)$, $\mu_i(t)$ могут быть пропорциональны $\overline{\pi_i}$, где $\overline{\pi_i}>0$ означает минимально требуемый показатель эффективности сотрудника, $i\in I_r$. Дополнительно принимаем, что увольнять можно только тех сотрудников, для которых $\pi_i(t)\le\overline{\pi_i}$, $i\in I_r$.

Затраты предприятия задаем с помощью функции G, которая учитывает все перечисленные выше факторы. Обозначим:

$$G_1(y(t))=\sum_{i=0}^{r}\beta_i(t)y_i(t),\ \ G_2(w(t))=\mu_0(t)u(t)+\sum_{i=1}^{r}\mu_i(t)v_i(t),$$

$$G_3(x^{(\pi)}(t))=\max\{\gamma_1(t)(b(t)-x^{(\pi)}(t)),0\},\ \ G_4(x(t))=\max\{0,\gamma_2(t)(x(t)-b(t))\}.$$

Функция $G=G(w(1),w(2),...,w(m))=\sum_{t=1}^{m}(G_1(y(t))+G_2(w(t))+G_3(x^{(\pi)}(t))+G_4(x(t)))$.

П. 3.6 содержит утверждения о свойствах решений В – модели и функции затрат G. Приведены **леммы 3.3, 3.4** о неотрицательности компонент $y_i(t)$ решения системы (7), переменных $x_B(t)$, $x^{(\kappa)}(t)$ и выпуклости множества значений переменных $w(1)$, $w(2)$, …, $w(m)$, удовлетворяющих неравенствам (9). Доказана **теорема 3.2** о выпуклости функции затрат G.

Замечание 3.1. Рассматривая $G_3(x^{(\kappa)}(t))$ как функцию «штрафа», условимся, что для всех $t \in T$ выполнены неравенства $\beta_i(t) \le \gamma_1(t)\pi_i(t)$, $i = 0$, $i \in I_\tau$, причем хотя бы одно из неравенств является строгим (см. замечание 2.1).

В п. 3.7 решается задача регулирования численности сотрудников предприятия на основе В − модели и информации в текущий момент времени $t \in T$. Фиксируем t и считаем, что $y_{i-1}(t-1)$ являются известными. Полагаем, что $y(t) = By(t-1) + \overline{w}(t)$, где вектор $\overline{w}(t) = (\overline{v}_0(t), -\overline{v}_1(t), -\overline{v}_2(t), \ldots, -\overline{v}_{\tau-1}(t), -\overline{v}_\tau(t))^*$ находится как решение следующий задачи.

Задача V: $G_{(t)}(v_0(t), v_1(t), \ldots, v_\tau(t)) =$

$$= G_1(y(t)) + G_2(v_0(t), v_1(t), \ldots, v_\tau(t)) + G_3(x^{(\kappa)}(t)) + G_4(x(t)) \to \min,$$

$$x(t) = \hat{x}(t) + v_0(t) - v(t), \ \ 0 \le v_0(t) \le n(t), \ \ 0 \le v_i(t) \le q_i\, y_{i-1}(t-1), \ \ i \in I_{\tau-1},$$

$$0 \le v_\tau(t) \le q\, y_\tau(t-1) + q_\tau\, y_{\tau-1}(t-1), \ \ \sum_{i=1}^{\tau} \pi_i(t) v_i(t) \le \sum_{i=1}^{\tau} \overline{\pi}_i\, v_i(t),$$

где $\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{\tau} q_i y_{i-1}(t-1) + q\, y_\tau(t-1)$, $v(t) = \sum_{i=1}^{\tau} v_i(t)$.

Задача V представляет собой задачу кусочно-линейного программирования для $\tau + 1$ переменной. Эта задача сводятся к четырем задачам линейного программирования, для решения каждой из которых применяется функция *linprog()* модуля ToolBox Optimization пакета Matlab 6.5. Из всех найденных решений выбирается решение с наименьшим значением $G_{(t)}(v_0(t), v_1(t), \ldots, v_\tau(t))$.

