

**Experimentelle und theoretische  
Untersuchungen  
zum dynamischen Rollkontakt  
von Elastomeren**

Von der Fakultät für Maschinenbau  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur  
genehmigte

**Dissertation**

von  
**Dipl.-Ing. Florian Gutzeit**  
geb. 14.05.1976 in Celle

2009

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek

2. Referent: Prof. Dr.-Ing. Matthias Kröger

Tag der Promotion: 10.06.2009

# 1 Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Dynamik und Schwingungen der Leibniz Universität Hannover, sie wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen der Forschergruppe „Dynamische Kontaktprobleme mit Reibung bei Elastomeren“ finanziell gefördert. Für diese Unterstützung sowie für die Zusammenarbeit mit den Mitgliedern der Gruppe bin ich sehr dankbar.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Karl Popp, der mit seiner herausragenden Fachkompetenz und seiner menschlichen Art einen prägenden Eindruck hinterlassen hat. Nach seinem Tod übernahm Herr Prof. Dr.-Ing. Matthias Kröger die operative Leitung des Institutes sowie die Betreuung meiner Arbeit. Er hat mit viel Energie, dem ihn auszeichnenden Ideenreichtum und seinem experimentellen Know-How viel zu dieser Arbeit beigetragen. Dafür und für die Übernahme des Zweitreferates möchte ich ihm herzlich danken. Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek danke ich für die freundliche Übernahme des ersten Referates und viele Anregungen, die er mir für meine Arbeit gegeben hat. Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd-Arno Behrens möchte ich herzlich dafür danken, dass er den Vorsitz der Prüfungskommission übernommen hat.

An dieser Stelle sei allen wissenschaftlichen und nicht-wissenschaftlichen Mitarbeitern gedankt, die gemeinsam ein sehr kollegiales Institutsklima geschaffen haben. Besonders danken möchte ich Dr.-Ing. Markus Lindner, der mir bei Konstruktion und Aufbau des fahrenden Versuchsstands sowie den darauf folgenden experimentellen Untersuchungen zur Seite stand. Ein großer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Walter Sextro, dem Initiator meines Forschungsprojektes, der auch entscheidend an meiner zweiten Veröffentlichung beteiligt war. Dipl.-Ing. Patrick Moldenhauer und Dipl.-Ing. Matthias Wangenheim möchte ich für ihre kollegiale Unterstützung und den fachlichen Austausch danken. Außerdem danken möchte ich Dipl.-Ing. Stefan Ripka für seine engagierte Mitarbeit an meinem Projekt und die vielen gewissenhaft durchgeführten Messungen. Für die engagierte Anfertigung vieler Prüfstandsbauteile danke ich der Institutswerkstatt unter Leitung von Jürgen Anton.

Meinen Eltern Hans-Georg und Marion gilt mein besonderer Dank, sie haben meinem Werdegang stets ein besonderes Interesse geschenkt und mich großzügig unterstützt. Abschließend danke ich meiner Freundin Svenja für viele Aufmunterungen, ihr Verständnis in schwierigen Situationen und dass sie sich bei Erfolgen mit mir gefreut hat.

*Inmitten der Schwierigkeiten liegt die Möglichkeit*  
ALBERT EINSTEIN (\*1879, +1955)

## Kurzfassung

Die Simulation des dynamischen Rollkontaktes erschließt zahlreiche Zeit- und Kostenvorteile, wie z. B. bei der Entwicklung von Reifen oder bei der Verbesserung von Fahrassistenzsystemen. In dieser Arbeit werden grundlegende Algorithmen zur numerisch effizienten Simulation rollender Gummiräder gezeigt. Die gewonnenen Vorgehensweisen sind auf Reifen, aber auch auf andere Gebiete technischer Rollkontakte mit elastischen Kontaktpartnern anwendbar. Das präsentierte Modell wird durch stationäre und instationäre experimentelle Untersuchungen validiert. Zu diesem Zweck wurde am *Institut für Dynamik und Schwingungen* der Leibniz Universität Hannover (IDS) ein fahrender Versuchsstand entwickelt und aufgebaut. Als Versuchsobjekt dient ein etwa handtellergroßes Vollgummirad, das in der Reifenindustrie für Verschleißmessungen verwendet wird. Das Messmobil verfügt über leistungsfähige Aktorik, um bei konstanter Fahrgeschwindigkeit nahezu beliebige Vorgaben für Normalkraft- und Schlupfverläufe umzusetzen. Sensoren zeichnen alle Kräfte und Momente im Rollkontakt auf, auch die Temperaturen des Rades und der Fahrbahn im Ein- und Auslauf des Rades werden gemessen.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst Messergebnisse stationären Rollens gezeigt. Die resultierenden Kennfelder zeigen das Verhalten verschiedener Elastomere in Kontakt mit einer Glas-Fahrbahn. Außerdem wird die dynamische Abhängigkeit der zeitlichen Tangentialkraftverläufe von Start- und Zielniveau eines vorangegangenen Schlupfsprunges untersucht. Auf diese Weise gelingt ein Einblick in das Phänomen des instationären Rollkontaktes.

Basierend auf dem in den Messungen beobachteten dynamischen Verhalten des Rollkontaktes wird ein mechanisches Simulationsmodell präsentiert. Das 2D-Modell beinhaltet ein Strukturmodell des Radkörpers sowie eine Kontaktformulierung in Normal- und Tangentialrichtung, die sowohl Haften als auch Gleiten abbildet. Zur Reduktion des numerischen Aufwandes wird eine Craig-Bampton-Transformation verwendet. Außerdem beschränkt sich die Kontaktabfrage auf die unmittelbar in den Kontaktbereich eintretenden Knoten. Die Simulationsergebnisse werden den Messungen des fahrenden Versuchsstands gegenübergestellt. Darüber hinaus erlauben sie einen detaillierten Einblick in die dynamischen Vorgänge innerhalb des Kontaktbereiches.

**Schlagwörter:** Rollkontakt, Elastomer, Kontaktmechanik

## Abstract

The simulation of the dynamic rolling contact opens numerous benefits by saving times and costs, for instance in the field of tyre development or for the improvement of driver assistance systems. In this thesis, fundamental algorithms for the numerical efficient simulation of rolling rubber wheels are shown. The presented approach can be applied to tyres, as well as to other technical sectors, where rolling contacts with elastic contact partners are involved. The exposed model is validated by steady and unsteady experimental investigations. For this purpose, a moving test rig has been developed and built up at the *Institute of Dynamics and Vibration Research* (IDS) of the Leibniz University of Hannover. A small solid rubber wheel, used for wear tests in the tyre industry, serves as a specimen for the experiments. The test rig is equipped with powerful electrical actuators to realize almost arbitrary set-point commands for normal force and slippage of the wheel. All forces and moments within the contact zone are recorded by a special sensor, the temperatures of the wheel and the track in the leading and the trailing area are measured as well.

In the presented thesis, outcomes of steady rolling experiments are shown firstly. The resulting friction characteristics reveal the behavior of different elastomers contacting with the glass-surface of the track. Furthermore, the dynamic dependency of the tangential force on the start- and the target-level of a preceding slippage-step is investigated. By this means, insights into the phenomenon of unsteady rolling contact are delivered.

Based on the dynamic behavior of the rolling contact observed in the measurements, a mechanical simulation model is presented. The 2D-model includes a structure model of the wheel body, as well as a contact formulation in normal and tangential direction reproducing sticking and sliding behavior, respectively. A Craig-Bampton-transformation is applied to reduce the numerical complexity. Moreover, the contact query is limited to the nodes located in the immediate vicinity of the contact zone. The results of the simulation are opposed to the measurements done with the moving test rig. Furthermore, the simulation results give a detailed picture of the dynamic processes within the contact area.

**Key words:** Rolling contact, elastomer, contact mechanics

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>III</b>
	<b>Formelzeichen</b>	<b>IX</b>
<b>2</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
2.1	Problemstellung . . . . .	2
2.1.1	Stationäres Rollen . . . . .	2
2.1.2	Dynamischer Rollkontakt . . . . .	5
2.2	Ziel und Inhalt dieser Arbeit . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Messung des Rollkontaktes</b>	<b>9</b>
3.1	Messaufbau . . . . .	10
3.2	Stationäre Messungen . . . . .	13
3.3	Instationäre Messungen . . . . .	16
3.3.1	Systematische Messabweichung . . . . .	18
3.3.2	Bestimmung der Zeitkonstanten . . . . .	24
3.3.3	Ergebnisse . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Rollkontaktmodell</b>	<b>29</b>
4.1	Effiziente Strukturmodellierung . . . . .	29
4.1.1	Kinematik . . . . .	30
4.1.2	Strukturdynamik . . . . .	35
4.1.3	Craig-Bampton-Kondensation . . . . .	37
4.1.4	Statische Vorberechnung . . . . .	41
4.1.4.1	Statische Kontaktberechnung . . . . .	43
4.1.4.2	Kontaktiteration . . . . .	45
4.1.4.3	Verschiebungsiteration . . . . .	49
4.2	Simulation . . . . .	50
4.2.1	Struktur-Block . . . . .	52
4.2.2	Auswahl/Transformations-Block . . . . .	53
4.2.2.1	Auswahl . . . . .	54
4.2.2.2	Transformation . . . . .	59
4.2.2.3	Ausschnitt/Einordnung . . . . .	60
4.2.3	Kontakt . . . . .	61
4.2.3.1	Rückführung . . . . .	62

4.2.3.2	Normalkontakt . . . . .	63
4.2.3.3	Tangentialkontakt . . . . .	67
4.3	Identifikation der Eingangsparameter . . . . .	72
4.3.1	Elastisches Materialverhalten des Elastomers . . . . .	72
4.3.2	Reibcharakteristik . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Simulationsergebnisse</b>	<b>77</b>
5.1	Statische Kontaktberechnung . . . . .	78
5.1.1	Vertikale Naberverschiebung ${}^K \tilde{w}_C$ über statischer Normalkraft ${}^K \tilde{f}_N$ .	78
5.1.2	Tangentiale Verschiebung ${}^K \tilde{\mathbf{u}}_D$ der Kontaktknoten über Referenzkoordinate ${}^K_{\lambda} \tilde{\mathbf{x}}_D$ . . . . .	79
5.1.3	Normale Knotenlast ${}^K_z \tilde{\mathbf{f}}_D$ über Längskoordinate ${}^K_{\delta} \tilde{\mathbf{x}}_D$ der verformten Konfiguration . . . . .	80
5.1.4	Validierung der Kontaktlänge . . . . .	81
5.2	Stationäre Ergebnisse . . . . .	82
5.2.1	Tangentiale Knotenverschiebungen ${}^C u_{D,i}$ . . . . .	82
5.2.2	Knotenlast ${}^C_x f_{D,i}$ und Haftgrenze $\mu_0  {}^C_z f_{D,i} $ . . . . .	86
5.2.3	Relativgeschwindigkeit ${}^C v_{D,i}^{rel}$ . . . . .	91
5.2.4	Stationärer Rollkontakt: Vergleich Messung-Rechnung . . . . .	92
5.3	Instationäre Ergebnisse . . . . .	93
5.3.1	Variation der freien Parameter . . . . .	93
5.3.2	Zeitverläufe der Tangentialkraft nach Schlupfsprung . . . . .	95
5.3.3	Instationärer Rollkontakt: Vergleich Messung-Rechnung . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>100</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>103</b>

## Formelzeichen

*Selten benutzte Formelzeichen und Begriffe sowie abweichende Bedeutungen werden ausschließlich im Text erläutert. Vektorielle Größen werden im Allgemeinen durch fette Kleinbuchstaben, matrizielle Größen durch fette Großbuchstaben gekennzeichnet. Die Elemente einer als Vektor oder Matrix im Fettdruck definierten Größe treten im Text auch als skalare Größen auf und werden im Formelverzeichnis nicht redundant aufgeführt.*

### Lateinische Notation

$b_g$	Breite des Rades
$C$	Mittelpunkt des Rades
$B$	Anzahl kontaktierender Knoten (statisch)
$D$	Menge der kontaktnahen Knoten
$\Delta D$	Anzahl der Randknoten
$F_N$	Normalkraft, gemessen
$f_N$	Normalkraft, simuliert
$\bar{F}_N$	Sollvorgabe der Normalkraft
$\hat{f}$	Interpolationsgerade
$F_T$	Tangentialkraft, gemessen
$f_T$	Tangentialkraft, simuliert
$G$	Knoten der Raddiskretisierung
$L$	Index des linken Randknotens (dynamisch)
$M$	Menge der Mantelknoten
$N$	Menge der Nabenknoten
$p$	Kontaktpressung
$p_K$	Penalty-Faktor

---

$Q$	Index des linken Randknotens (statisch)
$r_M$	Mantelradius
$r_N$	Nabenradius
$\Delta r_G$	Radialer Abstand benachbarter Knoten
$\mathbf{R}$	Menge der Radknoten
$\mathbf{S}$	Menge der Strukturknoten
$S$	Starrkörperschlupf des Rades
$\bar{S}$	Sollvorgabe des Starrkörperschlupfes
$\Delta t$	Zeitschrittlänge
$t^h$	Anhaft-Zeitpunkt
$t^g$	Abriss-Zeitpunkt
$v$	Anzahl berücksichtigter Moden
$v_C$	Geschwindigkeit des Mittelpunktes
$v_{rel}$	Relativgeschwindigkeit zwischen Rad und Fahrbahn
$w_C$	Verschiebung des Mittelpunktes
$z_F$	Fahrbahnkoordinate

## Griechische Notation

$\alpha$	Konstante für Rayleigh-Dämpfung
$\beta$	Konstante für Rayleigh-Dämpfung
$\Delta\delta$	Relativbewegungen
$\delta$	Endkonfiguration
$\bar{\delta}$	Kontaktkonfiguration
$\gamma$	Drehwinkel des Rades
$\varphi$	Winkelkoordinate
$\varphi^l$	Winkelkoordinate des linken Kontaktrandes
$\varphi^r$	Winkelkoordinate des rechten Kontaktrandes
$\Delta\varphi_D$	Breite des Kontaktfensters

$\Delta\varphi_{M_i}$	Relative Winkelkoordinate des Mantelknotens $M_i$
$\Delta\varphi_G$	Differenzwinkel zwischen zwei benachbarten Knoten
$\lambda$	Starrkörperbewegung
$\mu_0$	Haftreibwert nach <i>Coulomb</i>
$\mu$	Gleitreibwert nach <i>Coulomb</i>
$\mu^*$	Reibbeiwert des Rollkontaktes
$\varrho_G$	Dichte Gummi
$\omega_{0i}$	Eigenkreisfrequenz
$\Omega$	Winkelgeschwindigkeit des Rades

## Vektoren und Matrizen

$\underline{\underline{A}}^{12}$	Transformationsmatrix zwischen den Koordinatensystemen 1 und 2
${}_x\underline{\underline{A}}_{Dd}^{12}$	Transformationsmatrix zwischen den Koordinatensystemen 1 und 2, nur $x$ -Komponenten
${}_z\underline{\underline{A}}_{Dd}^{12}$	Transformationsmatrix zwischen den Koordinatensystemen 1 und 2, nur $z$ -Komponenten
$\underline{\underline{B}}^C$	Translatorische CB-Eingangsmatrix
$\underline{\underline{B}}^r$	Radiale CB-Eingangsmatrix
$\underline{\underline{B}}^t$	Tangentiale CB-Eingangsmatrix
$\underline{\underline{d}}$	Durchdringung
$\tilde{\underline{\underline{d}}}$	Statische Durchdringung
$\underline{\underline{D}}$	Dämpfungsmatrix
$\underline{\underline{E}}^r$	Radialmatrix
$\underline{\underline{E}}^t$	Tangentialmatrix
$\check{\underline{\underline{f}}}$	Vorläufige Kontaktlast
$\underline{\underline{f}}^M$	Trägheitslasten
$\underline{\underline{f}}^M$	Mantellasten
$\underline{\underline{k}}$	Kontaktindikator
$\tilde{\underline{\underline{k}}}$	Statischer Kontaktindikator

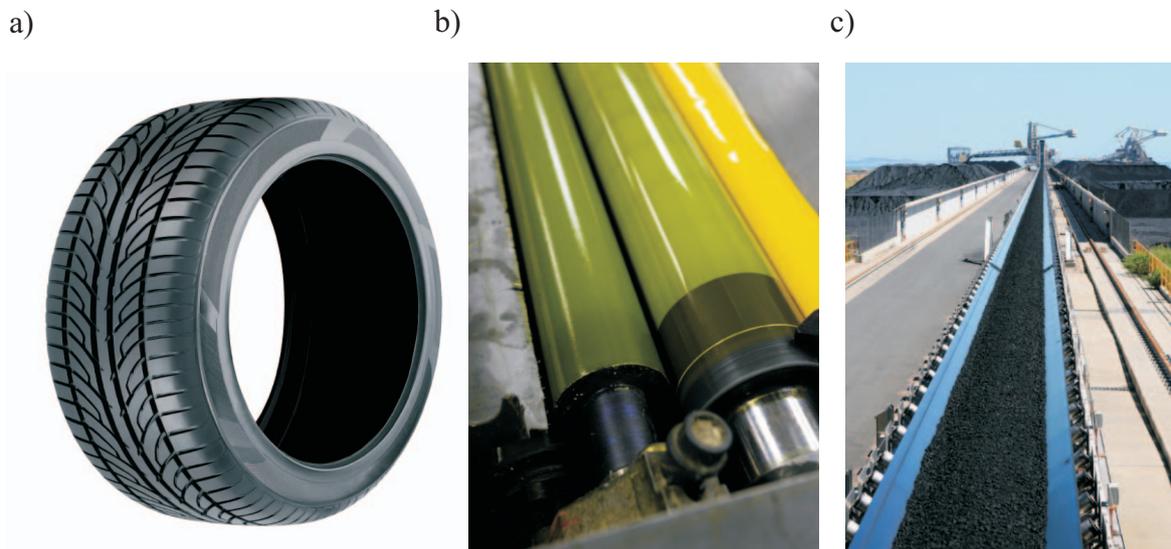
$\underline{\mathbf{K}}$	Steifigkeitsmatrix
$\underline{\mathbf{M}}$	Massenmatrix
$\underline{\mathbf{P}}$	Penalty-Matrix
$\underline{\mathbf{q}}$	Modale Freiheitsgrade
$\underline{\mathbf{T}}_D$	Dynamische Kondensationsmatrix
$\underline{\mathbf{T}}_S$	Statische Transformationsmatrix
$\underline{\mathbf{T}}_h$	CB-Kondensationsmatrix
$\underline{\mathbf{u}}$	Verschiebungen
$\hat{\underline{\mathbf{u}}}$	Eigenvektoren
$\underline{\mathbf{w}}$	Zwangsbedingungen
$\check{\underline{\mathbf{w}}}$	Vorläufige Zwangsbedingung
$\underline{\mathbf{x}}$	Ortskoordinaten
$\underline{\mathbf{Z}}^{dh}$	Zuordnungsmatrix

## Indices und weitere Formelzeichen

$( )^T$	transponierte Matrix
$( )^{-1}$	inverse Matrix

## 2 Einleitung

Rollkontakte treten in verschiedenen Bereichen der Technik auf, siehe **Bild 2.1**. Ähnlich wie beim Rollkontakt von Reifen treten bei Druckwalzen bzw. zwischen Förderband und Antriebstrommel ausgedehnte Kontaktbereiche auf. Innerhalb dieser Kontaktbereiche etabliert sich beim traktiven Rollen ein Haft- und ein Gleitbereich. Ein instationäres Rollkontaktmodell beschreibt die Vorgänge innerhalb der Kontaktzone bei schneller Änderung des Schlupfes oder der Normalkraft, so dass sich die Ergebnisse dieser Arbeit nicht nur in der Reifentechnik, sondern auch in den übrigen aufgezählten Bereichen anwenden lassen. Das in dieser Arbeit vorgestellte Modell wird anhand eines handtellergroßen Vollgummirades (*Groschrad*) angewendet. Die grundsätzliche Methodik ist aber auf viele technische Anwendungen des instationären traktiven Rollens anwendbar.



**Bild 2.1:** Anwendungsbereiche des instationären Rollkontaktmodells: a) Kontakt zwischen Reifen und Straße; b) Walzenkontakt in Druckmaschinen; c) Kontakt zwischen Antriebstrommel und Förderband (alle Bilder: *iStockphoto.com*)

Durch den Rollkontakt des Reifens auf der Fahrbahn werden Kräfte und Momente für Trag-, Führungs-, Antriebs- und Bremsaufgaben übertragen. Diese Kontaktkräfte folgen der Vorgabe des Fahrers bei einem Bremsmanöver oder einer schnellen Änderung des Lenkwinkels nicht sofort, sondern mit einem Verzögerungsverhalten. Eine effiziente Modellierung des Rollkontaktes liefert zahlreiche Möglichkeiten für das tiefere Verständnis der dynamischen Prozesse zwischen Reifen und Fahrbahn sowie innerhalb anderer Bereiche technischer Rollvorgänge.

## 2.1 Problemstellung

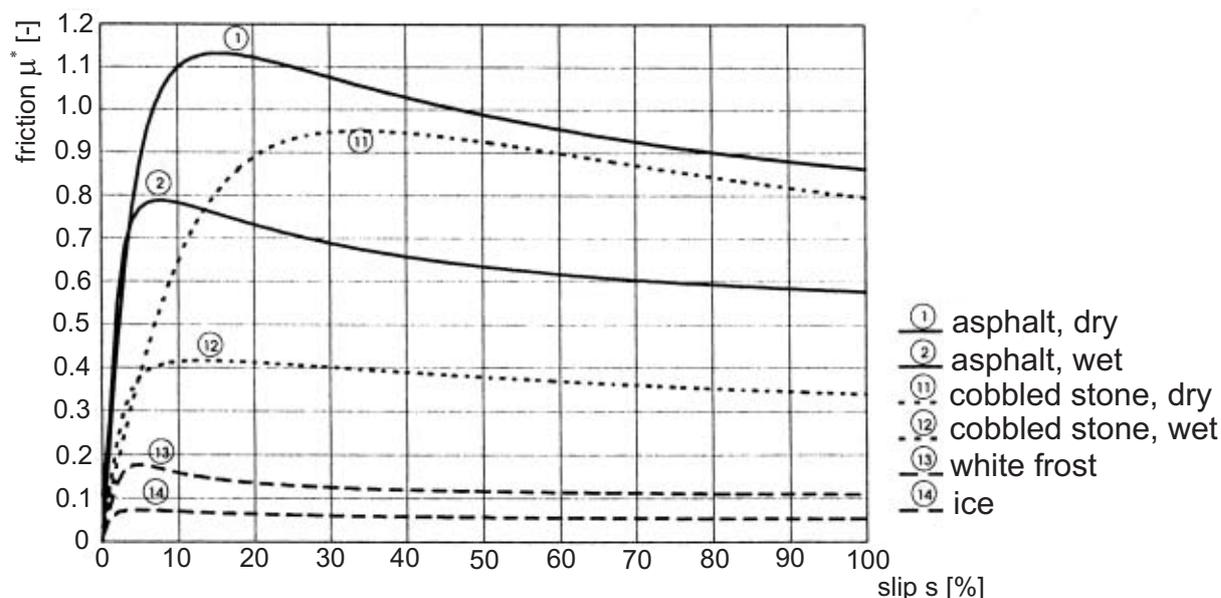
Der Reifen stellt eine zentrale Komponente im Aufbau jedes Kraftfahrzeuges dar. Er ist integraler Bestandteil des Fahrwerkes, weshalb die übrigen Fahrwerkskomponenten bereits im Entwicklungsprozess auf die Eigenschaften des Reifens hin abgestimmt werden müssen, siehe BECKER ET AL. [10], HUININK [35]. Die Entwicklung des Reifens findet im Spannungsfeld der Anforderungen Brems- und Fahrverhalten, Lebensdauer, Rollwiderstand, Aquaplaning und Akustik statt, siehe WIES [103].

Entstehungsmechanismen von Geräuschen während des Rollprozesses wurden von BECKENBAUER [9] untersucht, u. a. spielt hier der Stick-Slip-Effekt eine Rolle, siehe z. B. KRÖGER [50]. Das akustische Übertragungs- und Abstrahlverhalten von Reifen wurde von KROPP [52] oder LARSSON [54] beschrieben. Auch der Materialverschleiß durch Gummireibung ist Objekt der Forschung, siehe BARQUINS [6, 7].

Das Traktionsverhalten von Reifen auf Asphalt ist durch Konstruktion und Materialzusammenstellung sowie durch die Beschaffenheit des Kontaktpartners bzw. eines Zwischenmediums festgelegt, siehe SMITH [100]. Das Traktionsverhalten beschreibt die durch die Aufstandsfläche des Reifens übertragene tangentielle Kraft in Abhängigkeit des Reifenschlupfes. Dabei werden, abhängig vom Schräglaufwinkel, die Anteile längs und quer zur Reifenlängsachse getrennt behandelt. Die resultierenden Kennlinien sind schließlich entscheidend für das Verhalten des gesamten Kraftfahrzeuges in Grenzsituationen. Der Verlauf dieser sogenannten  $\mu^*$ -Schlupf-Kurven (abgrenzend zum lokalen Gleitreibwert  $\mu$  ist der Reibbeiwert mit einem Stern gekennzeichnet) ist stets von beiden Kontaktpartnern abhängig, Reibuntersuchungen unter Variation von Reifen- und Fahrbahnmaterialien sind z. B. in GAUSS [21] oder BACHMANN [5] zu finden.

### 2.1.1 Stationäres Rollen

Typische Verläufe von  $\mu^*$ -Schlupf-Kurven sind in **Bild 2.2** zu sehen. Für denselben Reifentyp wurden Messungen auf unterschiedlichen Fahrbahnbelägen vorgenommen. Auf den trockenen Oberflächen Asphalt und Pflasterstein („cobble stone“) sind die höchsten Reibbeiwerte  $\mu^*$  zu verzeichnen. Kommt bei diesen Belägen Wasser als Zwischenmedium hinzu, tritt eine deutliche Verminderung der erzielten Reibbeiwerte  $\mu^*$  über dem gesamten Verlauf auf.

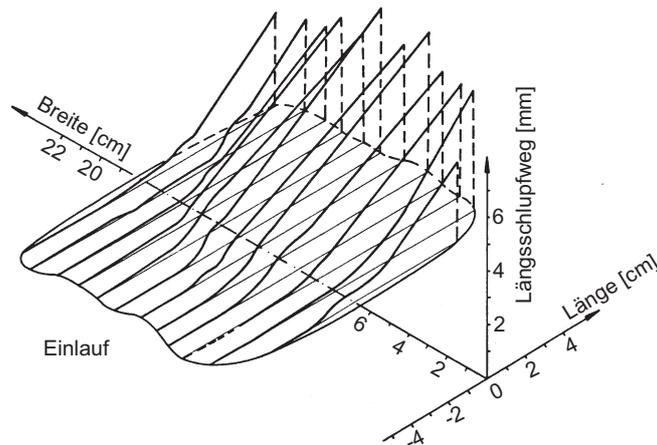


**Bild 2.2:**  $\mu^*$ -Schlupf-Kurven in Abhängigkeit des kontaktierenden Fahrbahnbelages bei identischem Reifentyp, nach BACHMANN [5]

Eine weitere deutliche Verminderung der  $\mu^*$ -Schlupf-Charakteristik ist bei eintretender Kälte für die Fahrbahnoberflächen Raureif („white frost“) und Eis zu beobachten. Während der maximale Reibbeiwert auf trockenem Asphalt  $\mu_{max}^* \approx 1,15$  beträgt, ist bei vereister Fahrbahn nur noch von einem maximalen Reibbeiwert von  $\mu_{max}^* \approx 0,08$  auszugehen. Weitere Messungen von  $\mu^*$ -Schlupf-Kurven sind z. B. in AMMON [3] zu finden.

Anhand des typischen Verlaufes einer  $\mu^*$ -Schlupf-Kurve kann das Phänomen des stationären Rollkontaktes deutlich gemacht werden. Bei geringem Schlupf haften die eintretenden Reifenstollen während des gesamten Durchlaufs der Kontaktzone an der Fahrbahnoberfläche an. Durch die geringe Relativgeschwindigkeit bauen sich dabei im Kontakt nur geringe Schubspannungen auf, die unterhalb der lokalen Haftgrenze liegen. Durch die globale Rollkinematik ist die zur Auslaufseite ansteigende Scherung des Reifenstollens vorgegeben. Abhängig von der Schersteifigkeit des haftenden Stollens entstehen als Reaktion Schubspannungen im Material. Durch das für geringe Verformungsgeschwindigkeiten annähernd lineare Materialverhalten des Elastomers kommt es zu einem ebenfalls annähernd linearen Verlauf der  $\mu^*$ -Schlupf-Kurve im Bereich geringer Schlüpfen. Das erläuterte Phänomen wird als Deformationsschlupf bezeichnet, da durch das Haften des Reifenstollens die „antreibenden“ Schubspannungen als Reaktion auf die Deformation des Materials erfolgen. Nimmt der Betrag des globalen Schlupfes zu, steigt auch die lokale Scherungsgeschwindigkeit im Reifenstollen während des Durchlaufens der Kontaktzone. Bereits ab einem Schlupfniveau von  $S \approx 2\%$  wird, beginnend am Auslauftrand des Kontaktgebietes, die lokale Haftgrenze erreicht. Es kommt zum Ablösen der Haftpartner und damit zum Übergang in die nichtlineare Gleitreibung.

Während beim vollständigen Haften des Reifens im Bereich geringen Schlupfes der Verlauf der  $\mu^*$ -Schlupf-Kurve durch die Kontaktsteifigkeit des Stollens dominiert wird, ist die Gleitreibung durch die lokale Gleitreibcharakteristik  $\mu(v_{rel})$  der Reifen/Fahrbahn-Kombination



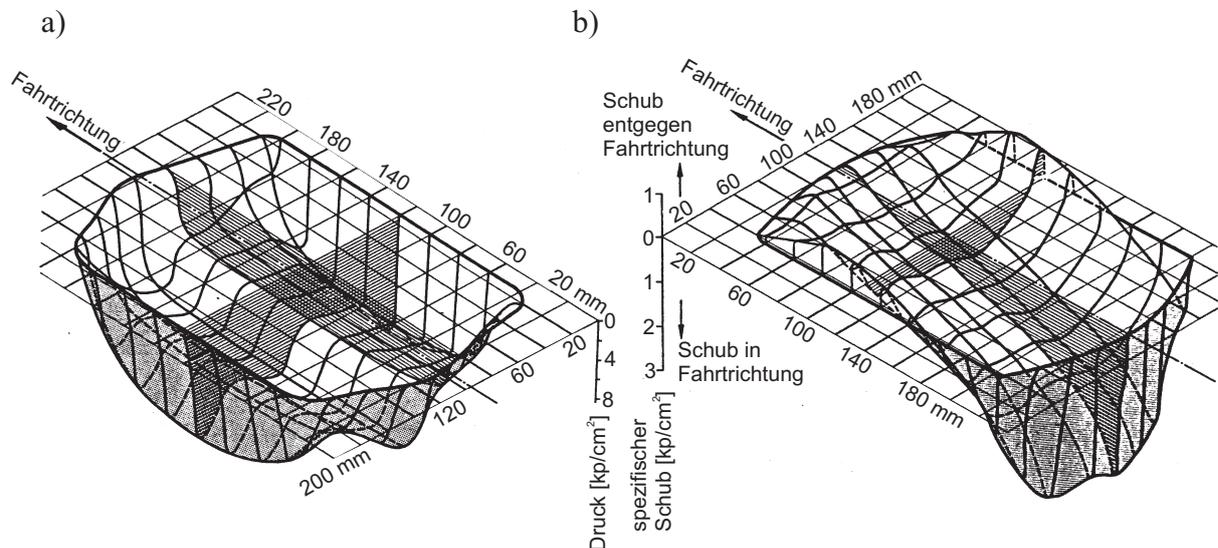
**Bild 2.3:** Relativverschiebung zwischen Reifen und Fahrbahn innerhalb der Aufstandsfläche, nach GERRESHEIM [24], bei einer Fahrgeschwindigkeit von  $v = 60 \text{ km/h}$  und Bremsschlupf  $S = 5 \%$

festgelegt. Im Übergangsbereich der Kennlinie  $2\% < S < 10\%$  breitet sich die gleitende Zone des Reifens vom Auslaufende zum Einlauftrand hin immer weiter aus. In Folge dessen geht der Einfluss des Deformationsschlupfes zurück und die  $\mu^*$ -Schlupf-Kurve flacht ab. Wird der Schlupf weiter erhöht, ist der Verlauf der Reifenkennlinie mit dem Verlauf des lokalen Gleitreibwertes  $\mu(v_{rel})$  annähernd identisch. Dieser Bereich der  $\mu^*$ -Schlupf-Kurve wird als Gleitschlupf bezeichnet. Für den Reifen/Fahrbahn-Kontakt wurde die Unterscheidung von Deformations- und Gleitschlupf zuerst von KLAUE [43] vorgenommen.

Messungen insbesondere der Verformung des Reifens sind in KERN [42, 41, 40] oder GERRESHEIM [23, 24] zu finden. Eine Darstellung der Relativbewegung im Kontakt ist in **Bild 2.3** zu sehen. Die Messung ist bei einer Fahrgeschwindigkeit von  $v = 60 \text{ km/h}$  aufgenommen, der Bremsschlupf beträgt  $S = 5\%$ . Im Einlaufbereich tritt durch das Haften der Kontaktpartner keine Relativverschiebung auf, die Relativbewegung im Auslauf des Reifens führt zu Gleitreibung. Durch die gleichzeitige Existenz von Haft- und Gleitzone innerhalb des Kontaktbereiches tritt in diesem Fall sowohl Deformations- als auch Gleitschlupf auf.

Messungen der Pressungs- und Schubspannungsverteilung innerhalb der Kontaktfläche sind z. B. in SAKAI [89, 90] oder SEITZ [94] aufgeführt. In **Bild 2.4** ist der Spannungszustand zwischen Reifen und Fahrbahn dargestellt. Die Pressungsverteilung in **Bild 2.4 a)**, bei schlupffreiem Lauf für eine Fahrgeschwindigkeit  $v = 18,3 \text{ km/h}$ , folgt qualitativ dem Hertz'schen Kontakt, siehe HERTZ [32]. Allerdings weicht der reale Reifen durch seine ballige Form und durch die Profilierung der Lauffläche von der idealisierten zylindrischen Form ab. Daher kommt es zu einer grundsätzlichen Abflachung der Kontaktellipse, sowie zu Pressungsüberhöhungen im Bereich der Profilklötze. Die Schubspannungsverteilung während eines Bremsmanövers bei einer Fahrgeschwindigkeit  $v = 6,2 \text{ km/h}$  und einer Verzögerung von  $a = -1 \text{ m/s}^2$  ist in **Bild 2.4 b)** zu sehen. Im Großteil des Kontaktgebietes, beginnend am Einlauftrand, herrscht Haften zwischen Reifen und Fahrbahn. Hier bauen sich die Schubspannungen kontinuierlich auf, bis die Grenze der lokalen Haftreibung erreicht ist. Am Auslauftrand schließlich gleitet der Reifen relativ zur Fahrbahn. Da der Betrag der Schubspannungen bei Gleitrei-

bung annähernd proportional zur lokalen Pressung ist, spiegelt sich die Pressungsverteilung aus **Bild 2.4 a)** im Gleitbereich am Auslauftrand des Kontaktgebietes in **Bild 2.4 b)** wider.



**Bild 2.4:** Spannungszustand innerhalb der Kontaktfläche nach BODE [13]: a) Pressungsverteilung für schlupffreien Lauf bei Fahrzeuggeschwindigkeit  $v = 18,3 \text{ km/h}$ ; b) Schubspannungsverteilung beim Bremsen, Fahrgeschwindigkeit  $v = 6,2 \text{ km/h}$ , Verzögerung  $a = -1 \text{ m/s}^2$  (Messaufnahme in der Fahrbahndecke)

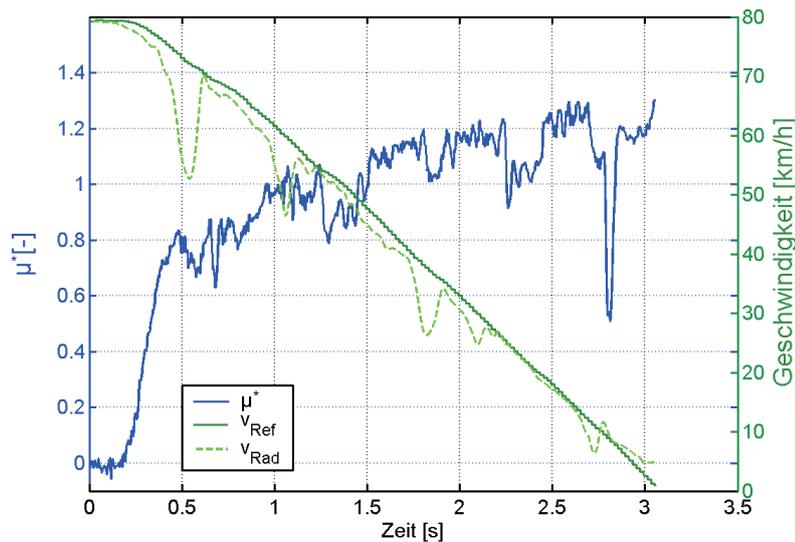
### 2.1.2 Dynamischer Rollkontakt

Ende der siebziger Jahre des vergangenen Jahrhunderts hat die Automobilindustrie begonnen, mit Hilfe regelungstechnischer Eingriffe die Fahrdynamik von Kraftfahrzeugen gezielt zu beeinflussen. Es gelang, das Erreichen von Grenzsituationen besonders bei Bremsmanövern weitgehend zu unterbinden. Das damals entwickelte Antiblockiersystem (ABS) dosiert und limitiert die Bremskraft eines Kraftfahrzeuges derart, dass der Schlupf des jeweiligen bremsenden Rades im stabilen, steigenden Bereich der  $\mu^*$ -Schlupf-Kurve bleibt, siehe z. B. WIES [104] oder KENDZIORRA [38]. Dadurch werden im Allgemeinen kürzere Bremswege erreicht und die Möglichkeit von Lenkeingriffen in Grenzsituationen bzw. die Übertragung von Querkräften sichergestellt.

Das ABS kontrolliert den Schlupf des Rades mit einer Regelfrequenz von etwa 10 Hz. Wird ein so genannter Schlupfeinlauf, ein drohender Verlust der Haftung, identifiziert, drosselt der Regler den Bremsdruck. Dies führt, entsprechend der  $\mu^*$ -Schlupf-Kennlinie, zu einer mit der Verringerung der übertragenen Bremskraft einhergehenden Schlupfstabilisierung. Bei der Entwicklung von Antiblockiersystemen spielt das dynamische Kraftschlussverhalten des Reifens eine zentrale Rolle. Bei der Beschreibung dieses Verhaltens wird von der oben beschriebenen stationären  $\mu^*$ -Schlupf-Kennlinie ausgegangen. Sie wird ermittelt, indem auf experimentelle Weise jeder Messpunkt angefahren und bei Erreichen eines stationären Bremskraftwertes dieser Wert dem konstanten Schlupfniveau zugeordnet wird. Diese stationären

Bedingungen entsprechen allerdings nicht den realen Verhältnissen einer ABS-geregelten Bremsung. **Bild 2.5** zeigt die Zeitverläufe des Reibbeiwertes  $\mu^*$ , sowie der Fahrzeuggeschwindigkeit  $v_{Ref}$  und der Abrollgeschwindigkeit  $v_{Rad}$  des Reifens während einer ABS-geregelten Bremsung. Deutlich zu sehen ist, dass bei plötzlich absinkendem Reibbeiwert  $\mu^*$  der Betrag der Radgeschwindigkeit  $v_{Rad}$  ebenfalls schnell absinkt und damit das Blockieren des Rades droht. Die durch das ABS verursachte Verringerung des Bremsdruckes führt dann wieder zu einer Stabilisierung des Bremsverhaltens. Wegen solcher Schlupfeinläufe, die ca. 0,3 s dauern, befindet sich das Rad während einer ABS-geregelten Bremsung im instationären Rollkontakt. Dieser Zustand kann durch stationäre Modelle nicht ausreichend beschrieben werden.

Um das beobachtete dynamische Verhalten des Reifen/Straße-Kontaktes in Simulationsmodellen abzubilden, wird der stationären  $\mu^*$ -Schlupf-Kennlinie ein dynamisches System aufgeschaltet. Das hierzu benötigte charakterisierende Verzögerungsverhalten wird experimentell ermittelt, siehe z. B. KENDZIORRA [39]. Eine modellbasierte Ermittlung des stationären und instationären Kontaktverhaltens würde die Entwicklung von Reifen und Assistenzsystemen wie dem Antiblockiersystem durch die Reduzierung von aufwändigen Versuchsreihen Zeit- und Kostenvorteile erschließen. Im Bereich des stationären Rollens existiert eine Vielzahl analytischer und diskreter Modellansätze, siehe CARTER [15] und FROMM [19], oder PACEJKA [77]. Finite-Elemente-Modelle lassen detaillierte Aussagen über die Vorgänge innerhalb der Kontaktzone zu, siehe z. B. NACKENHORST [73, 74] oder ZIEFLE [107]. Eine Simulation von instationären Vorgängen mit diesen Modellen ist allerdings zeitaufwändig, was umfangreiche Parameterstudien nahezu ausschließt.



**Bild 2.5:** Verlauf wichtiger Zustandsgrößen während eines ABS-geregelten Bremsvorganges, nach TRABELSI [102]

## 2.2 Ziel und Inhalt dieser Arbeit

Die dynamische Modellierung des Rollkontaktes erfolgt einerseits durch empirische Erweiterungen stationärer Modelle, andererseits durch rechenzeitintensive FE-Modellierungen. In dieser Arbeit soll ein mechanisches Modell zur effizienten Berechnung des dynamischen Rollkontaktes präsentiert werden. Um einen kontrollierten, homogenen Reibprozess innerhalb der Kontaktzone garantieren zu können, werden die Untersuchungen mit einem handteller-großen Vollgummirad durchgeführt. Das sogenannte *Groschrad* wird in der Reifenindustrie für Verschleißuntersuchungen verwendet, siehe **Bild 2.6**.

Für die Abbildung des Strukturverhaltens sowie für die Berechnung des Normal- und Tangentialkontaktes werden Modelle gezeigt, die das Systemverhalten hinreichend genau wiedergeben und trotzdem numerisch effizient sind. Trotz des stark nichtlinearen Materialverhaltens von Gummi soll das Simulationsmodell einfache Beschreibungen für Materialverhalten und lokale Reibung beinhalten. Das dynamische Verhalten des Elastomers oder die Dynamik der lokalen Reibcharakteristik der beiden Kontaktpartner bleibt bewusst außerhalb der Betrachtung. Auf diese Weise kann eine Aussage darüber getroffen werden, in wie weit die Kinematik des abrollenden Rades für die Dynamik des Rollkontaktes maßgeblich ist.

Um die Qualität der Simulationsergebnisse abzusichern, soll das Rollkontaktmodell mit stationären und instationären Messungen abgeglichen werden. Die experimentellen Untersuchungen werden mit einem zu diesem Zweck konstruierten Messmobil durchgeführt, das dafür ausgelegt wurde, instationäre Anregungen über Schlupf und Radlast auf das Groschrad aufzubringen. Das Ziel der Arbeit besteht in der möglichst effizienten Modellierung der in den experimentellen Untersuchungen beobachteten dynamischen Effekte.



**Bild 2.6:** Groschrad-Rohling, etwa handteller groß, wie er in der Reifenindustrie für Verschleißmessungen verwendet wird („*Grosch-Abrader*“, siehe GROSCH [27])

In Kapitel 3 wird zunächst das entwickelte Messmobil vorgestellt. Anschließend werden die unter Laborbedingungen angestellten experimentellen Untersuchungen gezeigt, auf deren Basis dann das Simulationsmodell entwickelt werden soll. Hierbei bilden stationäre Untersuchungen die Grundlage für die Entscheidung über die Wahl des geeigneten Kontaktpaares Elastomer/Fahrbahn. Schließlich werden Messungen zum dynamischen Verlauf der Tangentialkraft nach einer sprunghaften Änderung des Schlupfes gemessen und charakterisiert.

Das entwickelte Simulationsmodell wird in Kapitel 4 vorgestellt. Die dynamische Rollkontaktmodellierung beinhaltet ein Strukturmodell für den Radkörper. Die Abbildung von Strukturen erfordert eine hohe Anzahl von Freiheitsgraden. Für die effiziente Modellierung des Gesamtsystems ist ein geeigneter Algorithmus zur Reduktion der hohen Anzahl von Freiheitsgraden erforderlich. Eine Beschreibung von Kontaktproblemen mit modaler Näherung der Strukturmechanik bietet SEXTRO [95]. Die Kontaktdynamik eines einzelnen Reifenstollens wird in MOLDENHAUER [67] betrachtet. Modellierungsansätze für das Groschrad bietet GUTZEIT ET AL. [30, 31]. Eine weitere Maßnahme zur Verminderung des numerischen Aufwandes besteht in der wechselnden Zusammenstellung des *Active Sets*. Auf diese Weise ist eine rechenzeitintensive Kontaktanfrage nur noch für Knoten in unmittelbarer Nähe des Kontaktbereiches nötig.

In Kapitel 5 werden die Simulationsergebnisse hinsichtlich des globalen Tangentialkraftverlaufes mit den experimentellen Untersuchungen verglichen. Der Abgleich der stationären Reibcharakteristik bringt bereits Aufschluss über die Qualität der Strukturmodellierung, des Materialmodells, sowie der implementierten lokalen Reibcharakteristik. Ist das vorgestellte Modell experimentell abgesichert, bietet es Einblick in den dynamischen Verlauf lokaler Größen, wie z. B. der Pressungs- bzw. der Schubspannungsverteilung im Kontaktbereich. Schließlich erfolgt in Kapitel 6 eine Zusammenfassung der gesamten Arbeit. Basierend auf den präsentierten Ergebnissen wird eine Bewertung des Modellierungsansatzes getroffen, außerdem werden Möglichkeiten zum Ausbau und zur Weiterentwicklung des Modells aufgezeigt.

### 3 Messung des Rollkontaktes

Um das instationäre Verhalten des Rollkontaktes eines Groschrades beobachten zu können, wurde am *Institut für Dynamik und Schwingungen* der Leibniz Universität Hannover (IDS) ein mobiler Versuchsstand aufgebaut. Mit dem Messmobil ist es möglich, sowohl in einer Laborumgebung, als auch auf dem Asphalt öffentlicher Straßen, die Kontaktkräfte eines schlupfenden Vollgummirades („Groschrad“) zu messen. In Abschnitt 3.1 wird der Aufbau und die Funktionsweise des fahrenden Versuchsstandes erläutert. Vorangegangene stationäre Reibuntersuchungen mit dem Groschrad haben gezeigt, dass die resultierenden Kennfelder starke Ähnlichkeiten mit typischen Reifen-Charakteristiken aufweisen, siehe LINDNER [58]. Eine direkte Übertragbarkeit ist allerdings nicht gewährleistet, da das lokale Kontaktverhalten eines profilierten Reifens von dem eines Groschrades deutlich abweicht. Die grundsätzlichen Vorgänge zwischen dem rollenden Rad und der Fahrbahn, wie der Einfluss der Rollkinematik oder der lokale Reibung auf die Kontaktdynamik, werden durch das Groschrad allerdings hinreichend abgebildet. Daher ist es geeignet, den dynamischen Rollkontakt von Elastomeren innerhalb einer Laborumgebung systematisch zu untersuchen.

Zunächst werden grundlegende stationäre Messungen des Messmobils gezeigt, siehe Abschnitt 3.2. Dabei werden abhängig von Normalkraft und Schlupf des Rades Kennfelder des Reibbeiwertes  $\mu^*$  gezeigt. Anhand der Kennfelder erfolgt ein Vergleich verschiedener Elastomere. In dieser Arbeit soll das dynamische Kontaktverhalten nach einem Schlupfsprung untersucht werden. Daher werden die ermittelten Kennfelder hinsichtlich der Eignung für diese Experimente beurteilt. Ein ausgedehnter Deformationsschlupf-Bereich in der Reibcharakteristik ermöglicht ausführliche Untersuchungen des Tangentialkraftverlaufes nach einem Schlupfsprung. Schließlich wird ein geeignetes Material für die instationären Messungen mit dem Groschrad ausgewählt.

Anders als bei stationären Messungen, bei denen jeder Messpunkt durch Mittelung einer Reibungsmessung gewonnen wird, wird bei instationären Messungen der Verlauf der Zeitsignale ausgewertet. Dabei werden deutlich höhere Ansprüche an die Qualität des auszuwertenden Zeitverlaufes gestellt. In Abschnitt 3.3 wird daher ein Verfahren zur Kompensation der systematischen Messabweichung bei den Rollkontaktmessungen vorgestellt. In diesem Verfahren werden Referenzmessungen aufgenommen, die mit einem Korrelationsverfahren miteinander in Bezug gesetzt werden. Die systematische Messabweichung wird dann aus diesen Referenzmessungen durch Mittelung bestimmt. Es wird die Annahme getroffen, dass die systematische Messabweichung bezüglich des Schlupfes skaliert werden kann. Auf diese Weise kann in jeder

beliebigen Messung der Einfluss der systematischen Messabweichung minimiert werden. Näheres über das Verfahren ist in Abschnitt 3.3.1 zu finden, die Ergebnisse sind in **Bild 3.10** zu sehen.

Anschließend wird die Berechnung von Zeitkonstanten zur Charakterisierung des dynamischen Rollkontaktverhaltens erläutert. Die identifizierten Zeitkonstanten erlauben eine Aussage über die Dynamik des elastomeren Rollkontaktes. Als Ergebnis der instationären Messungen werden schließlich die ermittelten Zeitkonstanten für unterschiedliche Schlupfsprünge gegenübergestellt.

### 3.1 Messaufbau

Für die experimentelle Beobachtung des Reifen-Fahrbahn-Kontaktes wurde am *Institut für Dynamik und Schwingungen* ein Messmobil aufgebaut, siehe GUTZEIT [29]. Es basiert im Wesentlichen auf dem Konzept des Vorgängermodells, siehe BLUME [12, 11] und LINDNER [58], ist allerdings speziell auf instationäre Messungen hin entwickelt worden. Weiterhin wurde bei der Konstruktion Wert darauf gelegt, dass um das Messrad herum genug Bauraum blieb, um den Rollkontakt mit optischen Methoden (HiSpeed-, Infrarotkamera) zu beobachten.

Während einer Messung bewegt sich das Messmobil mit konstanter Fahrgeschwindigkeit, während für die Drehgeschwindigkeit und damit für den Schlupf des Rades beliebige Zeitverläufe vorgegeben werden können. Auch der Zeitverlauf der Radlast des Messrades wird durch eine Regelung realisiert und kann daher beliebig beeinflusst werden. Alle im Kontakt entstehenden Kräfte und Momente werden aufgezeichnet, außerdem werden die Temperaturen von Messrad und Fahrbahn sowie die Textur der kontaktierenden Fahrbahn erfasst.

a)



b)

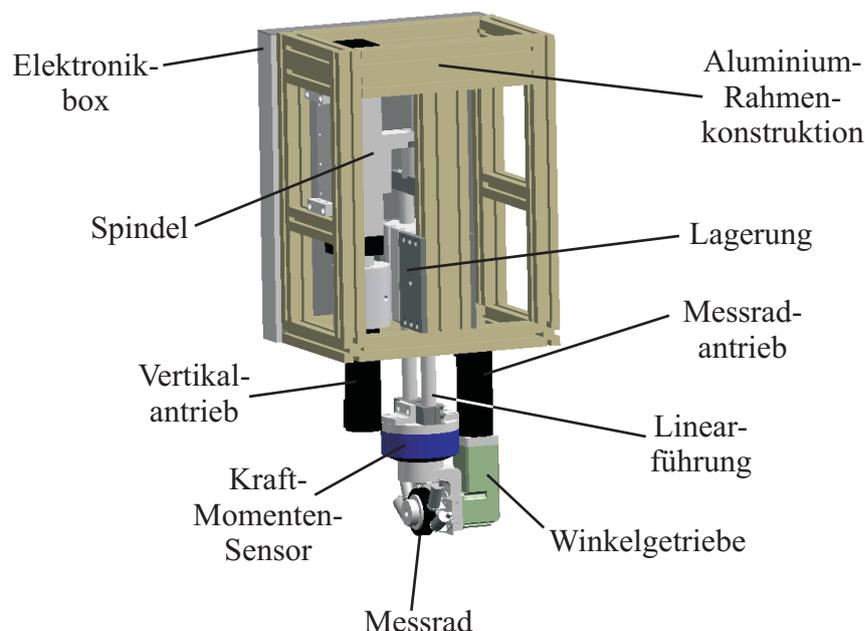


**Bild 3.1:** Das Messmobil im Einsatz: a) Messung auf Asphalt; b) Messungen unter Laborbedingungen. Auf einer Trägerschiene können unterschiedliche Oberflächen als Kontaktpartner des Groschrades montiert werden

Das Messmobil wurde für zwei verschiedene Projekte entwickelt. Neben den in dieser Arbeit vorgestellten instationären Messungen in einer Laborumgebung wurden außerdem stationäre Messungen auf dem Asphalt öffentlicher Straßen aufgenommen, siehe **Bild 3.1 a)**. Ziel der Untersuchungen ist die Prognose des Reibbeiwertes  $\mu^*$  anhand datenbasierter Methoden, siehe BOUZID [14]. Die instationären Messungen werden innerhalb einer Versuchshalle absolviert, siehe **Bild 3.1 b)**. Dabei fährt das Messmobil über eine Trägerschiene, die mit dem Kontaktpartner des Groschrades bestückt ist.

Das Chassis besteht aus einer verwindungssteifen Aluminium-Rahmenkonstruktion, es trägt den zentralen Prozessrechner und die 60 V-Energieversorgung, die aus fünf Batterieblöcken besteht. Die Bordspannung ist gegenüber dem Vorgängermodell gesteigert worden, um besonders den Messrad-Motoren mehr Leistung zur Verfügung zu stellen. Zwei getriebelose Nabenmotoren, die aus der Rollstuhltechnik stammen, sorgen für Vortrieb. Durch den mitgelieferten Analog-Joystick lässt sich das Messmobil komfortabel manövrieren und in mehreren Leistungsstufen fortbewegen.

Wie bereits beim Vorgängermodell ist die für die Messungen benötigte Aktorik zusammen mit dem Großteil der Sensorik und deren Verarbeitungselektronik modular in einer Messkapsel im hinteren Bereich des Messmobils untergebracht. Die Messkapsel kann mit wenigen Handgriffen vom Chassis gelöst werden und ist dann nur noch über eine Kabelverbindung mit diesem verbunden. Dadurch ist es möglich, die Messkapsel innerhalb anderer Versuchsstände zu betreiben.



**Bild 3.2:** Überblick über die wichtigsten Komponenten der Messkapsel: Das Lagerungskonzept bietet viel Freiraum im Bereich um das Messrad. Leistungsstarke Motoren sorgen für hohe Dynamik der Radlast- und Drehzahlregelung des Messrades

**Bild 3.2** zeigt ein 3D-Konstruktionsbild der zusammengebauten Messkapsel. Das Messrad ist über den Kraft-Momenten-Sensor, der in allen Raumrichtungen die übertragenen Kräfte und Momente misst, am Ende einer Linearführung befestigt. Der Schlitten der Linearführung ist über den Rahmen der Messkapsel gelagert. Am anderen Ende der Führung ist der Schlitten der Spindel befestigt, mit der die vertikale Position des Messrades verstellt wird. Sowohl die Spindel als auch das Messrad werden über leistungsstarke 600 W-Motoren angetrieben, um sprunghafte Änderungen der Sollgrößen ausreichend schnell ausführen zu können. Unterhalb des Kraft-Momenten-Sensors befindet sich eine Verstellmöglichkeit, mit der ein Schräglaufwinkel eingestellt werden kann. Direkt am Messrad sind vier Pyrometer befestigt, die berührungslos die Temperaturen von Messrad und Fahrbahn im Ein- und Auslauf des Rades aufnehmen. Eine Elektronikbox auf der Vorderseite der Kapsel beherbergt Mess- und Leistungselektronik, so dass zum Chassis nur wenig störungsempfindliche Digitalsignale übertragen werden. Die Steuerung der Messungen sowie die Regelung der Radlast und der Drehgeschwindigkeit des Messrades werden von einem leistungsfähigen Prozessrechner mit PowerPC-Architektur durchgeführt. Die Kommunikation zum Kraft-Momenten-Sensor ist über ein VME-Bus-System realisiert, die übrigen Komponenten werden über einen CAN-Bus angesprochen. Der Benutzer bedient das Messmobil während der Messungen über ein Laptop, auf dem eine komfortable Java-Benutzeroberfläche installiert ist. Durch eine Wireless-LAN-Anbindung zum Prozessrechner ist größtmögliche Flexibilität gewährleistet.

