

Les surfaces croches de l'univers d'Einstein

par

Rosemonde LAREAU-DUSSAULT

mémoire présenté au Département de mathématiques en vue de
l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, août 2012



Library and Archives
Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-91041-2

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-91041-2

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

Le 29 août 2012

*le jury a accepté le mémoire de Madame Rosemonde Lareau-Dussault
dans sa version finale.*

Membres du jury

Professeure Virginie Charette
Directrice de recherche
Département de mathématiques

Professeur Tomasz Kaczynski
Membre
Département de mathématiques

Professeur Ibrahim Assem
Président rapporteur
Département de mathématiques

Je dédie ce mémoire à mon père, qui m'a non seulement transmis sa passion pour les mathématiques, mais m'a également encouragée, conseillée et soutenue moralement dans mon parcours universitaire.

Sommaire

Dans ce mémoire, on introduit l'univers d'Einstein et on présente plusieurs façons conceptuelles et paramétriques de représenter cet espace. On présente ensuite différents objets de l'univers d'Einstein. L'accent est mis sur la visualisation de ces objets en dimension deux et trois. Finalement, on décrit les surfaces croches. Les surfaces croches servent à borner des domaines fondamentaux, de la même façon que les surfaces équidistantes le font en géométrie euclidienne. Le but de ce mémoire est de présenter certaines propriétés des surfaces croches. En particulier, on montre qu'elles ont deux côtés. Si ce n'était pas le cas, il serait impossible de trouver des surfaces croches disjointes.

Mots clés : Structures lorentziennes, Univers d'Einstein, Géométrie conforme, Action de groupe, Groupe associé à une surface.

Remerciements

Je veux d'abord remercier Virginie Charette, ma superviseure de maîtrise. C'est durant d'innombrables discussions, parsemées de mathématiques, que Virginie m'a guidée dans ce travail. Grâce à ses méthodes intuitives, elle a facilité mon apprentissage de plusieurs notions ardues. De plus, elle a su insister sur des aspects plus techniques lorsque c'était nécessaire, mais surtout, elle a été très patiente, gentille et disponible.

En plus de me superviser dans l'accomplissement de mon projet de maîtrise, Virginie m'a conseillée dans presque tous les aspects de mon cheminement universitaire. Elle a su écouter mes besoins et me transmettre son expérience avec diplomatie.

J'aimerais ensuite remercier Ibrahim Assem et Tomasz Kaczynski pour avoir accepté d'être membres de mon jury. Mon mémoire a été grandement amélioré grâce à leur lecture attentive.

Je remercie Marie-France Roy, qui s'est occupée de toute la « paperasse » durant ma maîtrise.

Je remercie Guillaume Douville et ma soeur, Mélisande, pour d'avoir corrigé les fautes de langue de ce manuscrit.

Je veux remercier Bernard Colin, et les joueurs de bridge du département de mathématiques pour les midis-bridge ; vous avez égayé mes journées.

Finalemant, j'aimerais remercier ma famille et mes amis qui sont très compréhensifs... même lorsque je ne peux pas les voir la fin de semaine parce que je fais des mathématiques.

Rosemonde Lareau-Dussault
Sherbrooke, 2012

Table des matières

Sommaire	ii
Remerciements	iii
Table des matières	v
Introduction	1
Chapitre 1 — Revue de la littérature et mise en contexte	3
1.1 Motivation physique	3
1.2 Action de groupe en géométrie lorentzienne	4
1.2.1 Espace de Minkowski	6
1.2.2 Univers d'Einstein	6
1.3 Notations	7
Chapitre 2 — Univers d'Einstein	8
2.1 Géométrie lorentzienne	8

2.1.1	Espace vectoriel	9
2.1.2	Variété	10
2.1.3	Espace lorentzien conformément plat	12
2.2	L'univers d'Einstein	15
2.2.1	$\text{Ein}^{n-1,1} \cong (\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1) / \pm$	16
2.2.2	Compactification de l'espace de Minkowski	16
2.2.3	Bord conforme de $\text{AdS}^{n,1}$	23
2.3	Visualisation de $\text{Ein}^{n-1,1}$	23
2.3.1	Base diagonale	23
2.3.2	Base du plongement	29
2.4	Propriétés de $\text{Ein}^{n-1,1}$	31
2.4.1	Propriétés topologiques	32
2.4.2	Espace modèle	33
Chapitre 3 — Les objets de l'univers d'Einstein		36
3.1	Photons	36
3.1.1	Exemples	37
3.1.2	Propriétés	39
3.2	Cône de lumière	42
3.2.1	Exemples	43
3.3	Carte de Minkowski	44

3.4	Hypersphère	47
3.4.1	Exemples	47
Chapitre 4 — Surfaces croches		52
4.1	Motivations	52
4.2	Plan croche	53
4.2.1	Les ailes d'un plan croche	54
4.2.2	La tige d'un plan croche	57
4.2.3	Plan croche	57
4.3	Surface croche	57
4.3.1	Description détaillée d'une surface croche	58
4.3.2	Exemple	61
4.4	Propriétés	62
4.5	Applications	69
Conclusion		70
Bibliographie		72

Introduction

L'univers d'Einstein $\text{Ein}^{n-1,1}$ de dimension n est le projectifié du cône de lumière de $\mathbf{R}^{n,2}$. C'est une variété lorentzienne conformément plate. On s'intéresse particulièrement à cet espace, parce que son revêtement universel est un modèle pour l'ensemble des variétés lorentziennes conformément plates. C'est-à-dire que les variétés lorentziennes sont toutes localement conformément équivalentes à $\text{Ein}^{n-1,1}$.

Une façon d'obtenir des variétés lorentziennes passe par les groupes kleinien. Un groupe $G \subset PO(n, 2)$ est dit kleinien s'il est un sous-groupe discret agissant de façon proprement discontinu sur un ouvert non-vide de $\text{Ein}^{n-1,1}$ [Fra02]. Dans ce cas, $\text{Ein}^{n-1,1}/G$ est une variété lorentzienne.

Une façon de montrer qu'un groupe est kleinien est d'en exhiber un domaine fondamental. Pour borner des domaines fondamentaux, on utilise des surfaces croches [BCD⁺08]. Les surfaces croches sont la compactification des plans croches de l'espace de Minkowski. Ces derniers bornent des domaines fondamentaux dans l'espace de Minkowski.

Le but de ce mémoire est de définir les surfaces croches, d'en présenter certaines propriétés et de discuter brièvement de la façon dont ces surfaces servent à identifier des groupes kleinien. Pour ce faire, dans le premier chapitre, on survole le travail ayant déjà été effectué dans ce sens, et on discute des motivations pour étudier l'univers d'Einstein et les surfaces croches.

Au deuxième chapitre, on introduit l'univers d'Einstein. On présente plusieurs façons conceptuelles et paramétriques de représenter cet espace. En particulier, on montre que $\text{Ein}^{n-1,1} \cong (\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1)/\pm$, que $\text{Ein}^{n-1,1} \cong \overline{\text{Min}^{n-1,1}}$ et que le revêtement double de $\text{Ein}^{n-1,1}$ est isomorphe au bord conforme de l'espace anti de-Sitter. De plus, on discute quelques propriétés élémentaires de $\text{Ein}^{n-1,1}$.

Au troisième chapitre, on définit des objets importants de $\text{Ein}^{n-1,1}$. On en présente certaines propriétés, surtout en dimensions deux et trois.

Finalement, au quatrième chapitre, on discute des surfaces croches de $\text{Ein}^{2,1}$. On présente ces surfaces comme étant la compactification des plans croches de l'espace de Minkowski. De plus, on offre une description détaillée des surfaces croches dans le langage de l'univers d'Einstein, en tentant de faire abstraction de l'espace de Minkowski plongé dans $\text{Ein}^{2,1}$. Finalement, on prouve des propriétés élémentaires des surfaces croches.

Toutes les figures de ce mémoire sont de l'auteure et ont été générées avec le logiciel MATHEMATICA. De plus, les preuves de ce mémoire sont originales, sauf la preuve du théorème 4.4.2 qui suit celle de [BCD⁺08].

Chapitre 1

Revue de la littérature et mise en contexte

1.1 Motivation physique

En physique newtonienne, les notions d'espace et de temps étaient indépendantes. Dans la théorie de la relativité générale, ces deux notions sont indissociables. Pour décrire cette réalité, on parle d'espace-temps. L'espace-temps possède $n - m$ dimensions spatiales et m , généralement $m = 1$, dimensions temporelles. On s'intéresse particulièrement au cas $n = 4$ et $m = 1$, car il modélise le monde dans lequel nous vivons. Plusieurs auteurs parlent d'espace-temps uniquement dans ce cas. Dans le cadre de ce mémoire, on se concentre sur les cas $m = 1$ avec $n = 3$ et $n = 2$. Ce sont des modèles-jouets de notre espace-temps.

L'étude du cas $m = 1$ passe par la géométrie lorentzienne. L'univers d'Einstein est une variété lorentzienne importante, car elle contient toutes les variétés lorentziennes conformément plates, comme nous le verrons aux propositions 2.4.1 à 2.4.3.

Une autre raison de s'intéresser à l'univers d'Einstein est qu'il est une variété compacte sans bord. En géométrie et en topologie, la classification des variétés compactes sans bord est une question importante.

Un type de variété lorentzienne important regroupe les variétés satisfaisants aux équations d'Einstein. Les équations d'Einstein décrivent comment la matière et l'énergie modifient un espace-temps. Selon les différents paramètres, il existe une infinité de solutions à ces équations. L'univers d'Einstein est l'une de ces solutions. Dans ce contexte, Albert Einstein a étudié $\mathbf{S}^n \times \mathbf{R}$, qui est le revêtement universel de l'univers d'Einstein tel qu'on le définit dans ce mémoire. C'est une raison possible à l'appellation « univers d'Einstein ».

1.2 Action de groupe en géométrie lorentzienne

Depuis le programme d'Erlangen de Félix Klein, une partie importante de l'étude d'une variété passe par la notion d'action de groupe.

On dit qu'un groupe G agit sur un ensemble V si un élément du groupe permute les éléments de l'ensemble :

$$\begin{aligned} G \times V &\rightarrow V \\ (g, \mathbf{x}) &\mapsto g(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

de façon compatible avec la structure du groupe, c'est-à-dire telle que l'identité de G est associée à la permutation triviale et que pour tout $g_1, g_2 \in G$ et tout $\mathbf{x} \in V$,

$$(g_1 g_2)(\mathbf{x}) = g_1(g_2(\mathbf{x})).$$

Soit G un groupe agissant sur une variété V . L'orbite d'un élément $p \in V$ par G consiste en l'ensemble des points $q \in V$, pour lesquels il existe un $g \in G$ tel que q est l'image de

p par g :

$$G(p) = \{g(p) \mid g \in G\}.$$

On définit une relation d'équivalence où deux éléments $p, q \in V$ sont équivalents, $p \sim q$ si et seulement si $p \in G(q)$.

On dit qu'un groupe discret G agissant de façon continue agit de façon *proprement discontinue* sur une variété V si pour tous points $p_1, p_2 \in V$, il existe des ouverts U_1, U_2 tels que l'ensemble

$$\{g \in G \mid g(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset\}$$

est fini. Pour un groupe G , agissant de façon proprement discontinue sur une variété V , le quotient V/G est séparé. L'action d'un groupe est *libre* si tous les éléments autres que l'identité n'ont pas de point fixe. Pour un groupe G , agissant de façon libre sur une variété V , le quotient V/G est une variété. Ainsi, si G agit de façon libre et proprement discontinue sur V le quotient V/G est une variété séparée.

Un domaine fondamental pour l'action du groupe G sur V est défini comme étant un polygone F tel que chaque orbite intersecte F au moins une fois et que les translatés de F ne s'intersectent que sur le bord (voir la définition 4.1.1). Trouver un domaine fondamental permet de prouver qu'un groupe agit de façon libre et proprement discontinue et donc de montrer que le quotient crée une variété séparée.

Dans le cadre de la géométrie euclidienne, il est courant de borner des domaines fondamentaux à l'aide de surfaces équidistantes. Compte tenu du fait qu'il n'y a pas de notion de distance en géométrie lorentzienne, on ne peut pas utiliser la même stratégie. Todd Drumm a introduit dans sa thèse de doctorat [Dru90] les plans croches. Ces derniers joueront le rôle des surfaces équidistantes et borneront des domaines fondamentaux de groupes dans l'espace de Minkowski.

1.2.1 Espace de Minkowski

Dans le cas de l'espace de Minkowski $\text{Min}^{2,1}$ de dimension trois plusieurs études ont été effectuées pour identifier les groupes agissant de façon libre et proprement discontinue. Soit un groupe $G \subset O(2, 1)$ agissant librement et proprement discontinue, alors $\text{Min}^{2,1}/G$ est une variété munie d'une structure lorentzienne. Lorsque G est libre, ces variétés se nomment *espace-temps de Margulis*. Gregory A. Margulis a trouvé un critère, à l'aide d'un invariant sur les éléments de $O(2, 1)$, pour déterminer si un groupe agit de façon libre et proprement discontinue. Ensuite, Todd A. Drumm a proposé d'autres critères de nature plus géométrique [Dru90]. Il a défini des domaines fondamentaux pour de tels groupes en introduisant les plans croches.