П. 3.8 посвящен постановке и решению задачи регулирования численности сотрудников предприятия на основе В − модели и информации за весь период планирования. Полагаем, что $y(0) = w(0)$, $y(t) = By(t-1) + \overline{w}(t)$, $t = 1, 2, \ldots, m$, где векторы $\overline{w}(t) = (\overline{v}_0(t), -\overline{v}_1(t), -\overline{v}_2(t), \ldots, -\overline{v}_{\tau-1}(t), -\overline{v}_\tau(t))^*$, $t \in T$, находятся как решение следующий задачи.

Задача VI: $G(w(1), w(2), \ldots, w(m)) =$

$$= \sum_{t=1}^{m} (G_1(y(t)) + G_2(w(t)) + G_3(x^{(\kappa)}(t)) + G_4(x(t))) \to \min,$$

$$w(0)=(y_0^{(0)},\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ldots,\ y_r^{(0)})^*,\quad w(t)=(v_0(t),-v_1(t),-v_2(t),\ldots,-v_r(t))^*,$$

$$x^{(*)}(t)=\sum_{i=0}^{r}\pi_i(t)y_i(t),\quad x(t)=x_B(t),\quad 0\le v_0(t)\le n(t),$$

$$0\le\left(v_1(t),v_2(t),\ldots,v_r(t)\right)^*\le\sum_{j=1}^{t}B^j w(t-j),\quad \sum_{i=1}^{r}\pi_i(t)v_i(t)\le\sum_{i=1}^{r}\overline{\pi_i}\,v_i(t),\quad t\in T.$$

Задача VI представляет собой задачу нелинейного программирования для выпуклой целевой функции. Для численного решения использована функция *fmincon()* модуля ToolBox Optimization пакета Matlab 6.5 (точка начального приближения задается с помощью последовательного решения задачи V при $t=1,2,\ldots,m$).

В п. 3.9 представлены результаты вычислений по изучению зависимости решений исследуемых задач от параметров модели и функций затрат.

В четвёртой главе «Модели регулирования численности сотрудников предприятия в условиях работы на переменную величину ставки» представлены две модели, описывающие динамику количества сотрудников одной специальности при заключении ими срочного или бессрочного трудового договора с возможностью работы на различные доли ставки. Для каждой из этих моделей поставлены и решены задачи регулирования численности сотрудников.

В п. 4.1 описаны функции затрат и исследованы их свойства. Пусть величина $\alpha(t)$ отражает возможное изменение доли ставки сотрудников в момент времени $t\in T$. Изменение доли ставки приводит к тому, что выполняемый объем работ изменяется на $\alpha(t)\cdot x(t)$ при неизменном количестве сотрудников $x(t)$. Условимся, что $\theta_1\le\alpha(t)\le\theta_2$, $t\in T$, где $-1<\theta_1\le\theta_2$ − заданные константы.

При использовании A − модели (см. п. 2.1) применяется функция затрат

$$H=H(w(1),\alpha(1),\ldots,w(m),\alpha(m))=$$

$$=\sum_{t=1}^{m}(H_1(x(t),\alpha(t))+H_2(w(t))+H_3(x(t),\alpha(t))+H_4(x(t))),$$

которая включает в себя суммарные (за период $t\in T$) выплаты заработной платы $H_1(x(t),\alpha(t))=\beta_1(t)(1+\alpha(t))x(t))$, затраты на прием и увольнение сотрудников $H_2(w(t))=\mu_0(t)v_0(t)+\mu(t)\sum_{i=1}^{\tau-1}v_i(t)$, убытки предприятия при недостатке $H_3(x(t),\alpha(t))=\max\{\gamma_1(t)(b(t)-(1+\alpha(t))x(t)),0\}$ или избытке сотрудников $H_4(x(t))=\max\{0,\ \gamma_2(t)(x(t)-b(t))\}$, $x(t)=x_A(t)$ и $w(t)$ описаны в п. 2.1.