Als Messrad wird ein Vollgummirad mit einer Breite von 18 mm, einem Innendurchmesser von 35 mm sowie einem Außendurchmesser von 80 mm verwendet. Das Rad wird von der Reifenindustrie vielfach innerhalb einer Apparatur namens *Grosch Abrader*, siehe GROSCH [27], zur Verschleißmessung verwendet.

a)



b)



**Bild 3.3:** a) Groschrad, montiert auf Radadapter, Innendurchmesser 35 mm; b) Blick auf das montierte Rad unterhalb der Messkapsel während einer Messung auf der Trägerschiene

Die Zusammensetzung der Gummimischung kann beliebig verändert werden, dabei können für Radstruktur und Radmantel (d. h. die äußeren 5 mm des Radkörpers) unterschiedliche Materialien zum Einsatz kommen. Das Rad ist auf einen Radadapter montiert, siehe **Bild 3.3 a)**, so dass es mit einer Hydrospannbuchse sehr schnell auf der Nabe der Messkapsel montiert werden kann. Im Gegensatz zu stationären Messungen, bei denen der Einfluss von Radlast und Schlupf auf die Tangentialkraft in Form gemittelter Kennfelder beschrieben wird, steht bei der Auswertung von instationären Messungen die Interpretation von Zeitverläufen im Vordergrund. Da diese Messungen störungsempfindlicher sind als stationäre Messungen, werden die Versuche zum instationären Rollkontakt von Umwelteinflüssen weitgehend abgeschirmt in einer Versuchshalle durchgeführt. Auf dem Hallenboden des Instituts ist eine 2 m lange Trägerschiene installiert. Auf der Schiene können als Kontaktpartner des Messrades beliebige Oberflächen montiert werden, wie z. B. Glas oder Korund, siehe **Bild 3.3 b)**.

## 3.2 Stationäre Messungen

Nach Aufbau des Messmobils wurden zunächst stationäre Messungen unter Variation von Normalkraft  $F_N$  und globalem Schlupf  $S$  durchgeführt. Der globale Schlupf ist durch die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  des Messrades, sowie durch die Fahrgeschwindigkeit des Messmobils  $v_C$  festgelegt

$$S = \frac{v_C - \Omega r_M}{v_C}, \quad (3.1)$$

mit dem Außenradius des Messrades  $r_M$ . Weitere Schlupf-Definitionen sind in POPP/SCHIEHLEN [85] aufgeführt. Die Untersuchungen fanden mit verschiedenen Gummimaterialien statt, als Unterlage diente in allen Fällen Glas. Im Vorfeld wurden Versuche auch auf anderen Unterlagen, wie z. B. auf Korund, Stahl und Safety Walk durchgeführt. Im Hinblick auf die Auswertung der Zeitsignale im Rahmen der instationären Messungen zeigen die Messungen auf Glas die geringsten Abweichungen im Zeitverlauf der Tangentialkraft  $F_T(t)$ .

Voruntersuchungen zum dynamischen Kontaktverhalten nach Schlupfsprüngen haben ergeben, dass die Auswertung des Zeitverlaufes der Tangentialkraft mit großen Unsicherheiten verknüpft ist. Durch Variation des verwendeten Elastomers wurde festgestellt, dass die Wahl des Groschradmaterials einen großen Einfluss auf die Streuung der Ergebnisse besitzt. In dieser Arbeit sollen für die Validierung des Rollkontaktmodells zuverlässige Aussagen über die Kontaktdynamik des Groschrades getroffen werden. Daher steht bei der Wahl des Groschradmaterials nicht eine realitätsnahe Kontaktpaarung im Vordergrund, sondern vielmehr die Rekonstruierbarkeit der Messergebnisse. Nachdem Glas als Untergrund festgelegt wurde, besteht das Ziel der nachfolgend beschriebenen stationären Untersuchungen darin, das für die instationären Versuche am besten geeignete Material zu ermitteln.

Des Weiteren sollen die Kennfelder als Anhaltspunkt dafür dienen, welcher Bereich des Schlupfes  $S$  und der Normalkraft  $F_N$  für instationäre Messung am besten genutzt werden kann. Die benötigten Materialien wurden vom *Deutschen Institut für Kautschuktechnologie* (DIK), Hannover, zur Verfügung gestellt, die Messräder wurden anschließend von der *Continental AG*, Hannover, vulkanisiert. Bei den Messungen wird die tangential Kontaktkraft  $F_T$  aufgenommen, aus der sich der globale Reibbeiwert

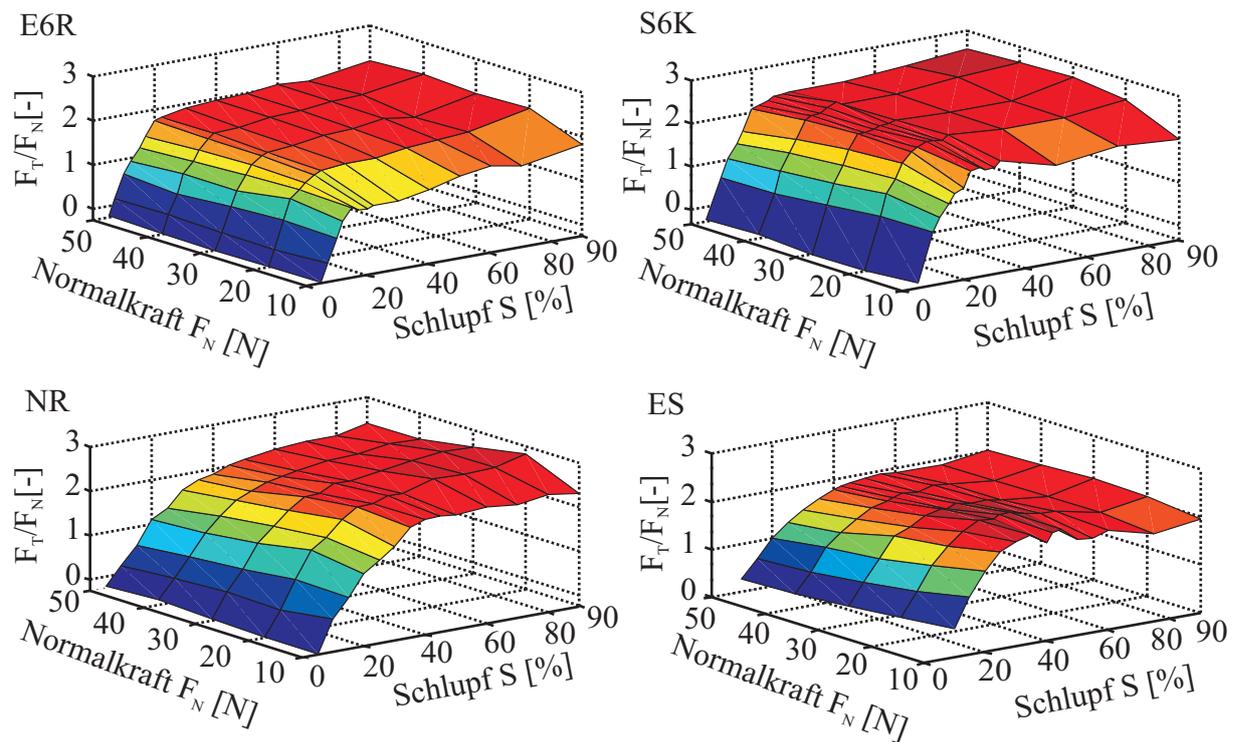
$$\mu^* = \frac{|F_T|}{F_N} \quad (3.2)$$

ermitteln lässt. In dieser Arbeit wird zur Beurteilung des Tangentialkontaktes allerdings das Kraftverhältnis  $F_T/F_N$  oder direkt der Tangentialkraftverlauf verwendet. Bei den instationären Messungen ist ansonsten in der Nähe des schlupffreien Rollens das Vorzeichen der Tangentialkraft durch die Betragsbildung des Reibbeiwertes  $\mu^*$  in Gl. (3.2) nicht beurteilbar.

Das Messmobil bewegt sich während der Messungen mit der konstanten Fahrgeschwindigkeit  $v_C = 40$  mm/s. Für jeden Messpunkt werden die Eingangsgrößen  $S$  und  $F_N$  für eine Strecke von 1 m durch Regelung konstant gehalten. Anschließend wird für jeden Abschnitt ein Mittelwert gebildet, der den Funktionswert des entsprechenden Messpunktes  $F_T(S, F_N)$  darstellt. Es wird ausschließlich im Bereich von Bremschlupf  $S > 0$  gemessen. **Bild 3.4** zeigt vier Kennfelder als Ergebnis der stationären Messungen mit unterschiedlichen Elastomeren. Bei allen vier Kennfeldern wird der Schlupf zwischen  $S = 10$  %,  $20$  %, ...,  $90$  % variiert, bei einer Radlast von  $F_N = 10$  N,  $20$  N, ...,  $50$  N. Der Schräglauf beträgt bei allen Messungen  $\alpha = 0^\circ$ .

Ein bekanntes Phänomen bei Gleitreibung (z. B. zwischen Bremscheibe und Belag) ist die Abhängigkeit des Gleitreibwertes  $\mu$  von der Vorgeschichte der Reibpartner. Um diesen Einflussfaktor zu minimieren, werden Messrad und Glasfahrbahn vor jeder Messung einer systematischen Konditionierung unterzogen. Dabei wird das Messrad mit Aceton, die Fahrbahn mit Ethanol gereinigt. Unter den verwendeten Gummimaterialien befinden sich zwei ungefüllte Elastomere, davon ein reiner Naturkautschuk (NR) und eine aus den Synthese-Kautschuken EPDM (Ethylen-Propylen-Dien-Kautschuk, Massenanteil 40 %) und SBR (Styrol-Butadien-Kautschuk, Massenanteil 60 %) bestehende Mischung, die mit der Abkürzung ES versehen ist. Zur Gegenüberstellung werden noch zwei gefüllte Elastomere verwendet, die mit den in der Reifenindustrie gängigsten Füllstoffen angereichert sind. Die Mischung E6R basiert auf einem EPDM Polymer, dem 60 % Ruß beigegeben wird. Bei der Mischung S6K werden einem SBR 60 % Kieselsäure hinzugefügt.

Alle Kennfelder zeigen eine stark ausgeprägte Abhängigkeit des Kraftverhältnisses  $F_T/F_N$  vom Schlupf  $S$ , die einer Sättigungscharakteristik entspricht. Die Abhängigkeit von der Normalkraft  $F_N$  fällt dagegen deutlich geringer aus. Die Maxima der einzelnen Kennfelder liegen bei  $\max(F_T/F_N) \approx 2 - 3$ . Die Schlupfabhängigkeit lässt sich in einen quasi-linearen Anteil im Bereich geringer Schlüpfe  $S < 20 - 40$  % und einen Sättigungsbereich darüber unterteilen. Dieser prinzipielle Verlauf der  $\mu^*(S)$ -Abhängigkeit lässt sich bereits mit einfachen sta-



**Bild 3.4:** Reibkennfelder für die gefüllten Materialien E6R, S6K, sowie für die ungefüllten Polymere NR und ES. Alle Messungen fanden auf Glas bei einer Geschwindigkeit  $v_C = 40$  mm/s des Messmobils statt (Schräglauf  $\alpha = 0^\circ$ )

tionären Reifenmodellen erklären, siehe z. B. FROMM [19], KUMMER UND MEYER [53, 66], PACEJKA [77] oder SJAHDANULIRWAN [97]. Im Bereich geringer Schlüfe herrscht in der Kontaktzone ein Haftverhalten vor. Die gemessene Kraft entsteht damit nicht durch eine Relativbewegung zwischen den Kontaktpartnern, sondern durch die Schersteifigkeit des deformierten Elastomers. Sie hat damit den Charakter einer Reaktionskraft. Wegen des für kleine Dehnungen näherungsweise konstanten elastischen Materialverhaltens kommt es zu dem beobachteten linearen Verlauf.

Für steigenden Schlupf  $S$  entsteht vom Auslaufbereich ausgehend eine Gleitzone, da es durch die größere Scherung zu einem früheren Abriss des haftenden Bereiches kommt. Die Gleitkomponente der Tangentialkraft entspricht einer eingepprägten Kraft, deren Betrag im Wesentlichen von der lokalen Relativgeschwindigkeit  $v_{rel}$  und der lokalen Pressung  $p$  abhängig ist. Die Charakteristik der entsprechenden lokalen Reibkennfelder  $\mu(v_{rel})$  wird somit für steigende Schlüfe auch im Kennfeld des globalen Reibbeiwertes  $\mu^*(S, F_N)$  des Rollkontaktes sichtbar.

Der auffälligste Unterschied zwischen den Kennfeldern der gefüllten und ungefüllten Materialien besteht in der Anfangssteigung in Abhängigkeit des Schlupfes  $S$ . Die gefüllten Materialien weisen im Bereich geringer Schlüfe ein sichtbar steiferes Verhalten auf als die ungefüllten Elastomere. Deshalb ist auch der Sättigungsbereich bei E6R und S6K schon bei einem Schlupf von  $S \approx 20\%$  erreicht, während bei den ungefüllten Materialien NR und ES

erst bei  $S \approx 40\%$  die Sättigung einsetzt. Der Grund ist die Versteifung der Polymere durch die Zugabe von Füllmaterialien, auch die Strukturdämpfung wird dabei signifikant erhöht. Diese Versteifung führt zu einem steileren Anstieg in dem durch das elastische Verhalten dominierten Bereiches des  $\mu^*(S)$ -Verlaufes im Bereich geringer Schlüpfen.

Bei allen Materialien außer ES ist ein Vorzeichenwechsel des Kraftverhältnisses  $F_T/F_N$  bei geringen Bremsschlüpfen  $S > 0$  zu beobachten. Der Grund dafür ist, dass die im Einlauf eintretenden Bereiche des Radmantels auf Grund statischer Verformung vorgedehnt sind. Durch die geringe Schergeschwindigkeit im Kontaktbereich bei kleinen Schlüpfen  $S \approx 0$  werden diese Vorverformungen nicht abgebaut, sondern bis in den Auslaufbereich transportiert. Dem gegenüber steht der Rollwiderstand, der durch die Dämpfung der Messradstruktur entsteht. Das resultierende Moment ist allerdings geringer als das aus den Vorverformungen resultierende Moment. Dadurch treten auch bei nahezu schlupffreiem Lauf bereits Antriebskräfte auf.

Im Bereich höherer Schlüpfen ist bei den gefüllten Materialien E6R und S6K nur noch ein geringer Anstieg über dem Schlupf  $S$  sichtbar. Der Übergang von Deformations- zu Gleitschlupf erfolgt innerhalb eines relativ kurzen Bereiches bei  $S \approx 20\%$ . Bei den ungefüllten Elastomeren NR und ES ist der Übergangsbereich wesentlich weiter ausgedehnt.

Die Abhängigkeit aller Kennfelder von der Normalkraft  $F_N$  ist deutlich weniger ausgeprägt als der Einfluss des Schlupfes  $S$ . Bei den gefüllten Elastomeren ist der Reibbeiwert bei Normalkräften  $F_N \geq 20\text{ N}$  konstant, nur für  $F_N = 10\text{ N}$  liegen die Messpunkte leicht unter den übrigen Messpunkten gleichen Schlupfes. Bei den ungefüllten Materialien ist für  $F_N > 20\text{ N}$  eine leicht fallende Abhängigkeit zu beobachten. Während sich diese Tendenz bei NR auf den gesamten Messbereich ausdehnt, ist sie bei ES nur im unteren Schlupfbereich  $S \leq 50\%$  auszumachen.

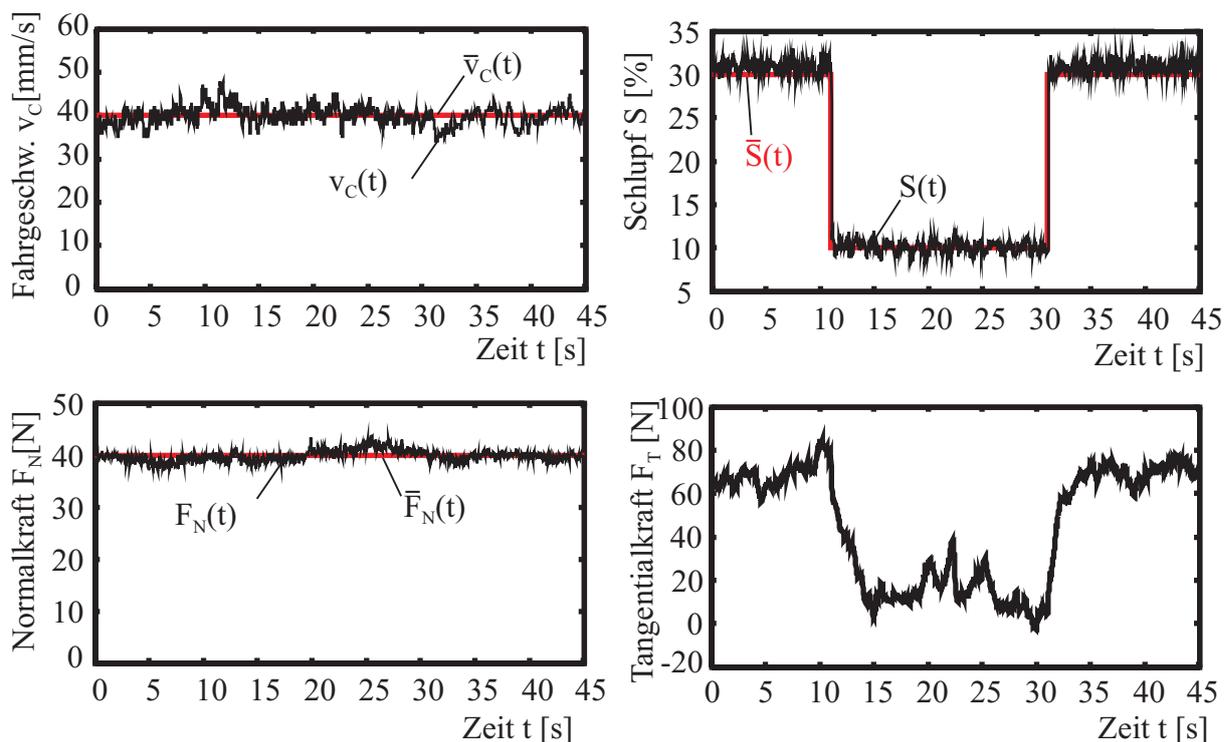
In den instationären Messungen soll die dynamische Abhängigkeit der Tangentialkraft  $F_T(t)$  von Sprüngen des Schlupfes  $S(t)$  beobachtet werden. Dafür ist ein Kennfeld vorteilhaft, dessen Material einen möglichst ausgedehnten Bereich steigender Tangentialkraft  $F_T$  in Abhängigkeit steigenden Schlupfes  $S$  aufweist. So können auch Schlupfsprünge mit kleineren Schlupfdifferenzen  $\Delta S$  stattfinden, deren Auswirkung auf den zeitlichen Tangentialkraftverlauf  $F_T(t)$  trotzdem noch messbar ist. Da die ungefüllten Elastomere einen ausgedehnteren Bereich steigender Schlupfwerte  $S$  aufweisen, eignen sie sich besser für die instationären Messungen. Wegen der insgesamt leicht höheren Werte  $F_T/F_N$  fällt die Wahl auf den Naturkautschuk NR.

### 3.3 Instationäre Messungen

Die in dieser Arbeit untersuchten instationären Messungen beschränken sich auf Sprunganregungen des Schlupfes  $S(t)$ , hierbei wird ausschließlich Längsschlupf ( $\alpha = 0^\circ$ ) betrachtet. Anhand der Sprungantwort der Tangentialkraft  $F_T(t)$  soll das im folgenden Kapitel 4

präsentierte mechanische Modell validiert werden. Voruntersuchungen haben gezeigt, dass die aussagekräftigsten Ergebnisse mit einer Fahrgeschwindigkeit  $v_C = 40 \text{ mm/s}$  und einer Normalkraft  $F_N = 40 \text{ N}$  erreicht werden. Aus diesem Grund sollen diese Einstellungen als Standard für alle instationären Untersuchungen dienen.

Die Verläufe der Größen Fahrgeschwindigkeit  $v_C(t)$ , Normalkraft  $F_N(t)$ , Schlupf  $S(t)$  sowie der Tangentialkraft  $F_T(t)$  während einer Messung sind in **Bild 3.5** gezeigt. Bei den geregelten Größen sind die Sollwerte mit einem Querbalken gekennzeichnet. Als Anregung des Systems werden bei konstanter Fahrgeschwindigkeit  $v_C = 40 \text{ mm/s}$  und Normalkraft  $F_N = 40 \text{ N}$  Schlupfsprünge  $S = 30 \% \rightarrow 10 \% \rightarrow 30 \%$  vorgegeben. Obwohl sich die Ergebnisse der Regelungen von Fahrgeschwindigkeit  $v_C(t)$ , Normalkraft  $F_N(t)$ , und Schlupf  $S(t)$  in akzeptablem Rahmen befinden, ist der resultierende Verlauf der Tangentialkraft  $F_T(t)$  von starken Abweichungen überlagert. Grundsätzlich ist im Tangentialkraftverlauf unmittelbar nach den Schlupfsprüngen ein Verzögerungsverhalten sichtbar. Es ist auch bereits die Tendenz auszumachen, dass das Folgeverhalten nach einem Sprung auf  $S = 10 \%$  träger ausfällt als nach einem Sprung auf  $S = 30 \%$ . Ziel der Untersuchungen dieses Kapitels ist die Quantifizierung dieser Effekte.



**Bild 3.5:** Zeitlicher Verlauf der Ist- und Sollgrößen von Fahrgeschwindigkeit  $v_C(t)$ , Normalkraft  $F_N(t)$  und Schlupf  $S(t)$  während eines doppelten Schlupfsprunges  $S = 30 \% \rightarrow 10 \% \rightarrow 30 \%$ . Sollgrößen sind durch einen Querbalken gekennzeichnet. Unten rechts ist der resultierende Verlauf der Tangentialkraft  $F_T(t)$  dargestellt

Da die überlagerten Abweichungen des Tangentialkraftverlaufes  $F_T(t)$  sich auch durch Variation der Reglerparameter als nicht eliminierbar erwiesen, sind sie im folgenden Abschnitt 3.3.1 als systematische Messabweichung interpretiert und auf diese Weise vom Nutzsignal getrennt worden. Anschließend wird das dynamische Verhalten des Rollkontaktes durch eine exponentielle Charakteristik angenähert. Die initiale Steigung des Exponentialverlaufes, auch als *Zeitkonstante* bezeichnet, dient dabei als ein Maß für die Dynamik des Systems, siehe Abschnitt 3.3.2. Das Kapitel schließt mit einer umfangreichen Studie der Abhängigkeit der Zeitkonstante des Tangentialkraftverlaufes  $F_T(t)$  von Start- und Zielniveau des vorangegangenen Schlupfsprunges.

### 3.3.1 Systematische Messabweichung

Bei Messungen mit unterschiedlichen Fahrgeschwindigkeiten  $v_C$  wurde festgestellt, dass die im vorangegangenen Unterkapitel beschriebenen systematischen Abweichungen des Tangentialkraftverlaufes  $F_T$  weggebunden sind. Der geringfügig unebene Betonboden der Versuchshalle führt bei den Messfahrten zu einer Wank- und Nickbewegung des Messmobils. Insbesondere überlagerte Wankbewegungen des Messmobils führen dazu, dass das Messrad nicht mehr über der gesamten Breite abrollt. Stattdessen erfolgt der Abrollvorgang größtenteils über eine der beiden Radschultern, was das Reibverhalten des Rades stark beeinflusst. Der gemessene Tangentialkraftverlauf  $F_T$  wird somit als Überlagerung der weggebundenen, systematischen Messabweichung  $F_T^{sys}$  und des stochastisch verrauschten wahren Messwertes  $\check{F}_T$  aufgefasst

$$F_T(S, t) = F_T^{sys}(S, s_C) + \check{F}_T(S, t) , \quad (3.3)$$

mit der Position  $s_C$  des Messrades. Für die in Gl. (3.3) betrachteten Größen wird die Abhängigkeit von der Normalkraft  $F_N$  der Übersichtlichkeit halber weggelassen, da die instationären Betrachtungen in diesem Abschnitt ausschließlich bei konstanter Normalkraft  $F_N = 40$  N stattfinden. Das stochastisch verrauschte Nutzsignal wiederum besteht aus der Überlagerung einer stochastischen Messabweichung  $\check{F}_T^{stoch}$  und dem reproduzierbaren wahren Messwert  $\check{F}_T^{Nutz}$

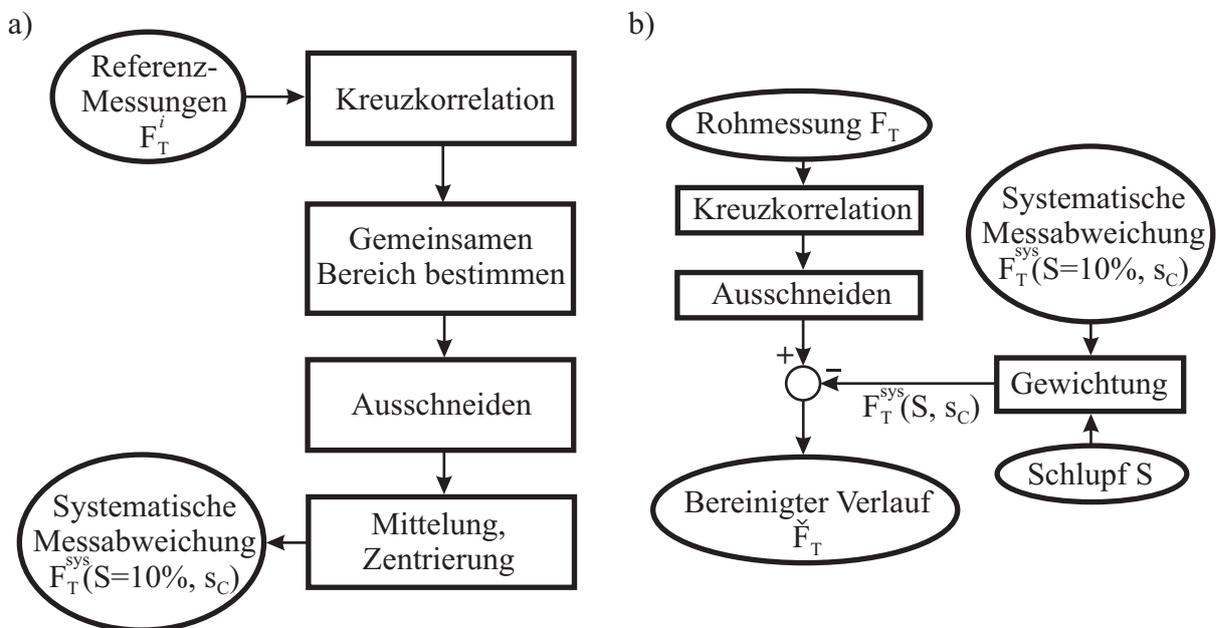
$$\check{F}_T(S, t) = \check{F}_T^{stoch}(t) + \check{F}_T^{Nutz}(S, t) . \quad (3.4)$$

Weitere Messungen unter Variation des Schlupfes  $S$  zeigen, dass die Schwankungen bei geringen Schlupfwerten größer ausfallen als bei einem höheren Schlupfniveau. Die Begründung hierzu erschließt sich aus dem Verlauf der  $\mu^*$ -Schlupf-Charakteristik. Die Charakteristik zeigt für geringe Schlupfwerte eine hohe Steigung, die dann entsprechend dem Sättigungsverhalten der Rollreibung stark abnimmt. Bei geringem Schlupf führt folglich eine Schlupfabweichung zu größeren Änderungen der Tangentialkraft  $F_T$  als eine vergleichbare Abweichung bei einem

höheren Schlupfniveau. Da der Betrag der systematischen Messabweichung für kleine Schlüpfen am größten ist, werden die Messungen bei einem Schlupf von  $S = 10\%$ , einer Normalkraft  $F_N = 40\text{ N}$  und einer Fahrgeschwindigkeit  $v_C = 40\text{ mm/s}$  durchgeführt. Für die gewichtete, systematische Messabweichung aus Gl. (3.3) wird dann der Ansatz

$$F_T^{sys}(S, s_C) = \tilde{F}'_T(S) F_T^{sys}(S = 10\%, s_C) \quad (3.5)$$

verwendet, mit der normierten Kernliniensteigung  $\tilde{F}'_T(S)$  und der systematischen, aus den Referenzmessungen ermittelten Messabweichung  $F_T^{sys}(S = 10\%, s_C(t))$ , bei einem Schlupfniveau von  $S = 10\%$ . Das Vorgehen zur Ermittlung der weggebundenen, systematischen Messabweichung  $F_T^{sys}(S, s_C)$  aus  $N$  Referenzmessungen zeigt **Bild 3.6 a)**. Die Bereinigung einer Messung  $F_T$  durch die Subtraktion der gewichteten systematischen Messabweichung  $F_T^{sys}(S, s_C)$  ist in **Bild 3.6 b)** zu sehen. Die aufgezeichneten Größen während einer der  $N$  Realisierungen seien mit  $S^i(t)$ ,  $F_N^i(t)$ ,  $F_T^i(t)$  und  $v_C^i(t)$  bezeichnet, mit  $i = 1, 2, \dots, N$ . Da die systematische Messabweichung  $F_T^{sys}(S, s_C)$  weggebunden ist, müssen die Tangentialkraftverläufe im Folgenden auf Wegbasis formuliert werden.

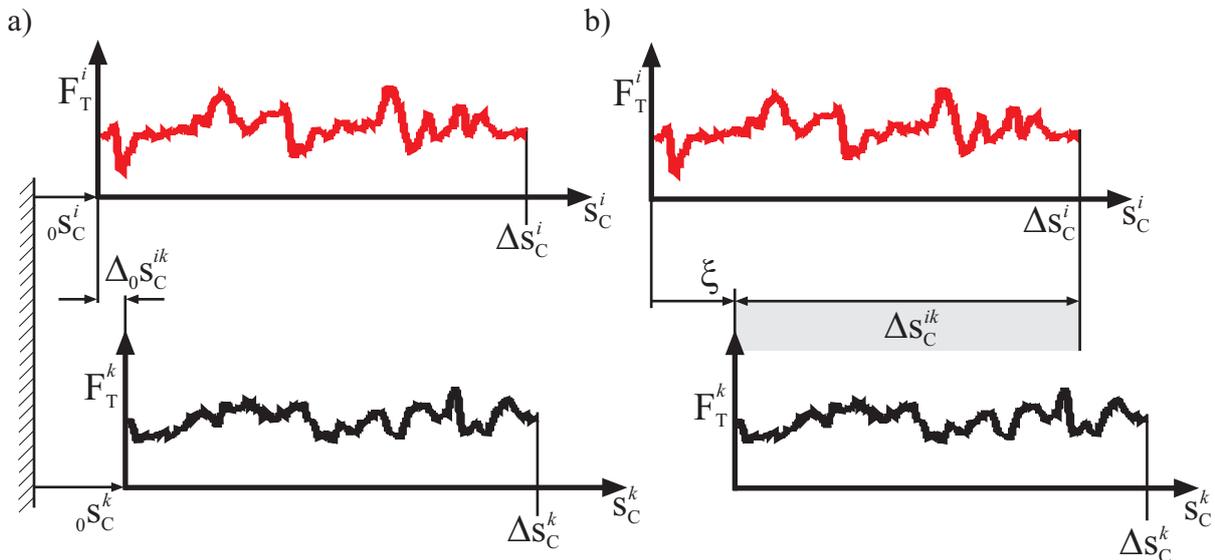


**Bild 3.6:** a) Vorgehen zur Isolation der systematischen Messabweichung  $F_T^{sys}(S = 10\%, s_C)$  bei einem Schlupfniveau von  $S = 10\%$ ; b) Bereinigung einer beliebigen Rohmessung  $F_T$  mit Hilfe der gewichteten systematischen Messabweichung  $F_T^{sys}(S, s_C)$

Durch das Integral

$$s_C^i(t) = \int_0^t v_C^i(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (3.6)$$

kann von der  $i$ -ten Realisierung der Fahrgeschwindigkeit  $v_C^i$  auf die Position  $s_C^i$  des Messmobils geschlossen werden. Danach steht die Tangentialkraft  $F_T^i(t(s_C^i))$  in Abhängigkeit der Messposition  $s_C^i$  zur Verfügung. Wird Gl. (3.6) über den gesamten Messzeitraum integriert, resultiert daraus die Länge  $\Delta s_C^i$  des  $i$ -ten Messabschnittes. Der Startpunkt der  $i$ -ten Messung auf der Trägerschiene sei mit  ${}_0s_C^i$  bezeichnet. Da ein wiederholtes Anfahren des Messmobils von exakt derselben Position auf der Trägerschiene nicht realisierbar ist, ist die Lage der einzelnen Startpunkte  ${}_0s_C^i$  zueinander verschoben, siehe **Bild 3.7 a)**. Die Verschiebung zweier Startpunkte  ${}_0s_C^i$  und  ${}_0s_C^k$  zueinander wird mit  $\Delta_0s_C^{ik}$  bezeichnet und ist a priori nicht bekannt. Sie soll hier mit Hilfe des Verfahrens der Kreuzkorrelation bestimmt werden. Danach erst kann der von allen Messungen gemeinsam abgedeckte Bereich bestimmt werden, über dem die  $N$  Messungen schließlich gemittelt werden. Zuvor werden die überstehenden Randbereiche der einzelnen Messungen abgeschnitten. Die Kreuzkorrelation der zwei gemessenen Tangentialkraftverläufe  $F_T^i(s_C^i)$  und  $F_T^k(s_C^k)$  ist in **Bild 3.7 b)** zu sehen. Um die Verschiebung der Verläufe zu ermitteln, wird der Verlauf von  $F_T^i$  gegenüber dem Verlauf von  $F_T^k$  um die Korrelationsvariable  $\xi$  verschoben. Für den Definitionsbereich der Korrelationsvariable gilt  $-\Delta s_C^k < \xi < \Delta s_C^i$ .



**Bild 3.7:** a) Die beiden Tangentialkraftverläufe  $F_T^k(s_C^k)$  und  $F_T^i(s_C^i)$  besitzen unterschiedliche Startpunkte  ${}_0s_C^i$  und  ${}_0s_C^k$ . Die Wegdifferenz zwischen den Startpunkten beträgt  $\Delta_0s_C^{ik}$ ; b) Prinzip der Kreuzkorrelation: Innerhalb des grau hinterlegten Überschneidungsbereiches  $\Delta s_C^{ik}$  wird der integrale Mittelwert für das Produkt  $F_T^i(s_C^k + \xi) F_T^k(s_C^k)$  ermittelt

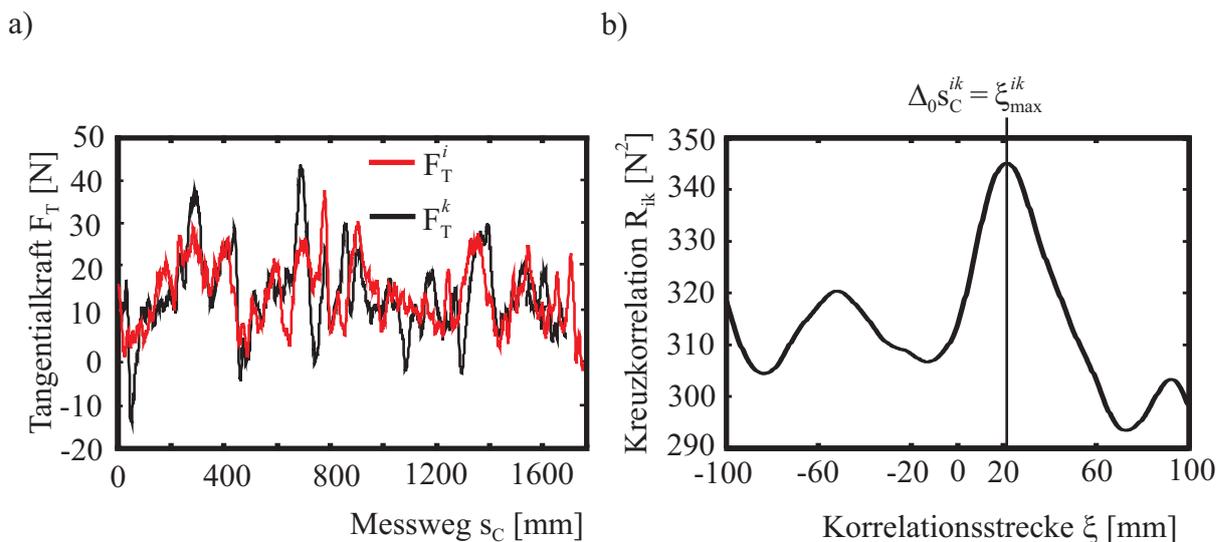
Durch die Verschiebung vermindert sich der überlappende Bereich  $\Delta s_C^{ik}$  der beiden Messungen  $F_T^i(s_C^i)$  und  $F_T^k(s_C^k)$ , der in **Bild 3.7 b)** grau hinterlegt ist. Die Länge dieses Überlappungsbereiches lässt sich durch die Fallunterscheidung

$$\Delta s_C^{ik} = \begin{cases} \Delta s_C^i - \xi & \text{für } \Delta s_C^k \geq \Delta s_C^i - \xi \\ \Delta s_C^k & \text{für } \Delta s_C^k < \Delta s_C^i - \xi \end{cases} \quad (3.7)$$

berechnen. Schließlich wird für jeden Wert der Korrelationsvariablen  $\xi$  die Kreuzkorrelation als integraler Mittelwert für das Produkt der beiden Tangentialkraftverläufe gebildet

$$R_{ik}(\xi) = \frac{1}{\Delta s_C^{ik}} \int_0^{\Delta s_C^{ik}} (F_T^i(s_C^k + \xi) F_T^k(s_C^k)) ds_C^k. \quad (3.8)$$

Der Verlauf der resultierenden Kreuzkorrelation  $R_{ik}(\xi)$  für die zwei in **Bild 3.8 a)** abgebildeten Tangentialkraftverläufe ist in **Bild 3.8 b)** zu sehen. In dem Verlauf der Korrelationsfunktion lässt sich ein klares Maximum bei  $\xi_{max}^{ik} \approx 20$  mm erkennen. Die Stelle des Maximums entspricht der gesuchten Wegdifferenz zwischen den gemessenen Abschnitten der Trägerschiene  $\Delta_0 s_C^{ik} = \xi_{max}^{ik}$ . Der Verlauf von  $F_T^k$  ist folglich gegenüber dem Verlauf von  $F_T^i$  um 20 mm nach rechts verschoben. Wird dieses Verfahren paarweise auf alle Messungen angewendet, stehen die Wegdifferenzen  $\Delta_0 s_C^{ik}$  für jede Kombination von Tangentialkraftverläufen zur Verfügung.



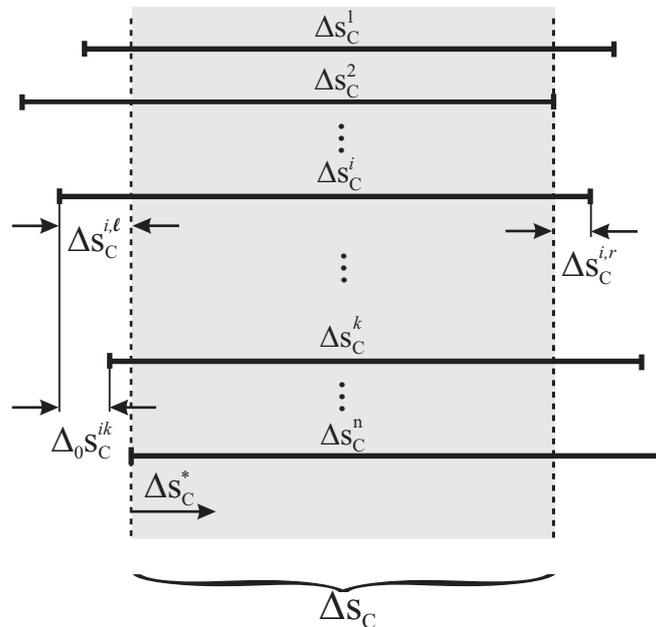
**Bild 3.8:** a) Zwei beispielhafte Tangentialkraftverläufe  $F_T^i(s_C^i)$  und  $F_T^k(s_C^k)$ ; b) Verlauf der zugehörigen Kreuzkorrelation  $R_{ik}(\xi)$  mit Maximum bei  $\xi_{max}^{ik}$

Die weggebundenen Verläufe aller Messungen werden anschließend entsprechend ihrer Weglänge  $\Delta s_C^i$  und der jeweiligen Verschiebung zu den anderen Messungen  $\Delta_0 s_C^{ik}$  in einer Übersicht gegenübergestellt, siehe **Bild 3.9**. Nun lässt sich auf einfache Weise der von allen Messungen gemeinsam abgedeckte Bereich  $\Delta s_C$  identifizieren. Er wird nach links durch den Messabschnitt begrenzt, der die höchste negative Verschiebung gegenüber allen anderen Messabschnitten besitzt. Die rechte Grenze des gemeinsam abgedeckten Bereiches wird analog durch den Messabschnitt mit der höchsten positiven Verschiebung festgelegt.

Wie in **Bild 3.9** zu sehen, überragen bis auf die zwei begrenzenden Messabschnitte alle anderen den gemeinsamen Bereich auf beiden Seiten. Der überstehende Bereich der  $i$ -ten Referenzmessung auf der linken Seite sei mit  $\Delta s_C^{i,l}$  bezeichnet, der auf der rechten Seite mit  $\Delta s_C^{i,r}$ . Der gemeinsame Bereich der  $i$ -ten Messung ist folglich durch  $\Delta s_C^i \leq s_C^i \leq \Delta s_C^i - \Delta s_C^{i,r}$  festgelegt. Für den gemeinsamen Bereich  $\Delta s_C$  wird schließlich eine neue Wegkoordinate  $s_C^*$  eingeführt, die mit der Wegkoordinate der  $i$ -ten Messung über die Transformation

$$s_C^i = s_C^* + \Delta s_C^{i,l} \quad (3.9)$$

verknüpft ist, und den Definitionsbereich  $0 \leq s_C^* \leq \Delta s_C$  besitzt.



**Bild 3.9:** Abschneiden der überstehenden Randbereiche  $\Delta s_C^{i,l}$  und  $\Delta s_C^{i,r}$ , um eine Mittelung der Tangentialkraftverläufe der Referenzmessungen über den gemeinsamen Bereich  $\Delta s_C$  durchzuführen

Der Ausschnitt des  $i$ -ten Tangentialkraftverlaufes lässt sich nun durch

$$\check{F}_T^i(0 \leq s_C^* \leq \Delta s_C) = F_T^i(\Delta s_C^{i,l} \leq s_C^i \leq \Delta s_C^i - \Delta s_C^{i,r}) \quad (3.10)$$

ausdrücken. Die gesuchte systematische Messabweichung bei einem Schlupf von  $S = 10 \%$  wird schließlich durch Mittelung der  $N$  ausgeschnittenen Tangentialkraftverläufe ermittelt

$$F_T^{sys}(S = 10\%, s_C^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \check{F}_T^i(s_C^*) - F_T^{stat}(S = 10\%) . \quad (3.11)$$

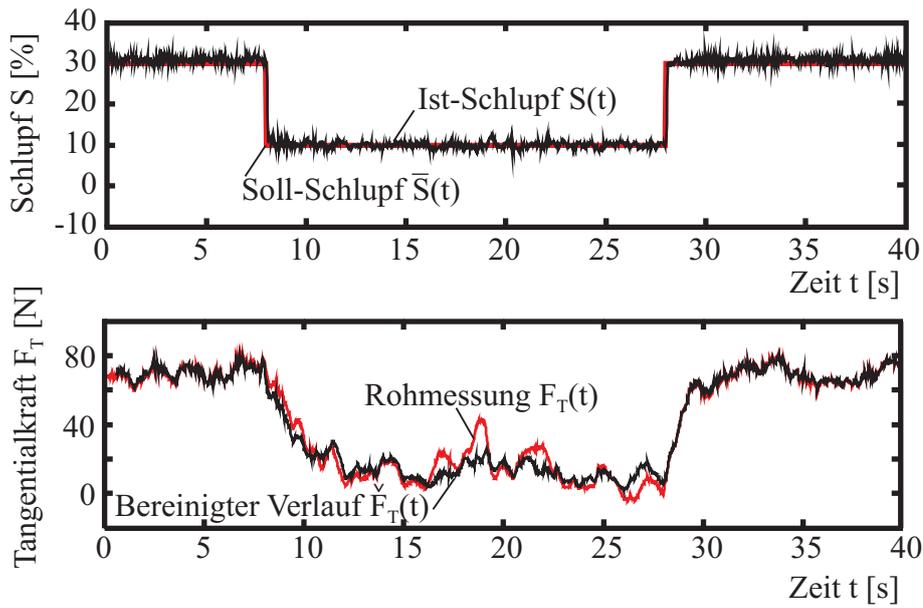
Außerdem wird der stationäre Wert der Tangentialkraft  $F_T^{stat}$  für einen Schlupf  $S = 10 \%$  subtrahiert, der dem Mittelwert der  $N$  Referenzmessungen entspricht. Damit ist die systematische Messabweichung zentriert und kann durch einen Vorfaktor an ein beliebiges Schlupfniveau  $S$  angepasst werden, siehe Gl. (3.5). Wie zu Beginn des Kapitels erläutert, ist das Ausmaß der systematischen Messabweichung im Tangentialkraftverlauf vom momentanen Schlupfniveau  $S$  abhängig. Es wird die Annahme getroffen, dass das Ausmaß der systematischen Messabweichung bezüglich des Schlupfes skaliert werden kann. Aus diesem Grund wird der für einen Schlupf  $S = 10 \%$  hergeleitete Ausdruck in Gl. (3.11) durch einen Vorfaktor auf ein variables Schlupfniveau erweitert. Dieser Vorfaktor

$$\check{F}'_T(S) = \frac{F'_T(S)}{F'_T(S = 10\%)} \quad (3.12)$$

wird als normierte Kennliniensteigung bezeichnet. Er berücksichtigt den sinkenden Einfluss der systematischen Messabweichung bei höheren Schlupfwerten. Werden Gl. (3.11) und Gl. (3.12) in Gl. (3.5) eingesetzt, kann eine beliebige Messung  $F_T$  von der systematischen Messabweichung bereinigt werden. Nachdem eine neue Messung  $F_T(S(t), t)$  aufgenommen wurde, wird sie im ersten Schritt gemäß Gl. (3.6) auf die zurückgelegte Wegstrecke bezogen, siehe **Bild 3.6** b). Der entstandene weggebundene Verlauf  $F_T(S(s_C), s_C)$  wird mit der auf den entsprechenden Schlupfverlauf  $S(s_C)$  bezogenen systematischen Messabweichung  $F_T^{sys}(S(s_C), s_C^*)$  korreliert, vergleiche Gl. (3.8). Ist die Korrelationsweite mit der maximalen Übereinstimmung der beiden Signale berechnet, wird analog zu Gl. (3.10) der durch die systematische Messabweichung abgedeckte Bereich  $\Delta s_C$  ausgeschnitten. Schließlich kann durch eine Umformung von Gl. (3.3) der bereinigte, weggebundene Tangentialkraftverlauf

$$\check{F}_T(S, s_C^*) = F_T(S, s_C^*) - F_T^{sys}(S, s_C^*) \quad (3.13)$$

berechnet werden. Durch Rück-Einsetzen des Wegverlaufes  $s_C^*(t)$  wird Gl. (3.13) schließlich wieder in Abhängigkeit der Zeit formuliert  $\check{F}_T(S(t), t)$ .



**Bild 3.10:** Ergebnis der Bereinigung der systematischen Messabweichung. Besonders im mittleren Bereich des Verlaufes ist eine systematische Messabweichung zu beobachten. Mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens lässt sich die Abweichung um den systematischen Anteil minimieren

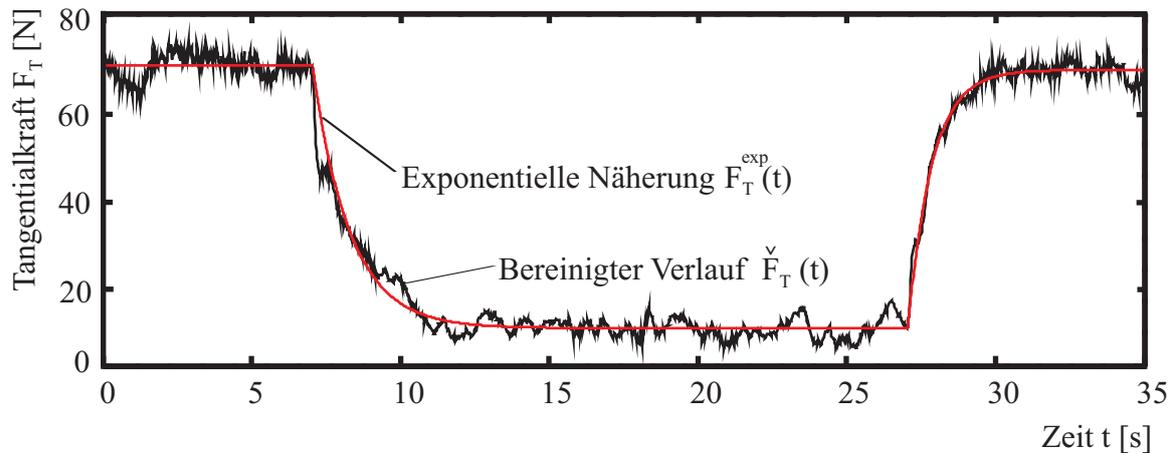
**Bild 3.10** stellt die Verläufe der Rohmessung  $F_T(t)$  und der bereinigten Tangentialkraft  $\check{F}_T(t)$  anhand eines Schlupfsprunges  $S = 30\% \rightarrow 10\% \rightarrow 30\%$  gegenüber. Besonders im mittleren Bereich der Messung beeinflusst die systematische Messabweichung die Qualität der Messung  $F_T(t)$ . In diesem Bereich gelingt es mit Hilfe des vorgestellten Korrekturverfahrens, die Abweichungen zu minimieren. So ist es schließlich möglich, die Zeitverläufe der instationären Messungen zuverlässig auszuwerten.

### 3.3.2 Bestimmung der Zeitkonstanten

Die Tangentialkraft  $F_T(t)$  folgt der Anregung durch den Schlupfsprung nicht spontan sondern verzögert. Für die experimentellen Studien des Rollkontaktes soll dieses dynamische Verhalten mit einer exponentiellen Sättigungscharakteristik angenähert werden. Dazu wird für die Antwort der Tangentialkraft unmittelbar nach dem Sprung zum Zeitpunkt  $T_{Spr}$  das Zeitverhalten

$$F_T^{exp}(t) = F_T^0 + (F_T^\infty - F_T^0) \left( 1 - e^{-\frac{(t-T_{Spr})}{\tau}} \right) \quad (3.14)$$

angesetzt. Der Parameter  $F_T^0$  kann anschaulich als der Funktionswert des Verlaufes zu Beginn des Sprunges  $t = T_{Spr}$  gedeutet werden. Durch den Parameter  $F_T^\infty$  wird die Asymptote des Sättigungsverlaufes markiert. Der dritte Parameter  $\tau$  ist mit der Anfangssteigung des Exponentialverhaltens verknüpft.



**Bild 3.11:** Vergleich eines bereinigten gemessenen Tangentialkraftverlaufes  $\check{F}_T(t)$  mit der angepassten Exponentialcharakteristik  $F_T^{exp}(t)$  bei einem Schlupfsprung  $S = 30\% \rightarrow 10\% \rightarrow 30\%$  und einer Radlast  $F_N = 40\text{ N}$ . Der exponentielle Ansatz ergibt eine gute Näherung an den gemessenen Verlauf

Motiviert durch die Regelungstechnik, in der die exponentielle Sättigungscharakteristik als Sprungantwort eines  $PT_1$ -Systems bekannt ist, soll in dieser Arbeit  $\tau$  als *Zeitkonstante* bezeichnet werden. Die Exponentialcharakteristik wird unter Variation der drei Parameter an den aus  $m$  Messpunkten bestehenden bereinigten Tangentialkraftverlauf  $\check{F}_T(t)$  angepasst. Als Optimierungskriterium kommt die *Least-Squares-Methode* zum Einsatz

$$\min_{F_T^0, F_T^\infty, \tau} \sum_{j=1}^m (F_T^{exp}(t_j) - \check{F}_T(t_j))^2, \quad (3.15)$$

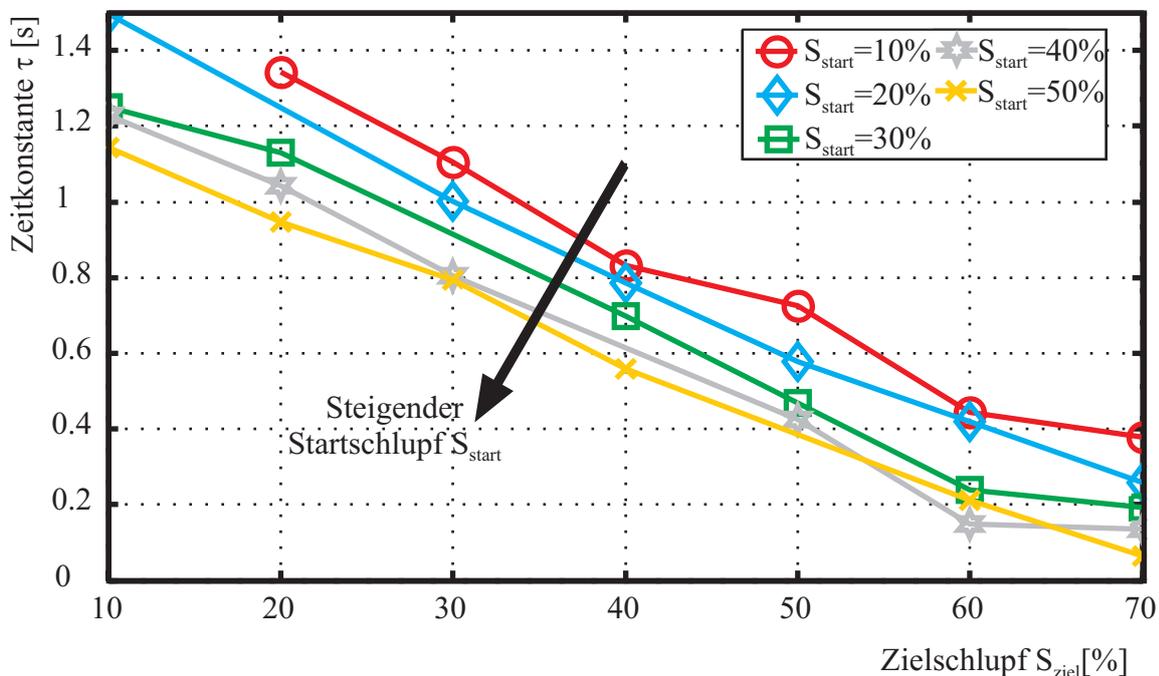
vgl. z. B. LAWSON UND HANSON [55] und HUFFEL [34]. Die benötigten Startwerte für die kraftbezogenen Parameter  $F_T^0$  und  $F_T^\infty$  können direkt aus der Betrachtung der Messung entnommen werden. Für die Zeitkonstante  $\tau$  wird als Anfangswert der Optimierung der geschätzte Wert  $\tau = 1\text{ s}$  verwendet. Sind die Startwerte vorgegeben, sucht ein Algorithmus nach der optimalen Kombination der drei Parameter, die gemäß der *Least-Squares-Methode* den Betrag der aufsummierten Fehlerquadrate minimal werden lässt. Das Ergebnis führt zu einer guten Übereinstimmung mit dem gemessenen Daten, siehe **Bild 3.11**.