1.2.2 Univers d'Einstein

Pour ce qui est de l'univers d'Einstein, Charles Frances a étudié plusieurs actions de groupes de Schottky de $\text{Ein}^{n-1,1}$ dans sa thèse de doctorat [Fra02]. L'intérêt que l'on porte au groupe de Schottky a une raison historique. En effet, bien que l'on connaissait des groupes agissant de façon proprement discontinue sur l'espace de Minkowski, l'existence de tels groupes agissant aussi librement a longtemps mystifié les mathématiciens. Les groupes de Schottky sont donc les premiers groupes agissant de façon libre et proprement discontinue à avoir été étudiés sur l'espace de Minkowski.

Frances a ensuite considéré la compactification des plans croches dans le but de borner des domaines fondamentaux dans l'univers d'Einstein [Fra03]. Par la suite Barbot, Charette, Drumm, Goldman et Melnick [BCD⁺08] ont défini une surface croche comme étant la compactification d'un plan croche. Ils ont amorcé l'étude topologique de ces surfaces.

1.3 Notations

Dans le cadre de ce mémoire, on utilisera les notations et conventions suivantes :

1. \mathbf{R}_* désigne l'ensemble des réels non nuls.
2. \mathbf{R}_*^+ désigne l'ensemble des réels strictement positifs.
3. $|x|$ désigne la valeur absolue de x .
4. $\text{Gl}(n, \mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de dimension n inversibles.
5. $\widehat{\mathbf{R}}$ désigne l'ensemble des réels union l'infini $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$.
6. M^t désigne la transposée de M .
7. $\mathbf{1}_n$ désigne la matrice identité $n \times n$.
8. $\mathbf{0}_{l,k}$ désigne la matrice $l \times k$ de zéros.
9. On dit qu'une matrice est de type $(n-l, l)$ si elle a $n-l$ valeurs propres positives et l valeurs propres négatives.
10. $O(n-l, l)$ désigne le groupe pseudo-orthogonal de type $(n-l, l)$;
$$O(n-l, l) = \left\{ N \in \text{Gl}(n, \mathbf{R}) \mid N^t M N = M, \text{ où } M \text{ est de type } (n-l, l) \right\}.$$
11. $C^\infty(A, B)$ est l'ensemble des fonctions infiniment différentiables de A vers B ;
$$C^\infty(A, B) = \left\{ f : A \rightarrow B \mid f \text{ est } n \text{ fois différentiable, pour tout } n \geq 0 \right\}.$$
12. $V \setminus W$ désigne l'ensemble des éléments de V n'appartenant pas à W .
13. $\text{Int}V$ désigne l'intérieur de V .

Chapitre 2

Univers d'Einstein

Dans ce chapitre, on définit l'univers d'Einstein $\text{Ein}^{n-1,1}$ de dimension n et on introduit différents modèles pour cet espace. De plus, on présente différentes façons de visualiser l'univers d'Einstein en dimension deux et trois. On discute finalement de quelques propriétés de cet espace.

2.1 Géométrie lorentzienne

L'univers d'Einstein est une variété lorentzienne, c'est-à-dire une variété telle que son espace tangent à chaque point est un espace vectoriel lorentzien. Dans cette section, on définit d'abord la notion d'espace vectoriel lorentzien, puis celle de variété. Finalement, on présente trois exemples de variétés lorentziennes à courbure constante : l'espace de Minkowski, l'espace de Sitter et l'espace anti-de Sitter.

2.1.1 Espace vectoriel

Considérons un espace vectoriel réel V de dimension n muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{R}.$$

Si l'on fixe une base pour V , on peut définir $\langle \cdot, \cdot \rangle$ avec une matrice $M \in \text{Gl}(n, \mathbf{R})$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_M = \mathbf{x}^t M \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est de type $(n-l, l)$ si M est de type $(n-l, l)$, c'est-à-dire si M possède $n-l$ valeurs propres positives et l valeurs propres négatives. Le groupe des transformations qui préservent la forme bilinéaire de cet espace est $O(n-l, l)$.

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive, alors V est un *espace vectoriel euclidien* et on note $V = \mathbf{R}^n$. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est de type $(n-l, l)$, alors V est un *espace vectoriel pseudo-euclidien* et on note $V = \mathbf{R}^{n-l, l}$. Si de plus $l = 1$, on dit que V est *lorentzien*.

Dans un espace vectoriel V de type $(n-l, l)$, un vecteur $\mathbf{x} \in V$ est dit de type :

- *espace* si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$;
- *lumière* si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$;
- *temps* si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$.

On appelle l'ensemble des vecteurs de type lumière le *cône de lumière* $\mathbf{N}^{n-l, l}$ de $\mathbf{R}^{n-l, l}$.

Dans le cadre de ce mémoire, les matrices les plus souvent utilisées pour définir une forme bilinéaire de type $(n-l, l)$ seront

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-l-1} & \mathbf{0}_{n-l-1, l-1} & \mathbf{0}_{n-l-1, 1} & \mathbf{0}_{n-l-1, 1} \\ \mathbf{0}_{l-1, n-l-1} & -\mathbf{1}_{l-1} & \mathbf{0}_{l-1, 1} & \mathbf{0}_{l-1, 1} \\ \mathbf{0}_{1, n-l-1} & \mathbf{0}_{1, l-1} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \mathbf{0}_{1, n-l-1} & \mathbf{0}_{1, l-1} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-l} & \mathbf{0}_{n-l, l} \\ \mathbf{0}_{l, n-l} & -\mathbf{1}_l \end{pmatrix}.$$

2.1.2 Variété

L'univers d'Einstein est une variété lorentzienne. Cette section introduit les variétés. Pour un traitement plus détaillé, voir le livre de John Lee [Lee06].

On dit qu'un espace topologique abstrait S est *localement modelé* sur \mathbf{R}^n si pour tout point $p \in S$, il existe un ouvert U tel que $p \in U \subset S$, un ouvert $\tilde{U} \subset \mathbf{R}^n$ et un homéomorphisme $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$.

Le couple (U, ϕ) se nomme une *carte locale*. Ayant deux cartes locales (U, ϕ) et (V, ψ) on définit une fonction de transition entre ces deux cartes comme étant

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V).$$

Une famille de cartes locales

$$\mathcal{F} = \left\{ (U_i, \phi_i) \mid i \in \mathcal{I} \right\},$$

telle que les fonctions de transition sont bien définies et $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i = S$ se nomme un *atlas*. Un atlas est *maximal* s'il n'est pas contenu dans un autre atlas strictement plus grand.

Définition 2.1.1. Une variété V de dimension n est un espace topologique abstrait séparé et à base dénombrable localement modelé sur \mathbf{R}^n .

Une variété vient donc munie de son atlas. Préférentiellement, l'atlas est maximal. Une variété est lisse si toutes les fonctions de transition entre deux points sont infiniment différentiables.

Espace tangent

Une variété V n'admet pas nécessairement de structure linéaire. On peut par contre en chaque point p définir une approximation locale linéaire de V , l'espace tangent $T_p V$ en

p . En chaque point $p \in V$, l'espace tangent $T_p V$ contient l'ensemble des vecteurs tangents à une courbe passant par p . Pour définir ce concept formellement, on introduit la notion de n -jet de la droite réelle dans une variété en p .

Soient V une variété de dimension n , un point $p \in V$ et

$$C_p(V) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbf{R}, V) \mid f(0) = p \right\}.$$

Soit $f, g \in C_p(V)$, on considère la relation d'équivalence suivante : $f \sim_k g$ si et seulement si le développement de Taylor d'ordre k de $\phi \circ f$ en p est le même que celui de $\phi \circ g$ pour toutes cartes locales (U, ϕ) telle que $p \in U$ et $\phi : U \rightarrow \mathbf{R}^n$.

L'ensemble

$$J_p^k(V) = C_p(V) / \sim_k$$

est l'ensemble des k -jets en p de \mathbf{R} vers V . Soit $f \in J_p^1$, alors

$$f'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(t)$$

est un *vecteur tangent* en p .

Définition 2.1.2. L'espace tangent $T_p V$ de V en p est l'ensemble des vecteurs tangents à V en p .

Cet ensemble admet une structure linéaire et est en bijection avec l'ensemble des 1-jets en p .

Soient V et V' deux variétés et $F \in C^\infty(V, V')$, alors il existe pour tout $p \in V$ une fonction

$$F_* : T_p V \rightarrow T_{F(p)} V',$$

associée à F et qui envoie $f'(0)$ vers $(F \circ f)'(0)$. Cette fonction est linéaire et est appelée en anglais le « push-forward ».

Variété lorentzienne

On notera $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ la variété V telle que son espace tangent est muni de la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On demandera de plus que cette forme bilinéaire soit continue par rapport à p .

Une *variété riemannienne* V est une variété dont l'espace tangent en tout point p est muni d'une forme bilinéaire positive. Dans ce cas, l'espace tangent en chaque point est isomorphe à \mathbf{R}^n et il est muni de la norme définie par

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle.$$

Une *variété pseudo-riemannienne* est une variété telle que son espace tangent en chaque point est muni d'une forme bilinéaire non dégénérée. Finalement, une *variété lorentzienne* V est une variété pseudo-riemannienne telle que la forme bilinéaire de l'espace tangent est de type $(n - 1, 1)$.

2.1.3 Espace lorentzien conformément plat

L'univers d'Einstein est isomorphe à la compactification de l'espace de Minkowski. De plus, son revêtement double est isomorphe au bord conforme de l'espace anti-de Sitter. Ces deux espaces sont, respectivement, l'analogue lorentzien de l'espace euclidien \mathbf{E}^n et de l'espace hyperbolique \mathbf{H}^n en géométrie euclidienne. Ce sont des variétés euclidiennes conformément plates.

Une variété V de dimension n est dite *conformément plate* si pour tout point $p \in V$, il existe un ouvert U tel que $p \in U \subset V$ et une fonction

$$f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$$

telle que f préserve la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ de V à multiple scalaire positif près. C'est-à-dire que pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_{p'}V$, où $p' \in U$, il existe un $\mu \in \mathbf{R}$ tel que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V = \mu^2 \langle f\mathbf{x}, f\mathbf{y} \rangle_{\mathbf{R}^n},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{R}^n}$ est la forme bilinéaire de \mathbf{R}^n . Si \mathbf{R}^n est muni d'une forme bilinéaire définie positive, alors c'est une *variété conformément plate riemannienne*. Si la forme bilinéaire est de type $(n-1, 1)$, alors c'est une *variété conformément plate lorentzienne*.

Les espaces \mathbf{E}^n et \mathbf{H}^n sont deux des trois espaces modèles conformément plats riemanniens ; le troisième étant la sphère \mathbf{S}^n . Ce sont les seuls espaces riemanniens conformément plats, complets et simplement connexes. On présente ici les trois espaces modèles conformément plats lorentziens.

Soit S_p un plan dans l'espace tangent à la variété V en un point p . La courbure sectionnelle $K(S_p)$ de V associée à S_p est la courbure gaussienne du sous-espace de dimension deux de V tel que son plan tangent est S_p . Les variétés présentées dans cette section sont à courbure sectionnelle constante, c'est-à-dire que leur courbure sectionnelle ne dépend pas de S_p . Les trois variétés modèles riemanniennes mentionnées précédemment sont à courbure sectionnelle constante.

L'espace de Minkowski

L'espace de Minkowski de dimension n ,

$$\text{Min}^{n-1,1} = (\mathbf{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est de type $(n-1, 1)$, est l'analogie lorentzien de l'espace réel. C'est un espace géodésiquement complet, c'est-à-dire dont les géodésiques sont isomorphes à \mathbf{R} , à courbure sectionnelle nulle. Les isométries de $\text{Min}^{n-1,1}$ sont de la forme

$$p \mapsto o + N(p - o) + \mathbf{x},$$

où $o \in \text{Min}^{n-1,1}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ et $N \in O(n-1, 1)$ sont donnés.

L'espace de Sitter

L'espace de Sitter $d\mathbf{S}^{n-1,1}$ de dimension n est l'analogue lorentzien de la sphère \mathbf{S}^n de dimension n . On le définit comme étant l'ensemble des points de $\mathbf{R}^{n,1}$ dont la pseudo-norme égale r^2 :

$$d\mathbf{S}^{n-1,1} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n,1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = r^2 \right\},$$

où $r \in \mathbf{R}$. C'est une variété lorentzienne à courbure sectionnelle r^{-2} .

Les isométries de $d\mathbf{S}^{n-1,1}$ sont de la forme

$$\mathbf{x} \mapsto N\mathbf{x}.$$

où $N \in O(n, 1)$.

L'espace anti-de Sitter

L'espace anti-de Sitter $\text{Ad}\mathbf{S}^{n-1,1}$ de dimension n est l'analogue lorentzien de l'espace hyperbolique \mathbf{H}^n de dimension n . C'est l'ensemble des points dont la pseudo-norme égale $-r^2$ dans $\mathbf{R}^{n-1,2}$:

$$\text{Ad}\mathbf{S}^{n-1,1} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n-1,2} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -r^2 \right\},$$

où $r \in \mathbf{R}$. C'est une variété lorentzienne à courbure sectionnelle $-r^{-2}$.