При использовании q – модели (см. п. 3.1) применяется функция затрат $E = E(u(1),\alpha(1),...,u(m),\alpha(m)) =$

$$= \sum_{t=1}^{m}(E_1(x(t),\alpha(t)) + E_2(u(t)) + E_3(x(t),\alpha(t)) + E_4(x(t))),$$

где $E_1(x(t),\alpha(t)) = \beta_1(t)(1+\alpha(t))x(t))$ отражает затраты на выплату заработной платы, $E_2(u(t)) = \max\{\mu_0(t)u(t), -\mu(t)u(t)\}$ – затраты на прием и увольнение сотрудников, $E_3(x(t),\alpha(t)) = \max\{\gamma_1(t)(b(t)-(1+\alpha(t))x(t)),0\}$, $E_4(x(t)) = \max\{0,\ \gamma_2(t)(x(t)-b(t))\}$ – затраты предприятия соответственно при недостатке или избытке рабочей силы. Описание переменной $x(t)=x_q(t)$ и вектора $u(t)$ приведено в п. 3.1.

Теорема 4.1. *Для любого фиксированного набора величин* $\alpha(t)\in[\theta_1,\theta_2]$, $t\in T$, *функции затрат* $H(w(1),\alpha(1),...,w(m),\alpha(m))$, $E(u(1),\alpha(1),...,u(m),\alpha(m))$ *являются выпуклыми на множестве изменения своих аргументов* $(w(1),\ ...,\ w(m))$, $(u(1),\ ...,\ u(m))$, *удовлетворяющих соответственно ограничениям (3) и (6).*

Замечание 4.1. В соответствии с замечаниями 2.1 и 3.1, полагаем, что для всех $t\in T$ верно $\beta_1(t)\le\gamma_1(t)$, и хотя бы одно из этих неравенств является строгим.

П. 4.2 посвящен постановке и решению задачи регулирования численности сотрудников предприятия на основе информации в текущий момент времени $t\in T$.

• Фиксируем t и полагаем, что для A – модели известны переменные $y_{i-1}(t-1)$, Принимаем, что значения величины $\alpha(t)$ выбираются из множества $R_\alpha = \{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, ..., 0, ..., \alpha^{(l)}\}$, элементы которого удовлетворяют неравенствам $\theta_1 \le \alpha^{(j)} \le \theta_2$, $j = 1,\ 2,\ ...,\ l$. Полагаем, что $y(t) = Ay(t-1) + \overline{w}(t)$, $\alpha(t) = \overline{\alpha}(t)$ где вектор $\overline{w}(t) = (\overline{v}_0(t) - \overline{v}_r(t), -\overline{v}_1(t), -\overline{v}_2(t), ..., -\overline{v}_{r-1}(t))^*$ и переменная $\overline{\alpha}(t)$ находятся как решение следующий задачи.

Задача VII: Для каждого $\alpha(t)\in R_\alpha$

$H_{\alpha(t)}(v_0(t),v_1(t),...,v_r(t)) =$

$$= H_1(x(t),\alpha(t)) + H_2(v_0(t),v_1(t),...,v_r(t)) + H_3(x(t),\alpha(t)) + H_4(x(t)) \to \min,$$

$$x(t) = v_0(t) + \sum_{i=1}^{r} q_i y_{i-1}(t-1) - \sum_{i=1}^{r} v_i(t),\ \ 0 \le v_0(t) \le n(t),\ 0 \le v_i(t) \le q_i\, y_{i-1}(t-1),\ i\in I_r.$$

При заданном $\alpha(t)$ задача VII сводится к двум ($\alpha(t)=0$) или трем ($\alpha(t)\neq 0$)) задачам линейного программирования, для решения каждой из которых применяется функция *linprog()* модуля ToolBox Optimization пакета Matlab 6.5 (в итоге выбирается решение с наименьшим значением $H_{\alpha(t)}(v_0(t), v_1(t),..., v_\tau(t))$).