### 3.3.3 Ergebnisse

In dieser Arbeit wird anhand von Schlupfsprüngen ein Einblick in das dynamische Verhalten des Rollkontaktes gegeben. Nachdem die gemessenen Tangentialkraftverläufe von dem systematischen Fehler bereinigt wurden, siehe Abschnitt 3.3.1, wurde das dynamische Verzögerungsverhalten der bereinigten Tangentialkraft  $\check{F}_T(t)$  durch einen exponentiellen Ver-

lauf angenähert, siehe Abschnitt 3.3.2. Die charakterisierende Zeitkonstante  $\tau$  wird als Maß der Gesamtdynamik des Systems interpretiert. Die Abhängigkeit der Systemdynamik vom Start- und Zielniveau des Schlupfsprunges soll an dieser Stelle im Rahmen einer Parameterstudie betrachtet werden. Dabei soll der Startwert des Schlupfsprunges mit  $S_{start}$ , das Zielniveau mit  $S_{ziel}$  bezeichnet werden. Bei einer Fahrgeschwindigkeit  $v_C = 40 \text{ mm/s}$  und einer konstanten Normalkraft von  $F_N = 40 \text{ N}$  wird wie bereits in den Unterkapiteln zuvor mit der Kontaktpaarung Naturkautschuk/Glas gemessen. Für das Start- sowie das Zielniveau des Schlupfsprunges wurden die Werte  $S_{start} = 10\%, 20\%, \dots, 70\%$  gewählt. Oberhalb von  $S = 70\%$  sind wegen der starken Beschädigung des Radkörpers keine wiederholbaren Messungen möglich. Wie bei den stationären Messungen in Abschnitt 3.2 wird ausschließlich bei Längsschlupf ( $\alpha = 0^\circ$ ) gemessen. Es wurden pro Messpunkt bis zu 10 Messungen durchgeführt und die resultierende Zeitkonstante  $\tau$  schließlich durch Mittelung der Einzelergebnisse ermittelt.

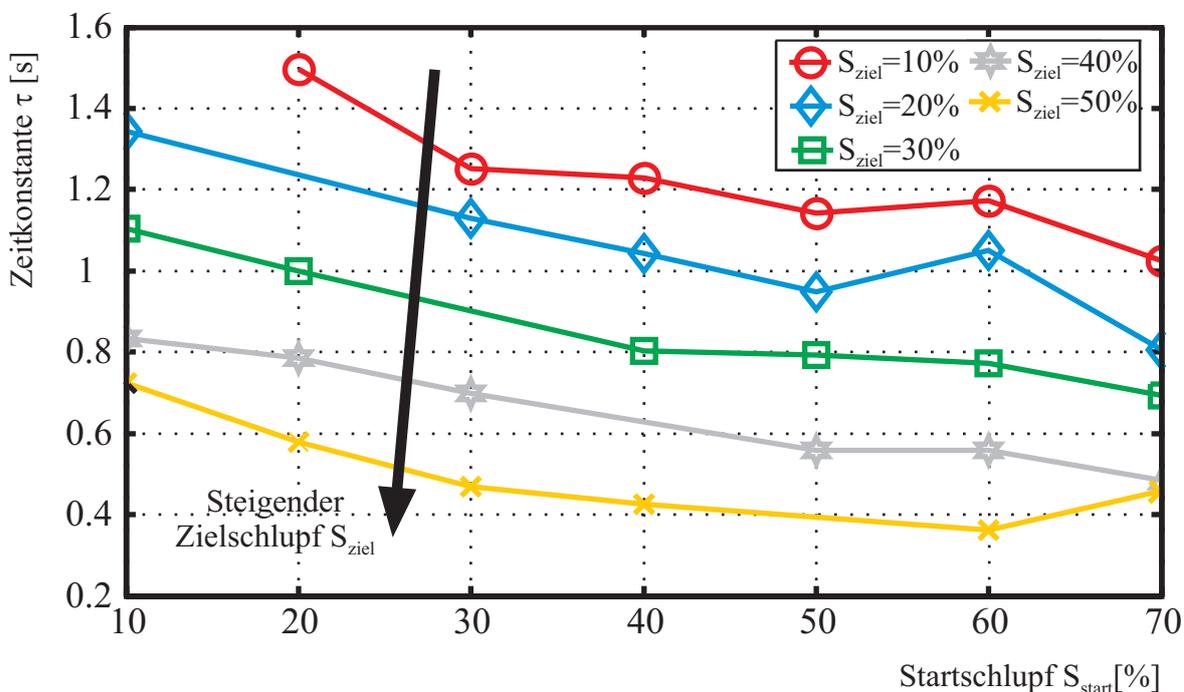
In der Auswertung soll nun die Abhängigkeit der Zeitkonstanten  $\tau$  vom Start- und Zielwert  $S_{start}$  bzw.  $S_{ziel}$  des Schlupfsprunges betrachtet werden. Für die getrennte Auswertung dieser beiden Abhängigkeiten werden die gemessenen Zeitkonstanten in zwei verschiedenen Diagrammen aufgetragen, siehe **Bild 3.12** und **Bild 3.13**. In **Bild 3.12** werden die Zeitkonstanten  $\tau$  in Abhängigkeit des Zielschlupfes  $S_{ziel}$  betrachtet. Der Startwert des Schlupfsprunges  $S_{start}$  wird dabei als Parameter behandelt.



**Bild 3.12:** Zeitkonstanten des bereinigten Tangentialkraftverlaufes  $\check{F}_T(t)$  nach Schlupfsprüngen  $S_{start} \rightarrow S_{ziel}$ . Auf der Abszisse ist das Zielniveau  $S_{ziel}$  des Schlupfsprunges aufgetragen, der Startwert  $S_{start}$  wird als Parameter betrachtet

So ist in dem Diagramm die Kurvenschar  $S_{start} = 10\%, 20\%, \dots, 50\%$  abgebildet, die einzelnen Verläufe bestehen aus Auf- und Abwärtssprüngen vom selben Ausgangsniveau  $S_{start}$ . Die kleinste Sprunghöhe beträgt  $\Delta S = 10\%$ . Für den „Nicht-Sprung“  $S_{start} = S_{ziel}$  wird keine Zeitkonstante ermittelt. Für alle Verläufe ist eine näherungsweise lineare, signifikant fallende Abhängigkeit für steigende Werte des Zielschlupfes  $S_{ziel}$  zu beobachten. Ein qualitativer Unterschied zwischen Auf- und Abwärtssprüngen ist nicht erkennbar, die Teilverläufe liegen auf einer gedachten Linie.

Des Weiteren ist eine schwächere Abhängigkeit der Zeitkonstante  $\tau$  vom Ausgangswert  $S_{start}$  des Schlupfsprunges zu beobachten. Die Tendenz ist in **Bild 3.12** durch einen Pfeil markiert. Die einzelnen Graphen verlaufen bis auf wenige Ausreißer annähernd parallel. Die Differenz zwischen den Verläufen mit dem Startwert  $S_{start} = 10\%$  und  $S_{start} = 50\%$  beträgt ungefähr  $\Delta\tau \approx 0,3\text{ s}$ . Die mittlere Steigung der Verläufe beträgt  $m_{\tau, ziel} \approx -2\text{ s}$ . Schlupfsprünge auf ein Niveau von  $S_{ziel} = 10\%$  ergeben eine Zeitkonstante zwischen  $\tau_{50,10} \approx 1,15\text{ s}$  und  $\tau_{20,10} \approx 1,45\text{ s}$ . Die geringsten Werte innerhalb des betrachteten Messbereiches bilden die Sprünge zu einem Zielniveau  $S_{ziel} = 70\%$ , mit den Zeitkonstanten  $\tau_{50,70} \approx 0,05\text{ s}$  und  $\tau_{10,70} \approx 0,4\text{ s}$ . Zur übersichtlicheren Betrachtung der Abhängigkeit der Zeitkonstanten  $\tau$  vom Ausgangswert des Schlupfsprunges ist in **Bild 3.13** der Startwert  $S_{start}$  auf der Abszisse aufgetragen, hier dient das Zielniveau  $S_{ziel}$  als Parameter.



**Bild 3.13:** Zeitkonstanten des bereinigten Tangentialkraftverlaufes  $\check{F}_T(t)$  nach Schlupfsprüngen  $S_{start} \rightarrow S_{ziel}$ . Auf der Abszisse ist das Startniveau  $S_{start}$  des Schlupfsprunges aufgetragen, der Zielwert  $S_{ziel}$  wird als Parameter betrachtet

Wie bereits angemerkt zeigt sich nun offensichtlich auch eine leicht fallende Abhängigkeit der Zeitkonstante  $\tau$  von dem Startniveau  $S_{start}$  des Schlupfsprunges. Im beobachteten Bereich kann auch diese Tendenz als annähernd linear betrachtet werden. Der entsprechende Steigungswert beträgt nur  $m_{\tau, start} \approx -0,8 \text{ s}$ , und liegt damit betragsmäßig deutlich unter dem in **Bild 3.12** identifizierten Steigungswert  $m_{\tau, ziel} \approx -2 \text{ s}$ .

## 4 Rollkontaktmodell

Im vorliegenden Kapitel wird ein mechanisches Modell präsentiert, das die im Experiment beobachtete globale Dynamik des Rollkontaktes abbildet. Außerdem liefert es einen Einblick in das lokale Reibverhalten; Verschiebungen, Spannungen und Relativgeschwindigkeiten innerhalb des Kontaktgebietes werden berechnet. Zunächst wird die Strukturmodellierung auf Basis der Finite-Elemente-Methode erläutert, die dabei entstehende hohe Anzahl der Freiheitsgrade wird mit Hilfe der Craig-Bampton-Kondensation stark verringert. In einer statischen Vorabberechnung werden schließlich die Anfangsbedingungen für die Zeitschrittintegration bestimmt.

Während der Zeitschrittintegration werden von den Knoten des Radmantels jeweils diejenigen ausgewählt, die sich aktuell in der Nähe des Kontaktgebietes befinden. Für diese Knoten wird bestimmt, ob sie sich im Kontakt mit der Fahrbahn befinden und ob in diesem Fall ein Haft- oder Gleitverhalten vorliegt. Als Ergebnis der Simulation liegen alle Zustandsgrößen an den bewegten Knotenpositionen vor.

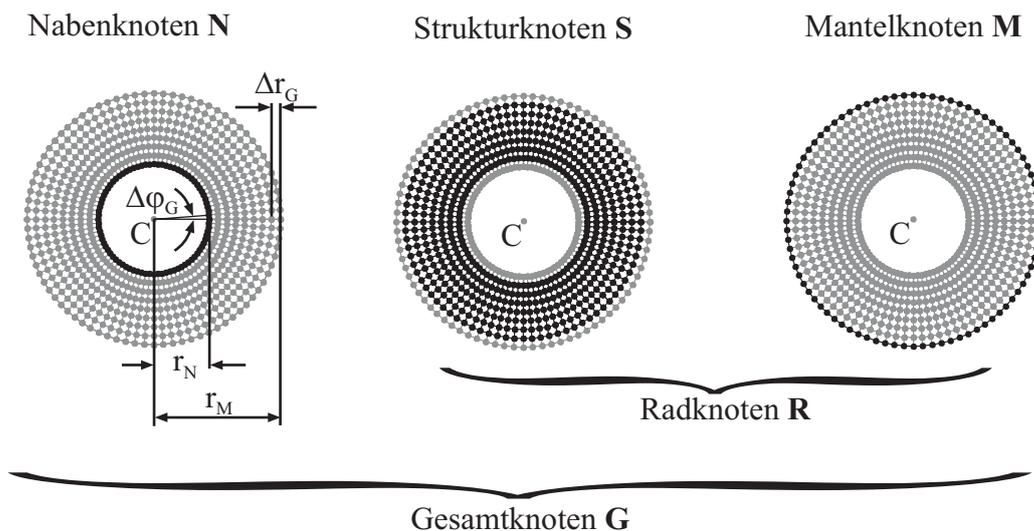
### 4.1 Effiziente Strukturmodellierung

Es sollen die für die Simulation des Strukturverhaltens benötigten Eingangs- und Systemmatrizen hergeleitet werden. Dazu werden zunächst relativkinematische Vorüberlegungen angestellt, um die Wirkung der vorgegebenen Führungsbewegung auf das Rad berücksichtigen zu können. Anschließend werden die Bewegungsgleichungen zur Annäherung des dynamischen Strukturverhaltens nach der Methode der Finiten Elemente aufgestellt. Ein gemischt statischer und modaler Reduktionsalgorithmus, der auf CRAIG/BAMPTON [16] zurückgeht, sorgt für eine starke Senkung der Anzahl der Freiheitsgrade und damit für eine Verkürzung der Berechnungszeit. Vor Beginn der Simulation wird in einer statischen Kontaktberechnung für eine vorgegebene globale Normalkraft die entsprechende vertikale Nabenverschiebung, sowie die Verteilung der kontaktierenden Knoten berechnet. Die Ergebnisse dieser Kontaktberechnung dienen als Anfangsbedingungen des dynamischen Rollkontaktmodells.

### 4.1.1 Kinematik

Der Verformungszustand des Rades soll durch die Finite-Elemente-Methode approximiert werden. Die verwendete 2D-Diskretisierung sei homogen, der Differenzwinkel zwischen benachbarten Knoten mit gleichem Abstand zum Mittelpunkt  $C$  des Rades betrage  $\Delta\varphi_G = \text{const}$ , der radiale Abstand der Knoten untereinander sei  $\Delta r_G = \text{const}$ . Durch die Festlegung des Nabenradius  $r_N$  und des Mantelradius  $r_M$  ist die Diskretisierung vollständig bestimmt, siehe **Bild 4.1**. Da für den Vergleich mit den Messungen aus den Linienlasten des Modells Knotenkräfte berechnet werden müssen, wird ferner die Breite des Rades  $b_g$  eingeführt. Die Menge aller Knoten der verwendeten Diskretisierung sei mit  $\mathbf{G}$  bezeichnet. Für die Reduktion von Freiheitsgraden und die Kontaktberechnung wird eine weitere Unterteilung der Knoten  $\mathbf{G}$  notwendig. **Bild 4.1** zeigt die Unterteilung der Knoten  $\mathbf{G}$  sowie die zur Festlegung der homogenen Diskretisierung benötigten Parameter.

Die inneren Knoten, deren Abstand vom Mittelpunkt  $C$  dem Nabenradius  $r_N$  entspricht, bilden die Menge der Nabenknoten  $\mathbf{N}$ . Die äußeren Knoten auf dem Radius  $r_M$  werden als Mantelknoten  $\mathbf{M}$  bezeichnet, alle übrigen Knoten zählen zu den Strukturknoten  $\mathbf{S}$ . Die Summe aus Strukturknoten  $\mathbf{S}$  und Mantelknoten  $\mathbf{M}$  bilde die Menge der Radknoten  $\mathbf{R}$ . Während eine Menge von Knoten mit einem fettgedruckten Großbuchstaben bezeichnet ist, sei die Anzahl der zugehörigen Knoten grundsätzlich mit dem entsprechenden normalgedruckten Großbuchstaben gekennzeichnet, die Anzahl der Freiheitsgrade sei durch den zugehörigen Kleinbuchstaben charakterisiert. So wird die Anzahl der Gesamtknoten  $\mathbf{G}$  mit  $G$  bezeichnet, die Anzahl der Freiheitsgrade in diesem zweidimensionalen System sei  $g = 2G$ .



**Bild 4.1:** Geometrische Parameter der Diskretisierung (links), Einteilung der Knoten  $\mathbf{G}$  in die Untermengen  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{R}$ . Der Mittelpunkt des Rades  $C$  stellt keinen Knoten der Diskretisierung dar

Die Gesamtbewegung  $\delta(t)$  des rollenden, verformten Rades wird unterteilt in eine vorgegebene Starrkörperbewegung  $\lambda(t)$  und kleine Bewegungen  $\Delta\delta(t)$  der Knoten relativ zueinander. Die kleinen Relativbewegungen können in der Simulation durch ein lineares FE-Modell angenähert werden. Die Summe aus Starrkörperbewegung  $\lambda(t)$  und Relativbewegungen  $\Delta\delta(t)$  ergibt die Endkonfiguration

$$\delta(t) = \lambda(t) + \Delta\delta(t) , \quad (4.1)$$

die die Bewegung materieller Punkte des Rades infolge äußerer Kräfte beschreibt. Die Überlagerung der Konfigurationen, sowie die Bewegung des Mittelpunktes  $C$  des Rades ist in **Bild 4.2** dargestellt. Die Starrkörperbewegung  $\lambda(t)$  ist durch die globalen Größen horizontale Nabengeschwindigkeit  ${}^I v_C(t)$  und Winkelgeschwindigkeit  $\Omega(t)$  festgelegt, die als Eingangsgrößen des Gesamtmodells gegeben sind. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  steht das Rad still  $\Omega(t = 0) = {}^I v_C(t = 0) = 0$ . In vertikaler Richtung gibt die Naberverschiebung  ${}^I w_C(t)$  die Bewegung des Rades vor. Diese ist indirekt durch die Normalkraft  $f_N(t)$  im Kontakt bestimmt und wird durch eine Rückführung innerhalb des Modells realisiert. Im Hinblick auf die FE-Modellierung des Systems wird die Starrkörperbewegung  $\lambda(t)$  auch als Referenzkonfiguration bezeichnet, die als Basis für die dynamischen Relativbewegungen  $\Delta\delta(t)$  dient.

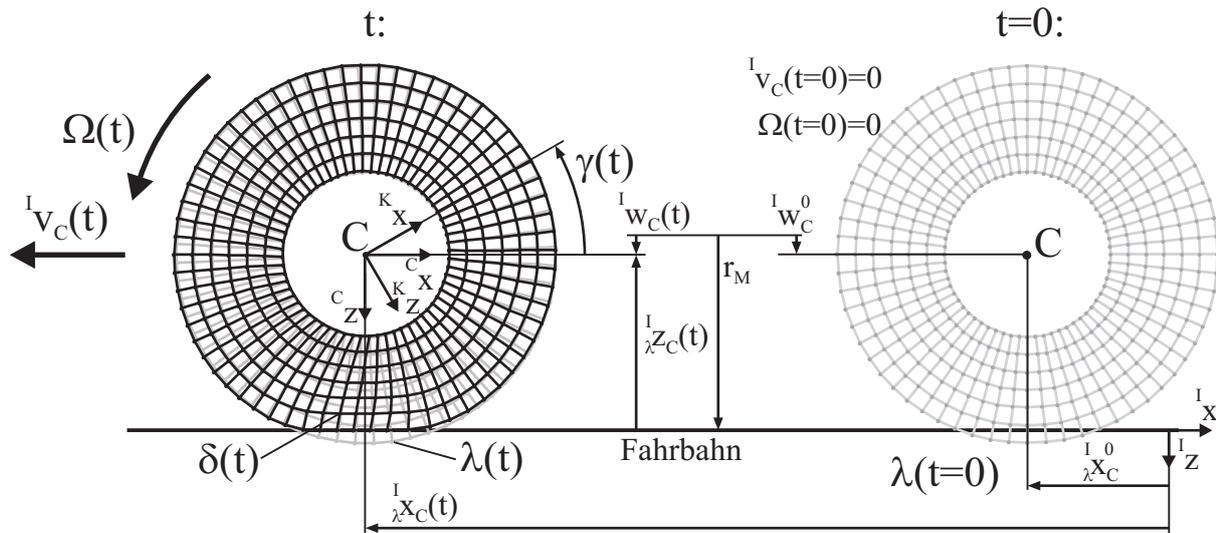
Zur Beschreibung der Bewegungen dient das inertielle Koordinatensystem  $I$ , das fest mit der ruhenden Fahrbahn verbunden ist. Des Weiteren werden die begleitenden, im Mittelpunkt des Rades  $C$  befestigten Koordinatensysteme  $C$  und  $K$  eingeführt. Das rein translatorisch bewegte Koordinatensystem  $C$  eignet sich für die Beschreibung des Kontaktes, das rotierende, körperfeste Koordinatensystem  $K$  wird für die Beschreibung der relativen Strukturbewegung verwendet. Die Verdrehung zwischen dem körperfesten Koordinatensystem  $K$  und dem Inertialsystem  $I$  bzw. dem zu jedem Zeitpunkt parallel gerichteten begleitenden Koordinatensystem  $C$  entspricht dem Rotationswinkel des Rades

$$\gamma(t) = \int_0^t \Omega(\bar{t}) d\bar{t} , \quad (4.2)$$

der sich aus der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega(t)$  des Rades ergibt. Die Transformation zwischen den Koordinatensystemen  $I$  bzw.  $C$  und dem körperfesten Koordinatensystem  $K$  erfolgt durch die Elementardrehmatrizen

$$\underline{\mathbf{A}}^{IK} = \underline{\mathbf{A}}^{CK} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma(t)) & \sin(\gamma(t)) \\ -\sin(\gamma(t)) & \cos(\gamma(t)) \end{bmatrix} . \quad (4.3)$$

Die inversen Drehmatrizen  $\underline{\mathbf{A}}^{KI}$  bzw.  $\underline{\mathbf{A}}^{KC}$  lassen sich aufgrund der Orthogonalität der Drehtransformation jeweils durch die Transponierte von Gl. (4.3) ausdrücken.



**Bild 4.2:** Rad in der Ausgangsposition  $t = 0$  (rechts) und rollend, zum Zeitpunkt  $t$  (links). Die Referenzkonfiguration  $\lambda(t)$  bildet die reine Starrkörperbewegung ab. Werden die relativen Verschiebungen  $\Delta\delta(t)$  addiert, ergibt sich die Endkonfiguration  $\delta(t)$

Als Bezugspunkt der Starrkörperbewegung  $\lambda(t)$  dient der Mittelpunkt  $C$  des Rades. Der translatorische Anteil der Bewegung, betrachtet aus dem Inertialsystem  $I$ , entspricht somit der Bewegung des Bezugspunktes  $C$

$${}^I_{\lambda}\underline{\boldsymbol{x}}_C(t) = \begin{bmatrix} {}^I_{\lambda}x_C(t) \\ {}^I_{\lambda}z_C(t) \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

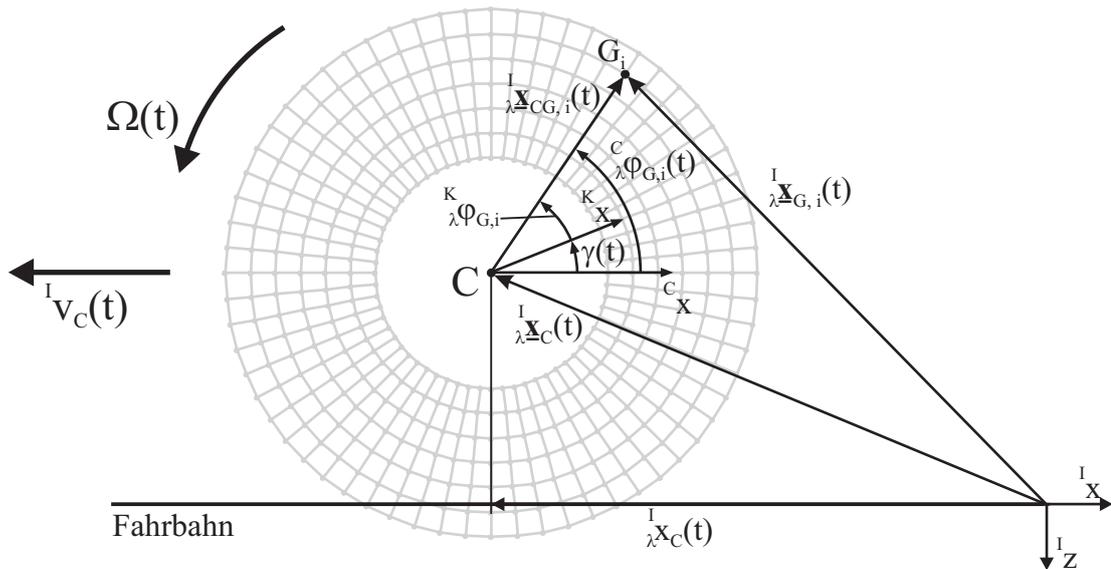
wobei sich der Anteil in  ${}^Ix$ -Richtung durch Integration der gegebenen horizontalen Nabengeschwindigkeit

$${}^I_{\lambda}x_C(t) = {}^I_{\lambda}x_C^0 + \int_0^t {}^I v_C(\bar{t}) d\bar{t} \quad (4.5)$$

berechnen lässt. Die initiale Koordinate  ${}^I_{\lambda}x_C^0$  stellt eine beliebige Anfangsposition dar. Der vertikale Bewegungsanteil in Gl. (4.4) ist durch die vom Regler ermittelte Naberverschiebung vorgegeben, siehe Abschnitt 4.2.3.1,

$${}^I_{\lambda}z_C(t) = -r_M + {}^I w_C(t). \quad (4.6)$$

Der Startwert der vertikalen Naberverschiebung beträgt  ${}^I w_C(t=0) = {}^I w_C^0$ , er wird in einer statischen Vorberechnung ermittelt, siehe Abschnitt 4.1.4.



**Bild 4.3:** Beschreibung der Referenzbewegung  ${}^I\mathbf{x}_{G,i}(t)$  des beliebigen Knotens  $G_i$  durch Überlagerung von Translationsanteil  ${}^I\mathbf{x}_C(t)$  und Rotationsanteil  ${}^I\mathbf{x}_{CG,i}(t)$

Alle erläuterten Bewegungsgrößen des Mittelpunkts  $C$  des Rades sind in **Bild 4.2** illustriert. Die Referenzbewegung eines beliebigen Knotens  $G_i$  innerhalb der Menge der gesamten Knoten  $\mathbf{G}$  der Diskretisierung besteht aus einer Überlagerung der Bewegung des Bezugspunktes  $C$ , siehe Gl. (4.4), und eines Rotationsanteils  ${}^I\mathbf{x}_{CG,i}(t)$ , der durch die Transformation der konstanten körperfesten Koordinaten  ${}^K\mathbf{x}_{G,i}$  von  $G_i$  ausgedrückt wird

$${}^I\mathbf{x}_{G,i}(t) = \begin{bmatrix} {}^I\lambda x_{G,i}(t) \\ {}^I\lambda z_{G,i}(t) \end{bmatrix} = {}^I\mathbf{x}_C(t) + {}^I\mathbf{x}_{CG,i}(t) = {}^I\mathbf{x}_C(t) + \mathbf{A}^{IKK} {}^K\mathbf{x}_{G,i}. \quad (4.7)$$

Die Überlagerung der Referenzbewegung  ${}^I\mathbf{x}_{G,i}(t)$  eines Knotens  $G_i$  aus Translationsanteil  ${}^I\mathbf{x}_C(t)$  und Rotationsanteil  ${}^I\mathbf{x}_{CG,i}(t)$  ist in **Bild 4.3** zu sehen. Innerhalb der Referenzkonfiguration  $\lambda(t)$  sind die körperfesten Koordinaten  ${}^K\mathbf{x}_{G,i}$  des Knotens  $G_i$  zeitlich konstant, ebenso wie seine körperfeste Winkelkoordinate  ${}^K\varphi_{G,i}$ . Die Winkelkoordinate des Knotens  $G_i$  innerhalb des begleitenden Koordinatensystems  $C$  lässt sich durch Addition des Rotationswinkels  $\gamma(t)$  berechnen

$${}^C\varphi_{G,i}(t) = {}^K\varphi_{G,i} + \gamma(t). \quad (4.8)$$

Ausgehend von  $\lambda(t)$  sollen nur noch relativ kleine Verschiebungen  ${}^I\mathbf{u}_{G,i}(t)$  stattfinden, die mit einem linearen dynamischen FE-Modell abbildbar sind. Wird diese Differenzkonfiguration  $\Delta\delta(t)$  entsprechend Gl. (4.1) zu den Koordinaten des Knotens  $G_i$  der Referenzkonfiguration  $\lambda(t)$  aus Gl. (4.7) addiert, ergeben sich die Koordinaten des Knotens  $G_i$  innerhalb der

Endkonfiguration  $\delta(t)$

$${}^I_{\delta}\underline{\mathbf{x}}_{G,i}(t) = \begin{bmatrix} {}^I_{\delta}x_{G,i}(t) \\ {}^I_{\delta}z_{G,i}(t) \end{bmatrix} = {}^I_{\lambda}\underline{\mathbf{x}}_{G,i}(t) + {}^I\underline{\mathbf{u}}_{CG,i}(t) = {}^I_{\lambda}\underline{\mathbf{x}}_C(t) + \underline{\mathbf{A}}^{IKK}_{\lambda}\underline{\mathbf{x}}_{G,i} + {}^I\underline{\mathbf{u}}_{G,i}(t). \quad (4.9)$$

Um die Beschleunigung des Knotens  $G_i$  zu erhalten, wird Gl. (4.9) zweimal nach der Zeit differenziert

$${}^I_{\delta}\ddot{\underline{\mathbf{x}}}_{G,i}(t) = {}^I_{\lambda}\ddot{\underline{\mathbf{x}}}_C(t) + \left( \Omega^2(t) \underline{\dot{\mathbf{A}}}^{IK} + \dot{\Omega}(t) \underline{\ddot{\mathbf{A}}}^{IK} \right) {}^K_{\lambda}\underline{\mathbf{x}}_{G,i} + {}^I\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{G,i}(t). \quad (4.10)$$

Dieser Beschleunigungsterm soll im folgenden Abschnitt in die Bewegungsgleichung des Rades eingebunden werden. Diese Bewegungsgleichung ist im körperfesten Koordinatensystem ausgedrückt, da die Simulation aus Gründen der numerischen Effizienz ebenfalls im körperfesten System stattfindet. Daher wird der Beschleunigungsterm aus Gl. (4.10) mit Hilfe der Drehmatrix  $\underline{\mathbf{A}}^{KI}$  vom Inertialsystem  $I$  ins körperfeste Koordinatensystem  $K$  überführt. Vorher werden zur Vereinfachung die Matrizenprodukte

$$\underline{\mathbf{E}}^t = \underline{\mathbf{A}}^{KI} \underline{\dot{\mathbf{A}}}^{IK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{E}}^r = \underline{\mathbf{A}}^{KI} \underline{\ddot{\mathbf{A}}}^{IK} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

eingeführt, die als Tangential- bzw. Radialmatrix bezeichnet werden. Anschließend kann die inertielle Beschleunigung von  $G_i$  aus Gl. (4.10) innerhalb des körperfesten Koordinatensystems  $K$  dargestellt werden

$${}^K_{\delta}\ddot{\underline{\mathbf{x}}}_{G,i}(t) = \underline{\mathbf{A}}^{KII}_{\lambda}\ddot{\underline{\mathbf{x}}}_C(t) + \left( \dot{\Omega}(t) \underline{\mathbf{E}}^t + \Omega^2(t) \underline{\mathbf{E}}^r \right) {}^K_{\lambda}\underline{\mathbf{x}}_{G,i} + {}^K\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{G,i}(t). \quad (4.12)$$

Die für den beliebigen Punkt  $G_i$  der Diskretisierung hergeleitete Gl. (4.12) soll schließlich in eine matrizielle Form übertragen werden, die die Beschleunigungen aller Knoten  $\mathbf{G}$  des Rades ausdrückt. Dazu werden die Größen  ${}^K_{\delta}\ddot{\underline{\mathbf{x}}}_{G,i}(t)$ ,  ${}^K_{\lambda}\underline{\mathbf{x}}_{G,i}(t)$  und  ${}^K\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{G,i}(t)$  zu den  $[g \times 1]$ -Spaltenmatrizen  ${}^K_{\delta}\ddot{\underline{\mathbf{x}}}_g$ ,  ${}^K_{\lambda}\underline{\mathbf{x}}_g$  und  ${}^K\ddot{\underline{\mathbf{u}}}_g$  zusammengefasst. Darin werden die Einzelgrößen nach der Reihenfolge des Zählindex  $i$  angeordnet, beispielsweise

$${}^K_{\delta}\ddot{\underline{\mathbf{x}}}_g = \left[ {}^K_{\delta}\ddot{\underline{\mathbf{x}}}_{G,1}(t), {}^K_{\delta}\ddot{\underline{\mathbf{x}}}_{G,2}(t), {}^K_{\delta}\ddot{\underline{\mathbf{x}}}_{G,3}(t), \dots, {}^K_{\delta}\ddot{\underline{\mathbf{x}}}_{G,G-1}(t), {}^K_{\delta}\ddot{\underline{\mathbf{x}}}_{G,G}(t) \right]^T. \quad (4.13)$$

Durch die Anordnung der Spaltenmatrizen in Gl. (4.13) ergibt sich die Aufstellung der analog

im  $[g \times g]$ -Format benötigten globalen Tangential- und Radialmatrix

$$\underline{\mathbf{E}}_g^t = \mathbf{diag}(\underline{\mathbf{E}}^t, \underline{\mathbf{E}}^t, \dots, \underline{\mathbf{E}}^t) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{E}}_g^r = \mathbf{diag}(\underline{\mathbf{E}}^r, \underline{\mathbf{E}}^r, \dots, \underline{\mathbf{E}}^r) \quad (4.14)$$

durch Anordnung der  $[2 \times 2]$ -Einzelmatrizen  $\underline{\mathbf{E}}^t$  bzw.  $\underline{\mathbf{E}}^r$  aus Gl. (4.11) jeweils entlang der Diagonale. Da die Beschleunigung  ${}^I_{\lambda} \ddot{\mathbf{x}}_C(t)$  des Bezugspunktes  $C$  als translatorischer Bewegungsanteil auf alle Knoten  $\mathbf{G}$  wirkt, wird noch eine zusätzliche Matrix  $\underline{\mathbf{E}}_g^C$  benötigt, die die Beschleunigung des Mittelpunktes  $C$  entsprechend der Richtungskomponenten auf die Knoten  $\mathbf{G}$  verteilt. Deswegen wird analog zu Gl. (4.11) die  $[2 \times 2]$  Einheitsmatrix

$$\underline{\mathbf{E}}^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

eingeführt. Die zugeordnete globale  $[g \times 2]$ -Matrix lautet dann

$$\underline{\mathbf{E}}_g^C = [\underline{\mathbf{E}}^C, \underline{\mathbf{E}}^C, \dots, \underline{\mathbf{E}}^C]^T. \quad (4.16)$$

Schließlich kann Gl. (4.12) mit Hilfe von Gl. (4.13), Gl. (4.14) und Gl. (4.16) in matrizieller Form formuliert werden

$${}^K_{\delta} \ddot{\mathbf{x}}_g = \underline{\mathbf{E}}_g^C \underline{\mathbf{A}}^{KII} {}^{\lambda} \ddot{\mathbf{x}}_C(t) + \left( \dot{\Omega}(t) \underline{\mathbf{E}}_g^t + \Omega^2(t) \underline{\mathbf{E}}_g^r \right) {}^K_{\lambda} \mathbf{x}_g + {}^K \dot{\mathbf{u}}_g. \quad (4.17)$$

Damit sind die auf sämtliche Knoten  $\mathbf{G}$  wirkenden Beschleunigungen innerhalb des körperfesten Koordinatensystems  $K$  formuliert. Die Knotenbeschleunigungen  ${}^K_{\delta} \ddot{\mathbf{x}}_g$  beinhalten auch die aus der Starrkörperbewegung  $\lambda(t)$  resultierenden radialen und tangentialen Führungsbeschleunigungen, die wegen des transienten Anregungsprozesses nicht vernachlässigt werden dürfen.

## 4.1.2 Strukturdynamik

Für die Berechnung der dynamischen elastischen Verschiebungen  ${}^K \mathbf{u}_g$ , die ausgehend von der Referenzkonfiguration  $\lambda(t)$  für die Berechnung der Endkonfiguration  $\delta(t)$  benötigt werden, siehe Gl. (4.12), wird ein Finite-Elemente-Modell verwendet. Der 2D-Modellierung liegt die bereits in Abschnitt 4.1.1 eingeführte homogene Diskretisierung  $\mathbf{G}$  zu Grunde. Verwendet werden 4-Knoten-Elemente mit jeweils zwei Verschiebungs-Freiheitsgraden je Knoten. Es wird ein ebener Spannungszustand („plane stress“) angenommen. Die Dichte  $\varrho_g$  sei konstant, des Weiteren wird ein lineares Materialgesetz bestehend aus konstantem Elastizitätsmodul  $E_g$  und Quasi-Inkompressibilität  $\nu_g = 0.49$  angenommen.

Zunächst werden keine Randbedingungen definiert. Die geometrische Modellierung, das Meshing und die Assemblierung der globalen Systemmatrizen erfolgen innerhalb des kommerziellen Finite-Element-Programmes ANSYS [4]. Schließlich stehen Steifigkeitsmatrix  ${}^K \underline{\mathbf{K}}_g$  und Massenmatrix  ${}^K \underline{\mathbf{M}}_g$  in körperfester Formulierung für die weitere Bearbeitung zur Verfügung. Die benötigte Dämpfungsmatrix wird durch einen Rayleigh-Ansatz

$${}^K \underline{\mathbf{D}}_g = \alpha {}^K \underline{\mathbf{M}}_g + \beta {}^K \underline{\mathbf{K}}_g \quad (4.18)$$

erzeugt. Die Bewegungsgleichung des Rades wird im Inertialsystem  $I$  aufgestellt, da nur hier die wirkenden Beschleunigungen verfügbar sind. An dieser Stelle wird allerdings auf die Darstellung der Bewegungsgleichung im Inertialsystem  $I$  verzichtet. Da die Simulation im körperfesten System stattfindet, wird hier von der ins körperfeste Koordinatensystem  $K$  transformierten Bewegungsgleichung ausgegangen. Die für eine Transformation benötigten globalen  $[g \times g]$ -Drehmatrizen  $\underline{\mathbf{A}}_g^{IK}$  bzw.  $\underline{\mathbf{A}}_g^{KI}$  werden entsprechend der Zusammensetzung des globalen Freiheitsgradvektors in Gl. (4.13) durch Anordnung der  $[2 \times 2]$ -Elementardrehmatrix in Gl. (4.3) berechnet

$$\underline{\mathbf{A}}_g^{IK} = \mathbf{diag} (\underline{\mathbf{A}}^{IK}, \underline{\mathbf{A}}^{IK}, \dots, \underline{\mathbf{A}}^{IK}) , \quad (4.19)$$

weiterhin gilt auch hier  $\underline{\mathbf{A}}_g^{KI} = (\underline{\mathbf{A}}_g^{IK})^T$ . Die transformierte Bewegungsgleichung lautet schließlich

$${}^K \underline{\mathbf{M}}_g {}^K \delta \ddot{\underline{\mathbf{x}}}_g + {}^K \underline{\mathbf{D}}_g {}^K \dot{\underline{\mathbf{u}}}_g + {}^K \underline{\mathbf{K}}_g {}^K \underline{\mathbf{u}}_g = {}^K \underline{\mathbf{f}}_g^M , \quad (4.20)$$

wobei  ${}^K \underline{\mathbf{f}}_g^M$  den Vektor der Kontaktlasten darstellt, die auf die Mantelknoten des Rades wirken. Aufgrund der ebenen Modellierung besitzt er die Dimension einer Linienlast. Für die Beschleunigung  ${}^K \delta \ddot{\underline{\mathbf{x}}}_g$  wird nun die in Abschnitt 4.1.1 hergeleitete Gl. (4.17) eingesetzt und die rechte Seite angepasst

$${}^K \underline{\mathbf{M}}_g {}^K \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_g + {}^K \underline{\mathbf{D}}_g {}^K \dot{\underline{\mathbf{u}}}_g + {}^K \underline{\mathbf{K}}_g {}^K \underline{\mathbf{u}}_g = {}^K \underline{\mathbf{f}}_g^M + {}^K \underline{\mathbf{f}}_g^G , \quad (4.21)$$

mit dem Vektor des aus der Führungsbeschleunigung resultierenden Anteils der Rechten Seite

$${}^K \underline{\mathbf{f}}_g^G = -{}^K \underline{\mathbf{M}}_g \left( \underline{\mathbf{E}}_g^C \underline{\mathbf{A}}^{KI} \lambda \ddot{\underline{\mathbf{x}}}_C(t) + \left( \dot{\Omega}(t) \underline{\mathbf{E}}_g^t + \Omega^2(t) \underline{\mathbf{E}}_g^r \right) \lambda \underline{\mathbf{x}}_g \right) . \quad (4.22)$$

Das in Gl. (4.21) beschriebene System ist noch ungefesselt. Da eine Referenzbewegung aufgeprägt werden soll, müssen noch Randbedingungen gesetzt werden. Die Bewegungsvorgabe geschieht im realen System durch eine starre Achse, die fest mit der Nabe der Radstruktur verbunden ist. Durch diese starre Verbindung entspricht die Bewegung der Nabenknoten der Referenzbewegung  ${}^K_{\delta} \underline{\boldsymbol{x}}_n = {}^K_{\lambda} \underline{\boldsymbol{x}}_n$ , siehe Gl. (4.9). Dies führt auf

$${}^K \underline{\boldsymbol{u}}_n = {}^K \underline{\dot{\boldsymbol{u}}}_n = {}^K \underline{\ddot{\boldsymbol{u}}}_n = \underline{\mathbf{0}}. \quad (4.23)$$

Die entsprechenden  $n$  Zeilen und Spalten der Systemmatrizen werden somit aus dem Gleichungssystem gestrichen. Als Zustandsvariablen bleiben die  $r$  Verschiebungen  $\underline{\boldsymbol{u}}_r$  der Radknoten  $\mathbf{R}$ , den zusammengefassten Struktur- und Mantelknoten, vergleiche **Bild 4.1**. Somit lässt sich abschließend die Differentialgleichung der Dimension  $r$  zusammenfassen zu

$${}^K \underline{\mathbf{M}}_r {}^K \underline{\ddot{\boldsymbol{u}}}_r + {}^K \underline{\mathbf{D}}_r {}^K \underline{\dot{\boldsymbol{u}}}_r + {}^K \underline{\mathbf{K}}_r {}^K \underline{\boldsymbol{u}}_r = {}^K \underline{\boldsymbol{f}}_r^M + {}^K \underline{\boldsymbol{f}}_r^G. \quad (4.24)$$

Die beiden Spaltenmatrizen  ${}^K \underline{\boldsymbol{f}}_r^M$  und  ${}^K \underline{\boldsymbol{f}}_r^G$  der rechten Seite entstehen analog aus  ${}^K \underline{\boldsymbol{f}}_g^M$  und  ${}^K \underline{\boldsymbol{f}}_g^G$  durch Streichung der  $n$  Freiheitsgrade der Nabenknoten  $\mathbf{N}$ .

### 4.1.3 Craig-Bampton-Kondensation

Die hohe Anzahl von  $r$  Freiheitsgraden in Gl. (4.24) soll nun durch eine sinnvolle Kondensationsmethode reduziert werden. Eine reine modale Kondensation würde zwar zu einer Minderung des numerischen Aufwands durch die Diagonalisierung der Systemmatrizen und zu einer starken Reduktion der Freiheitsgrade führen, brächte allerdings auch Nachteile mit sich. Die zeitvarianten Randbedingungen innerhalb des Haftgebietes der Kontaktzone würden durch die steifere modale Näherung zu ungenauen Ergebnissen führen. Außerdem würden die lokalen nichtlinearen Effekte des Normal- und Tangentialkontaktes durch die globalen Ansatzfunktionen verschmiert. Die modale Superposition bei geometrisch nichtlinearen Problemen wird in NICKELL [75] erläutert. Eine rein statische Kondensation könnte mit ihren Ansatzfunktionen die Dynamik des Systems nicht hinreichend abbilden. Außerdem würden vorhandene Bandstrukturen in den Systemmatrizen zerstört und der beabsichtigte Rechenzeitvorteil damit vereitelt werden. Eine gemischte Vorgehensweise, die auf CRAIG/BAMPTON [16] zurückgeht, vereint die Vorteile von statischer und modaler Kondensation. Sie soll im weiteren CB-Kondensation genannt werden. Es lassen sich lokale Nichtlinearitäten im Kontaktbereich einbinden und trotzdem bleibt die Anzahl der Systemfreiheiten in einem annehmbaren Ausmaß. Einen Einblick in das Verfahren, sowie einige Anwendungsbeispiele sind z. B. bei GASCH UND KNOTHE [20] oder LINK [60] zu finden.

Die CB-Kondensation verlangt zunächst die Aufteilung der  $r$  Freiheitsgrade in so genannte Haupt- und Nebenfreiheitsgrade. Hauptfreiheitsgrade bleiben auch nach der Transformati-

on der Systemmatrizen erhalten, weshalb die CB-Kondensation auch als „strukturerhaltend“ bezeichnet wird. Da alle  $m$  Freiheitsgrade des Radmantels im Laufe der Simulation mit der Fahrbahn kontaktieren und im Haftbereich durch die Penalty-Methode gefesselt werden, müssen sie zu Hauptfreiheitsgraden der Transformation werden. Die restlichen  $s$  Strukturfreiheitsgrade sollen mit einer modalen Kondensation soweit wie möglich reduziert werden. Daher wird der Verschiebungsvektor entsprechend umsortiert

$${}^K \underline{\mathbf{u}}_r = \begin{bmatrix} {}^K \underline{\mathbf{u}}_m \\ {}^K \underline{\mathbf{u}}_s \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Durch die Umsortierung des Verschiebungsvektors ordnen sich auch die Systemmatrizen  ${}^K \underline{\mathbf{M}}_r$ ,  ${}^K \underline{\mathbf{D}}_r$  und  ${}^K \underline{\mathbf{K}}_r$  entsprechend um. Für die Beschreibung der Submatrizen wird hier ein Doppelindex eingeführt, um die Einordnung innerhalb der Hauptmatrizen zu ermöglichen. So wird aus der Bewegungsgleichung in Gl. (4.24)

$$\begin{bmatrix} {}^K \underline{\mathbf{M}}_{mm} & {}^K \underline{\mathbf{M}}_{ms} \\ {}^K \underline{\mathbf{M}}_{sm} & {}^K \underline{\mathbf{M}}_{ss} \end{bmatrix} {}^K \underline{\ddot{\mathbf{u}}}_r + \begin{bmatrix} {}^K \underline{\mathbf{D}}_{mm} & {}^K \underline{\mathbf{D}}_{ms} \\ {}^K \underline{\mathbf{D}}_{sm} & {}^K \underline{\mathbf{D}}_{ss} \end{bmatrix} {}^K \underline{\dot{\mathbf{u}}}_r + \begin{bmatrix} {}^K \underline{\mathbf{K}}_{mm} & {}^K \underline{\mathbf{K}}_{ms} \\ {}^K \underline{\mathbf{K}}_{sm} & {}^K \underline{\mathbf{K}}_{ss} \end{bmatrix} {}^K \underline{\mathbf{u}}_r = {}^K \underline{\mathbf{f}}_r^M + {}^K \underline{\mathbf{f}}_r^G. \quad (4.26)$$

Für die modale Kondensation der Strukturfreiheitsgrade  ${}^K \underline{\mathbf{u}}_s$  wird der untere Teil von Gl. (4.26) für gesperrte Hauptfreiheitsgrade  ${}^K \underline{\ddot{\mathbf{u}}}_m = {}^K \underline{\dot{\mathbf{u}}}_m = {}^K \underline{\mathbf{u}}_m = \underline{\mathbf{0}}$  betrachtet. Dabei wird von einem homogenen System ohne Dämpfung ausgegangen, da durch die Wahl eines Rayleigh-Ansatzes in Gl. (4.18) die Berechnung der Eigenvektoren des ungedämpften Systems auch auf das gedämpfte System angewendet werden darf. Das Resultat ist das konservative Hilfssystem

$${}^K \underline{\mathbf{M}}_{ss} {}^K \underline{\ddot{\mathbf{u}}}_s + {}^K \underline{\mathbf{K}}_{ss} {}^K \underline{\mathbf{u}}_s = \underline{\mathbf{0}}, \quad (4.27)$$

das sich von dem Ausgangssystem in Gl. (4.26) durch die Sperrung der Freiheitsgrade der Mantelknoten  $\underline{\mathbf{M}}$  unterscheidet. Für die Komponenten von  ${}^K \underline{\mathbf{u}}_s$  wird ein harmonischer Ansatz

$${}^K \underline{\mathbf{u}}_s = {}^K \hat{\underline{\mathbf{u}}}_s \cos(\omega_0 t) \quad \text{bzw.} \quad {}^K \underline{\ddot{\mathbf{u}}}_s = -\omega_0^2 {}^K \hat{\underline{\mathbf{u}}}_s \cos(\omega_0 t) \quad (4.28)$$

gewählt, der dann in Gl. (4.27) eingesetzt wird. Dies führt auf das Eigenwertproblem

$$(-\omega_0^2 {}^K \underline{\mathbf{M}}_{ss} + {}^K \underline{\mathbf{K}}_{ss}) {}^K \hat{\underline{\mathbf{u}}}_s = \underline{\mathbf{0}}. \quad (4.29)$$

Als Ergebnis der numerischen Eigenwertanalyse resultieren aufgrund der Symmetrie der Systemmatrizen des ungedämpften Systems rein konjugiert komplexe Eigenwerte sowie reelle Eigenvektoren. Der Betrag der Imaginärteile der ermittelten Eigenwertpaare entspricht jeweils einer Eigenkreisfrequenz  $\underline{\omega}_{0,i}$ . Insgesamt existieren  $s$  Eigenkreisfrequenzen  $\underline{\omega}_{0,i}$  und Eigenvektoren  ${}^K\hat{\underline{u}}_{s,i}$ . **Bild 4.4** zeigt die ersten vier Eigenvektoren  ${}^K\hat{\underline{u}}_{s,1}, \dots, {}^K\hat{\underline{u}}_{s,4}$  des konservativen Hilfssystems. Die für die CB-Transformation benötigte dynamische Kondensationsmatrix  ${}^K\underline{\mathbf{T}}_D$  wird aus den ersten  $v$  Eigenvektoren

$${}^K\underline{\mathbf{T}}_D = [{}^K\hat{\underline{u}}_{s,1} \quad {}^K\hat{\underline{u}}_{s,2} \quad \cdots \quad {}^K\hat{\underline{u}}_{s,v}] \quad (4.30)$$

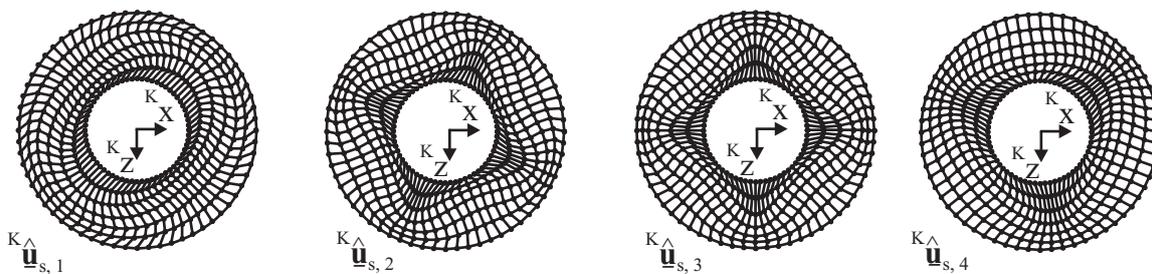
zusammengesetzt. Die Annäherung des Systemverhaltens durch langwellige Eigenvektoren entspricht einer drastischen Freiheitsgradreduktion von  $s$  physikalischen auf  $v$  modale Freiheitsgrade  $\mathbf{q}$ . Die modale Kondensationsmatrix  ${}^K\underline{\mathbf{T}}_D$  beinhaltet allerdings nur das Verhalten der Strukturknoten  $\mathbf{S}$  des Hilfssystems. Durch eine statische Kondensation werden nun weitere Ansatzfunktionen geliefert, die auch die Verschiebung der Mantelknoten  $\mathbf{M}$  und deren Einfluss auf die Strukturknoten  $\mathbf{S}$  berücksichtigen. Erneut vom unteren Teil von Gl. (4.26) ausgehend, wird nun der statischen Bedingung  ${}^K\ddot{\underline{u}}_r = {}^K\dot{\underline{u}}_r = \underline{\mathbf{0}}$  folgend die Gleichung

$${}^K\underline{\mathbf{K}}_{sm} {}^K\underline{\mathbf{u}}_m + {}^K\underline{\mathbf{K}}_{ss} {}^K\underline{\mathbf{u}}_s = \underline{\mathbf{0}} \quad (4.31)$$

aufgestellt. Wird die Gleichung nach  ${}^K\underline{\mathbf{u}}_s$  aufgelöst, ergibt sich der Ausdruck

$${}^K\underline{\mathbf{u}}_s = -{}^K\underline{\mathbf{K}}_{ss}^{-1} {}^K\underline{\mathbf{K}}_{sm} {}^K\underline{\mathbf{u}}_m = {}^K\underline{\mathbf{T}}_S {}^K\underline{\mathbf{u}}_m, \quad (4.32)$$

der die gesuchte statische Transformationsmatrix  ${}^K\underline{\mathbf{T}}_S$  enthält. Wird die statische Transformationsmatrix  ${}^K\underline{\mathbf{T}}_S$  analog zur dynamischen Kondensationsmatrix  ${}^K\underline{\mathbf{T}}_D$  spaltenweise betrachtet, werden die statischen Ansatzfunktionen sichtbar, bei denen jeweils ein Mantelfreiheitsgrad  ${}^K u_{M,i}$  bzw.  ${}^K w_{M,i}$  um den Betrag 1 verschoben wird, während die übrigen (Haupt-) Mantelfreiheitsgrade gesperrt werden, siehe **Bild 4.5**.