Les isométries de $\text{Ad}\mathbf{S}^{n-1,1}$ sont de la forme

$$\mathbf{x} \mapsto N\mathbf{x}.$$

où $N \in O(n-1, 2)$.

2.2 L'univers d'Einstein

La *projectivisation* d'un espace vectoriel V est le quotient de $V \setminus \{\mathbf{0}\}$ par la relation d'équivalence $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{R}_*$ tel que $\mathbf{x} = ky$.

Définition 2.2.1 (BCD⁺08). *L'univers d'Einstein $\text{Ein}^{n-1,1}$ de dimension n est la projectivisation du cône de lumière de $\mathbf{R}^{n,2}$.*

On note la projectivisation du cône de lumière de $\mathbf{R}^{n,2}$ par

$$\mathbf{PN}^{n,2} = (\mathbf{N}^{n,2} \setminus \{\mathbf{0}_{n+2,1}\}) / \sim,$$

où $\mathbf{N}^{n,2}$ est le cône de lumière de $\mathbf{R}^{n,2}$ tel que défini à la section 2.1.1 et $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{R}_*$ tel que $\mathbf{x} = ky$. Selon la base utilisée pour exprimer $\mathbf{R}^{n,2}$, on obtient différents points de vue sur cet espace. En particulier, on peut le voir comme étant la compactification conforme de $\text{Min}^{n-1,1}$ ou comme étant la projectivisation de $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{R}^{n+2}$. Étant donné que dans $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1$, deux vecteurs \mathbf{x}, \mathbf{y} sont multiples scalaires l'un de l'autre si et seulement si $\mathbf{x} = \pm \mathbf{y}$, on notera cet espace $(\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^2) / \pm$.

Le *revêtement double* $\widehat{\text{Ein}}^{n-1,1}$ de l'univers d'Einstein est composé des classes de multiples positifs du cône de lumière de $\mathbf{R}^{n,2}$, c'est-à-dire

$$\widehat{\text{Ein}}^{n-1,1} = (\mathbf{N}^{n,2} \setminus \{\mathbf{0}_{n+2,1}\}) / \equiv,$$

où $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{R}_*^+$ tel que $\mathbf{x} = ky$. Soit $p \in \mathbf{N}_{n,2} \setminus \{\mathbf{0}_{n+2,1}\}$, on appellera les relevés de p les points P et P' tels que $P' \equiv -P \in \mathbf{N}_{n,2}$ et $p \sim P \sim P'$. On peut définir $\widehat{\text{Ein}}^{n-1,1}$ comme étant le bord conforme de $\text{Ad}\mathbf{S}^{n+1}$ [Fra02].

Le *revêtement universel* $\widetilde{\text{Ein}}^{n-1,1}$ de l'univers d'Einstein est isomorphe à $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{R}$ [BCD⁺08].

2.2.1 $\text{Ein}^{n-1,1} \cong (\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1) / \pm$

On veut montrer, à partir de la définition de l'univers d'Einstein, que ce dernier est isomorphe à $(\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1) / \pm$. Pour ce faire, on se place dans $\mathbf{R}^{n,2}$ muni d'une forme quadratique engendrée par

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_{n,2} \\ \mathbf{0}_{2,n} & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}.$$

Dans cette base, le cône de lumière de $\mathbf{R}^{n,2}$ est

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_\Lambda^{n,2} &= \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+2} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_\Lambda^{n,2} \mid \mathbf{x}^t \Lambda \mathbf{x} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}_\Lambda^{n,2} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}_\Lambda^{n,2} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 \right\} \end{aligned}$$

Donc, le projectifié de $(\mathbf{N}_\Lambda^{n,2} - \mathbf{0}_{n+2,1})$ est

$$\mathbf{PN}_\Lambda^{n,2} = (\mathbf{N}_\Lambda^{n,2} - \mathbf{0}_{n+2,1}) / \sim \cong (\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1) / \pm,$$

où $x \sim y$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{R}_*$ tel que $x = ky$. On peut de même déduire que

$$\widehat{\text{Ein}}^{n-1,1} \cong \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1,$$

car

$$\widehat{\text{Ein}}^{n-1,1} = (\mathbf{N}_\Lambda^{n,2} - \mathbf{0}_{n+2,1}) / \equiv$$

où $x \equiv y$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{R}_*^+$ tel que $x = ky$.

2.2.2 Compactification de l'espace de Minkowski

L'univers d'Einstein peut être décrit comme étant la compactification conforme de l'espace de Minkowski, $\text{Min}^{n-1,1}$ voir [BCD⁺08]. On définit d'abord la notion de compactification conforme, puis on prouve que celle de $\text{Min}^{n-1,1}$ est $\text{Ein}^{n-1,1}$.

Compactification

Un espace topologique S est dit *compact* si tout recouvrement d'ouverts de S contient un sous-recouvrement fini de S . L'univers d'Einstein est compact, car $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1$ l'est ce qui implique que $(\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1) / \pm$ est compact.

Définition 2.2.2. Soit S un espace topologique. Une paire (U, c) , où U est compact,

$$c : S \rightarrow U$$

est un plongement homéomorphe de S dans U et l'adhérence de l'image de S par c égale U , c'est-à-dire que $\overline{c(S)} = U$, se nomme une compactification de S .

Si U est un espace compact et S un sous-espace propre de U dont l'adhérence égale U , on dit aussi que U est une *compactification* de S . Dans un contexte de variété lisse, on exige que la compactification c soit un difféomorphisme.

Géométrie conforme

Avant de parler de compactification conforme, on doit définir la notion de conformité dans une variété.

Définition 2.2.3. Une variété conforme V est une variété dont l'espace tangent en chaque point, $T_p V$, est muni d'une famille de formes bilinéaires non dégénérées et symétriques

$$g_p : T_p V \times T_p V \rightarrow \mathbf{R},$$

de façon à ce que deux formes bilinéaires g_p et g'_p soient dans la même famille, \mathcal{F} , si et seulement si il existe un réel μ tel que $g_p = \mu^2 g'_p$.

On dit qu'une telle famille de formes bilinéaires est *conforme*.

Soient V et V' deux variétés conformes et

$$c : V \rightarrow V'$$

un homéomorphisme. Pour tout $p \in V$, une forme bilinéaire $g_{c(p)}$ sur $T_{c(p)}V'$ induit une forme bilinéaire \bar{g}_p sur T_pV que l'on nomme le *tiré en arrière*. Soient $f'(0), h'(0) \in T_p(V)$, on a :

$$\bar{g}_p(f'(0), h'(0)) = g_{c(p)}(c_*(f'(0)), c_*(h'(0))),$$

où c_* est le push-forward tel que défini à la section 2.1.2.

Soit \mathcal{F} une famille de formes bilinéaires conformes en V et \mathcal{F}' une famille de formes bilinéaires conformes en V' . L'homéomorphisme $c : V \rightarrow V'$ est conforme si pour tout $p \in V$, il existe un $g_p \in \mathcal{F}$ et un $g'_{c(p)} \in \mathcal{F}'$ tel que le tiré en arrière de g' par f est un multiple scalaire positif de g :

$$\bar{g}'_p = \mu^2 g_p.$$

où $\mu \in \mathbf{R}$. Par définition d'une famille de formes bilinéaires conformes, cela signifie que $\bar{g}'_p = \mu^2 g_p$ pour tout $g_p \in \mathcal{F}$ et pour tout $g'_{c(p)} \in \mathcal{F}'$. Une compactification (V', c) de V est dite *conforme* si c est conforme.

Construction de la compactification conforme de $\text{Min}^{2,1}$

On considère $\mathbf{R}_\Omega^{n,2}$, où

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-l-1} & \mathbf{0}_{n-l-1, l-1} & \mathbf{0}_{n-l-1, 1} & \mathbf{0}_{n-l-1, 1} \\ \mathbf{0}_{l-1, n-l-1} & -\mathbf{1}_{l-1} & \mathbf{0}_{l-1, 1} & \mathbf{0}_{l-1, 1} \\ \mathbf{0}_{1, n-l-1} & \mathbf{0}_{1, l-1} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \mathbf{0}_{1, n-l-1} & \mathbf{0}_{1, l-1} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{R}_\Omega^{n,2}$ est muni de la forme bilinéaire

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_\Omega = \mathbf{x}^t \Omega \mathbf{y}.$$

On munit $\text{Min}_\Lambda^{n-1,1}$, où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & \mathbf{0}_{n-1,1} \\ \mathbf{0}_{1,n-1} & -1 \end{pmatrix}.$$

de la forme bilinéaire

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_\Lambda = \mathbf{x}^t \Lambda \mathbf{y}.$$

On prétend que le plongement

$$c : \text{Min}_\Lambda^{n-1,1} \rightarrow \mathbf{PN}_\Omega^{n,2}$$

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^t \Lambda \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une compactification conforme de $\text{Min}^{n-1,1}$.

D'abord, on montre que le plongement c induit une compactification avec les deux lemmes suivants :

Lemme 2.2.4. *Le plongement c est un difféomorphisme sur son image.*

Démonstration. On a que

$$c \in C^\infty(\text{Min}^{n-1,1}, \mathbf{PN}_\Omega^{n,2}),$$

car c est une application polynomiale.

Ensuite, l'inverse de c :

$$c^{-1} : \text{Im}(c) \rightarrow \text{Min}^{n-1,1}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_{n+2}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{x_{n+2}} \end{pmatrix},$$

où

$$\text{Im}(c) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{PN}_{\Omega}^{n,2} \mid x_{n+2} \neq 0 \right\},$$

est bien définie et

$$c^{-1} \in C^{\infty}(\mathbf{PN}_{\Omega}^{n-2}, \text{Min}^{n-1,1}),$$

car $x_{n+2} \neq 0$. □

Lemme 2.2.5. *On a $\overline{c(\text{Min}^{n-1,1})} = \mathbf{PN}^{n,2}$.*

Démonstration. On doit montrer que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{PN}^{n,2}$, il existe une suite $\{\mathbf{x}_i\}$ de points de $\text{Min}^{n-1,1}$ telle que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} c(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}$$

et que pour tout $\mathbf{x} \in \overline{c(\text{Min}^{n-1,1})}$, on a aussi que $\mathbf{x} \in \mathbf{PN}^{n,2}$.

D'abord, on divise les éléments de $\mathbf{PN}_{\Omega}^{n,2}$ en trois classes :

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{PN}_{\Omega}^{n,2} \mid x_{n+2} \neq 0 \right\} \\ C_2 &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{PN}_{\Omega}^{n,2} \mid x_{n+2} = 0 \text{ et } x_{n+1} \neq 0 \right\} \\ C_3 &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{PN}_{\Omega}^{n,2} \mid x_{n+2} = 0 \text{ et } x_{n+1} = 0, \text{ et } x_n \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

Les éléments de C_1 sont dans la classe d'équivalence d'un élément de l'image de c . En effet, pour tout $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+2} \end{pmatrix} \in C_1$, on a que

$$\mathbf{x} \sim \frac{\mathbf{x}}{x_{n+2}} \in \text{Im}(c).$$

Pour la classe C_2 , considérons la suite

$$\begin{pmatrix} tx_1 + \frac{1}{2x_1} \\ tx_2 \\ \vdots \\ tx_n \\ t + \frac{1}{4x_1^2} \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Im}(c).$$

où $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0$. Cette suite converge vers

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in C_2$$

lorsque t tend vers l'infini. Tous les éléments de C_2 sont dans la classe d'équivalence d'un tel \mathbf{x} ; il suffit de diviser par l'avant-dernière coordonnée. Donc, les éléments de C_2 sont dans l'adhérence de l'image de c .

Pour la classe C_3 , considérons

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 1$. Alors, \mathbf{x} est la limite de la suite

$$\begin{pmatrix} tx_1 \\ \vdots \\ tx_{n-1} \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Im}(c)$$

lorsque t tend vers l'infini, où $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - 1 = 0$. Or, tous les éléments de C_3 sont dans la classe d'équivalence d'un élément de la forme de \mathbf{x} .

Inversement, soit $\mathbf{x} \in \overline{c(\text{Min}^{n-1,1})}$. Alors, soit $\mathbf{x} \in c(\text{Min}^{n-1,1})$, ou bien il existe une suite \mathbf{x}_k telle que $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$ lorsque $k \rightarrow \infty$ et telle que $\mathbf{x}_k \in c(\text{Min}^{n-1,1})$ pour tout k . Comme

$$c(\text{Min}^{n-1,1}) \subset \mathbf{PN}_{\Omega}^{n,2},$$

alors $\mathbf{x}_k \in \mathbf{PN}_{\Omega}^{n,2}$ pour tout k . De plus, comme $\mathbf{PN}_{\Omega}^{n,2}$ est fermé. $\mathbf{x} \in \mathbf{PN}_{\Omega}^{n,2}$. □

Finalement, on montre que c induit une compactification conforme.

Lemme 2.2.6. *Le plongement*

$$c : \text{Min}^{n-1,1} \rightarrow \mathbf{R}_\Omega^{n,2}$$

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^t \Lambda \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

est conforme.