• Фиксируем t и полагаем, что для q – модели известно значение $x(t-1)$. Принимаем, что значения величины $\alpha(t)$ выбираются из множества $R_\alpha = \{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, ..., 0, ..., \alpha^{(l)}\}$, элементы которого удовлетворяют неравенствам $\theta_1 \le \alpha^{(j)} \le \theta_2$, $j=1, 2,\ldots,l$. Полагаем, что $x(t) = q\,x(t-1)+\bar{u}(t)$, $\alpha(t)=\bar{\alpha}(t)$, где переменные $\bar{u}(t)$ и $\bar{\alpha}(t)$ находятся как решение следующей задачи.

Задача VIII: Для каждого $\alpha(t)\in R_\alpha$

$$E_{\alpha(t)}(u(t)) = E_1(x(t),\alpha(t)) + E_2(u(t)) + E_3(x(t),\alpha(t)) + E_4(x(t)) \to \min,$$

$$x(t) = q\,x(t-1)+u(t), \quad -q\,x(t-1) \le u(t) \le n(t).$$

Решение задачи VIII содержится среди точек недифференцируемости функции $E_{\alpha(t)}(u(t))$ и точек – концов отрезка $[-q\,x(t-1), n(t)]$. Из всех решений семейства задач VIII выбираются те $\alpha(t)$, $u(t)$, для которых $E_{\alpha(t)}(u(t))$ наименьшее.

В п. 4.3 рассматриваются две задачи регулирования численности сотрудников предприятия на основе информации за весь период планирования $t=1,2,\ldots,m$.

• Для A – модели и функции затрат H полагаем, что $y(0)=w(0)$, $y(t) = Ay(t-1)+\bar{w}(t)$, $\alpha(t)=\bar{\alpha}(t)$, $t=1, 2, \ldots, m$, где векторы $\bar{w}(t) = (\bar{v}_0(t)-\bar{v}_\tau(t), -\bar{v}_1(t), -\bar{v}_2(t),..., -\bar{v}_{\tau-1}(t))^*$ и переменные $\bar{\alpha}(t)$, $t\in T$, находятся как решение следующий задачи.

Задача IX: $H(w(1),\alpha(1),...,w(m),\alpha(m)) =$

$$= \sum_{t=1}^{m}(H_1(x(t),\alpha(t)) + H_2(w(t)) + H_3(x(t),\alpha(t)) + H_4(x(t))) \to \min,$$

$$w(0) = (y_0^{(0)}, y_1^{(0)}, ..., y_{\tau-1}^{(0)})^*, \quad w(t) = (v_0(t)-v_\tau(t), -v_1(t),..., -v_{\tau-1}(t))^*, \quad x(t) = x_A(t),$$

$$0 \le v_0(t) \le n(t), \quad 0 \le \left(v_1(t),..., v_{\tau-1}(t), v_\tau(t)\right)^* \le \sum_{j=1}^{t} A^j w(t-j), \quad \alpha(t)\in[\theta_1,\theta_2], \quad t\in T.$$

• Для q – модели и функции затрат E полагаем, что $u(0)=x_0$, $x(t) = q\,x(t-1)+\bar{u}(t)$, $\alpha(t)=\bar{\alpha}(t)$, $t=1, 2, \ldots, m$, где переменные $\bar{u}(t)$ и $\bar{\alpha}(t)$, $t\in T$, являются решением описанной ниже задачи.

Задача X: $E(u(1),\alpha(1),...,u(m),\alpha(m)) =$

$$= \sum_{t=1}^{m}(E_1(x(t),\alpha(t)) + E_2(u(t)) + E_3(x(t),\alpha(t)) + E_4(x(t))) \to \min,$$

$$u(0) = x_0,\ x(t) = x_q(t),\ -\sum_{i=0}^{t-1} q^{t-i}u(i) \le u(t) \le n(t),\ \alpha(t) \in [\theta_1,\theta_2],\ t \in T.$$

Особенность задач IX и X состоит в том, что функции затрат H и E, в общем случае, не являются выпуклыми, что приводит к трудностям для поиска $H_{\min} = \inf H(w(1),\alpha(1),...,w(m),\alpha(m))$ и $E_{\min} = \inf E(u(1),\alpha(1),...,u(m),\alpha(m))$ на заданных множествах изменения аргументов этих функций. Вместе с тем, значения $H_{\min}$, $E_{\min}$ могут быть оценены снизу или найдены явно с использованием решений вспомогательных задач для выпуклых целевых функций.