**Bild 4.4:** Modale Kondensation: Die ersten vier Eigenformen  ${}^K\hat{\underline{u}}_{s,1}, \dots, {}^K\hat{\underline{u}}_{s,4}$  des konservativen Hilfssystems für gesperrte Mantelfreiheitsgrade  ${}^K\underline{\mathbf{u}}_m = \underline{\mathbf{0}}$

Schließlich werden die statischen und dynamischen Ansatzfunktionen spaltenweise aneinander gereiht und ergeben unter Verwendung der Matrizen aus Gl. (4.30) und Gl. (4.32) die CB-Kondensationsmatrix  ${}^K\underline{\mathbf{T}}_h$ , die in der Kondensationsvorschrift

$${}^K\underline{\mathbf{u}}_r = \begin{bmatrix} {}^K\underline{\mathbf{u}}_m \\ {}^K\underline{\mathbf{u}}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{E}} & \underline{\mathbf{0}} \\ {}^K\underline{\mathbf{T}}_S & {}^K\underline{\mathbf{T}}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^K\underline{\mathbf{u}}_m \\ \underline{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = {}^K\underline{\mathbf{T}}_h {}^K\underline{\mathbf{u}}_h \quad (4.33)$$

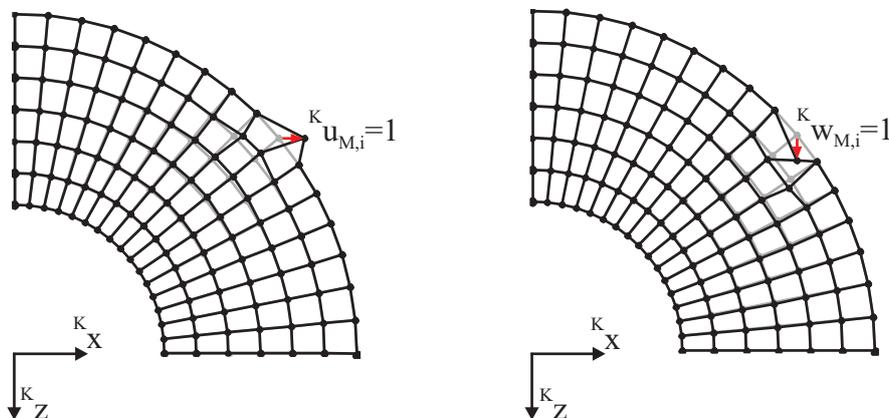
enthalten ist. Die Definition des CB-Zustandsvektors  ${}^K\underline{\mathbf{u}}_h$  ist im rechten Teil von Gl. (4.33) zu finden. Nun werden die physikalischen Koordinaten  ${}^K\underline{\mathbf{u}}_r$ ,  ${}^K\underline{\dot{\mathbf{u}}}_r$ , und  ${}^K\underline{\ddot{\mathbf{u}}}_r$  in Gl. (4.24) entsprechend Gl. (4.33) transformiert. Anschließend wird Gl. (4.24) von links mit der transponierten CB-Matrix  ${}^K\underline{\mathbf{T}}_h^T$  multipliziert. Für die transformierten Systemmatrizen werden zuvor die Bezeichnungen

$${}^K\underline{\mathbf{M}}_h = {}^K\underline{\mathbf{T}}_h^T {}^K\underline{\mathbf{M}}_r {}^K\underline{\mathbf{T}}_h, \quad {}^K\underline{\mathbf{D}}_h = {}^K\underline{\mathbf{T}}_h^T {}^K\underline{\mathbf{D}}_r {}^K\underline{\mathbf{T}}_h \quad \text{und} \quad {}^K\underline{\mathbf{K}}_h = {}^K\underline{\mathbf{T}}_h^T {}^K\underline{\mathbf{K}}_r {}^K\underline{\mathbf{T}}_h \quad (4.34)$$

eingeführt. Schließlich ergibt sich aus Gl. (4.24) die reduzierte Bewegungsgleichung

$${}^K\underline{\mathbf{M}}_h {}^K\underline{\ddot{\mathbf{u}}}_h + {}^K\underline{\mathbf{D}}_h {}^K\underline{\dot{\mathbf{u}}}_h + {}^K\underline{\mathbf{K}}_h {}^K\underline{\mathbf{u}}_h = {}^K\underline{\mathbf{T}}_h^T \left( {}^K\underline{\mathbf{f}}_r^M + {}^K\underline{\mathbf{f}}_r^G \right). \quad (4.35)$$

Der Vektor der Mantellasten  ${}^K\underline{\mathbf{f}}_r^M$  ist lediglich auf den Mantelfreiheitsgraden besetzt. Auf diesen Positionen enthält die CB-Kondensationsmatrix  ${}^K\underline{\mathbf{T}}_h^T$  eine Einheitmatrix, siehe Gl. (4.33).



**Bild 4.5:** Statische Transformation: Der aktuelle Hauptfreiheitsgrad  ${}^K u_{M,i}$  bzw.  ${}^K w_{M,i}$  wird um den Betrag 1 verschoben, alle übrigen Hauptfreiheitsgrade sind gesperrt

Deswegen bleiben die Einträge des Vektors bei Multiplikation mit  ${}^K \underline{\mathbf{T}}_h^T$  unverändert

$${}^K \underline{\mathbf{f}}_h^M = {}^K \underline{\mathbf{T}}_h^T {}^K \underline{\mathbf{f}}_r^M. \quad (4.36)$$

Der Vektor  ${}^K \underline{\mathbf{f}}_r^G$  resultiert aus der Führungsbeschleunigung des Systems, daher wirken seine Komponenten auch auf die modal reduzierten Freiheitsgrade. Daher muss eine Multiplikation mit der vollständigen CB-Matrix  ${}^K \underline{\mathbf{T}}_h$  stattfinden. Nach Einführung der drei CB-Eingangsmatrizen

$${}^K \underline{\mathbf{B}}_h^C = -{}^K \underline{\mathbf{T}}_h^T {}^K \underline{\mathbf{M}}_r \underline{\mathbf{E}}_r^C, \quad {}^K \underline{\mathbf{B}}_h^t = -{}^K \underline{\mathbf{T}}_h^T {}^K \underline{\mathbf{M}}_r \underline{\mathbf{E}}_r^t \quad \text{und} \quad {}^K \underline{\mathbf{B}}_h^r = -{}^K \underline{\mathbf{T}}_h^T {}^K \underline{\mathbf{M}}_r \underline{\mathbf{E}}_r^r \quad (4.37)$$

kann die kondensierte Bewegungsgleichung basierend auf Gl. (4.22) bzw. Gl. (4.24) vollständig formuliert werden

$${}^K \underline{\mathbf{M}}_h {}^K \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_h + {}^K \underline{\mathbf{D}}_h {}^K \dot{\underline{\mathbf{u}}}_h + {}^K \underline{\mathbf{K}}_h {}^K \underline{\mathbf{u}}_h = {}^K \underline{\mathbf{f}}_h^M + {}^K \underline{\mathbf{B}}_h^C \underline{\mathbf{A}}^{KI} \lambda \ddot{\underline{\mathbf{x}}}_C(t) + {}^K \underline{\mathbf{B}}_h^t \dot{\underline{\Omega}}(t) + {}^K \underline{\mathbf{B}}_h^r \Omega^2(t). \quad (4.38)$$

Durch die Anwendung der CB-Kondensation gelingt es, die Anzahl der Freiheitsgrade von  $g$  auf  $h$  zu reduzieren. Dies entspricht im Fall der gewählten Radgeometrie einem Reduktionsgrad von ungefähr 80%.

#### 4.1.4 Statische Vorberechnung

Während der Simulation wird Gl. (4.38) im Zeitschrittverfahren gelöst. Dabei werden zu jedem Zeitpunkt  $t$  aus der Beschleunigung  ${}^K \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_h$  durch Integration die Geschwindigkeit  ${}^K \dot{\underline{\mathbf{u}}}_h$  und die Verschiebung  ${}^K \underline{\mathbf{u}}_h$  berechnet. Die hierzu benötigte Anfangsbedingung für die Verschiebungsgeschwindigkeit lautet

$${}^K \dot{\underline{\mathbf{u}}}_h(t=0) = 0, \quad (4.39)$$

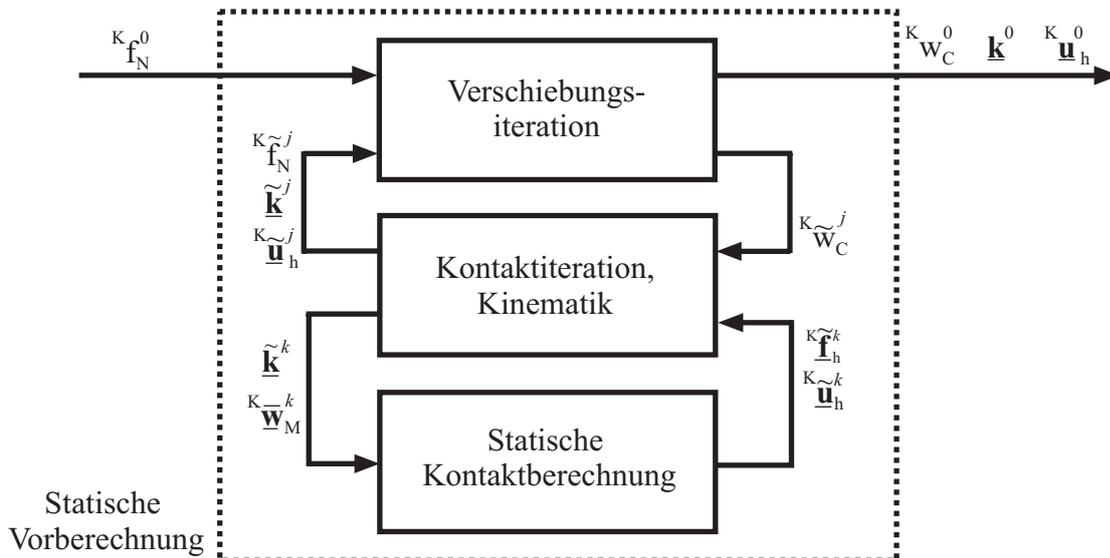
weil Winkelgeschwindigkeit und Nabengeschwindigkeit des Rades anfangs per Definition gleich Null sind  $\Omega(t=0) = {}^I v_C(t=0) = 0$ . Dies gilt allerdings nicht für die initialen Knotenverschiebungen  ${}^K \underline{\mathbf{u}}_h(t=0) \neq 0$ , da zu Beginn der Simulation das Rad bereits mit einer Normalkraft  ${}^K f_N^0$  belastet und damit vorverformt sein soll. Diese initiale Normalkraft entspricht dem Anfangswert der Sollwertvorgabe

$${}^K f_N^0 = {}^C \bar{f}_N(t=0) \quad (4.40)$$

der Normalkraftrückführung, die eine Eingangsgröße des Gesamtmodells darstellt. Da zum Zeitpunkt  $t = 0$  das begleitende Koordinatensystem  $C$  und das körperfeste Koordinatensystem  $K$  parallel ausgerichtet sind, ist die Verwendung der Koordinaten beider Systeme in Gl. (4.40) zulässig. Eine Übersicht über den Ablauf der statischen Vorberechnung ist in **Bild 4.6** zu sehen. Das Ergebnis der Vorberechnung dient anschließend als Anfangsbedingung für die Integration des Verschiebungsvektors  ${}^K \underline{u}_h(t = 0) = {}^K \underline{u}_h^0$  in Gl. (4.38). Auch die Normalkraftrückführung benötigt eine Anfangsbedingung für die Nebenverschiebung

$${}^C w_C(t = 0) = {}^I w_C(t = 0) = {}^K w_C^0, \quad (4.41)$$

siehe Abschnitt 4.2.3.1, und schließlich erfordert der Auswahl-Algorithmus für die kontaktnahen Knoten eine initiale Kontakt-Konfiguration  $\underline{k}^0$ , siehe Abschnitt 4.2.2. Da das Inertialsystem  $I$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  parallel zum begleitenden Koordinatensystem  $C$  ausgerichtet ist, ist die Gleichsetzung der Koordinaten in Gl. (4.41) erlaubt. Der Kontaktindikator  $\underline{k}^0$  enthält die Indizes der zum Zeitpunkt  $t = 0$  kontaktierenden Knoten. Er wird in der numerischen Mechanik auch als *Active Set* bezeichnet, siehe WRIGGERS [106]. Die eigentliche statische Kontaktberechnung ermittelt für eine vorgegebene Kontaktkonfiguration, die den statischen Kontaktindikator  $\tilde{\underline{k}}$  und die Zwangsbedingung  ${}^K \underline{w}_M$  beinhaltet, den statischen Verschiebungsvektor  ${}^K \tilde{\underline{u}}_h$  und den zugehörigen Kontaktlastenvektor  ${}^K \tilde{\underline{f}}_h$ . Die Größen der statischen Kontaktberechnung sind mit einer Tilde versehen, um sie gegenüber den späteren Verschiebungen und Lasten des dynamischen Modells abzugrenzen.



**Bild 4.6:** Ablauf der statischen Vorberechnung: Die Verschiebungsiteration ermittelt die zur Normalkraftvorgabe korrespondierende Nebenverschiebung  ${}^K w_C^0$  ( ${}^K f_N^0$ ). In der Kontaktiteration werden für eine vorgegebene statische Nebenverschiebung  ${}^K \tilde{w}_C$  die kontaktierenden Knoten gemäß den Kontaktbedingungen berechnet

Die statische Berechnung beschränkt sich auf den Normalkontakt, in tangentialer Richtung wird Reibungsfreiheit  $\mu_0 = 0$  angenommen. Zwar wäre die Annahme von Reibung bei der Vorberechnung realistischer als die hier getroffene Annahme. Allerdings sind bei den in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen vor allem die stationären Rollzustände sowie der instationäre Wechsel zwischen diesen Zuständen von Interesse. Diese Phänomene sind, nach gewisser Einlaufdauer (und im Hinblick auf die lineare Modellierung), unabhängig vom Anfangszustand des Systems. Eine nähere Erläuterung der statischen Kontaktberechnung findet in Abschnitt 4.1.4.1 statt.

Um die den Kontaktbedingungen entsprechende konforme Verteilung der kontaktierenden Knoten zu finden, ist die statische Berechnung in die Kontaktiteration eingebettet. Die Ergebnisse der Kontaktberechnung werden auf Plausibilität geprüft und der Kontaktindikator  $\tilde{\mathbf{k}}^k$  sowie die Zwangsbedingung  ${}^K\tilde{\mathbf{w}}_M^k$  angepasst. Der hochgestellte Index  $k$  markiert den aktuellen Iterationsschritt der Kontaktiteration. Die Knotenlasten werden zur globalen Normalkraft  ${}^K\tilde{f}_N$  aufsummiert. So entsteht ein skalares Ergebnis für eine vorgegebene Verschiebung des Radmittelpunktes  ${}^K\tilde{f}_N({}^K\tilde{w}_C)$ , das sich für die Verwendung des Newton Verfahrens in der Verschiebungsiteration eignet, siehe Abschnitt 4.1.4.3.

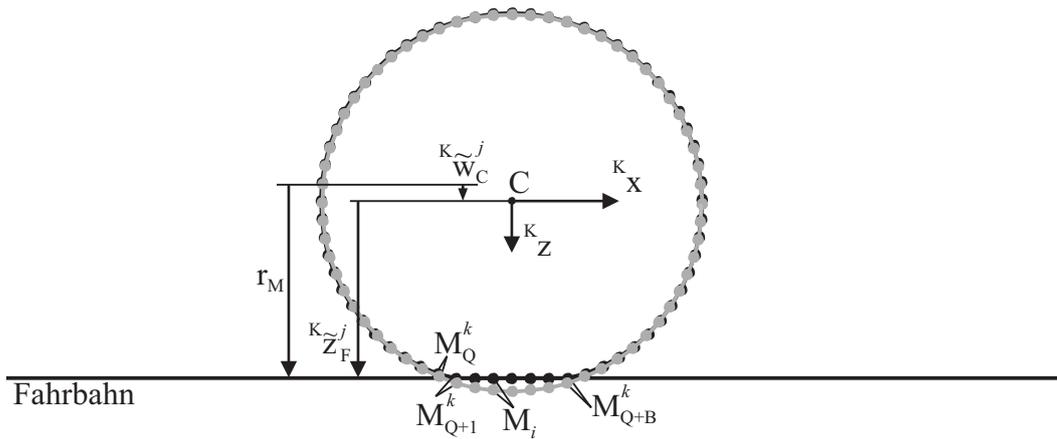
Der statische Zusammenhang zwischen vertikaler Nabenverschiebung  ${}^K\tilde{w}_C$  und globaler Normalkraft  ${}^K\tilde{f}_N$  entspricht einem stetigen, jeweils abschnittsweise linearen Zusammenhang, siehe **Bild 4.10**. Durch das lineare Materialmodell entsteht bei unveränderter Kontaktkonfiguration ein linearer Verlauf, bei größer werdender Nabenverschiebung kontaktiert allerdings eine zunehmende Anzahl von Mantelknoten, was zu einer Versteifung des Systemverhaltens führt. Die Kontaktiteration wird in Abschnitt 4.1.4.2 erläutert. Als Eingangsgröße der Rollkontaktmessungen und damit auch des dynamischen Modells wurde die Normalkraft  ${}^K\tilde{f}_N$  gewählt, siehe Gl. (4.40). Da die statische Kontaktberechnung aber verschiebungssteuert abläuft, siehe Abschnitt 4.1.4.1, muss in der Vorberechnung der inverse Zusammenhang  ${}^K\tilde{w}_C({}^K\tilde{f}_N)$  gelöst werden. Dies erfordert ein weiteres Iterationsverfahren, das als Verschiebungsiteration bezeichnet wird. Der aktuelle Iterationsschritt wird hier durch den hochgestellten Index  $j$  dargestellt. Es kommt das Newton-Verfahren zum Einsatz, siehe Abschnitt 4.1.4.3.

#### 4.1.4.1 Statische Kontaktberechnung

Eine zentrale Größe in der statischen Kontaktberechnung stellt der Kontaktindikator  $\tilde{\mathbf{k}}^k$  dar, der hier die Funktion eines *Active Sets* übernimmt. Er enthält die Indizes der kontaktierenden Mantelknoten für den aktuellen Iterationsschritt  $k$

$$\tilde{\mathbf{k}}^k = [Q^k + 1, Q^k + 2, \dots, Q^k + B^k]^T, \quad (4.42)$$

wobei  $Q^k + 1$  den kleinsten Index bezeichnet, die Gesamtanzahl der kontaktierenden Knoten im Rechenschritt  $k$  beträgt  $B^k$ . Die aktuell kontaktierenden Mantelknoten seien entsprechend mit  $M_{Q+1}^k \dots M_{Q+B}^k$  bezeichnet, siehe **Bild 4.7**.



**Bild 4.7:** Indizierung der kontaktierenden Mantelknoten, Einführung der Fahrbahnkoordinate  ${}^K \tilde{z}_F^j$  zur Berechnung der Zwangsbedingung  ${}^K \tilde{w}_{M,i}^k$

Ein beliebiger Mantelknoten  $M_i$  ist also während des Iterationsschrittes  $k$  in Kontakt mit der Fahrbahn, wenn sein Index  $i$  ein Element des aktuellen statischen Kontaktvektors ist  $i \in \tilde{\mathbf{k}}^k$ . Für den ersten Iterationsschritt  $k = 1$  liegt ein Kontaktvektor  $\tilde{\mathbf{k}}^1$  vor, der ohne vorangegangene Kontaktberechnung ermittelt werden kann, siehe Abschnitt 4.1.4.2.

**Penalty-Methode** Die Kontaktberechnung wird nach der Penalty-Methode durchgeführt, siehe z. B. BATHE [8]. Um dem System die Zwangsbedingungen  ${}^K \tilde{\mathbf{w}}_M^k$  vorgeben zu können, wird eine  $[h \times h]$  Penalty-Matrix  ${}^K \underline{\mathbf{P}}_h^k$  erstellt. Die Matrix enthält Steifigkeitskomponenten, die die kontaktierenden Mantelknoten an die Fahrbahn binden. Für ihre  $M$  Diagonalelemente in  ${}^K z$ -Richtung, die den vertikalen Mantelfreiheitsgraden entsprechen, gilt für  $i = 1 \dots M$

$${}^K \underline{\mathbf{p}}_{2i,2i}^k = \begin{cases} p_K & \text{für } i \in \tilde{\mathbf{k}}^k \\ 0 & \text{für } i \notin \tilde{\mathbf{k}}^k \end{cases}, \quad (4.43)$$

wobei  $p_K$  den Penalty-Faktor darstellt, der auch in der Zeitschrittintegration verwendet wird. Er sollte betraglich möglichst hoch angesetzt werden, um die Verschiebungen der kontaktierenden Mantelknoten  $M_i$  den Zwangsbedingungen  ${}^K \tilde{w}_{M,i}^k$  möglichst anzugleichen. Allerdings führen zu hoch gewählte Penalty-Faktoren  $p_K$  in der Zeitschrittintegration zu numerischer Instabilität, so dass minimale Abweichungen akzeptiert werden müssen. Die gesuchte Penalty-Matrix  ${}^K \underline{\mathbf{P}}_h^k$  kann schließlich durch Diagonalisierung der  $M$  Elemente  ${}^K \underline{\mathbf{p}}_{2i,2i}^k$ , vergleiche Gl. (4.43), und  $M + v$  Nullen erzeugt werden

$${}^K \underline{\mathbf{P}}_h^k = \text{diag} \left( 0, {}^K \underline{\mathbf{p}}_{2,2}^k, 0, {}^K \underline{\mathbf{p}}_{4,4}^k, \dots, 0, {}^K \underline{\mathbf{p}}_{m,m}^k, 0, \dots, 0 \right). \quad (4.44)$$

**Berechnung der Ausgangsgrößen** Mit dem Zwangsbedingungsvektor  ${}^K \tilde{\mathbf{u}}_h^k$ , siehe Abschnitt 4.1.4.2, und der Penalty-Matrix  ${}^K \underline{\mathbf{P}}_h^k$  aus Gl. (4.44) kann schließlich das Gleichungs-

system für die statische Berechnung gemäß der Penalty-Methode aufgestellt werden

$${}^K \underline{\mathbf{K}}_h {}^K \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_h = {}^K \underline{\mathbf{P}}_h^k ({}^K \bar{\underline{\mathbf{u}}}_h - {}^K \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_h) . \quad (4.45)$$

Durch Umformung des Systems lässt sich als Lösung der statische Verschiebungsvektor

$${}^K \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_h = ({}^K \underline{\mathbf{K}}_h + {}^K \underline{\mathbf{P}}_h^k)^{-1} {}^K \underline{\mathbf{P}}_h^k {}^K \bar{\underline{\mathbf{u}}}_h \quad (4.46)$$

angeben. Weiterhin wird sowohl für die Berechnung der globalen Normalkraft  ${}^K \tilde{f}_N^j$  als auch zur Überprüfung der Kontaktbedingungen der statische Lastvektor

$${}^K \tilde{\underline{\mathbf{f}}}_h = {}^K \underline{\mathbf{K}}_h {}^K \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_h \quad (4.47)$$

benötigt, der die Knotenlasten  ${}^K \tilde{\underline{\mathbf{f}}}_M^k$  der kontaktierenden Knoten enthält. Mit Gl. (4.46) und Gl. (4.47) stehen die Ausgangsgrößen  ${}^K \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_h$  und  ${}^K \tilde{\underline{\mathbf{f}}}_h$  für die Kontaktiteration zur Verfügung.

#### 4.1.4.2 Kontaktiteration

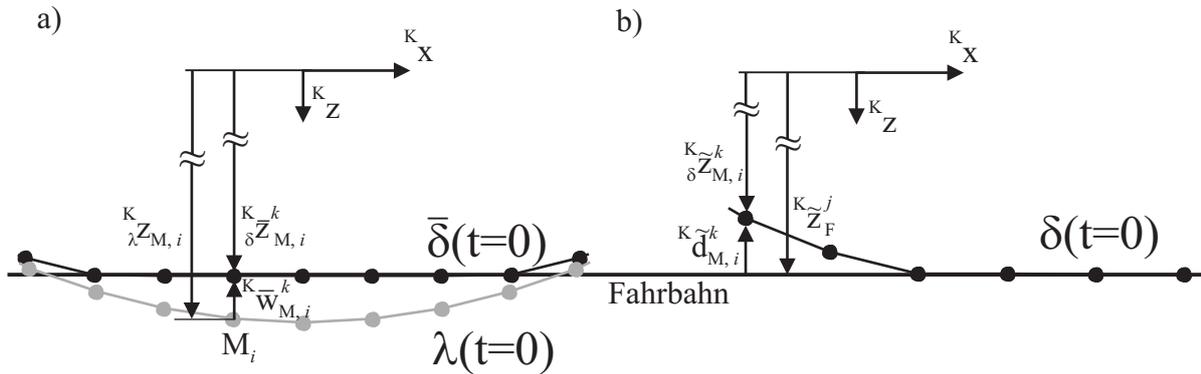
Bei jedem Berechnungsschritt  $j$  der Verschiebungsiteration muss für einen Wert der Nabenverschiebung  ${}^K \tilde{w}_C^j$  die Verteilung der kontaktierenden Mantelknoten gefunden werden, siehe Abschnitt 4.1.4.3. Dazu wird zunächst neben der initialen Referenzkonfiguration  $\lambda(t=0)$  und der initialen Endkonfiguration  $\delta(t=0)$  die statische Kontaktkonfiguration  $\bar{\delta}(t=0)$  eingeführt, aus der sich die Zwangsbedingungen für die statische Kontaktberechnung ergeben. Mit Hilfe der Penalty-Methode werden dann Kräfte berechnet, für die die Verschiebungen der kontaktierenden Knoten annähernd diese Zwangsbedingungen  ${}^K \bar{\underline{\mathbf{w}}}_{M,i}^k$  erfüllen.

**Zwangsbedingungen** Die  ${}^K z$ -Koordinate eines beliebigen Mantelknotens  $M_i$  innerhalb der initialen Kontaktkonfiguration  $\bar{\delta}(t=0)$  entspricht im Kontaktfall,  $i \in \tilde{\underline{\mathbf{k}}}^k$ , der  ${}^K z$ -Koordinate der Fahrbahn, für Nicht-Kontakt,  $i \notin \tilde{\underline{\mathbf{k}}}^k$ , entspricht sie der Referenzkoordinate

$${}^K \tilde{z}_{M,i}^k = \begin{cases} {}^K \tilde{z}_F^j & \text{für } i \in \tilde{\underline{\mathbf{k}}}^k \\ {}^K \tilde{z}_{M,i}^k & \text{für } i \notin \tilde{\underline{\mathbf{k}}}^k \end{cases} . \quad (4.48)$$

Wie in **Bild 4.7** zu sehen, lässt sich die Fahrbahnkoordinate durch die Differenz aus Mantelradius  $r_M$  und aktueller Nabenverschiebung  ${}^K \tilde{w}_C^j$  berechnen

$${}^K \tilde{z}_F^j = r_M - {}^K \tilde{w}_C^j . \quad (4.49)$$



**Bild 4.8:** a) Zwangsbedingung  $K_{\bar{w}_{M,i}}$  als Differenz der initialen Kontaktkonfiguration  $\bar{\delta}(t=0)$  und der initialen Referenzkonfiguration  $\lambda(t=0)$ ; b) Ermittlung der Durchdringung  $K_{\tilde{d}_{M,i}}$  (hier:  $K_{\tilde{d}_{M,i}} < 0$ , kein Kontakt)

Die gesuchte vertikale Zwangsbedingung für den Punkt  $M_i$  wiederum besteht analog zu Gl. (4.9) aus der Differenz von Kontakt- und Referenzkonfiguration

$$K_{\bar{w}_{M,i}} = K_{\bar{\delta} Z_{M,i}} - K_{\lambda Z_{M,i}}, \quad (4.50)$$

sie ist wegen der Fallunterscheidung in Gl. (4.48) nur im Fall von Normalkontakt,  $i \in \tilde{\mathbf{k}}^k$ , ungleich Null, siehe auch **Bild 4.8 a)**. Der gesuchte vertikale  $[h \times 1]$  Zwangsbedingungsvektor  $K_{\underline{w}_h^k}$  wird schließlich analog zur Bildung der Diagonale der Penalty-Matrix in Gl. (4.44) aus den  $M$  Zwangsbedingungen nach Gl. (4.50) und  $M + v$  Nullen zusammengesetzt

$$K_{\underline{w}_h^k} = [0, K_{\bar{w}_{M,1}}, 0, K_{\bar{w}_{M,2}}, \dots, 0, K_{\bar{w}_{M,i}}, \dots, 0, K_{\bar{w}_{M,M}}, 0, 0, \dots, 0, 0]^T. \quad (4.51)$$

**Kontaktbedingungen/Durchdringung** Nach jeder statischen Berechnung, entsprechend Abschnitt 4.1.4.1, muss die Gültigkeit der Kontaktbedingungen jeweils neu überprüft werden, um den statischen Kontaktindikator  $\tilde{\mathbf{k}}^{k+1}$  für den nachfolgenden Berechnungsschritt  $k+1$  zu erhalten. Für den Fall von Normalkontakt,  $i \in \tilde{\mathbf{k}}^k$ , eines Knotens  $M_i$  muss der Betrag der Kontaktlast kleiner Null sein um für  $k+1$  weiter zu kontaktieren, es gilt die Kontaktbedingung

$$i \in \tilde{\mathbf{k}}^k \implies \begin{cases} i \in \tilde{\mathbf{k}}^{k+1} & \text{für } K_z \tilde{f}_{M,i}^k < 0 \\ i \notin \tilde{\mathbf{k}}^{k+1} & \text{für } K_z \tilde{f}_{M,i}^k \geq 0 \end{cases}. \quad (4.52)$$

Liegt für  $M_i$  kein Normalkontakt vor,  $i \notin \tilde{\mathbf{k}}^k$ , wird der Knoten auf Durchdringung mit der Fahrbahn geprüft. Die statische Durchdringung besteht aus der Differenz der  $K_z$ -Koordinate

des Punkte  $M_i$  innerhalb der initialen Endkonfiguration  $\delta(t=0)$  und der Fahrbahnkoordinate

$${}^K \tilde{d}_{M,i}^k = \frac{K}{\delta} \tilde{z}_{M,i}^k - {}^K \tilde{z}_F^j, \quad (4.53)$$

vergleiche **Bild 4.8 b**). Wird Gl. (4.49) in Gl. (4.53) eingesetzt, ergibt sich für die Durchdringung des Knotens  $M_i$  während des Iterationsschrittes  $k$

$${}^K \tilde{d}_{M,i}^k = \frac{K}{\lambda} z_{M,i}^k + {}^K \tilde{w}_{M,i}^k - r_M + {}^K \tilde{w}_C^j \quad (4.54)$$

in Abhängigkeit gegebener Größen. Der Betrag der statischen Durchdringung  ${}^K \tilde{d}_{M,i}^k$  ist positiv, falls sich Radkörper und Fahrbahn an dem Knoten  $M_i$  durchdringen. Zu Beginn der Kontaktiteration,  $k=1$ , muss auch ohne vorangegangene statische Kontaktberechnung ein initialer Kontaktindikator  $\tilde{\mathbf{k}}^1$  zur Verfügung stehen. Für diesen Fall wird die vertikale Knotenverschiebung  ${}^K \tilde{w}_{M,i}^k$  Null gesetzt. Auf diese Weise entsteht aus Gl. (4.54) die Starrkörperdurchdringung

$${}^K \tilde{d}_{M,i}^1 = \frac{K}{\lambda} z_{M,i} - r_M + {}^K \tilde{w}_C^j. \quad (4.55)$$

Steht die Durchdringung  ${}^K \tilde{d}_{M,i}^k$  zur Verfügung, kann schließlich die Kontaktbedingung für nicht-kontaktierende Knoten,  $i \notin \tilde{\mathbf{k}}^k$ , für einen beliebigen Berechnungsschritt  $k$  formuliert werden

$$i \notin \tilde{\mathbf{k}}^k \implies \begin{cases} i \notin \tilde{\mathbf{k}}^{k+1} & \text{für } {}^K \tilde{d}_{M,i}^k \leq 0 \\ i \in \tilde{\mathbf{k}}^{k+1} & \text{für } {}^K \tilde{d}_{M,i}^k > 0 \end{cases}. \quad (4.56)$$

Nach Überprüfung der beiden Kontaktbedingungen Gl. (4.52) und Gl. (4.56) für alle Mantelknoten  $\mathbf{M}$  kann schließlich der statische Kontaktindikator  $\tilde{\mathbf{k}}^{k+1}$  des nachfolgenden Iterationsschrittes  $k+1$  besetzt werden.

**Abbruchbedingung** Bleibt der Kontaktindikator gegenüber dem Wert seines Vorgängers unverändert, ist die Abbruchbedingung

$$\tilde{\mathbf{k}}^{k+1} = \tilde{\mathbf{k}}^k \quad (4.57)$$

erfüllt, da sich in diesem Fall alle weiteren Iterationsschritte nicht mehr voneinander unterscheiden würden.

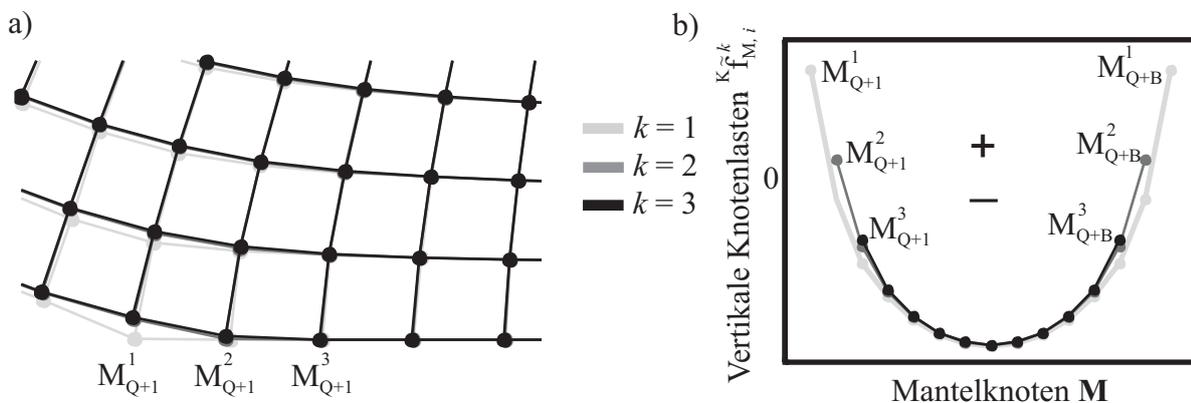
**Ausgangsgrößen** Die globale statische Normalkraft  ${}^K \tilde{f}_N^j$  kann schließlich als Ausgangsgröße der Kontaktiteration durch Summation der  $M$  Knotenlasten

$${}^K \tilde{f}_N^j = -b_g \sum_{i=1}^M {}^K \tilde{f}_{M,i}^k \quad (4.58)$$

berechnet werden. Da die vertikalen Knotenlasten  ${}^K \tilde{f}_{M,i}^k$  aufgrund der Koordinatenausrichtung prinzipiell negativ gerichtet sind, ist in Gleichung Gl. (4.58) ein Minuszeichen eingefügt. Außerdem muss der Ausdruck in Gl. (4.58) mit der Radbreite  $b_g$  multipliziert werden, weil die zweidimensionale Strukturdynamik in der Dimension von Linienlasten rechnet. Des Weiteren werden der CB-Verschiebungsvektor und der statische Kontaktindikator als Ausgangsgrößen

$${}^K \tilde{\underline{u}}_h^j = {}^K \tilde{\underline{u}}_h^k \quad \text{und} \quad \tilde{\underline{k}}^j = \tilde{\underline{k}}^k \quad (4.59)$$

an die Iteration der vertikalen Nebenverschiebung, siehe Abschnitt 4.1.4.3, übergeben. **Bild 4.9** zeigt die Änderungen der Verschiebungen und vertikalen Knotenlasten innerhalb des Kontaktgebietes während einer dreischrittigen Kontaktiteration  $k = 1, 2, 3$ . Während des ersten Berechnungsschritts  $k = 1$  treten an den äußeren Kontaktknoten  $M_{Q+1}^1$  und  $M_{Q+B}^1$  Zuglasten  ${}^K \tilde{f}_{M,Q+1}^1 \geq 0$  bzw.  ${}^K \tilde{f}_{M,Q+B}^1 \geq 0$  auf, die Knotenindizes werden aus dem statischen Kontaktindikator entfernt. Trotzdem treten auch im zweiten Berechnungsschritt  $k = 2$  Zuglasten an den äußeren Knoten  $M_{Q+1}^2$  und  $M_{Q+B}^2$  auf, so dass die Prozedur wiederholt wird. Erst im dritten Berechnungsschritt  $k = 3$  treten keine Zuglasten mehr im Kontaktbereich auf, das Ende der Kontaktiteration ist erreicht.



**Bild 4.9:** Dreischrittige Kontaktiteration  $k = 1, 2, 3$  : a) Strukturverschiebungen im Kontaktgebiet; b) Vertikale Knotenlasten während der Iteration, an den Randknoten wird jeweils wegen  ${}^K \tilde{f}_{M,i}^k \geq 0$  der Kontakt gelöst

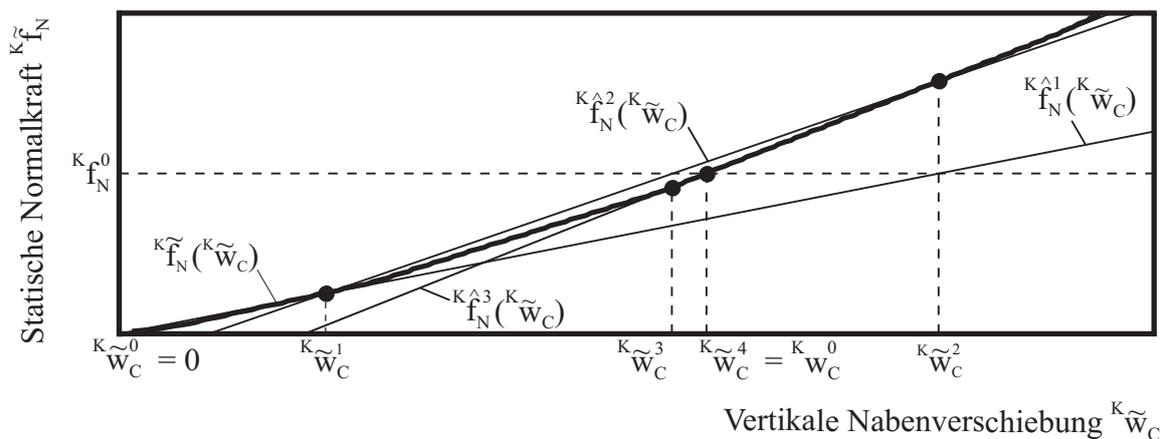
### 4.1.4.3 Verschiebungsiteration

In der Verschiebungsiteration wird für einen vorgegebenen Wert der globalen Normalkraft  ${}^K f_N^0$  die korrespondierende senkrechte Nabenverschiebung  ${}^K w_C^0$  ermittelt. Da die Kontaktberechnung verschiebungsgesteuert abläuft, siehe Abschnitt 4.1.4.1, muss der inverse Zusammenhang  ${}^K \tilde{f}_N ({}^K \tilde{w}_C)$  mit Hilfe eines Newton-Verfahrens iterativ gelöst werden. Der Graph in **Bild 4.10** zeigt die Funktion  ${}^K \tilde{f}_N ({}^K \tilde{w}_C)$ , außerdem sind die einzelnen Iterationsschritte zur Ermittlung von  ${}^K w_C^0$  zu sehen. Diese Ermittlung erfolgt durch Annäherung des Verlaufs von  ${}^K \tilde{f}_N ({}^K \tilde{w}_C)$  durch Interpolationsgeraden  ${}^K \hat{f}_N^j ({}^K \tilde{w}_C)$ . Der Iterationsindex  $j$  markiert den jeweiligen Iterationsschritt, als Startwert für das Newton-Verfahren wird eine beliebige Verschiebung  ${}^K \tilde{w}_C^1 \neq 0$  vorgegeben. Durch die Kontaktiteration, siehe Abschnitt 4.1.4.2, wird für eine konsistente Kontaktconfiguration die globale Kontaktkraft  ${}^K \tilde{f}_N^1 ({}^K \tilde{w}_C^1)$  ermittelt, siehe Gl. (4.58). Da der Algorithmus zur Ermittlung der Interpolationsgeraden eine Iterationsstufe zurückgreift  $j - 1$ , wird zunächst noch  ${}^K \tilde{w}_C^0 = {}^K \tilde{f}_N^0 = 0$  angenommen. Für einen beliebigen Iterationsschritt  $j$  kann dann die Steigung der Interpolationsgeraden  ${}^K \hat{f}_N^j ({}^K \tilde{w}_C)$  bestimmt werden

$$m^j = \frac{({}^K \tilde{f}_N^j - {}^K \tilde{f}_N^{j-1})}{({}^K \tilde{w}_C^j - {}^K \tilde{w}_C^{j-1})}. \quad (4.60)$$

Über die Einpunkt-Form lässt sich nun die gesuchte Geradengleichung als Annäherung an den progressiven Verlauf von  ${}^K \tilde{f}_N ({}^K \tilde{w}_C)$  formulieren

$${}^K \hat{f}_N^j ({}^K \tilde{w}_C) = {}^K \tilde{f}_N^{j-1} + m^j ({}^K \tilde{w}_C - {}^K \tilde{w}_C^{j-1}). \quad (4.61)$$



**Bild 4.10:** Newton-Verfahren zur Bestimmung der initialen Nabenverschiebung  ${}^K w_C^0$  bei gegebener globaler Normalkraft  ${}^K f_N^0$  aus dem Zusammenhang  ${}^K \tilde{f}_N ({}^K \tilde{w}_C)$ . Die Interpolationsgeraden  ${}^K \hat{f}_N^j ({}^K \tilde{w}_C)$  dienen der Ermittlung des nächsten Verschiebungswertes  ${}^K \tilde{w}_C^{j+1}$  der Iteration

Die Interpolationsgerade in Gl. (4.61) wird nun verwendet, um den nächsten Wert für die vertikale Nebenverschiebung  ${}^K \tilde{w}_C^{j+1}$  zu erhalten. Der Funktionswert der Geraden an der gesuchten Stelle  ${}^K \tilde{w}_C^{j+1}$  wird gleich der vorgegebenen globalen Normalkraft gesetzt

$${}^K f_N^0 = {}^K \hat{f}_N^j ({}^K \tilde{w}_C = {}^K \tilde{w}_C^{j+1}) . \quad (4.62)$$

Durch Einsetzen von Gl. (4.62) in Gl. (4.61) und Umformen ergibt sich schließlich der nächste Wert für die vertikale Nebenverschiebung

$${}^K \tilde{w}_C^{j+1} = {}^K \tilde{w}_C^{j-1} + \frac{1}{m^j} \left( {}^K f_N^0 - {}^K \tilde{f}_N^{j-1} \right) . \quad (4.63)$$

Für diesen Verschiebungswert wird erneut eine mit den Kontaktbedingungen verträgliche Kontaktberechnung  ${}^K \tilde{f}_N^{j+1} ({}^K \tilde{w}_C^{j+1})$  durchgeführt, und so fort.

**Abbruchbedingung** Die Iteration wird abgebrochen, wenn die neu berechnete gleich der vorgegebenen Normalkraft ist

$${}^K \tilde{f}_N^j = {}^K f_N^0 . \quad (4.64)$$

Das Ergebnis der Iteration ist exakt, da die Funktion  ${}^K \tilde{f}_N ({}^K \tilde{w}_C)$  abschnittsweise linear ist. Sobald die Iteration das lineare Teilstück des exakten Wertes erreicht hat, entspricht die Interpolationsgerade  ${}^K \hat{f}_N^j ({}^K \tilde{w}_C)$  dem lokalen Verlauf der Funktion  ${}^K \tilde{f}_N ({}^K \tilde{w}_C)$ . Der Wert in Gl. (4.63) entspricht dann der exakten Lösung.

**Ausgangsgrößen** Als Ausgangsgröße für die dynamische Simulation wird die vertikale Nebenverschiebung sowie der statische Verschiebungsvektor des aktuellen Berechnungsschritts  $j$  übergeben

$${}^K w_C^0 = {}^I w_C (t = 0) = {}^C w_C (t = 0) = {}^K \tilde{w}_C^j \quad \text{und} \quad {}^K \underline{u}_h^0 = {}^K \tilde{\underline{u}}_h^j . \quad (4.65)$$

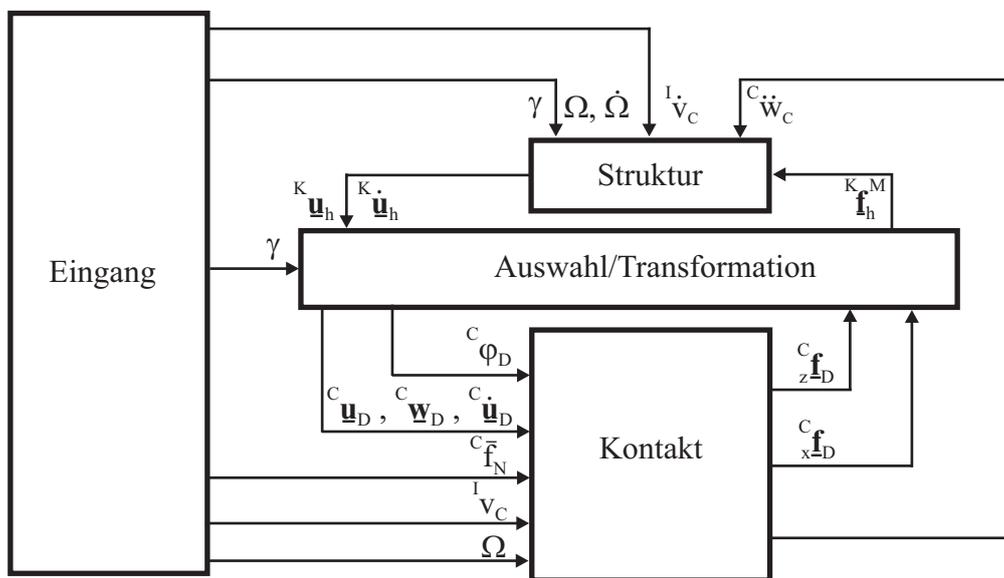
Außerdem wird der in Abschnitt 4.1.4.2 berechnete Kontaktindikator  $\underline{k}^0 = \tilde{\underline{k}}^j$  für die Simulation benötigt.

## 4.2 Simulation

Nach den Vorbetrachtungen in Abschnitt 4.1 sollen nun die Algorithmen erläutert werden, die während der Zeitschrittintegration ablaufen. Um den Zusammenhang zwischen den einzelnen Modulen und den Fluss der berechneten Größen zu verdeutlichen, sollen Blockschalt-

bilder verwendet werden. Einen Überblick über das Gesamtmodell gibt **Bild 4.11**. Der Block *Struktur* beinhaltet das kondensierte Gleichungssystem zur Dynamikberechnung, das in Abschnitt 4.1.3 hergeleitet wurde. Die Anregung des Systems erfolgt durch die auf den Mantel wirkenden Kontaktlasten  ${}^K \underline{\mathbf{f}}_h^M$  und die Führungsbewegung der Radnabe, die durch Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  und -beschleunigung  $\dot{\Omega}$ , sowie durch die translatorischen Beschleunigungen der Nabe in horizontaler  ${}^I \dot{v}_C$  und in vertikaler Richtung  ${}^I \ddot{w}_C$  gegeben ist. Als Resultat der transienten Anregung stellen sich dynamische Verschiebungen  ${}^K \underline{\mathbf{u}}_h$  bzw. Verschiebungsgeschwindigkeiten  ${}^K \dot{\underline{\mathbf{u}}}_h$  der Radstruktur ein. Die Funktionsweise des Blocks *Struktur* wird in Abschnitt 4.2.1 erläutert.

Im Block *Auswahl/Transformation* werden zu jedem Zeitpunkt  $t$  aus der Menge der Mantelknoten  $\mathbf{M}$  die kontaktnahen Knoten  $\mathbf{D}$  identifiziert. Dies ergibt den Vorteil, dass eine Prüfung der Kontaktbedingungen sowie die daraus folgende Berechnung der Kontaktkräfte nur für die Mantelknoten erfolgt, die sich auch im unmittelbaren Kontaktgebiet befinden. Dies spart numerische Ressourcen und verkürzt damit die Berechnungszeit des Gesamtmodells. Aus dem Verschiebungsvektor  ${}^K \underline{\mathbf{u}}_h$  werden dann die entsprechenden Elemente  ${}^K \underline{\mathbf{u}}_d$  ausgewählt und in das begleitende Koordinatensystem  $C$  transformiert, wobei die Verschiebungen in  ${}^C x$ -Richtung  ${}^C \underline{\mathbf{u}}_D$  und in  ${}^C z$ -Richtung  ${}^C \underline{\mathbf{w}}_D$  aufgeteilt werden. Für die Berechnung der tangentialen Relativgeschwindigkeit im Kontaktgebiet  ${}^C \underline{\mathbf{v}}_D^{rel}$  wird analog auch der Vektor der Verschiebungsgeschwindigkeit  ${}^K \dot{\underline{\mathbf{u}}}_h$  zerlegt. Des Weiteren wird die Referenzposition der kontaktnahen Knoten  $\mathbf{D}$  durch die Winkelkoordinate  ${}^C \varphi_D$  ausgegeben. Eine detaillierte Beschreibung des Blocks *Auswahl/Transformation* befindet sich in Abschnitt 4.2.2.



**Bild 4.11:** Blockschaltbild des Rollkontaktmodells. Die Strukturberechnung operiert mit den  $h$  Freiheitsgraden des kondensierten FE-Systems, die Kontaktberechnung verwendet lediglich  $d$  kontaktnahe Freiheitsgrade. Die Zuordnung der Freiheitsgrade geschieht im Block *Auswahl/Transformation*

Im Block *Kontakt* wird für jeden der kontaktnahen Knoten  $D_i$  geprüft, ob in Normalrichtung Kontakt zur Fahrbahn besteht. Im Kontaktfall wird durch die Penalty-Methode eine Kraft erzeugt, so dass eine vorgegebene Zwangsbedingung annähernd eingehalten wird. Weiterhin besteht bei Normalkontakt in tangentialer Richtung die Möglichkeit des Haftens oder Gleitens. Beim Haften wird analog zum Normalkontakt eine entsprechend der globalen Kinematik berechnete Zwangsbedingung durch das Penalty-Verfahren aufgeprägt. Für die Berechnungen dieser Zwangsbedingung werden die horizontale Nabengeschwindigkeit  ${}^I v_C$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  benötigt. Im Gleitfall wird eine Reibkraft berechnet, die als eingeprägte Kraft auf das System wirkt. Die Lasten in tangentialer und normaler Richtung  ${}^C \underline{f}_D$  bzw.  ${}^z \underline{f}_D$  werden im Block *Auswahl/Transformation* ins körperfeste Koordinatensystem  $K$  transformiert und in die Form des CB-Lastvektors  ${}^K \underline{f}_h^M$  gebracht. Eine Rückführung innerhalb des *Kontakt*-Blocks sorgt schließlich für die Realisierung der Normalkraftvorgabe  ${}^C \bar{f}_N$ .

### 4.2.1 Struktur-Block

Die theoretischen Grundlagen für das Aufstellen der strukturdynamischen Systemgleichungen wurden in Abschnitt 4.1.2 erläutert. Durch die Verwendung der CB-Kondensation konnte die Anzahl der Freiheitsgrade stark reduziert werden, siehe Abschnitt 4.1.3. Am Ende der Umformungen steht die kondensierte Systemgleichung Gl. (4.38), aus der zu jedem Zeitpunkt die Beschleunigung

$${}^K \ddot{\underline{u}}_h = {}^K \underline{M}_h^{-1} \left( {}^K \underline{f}_h^M + {}^K \underline{B}_C \underline{A}^{KI} {}^I \ddot{\underline{x}}_C + {}^K \underline{B}_t \dot{\Omega} + {}^K \underline{B}_n \Omega^2 - {}^K \underline{D}_h {}^K \dot{\underline{u}}_h - {}^K \underline{K}_h {}^K \underline{u}_h \right) \quad (4.66)$$

ermittelt wird. Für die Berechnung der  $[2 \times 2]$ -Drehmatrix  $\underline{A}^{KI}$  wird der vorgegebene globale Rotationswinkel  $\gamma$  benötigt, siehe Gl. (4.2). Die Verschiebungsgeschwindigkeit  ${}^K \dot{\underline{u}}_h$  und die Verschiebung  ${}^K \underline{u}_h$  werden durch Integration von Gl. (4.66) ermittelt. Die Anfangsbedingungen für die Integration lauten

$${}^K \dot{\underline{u}}_h(t=0) = 0 \quad \text{und} \quad {}^K \underline{u}_h(t=0) = {}^K \underline{u}_h^0, \quad (4.67)$$

mit der in Abschnitt 4.1.4 berechneten statischen Vorverformung  ${}^K \underline{u}_h^0$ . Die Anregung erfolgt einerseits durch den Lastvektor  ${}^K \underline{f}_h^M$ , der die Kontaktlasten in Tangential- und Normalrichtung beinhaltet. Zum anderen wird die Struktur durch Rotation der Nabe  $\Omega(t)$  bzw.  $\dot{\Omega}(t)$  und die translatorische Beschleunigung  ${}^I \dot{v}_C$  des Bezugspunktes, siehe auch Gl. (4.4), angeregt

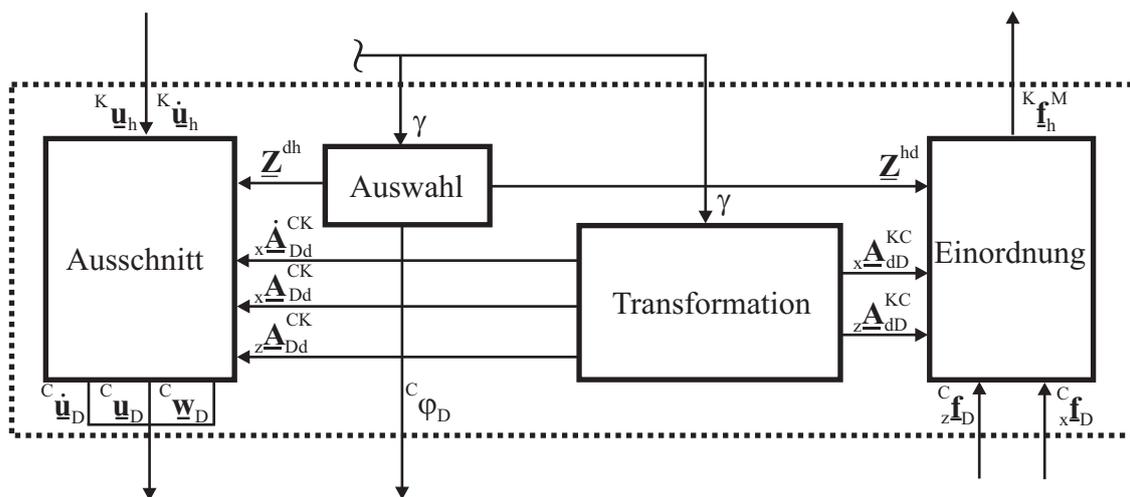
$${}^I \ddot{\underline{x}}_C = \begin{bmatrix} {}^I \dot{v}_C \\ {}^I \ddot{w}_C \end{bmatrix}. \quad (4.68)$$

Die inertielle vertikale Beschleunigung des Rades ist wegen der Parallelität des begleitenden Koordinatensystems  $C$  und des Inertialsystems  $I$  gleich der innerhalb des begleitenden Koordinatensystems aufgestellten vertikalen Nabenbeschleunigung  ${}^I\ddot{w}_C = {}^C\ddot{w}_C$ .

### 4.2.2 Auswahl/Transformations-Block

Während der Simulation alle  $m$  Mantelfreiheitsgrade in das begleitende Koordinatensystem  $C$  zu transformieren und in die Kontaktberechnung einzubeziehen, würde einen erheblichen numerischen Aufwand bedeuten. Daher werden im Block *Auswahl/Transformation* eine begrenzte Anzahl  $D$  von kontaktnahen Knoten für die Kontaktberechnung berücksichtigt. Einen Überblick über den Block gibt **Bild 4.12**. In dem Bereich *Ausschnitt* werden die kontaktnahen Knoten  $D$  bestimmt und aus dem im körperfesten Koordinatensystem  $K$  beschriebenen CB-Verschiebungsvektor  ${}^K\mathbf{u}_h$  die kontaktnahen Verschiebungen  ${}^C\mathbf{u}_D$  und  ${}^C\mathbf{w}_D$  berechnet, die im translatorisch begleitenden Koordinatensystem  $C$  definiert sind. Im Block *Einordnung* werden in umgekehrter Weise die Kontaktlasten in Normal- und Tangentialrichtung  ${}^C_z\mathbf{f}_D$  und  ${}^C_x\mathbf{f}_D$  zusammengefasst und vom begleitenden Koordinatensystem  $C$  ins körperfesteste Koordinatensystem  $K$  transformiert.

Für beide Blöcke wird die Zuordnungsmatrix  $\underline{\mathbf{Z}}^{dh}$  bzw. deren Transponierte  $\underline{\mathbf{Z}}^{hd}$  benötigt, die die Zuordnung der kontaktnahen Knoten  $D$  zu den Mantelknoten  $M$  beinhaltet. Diese Matrizen werden im Block *Auswahl* berechnet. Nach Ausschneiden der körperfesten Verschiebungsfreiheitsgrade  ${}^K\mathbf{u}_d$  werden diese durch die Drehmatrizen  ${}^x\mathbf{A}_{Dd}^{CK}$  und  ${}^z\mathbf{A}_{Dd}^{CK}$  transformiert und in die Einzelrichtungen  ${}^C\mathbf{u}_D$  und  ${}^C\mathbf{w}_D$  aufgespalten.