Démonstration. Soit $p \in \text{Min}^{n-1,1}$ et $f'(0), g'(0) \in T_p \text{Min}^{n-1,1}$. On a que

$$\begin{aligned} c_*(f'(0)) &= (c \circ f)'(0) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (c \circ f)(t) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \begin{pmatrix} f(t) \\ \langle f(t), f(t) \rangle_\Lambda \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f'(0) \\ 2\langle f(0), f'(0) \rangle_\Lambda \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Posons $g_{c(p)} = \langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$. Alors, le tiré en arrière de g est un multiple scalaire positif de $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\bar{g}_p(c_*(f'(0)), c_*(h'(0))) = \mu^2 \langle f'(0), h'(0) \rangle_\Lambda,$$

où μ dépend du représentant de $c_*(f'(0))$ que l'on a choisi. Comme $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Lambda$ est une forme bilinéaire de $\text{Min}^{n-1,1}$, on a montré que c est conforme. \square

Théorème 2.2.7. *La compactification conforme de $\text{Min}^{n-1,1}$ est $\text{Ein}^{n-1,1}$.*

Démonstration. Cela suit directement des lemmes 2.2.4 à 2.2.6. \square

2.2.3 Bord conforme de $\text{AdS}^{n,1}$

On peut définir $\widehat{\text{Ein}}^{n-1,1}$ comme étant le bord conforme de l'espace anti-de Sitter. Comme $\text{AdS}^{n,1}$ est défini dans $\mathbf{R}^{n,2}$, il suffit de montrer que son bord est

$$\widetilde{\mathbf{PN}}^{n,2} = (\mathbf{N}^{n,2} - \mathbf{0}_{n+2,1}) / \equiv,$$

où $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{R}_*^+$ tel que $\mathbf{x} = k\mathbf{y}$. Suivant le développement de la section 3.2.2 de la thèse de Clara Rossi Salvemini [Ros12], on considère le quotient de $\mathbf{R}^{n,2}$ par l'action des multiples scalaires positifs, $\widetilde{\mathbf{PR}}^{n,2}$.

Dans cet espace, notons $\tilde{\mathbf{x}}$ la classe de \mathbf{x} . Si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$, alors il existe un unique $\mathbf{x}' \in \tilde{\mathbf{x}}$ tel que $\langle \mathbf{x}', \mathbf{x}' \rangle = -1$. Donc, $\text{AdS}^{n,1}$ est en bijection avec les classes de $\widetilde{\mathbf{PR}}^{n,2}$ dont la pseudo-norme est négative. On conclut donc que le bord de $\text{AdS}^{n,1}$ dans $\widetilde{\mathbf{PR}}^{n,2}$ est l'ensemble des classes de pseudo-norme nulle. Cet ensemble est $\widetilde{\mathbf{PN}}^{n,2} = \widehat{\text{Ein}}^{n-1,1}$.

2.3 Visualisation de $\text{Ein}^{n-1,1}$

On a vu différentes façons de représenter abstraitement l'univers d'Einstein. On présente maintenant, pour les cas $n = 2$ et $n = 3$, différentes façons de visualiser $\text{Ein}^{n-1,1}$.

2.3.1 Base diagonale

Considérons l'univers d'Einstein dans une base telle que la forme bilinéaire de $\mathbf{R}^{n,2}$ est engendrée par

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_{n,2} \\ \mathbf{0}_{2,n} & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}.$$

On notera $\text{Ein}_{diag}^{n-1,1}$ l'univers d'Einstein dans cette base. De plus, lorsque cela semble nécessaire, on notera \mathbf{x}_{diag} les points de $\text{Ein}_{diag}^{n-1,1}$. Pour tout $\mathbf{x} \in \text{Ein}_{diag}^{n-1,1}$,

$$\mathbf{x} \sim \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2}}.$$

De plus, comme $\mathbf{x} \sim -\mathbf{x}$, on suppose que $x_{n+2} \geq 0$ et que $x_{n+1} = 1$ si $x_{n+2} = 0$. On a ainsi un unique représentant pour chaque classe d'équivalence de la projection de $\mathbf{N}_\Lambda^{n,2} \setminus \{\mathbf{0}_{n+2,1}\}$.

Cas $n = 2$

Lorsque $n = 2$,

$$\mathbf{PN}_\Lambda^{2,2} \cong (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1) / \pm$$

est homéomorphe à un tore. Soit θ et ϕ les angles des deux cercles. On suppose sans perte de généralité que $0 \leq \theta < 2\pi$ et $0 \leq \phi < \pi$ avec identification

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \theta + \pi \\ \phi + \pi \end{pmatrix}.$$

On peut afficher en trois dimensions $\text{Ein}^{1,1}$ avec coordonnées

$$\begin{pmatrix} (R + r \cos \theta) \cos \phi \\ (R + r \sin \theta) \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix},$$

où $R, r \in \mathbf{R}_*^+$, $R > r$. Dans les images de ce mémoire, $R = 2$ et $r = 1$. On obtient un demi tore tel que les deux cercles de bordure sont identifiés par l'application antipodale. On peut voir l'identification des bords à la figure 2.1. Si l'on considère $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{1,1}$, alors on a un tore entier.



Figure 2.1 – L'identification de $\text{Ein}_{diag}^{1,1}$ au bord du tore.

Cas $n = 3$

Lorsque $n = 3$, on désire exprimer $\text{PN}_{\Lambda}^{3,2}$ avec trois paramètres pour la visualisation.

On a que

$$\text{Ein}_{diag}^{2,1} = (\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1) / \pm = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \psi \\ \sin \phi \sin \psi \\ \cos \psi \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \mid 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi \right\} \text{ et}$$

$$\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1} = \mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \psi \\ \sin \phi \sin \psi \\ \cos \psi \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \mid 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

On peut donc simplement afficher $\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \\ \theta \end{pmatrix}$ avec les identifications suivantes :

$$\begin{aligned} \text{dans } \text{Ein}_{diag}^{2,1} : \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \\ \theta \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} \phi + \pi \\ \pi - \psi \\ \theta + \pi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \phi \\ \psi + \pi \\ \theta + \pi \end{pmatrix}; \\ \text{dans } \widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1} : \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \\ \theta \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} \phi + \pi \\ -\psi \\ \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cette projection n'est pas conforme. On peut voir à la figure 2.2 le relevé de trois paires de vecteurs de $\text{Ein}_{diag}^{2,1}$ dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$ projeté sur $\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \\ \theta \end{pmatrix}$.

Il peut toutefois se révéler difficile d'effectuer des visualisations avec cette projection à cause des nombreuses identifications. Pour diminuer le nombre de points à identifier,

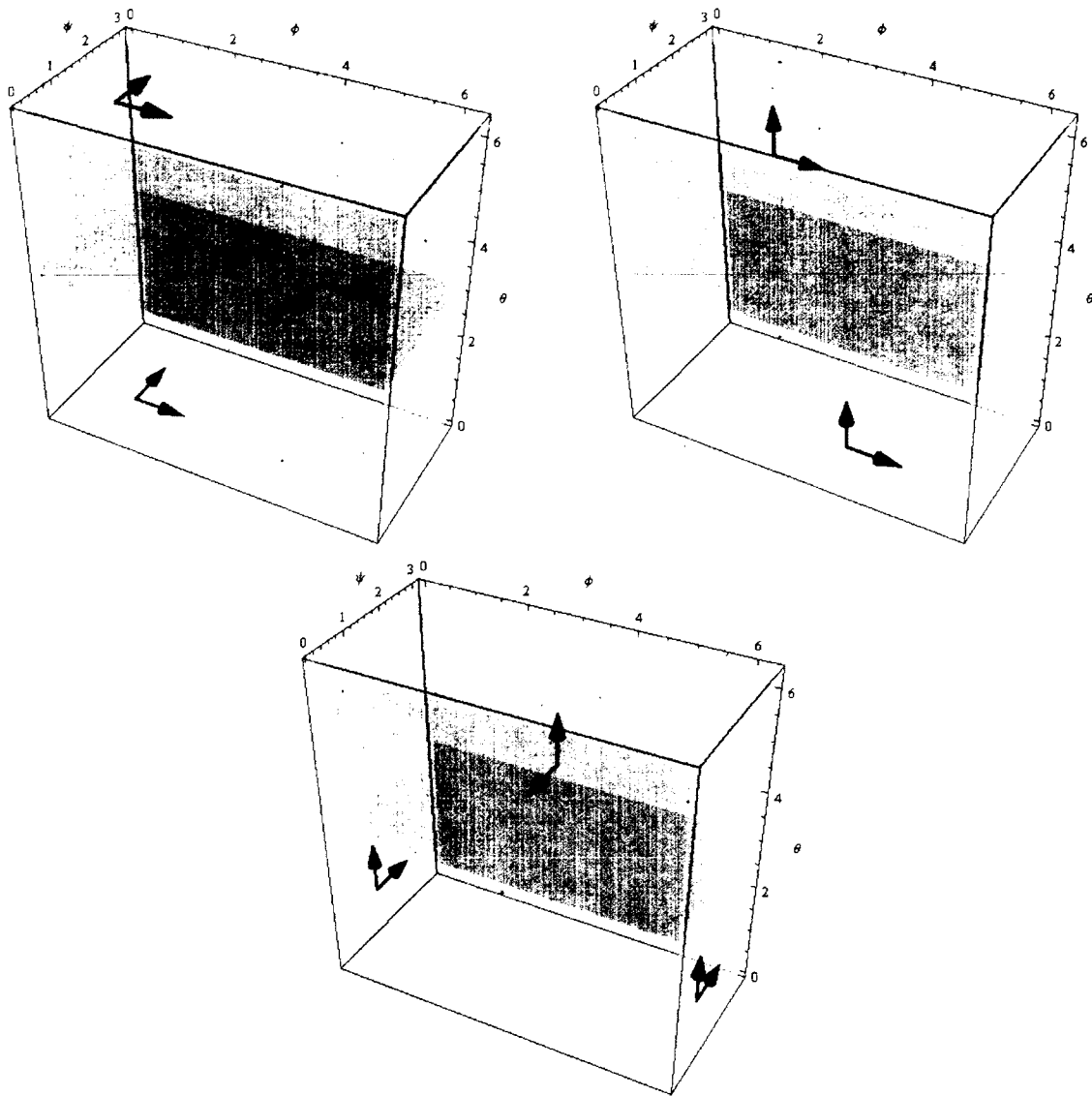


Figure 2.2 – Le relevé de trois paires de vecteurs de $\text{Ein}_{diag}^{2,1}$, en noir, représentées sous la forme $(\phi \psi \theta)^t$ dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$. L'ensemble des points non uniquement identifiés sont en gris pâle et en gris. Le changement de couleur marque une délimitation entre les deux copies de $\text{Ein}^{2,1}$ dans $\widehat{\text{Ein}}^{2,1}$. Cette délimitation est arbitraire.

on utilise une projection ρ non conforme de \mathbf{S}^2 vers le disque de rayon π qui n'a qu'un seul point singulier, le pôle Sud $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\rho : \mathbf{S}^2 \rightarrow \pi\mathcal{D}^2 : \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \psi \\ \sin \phi \sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \psi \cos \phi \\ \psi \sin \phi \end{pmatrix}$$

On envoie $(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1)/\pm$ vers un cylindre solide $\pi\mathcal{D}^2 \times [0, \pi)$:

$$\gamma : \text{Ein}_{diag}^{2,1} \rightarrow \pi\mathcal{D}^2 \times [0, \pi) : \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \psi \\ \sin \phi \sin \psi \\ \cos \psi \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \psi \cos \phi \\ \psi \sin \phi \\ \theta \end{pmatrix}.$$

On peut définir la même fonction de $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$ vers $\pi\mathcal{D}^2 \times [0, 2\pi)$ en supposant que $\theta \in [0, 2\pi)$. La figure 2.3 présente le relevé d'une paire de vecteurs de $\text{Ein}_{diag}^{2,1}$.

Dans ce cas, avec les identifications précédentes, on trouve que dans $\text{Ein}_{diag}^{2,1}$

$$\begin{pmatrix} \psi \cos \phi \\ \psi \sin \phi \\ \theta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (\psi - \pi) \cos \phi \\ (\psi - \pi) \sin \phi \\ \theta + \pi \end{pmatrix}.$$

Cette projection a l'avantage de n'avoir qu'un seul point de \mathbf{S}^2 pour lequel la projection n'est pas bien définie. Les disques $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ sont identifiés par l'application antipodale sur \mathbf{S}^2 . Concrètement, cela envoie le centre du disque vers le périmètre du disque. Cette projection sera utilisée pour la visualisation dans le cadre de ce mémoire. Les images présentées seront dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$. Il est important de se souvenir que cet espace contient deux copies de $\text{Ein}_{diag}^{2,1}$. Pour faciliter la visualisation, un contour est ajouté à ces images, représentant l'image du pôle Sud $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \mathbf{S}^1$. L'ensemble des points non uniquement identifiés sont en gris pâle et en gris. Le changement de couleur délimite les deux copies de $\text{Ein}^{2,1}$ dans $\widehat{\text{Ein}}^{2,1}$. Cette délimitation est arbitraire.