Теорема 4.2. *Пусть* $\overline{w}(1)$, ..., $\overline{w}(m)$ *решение вспомогательной задачи*

$$H^{(m)}(w(1),...,w(m)) = \sum_{t=1}^{m}(H_2(w(t)) + H_4(x(t)) \to \min,$$

$$w(0) = (y_0^{(0)},\ y_1^{(0)},\ ...,\ y_{r-1}^{(0)})^*,\quad w(t) = (v_0(t) - v_r(t), -v_1(t),..., -v_{r-1}(t))^*,$$

$$x(t) = x_A(t),\quad 0 \le v_0(t) \le n(t),\quad 0 \le \left(v_1(t),...,v_{r-1}(t),v_r(t)\right)^* \le \sum_{j=1}^{t} A^j w(t-j),\quad t \in T.$$

Тогда для любых $\alpha(t)$, $w(t)$, $t \in T$, *удовлетворяющих ограничениям задачи IX, справедлива оценка* $H(w(1),\alpha(1),...,w(m),\alpha(m)) \ge \sum_{t=1}^{m}\beta_1(t)b(t) + H^{(m)}(\overline{w}(1),...,\overline{w}(m))$.

Следствие. *Обозначим через* $\overline{x}_A(t)$ *решение* A *– модели при* $w(t) = \overline{w}(t)$, $t \in T$, *где* $\overline{w}(1)$, ..., $\overline{w}(m)$ *– решение вспомогательной задачи из теоремы 4.2. Тогда, если для каждого* $t \in T$ *верно* $\theta_1 \le \overline{\alpha}(t) = \dfrac{b(t)}{\overline{x}_A(t)} - 1 \le \theta_2$, *то* $\overline{\alpha}(t)$, $\overline{w}(t)$, $t \in T$, *является решением задачи IX и* $H_{\min} = \sum_{t=1}^{m}\beta_1(t)b(t) + H^{(m)}(\overline{w}(1),...,\overline{w}(m))$.

Аналогичная теорема (**теорема 4.3 и следствие из нее**) доказаны и для задачи X.

В п. 4.4 описаны различные случаи, детально раскрывающие смысл условий теорем 4.2, 4.3 и следствий из них в зависимости от параметров используемых моделей (возможность нахождения аналитических решений и построения решений задач IX и X с помощью вспомогательных задач линейного программирования). Приведен пример аналитического решения задачи X.

В п. 4.5 изложен алгоритм численного решения задач IX и X. Алгоритм содержит два этапа. На *первом этапе* решаются вспомогательные задачи на экстремум со специальным выбором значений $\alpha_1(1),\ldots,\ \alpha_1(m)$. На *втором этапе* осуществляется поиск решения при фиксированных $\alpha_2(1),\ldots,\ \alpha_2(m)$, задаваемых с помощью деления пополам отрезков, концы которых представляют собой решения $\alpha_1(1),\ldots,\ \alpha_1(m)$ вспомогательных задач первого этапа. Для решения всех задач применяется функция *fmincon()* модуля ToolBox Optimization пакета Matlab 6.5.

Численное решение задачи IX будем называть приемлемым, если выполняется неравенство $H_{NUM} - H_{LOW} \le \varepsilon H_{LOW}$, где $\varepsilon > 0$ – заданное (малое) число, $H_{LOW} = \sum_{t=1}^{m} \beta_1(t) b(t) + H^{(m)}(\overline{w}(1),\ldots,\overline{w}(m))$, (см. теорему 4.2), H_{NUM} – минимальное значение функции H, найденное с помощью функции *fmincon()*. Аналогичный подход использован и для численного решения задачи X.