**Bild 4.12:** Überblick über den Inhalt des Blocks *Auswahl/Transformation*. Die Blöcke *Auswahl* und *Transformation* erstellen die zur Zuordnung und Transformation der kontaktnahen Knoten  $D$  benötigten Matrizen. Über die Blöcke *Ausschnitt* und *Einordnung* erfolgt der Austausch der Kraft- und Verschiebungsgrößen zwischen der Struktur- und der Kontaktmodellierung

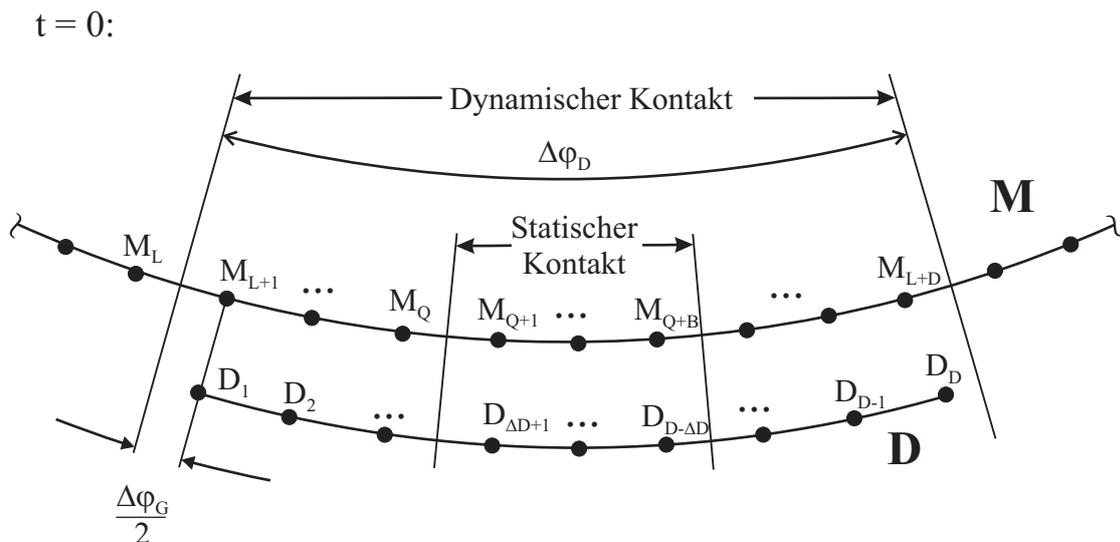
Für die Rücktransformation und Zusammenführung der Kontaktlasten  ${}^C \underline{f}_D$  und  ${}^C \underline{f}_D$  werden analog die inversen Drehmatrizen  ${}^x \underline{A}_{dD}^{KC}$  und  ${}^z \underline{A}_{dD}^{KC}$  benötigt. Die Transformation und Zerlegung des Vektors der Verschiebungsgeschwindigkeit  ${}^K \underline{u}_h$  im Block *Ausschnitt* erfordert weiterhin die zeitlich abgeleitete Drehmatrix  ${}^x \underline{A}_{Dd}^{CK}$ . Die Berechnung sämtlicher Drehmatrizen erfolgt im Block *Transformation*.

#### 4.2.2.1 Auswahl

Im Block *Auswahl* wird bestimmt, welche Mantelknoten  $\mathbf{M}$  sich zum Zeitpunkt  $t$  innerhalb eines festgelegten Kontaktgebietes befinden und damit zu den kontaktnahen Knoten  $\mathbf{D}$  zählen. Um die Ausdehnung dieses Kontaktbereiches festlegen zu können, wird von der statischen Vorberechnung aus Abschnitt 4.1.4 ausgegangen. Die Vorberechnung hatte ergeben, dass  $B$  Mantelknoten  $M_{Q+1} \dots M_{Q+B}$  in Kontakt sind, die Indizes der kontaktierenden Knoten sind im initialen Kontaktindikator  $\mathbf{k}^0$  enthalten. Für die dynamische Kontaktberechnung wird weiterhin noch eine Anzahl von  $\Delta D$  weiteren Knoten pro Randseite berücksichtigt, was auf eine Gesamtanzahl von

$$D = B + 2\Delta D \quad (4.69)$$

Knoten führt. Für den neu entstandenen linken Randknoten wird die Bezeichnung  $M_{L+1} \equiv M_{Q-\Delta D+1}$  eingeführt, so dass nun die Knoten  $M_{L+1} \dots M_{L+D}$  betrachtet werden, siehe **Bild 4.13**. Für die dynamische Kontaktberechnung wird die Menge der kontaktnahen Knoten  $\mathbf{D}$  eingeführt, deren  $D$  Knoten  $D_1 \dots D_D$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  identisch mit den Mantelknoten  $M_{L+1} \dots M_{L+D}$  sind.



**Bild 4.13:** Einführung der kontaktnahen Knoten  $\mathbf{D}$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ , die Zuordnung erfolgt innerhalb der Referenzkonfiguration  $\lambda(t = 0)$

Damit gilt für die initialen Winkelkoordinaten der kontaktnahen Knoten  $\mathbf{D}$  innerhalb der Referenzkonfiguration  $\lambda(t=0)$

$${}^C_{\lambda}\varphi_{\mathbf{D}}(t=0) = [{}^C_{\lambda}\varphi_{M,L+1}(t=0), {}^C_{\lambda}\varphi_{M,L+2}(t=0), \dots, {}^C_{\lambda}\varphi_{M,L+D}(t=0)]^T. \quad (4.70)$$

Wenn sich das Rad in Bewegung setzt, soll ein beliebiger kontaktnaher Knoten  $D_i$  den korrespondierenden Mantelknoten  $M_{L+i}$  so lange begleiten, bis dieser den Kontaktbereich verlässt. Danach wird  $D_i$  dem zum selben Zeitpunkt eintretenden Mantelknoten  $M_{L-D+i}$  zugeordnet. Zunächst wird deswegen die Größe des betrachteten Kontaktgebietes definiert, indem ein innerhalb des begleitenden Koordinatensystems  $C$  konstanter Kontaktwinkel

$$\Delta\varphi_D = D\Delta\varphi_G \quad (4.71)$$

eingeführt wird. Da der Kontaktwinkel  $\Delta\varphi_D$  dem  $D$ -fachen Diskretisierungswinkel  $\Delta\varphi_G$  entspricht, muss sich zu jedem Zeitpunkt  $t$  eine Anzahl von genau  $D$  Knoten innerhalb des Kontaktbereiches befinden. Folglich tritt wie gefordert zum selben Zeitpunkt, in dem ein Mantelknoten  $M_{L+i}$  auf der rechten Seite austritt, auf der linken Seite ein neuer Knoten  $M_{L-D+i}$  ein. Da der Kontaktwinkel  $\Delta\varphi_D$  symmetrisch positioniert sein soll, ergibt sich die Lage des linken Fensterrandes

$${}^C\varphi_D^l = {}^C_{\lambda}\varphi_{D,1}(t=0) - \frac{\Delta\varphi_G}{2}. \quad (4.72)$$

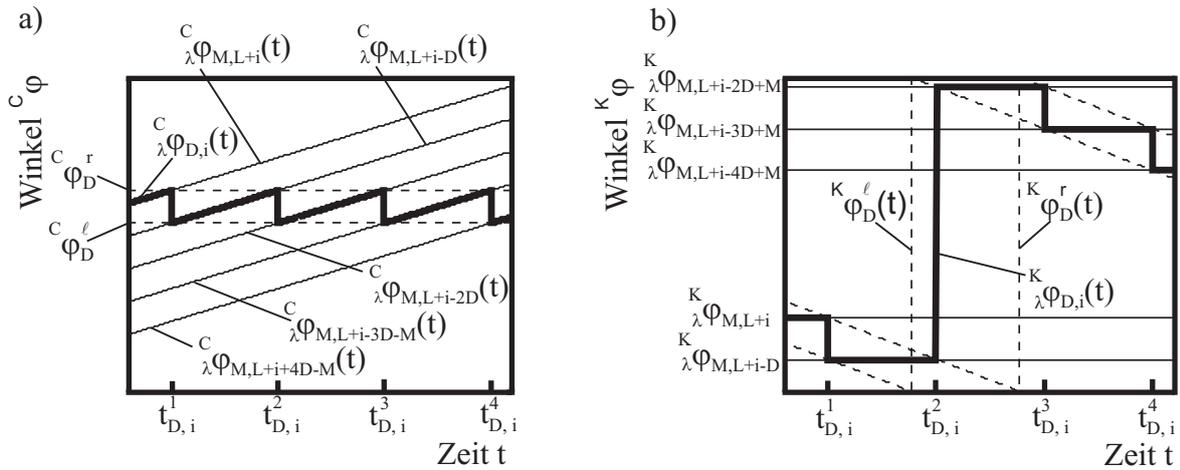
Wird zu Gl. (4.72) der Kontaktwinkel  $\Delta\varphi_D$  addiert, ist die Winkelkoordinate des rechten Randes durch

$${}^C\varphi_D^r = {}^C\varphi_D^l + \Delta\varphi_D = {}^C_{\lambda}\varphi_{D,D}(t=0) + \frac{\Delta\varphi_G}{2} \quad (4.73)$$

gegeben. Unmittelbar nach Beginn der Simulation ist  $D_i$  identisch mit dem korrespondierenden Mantelpunkt  $M_{L+i}$  und besitzt damit innerhalb der Referenzkonfiguration  $\lambda(t)$  die Winkelkoordinate

$${}^C\varphi_{D,i}(t < t_{D,i}^1) = {}^C_{\lambda}\varphi_{M,L+i}(t) = {}^C_{\lambda}\varphi_{M,L+i}(t=0) + \gamma(t). \quad (4.74)$$

Zu dem Zeitpunkt  $t_{D,i}^1$ , in dem  $M_{L+i}$  zum ersten Mal den rechten Fensterrand überstreicht  ${}^C_{\lambda}\varphi_{M,L+i}(t_{D,i}^1) = {}^C\varphi_D^r$ , springt die Winkelkoordinate von  $D_i$  um den Winkel  $\Delta\varphi_D$  zurück zum linken Fensterrand  ${}^C\varphi_D^l$ , wo zum selben Zeitpunkt  $t_{D,i}^1$  der Mantelknoten  $M_{L-D+i}$  eintritt. Dies entspricht einem Sprung von  $D$  Knoten.



**Bild 4.14:** Winkelkoordinaten eines kontaktnahen Punktes  $D_i$  innerhalb der Referenzkonfiguration  $\lambda(t)$ , betrachtet a) aus dem begleitenden Koordinatensystem  $C$ ; b) aus dem körperfesten Koordinatensystem  $K$

Zum Zeitpunkt  $t_{D,i}^2$  erreicht dann auch  $M_{L-D+i}$  den rechten Fensterrand, die Zuordnung des kontaktnahen Knotens  $D_i$  springt dann auf den eintretenden Knoten  $M_{L-2D+i}$ . Die Anzahl der Sprünge sei durch den Sprungzähler  $j$  markiert. Der Index des eintretenden Mantelknotens kann allerdings nicht grundsätzlich durch Subtraktion von  $jD$  ermittelt werden, da er den Wert Eins nicht unterschreiten darf. Beim Überspringen des ersten Mantelknotens  $M_1$  wird deswegen ein weiterer Zähindex  $k$  inkrementiert, so dass die Index-Gleichung

$$1 \leq L + i - jD + kM \leq M \quad (4.75)$$

zu jedem Zeitpunkt erfüllt ist. Der Übersichtlichkeit halber wird für den mittleren Teil von Gl. (4.75) noch der vereinfachende Index

$$e(i, j, k) = L + i - jD + kM \quad (4.76)$$

definiert. Der kontaktnahe Knoten  $D_i$  ist folglich identisch mit dem wechselnden Mantelknoten

$$D_i \equiv M_{e(i,j,k)}, \quad (4.77)$$

so dass neben den Winkelkoordinaten auch die Verschiebungen und wirkenden Knotenlasten vom jeweiligen Mantelknoten zugeordnet werden. So ergibt sich für jeden Zeitpunkt  $t$  die

Zuordnung der Referenz-Winkelkoordinate des kontaktnahen Knotens  $D_i$

$${}^C_{\lambda}\varphi_{D,i}(t_{D,i}^j \leq t \leq t_{D,i}^{j+1}) = {}^C_{\lambda}\varphi_{M,e(i,j,k)}. \quad (4.78)$$

**Bild 4.14** a) zeigt zur Veranschaulichung die Winkelkoordinaten des Punktes  $D_i$  und der beteiligten Mantelknoten aus dem begleitenden Koordinatensystem  $C$ , **Bild 4.14** b) aus dem körperfesten Koordinatensystem  $K$ . Für die Simulation werden die begleitenden Koordinaten  ${}^C_{\lambda}\varphi_{D,i}(t)$  von  $D_i$  und der Index des aktuell korrespondierenden Mantelknotens für die Erstellung der Zuordnungsmatrizen  $\underline{Z}^{dh}$  bzw.  $\underline{Z}^{hd}$  benötigt.

**Berechnung der Koordinaten** Die Winkelkoordinate der kontaktnahen Punkte  $D$  innerhalb des begleitenden Koordinatensystems  $C$  pendelt auf einem Intervall der Breite  $\Delta\varphi_D$  zwischen den Fensterrändern  ${}^C\varphi_D^l$  und  ${}^C\varphi_D^r$ . Für die Berechnung dieser Größe während der Simulation bietet sich die Modulo-Funktion an, deren Teiler der Intervallbreite  $\Delta\varphi_D$  entspricht. Außerdem wird mit Hilfe von Gl. (4.74) noch die Relativkoordinate des Mantelknotens  $M_{e(i,j,k)}$

$$\Delta_{\lambda}^C\varphi_{M,e(i,j,k)}(t) = {}^C_{\lambda}\varphi_{M,e(i,j,k)}(t) - {}^C\varphi_D^l = {}^C_{\lambda}\varphi_{M,e(i,j,k)}(t=0) + \gamma(t) - {}^C\varphi_D^l \quad (4.79)$$

eingeführt, deren Ursprung am linken Fensterrand  ${}^C\varphi_D^l$  liegt, siehe **Bild 4.15**. Das Bild zeigt die kontaktnahen Knoten  $D$  unmittelbar nach dem ersten Sprungzeitpunkt  $t_{D,D}^1$  des kontaktnahen Knotens  $D_D$ . Die Relativkoordinate von  $D_i$  lässt sich schließlich elegant durch die Modulo-Funktion beschreiben

$$\Delta_{\lambda}^C\varphi_{D,i}(t) = (\Delta_{\lambda}^C\varphi_{M,e(i,j,k)}(t)) \bmod (\Delta\varphi_D). \quad (4.80)$$

Analog zu Gl. (4.79) kann nun auch die Absolutkoordinate

$${}^C_{\lambda}\varphi_{D,i}(t) = {}^C\varphi_D^l + \Delta_{\lambda}^C\varphi_{D,i}(t) \quad (4.81)$$

für jeden Zeitpunkt  $t$  angegeben werden, die der in **Bild 4.14** a) abgebildeten Charakteristik entspricht. Der Verlauf der entsprechenden körperfesten Winkelkoordinaten in **Bild 4.14** b) lässt sich aus Gl. (4.81) durch Subtraktion des Rotationswinkels

$${}^K_{\lambda}\varphi_{D,i}(t) = ({}^C_{\lambda}\varphi_{D,i}(t) - \gamma(t)) \bmod (2\pi). \quad (4.82)$$

berechnen. Wie bereits in Gl. (4.80) kommt in Gl. (4.82) die Modulo-Funktion zu Einsatz. Sie sorgt in diesem Fall dafür, dass die springenden körperfesten Winkelkoordinaten im Bereich

$0 \leq \frac{K}{\lambda} \varphi_{D,i}(t) < 2\pi$  bleiben.

**Zuordnung  $M \rightarrow D$**  Analog zur Zuordnung zwischen kontaktnahen Knoten  $D$  und Mantelknoten  $M$  werden die korrespondierenden Verschiebungen, Verschiebungsgeschwindigkeiten oder Knotenlasten einander zugeordnet. Bezüglich der  $Kx$ -Richtung werden dazu die Matrixelemente der sich entsprechenden Knoten  $D_i$  und  $M_{e(i,j,k)}$

$$\kappa_D^i = 2(i - 1) + 1 \quad \text{und} \quad \kappa_M^i = 2(e(i, j, k) - 1) + 1 \tag{4.83}$$

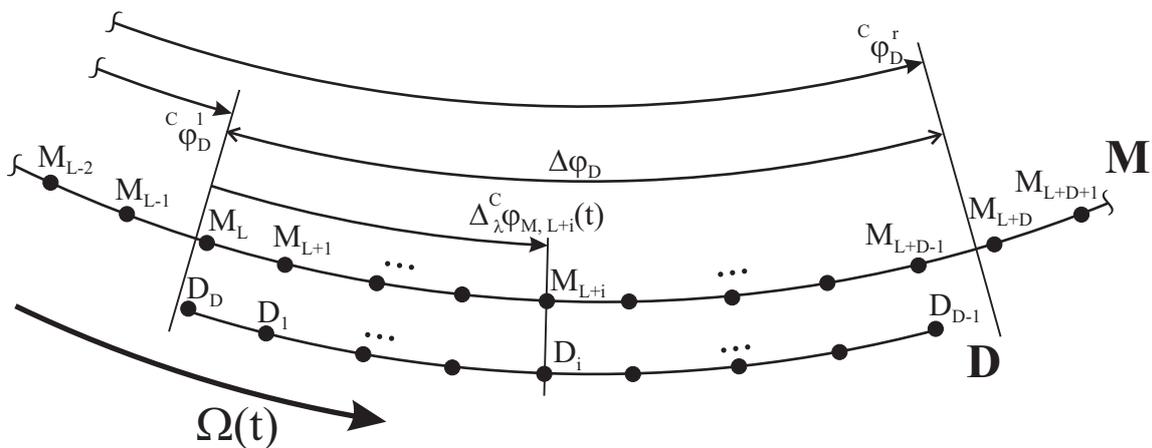
analog zur Anordnung der Freiheitsgrade in Gl. (4.13) berechnet. Auf die gleiche Weise gilt für den  $Kz$ -Freiheitsgrad

$$\vartheta_D^i = 2(i - 1) + 2 \quad \text{und} \quad \vartheta_M^i = 2(e(i, j, k) - 1) + 2. \tag{4.84}$$

Nun kann die  $[d \times h]$ -Zuordnungsmatrix  $\underline{Z}^{dh}$  formuliert werden, für deren Elemente für  $i = 1, 2, \dots, D$  gilt

$$\underline{z}_{\kappa_D^i, \kappa_M^i}^{dh} = 1 \quad \text{sowie} \quad \underline{z}_{\vartheta_D^i, \vartheta_M^i}^{dh} = 1, \tag{4.85}$$

alle anderen Elemente der Matrix sind gleich Null. Die Matrix  $\underline{Z}^{dh}$  ordnet den Verschiebungen, Verschiebungsgeschwindigkeiten, oder Knotenlasten der Knoten  $M$  die entsprechenden Größen der Knoten  $D$  zu.



**Bild 4.15:** Einführung der Relativkoordinate  $\Delta_{\lambda}^C \varphi_{M,L+i}(t)$  zur Beschreibung der Position von  $D_i$  im bewegten System. Das Bild zeigt die kontaktnahen Knoten  $D$  unmittelbar nach dem ersten Sprungzeitpunkt  $t_{D,D}^1$  des kontaktnahen Knotens  $D_D$

So können Verschiebungen, Verschiebungsgeschwindigkeiten und Knotenlasten vom Block *Struktur* in den Block *Kontakt* transportiert werden. Für den umgekehrtem Weg der Zuordnung  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{M}$  wird die Transponierte

$$\underline{\mathbf{z}}^{hd} = (\underline{\mathbf{z}}^{dh})^T \quad (4.86)$$

genutzt. Dies ist legitim, da es sich bei der Zuordnung zwischen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{D}$  um eine orthogonale Abbildung handelt.

#### 4.2.2.2 Transformation

Nachdem die körperfesten Verschiebungen  ${}^K \underline{\mathbf{u}}_d$  der kontaktnahen Knoten  $\mathbf{D}$  aus den Verschiebungen  ${}^K \underline{\mathbf{u}}_h$  der Struktursimulation ausgewählt worden sind, müssen sie noch in das begleitende Koordinatensystem  $C$  transformiert werden. Im gleichen Schritt werden die Verschiebungen in  ${}^C x$ - und  ${}^C z$ -Richtung aufgetrennt, um sie einer separaten Berechnung für die Normal- und Tangentialrichtung zugänglich zu machen. Die Transformation vom körperfesten Koordinatensystem  $K$  ins begleitende Koordinatensystem  $C$  lässt sich für jeden Knoten  $D_i$  durch die Elementardrehmatrix

$${}^C \underline{\mathbf{u}}_{D,i} = \begin{bmatrix} {}^C u_{D,i} \\ {}^C w_{D,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma(t)) & \sin(\gamma(t)) \\ -\sin(\gamma(t)) & \cos(\gamma(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^K u_{D,i} \\ {}^K w_{D,i} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{A}}^{CK} {}^K \underline{\mathbf{u}}_{D,i} \quad (4.87)$$

realisieren, siehe auch Gl. (4.3). Aus den Elementen der ersten Zeile  $\mathbf{a}_{11}^{CK}$  und  $\mathbf{a}_{12}^{CK}$  wird eine globale  $[D \times d]$ -Drehmatrix  ${}_x \underline{\mathbf{A}}_{Dd}^{CK}$  für die Verschiebungen in  ${}^C x$ -Richtung zusammengesetzt

$${}^C \underline{\mathbf{u}}_D = \begin{bmatrix} {}^C u_{D,1} \\ {}^C u_{D,2} \\ \vdots \\ {}^C u_{D,D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11}^{CK} & \mathbf{a}_{12}^{CK} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_{11}^{CK} & \mathbf{a}_{12}^{CK} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{a}_{11}^{CK} & \mathbf{a}_{12}^{CK} \end{bmatrix} {}^K \underline{\mathbf{u}}_d = {}_x \underline{\mathbf{A}}_{Dd}^{CK} {}^K \underline{\mathbf{u}}_d, \quad (4.88)$$

analog wird eine  $[D \times d]$ -Drehmatrix  ${}_z \underline{\mathbf{A}}^{CK}$  für die Verschiebungen in  ${}^C z$ -Richtung aufgestellt

$${}^C \underline{\mathbf{w}}_D = \begin{bmatrix} {}^C w_{D,1} \\ {}^C w_{D,2} \\ \vdots \\ {}^C w_{D,D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{21}^{CK} & \mathbf{a}_{22}^{CK} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_{21}^{CK} & \mathbf{a}_{22}^{CK} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{a}_{21}^{CK} & \mathbf{a}_{22}^{CK} \end{bmatrix} {}^K \underline{\mathbf{u}}_d = {}_z \underline{\mathbf{A}}_{Dd}^{CK} {}^K \underline{\mathbf{u}}_d. \quad (4.89)$$

Die Transformationen können umgekehrt werden, indem analog zu Gl. (4.86) die transponierten Matrizen

$${}_x\mathbf{A}_{dD}^{KC} = ({}_x\mathbf{A}_{Dd}^{CK})^T \quad \text{und} \quad {}_z\mathbf{A}_{dD}^{KC} = ({}_z\mathbf{A}_{Dd}^{CK})^T \quad (4.90)$$

angewendet werden, da es sich auch in diesem Fall um orthogonale Abbildungen handelt. Die ebenfalls benötigte zeitlich abgeleitete Drehmatrix  ${}_x\dot{\mathbf{A}}_{Dd}^{CK}$  lässt sich wegen

$$\dot{\mathbf{a}}_{11}^{CK} = \Omega(t) \mathbf{a}_{21}^{CK} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{a}}_{12}^{CK} = \Omega(t) \mathbf{a}_{22}^{CK} \quad (4.91)$$

aus der vorhandenen  ${}_z\mathbf{A}_{Dd}^{CK}$  berechnen, es gilt folglich

$$\frac{d}{dt} ({}_x\mathbf{A}_{Dd}^{CK}) = \Omega(t) {}_x\dot{\mathbf{A}}_{Dd}^{CK} = \Omega(t) {}_z\mathbf{A}_{Dd}^{CK}. \quad (4.92)$$

Auf diese Weise können die Verschiebungen, Verschiebungsgeschwindigkeiten, sowie die Knotenlasten vom körperfesten Koordinatensystem  $K$  ins begleitende Koordinatensystem  $C$  transformiert werden und umgekehrt. Innerhalb des begleitenden Koordinatensystems  $C$  werden die Größen somit in eine Normal- und eine Tangentialkomponente aufgeteilt.

#### 4.2.2.3 Ausschnitt/Einordnung

Mit den in Abschnitt 4.2.2.1 und Abschnitt 4.2.2.2 hergeleiteten Matrizen  $\underline{\mathbf{Z}}^{dh}$  bzw.  $\underline{\mathbf{Z}}^{hd}$  und  ${}_x\mathbf{A}_{Dd}^{CK}$  bzw.  ${}_z\mathbf{A}_{Dd}^{CK}$  können zu jedem Zeitpunkt  $t$  Größen zwischen der Kontakt- und der Strukturberechnung ausgetauscht werden. Für die Verschiebungen gilt

$${}^C\mathbf{u}_D = {}_x\mathbf{A}_{Dd}^{CK} \underline{\mathbf{Z}}^{dhK} \mathbf{u}_h \quad \text{und} \quad {}^C\mathbf{w}_D = {}_z\mathbf{A}_{Dd}^{CK} \underline{\mathbf{Z}}^{dhK} \mathbf{u}_h. \quad (4.93)$$

Für die Berechnung der Relativgeschwindigkeit  ${}^C v_{D,i}^{rel}$  wird weiterhin die Ableitung  ${}^C \dot{u}_{D,i}$  der Knotenverschiebung im begleitenden Koordinatensystem  $C$  benötigt. Da Zeitableitungen in einer Zeitschrittintegration mit variabler Schrittweite sehr ungenau ausfallen können, soll die in der Strukturmechanik berechnete Verschiebungsgeschwindigkeit  ${}^K \dot{\mathbf{u}}_h$  „importiert“ werden. Dazu wird Gl. (4.93) abgeleitet und anschließend die abgeleitete Drehmatrix  ${}_x\dot{\mathbf{A}}_{Dd}^{CK}$  aus Gl. (4.92) eingesetzt

$${}^C \dot{\mathbf{u}}_D = \Omega(t) {}_x\dot{\mathbf{A}}_{Dd}^{CK} \underline{\mathbf{Z}}^{dhK} \mathbf{u}_h + {}_x\mathbf{A}_{Dd}^{CK} \underline{\mathbf{Z}}^{dhK} \dot{\mathbf{u}}_h = \Omega(t) {}_z\mathbf{A}_{Dd}^{CK} \underline{\mathbf{Z}}^{dhK} \mathbf{u}_h + {}_x\mathbf{A}_{Dd}^{CK} \underline{\mathbf{Z}}^{dhK} \dot{\mathbf{u}}_h. \quad (4.94)$$

Für die Transformation und Zusammenfassung der Kontaktlasten  ${}^C \mathbf{f}_D$  bzw.  ${}^C \mathbf{f}_D$  müssen die Umformungen aus Gl. (4.93) in umgekehrter Richtung stattfinden. Mit Hilfe der trans-

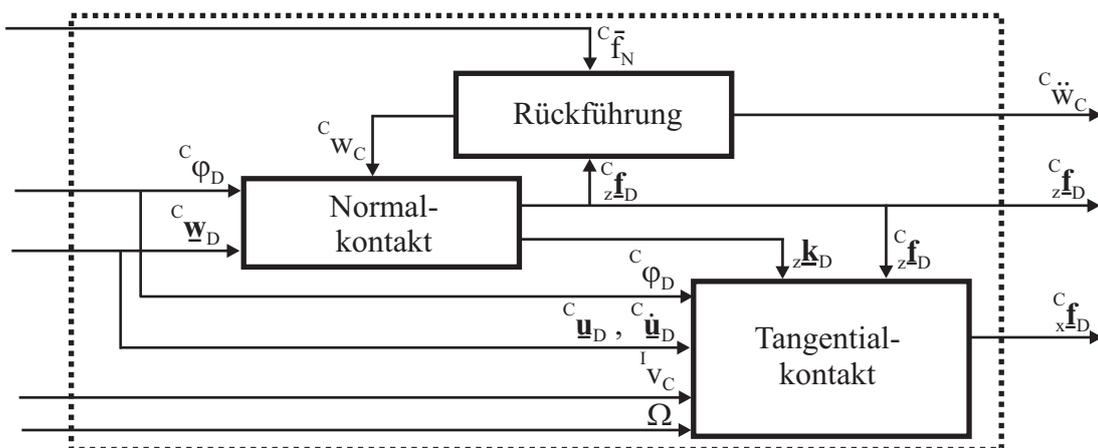
ponierten Matrizen  $\underline{\mathbf{Z}}^{hd}$ ,  ${}_x\underline{\mathbf{A}}_{dD}^{KC}$  und  ${}_z\underline{\mathbf{A}}_{dD}^{KC}$  können die Knotenlasten transformiert und zusammengeführt werden

$${}^K\underline{\mathbf{f}}_h = \underline{\mathbf{Z}}^{hd} \left( {}_x\underline{\mathbf{A}}_{dD}^{KC} {}^C\underline{\mathbf{f}}_D + {}_z\underline{\mathbf{A}}_{dD}^{KC} {}^z\underline{\mathbf{f}}_D \right). \quad (4.95)$$

Damit ist gewährleistet, dass in der Kontaktberechnung lediglich mit einer reduzierten Auswahl von kontaktnahen Freiheitsgraden gerechnet werden muss.

### 4.2.3 Kontakt

Einen Überblick über die Kontaktberechnung zeigt **Bild 4.16**. Im Block *Normalkontakt* werden die kontaktnahen Knoten  $\mathbf{D}$  auf Kontakt zur Fahrbahn überprüft. Falls für einen Knoten  $D_i$  Normalkontakt vorliegt, wird als Reaktion eine Knotenlast  ${}^C\underline{f}_{D,i}$  berechnet, so dass die Durchdringung des Knotens in die Fahrbahn annähernd Null wird. Der Normalkontaktindikator  ${}_z\underline{\mathbf{k}}_D$  trägt die Information über Kontakt oder Nichtkontakt der kontaktnahen Knoten  $\mathbf{D}$ . Eine *Rückführung*, über den die vertikalen Kontaktlasten  ${}^C\underline{\mathbf{f}}_D$  zurückgeführt werden, realisiert durch Stellen der vertikalen Nabenverschiebung  ${}^Cw_C$  den vorgegebenen Normalkraftverlauf  ${}^C\bar{f}_N$ . Im Block *Tangentialkontakt* wird für die Knoten, die in Normalkontakt stehen, berechnet, ob Gleiten oder Haften vorliegt. Beim Haften wird dem Knoten eine Zwangsbedingung vorgegeben, aus der mit Hilfe der Penalty-Methode eine Reaktionskraft berechnet wird. Beim Gleiten wird abhängig von Relativgeschwindigkeit  ${}^Cv_{D,i}^{rel}$  und Normallast  ${}^C\underline{f}_{D,i}$  eine Gleitkraft berechnet. Die resultierenden tangentialen Knotenlasten  ${}^C\underline{\mathbf{f}}_D$  werden zusammen mit den normalen Knotenlasten  ${}^C\underline{\mathbf{f}}_D$  im Block *Auswahl/Transformation* zusammengefasst und wirken dann im Block *Struktur* als Lastvektor  ${}^K\underline{\mathbf{f}}_h^M$  auf die Radstruktur, siehe auch **Bild 4.11**.



**Bild 4.16:** Überblick über die Kontaktberechnung: In den Blöcken *Normalkontakt* und *Tangentialkontakt* werden die Kontaktlasten  ${}^C\underline{\mathbf{f}}_D$  und  ${}^C\underline{\mathbf{f}}_D$  berechnet. Der Block *Rückführung* sorgt für die Umsetzung der Vorgabe für den Normalkraftverlauf  ${}^C\bar{f}_N$

### 4.2.3.1 Rückführung

Da für die Kontaktberechnung die vertikale Nabenverschiebung  ${}^C w_C$  verwendet wird, als Eingangsvariable des Gesamtmodells aber der globale Normalkraftverlauf  ${}^C \bar{f}_N$  vorgegeben ist, muss zur Realisierung des Soll-Kraftverlaufes eine Rückführung eingesetzt werden. Dazu werden zunächst die im Block *Normalkontakt* berechneten normalen Knotenlasten  ${}^C \underline{f}_D$  zur globalen Normalkraft aufsummiert

$${}^C f_N = -b_g \sum_{i=1}^D {}^C f_{D,i}. \quad (4.96)$$

Wie schon in der statischen Vorberechnung in Abschnitt 4.1.4 erhält die Summe in Gl. (4.96) ein negatives Vorzeichen, da auf Grund der Ausrichtung des begleitenden Koordinatensystems  $C$  die Beträge der normalen Knotenlasten  ${}^C f_{D,i}$  prinzipiell negativ sind. Um aus der Summe der Linienlasten ferner die globale Normalkraft zu erhalten, muss der Ausdruck mit der Radbreite  $b_g$  multipliziert werden. Für einen modellgestützten Rückführungsentwurf wird ein Ein-Freiheitsgrad-Modell des vom Kontakt freigeschnittenen Rades betrachtet, siehe **Bild 4.17**. Auf die Nabe des Modells wirkt die globale Normalkraftvorgabe  ${}^I \bar{f}_N$ , im Kontakt die resultierende senkrechte Kontaktkraft  ${}^I f_N$ , siehe Gl. (4.96). Die Kräfte sind hier im Inertialsystem  $I$  beschrieben, um im folgenden den Impulssatz für das Ein-Freiheitsgrad-Modell aufzustellen. Da das begleitende Koordinatensystem  $C$  nur translatorisch beschleunigt ist, also zu jedem Zeitpunkt parallel zum Inertialsystem  $I$  gerichtet ist, entsprechen  ${}^I \bar{f}_N$  bzw.  ${}^I f_N$  den Werten aus dem begleitenden Koordinatensystem  ${}^C \bar{f}_N$  bzw.  ${}^C f_N$ . Wie beschrieben wird nun der Impulssatz für das gegebene System aufgestellt

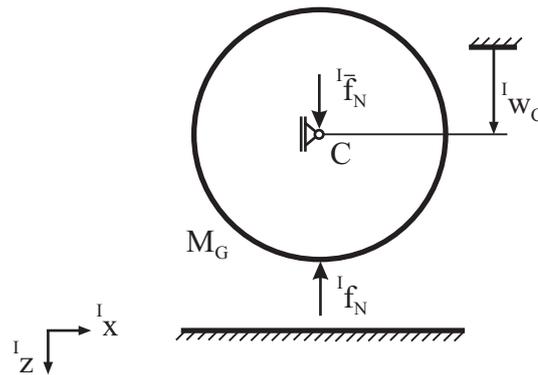
$$M_G {}^I \ddot{w}_C = {}^I \bar{f}_N - {}^I f_N. \quad (4.97)$$

Die für Gl. (4.97) benötigte Gesamtmasse des Rades wird mit Hilfe des geometrischen Volumens bestimmt

$$M_G = \varrho_g V_g = \varrho_g \pi b_g (r_M^2 - r_N^2), \quad (4.98)$$

mit der Dichte  $\varrho_g$  des Gummis und der Breite  $b_g$  des Rades, siehe Abschnitt 4.1.2. Der gesuchte Zeitverlauf der Ausgangsgröße  ${}^C w_C$  der Rückführung lässt sich nun durch Integration von  ${}^I \ddot{w}_C$  aus Gl. (4.97) ermitteln, als Anfangsbedingungen werden  ${}^C \dot{w}_C(t=0) = 0$  sowie aus der statischen Vorberechnung Abschnitt 4.1.4.3  ${}^C w_C(t=0) = {}^C w_C^0$  festgelegt,

$${}^C w_C(t) = {}^C w_C^0 + \frac{1}{M_G} \int_0^t \int_0^{\hat{t}} ({}^I \bar{f}_N(\hat{t}) - {}^I f_N(\hat{t})) d\hat{t} d\tilde{t}. \quad (4.99)$$



**Bild 4.17:** Freikörperbild des Rades, im Kontakt wirkt die globale Kontaktkraft  ${}^C f_N$ , in der Nabe der Soll-Kontaktkraft  ${}^C \bar{f}_N$ .

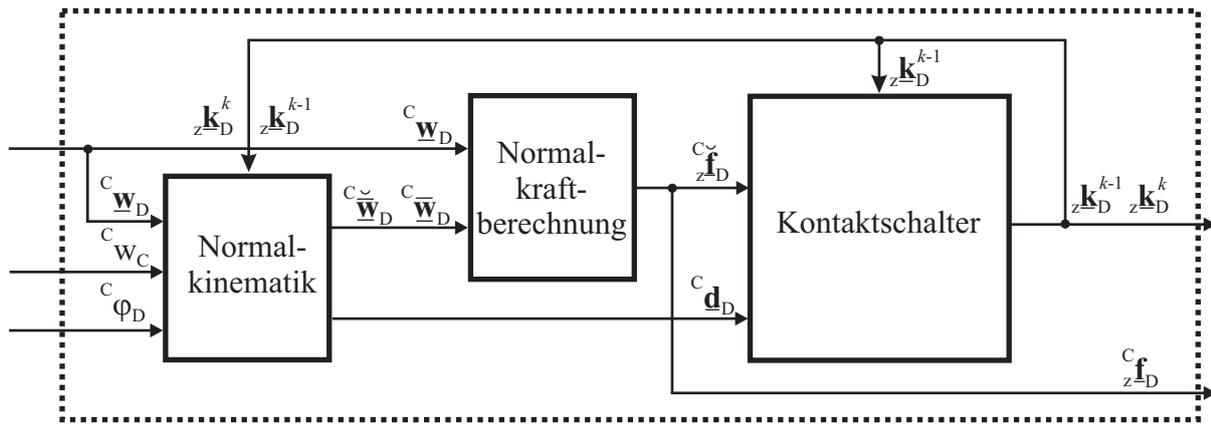
Die vertikale Nabenbeschleunigung  ${}^I \ddot{w}_C$ , die somit ebenfalls explizit vorliegt, wird im Block *Struktur* für die Berechnung der Anregung der Radstruktur benötigt, siehe Abschnitt 4.2.1.

#### 4.2.3.2 Normalkontakt

Die Berechnung des dynamischen Normalkontakts wird ähnlich wie bei der statischen Kontaktberechnung in Abschnitt 4.1.4 mit Hilfe der Penalty-Methode realisiert. Um die Kontaktverhältnisse zu berechnen, findet allerdings keine Iteration statt, es wird stattdessen der Kontaktzustand des vorangegangenen Zeitschrittes einbezogen. Eine Übersicht über den Block *Normalkontakt* zum Zeitpunkt  $t^k$  zeigt **Bild 4.18**. Die zentrale Größe der Berechnung stellt der Normalkontaktindikator  ${}_z \underline{k}_D$  dar. Zum Zeitpunkt  $t^k$  wird der aktuelle Indikator  ${}_z \underline{k}_D^k$  sowie der aus dem vorangegangenen Zeitschritt  ${}_z \underline{k}_D^{k-1}$  für die Berechnungen verwendet. Bei allen anderen Größen wird lediglich der aktuelle Wert benutzt, daher wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit auf eine Indizierung des Zeitschrittes verzichtet. Zu Beginn der Simulation wird der initiale Normalkontaktindikator  ${}_z \underline{k}_D^0$  mit Hilfe des in der statischen Vorberechnung ermittelten statischen Kontaktindikators  $\underline{k}^0$ , siehe Abschnitt 4.1.4, berechnet

$${}_z k_{D,i}^0 = \begin{cases} 1 & \text{für } (L+i) \in \underline{k}^0 \\ 0 & \text{für } (L+i) \notin \underline{k}^0 \end{cases} . \quad (4.100)$$

Im Block *Kontaktschalter* wird zur Berechnung des aktuellen Kontaktindikators  ${}_z \underline{k}_D^k$  abhängig von dem Vorgängerwert  ${}_z \underline{k}_D^{k-1}$  die Durchdringung  ${}^C \underline{d}_D$  oder die vorläufige normale Knotenlast  ${}^C \check{\underline{f}}_D$  verwendet. Die Berechnung der Durchdringung  ${}^C \underline{d}_D$  findet im Block *Normalkinematik* statt. Außerdem wird hier noch die vorläufige Zwangsbedingung  ${}^D \check{\underline{w}}_D$  zur Berechnung der vorläufigen normalen Knotenlast  ${}^C \check{\underline{f}}_D$  berechnet. Ist im Block *Kontaktschalter* der aktuelle Wert des Normalkontaktindikators  ${}_z \underline{k}_D^k$  festgelegt, wird mit dieser Größe die endgültige Zwangsbedingung  ${}^D \bar{\underline{w}}_D$  bestimmt. Im Block *Normalkraftberechnung* wird aus der vorläufigen und der aktuellen Zwangsbedingung  ${}^D \check{\underline{w}}_D$  bzw.  ${}^D \bar{\underline{w}}_D$  (zusammen mit dem aktuellen Wert der vertikalen Strukturverschiebung  ${}^C \underline{w}_D$ ) durch die Penalty-Methode eine Reaktionskraft  ${}^C \check{\underline{f}}_D$  bzw.  ${}^C \underline{f}_D$  berechnet.



**Bild 4.18:** Berechnung des Normalkontakts zum Zeitpunkt  $t^k$ . Im Block *Kontaktschalter* werden die Kontaktbedingungen überprüft. Im Block *Normalkraftberechnung* werden die nötigen Kontaktlasten bestimmt, um die Zwangsbedingungen aus dem Block *Normalkinematik* näherungsweise zu erfüllen

**Normalkinematik** Analog zur statischen Vorberechnung in Abschnitt 4.1.4 wird auch bei der dynamischen Normalkontaktberechnung die Durchdringung  ${}^C d_{D,i}$  für die Kontaktbestimmung benötigt. Aus der bereits in der statischen Vorberechnung, siehe Abschnitt 4.1.4, eingeführten Kontaktkonfiguration  $\bar{\delta}(t)$  lassen sich die Zwangsbedingungen  ${}^C \bar{w}_{D,i}$  bzw.  ${}^C \check{w}_{D,i}$  ableiten. **Bild 4.19** zeigt die Radstruktur im kontaktierenden sowie im nichtkontaktierenden Bereich. Die  ${}^C z$ -Koordinate der Fahrbahn entspricht der negativen Koordinate  ${}^C z_C$  des Radmittelpunktes  $C$

$${}^C z_F = -{}^C z_C = r_M - {}^C w_C. \quad (4.101)$$

Wird nun ein beliebiger kontaktnaher Knoten  $D_i$  des Radmantels innerhalb der Referenzkonfiguration  $\lambda(t)$  betrachtet, kann seine  ${}^C z$ -Koordinate aufgrund der Kreisbewegung auf einfache Weise bestimmt werden

$${}^C_{\lambda} z_{D,i} = -r_M \sin({}^C_{\lambda} \varphi_{D,i}). \quad (4.102)$$

Da der Kontaktbereich im Bereich  $\pi < {}^C_{\lambda} \varphi_{D,i} < 2\pi$  liegt, gilt stets  ${}^C_{\lambda} z_{D,i} > 0$ . Die  ${}^C z$ -Koordinate des Knotens  $D_i$  innerhalb der Endkonfiguration lässt sich dann in bekannter Weise durch die Summe aus Referenzkoordinate in Gl. (4.102) und der dynamischen Verschiebung  ${}^C w_{D,i}$  beschreiben

$${}^C_{\delta} z_{D,i} = {}^C_{\lambda} z_{D,i} + {}^C w_{D,i}. \quad (4.103)$$

Wie in **Bild 4.19** zu sehen, besteht die gesuchte Durchdringung  ${}^C d_{D,i}$  des verformten Rades



${}^C\bar{w}_{D,i}$  mit aktueller Kontaktkoordinate  ${}^C\bar{z}_{D,i}$  aus Gl. (4.106) analog berechnet.

**Normalkraftberechnung** Zunächst wird die vorläufige Knotenlast  ${}^C\check{f}_{D,i}$  für den Kontaktindikator  ${}^zk_{D,i}^{k-1}$  des vorangegangenen Zeitschrittes berechnet. Entsprechend der Penalty-Methode wird die vertikale vorläufige Zwangsbedingung  ${}^C\check{w}_{D,i}$  aufgeprägt und durch Wahl der relativ hohen Penalty-Konstanten  $p_K$  als Reaktion eine Knotenlast

$${}^C\check{f}_{D,i} = p_K ({}^C\check{w}_{D,i} - {}^Cw_{D,i}) \quad (4.107)$$

erzeugt. Die Penalty-Konstante  $p_K$  entspricht der schon bei der statischen Berechnung in Abschnitt 4.1.4.2 verwendeten Konstante. Wie bereits im Block *Normalkinematik* wird nach Feststehen des aktuellen Kontaktindicators  ${}^zk_{D,i}^k$  auch Gl. (4.107) neu berechnet, um schließlich die aktuelle Ausgangsgröße  ${}^Cf_{D,i}$  zu erhalten. Da die vertikale Zwangsbedingung  ${}^C\bar{w}_{D,i}$  nur bei Kontaktknoten  ${}^zk_{D,i}^k = 1$  von der Strukturverschiebung  ${}^Cw_{D,i}$  abweicht, siehe Gl. (4.106), wird auch nur in diesem Fall eine normale Knotenlast  ${}^C\check{f}_{D,i}$  bzw.  ${}^Cf_{D,i}$  ungleich Null erzeugt.

**Kontaktschalter** Die Berechnung des Normalkontaktindicators  ${}^Ck_{D,i}^k = {}^Ck_{D,i}(t^k)$  ist abhängig von seinem Wert im vorangegangenen Zeitschritt  $t^{k-1}$ . War der Knoten  $D_i$  beim vorangegangenen Zeitschritt nicht in Kontakt,  ${}^zk_{D,i}^{k-1} = 0$ , muss die in Gl. (4.104) beschriebene Durchdringung  ${}^Cd_{D,i}$  auf ihr Vorzeichen überprüft werden. Diese geometrische Kontaktbedingung lautet

$${}^zk_{D,i}^k ({}^zk_{D,i}^{k-1} = 0) = \begin{cases} 1 & \text{für } {}^Cd_{D,i} > 0 \\ 0 & \text{für } {}^Cd_{D,i} \leq 0 \end{cases}. \quad (4.108)$$

War der Knoten  $D_i$  im vorangegangenen Zeitschritt in Kontakt,  ${}^zk_{D,i}^{k-1} = 1$ , muss die in Gl. (4.107) probenhalber berechnete Kontaktlast  ${}^C\check{f}_{D,i}$  auf ihr Vorzeichen überprüft werden. Es muss in diesem Fall also eine Kraft-Bedingung überprüft werden

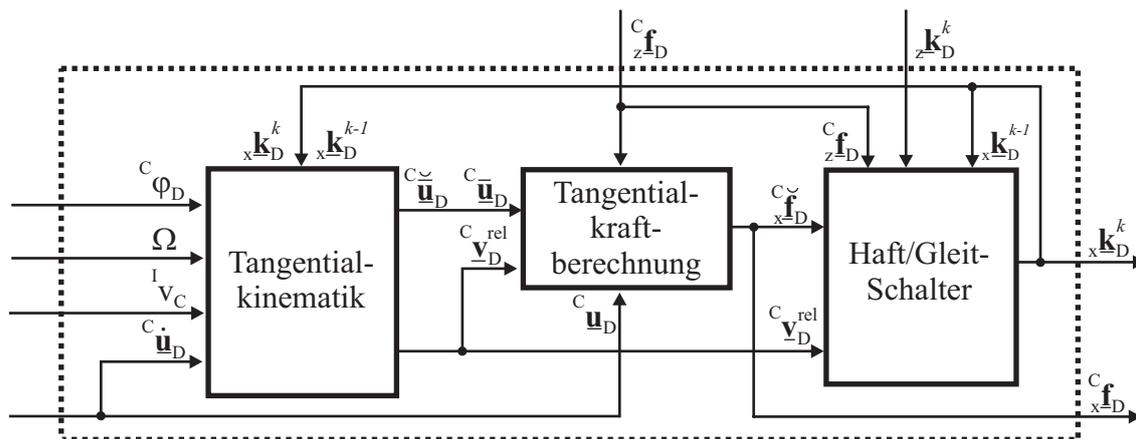
$${}^zk_{D,i}^k ({}^zk_{D,i}^{k-1} = 1) = \begin{cases} 1 & \text{für } {}^C\check{f}_{D,i} < 0 \\ 0 & \text{für } {}^C\check{f}_{D,i} \geq 0 \end{cases}. \quad (4.109)$$

Nach Berechnung des aktuellen Kontaktindizes  ${}^zk_{D,i}^k$  wird mit der im Block *Normalkinematik* bestimmten Zwangsbedingung  ${}^C\bar{w}_{D,i}$  die aktuelle vertikale Knotenlast  ${}^Cf_{D,i}$  berechnet, die die globale Ausgangsgröße des Blocks *Normalkontakt* darstellt.

### 4.2.3.3 Tangentialkontakt

Für die kontaktnahen Knoten  $D_i$ , für die zum Zeitpunkt  $t^k$  Normalkontakt herrscht,  ${}_z k_{D,i}^k = 1$ , wird im Block *Tangentialkontakt* auch in Tangentialrichtung  ${}^C x$  eine Last  ${}^C_x f_{D,i}$  berechnet. Hierbei wird zwischen Haften und Gleiten unterschieden. Der aktuelle Zustand des Knotens  $D_i$  wird dabei durch den tangentialen Kontaktindikator  ${}_x k_{D,i}^k$  festgehalten. Das Blockschaltbild des Tangentialkontaktmoduls ist in **Bild 4.20** zu sehen. Im Block *Haft-/Gleit-Schalter* wird für den Punkt  $D_i$  der aktuelle tangential Kontaktindikator  ${}_x k_{D,i}^k$  berechnet. Wie beim Normalkontakt in Abschnitt 4.2.3.2 werden dazu abhängig vom Wert des Indikators aus dem vorangegangenen Zeitschritt  ${}_x k_{D,i}^{k-1}$  verschiedene Ungleichungen auf ihre Gültigkeit überprüft. Für die Haftprüfung werden die vorläufige tangentiale Knotenlast  ${}^C_x \check{f}_{D,i}$  sowie die aktuelle normale Knotenlast  ${}_z f_{D,i}$  benötigt, zur Überprüfung des Gleitens wird die Relativgeschwindigkeit  ${}^C v_{D,i}^{rel}$  verwendet.

Im Block *Tangentialkinematik* werden die vorläufige bzw. die aktuelle Zwangsbedingung  ${}^C \check{u}_{D,i}$  bzw.  ${}^C \bar{u}_{D,i}$ , sowie die Relativgeschwindigkeit  ${}^C v_{D,i}^{rel}$  für die Kraftberechnung der Haft- und Gleitknoten ermittelt. Für die relativkinematischen Berechnungen werden sowohl die globalen Größen Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  und Nabengeschwindigkeit  ${}^I v_C$  als auch die lokalen Größen Referenzwinkel  ${}^C \varphi_D$  und Verschiebungsgeschwindigkeit  ${}^C \dot{\mathbf{u}}_D$  benötigt. Im Block *Tangentialkraftberechnung* wird zunächst probenhalber aus der vorläufigen Verschiebungsvorgabe  ${}^C \check{u}_{D,i}$  und der aktuellen Verschiebung  ${}^C u_{D,i}$  die vorläufige tangentiale Haftkomponente  ${}^C_x \check{f}_{D,i}^{hh}$  berechnet. Liegt der aktuelle tangential Kontaktindikator  ${}_x k_{D,i}^k$  vor, wird die tatsächliche aktuelle Knotenlast  ${}^C_x f_{D,i}^h$  berechnet. Für gleitende Knoten  ${}_x k_{D,i}^k = 0$ , wird die gleitende Knotenlast  ${}^C_x f_{D,i}^g$  aus der Relativgeschwindigkeit  ${}^C v_{D,i}^{rel}$  und der normalen Knotenlast  ${}_z f_{D,i}$  berechnet. Aus den Lasten von gleitenden und haftenden Knoten setzt sich der tangentiale Knotenlastvektor  ${}^C_x \underline{f}_D$  zusammen, der eine Ausgangsgröße des Gesamtmodells darstellt.