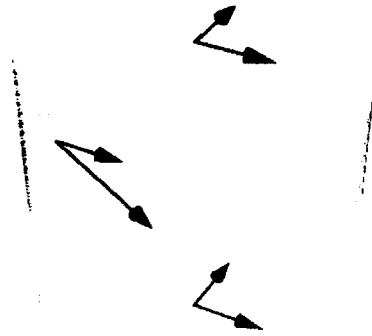


Figure 2.3 – Une paire de vecteurs de $\text{Ein}_{diag}^{2,1}$ représentée dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$ par $(\psi \cos \phi \ \psi \sin \phi \ \theta)^t$. Encore une fois, l'ensemble des points non uniquement identifiés sont en gris pâle et en gris. Le changement de couleur délimite deux copies de $\text{Ein}^{2,1}$ dans $\widehat{\text{Ein}}^{2,1}$. Cette délimitation est arbitraire.

2.3.2 Base du plongement

Supposons maintenant que la forme bilinéaire de $\mathbf{R}^{n,2}$ est engendrée par Ω . On notera $\text{Ein}_{Min}^{n-1,1}$ l'univers d'Einstein dans cette base. De plus, on notera \mathbf{x}_{Min} un point de $\text{Ein}_{Min}^{n-1,1}$. Pour passer de cette base à $\text{Ein}_{diag}^{n-1,1}$ il suffit d'appliquer la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & \mathbf{0}_{n-1,1} & \mathbf{0}_{n-1,1} & \mathbf{0}_{n-1,1} \\ \mathbf{0}_{1,n-1} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \mathbf{0}_{1,n-1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{1,n-1} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

à un point de $\mathbf{R}_{\Omega}^{n,2}$:

$$\mathbf{x}_{diag} = P\mathbf{x}_{Min}.$$

On utilisera parfois l'espace de Minkowski pour visualiser l'univers d'Einstein. Par contre, ce modèle a le désavantage de ne pas montrer les « points à l'infini » de l'espace de Minkowski. Il existe une méthode pour visualiser la compactification de $\text{Min}^{n-1,1}$ en n dimensions bornées.

Diagramme de Penrose pour $\text{Min}^{2,1}$

On représente la compactification conforme de l'espace de Minkowski avec un *diagramme de Penrose* suivant la section 17.4 du livre de Ray d'Inverno [d'I92]. Ce diagramme, utilisé d'abord par Roger Penrose, sert à illustrer la structure causale d'un espace-temps. De plus, il permet de visualiser les « points à l'infini ». Dans notre cas, il permet de visualiser l'univers d'Einstein entièrement.

On construit le diagramme pour $n = 3$. Généralement, cette construction est faite dans le cas $n = 4$. La construction est totalement analogue.

Considérons donc le cas de $\text{Min}_{\Lambda}^{2,1}$. Le principe est d'utiliser la fonction arctangente pour borner les coordonnées. D'abord, pour ne borner que deux coordonnées, on utilise

les coordonnées polaires pour les coordonnées de type espace $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$. Alors, on doit borner r' et $x_3 = t'$. Posons

$$t = \operatorname{arctg}(t' + r') + \operatorname{arctg}(t' - r'), \text{ et}$$

$$r = \operatorname{arctg}(t' + r') - \operatorname{arctg}(t' - r').$$

Alors, $-\pi < t + r < \pi$, $-\pi < t - r < \pi$ et $r \geq 0$.

On peut alors afficher le couple $\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix}$ en prenant note que chaque couple correspond à un cercle dans l'univers d'Einstein. C'est ce qui est généralement fait lorsque $n = 4$, mais alors chaque point correspond à une sphère. On peut aussi, et c'est ce que l'on fait dans ce mémoire, afficher $\begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ t \end{pmatrix}$.

Ce graphique est borné par l'union de deux cônes, l'intérieur représentant les points de $\operatorname{Min}^{2,1}$, la frontière représentant les « points à l'infini ». Le cercle $r = \pi$ (ou encore $t = 0$) correspond à un unique point que l'on identifie aux deux points $r = 0$ (ou encore $t = \pm\pi$). Ce point est l'image de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\operatorname{Min}}$.

Pour comprendre ces identifications, on trouve des fonctions pour le bord de l'espace de Minkowski. On a que

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \\ 2l \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(l)) \cos t \\ (\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(l)) \sin t \\ \pi/2 + \operatorname{arctg}(l) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(l)) \cos t \\ (-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(l)) \sin t \\ -\pi/2 + \operatorname{arctg}(l) \end{pmatrix},$$

ce qui couvre l'ensemble des cas, sauf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui a déjà été traité. On peut voir la frontière d'un diagramme de Penrose à la figure 2.4.

Ce modèle est pratique pour visualiser $\operatorname{Ein}^{2,1}$, car il est compact et ses identifications sont relativement simples. De plus, il facilite l'utilisation de nos connaissances de $\operatorname{Min}^{2,1}$. Par contre, il n'admet pas de généralisation évidente pour $\widehat{\operatorname{Ein}}^{2,1}$.

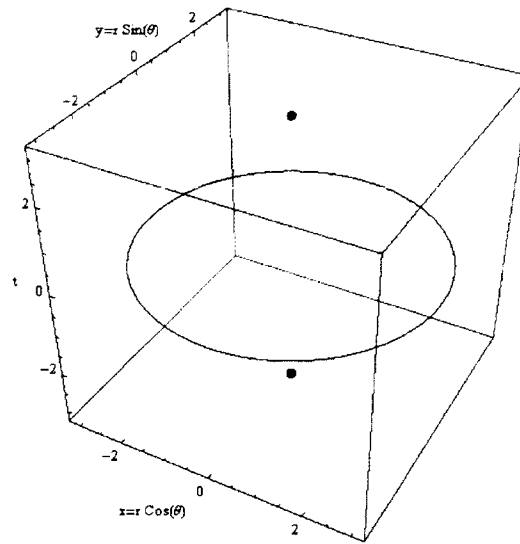


Figure 2.4 – Le bord d’un diagramme de Penrose de dimension trois. Les points de la frontière identifiés deux à deux sont en gris pâle et l’autre point est en noir.

Si l’on suppose plutôt que $n = 2$, alors on transforme les deux coordonnées pour qu’elles deviennent bornées de façon similaire et on obtient un diagramme de Penrose pour $\text{Min}^{1,1}$. La frontière de ce diagramme est présentée à la figure 2.5. Dans ce diagramme, les côtés opposés sont identifiés ; on retrouve donc que $\text{Min}^{1,1}$ est un tore.

2.4 Propriétés de $\text{Ein}^{n-1,1}$

Dans cette section, on présente différentes propriétés de l’univers d’Einstein.

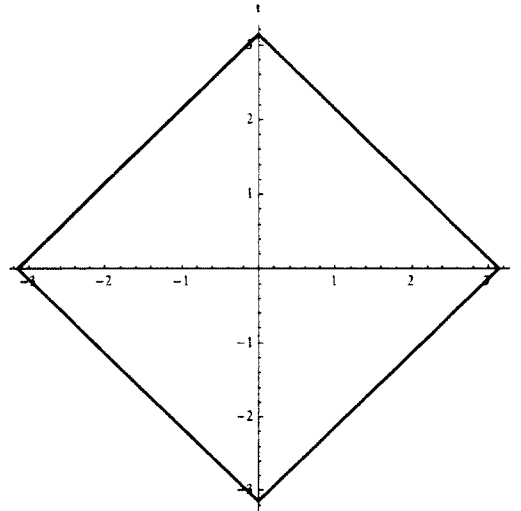


Figure 2.5 – Un diagramme de Penrose présentant le bord de la compactification de l'espace de Minkowski de dimension $n = 2$.

2.4.1 Propriétés topologiques

Orientabilité

L'univers d'Einstein $\text{Ein}^{n-1,1}$ est orientable si n est pair et non orientable si n est impair. En effet, l'application antipodale de \mathbf{S}^n reverse l'orientation si et seulement si n est pair. Le revêtement double de l'univers d'Einstein $\widehat{\text{Ein}}^{n-1,1}$ est toujours orientable et connexe.

Groupe fondamental de $\text{Ein}^{n-1,1}$

Le groupe fondamental de l'univers d'Einstein est :

$$\begin{cases} \mathbf{Z}^2 & \text{si } n = 2 \\ \mathbf{Z} & \text{si } n > 2. \end{cases}$$

En effet, on a vu à la section 2.2.1 que

$$\text{Ein}^{n-1,1} \cong (\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1) / \pm \cong \mathbf{S}^{n-1} \times (\mathbf{S}^1 / \pm).$$

De plus, le groupe fondamental de

$$\mathbf{S}^n = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{si } n = 1 \\ \mathbf{1} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

et le groupe fondamental de \mathbf{S}^1/\pm est \mathbf{Z} .

Groupe de transformations conformes

Les transformations conformes de $\text{Ein}^{n-1,1}$ sont de la forme

$$\mathbf{x} \rightarrow N\mathbf{x},$$

où $N \in SO(n, 2) = O(n, 2)/\sim$ et $N \sim N' \in O(n, 2)$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $N = kN'$.

2.4.2 Espace modèle

On a introduit à la section 2.1.3 les trois espaces conformément plats lorentziens modèles. Dans cette section, on montre qu'ils sont tous inclus dans l'univers d'Einstein.

Proposition 2.4.1. *L'espace lorentzien conformément plat $\text{Min}^{n-1,1}$ de dimension n est un sous-espace de $\text{Ein}^{n-1,1}$.*

Démonstration. On considère la fonction

$$c : \text{Min}_\Lambda^{n-1,1} \rightarrow \mathbf{PN}_\Omega^{n,2}$$

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^t \Lambda \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

de la section 2.2.2. Comme c est un difféomorphisme sur son image, voir lemme 2.2.4, $\text{Im}(c)$ est un sous-espace de $\mathbf{PN}^{n,2} = \text{Ein}^{n-1,1}$. \square

Proposition 2.4.2. *L'espace lorentzien conformément plat $d\mathbf{S}^{n-1,1}$ de dimension n est un sous-espace de $\text{Ein}^{n-1,1}$.*

Démonstration. Considérons

$$\begin{aligned} d\mathbf{S}_\Omega^n &= \{x \in \mathbf{R}_\Omega^{n,1} : \langle x, x \rangle_\Omega = 1\} \\ &= \{x \in \mathbf{R}_\Omega^{n,1} : x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n x_{n+1} = 1\}. \end{aligned}$$

Alors, $d\mathbf{S}_\Omega^n$ se projette dans $\text{Ein}_\Omega^{n-1,1}$ par

$$\rho : x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 1 \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|\rho(x)\|_\Omega = 0 &\iff x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - 1 - x_n x_{n+1} = 0 \\ &\iff x \in d\mathbf{S}_\Omega^n. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.4.3. *L'espace lorentzien conformément plat $\text{AdS}^{n-1,1}$ de dimension n est un sous-espace de $\text{Ein}^{n-1,1}$.*

Démonstration. Considérons

$$\begin{aligned} \text{AdS}_\Omega^n &= \{x \in \mathbf{R}_\Omega^{n-1,2} : \langle x, x \rangle_\Omega = -1\} \\ &= \{x \in \mathbf{R}_\Omega^{n-1,2} : x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 - x_{n-1}^2 - x_n x_{n+1} = -1\}. \end{aligned}$$

Alors, AdS_Ω^n se projette dans $\text{Ein}_\Omega^{n-1,1}$ par

$$\rho : x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ 1 \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|\rho(x)\|_\Omega = 0 &\iff x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + 1 - x_{n-1}^2 - x_n x_{n+1} = 0 \\ &\iff x \in \text{AdS}_\Omega^n. \end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Les objets de l'univers d'Einstein

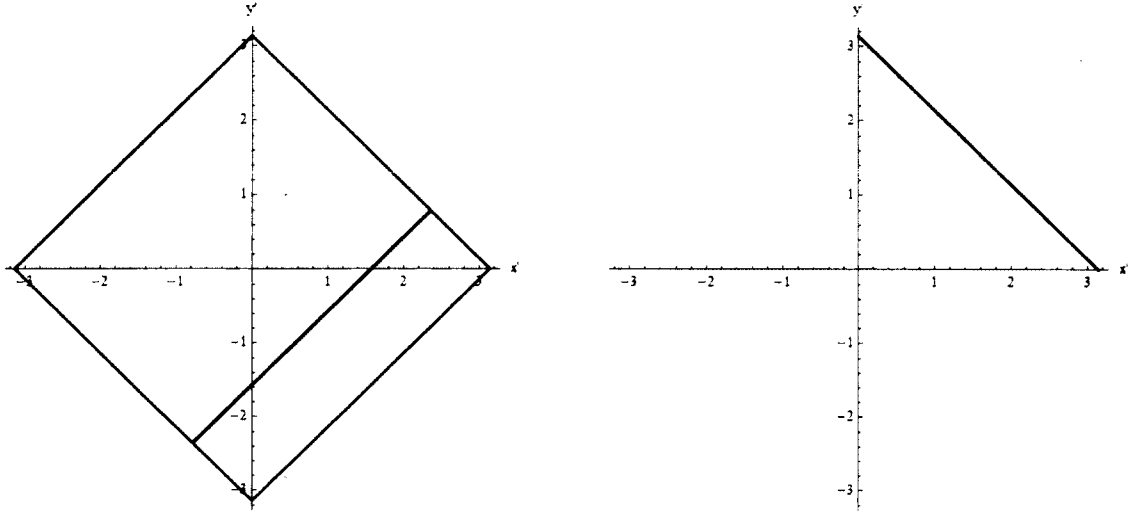
Dans ce chapitre, on définit les différents objets de l'univers d'Einstein comme à la section 2.3 de [BCD⁺08]. L'accent est mis sur la visualisation de ces objets en dimensions deux et trois.