В п. 4.6 представлены результаты вычислений по исследованию зависимости решений поставленных задач от параметров функций затрат. Показано, что предложенный в п. 4.5 алгоритм даёт решение, совпадающее с найденным ранее аналитическим решением для задачи X (см. п. 4.4).

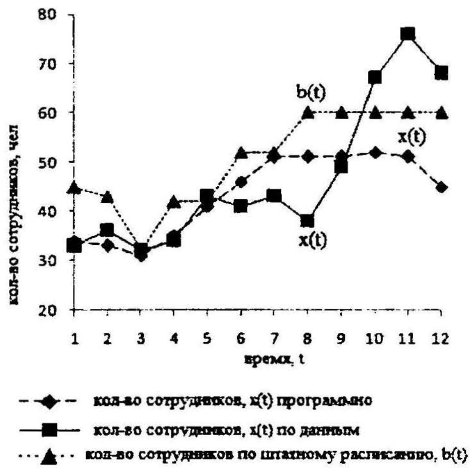

Рис.1 График сравнения реальных данных и результатов моделирования

В п. 4.7 приведено решение задачи регулирования численности сотрудников для компании ЗАО «ЭР–Телеком» (г. Омск). Данные этой компании отражают динамику численности сотрудников профессии «техник отдела подключения» за период с декабря 2008 года по декабрь 2009 года. На основе q – модели и функции затрат E были получены значения переменных $\alpha(t)$, $u(t)$, $t = 1, 2, \ldots, 12$, минимизирующие затраты на приём новых сотрудников и выплаты заработной платы за указанный период времени (рис. 1). Результаты проведенных вычислений показали, что весь запланированный объем работ мог бы быть выполнен сотрудниками в количестве 521 человека (вместо 560). При сравнении общего количества принятых сотрудников за период январь – декабрь 2009 года экономия составляет около 40 % (84 человека реально, 62 человека по расчетам в разработанном программном комплексе).

В **приложениях 1-2** приведены описания функций *linprog()*, *fmincon()* модуля ToolBox Optimization пакета Matlab 6.5, используемых для нахождения точек экстремума линейных и нелинейных функций при заданных ограничениях. В **приложениях 3–10** представлен комплекс программ, разработанный в среде Matlab для решения задач регулирования численности сотрудников предприятия. Комплекс содержит программы, предназначенные для решения поставленных задач на основе информации в текущий момент времени (**П.3, П.6, П.8**) и задач на основе информации за весь период планирования (**П.4, П.5, П.7, П.9, П.10**). В качестве входных данных для программ используются параметры моделей динамики численности сотрудников и функций затрат. Выходными данными являются найденные значения переменных управления, достигнутые значения минимизируемых функций и общая численность сотрудников для найденных управлений. **Приложение 4** использовано для тестирования и обоснования применимости функции *fmincon()* при решении поставленных задач математического программирования с кусочно - линейными функциями затрат.

Основной итог диссертации состоит в разработке семейства математических моделей, функций затрат, алгоритмов и программ, предназначенных для решения задач регулирования численности сотрудников предприятия в течение заданного периода планирования его деятельности.

В **заключении** приводятся результаты работы.

1. Построено и исследовано семейство математических моделей и функций затрат, описывающих динамику численности сотрудников предприятия в нестационарных условиях функционирования с учетом индивидуальных характеристик сотрудников, их работы на переменную величину ставки, возможности продления срочного трудового договора, приема и увольнения сотрудников по инициативе администрации.

2. Поставлены задачи математического программирования, отражающие принятие решений по регулированию численности сотрудников предприятия на основе предложенных моделей и функций затрат.

3. Найдены аналитические решения нескольких из задач регулирования численности сотрудников предприятия, основанных на информации в текущий момент времени. Для задач регулирования численности сотрудников предприятия с невыпуклыми функциями затрат найдены нижние оценки на минимальные значения этих функций и получены соотношения на параметры моделей, при которых решения записываются в явной форме с использованием вспомогательных задач линейного программирования.