**Bild 4.20:** Überblick über das Tangentialkontakt-Modul. Im Block *Haft-/Gleit-Schalter* werden die Bedingungen für Haften und Gleiten überprüft, im Block *Tangentialkraftberechnung* die entsprechende Last berechnet. Die Zwangsbedingung für Haften und die Relativgeschwindigkeit für Gleiten wird im Block *Tangentialkinematik* ermittelt

**Tangentialkinematik** Für die Berechnung der Relativgeschwindigkeit  ${}^C v_{D,i}^{rel}$  wird die Geschwindigkeit des Punktes  $D_i$  innerhalb der Endkonfiguration  $\delta$  benötigt, die sich aus der Referenzgeschwindigkeit  ${}^C_{\lambda} \dot{x}_{D,i}$  und der Verschiebungsgeschwindigkeit  ${}^C \dot{u}_{D,i}$  zusammensetzt. Die Referenzgeschwindigkeit  ${}^C_{\lambda} \dot{x}_{D,i}$  kann wegen der Kreisbewegung des Punktes  $D_i$  vereinfacht berechnet werden, so dass sich der Ausdruck

$${}^C_{\delta} \dot{x}_{D,i} = {}^C_{\lambda} \dot{x}_{D,i} + {}^C \dot{u}_{D,i} = -r_M \Omega \sin({}^C_{\lambda} \varphi_{D,i}) + {}^C \dot{u}_{D,i} \quad (4.110)$$

ergibt. Die Verschiebungsgeschwindigkeit  ${}^C \dot{u}_{D,i}^k$  wird wegen der Ungenauigkeit von Zeitableitungen bei variabler Schrittweite nicht durch Differentiation, sondern direkt aus dem Block *Struktur* bezogen, siehe Gl. (4.94). Des Weiteren wird die aus dem begleitenden Koordinatensystem  $C$  betrachtete tangentielle Geschwindigkeit der Fahrbahn bestimmt, die der negativen Nabengeschwindigkeit entspricht

$${}^C v_F = {}^I v_C. \quad (4.111)$$

Die gesuchte Relativgeschwindigkeit besteht schließlich aus der aktuellen Differenz zwischen der Geschwindigkeit des Punktes  $D_i$  innerhalb der Endkonfiguration  $\delta$  nach Gl. (4.110) und der Geschwindigkeit der Fahrbahn nach Gl. (4.111)

$${}^C v_{D,i}^{rel} = \left(1 - {}^C_x k_{D,i}^k\right) \left({}^C_{\delta} \dot{x}_{D,i} - {}^C v_F\right), \quad (4.112)$$

sie ist nur für gleitende Knoten ungleich Null. Während des Haftens müsste der Betrag von  ${}^C v_{D,i}^{rel}$  zwar bei unendlich steifer Anbindung an die Zwangsbedingung  ${}^C \bar{u}_{D,i}$  gleich Null sein. Wegen der endlichen Penalty-Konstante  $p_K$  gilt allerdings während des Haftens nicht  ${}^C \dot{w}_{D,i} \approx {}^C \dot{\bar{w}}_{D,i}$ , so dass dieses in Gl. (4.112) nun durch einen Vorfaktor gesetzt wird. Werden Gl. (4.110) und Gl. (4.111) in Gl. (4.112) eingesetzt, ergibt sich die Relativgeschwindigkeit in Abhängigkeit der gegebenen Größen

$${}^C v_{D,i}^{rel} = \left(1 - {}^C_x k_{D,i}^k\right) \left(-r_M \Omega \sin({}^C_{\lambda} \varphi_{D,i}) + {}^C \dot{u}_{D,i} - {}^I v_C\right). \quad (4.113)$$

Die zweite im Block *Tangentialkinematik* berechnete Größe ist die Zwangsbedingung  ${}^C \check{\bar{u}}_{D,i}$  bzw.  ${}^C \bar{u}_{D,i}$ , die im Haftfall,  ${}^C_x k_{D,i}^k = 1$ , für die Berechnung der vorläufigen bzw. der aktuellen Haftkomponente  ${}^C_x \check{f}_{D,i}^h$  bzw.  ${}^C_x f_{D,i}^h$  benötigt wird. Diese Größe wird während des Haftens durch Integration der zeitlichen Änderung der Zwangsbedingung  ${}^C \dot{\bar{u}}_{D,i}$  berechnet, um ein kraftfreies Anhaften des Knotens  $D_i$  zu ermöglichen. Beim Haften ist die vorgegebene Geschwindigkeit  ${}^C_{\delta} \dot{\bar{x}}_{D,i}$  des Mantelknotens  $D_i$  innerhalb der Endkonfiguration  $\delta$  gleich der Geschwindigkeit

der Fahrbahn

$${}^C_{\delta} \dot{x}_{D,i} = {}^C v_F = {}^I v_C, \quad (4.114)$$

siehe Gl. (4.111). Wird  ${}^C_{\delta} \dot{x}_{D,i}$  für  ${}^C \dot{x}_{D,i}$  in Gl. (4.110) eingesetzt und die Gleichung nach der Verschiebungsgeschwindigkeit  ${}^C \dot{u}_{D,i}$  aufgelöst, erhält man die gesuchte zeitliche Änderung der Zwangsbedingung

$${}^C \dot{u}_{D,i} = {}^I v_C + \Omega r_M \sin\left(\frac{C}{\lambda} \varphi_{D,i}\right). \quad (4.115)$$

Die Integration von  ${}^C \dot{u}_{D,i}$  verläuft bereichsweise, da die gesuchten Größen  ${}^C \bar{u}_{D,i}$  und  ${}^C \check{u}_{D,i}$  beim Übergang vom Haften ins Gleiten springen müssen. **Bild 4.21** zeigt die Verläufe der Zwangsbedingungen  ${}^C \bar{u}_{D,i}$  bzw.  ${}^C \check{u}_{D,i}$  sowie der Strukturverschiebung  ${}^C u_{D,i}$ . Während der Haftphase entsteht wegen der elastischen Penalty-Anbindung eine Differenz zwischen Vorgaben und tatsächlicher Strukturverschiebung, beim Gleiten werden die Größen gleichgesetzt. Der Zeitpunkt, in dem der Knoten  $D_i$  vom Haften ins Gleiten übergeht, wird als Abrisszeitpunkt  $t_{D,i}^g$  bezeichnet. Er lässt sich durch die Bedingung

$${}_x k_{D,i}(t_{D,i}^g) - {}_x k_{D,i}(t_{D,i}^g - \Delta t^k) = -1 \quad (4.116)$$

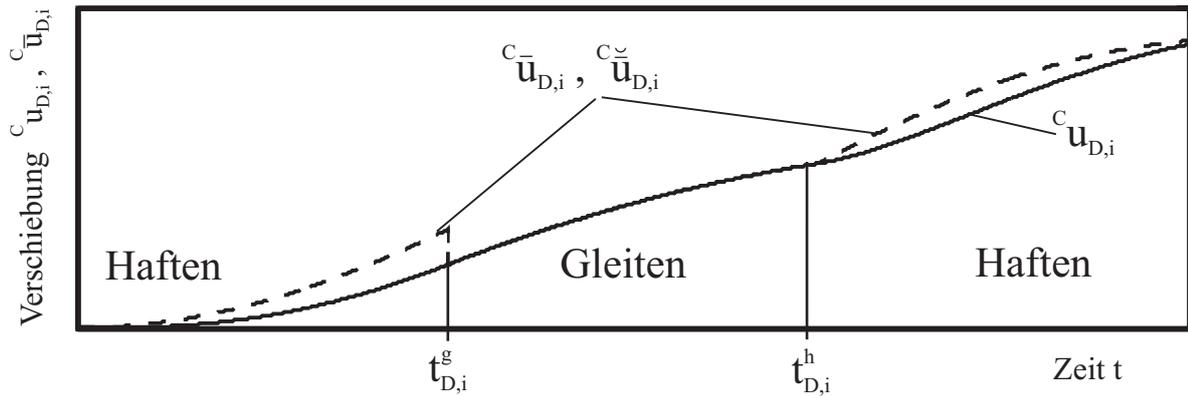
finden, die den Wert des vorangegangenen Kontaktindikators berücksichtigt. Die Zeitspanne  $\Delta t^k$  stellt die Länge des vorangegangenen Zeitschritts der numerischen Integration dar. Der Zeitpunkt des Gleit-Haftüberganges soll als Anhaftzeitpunkt  $t_{D,i}^h$  bezeichnet werden, für ihn gilt analog zu Gl. (4.116)

$${}_x k_{D,i}(t_{D,i}^h) - {}_x k_{D,i}(t_{D,i}^h - \Delta t^k) = 1. \quad (4.117)$$

Der Anhaftzeitpunkt  $t_{D,i}^h$  bildet den Startpunkt für die Berechnung der integrierten Zwangsbedingung

$${}^C \bar{u}_{D,i}^h = {}^C u_{D,i}(t_{D,i}^h) + \int_{t_{D,i}^h}^t {}^C \dot{u}_{D,i}(\bar{t}) d\bar{t}. \quad (4.118)$$

Beide Zwangsbedingungen  ${}^C \check{u}_{D,i}$  und  ${}^C \bar{u}_{D,i}$  werden nun zwischen der Strukturverschiebung  ${}^C u_{D,i}$  (im Gleitfall) und der integrierten Haftverschiebung  ${}^C \bar{u}_{D,i}^h$  (im Haftfall) geschaltet. Der



**Bild 4.21:** Verlauf der Zwangsbedingungen  ${}^C \bar{u}_{D,i}$  bzw.  ${}^C \check{u}_{D,i}$ , sowie der Strukturverschiebung  ${}^C u_{D,i}$  während Haft- und Gleitphase (die Differenz zwischen  ${}^C \bar{u}_{D,i}$  bzw.  ${}^C \check{u}_{D,i}$  und  ${}^C u_{D,i}$  ist vergrößert dargestellt)

Unterschied zwischen beiden Größen besteht lediglich darin, dass die vorläufige Haftverschiebung

$${}^C \check{u}_{D,i}(xk_{D,i}^{k-1}) = \begin{cases} {}^C u_{D,i} & \text{für } xk_{D,i}^{k-1} = 0 \\ {}^C \bar{u}_{D,i}^h & \text{für } xk_{D,i}^{k-1} = 1 \end{cases} \quad (4.119)$$

abhängig vom Kontaktindikator  $xk_{D,i}^{k-1}$  aus dem vorangegangenen Zeitschritt geschaltet wird, die aktuelle Haftverschiebung dagegen

$${}^C \bar{u}_{D,i}(xk_{D,i}^k) = \begin{cases} {}^C u_{D,i} & \text{für } xk_{D,i}^k = 0 \\ {}^C \bar{u}_{D,i}^h & \text{für } xk_{D,i}^k = 1 \end{cases} \quad (4.120)$$

ist vom aktuellen Kontaktindikator  $xk_{D,i}^k$  abhängig.

**Berechnung Tangentiallast** Abhängig vom Wert des tangentialen Kontaktindikators  $xk_{D,i}^k$  wird für kontaktierende Knoten,  $zk_{D,i}^k = 1$ , eine Haftkomponente  ${}^C f_{D,i}^h$  oder eine Gleitkomponente  ${}^C f_{D,i}^g$  berechnet. Die auf den haftenden Knoten  $D_i$  wirkende Last lautet, gemäß der Penalty-Methode

$${}^C f_{D,i}^h = p_K ({}^C \bar{u}_{D,i} - {}^C u_{D,i}) . \quad (4.121)$$

Durch die Schaltung der Zwangsbedingung  ${}^C \bar{u}_{D,i}$ , siehe Gl. (4.120), tritt nur im Haftfall,  $xk_{D,i}^k = 1$ , eine Differenz zur Strukturverschiebung  ${}^C u_{D,i}$  und damit eine Haftkomponente  ${}^C f_{D,i}^h$  ungleich Null auf. Analog zu Gl. (4.121) wird auch die vorläufige Haftkomponente  ${}^C \check{f}_{D,i}^h$

berechnet, wobei statt der aktuellen  ${}^C\bar{u}_{D,i}$  die vorläufige Zwangsbedingung  ${}^C\check{u}_{D,i}$  verwendet wird. Die Gleitkomponente  ${}^C f_{D,i}^g$  ist von der aktuellen vertikalen Kontaktlast abhängig

$${}^C f_{D,i}^g = \mu \left( {}^C v_{D,i}^{rel} \right) {}^C f_{D,i}, \quad (4.122)$$

mit dem geschwindigkeitsabhängigen Gleitreibwert  $\mu \left( {}^C v_{D,i}^{rel} \right)$ . Die Tangentiallast am kontaktnahen Knoten  $D_i$  berechnet sich, je nach Wert des Kontaktindikators, entweder aus der Haft- oder der Gleitlastkomponente

$${}^C f_{D,i} = {}^C f_{D,i}^h + {}^C f_{D,i}^g. \quad (4.123)$$

Schließlich wird noch die vertikale Knotenpressung eingeführt

$${}^C p_{D,i} = \frac{{}^C f_{D,i}}{\Delta U_M} = \frac{M}{2\pi r_M} {}^C f_{D,i}, \quad (4.124)$$

mit dem zu jedem Mantelknoten  $M_i$  gehörigen Umfangsabschnitt  $\Delta U_M$ . Analog zu Gl. (4.124) ist auch die tangentielle Knotenspannung  ${}^C p_{D,i}$  definiert.

**Haft-/Gleit-Schalter** Die Berechnung des tangentialen Kontaktindikators  ${}_x k_{D,i}^k(t^k)$  zum aktuellen Zeitpunkt  $t^k$  hängt von seinem Wert im vorangegangenen Zeitschritt  $t^{k-1}$  ab. Für den Fall des Haftens,  ${}_x k_{D,i}^k(t^{k-1}) = 1$ , wird die Haftbedingung

$${}_x k_{D,i}^k \left( {}_x k_{D,i}^{k-1} = 1 \right) = {}_z k_{D,i}^k \begin{cases} 1 & \text{für } |{}^C \check{f}_{D,i}^h| \leq \mu_0 |{}^C f_{D,i}| \\ 0 & \text{für } |{}^C \check{f}_{D,i}^h| > \mu_0 |{}^C f_{D,i}| \end{cases} \quad (4.125)$$

überprüft, mit dem konstanten Haftreibwert  $\mu_0$ . Wenn  ${}_x k_{D,i}^k(t^{k-1}) = 0$  gilt, der betreffende Knoten  $D_i$  also ein gleitender Knoten ist, muss eine kinematische Bedingung erfüllt sein

$${}_x k_{D,i}^k \left( {}_x k_{D,i}^{k-1} = 0 \right) = {}_z k_{D,i}^k \begin{cases} 0 & \text{für } {}^C v_{D,i}^{rel}(t^k) \cdot {}^C v_{D,i}^{rel}(t^{k-1}) \geq 0 \\ 1 & \text{für } {}^C v_{D,i}^{rel}(t^k) \cdot {}^C v_{D,i}^{rel}(t^{k-1}) < 0 \end{cases}. \quad (4.126)$$

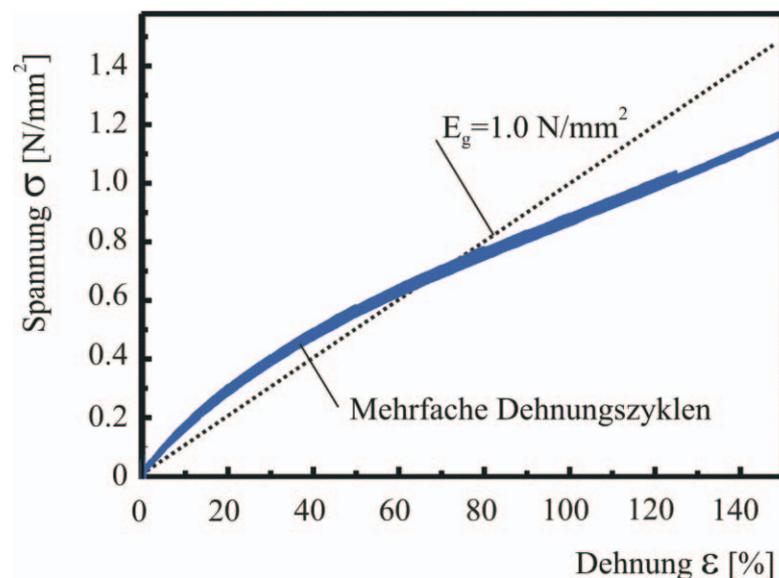
Damit ist der aktuelle Kontaktindikator  ${}_x k_{D,i}^k$  gefunden. Mit ihm wird die aktuelle Haft- bzw. Gleitkomponente  ${}^C f_{D,i}^h$  bzw.  ${}^C f_{D,i}^g$  berechnet, die kombiniert die Ausgangsgröße des Blocks *Kontakt* bilden, siehe Gl. (4.123).

## 4.3 Identifikation der Eingangsparameter

Im bisherigen Verlauf des Kapitels wurde die Modellierung anhand frei gewählter Parameterwerte dargelegt. Da in dieser Arbeit die mechanische Modellierung durch Messungen validiert werden soll, müssen die physikalisch basierten Parameter des vorliegenden Simulationsmodells identifiziert bzw. abgeschätzt werden.

### 4.3.1 Elastisches Materialverhalten des Elastomers

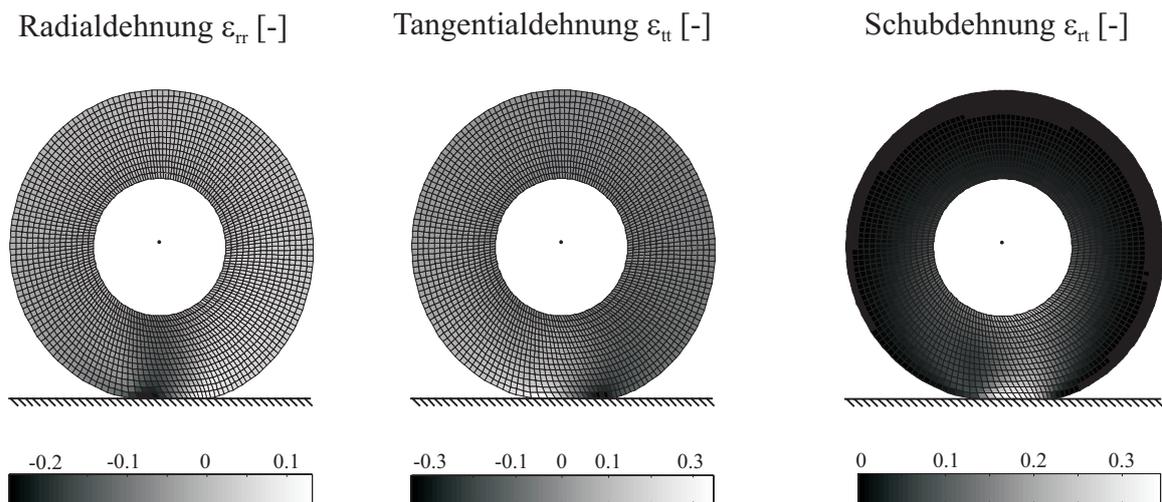
Das Materialverhalten von Gummi weist teilweise beträchtliche nichtlineare Abhängigkeiten z. B. von der Temperatur oder von früheren Verformungsamplituden auf. Da die Reibcharakteristik des Elastomers über verschiedene Mechanismen durch das Materialverhalten beeinflusst wird, siehe z. B. GROSCH [26], AMINO [2] oder KLÜPPEL [44], muss das bei der Modellierung der Rollreibung verwendete Materialmodell das inelastische Verhalten des gewählten Elastomers abbilden. Neben einer bei gefüllten Materialien besonders ausgeprägten Strukturdämpfung stellt beispielsweise die beträchtliche Entfestigung nach einer vorangegangenen Vordehnung ein gummitypisches Verhalten dar. Dieses Phänomen wird als Mullins-Effekt bezeichnet, siehe MULLINS [71, 72, 70], und tritt im Bereich großer Dehnungen bis zu einigen 100 % auf. Bei kleineren Dehnungen und zyklischer Anregung ist außerdem eine Amplitudenabhängigkeit sowohl des Speicher- als auch des Verlustmoduls des Materials zu beobachten. Dieses Phänomen ist als Payne-Effekt bekannt, siehe auch PAYNE [78, 79, 80].



**Bild 4.22:** Einachsiger Zugversuch zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls  $E_g$  von Naturkautschuk (NR). Es wurden mehrere Dehnungszyklen mit verschiedenen Dehnungsamplituden angefahren

Es existieren zahlreiche Veröffentlichungen über experimentelle Untersuchungen des gummi-spezifischen Materialverhaltens, wie z. B. WRANA [105]. Elementarmechanische Modellierungsansätze konnten in gute Übereinstimmungen mit Messungen gebracht werden, siehe SJÖBERG [98, 99]. Die in KLÜPPEL [45, 46, 47] und MEIER [64] gezeigte Modellierung erklärt Phänomene wie Spannungserweichung durch Vorgänge auf molekularer Ebene. Für den Einsatz in Finite-Elemente-Programmen wurden außerdem konstitutive Materialmodelle entwickelt, siehe z. B. IHLEMANN [36, 37], HOHL [33] oder LION [61, 62, 63]. Die aufgeführten Effekte treten insbesondere bei gefüllten Materialien hervor. Die Materialwahl für diese Arbeit fällt auf einen ungefüllten Naturkautschuk (NR), da er relativ linear-elastische Eigenschaften aufweist. Dies wird durch einen vom *Deutschen Institut für Kautschuktechnologie* (DIK) durchgeführten einachsigen Zugversuch bestätigt, siehe **Bild 4.22**. Der Versuch zeigt, dass bei Naturkautschuk innerhalb des Messbereiches ein geringfügiger Payne-Effekt auftritt, der Mullins-Effekt dagegen ist vernachlässigbar klein. Für die Berechnung des Materialverhaltens ist daher ein lineares, zweiparametriges, isotropes Materialmodell, bestehend aus Elastizitätsmodul  $E_g$  und Querkontraktionszahl  $\nu_g$ , ausreichend.

Bei dem Zugversuch wurden mehrere Dehnungszyklen mit den Maximaldehnungen  $\varepsilon_{max} = 20\%, 50\%, 80\%, 100\%, 120\%, 140\%$  quasistationär angefahren. Als Bezugsfläche bei der Spannungsberechnung wurde dabei unabhängig vom Betrag der Dehnung der Ausgangsquerschnitt der Probe verwendet. Die Messung zeigt ein degressives Steifigkeitsverhalten. Anders als bei einem gefüllten Material bildet sich beim mehrmaligen Abfahren des selben Dehnungszyklus kein Mullins-Effekt aus. Vielmehr liegen die gemessenen Zyklen nahezu deckungsgleich übereinander. Auch Hystereseschleifen sind anhand der Messungen nicht auszumachen.



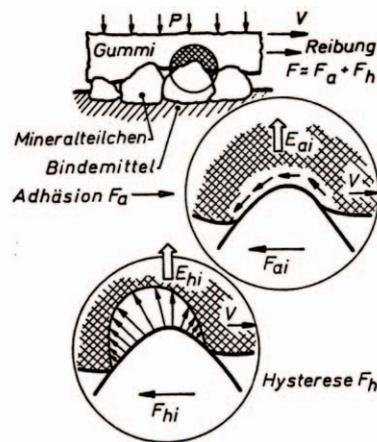
**Bild 4.23:** Dehnungszustand des Groschrades bei großem Schlupf: Lokale Dehnungen in Radial- Tangential- und Schubrichtung bei  $S = 50\%$ , bei  $F_N = 40\text{ N}$ , und  $v_{abs} = 40\text{ mm/s}$

Um aus den Messdaten in **Bild 4.22** eine resultierende Steifigkeitsgerade und damit einen Elastizitätsmodul für die Berechnung zu ermitteln, wird der Dehnungszustand des Rades bei einem großen Schlupfwert  $S = 50\%$ , betrachtet, siehe **Bild 4.23**. Das Bild zeigt getrennt die drei Dehnungskomponenten in Radial-, Tangential- und Schubrichtung. Hier treten Extremwerte von  $\varepsilon_{rr}^{min} = -29\%$ ,  $\varepsilon_{tt}^{max} = 39\%$ , und  $\varepsilon_{rt}^{max} = \varepsilon_{tr}^{max} = 38\%$  auf. Die maximal auftretende Hauptdehnung beträgt  $\varepsilon_I^{max} = 39\%$ . Die gesuchte resultierende Ausgleichsgerade des konstanten Elastizitätsmoduls in **Bild 4.22** wird basierend auf dem Hauptspannungswert  $\varepsilon_I^{max}$  ausgewählt, als Geradensteigung wird  $E_g = 1,0 \text{ N/mm}^2$  festgelegt.

Da im Zugversuch in **Bild 4.22** kaum Hytereseschleifen zu beobachten waren, kann nach OTTL [76] von einer geringen Materialdämpfung ausgegangen werden, entsprechend werden die beiden Rayleigh-Dämpfungsparameter sehr gering veranschlagt,  $\alpha = 0$  und  $\beta = 0,005$ . Für die Querkontraktionszahl wird wegen der Inkompressibilität von Gummi  $\nu_g = 0,49$  angenommen. Die Dichte des verwendeten Naturkautschuk beträgt  $\rho_g = 1,2 \text{ g/cm}^3$ . Als Innenradius des Radmodells wird der Innenradius des Groschradrohrlings gewählt  $r_N = 17,5 \text{ mm}$ . Zwar ist das Gummirad durch seitliche Scheiben mit einem Außendurchmesser von 30 mm eingespannt, die eine Querausdehnung in diesem Bereich verhindern, siehe **Bild 3.3**. Der komplizierte dreidimensionale Spannungszustand innerhalb des eingespannten Materials wird allerdings am ehesten durch eine Modellierung des Gesamtquerschnitts des Groschrades berücksichtigt.

### 4.3.2 Reibcharakteristik

Das Reibverhalten von Elastomeren stellt ein Zusammenspiel von mehreren Reibmechanismen dar, eine Einführung in das Gebiet der Gummireibung gibt z. B. KUMMER [53] oder PERSSON [81]. Experimentelle Untersuchungen zeigen neben der Geschwindigkeitsabhängigkeit insbesondere einen starken Temperatureinfluss auf die Gummireibung, siehe SCHALLAMACH [92]. Im Rahmen des trockenen elastomeren Rollkontaktes stehen hauptsächlich die Reibungsarten Hysterese und Adhäsion im Vordergrund, siehe **Bild 4.24**. Experimentelle Untersuchungen insbesondere zur Ahäsionskomponente der Gummireibung sind bei KRÖGER [48, 49] oder EBERHARDSTEINER [18] zu finden, unterschiedliche Modellierungsansätze von Adhäsionseffekten bieten z. B. ACHENBACH [1] oder PERSSON [82]. Während Adhäsion überwiegend auf glatten Oberflächen dominiert, findet die Hysteresereibung, resultierend aus der Deformation des Elastomers, vor allem auf rauhen Oberflächen statt. Eine Diskussion über Rauigkeitseinfluss und Geschwindigkeitsabhängigkeit der Hysteresereibung gibt PERSSON [83]. Eine Modellierung von Hysteresereibung ist in z. B. MEYER [65] oder LE GAL [56, 57] zu finden, eine Abbildung im Zeitbereich findet in LINDNER [59] und MOLDENHAUER ET AL. [68] statt. Die experimentelle Ermittlung von Reibkennlinien bei höheren Relativgeschwindigkeiten gestaltet sich wegen der zunehmenden Wärmeentwicklung schwierig. Hier wird das Verfahren der Masterkurvenzusammenstellung verwendet, siehe z. B. GROSCHE [25, 28], bei dem mehrere bei unterschiedlichen Temperaturen aufgenommene Teilkennlinien zu einer sogenannten Masterkurve zusammengesetzt werden.



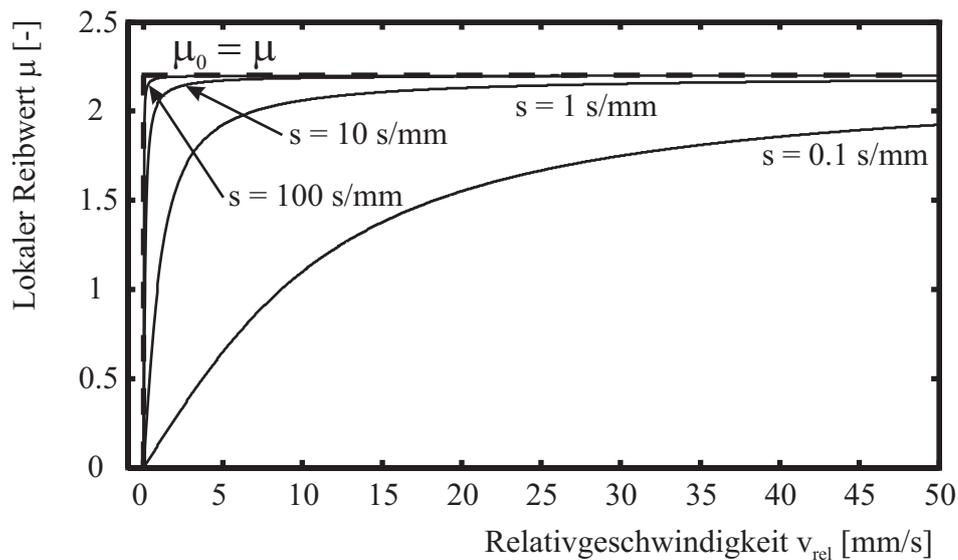
**Bild 4.24:** Entstehung der Reibeffekte Adhäsion und Hysterese nach KUMMER [53]. Während eingeprägte Schubspannungen bei Adhäsion größtenteils an der Oberfläche auftreten, findet bei Hysterese eine Anregung des Elastomers im Materialinneren statt

Die in dieser Arbeit gezeigten Messungen, siehe Kapitel 3, fanden auf einer Glasoberfläche statt. Durch die glatte Oberfläche treten Adhäsionseffekte stark in den Vordergrund, es findet hauptsächlich Adhäsionsreibung statt. Zur Ermittlung der lokalen Reibcharakteristik  $\mu(v_{rel})$  wurden auf dem Universalprüfstand des *Instituts für Dynamik und Schwingungen der Leibniz Universität Hannover* (IDS), siehe z. B. SEXTRO [96], Untersuchungen mit einer eingespannten Reibprobe auf einer rotierenden Scheibe angestellt. Der maximal auftretende Reibwert dabei beträgt  $\mu_{max} \approx 1,2$ , was in etwa 50 % des in den Messungen zum Rollkontakt beobachteten maximalen Reibbeiwertes  $\mu_{max}^*$  beträgt. Der Grund dafür liegt in der starken Temperaturabhängigkeit des lokalen Reibwertes  $\mu(v_{rel})$  von Gummi. Anders als beim „rotierenden“ Kontakt des Groschrades, bei dem fortwährend Wärme über den Materialdurchfluss abtransportiert wird, heizt sich die Reibprobe beim „stehenden“ Kontakt stark auf. Die durch den Reibprozess entstehende Wärme wird lediglich durch Wärmeleitung abgeführt, die resultierende Temperatur der eingespannten Probe liegt daher deutlich über der des Rollkontaktes. Da der lokale Gleitreibwert  $\mu(v_{rel})$  durch höhere Temperaturen stark verringert wird, siehe KRÖGER [51], sind die Messungen mit der eingespannten Probe für die Simulation des Rollkontaktes ungeeignet.

Für den Verlauf des lokalen Gleitreibwertes  $\mu(v_{rel})$  wird stattdessen eine einfache Coulomb-Charakteristik verwendet,  $\mu_0 = \mu^\infty$ , siehe z. B. STEIN [101] oder SASADA [91]. Durch die Unstetigkeit des Gleitreibwertes an der Stelle  $v_{rel} = 0$  entsteht ein nichtglattes System, siehe POPP [84]. Dies wird durch eine Normalisierung behoben, siehe MOSTAGHEL [69]. Es wird der Ansatz

$$\mu(v_{rel}) = \mu^\infty \frac{2}{\pi} \arctan(s v_{rel}) \quad (4.127)$$

gewählt, mit dem asymptotischen Gleitreibwert  $\mu^\infty$  und dem Steigungsparameter  $s$ . Der Ver-

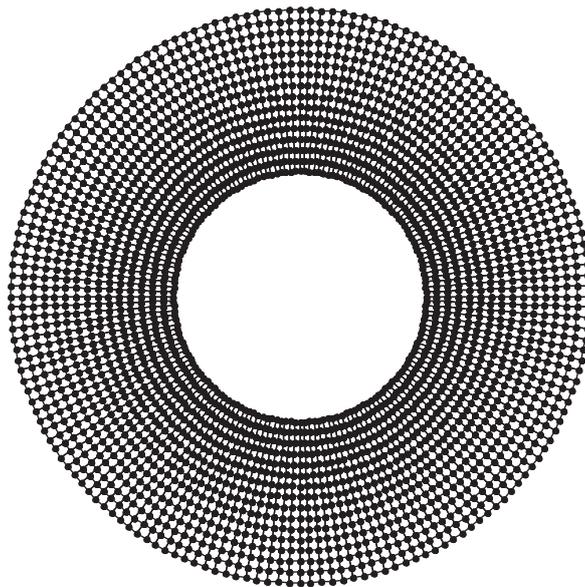


**Bild 4.25:** Coulomb-Charakteristik, bestehend aus Haftreibungwert  $\mu_0$  und Gleitreibungwert  $\mu^\infty$  (gestrichelt). Der angenäherte, normalisierte Verlauf ist für verschiedene Steigungsparameter  $s = 0, 1 \dots 100$  s/mm dargestellt

lauf der Charakteristik für unterschiedliche Werte des Steigungsparameters ist in **Bild 4.25** zu sehen, für die Simulation des dynamischen Rollkontaktes wurde  $s = 1000$  s/mm gewählt. Die Identifikation des Haft-, sowie des asymptotischen Gleitreibungwertes  $\mu^\infty$  erfolgt aus den Rollkontaktmessungen in Kapitel 3. Entsprechend dem bei einer Normalkraft von  $F_N = 40$  N maximal erreichten Reibbeiwert wird  $\mu_0 = \mu^\infty = \mu_{max}^* = 2,3$  gesetzt. Durch die Wahl einer Coulomb-Charakteristik bleibt das dynamische Verhalten der lokalen Gummireibung, siehe z. B. RUINA [86, 87, 88], SCHALLAMACH [93] oder DANKOWICZ [17], unberücksichtigt. Allerdings legt die Größenordnung der in dieser Arbeit identifizierten Zeitkonstanten nahe, dass für die Gesamtdynamik des elastomeren Rollkontaktes die Änderung der Haft-Gleitkonfiguration und nicht die Dynamik des lokalen Reibwertes  $\mu(t)$  maßgeblich ist.

## 5 Simulationsergebnisse

In diesem Kapitel sollen die Ergebnisse des instationären Rollkontaktmodells aus Kapitel 4 gezeigt werden. Das für die Simulationen verwendete Netz besitzt 2688 Knoten mit jeweils zwei Verschiebungsfreiheitsgraden. Der radiale Abstand der Knoten beträgt  $\Delta r_G \approx 1,4 \text{ mm}$ , für 168 Knoten pro Radius resultiert der Differenzwinkel  $\Delta \varphi_G \approx 2,14^\circ$  zwischen den Knoten, vergleiche Abschnitt 4.1.1. Die für das Materialmodell sowie für das lokale Reibverhalten benötigten Parameterwerte wurden in Abschnitt 4.3 identifiziert. Die Netzdiskretisierung sowie die Erstellung der Steifigkeits- und Massenmatrix entstanden innerhalb des FE-Programmsystems *Ansys*. Die Vorberechnung, die Zeitschrittintegration sowie die Visualisierung des Ergebnisses erfolgte durch die Entwicklungsumgebung *Matlab*. In diesem Kapitel werden, entsprechend des Aufbaus von Kapitel 4, zunächst die Ergebnisse der statischen Vorberechnung dargestellt. Anschließend sind zum Abgleich mit den Kennfeld-Messungen in Abschnitt 3.2 die Ergebnisse für stationäres Rollen aufgeführt. Schließlich wird das Verzögerungsverhalten des Rollkontaktes nach Schlupfsprüngen gezeigt und den instationären Messungen aus Abschnitt 3.3.3 gegenübergestellt.



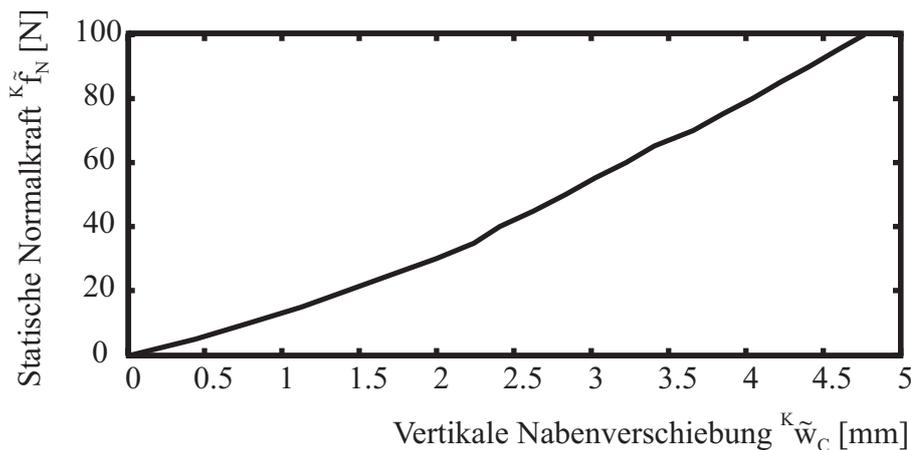
**Bild 5.1:** Für die Simulationen des dynamischen Rollkontaktes verwendetes Netz mit 2688 Knoten

## 5.1 Statische Kontaktberechnung

In der statischen Kontaktberechnung wird die Verformung des Groschrades unter einer konstanten Last errechnet. Die Ergebnisse der Vorberechnung dienen als Anfangsbedingungen für die folgende Zeitschrittintegration. Der iterative Algorithmus ist in Abschnitt 4.1.4.1 dargestellt. In der statischen Kontaktberechnung wird ausschließlich Normalkontakt berechnet, das heißt die kontaktierenden Knoten sind in tangentialer Richtung frei beweglich.

### 5.1.1 Vertikale Nabenverschiebung ${}^K\tilde{w}_C$ über statischer Normalkraft ${}^K\tilde{f}_N$

Durch die vertikale Verschiebung der Radnabe entsteht eine Normalkraft, die mit größer werdender Verschiebung ebenfalls ansteigt. Obwohl für die Materialbeschreibung des verwendeten Elastomers ein linearer Ansatz verwendet wird, entsteht durch die Geometrie des Rades bei der Kontaktberechnung eine nichtlineare normale Kontaktsteifigkeit, siehe Abschnitt 4.1.4.3. Der progressive Verlauf der globalen Normalkraft  ${}^K\tilde{f}_N$  über der vertikalen Nabenverschiebung  ${}^K\tilde{w}_C$  ist in **Bild 5.2** zu sehen. Durch die zylindrische Form des Rades kommt mit zunehmender Nabenverschiebung ein größerer Teil des Radumfangs in Kontakt mit der Fahrbahn. Dies führt zu einer zunehmenden Versteifung des Systems und somit zu einem progressiven Verlauf der Kennlinie.

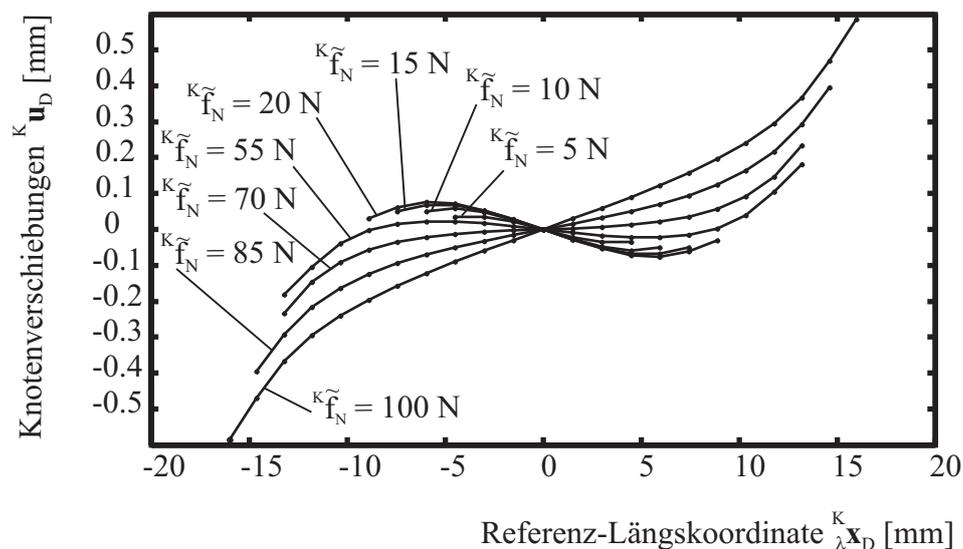


**Bild 5.2:** Kontaktsteifigkeit des modellierten Groschrades auf glatter Fahrbahn. Durch die zylindrische Geometrie des Rades ergibt die Kontaktberechnung für steigende Werte der vertikalen Nabenverschiebung  ${}^K\tilde{w}_C$  einen progressiven Verlauf der statischen Normalkraft  ${}^K\tilde{f}_N$

### 5.1.2 Tangentiale Verschiebung ${}^K \tilde{\mathbf{u}}_D$ der Kontaktknoten über Referenzkoordinate ${}^K_{\lambda} \tilde{\mathbf{x}}_D$

Durch die Abplattung des Rades beim Kontakt mit der Fahrbahn kommt es zu Spannungen innerhalb des Groschradkörpers. Da in der Vorberechnung Reibungsfreiheit  $\mu_0 = 0$  zwischen Rad und Fahrbahn vorausgesetzt wird, sind die kontaktierenden Knoten tangential frei auf der Fahrbahn verschieblich. In diesem Kapitel werden statt der Verschiebungen aller Mantelknoten  $\mathbf{M}$  lediglich die der interessierenden kontaktierenden Knoten betrachtet. Dabei wurde der Übersichtlichkeit halber bei der Indizierung auf die Einführung einer zusätzlichen Knotenmenge verzichtet. Stattdessen soll die Menge der in der statischen Berechnung kontaktierenden Knoten analog zur Simulation mit  $\mathbf{D}$  bezeichnet werden.

Die resultierenden Längsverschiebungen der kontaktierenden Knoten sind in **Bild 5.3** zu sehen. Die statischen Verschiebungen  ${}^K \tilde{\mathbf{u}}_D$  der kontaktierenden Knoten sind über den Referenzkoordinaten  ${}^K_{\lambda} \tilde{\mathbf{x}}_D$  des unverformten Rades aufgetragen, variiert wurde als Parameter die statische Gesamtlast  ${}^K \tilde{f}_N$  des Rades. Für alle dargestellten Werte der statischen Normalkraft  ${}^K \tilde{f}_N = 5 \text{ N}, \dots, 100 \text{ N}$  stellen sich innerhalb der Kontaktfläche symmetrische Verschiebungen um den Koordinatenursprung der  ${}^C x$ -Achse ein. Der Grund hierfür liegt in der symmetrischen Geometrie des Groschrades. Der mittlere Knoten bleibt für alle Normalkräfte  ${}^K \tilde{f}_N$  unverschoben  ${}^K_{\lambda} \tilde{x}_M = {}^K_{\delta} \tilde{x}_M = 0$ . Die Steigung der Verschiebungsverläufe  ${}^K \tilde{\mathbf{u}}'_D$  ( ${}^K_{\lambda} \tilde{\mathbf{x}}_D$ ) stellt ein Maß für die lokalen Verzerrungen der Manteloberfläche in Tangentialrichtung des Kontaktes dar.



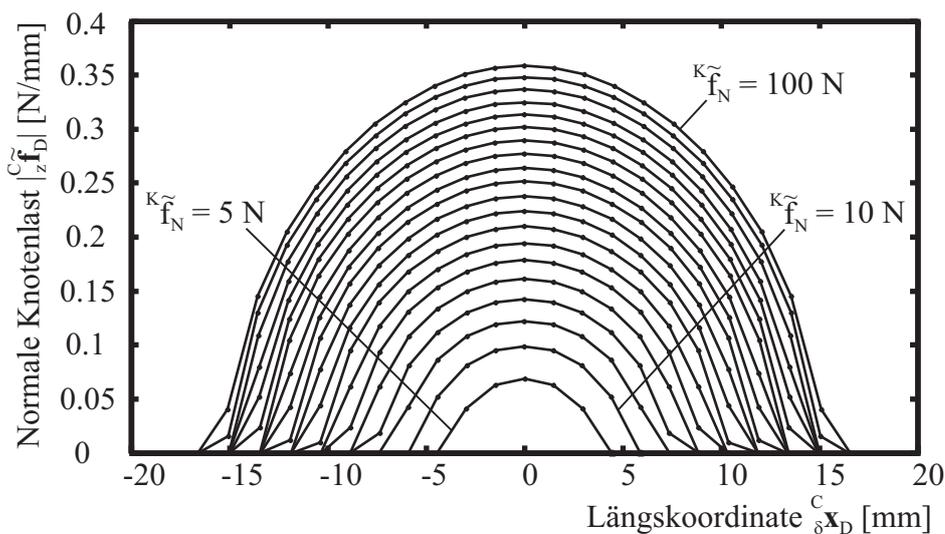
**Bild 5.3:** Tangentiale Verschiebung  ${}^K \tilde{\mathbf{u}}_D$  über den Referenz-Längskoordinaten  ${}^K_{\lambda} \tilde{\mathbf{x}}_D$  der kontaktierenden Knoten, für unterschiedliche Werte der Gesamtlast  ${}^K \tilde{f}_N = 5 \text{ N}, \dots, 100 \text{ N}$

Während bei geringerer Radlast sowohl Dehnung als auch Stauchung der Mantelfläche zu beobachten ist, tritt bei hohen Radlasten nur noch Dehnung auf. Hierbei nehmen, beginnend bei einer Radlast  ${}^K \tilde{f}_N = 5 \text{ N}$ , die Stauchungen zunächst zu, bei  ${}^K \tilde{f}_N = 20 \text{ N}$  treten maximale Stauchungen im Kontaktbereich auf. Für Radlasten  ${}^K \tilde{f}_N > 20 \text{ N}$  nimmt die Stauchung im Kontakt wieder ab, für  ${}^K \tilde{f}_N \geq 70 \text{ N}$  zeigt die Funktion  ${}^K \tilde{\mathbf{u}}_D$  ( ${}^K \tilde{\mathbf{x}}_D$ ) einen monoton steigenden Verlauf, es existieren somit nur noch Dehnungen innerhalb des Kontaktbereiches.

Bei größer werdenden statischen Normalkräften  ${}^K \tilde{f}_N$  ist erkennbar, dass am Rand des Kontaktbereiches neue Knoten in Berührung mit der Fahrbahn kommen. Entsprechend der Berechnung der verformten Konfiguration  $\delta$ , siehe Gl. (4.9), ist aus **Bild 5.3** die Kontaktlänge für die jeweiligen Radlasten  ${}^K \tilde{f}_N$  berechenbar. Aus der Addition der Referenzkoordinaten  ${}^K \tilde{\mathbf{x}}_D$  und der Verschiebungen  ${}^K \tilde{\mathbf{u}}_D$  entstehen die Koordinaten des verformten Systems  ${}^K \tilde{\mathbf{x}}_D$ . Die Differenz der Längskoordinaten der beiden äußeren Kontaktknoten ergibt die gesuchte Kontaktlänge. Für die Radlast  ${}^K \tilde{f}_N = 5 \text{ N}$  entsteht bei 7 Kontaktknoten eine Kontaktlänge von ca. 9 mm, für die maximale Radlast  ${}^K \tilde{f}_N = 100 \text{ N}$  resultiert aus 23 kontaktierenden Knoten eine Kontaktlänge von 32 mm.

### 5.1.3 Normale Knotenlast ${}^K \tilde{f}_D$ über Längskoordinate ${}^K \tilde{\mathbf{x}}_D$ der verformten Konfiguration

Einblicke in die Pressungsverteilung innerhalb des Kontaktbereiches können durch die Betrachtung der statischen Knotenlasten  ${}^K \tilde{f}_D$  gewonnen werden. In **Bild 5.4** sind die Beträge der Knotenlasten  ${}^K \tilde{f}_D$  im Kontaktbereich über den Koordinaten  ${}^K \tilde{\mathbf{x}}_D$  der verformten Konfiguration aufgetragen, als Parameter wurde die Normalkraft  ${}^K \tilde{f}_N = 5 \text{ N}, 10 \text{ N}, \dots, 100 \text{ N}$  verwendet.

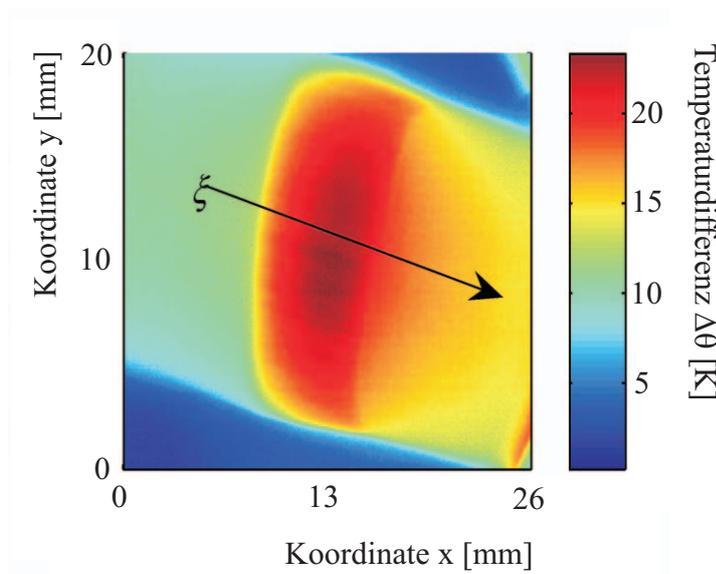


**Bild 5.4:** Betrag der normalen Knotenlasten  $|{}^K \tilde{f}_D|$  der kontaktierenden Knoten in Abhängigkeit der Koordinaten  ${}^K \tilde{\mathbf{x}}_D$  der verformten Konfiguration, für Normalkräfte  ${}^K \tilde{f}_N = 5 \text{ N}, 10 \text{ N}, \dots, 100 \text{ N}$

Qualitativ folgen die Verläufe der analytischen Lösung der Kontaktellipse nach HERTZ [32]. Durch die Wahl von *plane stress*-Elementen in der FE-Modellierung entspricht die Dimension der Knotenlasten Linienlasten mit der Einheit N/mm. Da die Knotenlasten durch den einseitigen Kontakt definitionsgemäß nur mit negativen Vorzeichen auftreten, sind Beträge aufgetragen werden. Die Abstände zwischen den einzelnen Knotenlastverläufen nehmen für größer werdende Normalkräfte ab. Während die den Normalkräften  ${}^K \tilde{f}_N = 5 \text{ N}$  und  ${}^K \tilde{f}_N = 10 \text{ N}$  zugeordneten Verläufe eine Differenz von etwa  $0,3 \text{ N/mm}$  aufweisen, unterscheiden sich die Verteilungen der Normalkräfte  ${}^K \tilde{f}_N = 95 \text{ N}$  und  ${}^K \tilde{f}_N = 100 \text{ N}$  nur durch ca.  $0,01 \text{ N/mm}$ . Dieses Phänomen ist der zunehmenden Anzahl von Kontaktknoten geschuldet. Für 5 Kontaktknoten entfällt bei einer Erhöhung der Normalkraft um  $\Delta {}^K \tilde{f}_N = 5 \text{ N}$  auf jeden Knoten eine höhere Linienlast als bei 21 kontaktierenden Knoten. Da für die Abszisse die Koordinaten  ${}^K_{\delta} \tilde{\mathbf{x}}_D$  der verformten Konfiguration verwendet werden, sind die oben genannten Kontaktlängen direkt aus dem Abstand der äußeren Kontaktknoten ablesbar. Ebenfalls gut erkennbar ist das „Zuschalten“ der äußeren Kontaktknoten bei Erhöhung der Normalkraft  ${}^K \tilde{f}_N$ . Dies geschieht bei höheren Normalkräften  ${}^K \tilde{f}_N$  seltener, da bereits viele Kontaktknoten zum Tragen der Last zur Verfügung stehen. Außerdem nimmt der vertikale Abstand der Mantelknoten durch die Zylinderform des Rades Richtung Nabe hin zu. So muss bei hohen Normalkräften  ${}^K \tilde{f}_N$  eine höhere Nabenverschiebung bis zum „Zuschalten“ der nächsten Kontaktknoten geleistet werden.

#### 5.1.4 Validierung der Kontaktlänge

Einen Abgleich des Rollkontaktmodells mit Messungen erlauben die Thermografiemessungen von KROEGER ET AL. [51], siehe **Bild 5.5**. In diesem Experiment wurde das Messrad, bestehend aus Styrol-Butadien-Elastomer (SBR) mit 60 phr Kieselsäure, auf ein Germaniumfenster gepresst, das durchlässig für Infrarotstrahlung ist. Die Normalkraft betrug dabei  $F_N = 100 \text{ N}$ , bei stehendem Messmobil  $v_C = 0 \text{ mm/s}$  ergab sich für eine Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = 0,87 \text{ rad/s}$  die Relativgeschwindigkeit im Kontakt  $v_{rel} \approx 220 \text{ mm/s}$ . Im Bild ist die Koordinate  $\xi$  eingetragen, die in Längsrichtung des Kontaktes zeigt. Im linken Bereich des Bildes befindet sich der Einlaufbereich des Rades. Im Einlauf ist der Kontaktbereich schärfer abgegrenzt als im Auslauf, da die eintretende Mantelfläche des Rades während des Umlaufes einen Großteil der zuvor im Kontakt aufgenommenen Wärmeenergie abgegeben hat. Die Kontaktlänge des Rades kann auf diese Weise auf  $l_K \approx 8 \text{ mm}$  geschätzt werden. Soll die entsprechende Kontaktlänge durch das Rollkontaktmodell berechnet werden, werden als Eingabeparameter E-Modul  $E$  und Querkontraktionszahl  $\nu$  des verwendeten Materials SBR benötigt. Aus einachsigen Zugversuchen des *Deutschen Instituts für Kautschuktechnologie* (DIK), Hannover, lässt sich für den E-Modul der Wert  $E = 20 \text{ N/mm}^2$  bestimmen. Für die Querkontraktionszahl wird, wie auch für den Naturkautschuk (NR), der Wert  $\nu = 0,49$  wegen der Quasi-Inkompressibilität des Materials angenommen. Als Ergebnis der statischen Vorberechnung resultiert die Kontaktlänge  $l_K = 9,8 \text{ mm}$ . Dieser berechnete Wert liegt etwas oberhalb der gemessenen Kontaktlänge, da in der Messung das rotierende Rad durch die Strukturdämpfung des Materials zusätzlich versteift wurde.



**Bild 5.5:** Thermografieaufnahme eines schlupfenden Groschrades, siehe KROEGER ET AL. [51]. Bei stehendem Messmobil  $v_C = 0 \text{ mm/s}$  betrug die Normalkraft  $F_N = 100 \text{ N}$ , die Winkelgeschwindigkeit des Rades  $\Omega = 0,87 \text{ rad/s}$

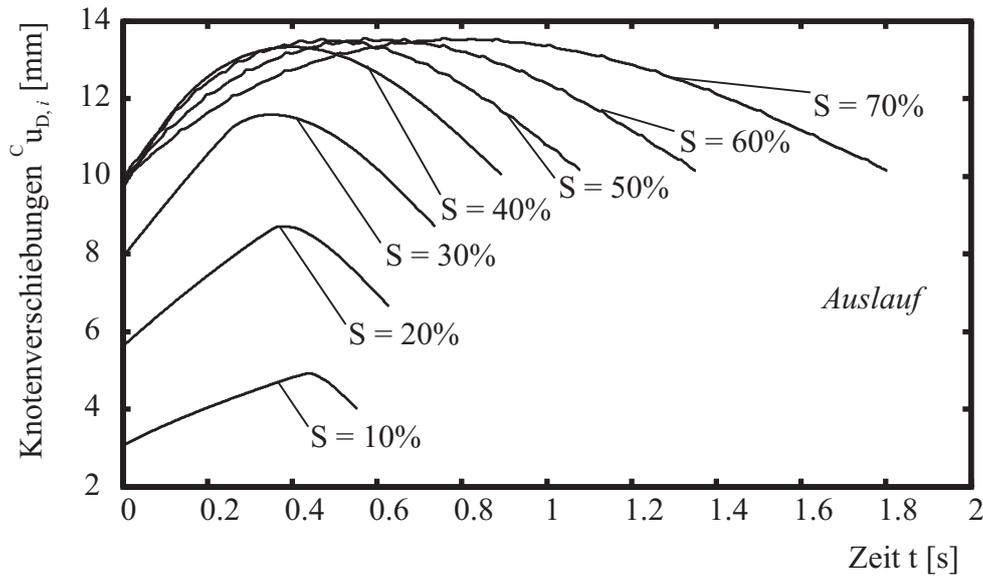
## 5.2 Stationäre Ergebnisse

Beim stationären Rollen bilden sich, abhängig von den konstanten Parametern Schlupf  $S$  und Normalkraft  ${}^C f_N$ , wegkonstante Verläufe der Zustandsgrößen aus. So kann aus den wegbezogenen Verläufen einzelner Knotenlasten  ${}^C_x f_{D,i}$  und  ${}^C_z f_{D,i}$ , der tangentialen Knotenverschiebung  ${}^C_{u_{D,i}}$  oder der Relativgeschwindigkeit eines Kontaktknotens  ${}^C_{v_{D,i}^{rel}}$ , auf das Verhalten aller kontaktierenden Knoten zu jedem Zeitpunkt geschlossen werden. Außerdem soll auch auf die zeitabhängigen Verläufe dieser Größen eingegangen werden. Wie schon in den Ergebnissen zur Vorberechnung in Abschnitt 5.1 werden auch in diesem Unterkapitel die relevanten Größen der kontaktierenden Knoten betrachtet. Der Übersichtlichkeit halber sind die gezeigten Größen mit dem Index  $D$  der *kontaktnahen* Knoten gekennzeichnet, die nicht kontaktierenden Knoten werden weggelassen.

### 5.2.1 Tangentiale Knotenverschiebungen ${}^C_{u_{D,i}}$

Bevor im nachfolgenden Unterkapitel die wegbezogenen Knotenlasten innerhalb der Endkonfiguration betrachtet werden, sollen die tangentialen Knotenverschiebungen in Abhängigkeit der Zeit  ${}^C_{u_{D,i}}(t)$  gezeigt werden. Zusammen mit der Referenzkoordinate  ${}^C_\lambda x_{D,i}$  lässt sich aus der tangentialen Knotenverschiebung  ${}^C_{u_{D,i}}$  die Koordinate  ${}^C_\delta x_{D,i}$  des Knotens  $D_i$  innerhalb der Endkonfiguration berechnen, siehe Gl. (4.9). Diese dient dann anschließend als Darstellungsgrundlage für die Knotenlasten  ${}^C_x f_{D,i}$  bzw.  ${}^C_z f_{D,i}$ , um den Zusammenhang dieser Lasten mit der Ausdehnung und der Position des Kontaktbereiches zu beurteilen.