3.1 Photons

Un sous-espace W de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est *totalelement isotrope* si tout les vecteurs de cet espace sont de type lumière. Un plan totalement isotrope est un sous-espace totalement isotrope de dimension deux :

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left\{ a\mathbf{x} + b\mathbf{x}' \in \mathbf{R}^{n,2} \mid \langle a\mathbf{x} + b\mathbf{x}', a\mathbf{x} + b\mathbf{x}' \rangle = 0, a, b \in \mathbf{R} \text{ et } \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbf{R}^{n,2} \right\}$$

Définition 3.1.1. *Un photon est le projectifié d'un plan totalement isotrope dans $\mathbf{R}^{n,2}$.*



(a) La compactification d'une droite de type lumière de $\text{Min}^{1,1}$: $(t + 1 \ t \ 2t + 1 \ 1)_{\text{Min}}^t \cup (1 \ 1 \ 2 \ 0)_{\text{Min}}^t$

(b) $(t \ t \ 1 \ 0)_{\text{Min}}^t \cup (1 \ 1 \ 0 \ 0)_{\text{Min}}^t$

Figure 3.1 – Deux photons de $\text{Ein}_{\text{Min}}^{1,1}$.

3.1.1 Exemples

Cas $n = 2$

On considère $\text{Ein}_{\text{Min}}^{1,1}$. Les photons sont soit la compactification d'une droite de type lumière de $\text{Min}^{1,1}$, soit de la forme

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} t \\ \pm t \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)_{\text{Min}} \mid t \in \mathbf{R} \right\} \cup \left(\begin{array}{c} 1 \\ \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right)_{\text{Min}} .$$

Dans le diagramme de Penrose, c'est l'ensemble des droites de pente $\pm \frac{1}{2}$, incluant le bord. On voit à la figure 3.1 deux exemples de photons dans le diagramme de Penrose de dimension deux.

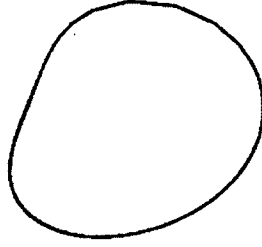


Figure 3.2 – L'image de $(t \ 1 \ t \ 1)_{diag} \cup (1 \ 0 \ 1 \ 0)_{diag}$ dans le tore.

Si l'on considère $\text{Ein}_{diag}^{1,1}$, on peut trouver la forme générale d'un photon en appliquant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

au photon de $\text{Ein}_{Min}^{1,1}$. On trouve que les photons sont engendrés par

$$\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ \pm t \\ 1 \end{pmatrix}_{diag} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{diag}$$

Les photons font le tour de chacun des cercles de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. On voit à la figure 3.2 un exemple de photon dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{1,1}$.

Cas $n = 3$

Dans $\text{Ein}_{Min}^{2,1}$, les photons sont soit la compactification d'une droite de type lumière de $\text{Min}^{2,1}$, soit de la forme

$$P_A = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{Min} \cup \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{Min} \end{array} \middle| x, y, z \in \mathbf{R} \text{ sont fixés, } x^2 + y^2 - z^2 = 0 \text{ et } t \in \mathbf{R} \right\}.$$

Dans le deuxième cas, les photons sont entièrement compris dans $\text{Ein}^{2,1} \setminus \text{Min}^{2,1}$. On peut voir à la figure 3.3 trois photons dans ce modèle.

Ensuite, dans $\text{Ein}_{diag}^{3,2}$, on voit que les photons sont encore une combinaison de deux cercles, l'un dans \mathbf{S}^2 , l'autre dans \mathbf{S}^1 . Comme la projection que l'on utilise n'est pas conforme, les photons vont sur des courbes. On voit à la figure 3.4 deux exemples de photons.

3.1.2 Propriétés

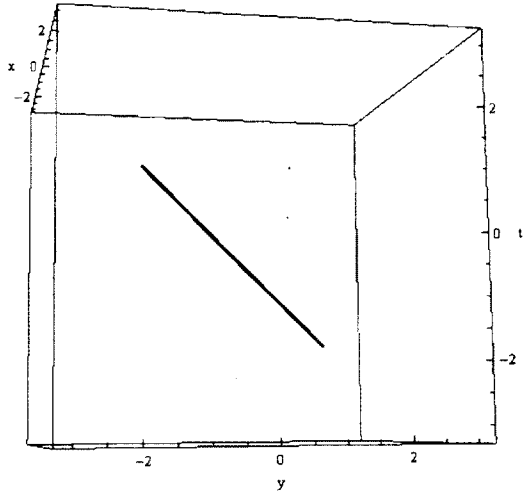
Lemme 3.1.2. *Les photons sont préservés par les isométries de $\text{Ein}^{n-1,1}$.*

Démonstration. Soit $P(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ un plan totalement isotrope dans $\mathbf{R}_M^{n,2}$, alors pour tout $\mathbf{y} \in P(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ et tout $N \in O(n, 2)$, on a

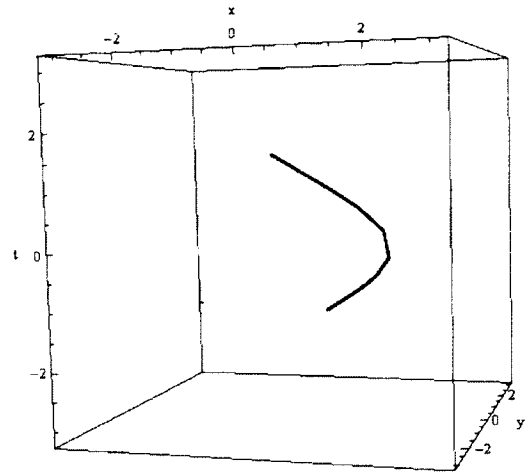
$$\begin{aligned} (N\mathbf{y})^t M (N\mathbf{y}) &= \mathbf{y}^t (N^t M N) \mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^t M \mathbf{y} = 0 \end{aligned}$$

De plus N est linéaire, donc $N(P(\mathbf{x}, \mathbf{x}'))$ est aussi un plan totalement isotrope dans $\mathbf{R}_M^{n,2}$. □

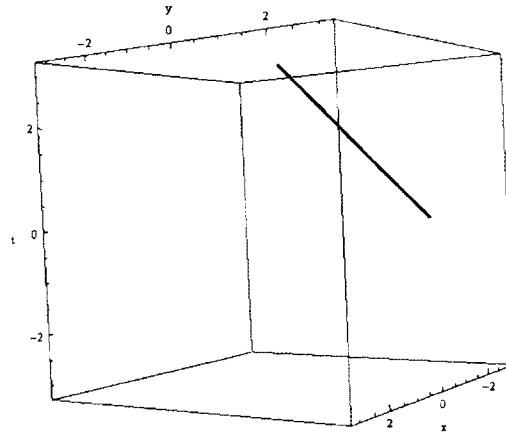
Théorème 3.1.3. *Les photons ne sont pas homotopiquement triviaux.*



(a) Un photon comme la compactification d'une droite de type lumière : $(0 -t t 0 1)_{Min}^t \cup (0 -1 1 0 0)_{Min}^t$.

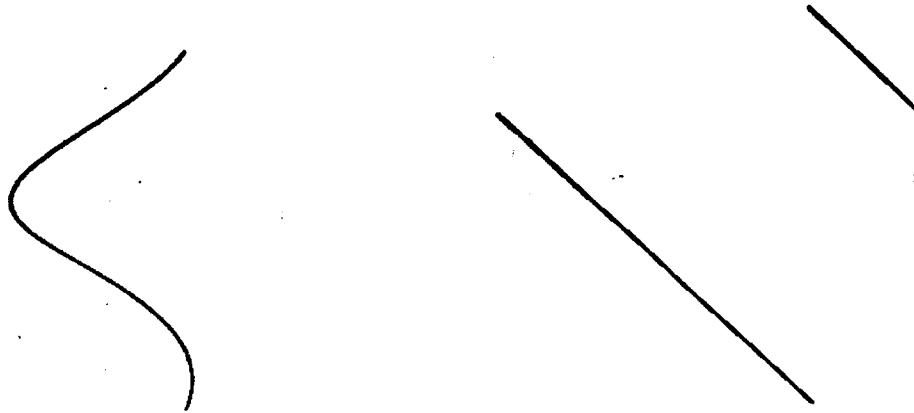


(b) Un photon comme la compactification d'une droite de type lumière : $(1 -t t 0 1)_{Min}^t \cup (0 -1 -1 0 0)_{Min}^t$.



(c) Un photon entièrement compris dans $\text{Ein}^{2,1} \setminus \text{Min}^{2,1}$: $(t t 0 1 0)_{Min}^t \cup (1 1 0 0 0)_{Min}^t$.

Figure 3.3 – Trois photons de $\text{Ein}_{Min}^{2,1}$.



$$(a) (t \ 1 \ 0 \ t \ 1)_{diag}^t \cup (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)_{diag}^t$$

$$(b) (t \ 0 \ 1 \ t \ 1)_{diag}^t \cup (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)_{diag}^t$$

Figure 3.4 – Deux photons de $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{-2,1}$.

Démonstration. En vertu du lemme 3.1.2, on considère sans perte de généralité que le photon est le projectifié de

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{diag}.$$

La fonction

$$t \mapsto \begin{pmatrix} tx_1 \\ tx_2 \\ \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(1-t^2)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{diag}$$

est continue pour tout t tel que $0 \leq t \leq 1$. Or, cette fonction déforme P vers

$$P' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{diag}$$

et on voit que la projectification de P' est $p \times \mathbf{S}^1$ pour un $p \in \mathbf{S}^{n-1}$, donc la courbe engendrée par P' n'est pas homotopiquement triviale, et par conséquent le photon engendré par P non plus.

Finalement, si $n = 2$, alors un photon est le projectifié de $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{diag}$. Soient $f(t)$ le chemin effectuant une fois le tour du premier cercle dans $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ et $g(t)$ le chemin effectuant une fois le tour du deuxième cercle. Alors,

$$\mathbf{x} \sim (f \circ g)(t)$$

n'est pas homotopiquement trivial. □

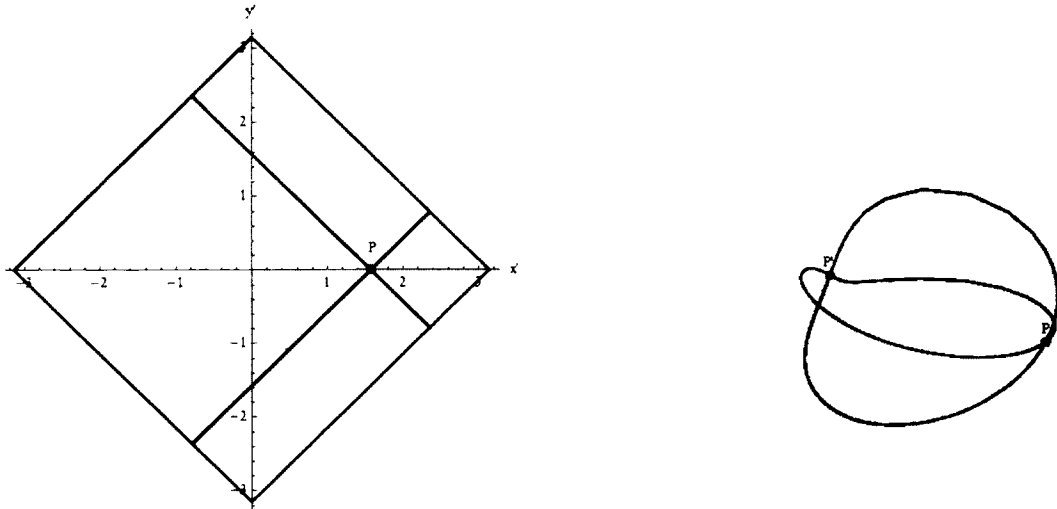
3.2 Cône de lumière

Le *cône de lumière* d'un point $p \in \text{Ein}_M^{n-1,1}$ est l'union des photons passant par p :

$$L(p) = \bigcup \left\{ l \text{ photon} \mid p \in l \right\}.$$

Il est équivalent de le définir comme étant la projectification de l'ensemble des vecteurs nuls orthogonaux à p dans $\mathbf{R}^{n,2}$:

$$L(p) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{PN}^{n,2} \mid \langle \mathbf{x}, p \rangle = 0 \right\}.$$



(a) $L(p)$ dans le diagramme de Penrose, $p = (1\ 0\ 1\ 1)_{Min}^t$.

(b) Le double revêtement d'un cône de lumière $L(p)$ sur le tore, $p = (1\ 0\ 1\ 0)_{diag}^t$.

Figure 3.5 – Deux cônes de lumière de l'univers d'Einstein.

Le point p est un point singulier de $L(p)$, c'est-à-dire que $L(p)$ n'est pas lisse en p . De plus, $L(p) \setminus p$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^{n-2} \times \mathbf{R}$.