4. Разработан комплекс программ, реализующий решение поставленных задач математического программирования на ЭВМ в среде Matlab.

5. Показано, что основное влияние на решение задачи регулирования численности сотрудников предприятия оказывают следующие параметры: количество необходимых сотрудников на рынке труда; границы изменения доли ставки; соотношения между величиной заработной платы сотрудников и затратами предприятия при недостатке (избытке) сотрудников, а также их увольнении по инициативе администрации.

6. Установлено, что в условиях работы по срочному трудовому договору приём и увольнение сотрудников не являются взаимно - исключающимися факторами. Показано, что решение о приеме сотрудников или их увольнении «по факту» (в рамках текущей потребности), как правило, не дает решения поставленной задачи. Для минимизации затрат необходимо решать поставленную задачу на всем периоде планирования деятельности предприятия.

Список работ, опубликованных по теме диссертации

Работы, опубликованные в журналах

из перечня ВАК Министерства образования и науки РФ

1. Лаптева Н.С., Перцев Н.В. О решении задачи регулирования численности сотрудников предприятия в условиях заключения трудового договора на фиксированный срок // Системы управления и информационные технологии. 2008. № 3(33). С. 96–100.

2. Лаптева Н.С., Перцев Н.В. Многопараметрическая модель регулирования численности сотрудников предприятия // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 1.3(35). С. 377–382.

Прочие публикации по теме диссертационного исследования

3. Лаптева Н.С. Динамика трудовых ресурсов в условиях заключения контрактов // Под знаком «Сигма»: материалы всероссийской научной конференции. ОНЦ СО РАН. Омск: Полиграфический центр КАН, 2003. С. 10–11.

4. Лаптева Н.С. Исследование математической модели динамики трудовых ресурсов в условиях заключения контракта // Программа и тезисы докладов VI Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Кемерово: Институт вычислительных технологий СО РАН, 2005. С. 40–41.

5. Лаптева Н.С., Перцев Н. В. Математическая модель планирования численности сотрудников предприятия // Проблемы оптимизации и экономические приложения: материалы III Всероссийской конференции / Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2006. С. 108.

6. Лаптева Н.С., Перцев Н. В. Постановка и решение одной задачи оптимального управления численностью сотрудников предприятия // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: материалы II Международной научной конференции. Воронеж: ГОУ ВПО «Воронежская государственная технологическая академия», 2007. С. 114–115.

7. Лаптева Н.С. О решении одной задачи оптимизации численности сотрудников предприятия // Вестник Омского университета. 2007. №2(44). С. 18-20.

8. Лаптева Н.С. Применение пакета Matlab для решения одной задачи оптимизации численности сотрудников предприятия // Аналитические и числен-

102

ные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: сборник статей 2-ой Международной конференции. Пенза, 2007. С. 168–171.

9. Лаптева Н.С. Многопараметрическая модель регулирования численности сотрудников предприятия // Тезисы докладов IX Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям. Кемерово, Новосибирск: Институт вычислительных технологий СО РАН, 2008. С. 54.

10. Лаптева Н.С., Перцев Н.В. Математическая модель регулирования численности сотрудников предприятия, работающих по краткосрочному договору // Сборник трудов Четвёртой Международной конференции по проблемам управления. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2009. С. 726–737. 1 электрон. опт. диск (CD – ROM).

В совместных публикациях [1], [2], [5], [6], [10] Лаптевой Н.С. принадлежит построение и исследование свойств функций затрат, постановка задач математического программировании и выбор метода их решения, разработка программ в среде Matlab, проведение вычислительных экспериментов.

Подписано в печать 10.05.2011

Формат 60x84/16

Бумага офсетная

П.л. – 1,0

Способ печати – оперативный

Тираж 100

Издательско-полиграфический центр ОмГМА

644050, г. Омск, пр. Мира, 30, тел. 69-32-72