In **Bild 5.6** sind die Zeitverläufe der tangentialen Verschiebungen des repräsentativen Kno-

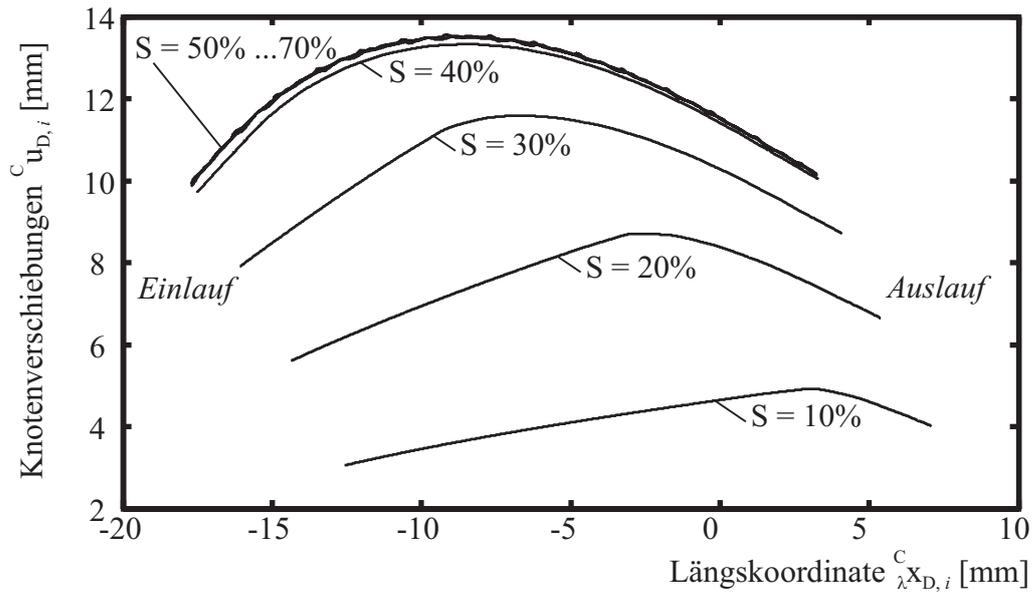


**Bild 5.6:** Zeitverläufe der tangentialen Verschiebung  ${}^C u_{D,i}$  eines Kontaktknotens  $D_i$  für verschiedene Werte des Bremschlupfes  $S = 10\%$ ,  $20\%$ ,  $\dots$ ,  $70\%$ . Die Normalkraft beträgt  ${}^C f_N = 40\text{ N}$ , die Fahrgeschwindigkeit  $v_C = 40\text{ mm/s}$

tens  $D_i$  für unterschiedliche Werte des Bremschlupfes  $S = 10\%$ ,  $20\%$ ,  $\dots$ ,  $70\%$  dargestellt. Die Normalkraft beträgt in allen Simulationen  ${}^C f_N = 40\text{ N}$  bei einer Fahrgeschwindigkeit  $v_C = 40\text{ mm/s}$ . Für die Darstellung wurde als einheitlicher Startzeitpunkt aller Verläufe  $t = 0$  gewählt. Auffällig ist die steigende Aufenthaltsdauer des Knotens  $D_i$  im Kontaktbereich für größer werdende Werte des Bremschlupfes  $S$ . Der Grund dafür liegt in der Schlupfdefinition, siehe Gl. (3.1). Eine Erhöhung des Bremschlupfes wird durch die Verringerung der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  des Groschrades erreicht. Unter Voraussetzung einer konstanten Kontaktlänge ergibt sich daraus für hohe Schlüpfе auch eine längere Kontaktdauer.

Die Verläufe  ${}^C u_{D,i}(t)$  für  $10\% \leq S \leq 40\%$  zeigen zunächst einen linearen Anstieg. In diesem Bereich haften die Knoten  $D_i$ , bis die tangentiale Knotenlast  ${}^C f_{D,i}$  die lokale Haftgrenze  $\mu_0 |{}^C f_{D,i}|$  erreicht. Innerhalb dieses Haftbereiches sind die tangentialen Verschiebungen  ${}^C u_{D,i}(t)$  durch die globalen Parameter Schlupf  $S$  und Nabengeschwindigkeit  ${}^C v_C$  vorgegeben, siehe Gl. (4.115). Da für steigenden Schlupf  $S$  die Differenz aus Umfangsgeschwindigkeit des Rades und relativer Fahrbahngeschwindigkeit zunimmt, nimmt die Steigung der Verläufe  ${}^C u_{D,i}(t)$  innerhalb des Haftbereiches zu. Für Schlüpfе  $S \geq 50\%$  tritt für den Knoten  $D_i$  kein Haften mehr auf, der Kontaktbereich befindet sich im vollständigen Gleitzustand. Da für die Simulationen in dieser Arbeit ein lokales Reibgesetz nach *Coulomb* gewählt wurde, ist im Falle absoluten Gleitens die maximal übertragbare Tangentialkraft  ${}^C f_T = \mu |{}^C f_N|$  erreicht. Daher ändern sich auch die maximalen Verschiebungen der Verläufe  ${}^C u_{D,i}(t)$  für Schlüpfе  $S \geq 50\%$  nicht mehr.

Für geringe Werte des Schlupfes  $S < 50\%$  steigen die Anfangsverschiebungen  ${}^C u_{D,i}(t = 0)$



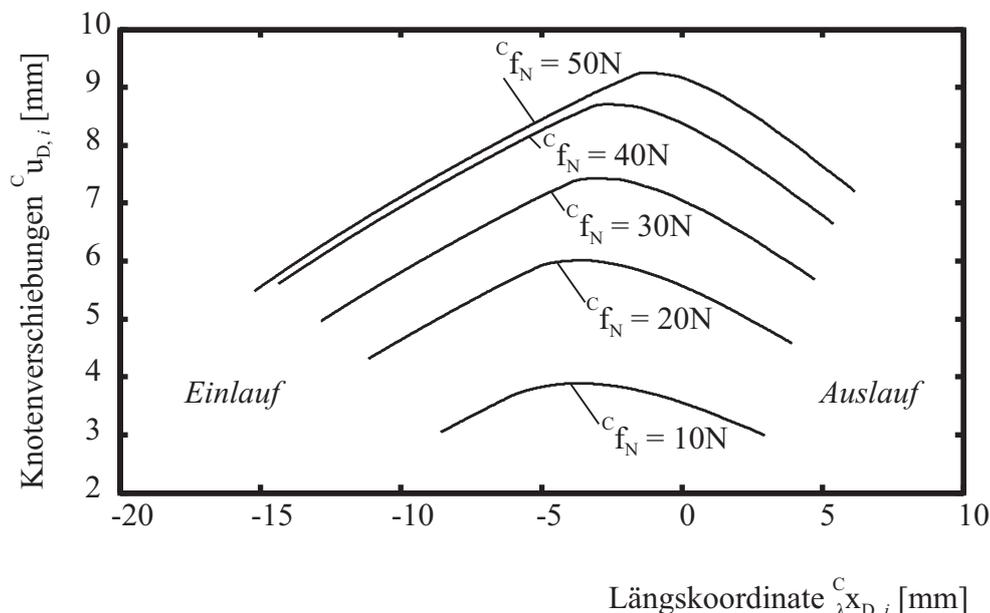
**Bild 5.7:** Tangentiale Knotenverschiebungen  ${}^C u_{D,i}$  über der Längskoordinate  ${}^C x_{D,i}$  des Referenzsystems für Schlüpf  $S = 10\%$ ,  $20\%$ ,  $\dots$ ,  $70\%$ . Die Normalkraft beträgt  ${}^C f_N = 40$  N

stark an. Für  $S = 10\%$  beträgt die Anfangsverschiebung  ${}^C u_{D,i}(t=0) \approx 3$  mm. Für steigenden Schlupf vergrößert sich zunächst auch der Wert der Anfangsverschiebung des Knotens  $D_i$  bis zu  ${}^C u_{D,i}(t=0) \approx 10$  mm. Für Schlupfwerte  $S \geq 50\%$  allerdings nimmt die Anfangsverschiebung nicht mehr zu, sondern bleibt konstant auf  ${}^C u_{D,i}(t=0) \approx 10$  mm, da die übertragene Tangentialkraft ihren Maximalwert  $\mu |{}^C f_N|$  erreicht hat. Je nach Steigung der „Haftgeraden“ werden für  $S < 50\%$  ausgehend von den Anfangsverschiebungen  ${}^C u_{D,i}(t=0)$  noch relative Verschiebungen zwischen  $\Delta {}^C u_{D,i} \approx 2$  mm und  $\Delta {}^C u_{D,i} \approx 3,5$  mm erreicht. Für reines Gleiten  $S \geq 50\%$  wird sogar eine relative Verschiebung von bis zu  $\Delta {}^C u_{D,i} \approx 3,8$  mm erreicht. Für reines Gleiten nimmt die Verschiebung nicht weiter zu, so dass die Verschiebungsverläufe  ${}^C u_{D,i}(t)$  sich für  $S \geq 50\%$  qualitativ nur noch durch eine Streckung entlang der Zeitachse unterscheiden. Aus Gründen der besseren Vergleichbarkeit zwischen den Verläufen werden die Zustandsgrößen im Folgenden auf Wegbasis betrachtet. Als Abszisse dient die Position  ${}^C x_{D,i}$  des Knotens  $D_i$  innerhalb der Endkonfiguration  $\delta$ . Diese wird durch Überlagerung der Referenzkoordinate  ${}^C x_{D,i}$  mit der bereits in **Bild 5.6** gezeigten Verschiebung  ${}^C u_{D,i}$  erreicht, siehe Gl. (4.9).

Die Verschiebung eines kontaktierenden Knotens  $D_i$  über seiner Referenzkoordinate  ${}^C x_{D,i}$  ist in **Bild 5.7** zu sehen. Als Parameter wurde in dieser Darstellung der Bremsschlupf  $S = 10\%$ ,  $20\%$ ,  $\dots$ ,  $70\%$  variiert, die Normalkraft beträgt konstant  ${}^C f_N = 40$  N. Deutlich zu sehen ist der lineare Anstieg der Verläufe innerhalb des Haftbereiches, der durch die globalen kinematischen Größen Nabengeschwindigkeit  ${}^C v_C$  und Schlupf  $S$ , sowie durch den Mantelradius  $r_M$  des Referenzsystems bestimmt ist. Dementsprechend verhalten sich die Steigungen der Verschiebungsverläufe auch annähernd proportional zum Betrag des vorgegebenen Schlupfes  $S$ . Der Abrisspunkt des betrachteten Knotens  $D_i$  verlagert sich für steigende Werte des Schlupfes  $S$  in Richtung der Einlaufkante. Für Schlüpf  $50\% \leq S \leq 70\%$

befindet sich der gesamte Kontaktbereich im Gleitzustand. Da das Kraftschlusspotential des Kontaktes für die gegebene Normalkraft  ${}^C f_N = 40 \text{ N}$  ab ca.  $S = 50 \%$  ausgeschöpft ist, verändert sich oberhalb dieses Schlupfwertes der Verlauf der tangentialen Knotenlast  ${}^C_x f_{D,i}$  nicht mehr. Daher ändern sich auch die Verschiebungsverläufe  ${}^C_{u_{D,i}}({}^C_\lambda x_{D,i})$  in **Bild 5.7** für Schlupfwerte  $S \geq 50 \%$  nur noch geringfügig.

Neben der Form der Verläufe ist für steigenden Schlupfe  $S$  auch die Verlagerung der Verschiebungen in Richtung der negativen Abszisse zu beobachten. Dies scheint zunächst widersinnig, da in allen gezeigten Rechnungen Bremschlupf vorgegeben wurde und durch die resultierende Bremskraft die kontaktierenden Knoten in entgegengesetzter Orientierung verschoben werden müssen. Allerdings tritt bedingt durch die „bremsenden“ Knotenlasten eine starke Torsion des Radkörpers auf, wodurch die einlaufenden Knoten in den Kontaktbereich gezogen werden. Auf diese Weise kommen innerhalb des Einlaufes Knoten in den Kontaktbereich, deren Referenzkoordinate sich noch in gewisser Entfernung zum Kontaktgebiet befindet. Im Auslaufbereich werden die Knoten durch denselben Effekt aus der Kontaktzone gedrückt. Außerdem bekommen sie durch das „Ausschnappen“ innerhalb der Gleitzzone einen zusätzlichen Impuls. Während sich die korrespondierende Referenzkoordinate  ${}^C_\lambda x_{D,i}$  noch im Kontaktgebiet befindet, hebt der Knoten innerhalb der Endkonfiguration bereits von der Fahrbahn ab. Da die durchschnittliche tangentiale Knotenverschiebung allerdings bei steigendem Schlupf stärker zunimmt als der beschriebene Torsionsanteil, kommt es insgesamt zu einer Verschiebung des Kontaktgebietes in Richtung der positiven Längsrichtung  ${}^C x$ .



**Bild 5.8:** Tangentiale Knotenverschiebungen  ${}^C_{u_{D,i}}$  über der Längskoordinate  ${}^C_\lambda x_{D,i}$  des Referenzsystems für Normalkräfte  ${}^C f_N = 10 \text{ N}, 20 \text{ N}, \dots, 50 \text{ N}$ . Der Schlupf beträgt  $S = 20 \%$

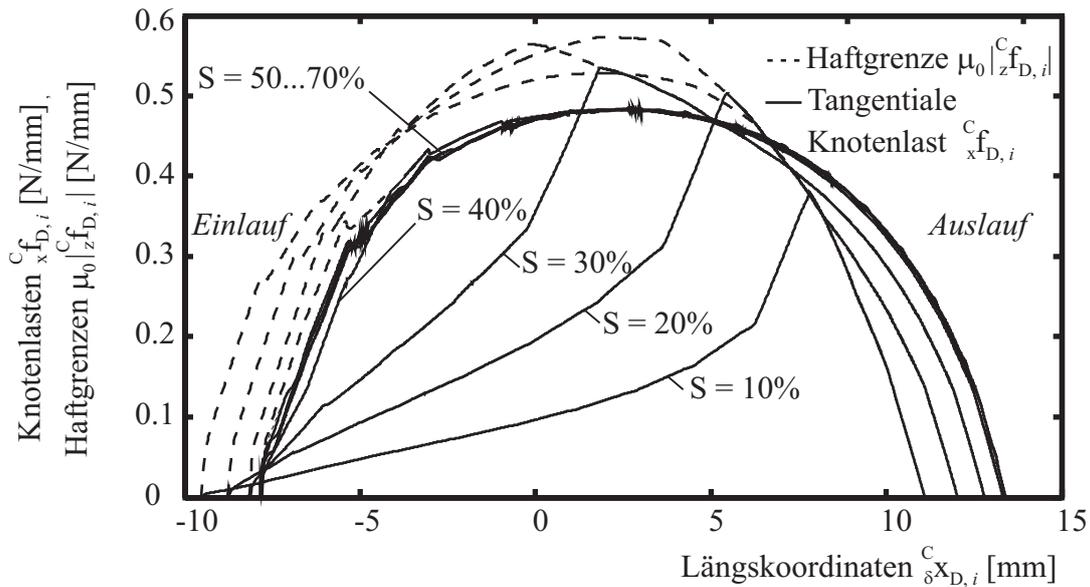
Die Abhängigkeit der wegbasierten Verschiebungsverläufe  ${}^C u_{D,i}({}_\lambda^C x_{D,i})$  von der Normalkraft  ${}^C f_N$  ist in **Bild 5.8** zu sehen. Bei konstantem Schlupf  $S = 20\%$  wurde die Radlast  ${}^C f_N = 10\text{ N}, 20\text{ N}, \dots, 50\text{ N}$  variiert. Wie schon in **Bild 5.6** und **Bild 5.7** ist das Haftgebiet des Knotens  $D_i$  am linearen Anstieg im Einlaufbereich zu erkennen. Die Steigung der Verläufe ist konstant, da die im Haftbereich aufgeprägte Verschiebungsgeschwindigkeit des Knotens  $D_i$  nur von der Drehgeschwindigkeit  $\Omega$  und der Nabengeschwindigkeit  ${}^C v_C$  des Rades abhängig ist.

Bei einer Normalkraft von  ${}^C f_N = 10\text{ N}$  beträgt die Anfangsverschiebung im Einlaufbereich  ${}^C u_{D,i}(t=0) \approx 3,0\text{ mm}$ . Für steigende Werte der Radlast  ${}^C f_N \leq 40\text{ N}$  nimmt auch die Anfangsverschiebung  ${}^C u_{D,i}(t=0) \approx 5,5\text{ mm}$  zu. Darüber hinaus nimmt die Anfangsverschiebung wieder leicht ab, für  ${}^C f_N = 50\text{ N}$  beträgt sie  ${}^C u_{D,i}(t=0) \approx 5,4\text{ mm}$ . Eine Begründung hierfür kann anhand der Lastbetrachtungen im nachfolgenden Kapitel gefunden werden. Für eine Normalkraft  ${}^C f_N = 10\text{ N}$  beträgt die relative Verschiebung  $\Delta^C u_{D,i} \approx 1,0\text{ mm}$ . Steigt die Radlast, so vergrößert sich auch die relative Verschiebung bis zu einem Wert von  $\Delta^C u_{D,i} \approx 3,0\text{ mm}$ . Im Gegensatz zur Anfangsverschiebung  ${}^C u_{D,i}(t=0)$  weist die relative Verschiebung  $\Delta^C u_{D,i}$  des Knotens  $D_i$  im betrachteten Bereich kein Maximum bzw. kein Sättigungsverhalten auf. Anders als in **Bild 5.7** verschiebt sich die Grenze zwischen Haft- und Gleitbereich in Abhängigkeit der Normalkraft  ${}^C f_N$  in Richtung der positiven Koordinatenachse  ${}^C x$ . Die Erklärung für dieses Phänomen ist, dass die spezifische tangentiale Steifigkeit des Kontaktknotens  $D_i$  in Abhängigkeit der Anzahl der insgesamt kontaktierenden Knoten abnimmt. Dadurch ist bei gleicher Verschiebung des Knotens  $D_i$  die Knotenlast  ${}_x^C f_{D,i}$  geringer, die Haftgrenze  $\mu_0 |{}_z^C f_{D,i}|$  wird erst bei höheren Werten der tangentialen Verschiebung  ${}^C u_{D,i}$  erreicht. Dies wird bei der Betrachtung der Knotenlastverläufe im nachfolgenden Kapitel deutlich.

### 5.2.2 Knotenlast ${}_x^C f_{D,i}$ und Haftgrenze $\mu_0 |{}_z^C f_{D,i}|$

Die wegbasierten Verläufe der tangential- und normalgerichteten Knotenlasten  ${}_x^C f_{D,i}$  und  ${}_z^C f_{D,i}$  hängen stark von den kontaktbestimmenden globalen Parametern Schlupf  $S$  und Normalkraft  ${}^C f_N$  ab. Daher soll in diesem Unterkapitel die Abhängigkeit der Knotenlasten von diesen globalen Parametern untersucht werden. **Bild 5.9** zeigt die Wegverläufe der Knotenlasten unter Variation des Bremsschlupfes  $S = 10\%, 20\%, \dots, 70\%$ , bei konstanter Normalkraft  ${}^C f_N = 40\text{ N}$ . Entsprechend der Einführung der beschreibenden Koordinatensysteme, siehe **Bild 4.3**, ist links im Diagramm der Einlauf- und rechts der Auslaufbereich des Kontaktgebietes gekennzeichnet. Statt der normalgerichteten Knotenlast  ${}_z^C f_{D,i}$  ist der Verlauf der Haftgrenze  $\mu_0 |{}_z^C f_{D,i}|$  eingetragen. Auf diese Weise kann aus dem Diagramm direkt eine Information über die Ausschöpfung des Kraftschlusspotentials und die exakte Position des Abrisspunktes entnommen werden.

Unmittelbar nach dem Einlaufen haften die kontaktierenden Knoten für Schlüpf  $S < 50\%$  zunächst an der Fahrbahn an. Die durch den globalen Schlupf vorgegebene Scherung führt zu einer Erhöhung der tangentialen Knotenlast  ${}_x^C f_{D,i}$  in Richtung des Auslaufendes. Für höhe-

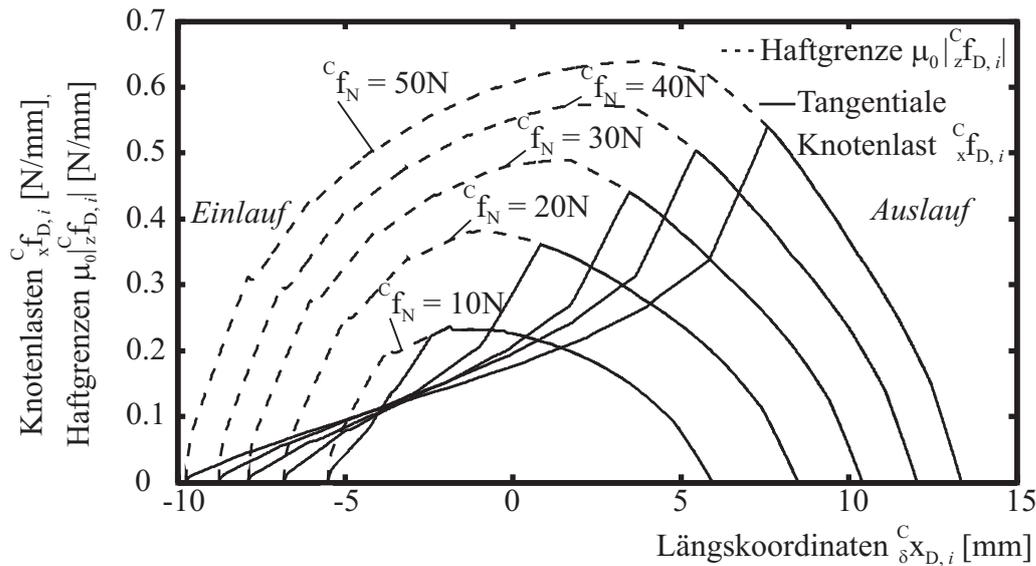


**Bild 5.9:** Tangentiale Knotenlasten  $f_{D,i}^C$  und die zugehörigen Haftgrenzen  $\mu_0|f_{D,i}^C|$  über der Längskoordinate  $\delta x_{D,i}^C$  der verformten Konfiguration für Bremsschlupf  $S = 10, 20, \dots, 70\%$ . Die Normalkraft beträgt  $f_N^C = 40\text{ N}$

re Schlupfwerte nimmt dabei die durchschnittliche Steigung der tangentialen Knotenlast zu. Aus diesem Grund wird die Haftgrenze  $\mu_0|f_{D,i}^C|$  für hohe Schlüpfen  $S$  früher erreicht und der Beginn der Gleitzone verschiebt sich in Richtung des Einlaufendes. Während ungekoppelte Modelle, wie z. B. das Bürstenmodell, siehe FROMM [19], in diesem Bereich eine lineare Steigung liefern, ergibt das instationäre Rollkontaktmodell durch den Einfluss der benachbarten Knoten einen stark progressiven Verlauf der tangentialen Knotenlast  $f_{D,i}^C$ . Dies deckt sich sowohl mit kontinuierlichen Modellen, siehe POPP/SCHIEHLEN [85], als auch mit Messungen am Reifen, siehe KUMMER [53] oder GERRESHEIM [24].

Erreichen die Werte der tangentialen Knotenlast  $f_{D,i}^C$  die Haftgrenze  $\mu_0|f_{D,i}^C|$ , kommt es zum Abriss des Knotens. Gemäß der verwendeten *Coulomb*-Reibgesetze ist die tangentiale Knotenlast  $f_{D,i}^C$  im Gleitbereich dann durch  $\mu|f_{D,i}^C|$  vorgegeben. Da in dieser Arbeit Haft- und Gleitreibwert gleichgesetzt wurden  $\mu_0 = \mu$ , siehe Abschnitt 4.3.2, entspricht der Verlauf der tangentialen Knotenlast im Gleitbereich dann der Haftgrenze  $\mu_0|f_{D,i}^C|$ . Für große Schlüpfen  $S > 50\%$  existiert kein Haftbereich mehr innerhalb der Kontaktzone. In der Simulation wird als Anfangsbedingung des Tangentialkontaktes der Zustand des Gleitens angenommen, siehe Abschnitt 4.2.3.3. Für geringe Schlüpfen  $S < 50\%$  wird der eintretende Knoten  $D_i$  durch die auf ihn wirkende Gleitreibung bis zur Relativgeschwindigkeit  $v_{D,i}^{rel} = 0$  abgebremst und haftet an. Für höhere Schlüpfen  $S \geq 50\%$  ist die Relativgeschwindigkeit des eintretenden Knotens  $D_i$  zu hoch, die Abbremsung innerhalb des Einlaufbereiches führt nicht mehr bis zum Haftübergang. Daher existiert für den hohen Schlupfbereich keine Haftzone, der gesamte Kontaktbereich befindet sich im Gleitzustand.

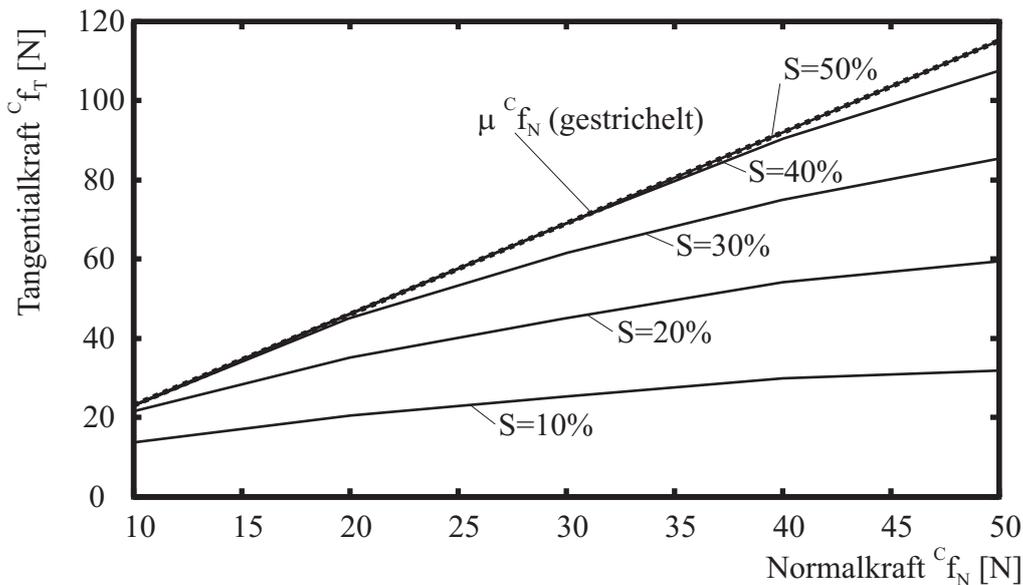
Für die vorgegebene Normalkraft  $f_N^C = 40\text{ N}$  bilden sich bei verschiedenen Werten des Schlupfes  $S$  auch unterschiedliche Verläufe für die normalgerichtete Knotenlast  $f_{D,i}^C$  aus.



**Bild 5.10:** Tangentiale Knotenlasten  ${}^C f_{D,i}$  und die zugehörigen Haftgrenzen  $\mu_0 |{}^C f_{D,i}|$  über der Längskoordinate  $\delta x_{D,i}$  der Endkonfiguration für Normalkräfte  ${}^C f_N = 10\text{ N}, 20\text{ N}, \dots, 50\text{ N}$ . Der Schlupf beträgt  $S = 20\%$

Bedingt durch die für steigende Bremschlüpfte steigende globale Tangentialkraft  ${}^C f_T$  findet eine Verschiebung des gesamten Kontaktbereiches in Richtung der positiven Koordinatenachse  ${}^C x$  statt. Dies führt zu einer Gesamtverschiebung der normalgerichteten Knotenlastverläufe  ${}^C f_{D,i}$  ( $\delta x_{D,i}$ ) in **Bild 5.9**. Zusätzlich wird der Verlauf der normalgerichteten Knotenlast  ${}^C f_{D,i}$  bzw. der Haftgrenze  $\mu_0 |{}^C f_{D,i}|$  im Bereich der höchsten tangentialen Knotenlasten um den Abrisspunkt herum beeinflusst. Während die Verläufe der Haftgrenze  $\mu_0 |{}^C f_{D,i}|$  für schlupffreien Lauf des Rades ungefähr achsensymmetrisch zum Mittelpunkt der Kontaktfläche angeordnet sind, bildet sich für höhere Schlüpfte  $S$  ein Maximum aus, von dessen Seiten der Verlauf von  $\mu_0 |{}^C f_{D,i}|$  relativ steil abfällt. Dabei werden im Bereich geringer Schlüpfte  $S < 50\%$  maximale Werte der tangentialen Knotenlast  ${}^C f_{D,i} \approx 0,58\text{ N/mm}$  erreicht, für reines Gleiten  $S \geq 50\%$  lediglich  ${}^C f_{D,i} \approx 0,48\text{ N/mm}$ .

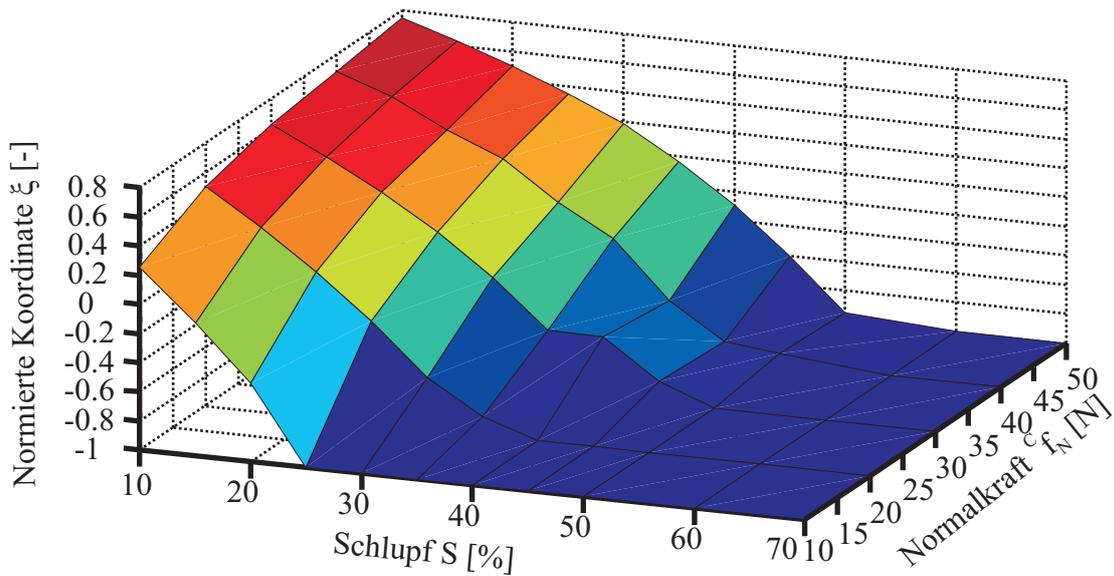
Die Abhängigkeit der tangentialen Knotenlast  ${}^C f_{D,i}$  sowie der Haftgrenze  $\mu_0 |{}^C f_{D,i}|$  von der Normalkraft  ${}^C f_N$  zeigt **Bild 5.10**. Im Bild sind Verläufe der Knotenlasten  ${}^C f_{D,i}$  ( $\delta x_{D,i}$ ) für  ${}^C f_N = 10\text{ N}, 20\text{ N}, \dots, 50\text{ N}$  zu sehen, der Bremschlupf betrug in allen Fällen  $S = 20\%$ . Die Steigung der Verläufe der tangentialen Knotenlast  ${}^C f_{D,i}$  ( $\delta x_{D,i}$ ) innerhalb des Haftbereiches nimmt mit größer werdender Normalkraft  ${}^C f_N$  ab. Der Grund hierfür liegt in der höheren Anzahl der kontaktierenden, haftenden Knoten. Zwar steigt die übertragene Tangentialkraft  ${}^C f_T$  für höhere Normalkräfte  ${}^C f_N$  an, aber stärker noch nimmt die Anzahl der kontaktierenden Knoten zu. Wird diesen Knoten im Haftzustand eine Verschiebung aufgeprägt, entfällt für hohe Normalkräfte  ${}^C f_N$  ein geringerer Anteil der Tangentialkraft  ${}^C f_T$  auf jeden einzelnen Knoten. Daraus resultiert die geringere Steigung der Verläufe  ${}^C f_{D,i}$  ( $\delta x_{D,i}$ ) für höhere Normalkräfte  ${}^C f_N$ . Die höhere Steigung der Verläufe der tangentialen Knotenlast  ${}^C f_{D,i}$  ( $\delta x_{D,i}$ ) führt dazu, dass das Kraftschlusspotential bei gleichem Schlupf  $S = 20\%$  bei geringen Normalkräften  ${}^C f_N$  bereits nahezu ausgeschöpft ist.



**Bild 5.11:** Zusammenhang zwischen den globalen Größen Tangentialkraft  ${}^C f_T$  und Normalkraft  ${}^C f_N$ . Die Steigung der Verläufe  ${}^C f_T$  ( ${}^C f_N$ ) nimmt allgemein ab, für geringe Werte des Schlupfes wird die Sättigung eher erreicht

So ergibt sich für einen Schlupf  $S = 20\%$ , bei einem maximalen Reibbeiwert  $\mu_{max}^* = 2,3$  und einer Normalkraft  ${}^C f_N = 10\text{ N}$  bereits ein Reibbeiwert  $\mu^* \approx 2,1$ , für die hohe Normalkraft  ${}^C f_N = 50\text{ N}$  ist mit  $\mu^* \approx 1,2$  ein weitaus geringerer Teil der möglichen Tangentialkraft ausgeschöpft. Da trotzdem mit steigender Normalkraft  ${}^C f_N$  auch eine höhere Tangentialkraft  ${}^C f_T$  übertragen wird, sind die Verläufe  ${}^C f_{D,i}$  ( ${}^C x_{D,i}$ ) für höhere Normalkräfte analog zu den Verläufen in **Bild 5.9** entlang der positiven Koordinatenachse  ${}^C x$  verschoben. Davon unabhängig bildet sich durch die höhere Normalkraft  ${}^C f_N$  auch eine größere Kontaktfläche aus, so dass die Knotenlastverläufe eine längere Kontaktstrecke aufweisen, vergleiche Abschnitt 5.1.

In **Bild 5.11** ist die Tangentialkraft  ${}^C f_T$  in Abhängigkeit der Normalkraft  ${}^C f_N$  abgebildet. Als Parameter wurde der Bremsschlupf  $S = 10\%, 20\%, \dots, 50\%$  variiert, die durch die *Coulomb'sche* Gleitreibung festgelegte Grenze der maximal übertragbaren Tangentialkraft  ${}^C f_T$  für  $\mu = 2,3$  ist gestrichelt eingezeichnet. Alle Verläufe  ${}^C f_T$  ( ${}^C f_N$ ) zeigen ein degressives Verhalten, dabei ist der degressive Abfall für geringe Schlüpfwerte  $S$  höher als für hohe Schlüpfwerte. Für die Normalkraft  $f_N = 10\text{ N}$  existiert bei einem Bremsschlupf  $S \leq 20\%$  noch ein Haftbereich innerhalb der Kontaktzone, da die Funktionswerte  ${}^C f_T$  ( ${}^C f_N$ ) nicht auf der Geraden  $\mu {}^C f_N$  liegen. Für  $S < 20\%$  entsprechen die Funktionswerte  ${}^C f_T$  ( ${}^C f_N$ ) der „Gleitgeraden“  $\mu {}^C f_N$ , so dass sich der Kontaktbereich vollständig im Gleitzustand befindet. Bei einer Normalkraft  ${}^C f_N = 50\text{ N}$  liegt nur noch für  $S = 50\%$  vollständiges Gleiten vor, für geringere Schlüpfwerte  $S < 10\%$  haften Teile des Kontaktbereiches an der Fahrbahn an. Anhand des Verlaufes  ${}^C f_T$  ( ${}^C f_N$ ) für  $S = 20\%$  lässt sich ein Vergleich zu **Bild 5.10** ziehen. Dort ist zu sehen, dass sich die Position des Abrisspunktes des Knotens  $D_i$  für steigende Normalkraft  ${}^C f_N$  relativ zum Verlauf der Haftgrenze  $\mu_0 |{}^C f_N|$  für hohe Normalkräfte nicht mehr so stark ändert wie für geringe Normalkräfte. Dies bestätigt sich bei der Betrachtung des Verlaufes  ${}^C f_T$  ( ${}^C f_N$ ) für  $S = 20\%$  in **Bild 5.11**, da sich die Funktionswerte  $f_T$  für hohe Normalkräfte



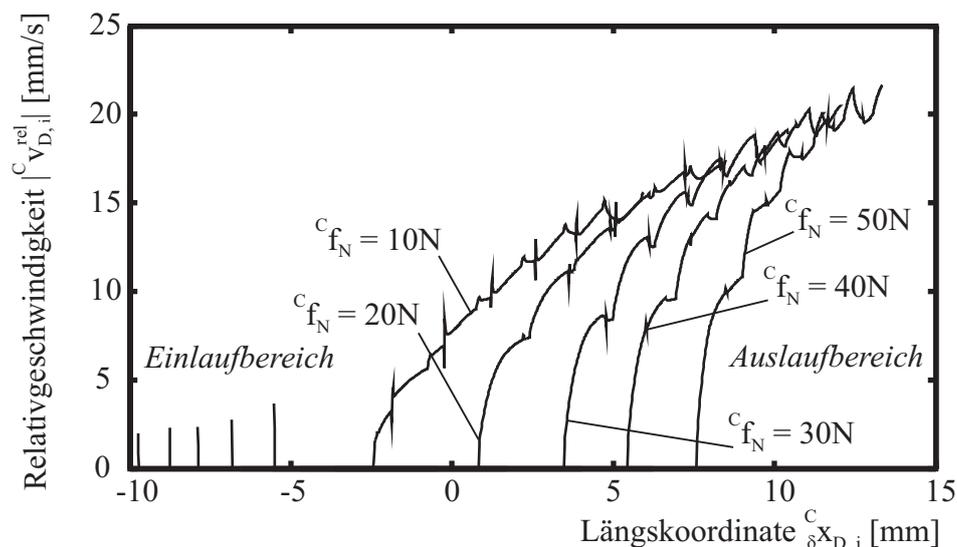
**Bild 5.12:** Relative Position  $\xi$  des Abrisspunktes in Abhängigkeit des Schlupfes  $S$  und der Normalkraft  ${}^C f_N$

$f_N$  nicht mehr ändern. Der Grund ist, dass die Verlängerung der Kontaktfläche durch die geringere Steigung des Knotenlastverlaufes  ${}^C f_{D,i}$  ( ${}^C x_{D,i}$ ) innerhalb des Haftbereiches nahezu ausgeglichen wird, siehe **Bild 5.10**. Schließlich ist zu beobachten, dass für geringen Schlupf  $S$  eine annähernde Sättigung bereits für kleinere Werte der Normalkraft  ${}^C f_N$  erreicht wird. Hier spielen zwei Effekte eine Rolle: Einerseits vergrößert sich mit zunehmender Normalkraft  ${}^C f_N$  die Kontaktfläche. Dies führt zu einer Verlängerung der Haftgeraden und damit zu einer Vergrößerung des Haftbereiches. Andererseits sinkt die tangentielle Steifigkeit des einzelnen Kontaktknotens  $D_i$ , ebenfalls durch die Verlängerung der Kontaktfläche bedingt. Dies führt zu einer geringeren Steigung der Verläufe  ${}^C f_T$  ( ${}^C f_N$ ). Während der erste Effekt hauptsächlich zu einer Erhöhung der resultierenden Tangentialkraft  ${}^C f_T$  führt, folgt aus dem zweiten Phänomen größtenteils eine Vergrößerung des Kraftschlusspotentials. Dieses ist wiederum quantitativ durch den charakteristischen Verlauf der Haftgrenze  $\mu|{}^C f_{D,i}|$  vorgegeben. Für hohe Normalkräfte  $f_N$  tritt eine Sättigung der Verläufe  ${}^C f_T$  ( ${}^C f_N$ ) ein, da die Absenkung der spezifischen tangentialen Steifigkeit des Knotens  $D_i$  zwar noch weiter zunimmt, die Kontaktlänge sich aber nicht mehr so stark ändert wie für geringe Werte der Normalkraft  ${}^C f_N$ .

Zur näheren Untersuchung der relativen Position des Abrisspunktes in Abhängigkeit des Schlupfes  $S$  und der Normalkraft  ${}^C f_N$  dient **Bild 5.12**. Die relative Koordinate  $\xi$  stellt dabei die Position des Abrisspunktes bezogen auf die Kontaktlänge dar, so dass für den Definitionsbereich  $-1 \leq \xi \leq 1$  gilt, wobei  $\xi = -1$  die Einlauf-, und  $\xi = 1$  die Auslaufkante darstellt. Das längste Haftgebiet ergibt sich für hohe Normalkräfte  ${}^C f_N$  und geringen Schlupf  $S$ . Sowohl Verringerung der Normalkraft  ${}^C f_N$  als auch Erhöhung des Schlupfes  $S$  führen zu einer Verschiebung des Abrisspunktes in Richtung des Einlaufendes. Der Einfluss der Normalkraft  ${}^C f_N$  ist für geringen Schlupf  $S$  klein, nimmt allerdings für größere Werte des Schlupfes  $S$  zu.

### 5.2.3 Relativgeschwindigkeit ${}^C v_{D,i}^{rel}$

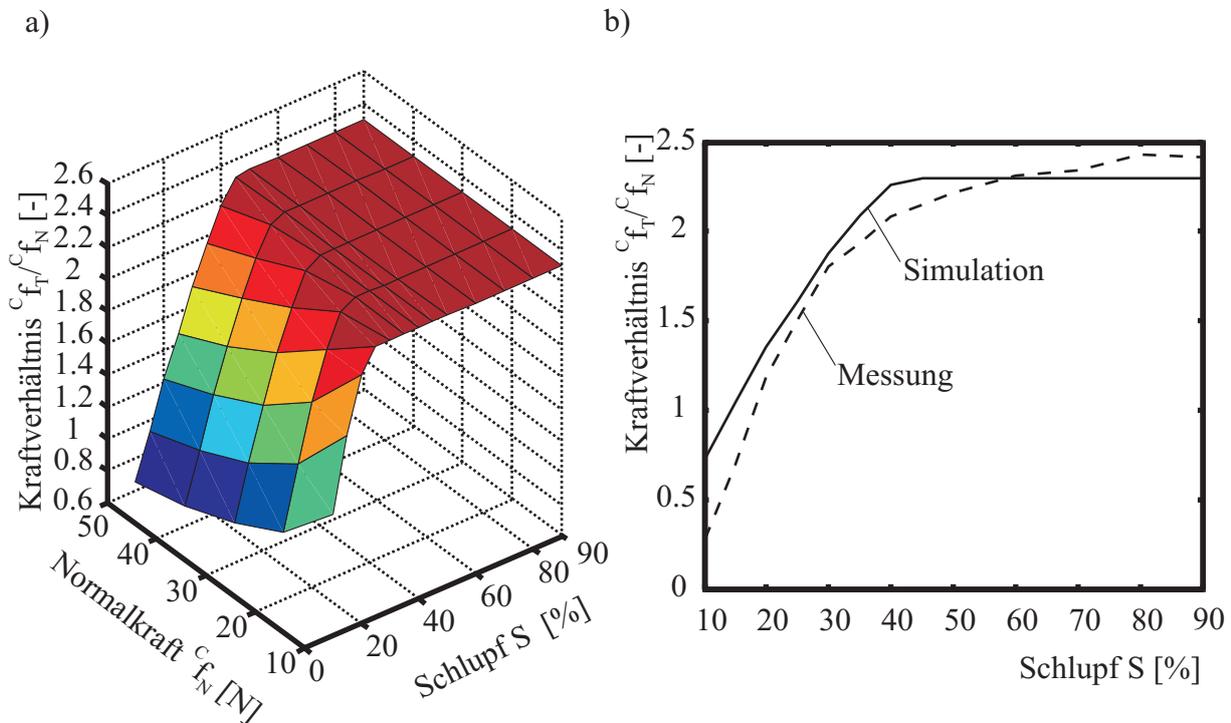
Ein weiterer Einblick in den Reibkontakt zwischen Rad und Fahrbahn kann durch Betrachtung der Relativgeschwindigkeit  ${}^C v_{D,i}^{rel}$  zwischen Knoten  $D_i$  und Fahrbahn gewonnen werden, siehe **Bild 5.13**. Entsprechend der Festlegung der kinematischen Größen, siehe **Bild 4.2**, entsteht bei Aufprägung eines Bremsschlupfes eine negative Relativgeschwindigkeit, aus Gründen der Darstellung ist daher der Betrag dieser Größe abgebildet. Im Einlaufbereich des Rades sind Peaks der Relativgeschwindigkeit  ${}^C v_{D,i}^{rel}$  zu sehen, die entsprechend der zugeordneten Normalkraft  ${}^C f_N = 10\text{ N}, 20\text{ N}, \dots, 50\text{ N}$  etwa im Bereich  $-10\text{ mm} \leq {}^C x_{D,i} \leq -5\text{ mm}$  angeordnet sind. Diese Peaks werden durch eintretende Knoten verursacht, die sich im Moment des ersten Kontaktierens zunächst per Definition im Gleitzustand befinden, siehe Abschnitt 4.2.3.3. Durch die schnell ansteigende Normallast  ${}^C f_{D,i}$  im Einlaufbereich steigt auch die Tangentiallast  ${}^C f_{D,i} = \mu |{}^C f_{D,i}|$  stark an und bremst den Knoten  $D_i$  ab. In Folge dessen nimmt die Relativgeschwindigkeit ab, bis  ${}^C v_{D,i}^{rel} = 0$  gilt, der Knoten  $D_i$  haftet an. Innerhalb der Haftphase ist der Knoten fest mit der Fahrbahn verbunden, weshalb weiterhin keine Relativgeschwindigkeit zwischen Knoten und Fahrbahn auftritt  ${}^C v_{D,i}^{rel} = 0$ . Innerhalb der Haftphase steigt die tangentialen Knotenlast  ${}^C f_{D,i}$  an, bis die Haftgrenze  $\mu_0 |{}^C f_{D,i}|$  erreicht ist, vergleiche **Bild 5.10**. Es folgt das „Ausschnappen“ des Knotens, er beschleunigt für jede Normalkraft  ${}^C f_N$  bis zu einem Wert von  ${}^C v_{D,i}^{rel} \approx 20\text{ mm/s}$ . Für höhere Normalkräfte  ${}^C f_N$  treten dabei höhere Beschleunigungen des Knotens  $D_i$  auf.



**Bild 5.13:** Betrag der Relativgeschwindigkeit  $|{}^C v_{D,i}^{rel}|$  zwischen dem kontaktierenden Knoten  $D_i$  und der Fahrbahn für  ${}^C f_N = 10\text{ N}, 20\text{ N}, \dots, 50\text{ N}$ , bei konstantem Schlupf  $S = 20\%$

### 5.2.4 Stationärer Rollkontakt: Vergleich Messung-Rechnung

Nach den lokalen Einblicken des Rollkontaktes in den vorangegangenen Unterkapiteln soll nun anhand globaler Größen ein Vergleich zwischen den stationären Messungen in Abschnitt 3.2 und den Ergebnissen des Rollkontaktmodells durchgeführt werden. **Bild 5.14** a) zeigt ein aus stationären Simulationen resultierendes Kennfeld, das die Abhängigkeit des Kraftverhältnisses  ${}^C f_T / {}^C f_N$  von Normalkraft  ${}^C f_N$  und Schlupf  $S$  darstellt. Analog zu den stationären Messungen wurden die Parameterstudien im Bereich der Normalkraft  ${}^C f_N = 10\text{ N}, 20\text{ N}, \dots, 50\text{ N}$  und des Schlupfes  $S = 10\%, 20\%, \dots, 50\%$  durchgeführt. In Abhängigkeit des Schlupfes  $S$  steigt das Kraftverhältnis  ${}^C f_T / {}^C f_N$  zunächst an und erreicht dann den Sättigungswert  ${}^C f_T / {}^C f_N = 2,3$ . Dieser Wert entspricht dem in Abschnitt 4.3.2 festgelegten Wert für des Gleitreibwertes nach *Coulomb*. Für hohe Schlüpfen  $S$  befindet sich der gesamte Kontaktbereich im Gleitzustand. Daher entspricht für hohe Schlüpfen  $S$  das globale Kraftverhältnis eben diesem lokalen Gleitreibwert. Für geringere Werte des Schlupfes  $S$  haften Teile des Kontaktbereiches an, die Knotenlasten besitzen teilweise in diesem Bereich den Charakter von Reaktionslasten, die maximal die Haftgrenze  $\mu_0 |{}^C f_{D,i}|$  erreichen. Da Haft- und Gleitreibwert für das verwendete Rollkontaktmodell gleich groß gewählt worden sind  $\mu_0 = \mu$ , stellt der Gleitreibwert  $\mu = 2,3$  auch den maximal erreichbaren Sättigungswert für das Kraftverhältnis  ${}^C f_T / {}^C f_N$  dar, es existiert somit kein Maximum.



**Bild 5.14:** a) Simuliertes Kennfeld des Kraftverhältnisses  ${}^C f_T / {}^C f_N$  in Abhängigkeit der Einflussparameter Normalkraft  ${}^C f_N$  und Schlupf  $S$ ; b) Schnitt durch das Kennfeld bei  ${}^C f_N = 40\text{ N}$ , Vergleich zwischen Messung und Simulation

Des Weiteren zeigt das Kraftverhältnis  ${}^C f_T / {}^C f_N$  eine fallende Abhängigkeit von der Normalkraft  ${}^C f_N$ . Dieser Effekt beruht größtenteils auf dem Absinken der tangentialen Steifigkeit des Rades für steigende Normalkräfte  ${}^C f_N$ , siehe auch **Bild 5.10**. Auf diese Weise kommt es zu der beobachteten fallenden Charakteristik. Qualitativ sind die in der Simulation beobachteten Abhängigkeiten des Kraftverhältnisses  ${}^C f_T / {}^C f_N$  vom Schlupf  $S$  und von der Normalkraft  ${}^C f_N$  auch in dem gemessenen Naturkautschuk-Kennfeld in **Bild 3.4** zu erkennen. Allerdings ist der fallende Verlauf des Kennfeldes über der Normalkraft  ${}^C f_N$  in der Simulation weniger deutlich ausgeprägt. **Bild 5.14** b) zeigt den Vergleich zwischen Messung und Rechnung qualitativ für einen Schnitt durch das Kennfeld bei  ${}^C f_N = 40$  N. Der gemessene Verlauf beginnt bei einem Wert von  $F_T / F_N \approx 0,3$  für  $S = 10\%$ , die Simulation ergibt für den gleichen Schlupfwert ein höheres Kraftverhältnis  ${}^C f_T / {}^C f_N \approx 0,7$ . Für steigende Schlüpfte  $S$  zeigen beide Verläufe ein Sättigungsverhalten, wobei der gemessene Verlauf etwas runder verläuft. Der Graph des simulierten Kraftverhältnisses dagegen steigt im Bereich  $S \leq 40\%$  annähernd linear an, für  $S > 40\%$  ergibt die Simulation den nahezu konstanten Wert  ${}^C f_T / {}^C f_N \approx 2,3$ . Dieser „harte“ Verlauf in der Simulation liegt in dem *Coulomb'schen* Reibgesetz begründet, das lediglich einen konstanten Wert  $\mu$  für die Gleitreibung annimmt. Mit einem gummispezifischen Reibgesetz, das für die lokale Gleitreibcharakteristik  $\mu(v_{rel})$  beispielsweise einen Sättigungsverlauf bereitstellt, ließe sich der Unterschied zwischen Messung und Simulation weiter minimieren.

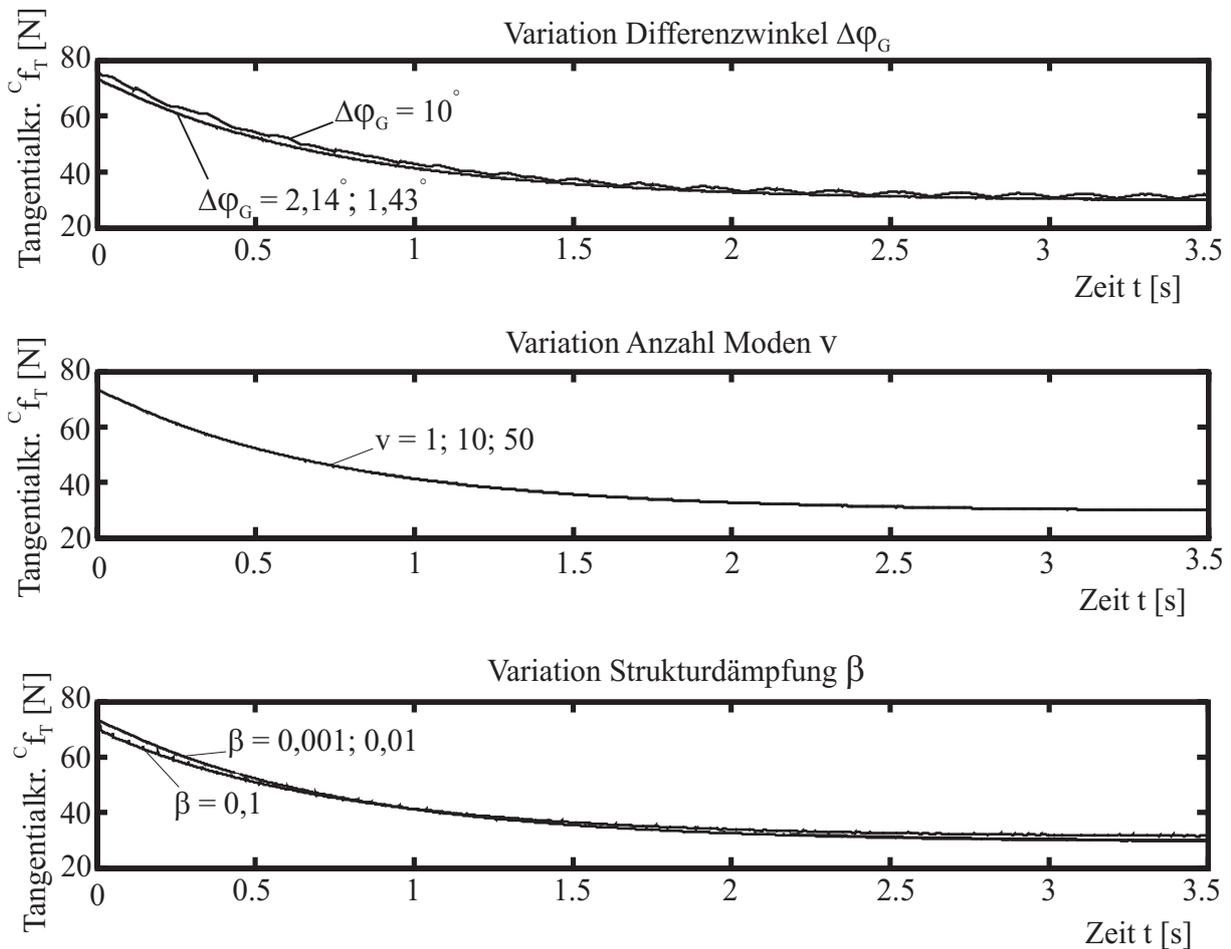
## 5.3 Instationäre Ergebnisse

Die stationären Simulationen ergaben eine gute Übereinstimmung mit gemessenen Verläufen. Das in dieser Arbeit präsentierte Rollkontaktmodell bildet neben stationärem Rollen aber auch das Verhalten des kontaktierenden Rades bei schnellen Änderungen des Schlupfes ab. Daher wird in diesem Unterkapitel das Systemverhalten als Reaktion auf Schlupfsprünge untersucht. Die Ergebnisse werden schließlich mit den in den Messungen beobachteten Größen, die bereits in Abschnitt 3.3 dargestellt wurden, verglichen.