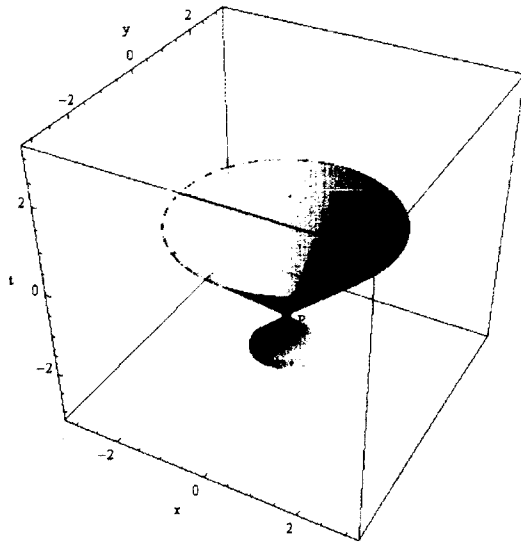
3.2.1 Exemples

Cas $n = 2$

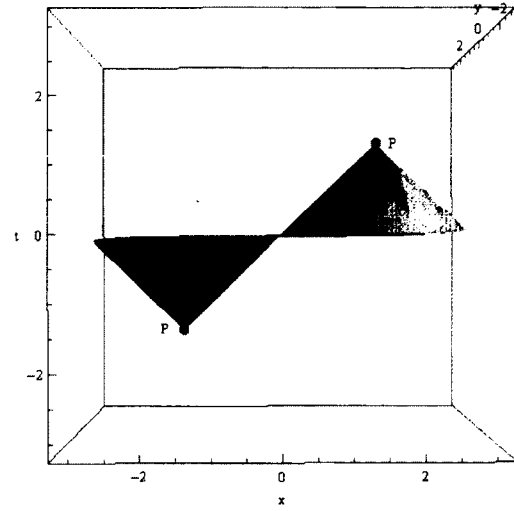
Si $n = 2$, un cône de lumière $L(p)$ contient deux photons s'intersectant en p . On voit à la figure 3.5 un exemple de cône de lumière $L(p)$ dans le diagramme de Penrose et le double revêtement d'un cône de lumière dans le tore.

Cas $n = 3$

Si $n = 3$, un cône de lumière $L(p)$ est homéomorphe à un tore pincé en p . On présente à la figure 3.6 deux cônes de lumière dans $\text{Ein}_{Min}^{2,1}$ et à la figure 3.7 les mêmes cônes dans



(a) $p = (0 \ 0 \ -1 \ -1 \ 1)_{Min}^t$



(b) $p = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)_{Min}^t$

Figure 3.6 – Deux cônes de lumière $L(p)$ dans le diagramme de Penrose.

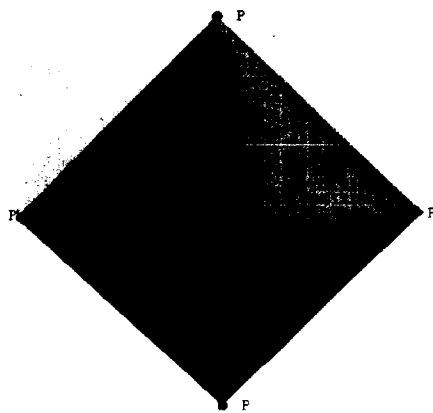
$\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$

3.3 Carte de Minkowski

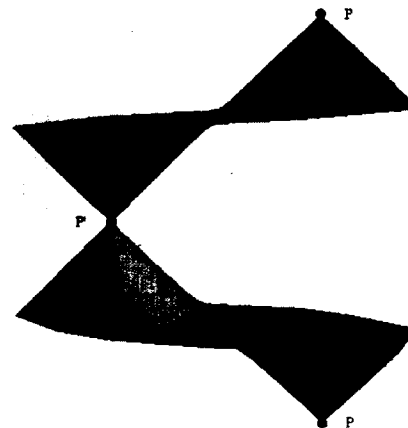
Définition 3.3.1. *Pour chaque point $p \in \text{Ein}^{n-1,1}$, on définit la carte de Minkowski avec sommet p comme étant le complément du cône de lumière défini par p .*

Si l'on considère la compactification de l'espace de Minkowski telle que présentée à la section 2.2.2, on remarque que les « points à l'infini » ont leur dernière coordonnée nulle dans $\mathbf{R}_{\Omega}^{n,2}$. Or, ces points forment un cône de lumière défini par le point impropre

$$p_{\infty} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ein}_{Min}^{n-1,1};$$



(a) $p = (0\ 0\ 1\ 1\ 0)_{diag}^t$



(b) $p = (1\ 0\ 0\ 1\ 0)_{diag}^t$

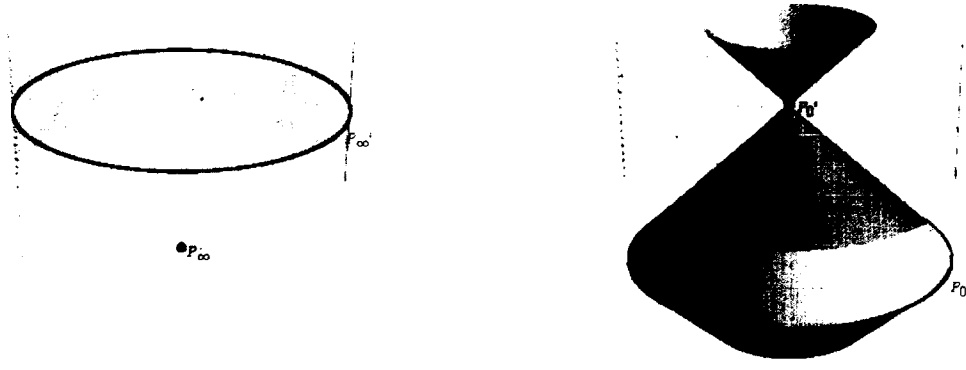
Figure 3.7 – Deux cônes de lumière $L(p)$ dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$.

$$\text{Ein}^{n-1,1} \setminus \text{Min}^{n-1,1} = L(p_\infty).$$

Considérer la carte de Minkowski en p revient à envoyer p vers le point impropre p_∞ de $\text{Min}^{n-1,1}$.

Dans la compactification d'une carte de Minkowski, certains points se démarquent. C'est le cas du point impropre

$$p_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{Min} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{diag}$$



(a) p_∞ dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$.

(b) p_0 et $L(p_0)$ dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$.

Figure 3.8 - p_0 et p_∞ dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$.

et de l'origine

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{Min} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{diag}$$

On a déjà décrit le cône de lumière de p_∞ . Le cône de lumière de p_0 dans $\text{Ein}_{Min}^{n-1,1}$ est l'ensemble des points de $\mathbf{PN}^{n,2}$ dont l'avant-dernière coordonnée est nulle. Ces points sont faciles à visualiser dans $\text{Ein}_{Min}^{2,1}$. On peut voir p_0 , p_∞ et $L(p_0)$ dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$ à la figure 3.8.

3.4 Hypersphère

Une *hypersphère* dans l'univers d'Einstein est la projectification de

$$\mathbf{x}^\perp \cap \mathbf{N}^{n,2},$$

où \mathbf{x} n'est pas de type lumière et

$$\mathbf{x}^\perp = \left\{ \mathbf{x}' \in \mathbf{R}^{n,2} \mid \langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle = 0 \right\}.$$

Si \mathbf{x} est de type espace, on dit que c'est une *hypersphère d'Einstein*. Dans ce cas, l'hypersphère est la compactification d'un espace de Sitter de dimension $n-1$ appartenant à $\text{Ein}^{n-1,1}$. Une hypersphère d'Einstein est de signature $(n-2, 1)$.

Si \mathbf{x} est de type temps, on dit que c'est une *hypersphère de type espace*. Dans ce cas, l'hypersphère est la compactification d'un hyperplan de dimension $n-1$ dans une carte de Minkowski de dimension n . Une hypersphère de type espace est définie positive.

3.4.1 Exemples

Cas $n = 2$

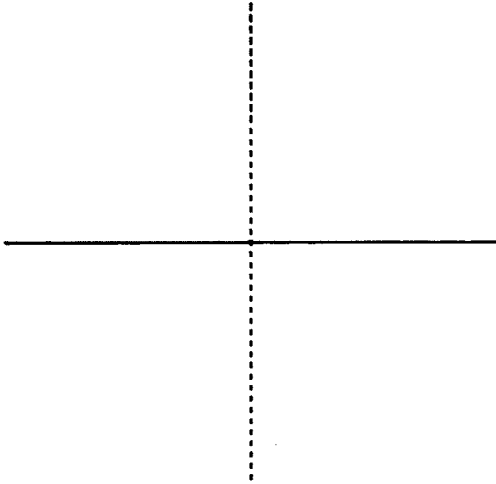
Lorsque $n = 2$, une hypersphère d'Einstein est homéomorphe à

$$\{p\} \times \mathbf{S}^1$$

pour $p \in \mathbf{S}^1$ et une hypersphère de type espace est homéomorphe à

$$\mathbf{S}^1 \times \{p\}$$

pour $p \in \mathbf{S}^1$.



(a) Deux hypersphères dans le diagramme de Penrose.



(b) Deux hypersphères dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{1,1}$.

Figure 3.9 – Deux hypersphères de $\text{Ein}^{1,1}$. En pointillé, une hypersphère d'Einstein : $(0 \ 1 \ \cos t \ \sin t)_{diag}^t$. En trait plein, une hypersphère de type temps : $(\cos t \ \sin t \ 0 \ 1)_{diag}^t$.

Pour le montrer, on remarque que dans $\mathbf{R}^{n,2}$ les vecteurs de type temps et espace sont tous deux préservés par $O(n, 2)$ et que la topologie d'un sous-espace est préservée par $O(n, 2)$. Ainsi, il suffit de considérer un cas particulier. Par exemple, considérons

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_{\Lambda}^{n,2},$$

l'hypersphère d'Einstein engendrée par \mathbf{x} est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}_{diag}$$

où $0 \leq t < 2\pi$. À la figure 3.9. on voit des exemples d'hypersphères dans $\text{Ein}^{1,1}$.

Cas $n = 3$

Lorsque $n = 3$, une hypersphère d'Einstein est homéomorphe à $\text{Ein}^{1,1}$, qui est un tore, et une hypersphère de type espace est homéomorphe à une sphère.

En effet, l'hypersphère d'Einstein engendrée par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{diag}$$

est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \\ \cos s \\ \sin s \end{pmatrix}_{diag},$$

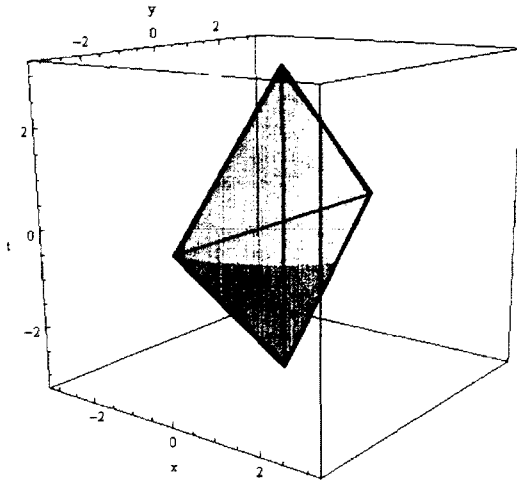
où $0 \leq t < 2\pi$, $0 \leq s < \pi$, $\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -t \\ s+\pi \end{pmatrix}$. Celle-ci est homéomorphe à $\text{Ein}^{1,1}$. De plus, l'hypersphère de type espace engendrée par

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{diag}$$

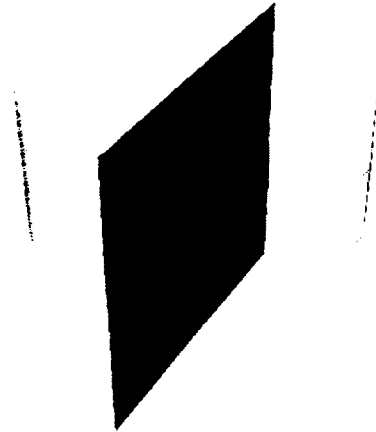
est

$$\begin{pmatrix} \cos t \cos s \\ \sin t \cos s \\ \sin s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{diag},$$

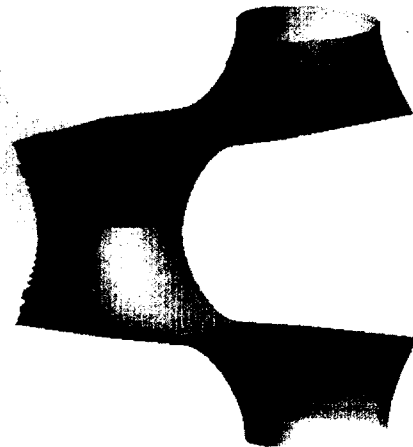
où $0 \leq t < 2\pi$, $0 \leq s < \pi$, qui est une sphère. À la figure 3.10, on voit des exemples d'hypersphères d'Einstein dans $\text{Ein}^{2,1}$ et à la figure 3.11 on voit des exemples d'hypersphères de type espace dans $\text{Ein}^{2,1}$.



(a) L'hypersphère engendrée par $(1\ 0\ 0\ 0\ 0)_{diag}^t$, $(0\ \cos t\ \sin t\ \cos s\ \sin s)_{diag}^t$ dans le diagramme de Penrose.