### 5.3.1 Variation der freien Parameter

Bevor die Zeitverläufe der Tangentialkraft  ${}^C f_T(t)$  betrachtet werden, soll die Sensitivität der Ergebnisse gegenüber der Diskretisierung der Radstruktur, der Anzahl der Moden innerhalb der *Craig-Bampton*-Transformation (CB-Transformation), sowie der angenommenen Materialdämpfung überprüft werden. Alle übrigen Parameter werden durch Messungen ermittelt, vergleiche Abschnitt 4.3. **Bild 5.15** zeigt den zeitlichen Verlauf der Tangentialkraft  ${}^C f_T(t)$  nach einem Schlupfsprung  $S = 30\% \rightarrow 10\%$ , bei  ${}^C f_N = 40$  N und  ${}^C v_C = 40$  mm/s. In drei Diagrammen wurden die Größen Differenzwinkel zweier benachbarter Knoten, Anzahl der für die CB-Transformation verwendeten Moden, sowie die angenommene Strukturdämpfung variiert, um den Einfluss dieser Parameter auf die Zeitverläufe der Tangentialkraft  ${}^C f_T(t)$  zu klären.

Im oberen Diagramm von **Bild 5.15** wurde der Differenzwinkel  $\Delta\varphi_G$  zweier benachbarter Knoten als Kriterium der Dichte des Diskretisierungsnetzes gewählt. Dieser Parameter beeinflusst proportional die Anzahl der Mantelknoten, und damit der Hauptfreiheitsgrade des CB-transformierten Systems. Im Diagramm sind exemplarisch die Zeitverläufe der Tangentialkraft  ${}^C f_T(t)$  für die Differenzwinkel  $\Delta\varphi_G = 1,43^\circ$ ;  $2,14^\circ$ ;  $10^\circ$  gezeigt. Dies entspricht jeweils einer Anzahl von  $M = 252$ ;  $168$ ;  $36$  Mantelknoten. Während zwischen den Verläufen  ${}^C f_T(t)$  von  $\Delta\varphi_G = 1,43^\circ$  und  $\Delta\varphi_G = 2,14^\circ$  kein Unterschied festzustellen ist, liegt der Verlauf für  $\Delta\varphi_G = 10^\circ$  leicht oberhalb der anderen beiden Graphen. Die Zeitkonstanten  $\tau$  der drei Zeitverläufe unterscheiden sich nur noch geringfügig voneinander. Für die numerisch effiziente Berechnung von Zeitkonstanten bzw. für die Betrachtung der Zeitverläufe der globalen Tangentialkraft oder des Reibbeiwertes  $\mu^*$  kann ein Differenzwinkel  $\Delta\varphi_G = 10^\circ$  somit als ausreichend betrachtet werden.



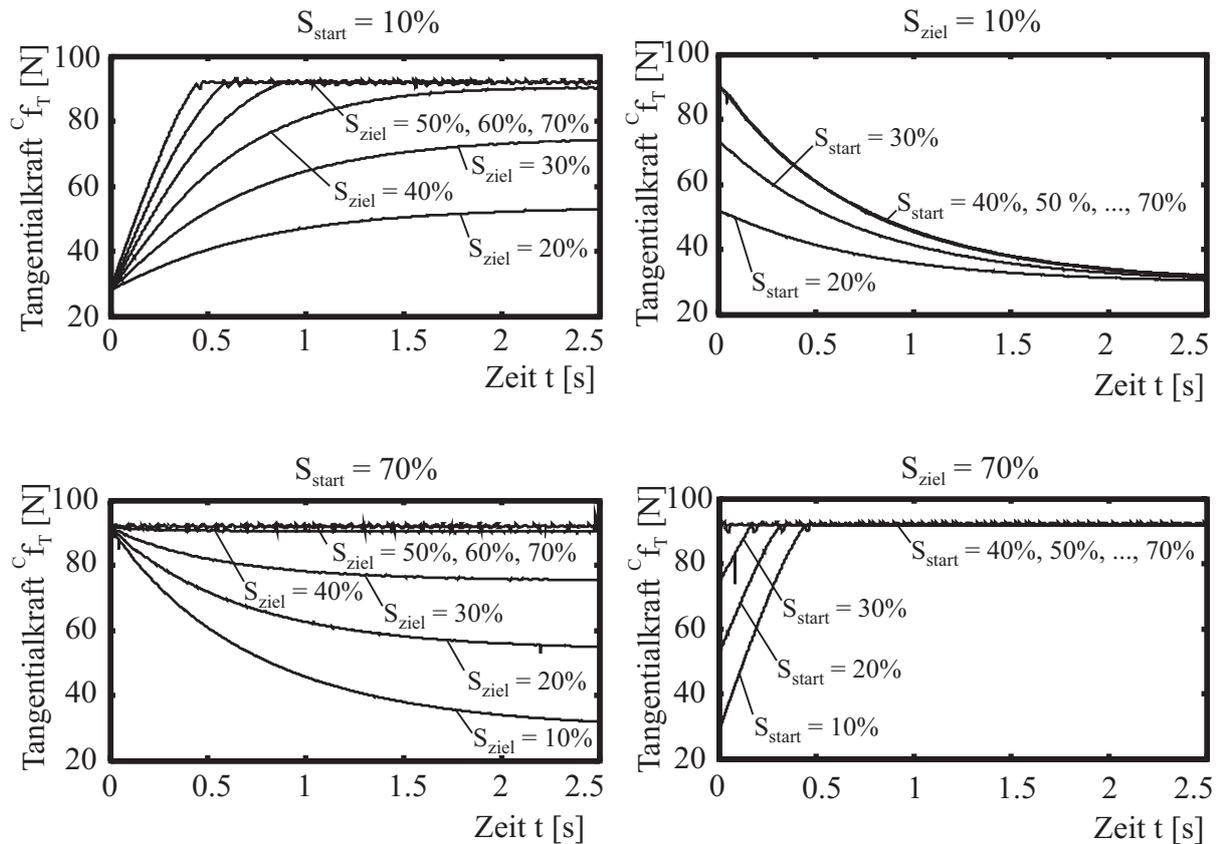
**Bild 5.15:** Zeitlicher Verlauf der Tangentialkraft  ${}^C f_T(t)$  nach einem Schlupfsprung  $S = 30\% \rightarrow 10\%$ , bei  ${}^C f_N = 40$  N und  ${}^C v_C = 40$  mm/s, unter Variation der Simulationsparameter Differenzwinkel, Anzahl der verwendeten Moden sowie der angenommenen Strukturdämpfung

Das mittlere Diagramm in **Bild 5.15** zeigt die Abhängigkeit der Zeitverläufe  ${}^C f_T(t)$  von der Anzahl der Moden des CB-transformierten Systems, siehe Abschnitt 4.1.3. Für die Anzahl der Moden wurde  $v = 1, 10, 50$  angesetzt. Die drei zugehörigen abgebildeten Zeitverläufe der Tangentialkraft  ${}^C f_T(t)$  zeigen keinen Unterschied. Die in dieser Arbeit beobachteten dynamischen Effekte werden somit bereits durch die statischen Ansatzfunktionen der CB-Transformation ausreichend abgebildet. Darüber hinaus bringt eine Erhöhung der Anzahl der verwendeten Moden nur noch minimale Änderungen.

Im unteren Diagramm von **Bild 5.15** ist der Einfluss der Strukturdämpfung auf die Dynamik des Rollkontaktes zu sehen. Es wurde eine frequenzproportionale Dämpfung angenommen, der entsprechende Dämpfungsfaktor im Bereich  $\beta = 0,001; 0,01; 0,1$  variiert. Dies entspricht dem Dämpfungsgrad  $D = 0,34; 3,4; 34$  der ersten Eigenform. Zwischen den Zeitverläufen  ${}^C f_T(t)$  für  $\beta = 0,001$  und  $\beta = 0,01$  ist kein Unterschied sichtbar. Der Verlauf der stärksten Dämpfung  $\beta = 0,1$  liegt unmittelbar nach dem Schlupfsprung unterhalb der anderen beiden Verläufe, und schneidet sie bei  $t \approx 1,0$  s. Da ein Dämpfungsgrad  $D = 34$  der ersten Eigenform für den Werkstoff Gummi als unrealistisch gesehen werden kann, wird für die Simulationen  $D = 3,4$  bzw.  $\beta = 0,01$  angenommen. Dabei handelt es sich zwar um einen Schätzwert, da sich die Zeitverläufe der Tangentialkraft  ${}^C f_T(t)$  aber wenig empfindlich gegenüber einer Änderung des Dämpfungswertes zeigten, stellt dies eine akzeptable Vorgehensweise dar. Für alle in diesem Kapitel gezeigten Simulationsergebnisse wurde der Differenzwinkel  $\Delta\varphi_G = 2,14^\circ$  gewählt, um den Einfluss der Diskretisierung insbesondere auf die Zeitverläufe der Knotenlasten zu minimieren. Die Anzahl der berücksichtigten Moden beträgt  $v = 10$ . Die Rechenzeit für das beschriebene Modell beträgt etwa 4,0 h pro Sekunde Simulationszeit. Untersuchungen mit einer durchschnittlichen Elementkantenlänge  $\Delta\varphi_G = 10^\circ$  benötigten etwa eine Rechenzeit von 0,75 h pro Sekunde Simulationszeit.

### 5.3.2 Zeitverläufe der Tangentialkraft nach Schlupfsprung

Die instationären Messungen in Abschnitt 3.3.3 zeigten eine Abhängigkeit der Zeitverläufe der Tangentialkraft  ${}^C f_T(t)$  vom Start- bzw. Endniveau des Schlupfsprunges. Die entsprechenden simulierten Zeitverläufe zeigt **Bild 5.16**. Die oberen Diagramme zeigen Schlupfsprünge von  $S_{start} = 10\%$  auf ein höheres Niveau, und die entsprechenden Rücksprünge auf  $S_{ziel} = 10\%$ . Auf den unteren Diagrammen sind analog Sprünge für  $S_{start} = 70\%$  und  $S_{ziel} = 70\%$  zu sehen. Die Normalkraft beträgt  ${}^C f_N = 40$  N, bei einer Nabengeschwindigkeit  ${}^C v_C = 40$  mm/s des Rades. Die maximale Tangentialkraft  ${}^C f_T \approx 92$  N wird für Schlüpf  $S \geq 50\%$  erreicht. Dies ist plausibel, da für die *Coulomb'sche Reibung* der Gleitreibwert  $\mu = 2,3$  angenommen wurde. Bereits aus der Betrachtung der Zeitverläufe lassen sich Tendenzen bestätigen, die auch in den Messungen, siehe Abschnitt 3.3.3, beobachtet worden sind. Bei Schlupfsprüngen mit dem Startniveau  $S_{start} = 10\%$  (Diagramm oben links) nehmen die Zeitkonstanten der Tangentialkraftverläufe  ${}^C f_T(t)$  für steigende Zielniveaus  $S_{ziel}$  ab. Auch bei Abwärtssprüngen von  $S_{start} = 70\%$  (Diagramm unten links) auf ein geringeres Schlupfniveau ist dieselbe Tendenz sichtbar.



**Bild 5.16:** Zeitverläufe der Tangentialkraft  ${}^C f_T(t)$  nach Schlupfsprüngen bei Normalkraft  ${}^C f_N = 40$  N und Nabengeschwindigkeit  ${}^C v_C = 40$  mm/s. Die Diagramme zeigen Schlupfsprünge mit den Start- und Zielniveaus  $S_{\text{start}} = 10\%$  bzw.  $S_{\text{ziel}} = 10\%$  (oben) und  $S_{\text{start}} = 70\%$  bzw.  $S_{\text{ziel}} = 70\%$  (unten)

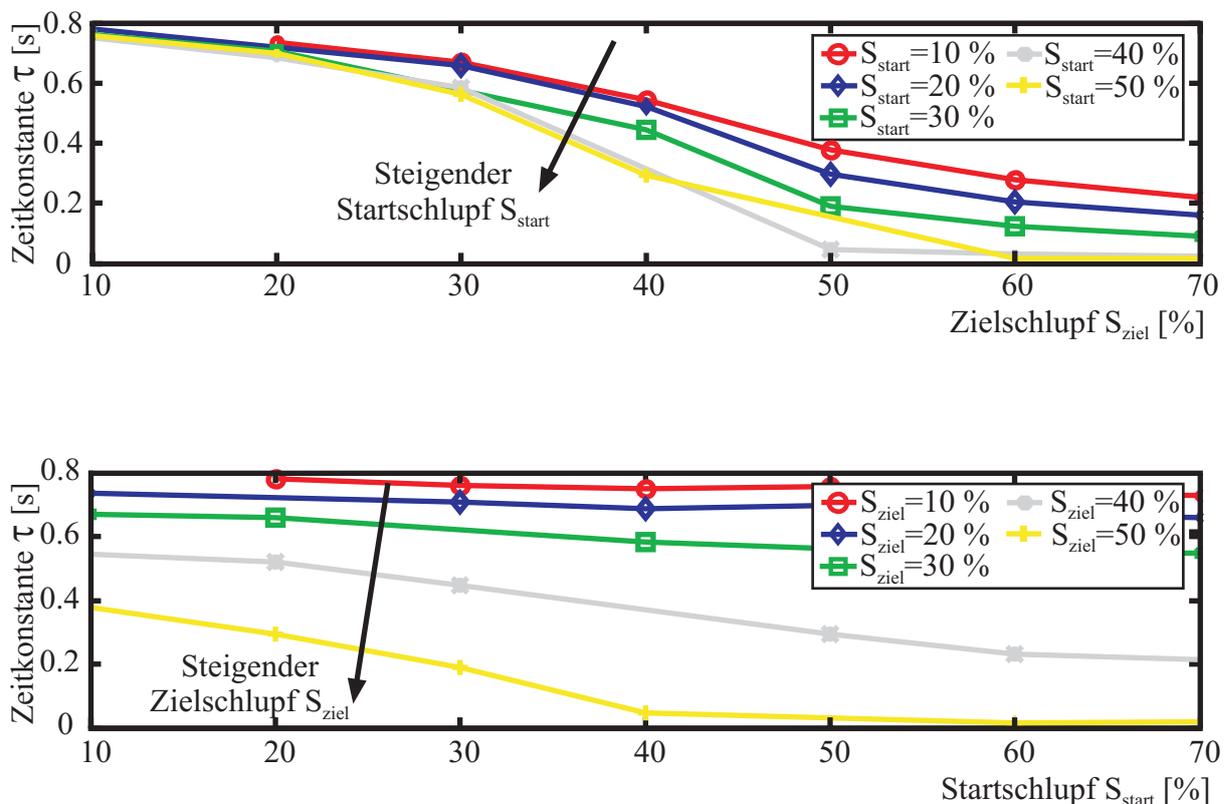
Beim Rücksprung auf das Ausgangsniveau  $S_{\text{ziel}} = 10\%$  (Diagramm oben rechts) sind höhere Zeitkonstanten für geringere Startniveaus  $S_{\text{start}}$  des Schlupfsprunges zu beobachten. Hierbei ist für Startniveaus  $S_{\text{start}} \geq 40\%$  keine Änderung der Zeitkonstanten mehr registrierbar, da durch die *Coulomb'sche Reibung* der Ausgangswert der Tangentialkraft  ${}^C f_T$  für diese Schlupfwerte identisch ist. Auch für Schlupfsprünge zu einem Zielniveau  $S_{\text{ziel}} = 70\%$  (Diagramm unten rechts) ist die Tendenz identisch, nur sind die absoluten Beträge der Zeitkonstanten hier deutlich geringer als für  $S_{\text{ziel}} = 10\%$ .

### 5.3.3 Instationärer Rollkontakt: Vergleich Messung-Rechnung

Analog zu dem Vorgehen bei der Charakterisierung der gemessenen Tangentialkraftverläufe  $F_T(t)$  werden auch für die simulierten Zeitverläufe  ${}^C f_T(t)$  Zeitkonstanten  $\tau$  ermittelt, siehe Abschnitt 3.3.2. Wie im Ergebniskapitel der Messungen, siehe Abschnitt 3.3.3, ergibt sich eine übersichtliche Betrachtung der Ergebnisse durch die Darstellung der Zeitkonstanten  $\tau$  in Abhängigkeit des Start- und Zielniveaus  $S_{\text{start}}$  bzw.  $S_{\text{ziel}}$  des Schlupfsprunges. **Bild 5.17** zeigt

zwei Diagramme, auf denen  $S_{start}$  und  $S_{ziel}$  jeweils einmal als Parameter und als unabhängige Variable auf der Abszisse dargestellt werden. Es wurde derselbe Parameterbereich wie in den Darstellungen der gemessenen Verläufe gewählt, vergleiche **Bild 3.12** bzw. **Bild 3.13**.

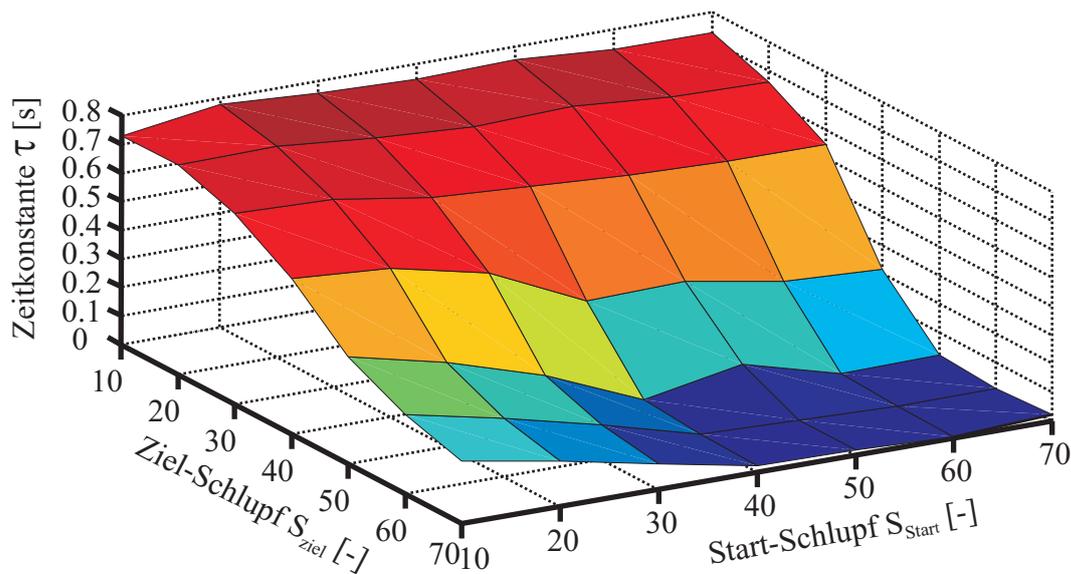
Das obere Diagramm zeigt die Zeitkonstanten  $\tau$  in Abhängigkeit des Zielniveaus  $S_{ziel}$  des Schlupfsprunges. Wie in den Messungen sinkt generell der Betrag der Zeitkonstante  $\tau$  für steigende Werte des Startschlupfes  $S_{start}$ . Der höchste Wert für eine Zeitkonstante wird bei einem Sprung von  $S_{start} = 20\%$  auf  $S_{ziel} = 10\%$  mit  $\tau \approx 0,8\text{ s}$  erreicht. Im Bereich  $10\% \leq S_{ziel} \leq 50\%$  verläuft die Kurvenschar etwa parabelförmig, wobei die einzelnen Graphen für  $S_{ziel} = 10\%$  etwa übereinander liegen und für größer werdende Werte des Zielchlupfes divergieren. Für  $S_{ziel} > 50\%$  knicken die Graphen leicht ab und fallen annähernd linear mit geringerer Steigung ab. Dieser qualitative Verlauf war bei den Darstellungen der gemessenen Werte nicht zu beobachten, die Verläufe fielen über den gesamten betrachteten Bereich ungefähr linear ab. Der Knick in den simulierten Verläufen rührt von der „harten“ Coulomb'schen Reibcharakteristik her, die im Vergleich zu realen Kennlinien in der Gummireibung ihren Maximalwert bereits bei minimalen Beträgen der Relativgeschwindigkeit erreicht.



**Bild 5.17:** Zeitkonstanten  $\tau$  der simulierten Tangentialkraftverläufe  ${}^C f_T(t)$  in Abhängigkeit des Start- und Zielniveaus  $S_{start}$  (oben) bzw.  $S_{start}$  (unten) des Schlupfsprunges

Im unteren Diagramm von **Bild 5.17** ist der Zusammenhang zwischen der Zeitkonstante  $\tau$  des Tangentialkraftverlaufes und dem Startniveau des Schlupfsprunges  $S_{start}$  dargestellt. Die Abhängigkeit der Zeitkonstante  $\tau$  vom Startschlupf  $S_{start}$  ist, wie auch bei den Auswertungen der instationären Messungen beobachtet, wesentlich schwächer ausgeprägt als der Einfluss des Zielniveaus  $S_{ziel}$ . Es handelt sich, ebenfalls wie in den Messungen beobachtet, um eine fallende Charakteristik. Für einen Zielschlupf  $S_{ziel} = 10\%$  beginnt der Verlauf bei  $\tau_{20,10} \approx 0,78\text{ s}$  und fällt nur leicht bis auf  $\tau_{70,10} \approx 0,73\text{ s}$  ab. Für hohe Zielschlüpf  $S_{ziel}$  nimmt der Abfall der Verläufe zu. Die Charakteristik für  $S_{ziel} = 40\%$  fällt von  $\tau_{10,40} \approx 0,55\text{ s}$  auf  $\tau_{70,40} \approx 0,22\text{ s}$  ab. Der Verlauf  $\tau(S_{start})$  für ein Zielniveau von  $S_{ziel} = 50\%$  zeigt bei  $S_{start} = 40\%$  einen Knick. Wie schon im oberen Diagramm, wo ebenfalls ein Knick an der Stelle  $S_{ziel} = 50\%$  auftritt, ist auch dieser Knick auf die unrealistisch steifen Verlauf der *Coulomb'schen* Reibkennlinie zurückzuführen.

Im Vergleich mit den Ergebnissen aus instationären Messungen in **Bild 3.12** bzw. **Bild 3.13** bildet das instationäre Rollkontaktmodell die reale Dynamik der Rollreibung in der Tendenz richtig ab. Die in der Simulation abgebildete Rollkinematik spielt somit für das beobachtete Verzögerungsverhalten eine große Rolle. Einige gummitypische Charakteristiken, wie z. B. die Temperaturabhängigkeit der Elastizität oder der lokalen Reibung, oder aber das komplexe Materialverhalten, wurden nicht berücksichtigt, vergleiche auch GÄBEL [22]. Allerdings unterscheiden sich simulierte und gemessene Verläufe in der absoluten Höhe der Zeitkonstanten  $\tau$  ungefähr um den Faktor 2. Die Simulation zeigt somit ein steiferes Verhalten als der reale Rollkontakt. In der Simulation wird davon ausgegangen, dass das Messmobil sich mit konstanter Geschwindigkeit fort bewegt. In der Realität wird die Fahrgeschwindigkeit über die Antriebe des Messmobils geregelt.



**Bild 5.18:** Zeitkonstante  $\tau$  in Abhängigkeit des Start- und des Zielniveaus  $S_{start}$  bzw.  $S_{ziel}$  des Schlupfsprunges  $S(t)$

Durch einen Schlupfsprung des Messrades wird die Fahrgeschwindigkeit des Messmobils gestört, was wiederum eine Rückwirkung auf den Rollkontakt des Messrades hat. Die zeitliche Dauer der Kompensation dieses Prozesses durch den Fahrgeschwindigkeitsregler ist etwa im Bereich der beobachteten Zeitkonstanten angesiedelt. Somit führt die Längsdynamik des Messmobils in der Realität zu einer Verzögerung des Messradverhaltens, das in der Simulation nicht abgebildet ist.

Eine gewisse Unsicherheit des Modells stellt die 2D-Modellierung der Groschradstruktur dar. Der reale dreidimensionale Spannungszustand insbesondere zwischen Kontakt und Nabe wird in dem zweidimensionalen 4-Knoten-Element durch einen *plane stress*-Ansatz angenähert. Diese Näherung ist zwar die bestmögliche, ergibt allerdings gegenüber einer 3D-Modellierung ein steiferes Systemverhalten. Auch die bereits erwähnte steife Kennlinie des lokalen Reibwertes  $\mu(v_{rel})$  trägt einen Teil zur Verringerung der auftretenden Zeitkonstanten bei. Einen Überblick über die Abhängigkeit der Zeitkonstante  $\tau$  des Tangentialkraftverlaufes  ${}^C f_T(t)$  von Start- und Zielniveau des Schlupfsprunges  $S_{start}$  bzw.  $S_{ziel}$  liefert **Bild 5.18**. Deutlich zu sehen ist die fallende Abhängigkeit der Zeitkonstanten  $\tau$  sowohl vom Start- als auch vom Zielniveau des Schlupfsprunges. Im Bereich hoher Schlüpfen sowohl für das Start- als auch das Zielniveau gehen die Zeitkonstanten gegen Null, da durch die *Coulomb'sche* Reibung bei Schlupfsprüngen in diesem Bereich keine Änderung der resultierenden Reibkraft mehr hervorgerufen wird.

## 6 Zusammenfassung

In zahlreichen technischen Anwendungen sind Rollkontakte deformierbarer Körper zu finden. Bei schnellen Änderungen des Schlupfes oder der Normalkraft lassen sich die Kontaktverhältnisse nicht mehr mit stationären Modellen beschreiben. Zu diesem Zweck wird in dieser Arbeit ein instationäres Rollkontaktmodell präsentiert, das das viskoelastische Materialverhalten des kontaktierenden Körpers abbildet. Das Modell wird anhand des Kontaktes zwischen einem etwa handtellergroßen Vollgummirad („Groschrad“) und einer starren Glasfahrbahn realisiert. Die maßgeblichen Algorithmen sind auch auf andere technische Bereiche, wie z. B. Druckwalzen oder Förderbänder, übertragbar.

Zunächst wurde das Kontaktverhalten des Groschrades experimentell untersucht. Dazu wurde ein Messmobil aufgebaut, das Messungen sowohl in einer kontrollierten Umgebung wie auch auf dem Asphalt öffentlicher Straßen durchführen kann. Das Messmobil misst sämtliche im Kontakt auftretenden Kräfte und Momente, die Temperaturen des Rades und der Fahrbahn im Ein- und Auslauf sowie die Textur des aktuell in den Kontaktbereich eintretenden Fahrbahnsegmentes. Die zeitlichen Verläufe des Schlupfes und der Normalkraft lassen sich beliebig vorgeben und werden durch eine Drehzahl- bzw. Kraftregelung mit leistungsstarken Elektromotoren umgesetzt. Ein an Bord befindlicher Prozessrechner führt die Regelungsprozesse aus und zeichnet Messdaten auf.

In dieser Arbeit werden zunächst mit dem Messmobil durchgeführte stationäre Messungen gezeigt. Dabei werden Räder aus verschiedenen gefüllten und ungefüllten Elastomeren verwendet. Das Material Naturkautschuk zeigt die für instationäre Messungen am besten geeigneten Eigenschaften. Das Kennfeld des Naturkautschuk weist über einen weiten Bereich eine geringe Steigung auf und besitzt kein klares Maximum. Aus diesem Grund können mit diesem Material Schlupfsprünge auch noch auf einem höheren Schlupfniveau durchgeführt werden. Die Wahl des Groschradmaterials für die instationären Messungen fällt somit auf Naturkautschuk (NR).

Die ersten Messungen mit Schlupfsprüngen bei konstanter Normalkraft zeigen, dass den Zeitverläufen der Reibkraft eine systematische Messabweichung überlagert ist. Aus diesem Grund werden mehrere Messungen unter den konstanten Parametern Schlupf und Normalkraft durchgeführt. Da die Messungen nicht auf derselben Position auf der Glasfahrbahn gestartet werden können, werden sie mit Hilfe des Verfahrens der Kreuzkorrelation derart verschoben, dass sie denselben Messabschnitt der Fahrbahn beschreiben. Schließlich wird durch

Mittelung die systematische Messabweichung isoliert. Bevor die Zeitverläufe der Reibkraft ausgewertet werden, wird diese systematische Messabweichung entsprechend des aktuellen Schlupfes skaliert und vom gemessenen Signal subtrahiert. Das Ergebnis ist ein bereinigter Verlauf der Reibkraft, der das dynamische Reibverhalten der Kontaktpaarung deutlich widerspiegelt.

Zur Charakterisierung des dynamischen Verhaltens nach Schlupfsprüngen wird ein exponentielles Sättigungsverhalten an die Messungen angepasst. Die Zeitkonstante des Sättigungsverhaltens stellt dann ein Maß für die Trägheit des Rollkontaktes dar. Schließlich wird die Abhängigkeit dieser Zeitkonstanten von Start- und Zielniveau des Schlupfsprunges bei konstanter Normalkraft gezeigt. Für größer werdende Startwerte des Schlupfsprunges nehmen die Zeitkonstanten ab. Steigt das Zielniveau des Schlupfsprunges, sinken die Werte der Zeitkonstanten ebenfalls ab. Die Abhängigkeit der Zeitkonstanten vom Zielniveau des Schlupfsprunges stellt sich dabei als der stärkere Einflussfaktor auf die Reibdynamik dar. Die höchsten Werte für die Zeitkonstanten treten somit für geringe Werte für des Start- und Zielniveaus des Schlupfsprunges auf, sie liegen bei  $\tau \approx 1,5$  s. Die minimal identifizierten Zeitkonstanten werden mit  $\tau \approx 0,1$  s beziffert.

Die in den stationären und instationären Messungen beobachteten Phänomene sollen durch das in dieser Arbeit präsentierte zweidimensionale Rollkontaktmodell abgebildet werden. Die Abbildung der Struktur des Rades basiert auf einer Finite-Elemente-Beschreibung. Die hohe Anzahl von Verschiebungsfreiheitsgraden wird durch eine Craig-Bampton-Transformation deutlich reduziert. Hauptfreiheitsgrade dieser Transformation stellen die Verschiebungen der Knoten des Radmantels dar, alle übrigen Verschiebungen werden mit einem modalen Ansatz zusammengefasst. Eine weitere Maßnahme zur Reduktion des numerischen Aufwands besteht darin, dass lediglich die kontaktnahen Knoten in die Kontaktabfrage mit einbezogen werden. Kommt ein Knoten in Kontakt mit der Fahrbahn, wird mit Hilfe der Penalty-Methode eine Normallast aufgeprägt, die die Durchdringung des Knotens durch die Fahrbahn minimiert. In tangentialer Kontaktrichtung unterscheidet das Modell zwischen Haft- und Gleitreibung. Im Falle des Haftens wird analog zum Normalkontakt mit Hilfe der Penalty-Methode eine zeitabhängige Verschiebung des Knotens realisiert, die durch die globalen Größen Nabengeschwindigkeit und Drehzahl des Rades bestimmt ist. Gleitet ein Knoten, so wird abhängig von der Relativgeschwindigkeit und der Normallast des Knotens eine eingeprägte Reibkraft berechnet.

Anhand globaler Simulationsergebnisse wie Kontaktlänge oder Tangentialkraftverlauf bietet sich die Möglichkeit, das präsentierte Rollkontaktmodell mit den Messungen des Messmobils zu validieren. Der Abgleich von gemessenen und simulierten Werten der Kontaktlänge liefert eine akzeptable Übereinstimmung. Der Vergleich der stationären Reibkennlinien gelingt gut, wobei die geringen Abweichungen mit einem realistischeren lokalen Reibmodell weiter minimiert werden könnten. Die Validierung des dynamischen Systemverhaltens erfolgt über die bereits in den Messungen identifizierten Zeitkonstanten, mit denen das Zeitverhalten der Tangentialkraft nach einem Schlupfsprung charakterisiert wird. Die in den Messungen beobachteten Abhängigkeiten dieser Zeitkonstanten von Start- und Zielniveau des Schlupfsprunges

ges treten auch in den Ergebnissen des Rollkontaktmodells auf. Allerdings unterscheiden sich die Werte aus Messung und Simulation im absoluten Betrag der Zeitkonstanten ungefähr um den Faktor 2. Die von der Simulation gelieferten Verläufe der Knotenlasten und Verschiebungen der kontaktierenden Knoten bieten einen Einblick in die lokalen Verhältnisse des Kontaktbereiches. Die gezeigten Ergebnisse entsprechen qualitativ den aus Literatur bekannten reifenspezifischen Verläufen.

In dieser Arbeit ist es gelungen, Phänomene des dynamischen Rollkontaktes innerhalb einer Laboratmosphäre anhand von *Grosch*rädern experimentell nachzuweisen. Teilweise mit erheblicher Verzögerung folgt die Tangentialkraft der sprunghaften Änderung des Schlupfniveaus. Es wurde ein Rollkontaktmodell präsentiert, das die beobachteten Phänomene qualitativ abbildet. Dies zeigt, dass die Dynamik des Rollkontaktes weitgehend von der zeitlichen Veränderung des Deformationsbildes im Kontaktbereich abhängt. Andere gummspezifische Einflüsse, wie z. B. die tribologische Dynamik des lokalen Reibwertes oder nichtlineares Materialverhalten sind für die beobachteten Verzögerungseffekte von nachrangiger Bedeutung. Weiterhin bietet das instationäre Rollkontaktmodell lokale Einblicke in den Kontaktbereich zwischen Rad und Fahrbahn. So lassen sich die zeitlichen Verläufe der Verschiebungs-, Pressungs- oder Schubverteilung innerhalb der Kontaktzone nach einem Schlupfsprung numerisch effizient berechnen.

Die Übereinstimmung der simulierten Ergebnisse mit den gemessenen Werten könnte durch eine Erweiterung auf ein 3D-Modell erhöht werden. Der komplexe Spannungszustand des realen Rades zwischen Kontakt und Nabe wird dann wesentlich besser angenähert als bei einer 2D-Modellierung. Allerdings entsteht dadurch eine Vervielfachung der Anzahl der Hauptfreiheitsgrade und damit des numerischen Aufwands. Diesem Nachteil ließe sich wiederum durch eine Erhöhung des tangentialen Knotenabstandes entgegenwirken. Untersuchungen in dieser Arbeit haben gezeigt, dass der Abstand der Knoten deutlich herabgesetzt werden kann, ohne die globale Systemdynamik des Modells zu beeinflussen. Als lokales Reibmodell wurde in dieser Arbeit das *Coulomb'sche Reibmodell* angenommen, was eine erste Näherung darstellt. Eine weitere Optimierungsmöglichkeit des Rollkontaktmodells liegt somit in der Implementierung eines gummspezifischen Reibgesetzes. Die Reibung kann neben der Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit auch noch eine Abhängigkeit von lokaler Pressung und Temperatur zeigen. Außerdem kann auch dem lokalen Reibgesetz eine Dynamik zugeordnet werden, die sich auf das globale Systemverhalten auswirkt.

## Literaturverzeichnis

- [1] ACHENBACH, M. ; FRANK, E.: Reibung von Elastomeren. In: *Tribologie und Schmierungstechnik* 48 (2001), Nr. 4, S. 43–47
- [2] AMINO, N. ; UCHIYAMA, Y.: Relationships Between Friction and Viscoelastic Properties of Rubber. In: *Tire Science and Technology* 28 (2000), Nr. 3, S. 178–195
- [3] AMMON, D. ; GNADLER, R. ; MÄCKLE, G. ; UNRAU, H. J.: Ermittlung der Reibwerte von Gummistollen zur genauen Parametrierung von Reifenmodellen. In: *Automobiltechnische Zeitschrift* 106 (2004), Nr. 7–8, S. 694–701
- [4] *Ansys 6.1 Documentation*. Ansys Inc., 2002
- [5] BACHMANN, T.: Wechselwirkungen im Reibprozess zwischen Reifen und Fahrbahn. In: *VDI Berichte* (1999), Nr. 1494, S. 23–49
- [6] BARQUINS, M.: Friction and wear of rubber-like materials. In: *Wear* 160 (1993), S. 1–11
- [7] BARQUINS, M. ; COURTEL, R.: Adherence, friction and wear of rubber-like materials. In: *Wear* 158 (1992), S. 87–117
- [8] BATHE, K. J.: *Finite-Elemente-Methoden*. 2. Berlin : Springer-Verlag, 2002
- [9] BECKENBAUER, T. ; HUSCHEK, S.: Entstehungsmechanismen des Reifen/Fahrbahn-Geräusches. In: *VDI Berichte* (1999), Nr. 1494, S. 77–88
- [10] BECKER, A. ; FOLCHERT, U. ; KLUGE, S. ; SCHRÖDER, C. ; VOLK, H.: Integration von Fahrzeugkomponenten am Beispiel des Verkürzten Anhalteweges. *VDI Berichte* (2001), Nr. 1632, S. 373–400
- [11] BLUME, H. ; HEIMANN, B. ; LINDNER, M.: Design of an Outdoor Mobile Platform for Friction Measurement on Street Surfaces. In: *Proceedings of the International Colloquium on Autonomous and Mobile Systems*. Magdeburg, 2002, S. 65–68
- [12] BLUME, H. ; HEIMANN, B. ; LINDNER, M. ; VOLK, H.: Friction Measurements on Road Surfaces. In: *Kautschuk Gummi Kunststoffe* 56 (2003), Nr. 12, S. 677–681
- [13] BODE, G.: Kräfte und Bewegungen unter rollenden Lastwagenreifen. In: *Automobiltechnische Zeitschrift* 64 (1962), Nr. 10, S. 300–306
- [14] BOUZID, N. ; HEIMANN, B. ; TRABELSI, A.: Empirische Modellierung des Reibwertes für das Groschrad-Fahrbahn-System. In: *VDI Berichte* (2005), Nr. 1912, S. 291–307

- [15] CARTER, F. W.: On the Action of a Locomotive Driving Wheel. In: *Proceedings of the Royal Society of London* 112 (1926), Nr. 760, S. 151–157
- [16] CRAIG, R. R. ; BAMPON, M. C. C.: Coupling of substructures for dynamic analysis. In: *AIAA Journal* 6 (1968), Nr. 7, S. 1313–1319
- [17] DANKOWICZ, H.: On the Modelling of Dynamic Friction Phenomena. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 79 (1999), Nr. 6, S. 399–409
- [18] EBERHARDSTEINER, J. ; FIDI, W. ; LIEDERER, W.: Experimentelle Bestimmung der adhäsiven Reibeigenschaften von Gummiprobe auf ebenen Oberflächen. In: *Kautschuk Gummi Kunststoffe* 51 (1998), Nr. 11, S. 773–781
- [19] FROMM, H.: Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben. In: *Zeitung für angewandte Mathematik und Mechanik* 7 (1927), Nr. 1, S. 27–58
- [20] GASCH, R. ; KNOTHE, K.: *Strukturodynamik. Band 2: Kontinua und ihre Diskretisierung*. 1. Berlin : Springer-Verlag, 1989
- [21] GAUSS, F.: Über Brems- und Führungskräfte zwischen Reifen und Straße. In: *Automobiltechnische Zeitschrift* 63 (1961), Nr. 2, S. 41–44
- [22] GÄBEL, G. ; KRÖGER, M.: Reasons, Models and Experiments for Unsteady Friction of Vehicle Tires. In: *VDI Berichte* 2014 (2007), S. 245–259
- [23] GERRESHEIM, M.: Meßverfahren zur Ermittlung der Druck-, Schub- und Schlupfverteilung in der Aufstandsfläche rollender Reifen. In: *GAK - Fachzeitschrift für die Polymerindustrie* 26 (1973), Nr. 7, S. 550–553
- [24] GERRESHEIM, M. ; HUSSMANN, A. W.: Kräfte und Bewegungen in der Aufstandsfläche geradeausrollender Reifen. In: *Automobiltechnische Zeitschrift* 77 (1975), Nr. 6, S. 165–169
- [25] GROSCHE, K. A.: The relationship between the friction and visco-elastic properties of rubber. In: *Proceedings of the royal society* Bd. 274, 1963, S. 21–39
- [26] GROSCHE, K. A.: Visko-elastische Eigenschaften von Gummimischungen und deren Einfluß auf das Verhalten von Reifen. In: *Kautschuk Gummi Kunststoffe* 42 (1989), Nr. 9, S. 745–751
- [27] GROSCHE, K. A.: Laborbestimmung der Abrieb- und Rutschfestigkeit von Laufflächenmischungen - Teil I: Rutschfestigkeit. In: *Kautschuk Gummi Kunststoffe* 49 (1996), Nr. 6, S. 432–441
- [28] GROSCHE, K. A.: The rolling resistance, wear and traction properties of tread compounds. In: *Rubber Chemistry and Technology* 69 (1996), Nr. 3, S. 495–567
- [29] GUTZEIT, F. ; KRÖGER, M. ; LINDNER, M. ; POPP, K.: Experimental Investigations on the Dynamical Friction Behaviour of Rubber. In: *Proceedings of 6th Rubber Fall Colloquium*. Hannover, 2004, S. 523–532

- [30] GUTZEIT, F. ; SEXTRO, W. ; KRÖGER, M.: Unsteady Rolling Contact of Rubber Wheels. In: *Analysis and Simulation of Contact Problems* Bd. 27. Berlin / Heidelberg : Springer-Verlag, 2006, S. 261–270
- [31] GUTZEIT, F. ; WANGENHEIM, M. ; KRÖGER, M.: An Experimentally Validated Model for Unsteady Rolling. In: *III European Conference on Computational Mechanics*. Netherlands : Springer, 2006, S. 320 pp
- [32] HERTZ, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1881), S. 156–171
- [33] HOHL, C.: *Anwendung der Finite-Elemente-Methode zur Parameteridentifikation und Bauteilsimulation bei Elastomeren mit Mullins-Effekt*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 2007
- [34] HUFFEL, S. v. ; LEMMERLING, P.: *Total Least Squares and Errors-in-variables Modeling. Analysis, Algorithms and Applications*. Berlin : Springer-Verlag, 2001
- [35] HUININK, H. ; SCHRÖDER, C.: *Dynamische Interaktion Bremse - Reifen - Strasse*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1999
- [36] IHLEMANN, J.: *Kontinuumsmechanische Nachbildung hochbelasteter technischer Gummierwerkstoffe*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 2003
- [37] IHLEMANN, J.: Richtungsabhängigkeiten beim Mullins-Effekt. In: *Kautschuk Gummi Kunststoffe* 58 (2005), Nr. 9, S. 438–447
- [38] KENDZIORRA, N. ; HARTING, H. J.: Ermittlung des Reibbeiwertes Reifen/Fahrbahn im Fahrbetrieb als Schlüsselkomponente in Fahrerassistenzsystemen. In: *Fortschritt-Berichte VDI* 12 (2005), Nr. 597, S. 41–57
- [39] KENDZIORRA, N. ; HÄRTEL, V.: Einsichten in die Dynamik des Reifen/Fahrbahn-Kontaktes und deren Bedeutung für geregelte Bremsvorgänge. In: *VDI Berichte* (2003), Nr. 1791, S. 71–94
- [40] KERN, W. F.: Verformungs und Spannungsmessungen an Gürtelreifen, Teil 2. In: *Kautschuk Gummi Kunststoffe* 24, Nr. 12
- [41] KERN, W. F.: Verformungs und Spannungsmessungen an Gürtelreifen, Teil 1. In: *Kautschuk Gummi Kunststoffe* 24 (1971), Nr. 11, S. 599–608
- [42] KERN, W. F. ; HAFNER, K. ; NIPPOLD, H.: Über die Auswertung von Verformungsmessungen an Reifen. In: *Kautschuk Gummi Kunststoffe* 16 (1963), Nr. 11, S. 619–627
- [43] KLAUE, H.: Bremswerkuntersuchungen am Kraftfahrzeug. In: *Deutsche Kraftfahrtforschung* 13 (1938)
- [44] KLÜPPEL, M. ; ALSHUTH, T. ; SCHUSTER, R. H.: Theorie der Gummireibung und Traktionseigenschaften von Reifen. In: *Fortschritt-Berichte VDI* 12 (1998), S. 1–13
- [45] KLÜPPEL, M.: Hyperelasticity and Stress Softening of Filler Reinforced Polymer Networks. In: *Macromolecular symposia* 200 (2003), Nr. 16, S. 31–43

- [46] KLÜPPEL, M. ; HEINRICH, G.: Reinforcement of Elastomers: From Molecular Mechanisms to Industrial Applications. In: *Proceedings of the 10th National SAMPE Symposium*. Dresden, 2004
- [47] KLÜPPEL, M. ; HEINRICH, G.: Physics and Engineering of Reinforced Elastomers - From Molecular Mechanisms to Industrial Applications. In: *Kautschuk Gummi Kunststoffe* 58 (2005), Nr. 5, S. 217–224
- [48] KRÖGER, M.: Adhesion of Rubber on Smooth and Rough Surfaces. In: *Proceedings of 6th Rubber Fall Colloquium*. Hannover, 2004, S. 533–542
- [49] KRÖGER, M. ; LINDNER, M. ; POPP, K.: Influences of friction on noise and vibrations of tyres. In: *Proceedings of the 33rd International Congress and Exposition on Noise Control Engineering*. Prague, 2004
- [50] KRÖGER, M. ; POPP, K. ; KENDZIORRA, N.: Experimental and Analytical Investigation of Rubber Adhesion. In: *Machine Dynamics Problems* 28 (2004), Nr. 1, S. 79–89
- [51] KRÖGER, M. ; WANGENHEIM, M. ; MOLDENHAUER, P.: *Temperatureffekte auf das lokale Reibverhalten von Elastomeren im Gleit- und Rollkontakt* (VDI Berichte)
- [52] KROPP, W.: *Ein Modell zur Beschreibung des Rollgeräusches eines unprofilierten Gürtelreifens auf rauher Straßenoberfläche*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1992
- [53] KUMMER, H. W. ; MEYER, W. E.: Verbesserter Kraftschluß zwischen Reifen und Fahrbahn - Ergebnisse einer neuen Reibungstheorie. In: *Automobiltechnische Zeitschrift* 69 (1967), Nr. 8, S. 245–251
- [54] LARSSON, K. ; BARRELET, S. ; KROPP, W.: The modelling of the dynamic behaviour of tyre tread blocks. In: *Applied Acoustics* 63 (2002), Nr. 6, S. 659–677
- [55] LAWSON, C. L. ; HANSON, R. J.: *Solving Least Square Problems*. Philadelphia, USA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995
- [56] LEGAL, A. ; KLÜPPEL, M.: Modelling of rubber friction: A quantitative description of the hysteresis and adhesion contribution. In: *Constitutive Models of Rubber IV* 4 (2005), S. 509–514
- [57] LEGAL, A. ; KLÜPPEL, M.: Investigation and Modelling of Adhesion Friction on rough Surfaces. In: *Kautschuk Gummi Kunststoffe* 59 (2006), Nr. 6, S. 308–315
- [58] LINDNER, M.: *Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Gummireibung an Profilklotzen und Dichtungen*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 2006
- [59] LINDNER, M. ; SEXTRO, W. ; POPP, K.: Hysteretic Friction of a Sliding Rubber Element. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* Bd. 4, 2004, S. 101–102
- [60] LINK, M.: *Finite Elemente in der Statik und Dynamik*. 3. Wiesbaden : B.G. Teubner Verlag, 2002

- [61] LION, A.: A constitutive model for carbon black filled rubber: Experimental investigations and mathematical representation. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 8 (1996), Nr. 3, S. 153–169
- [62] LION, A. ; KARDELKY, C.: *The Payne Effect in Viscoelasticity: Constitutive Modelling Based on Fractional Derivatives and Intrinsic Time Scales*. Universität Kassel : Mitteilungen des Instituts für Mechanik, 2003
- [63] LION, A. ; KARDELKY, C. ; HAUPT, P.: On the Frequency and Amplitude Dependence of the Payne Effect: Theory and Experiments. In: *Rubber Chemistry Technology* 76 (2003), Nr. 2, S. 533–547
- [64] MEIER, J. ; DÄMGEN, M. ; KLÜPPEL, M.: Micromechanics of rubber reinforcement by nano-structured fillers. In: *Proc. of 6th Rubber Fall Colloquium*. Hannover, 2004
- [65] MEYER, T. ; LEGAL, A. ; KLÜPPEL, M.: Modellierung der Hysterese- und Adhäsionsreibung von Elastomeren auf rauen Oberflächen. In: *Proceedings of 7th Rubber Fall Colloquium*. Hannover, 2006
- [66] MEYER, W. E. ; KUMMER, H. W.: Die Kraftübertragung zwischen Reifen und Fahrbahn. In: *Automobiltechnische Zeitschrift* 66 (1964), Nr. 9
- [67] MOLDENHAUER, P. ; KRÖGER, M.: Vibrations of a Tyre Tread Block under Consideration of Local Wear. In: *Proceedings of 6th European Solid Mechanics Conference (ESMC)*. Budapest, 2006, S. 1–2
- [68] MOLDENHAUER, P. ; LINDNER, M. ; KRÖGER, M. ; POPP, K.: Modelling of Hysteresis and Adhesion Friction of Rubber in Time Domain. In: *Constitutive Models of Rubber IV* 4 (2005), S. 515–522
- [69] MOSTAGHEL, N. ; DAVIS, T.: Representations of Coulomb Friction for Dynamic Analysis. In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 26 (1997), Nr. 5, S. 541–548
- [70] MULLINS, L.: Effect of Stretching on the Properties of Rubber. In: *Journal of Rubber Research* 16 (1947), Nr. 12, S. 275–289
- [71] MULLINS, L.: Softening of Rubber by Deformation. In: *Rubber Chemistry and Technology* 42 (1969), Nr. 1, S. 339–362
- [72] MULLINS, L. ; TOBIN, N. R.: Theoretical Model for the Elastic Behavior of Filler Reinforced Rubber. In: *Rubber Chemistry and Technology* 30 (1957), S. 555–571
- [73] NACKENHORST, U.: *Zur Berechnung schnell rollender Reifen mit der Finite Elemente Methode*. Hamburg : Universität der Bundeswehr, 1992. – Dissertation
- [74] NACKENHORST, U.: *Rollkontaktdynamik - Numerische Analyse der Dynamik rollender Körper mit der Finite Elemente Methode*. Hamburg : Universität der Bundeswehr, 2000. – Habilitation

- [75] NICKELL, R. E.: Nonlinear Dynamics by Mode Superposition. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (1976), Nr. 7, S. 107–129
- [76] OTTL, D.: *Schwingungen mechanischer Systeme mit Strukturdämpfung*. Düsseldorf : VDI Verlag, 1981 (Forschungsbericht 603)
- [77] PACEJKA, H. B.: *Modelling of the Pneumatic Tire and its Impact on Vehicle Dynamic Behaviour*. Oberpfaffenhofen : Carl-Cranz-Gesellschaft e.V, 1992. – DR 6.04
- [78] PAYNE, A. R.: The dynamic properties of carbon black-loaded natural rubber vulcanizates. Part I. In: *Journal of Applied Polymer Science* 6 (1962), Nr. 19, S. 57–63
- [79] PAYNE, A. R.: Dynamic properties of heat-treated butyl vulcanizates. In: *Journal of Applied Polymer Science* 7 (1963), Nr. 3, S. 873–885
- [80] PAYNE, A. R.: Strainwork dependence of filler-loaded vulcanizates. In: *Journal of Applied Polymer Science* 8 (1965), Nr. 6, S. 2661–2686
- [81] PERSSON, B. N. J.: On the Theory of rubber friction. In: *Surface Science* 401 (1998), Nr. 3, S. 445–454
- [82] PERSSON, B. N. J.: Sliding friction. In: *Surface Science Reports* 33 (1999), Nr. 3, S. 83–119
- [83] PERSSON, B. N. J.: Theory of rubber friction and contact mechanics. In: *Journal of Chemical Physics* 115 (2001), Nr. 8
- [84] POPP, K.: Non-smooth mechanical systems - an overview. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 64 (1998), Nr. 9
- [85] POPP, K. ; SCHIEHLEN, W.: *Fahrzeugdynamik. Eine Einführung in die Dynamik des Systems Fahrzeug-Fahrweg*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1993
- [86] RUINA, A. L.: Slip Instability and State Variable Friction Laws. In: *Journal of Geophysical Research* 88 (1983), Nr. 12, S. 10.359–10.370
- [87] RUINA, A. L.: Constitutive relations for frictional slip. In: *Mechanics of geomaterials: rocks, concrete, soils*. Wiley, New York : Z. Bazant (ed.), 1985, S. 169–188
- [88] RUINA, A. L.: Unsteady Motions between sliding surfaces. In: *Wear* 113 (1986), S. 83–86
- [89] SAKAI, E. H.: Friction of Rubber on Glass Plate. In: *Journal of the Rubber Industry of Japan* 35 (1962), Nr. 3
- [90] SAKAI, E. H.: Measurements and Visualisation of the Contact Pressure Distribution of Rubber Disks and Tires. In: *Tire Science and Technology* 23 (1995), Nr. 4, S. 238–255
- [91] SASADA, T. ; NAKABAYASHI, H.: Does Hertzian Contact Area Act as an Effective Zone Generating the Friction Resistance? In: *IEICE Transactions on Electronics* E81-C (1998), Nr. 3, S. 326–329

- [92] SCHALLAMACH, A.: The Velocity and Temperature Dependence of Rubber Friction. In: *Proceedings of the Royal Physical Society B 66, volume=B66, year=1953, pages=386-392*,
- [93] SCHALLAMACH, A.: A Theory of Dynamic Rubber Friction. In: *Wear 6 (1963), S. 375-382*
- [94] SEITZ, N.: Das Reibungsverhalten frei rollender Reifen. In: *Automobiltechnische Zeitschrift 72 (1970), Nr. 1, S. 9-13*
- [95] SEXTRO, W.: *Dynamical Contact Problems with Friction. Models, Methods, Experiments and Applications. 2.* Heidelberg : Springer-Verlag, 2007
- [96] SEXTRO, W. ; MOLDENHAUER, P. ; WANGENHEIM, M. ; LINDER, M. ; KRÖGER, M.: Contact Behaviour of a Sliding Rubber Element. In: *Analysis and Simulation of Contact Problems Bd. 27.* Berlin / Heidelberg : Springer-Verlag, 2006, S. 243-252
- [97] SJAHDANULIRWAN, M.: An analytical Model for the prediction of tyre-road friction under braking and cornering. In: *International Journal of Vehicle Design 14 (1993), Nr. 1, S. 78-99*
- [98] SJÖBERG, M.: Dynamic Behaviour of a rubber component in the frequency range - measurements and modelling. In: *Proceedings of the 7th International Conference of Sound and Vibration Bd. 7.* Garmisch-Partenkirchen, 2000, S. 2955-2962
- [99] SJÖBERG, M.: Non-Linear Dynamics of Rubber Components. In: *The 8th International Conference on Sound and Vibration.* Hong Kong, 2001, S. 2183-2190
- [100] SMITH, N. D.: Understanding Parameters Influencing Tire Modeling. In: *Colorado State University, 2004 Formula SAE Platform (2003)*
- [101] STEIN, G.: Reibungsverhalten von Elastomerwerkstoffen und -bauteilen. In: *Technische Problemlösungen mit Elastomeren, Reihe VDI-K (1992), S. 1-23*
- [102] TRABELSI, A.: *Automotive Reibwertprognose zwischen Reifen und Fahrbahn.* Düsseldorf : VDI-Verlag, 2005
- [103] WIES, B. ; DRÄHNE, E. ; ESSER, A.: Produktentwicklung im Zielkonflikt: Einflussparameter zur Optimierung von Bremsverhalten und Fahrstabilität. In: *VDI Berichte 1494 (1999), S. 53-75*
- [104] WIES, B. ; LAUER, P. ; MUNDL, R.: Kraftschluss-Verbesserung durch Synergien aus Winterreifenentwicklung und ABS-Regelsystemen. In: *VDI Berichte 1632 (2001)*
- [105] WRANA, C. ; FISCHER, C. ; HÄRTEL, V.: Dynamische Messungen an gefüllten Elastomeren bei mono- und bimodaler sinusförmiger Anregung. In: *Kautschuk Gummi Kunststoffe 56 (2003), Nr. 9, S. 437-443*
- [106] WRIGGERS, P.: *Computational Contact Mechanics.* Hoboken, NJ, USA : John Wiley and Sons, 2002

- [107] ZIEFLE, M.: *Numerische Konzepte zur Behandlung inelastischer Effekte beim reibungsbehafteten Rollkontakt*. Hannover : Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Leibniz Universität, 2007