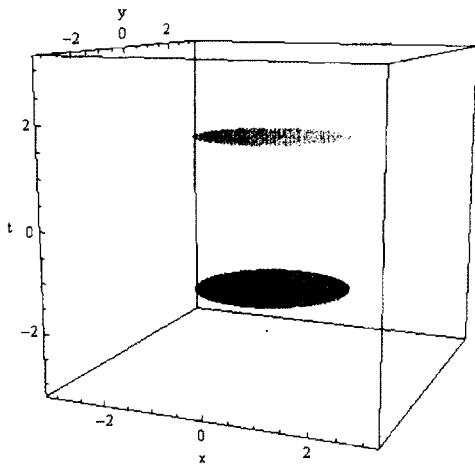


(b) L'hypersphère engendrée par $(1\ 0\ 0\ 0\ 0)_{diag}^t$, $(0\ \cos t\ \sin t\ \cos s\ \sin s)_{diag}^t$ dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$.

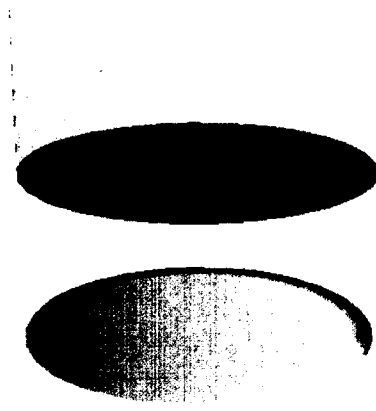


(c) L'hypersphère engendrée par $(2\ 0\ 0\ 1\ 0)_{diag}^t$, $(\cos t/\sqrt{3}\ \cos s\ \sin s\ 2\ \cos t/\sqrt{3}\ \sin t)_{diag}^t$ dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$.

Figure 3.10 – Des hypersphères d'Einstein.



(a) Dans le diagramme de Penrose.



(b) Dans $\widehat{E}in_{diag}^{2,1}$.

Figure 3.11 – L'hypersphère de type espace engendrée par $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)_{diag}^t$: $(\cos t \ \cos s \ \sin t \ \cos s \ \sin s \ 1 \ 0)_{diag}^t$.

Chapitre 4

Surfaces croches

4.1 Motivations

Soient V une variété, G un groupe agissant sur V et p un point de V .

Définition 4.1.1. *Un domaine fondamental de l'action d'un groupe G sur une variété V est un domaine fermé R de V tel que l'image de R par G couvre V et tel que l'identité est le seul élément g de G tel que*

$$\text{Int}(R) \cap \text{Int}(g(R)) \neq \emptyset.$$

On peut définir le domaine fondamental en fonction des orbites de l'action d'un groupe G (voir section 1.2). En effet, un domaine fondamental R possède au moins un point de chaque orbite. De plus, si une orbite intersecte R en son intérieur, alors cette orbite n'intersecte R qu'en un seul point.

Exemple 4.1.2. *Par exemple si $V = \mathbf{R}^2$ et*

$$G = \left\langle g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} \right\rangle,$$

alors

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \in [-1/2, 1/2], y \in \mathbf{R} \right\}$$

est un domaine fondamental de l'action de G sur V .

On veut borner des domaines fondamentaux dans une variété lorentzienne. Souvent, pour trouver de tels domaines, on utilise une hypersurface équidistante entre deux points. Par exemple, pour le domaine trouvé à l'exemple 4.1.2, R est borné par

$$\partial R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid d(x, 0) = d\left(x, g_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right)\right) \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid d(x, 0) = d\left(x, g_1^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right)\right) \right\},$$

où $g_1^{\pm 1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right)$ est la première coordonnée de $g^{\pm 1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right)$ et

$$d(x, x') = |x - x'|$$

est la distance euclidienne entre x et y . Or, on ne peut pas utiliser la même technique dans l'univers d'Einstein, car il n'existe pas de notion de distance dans une variété lorentzienne. Pour borner des domaines fondamentaux dans $\text{Min}^{2,1}$, Todd Drumm, dans sa thèse de doctorat [Dru90], a introduit les *plans croches* (voir figure 4.1). Ces derniers sont l'analogie lorentzien d'une surface équidistante dans $\text{Min}^{2,1}$.

Ensuite, Barbot, Charette, Drumm, Goldman et Melnick [BCD⁺08], suivant l'idée de Charles Frances [Fra02], ont défini une surface croche comme étant la compactification d'un plan croche. Les surfaces croches servent à borner des domaines fondamentaux dans $\text{Ein}^{n-1,1}$.

4.2 Plan croche

On peut penser à un plan croche \mathcal{C} comme étant une surface linéaire par morceaux. Cette surface est une variété topologique sans bord. Par contre, ce n'est pas une variété

lisse. Cette surface est composée de deux demi-plans, appelés les ailes, que l'on notera \mathcal{W}_1 et \mathcal{W}_2 ou \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 selon l'orientation, et deux morceaux de plans symétriques appelés la tige, \mathcal{S} . La tige est l'union de deux triangles infinis bornés par deux droites de type lumière, l_1 et l_2 , se touchant en un point p . Chacune des droites l_i borne aussi le demi-plan \mathcal{W}_i et le demi-plan \mathcal{M}_i . Un plan croche est uniquement déterminé par le point p et la direction normale \mathbf{x} de \mathcal{S} . La direction normale de \mathcal{S} est un vecteur orthogonal à \mathcal{S} , c'est-à-dire un vecteur \mathbf{x} tel que $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0$ pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{S}$. C'est un vecteur de type espace. On introduit dans cette section les plans croches. Pour un traitement plus détaillé, voir l'article de Drumm et Goldman [DG92].

4.2.1 Les ailes d'un plan croche

Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2,1}$ un vecteur de type espace. Alors \mathbf{x}^\perp est un plan de type $(1, 1)$, où \mathbf{x}^\perp est l'ensemble des vecteurs orthogonal à \mathbf{x} tel que défini à la section 3.4. Le plan \mathbf{x}^\perp a deux directions nulles. Soient $\mathbf{x}^-, \mathbf{x}^+ \in \mathbf{x}^\perp$ deux vecteurs de type lumière, tels que $x_3^\pm > 0$ et que $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}^-, \mathbf{x}^+\}$ forme une base orientée positivement de $\mathbf{R}^{2,1}$, voir la figure 4.2.

Soit $\mathbf{l} \in \mathbf{R}^{2,1}$ un vecteur de type lumière. Alors \mathbf{l}^\perp est un plan tangent au cône de lumière, tel que $\mathbf{l} \in \mathbf{l}^\perp$. La droite engendrée par le vecteur \mathbf{l} sépare \mathbf{l}^\perp en deux demi-plans :

$$dp^+(\mathbf{l}) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbf{l}^\perp \mid \mathbf{l} = \mathbf{y}^+ \right\} \text{ et } dp^-(\mathbf{l}) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbf{l}^\perp \mid \mathbf{l} = \mathbf{y}^- \right\}$$

comme on peut le voir à la figure 4.3.

Soient $p \in \text{Min}^{2,1}$ et $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2,1}$ un vecteur de type espace. Les ailes positivement orientées du plan croche déterminé par p et \mathbf{x} sont :

$$\mathcal{W}_1(p, \mathbf{x}) = p + dp^+(\mathbf{x}^-) \text{ et } \mathcal{W}_2(p, \mathbf{x}) = p + dp^+(\mathbf{x}^+).$$

Les ailes négativement orientées du plan croche déterminé par p et \mathbf{x} sont :

$$\mathcal{M}_1(p, \mathbf{x}) = p + dp^-(\mathbf{x}^-) \text{ et } \mathcal{M}_2(p, \mathbf{x}) = p + dp^-(\mathbf{x}^+).$$

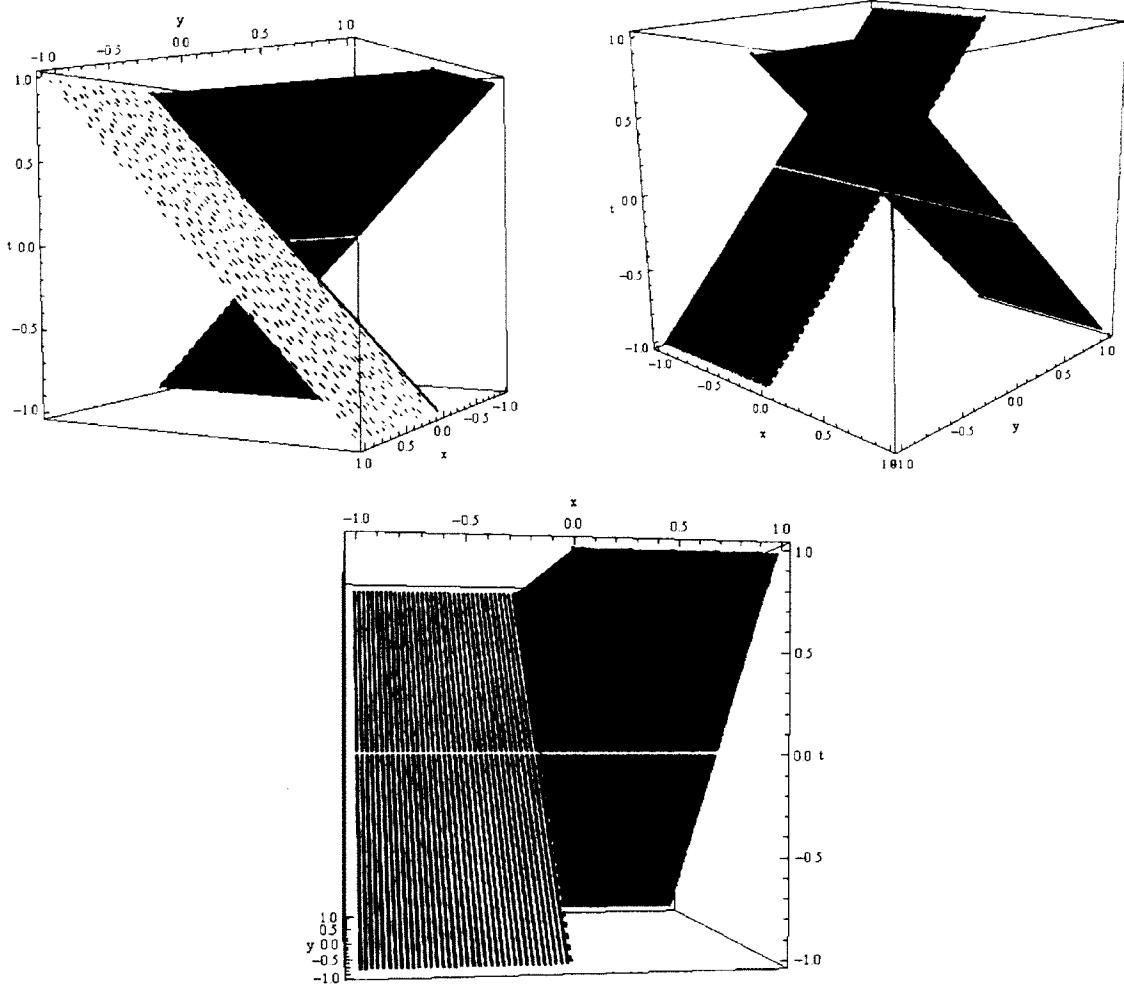


Figure 4.1 – Un plan croché dans $\text{Min}^{2,1}$ vu sous différents angles. On trouve en gris pâle la droite de type espace engendrée par \mathbf{x} , en noir avec un trait plein le photon l_1 , en noir en pointillé le photon l_2 , en gris la partie futur de \mathcal{S} , en gris pâle la partie passé de \mathcal{S} , en pointillé une aile \mathcal{W}_1 et en ligné l'autre aile \mathcal{W}_2 .

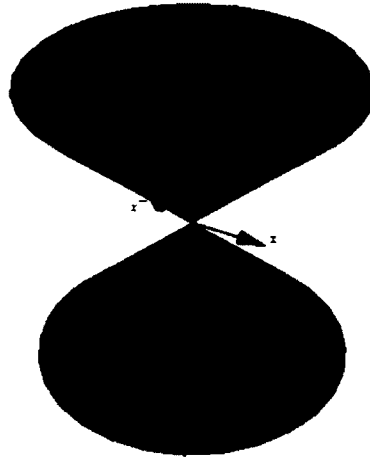


Figure 4.2 – \mathbf{x} est un vecteur de type espace. $\mathbf{x}^-, \mathbf{x}^+ \in \mathbf{x}^\perp$ et $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}^-, \mathbf{x}^+\}$ forme une base orientée positivement.

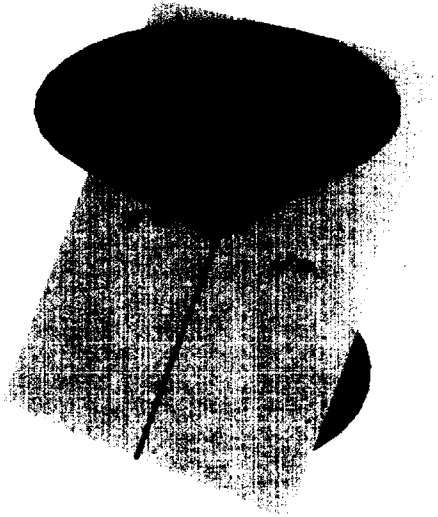


Figure 4.3 – La droite de type lumière engendrée par \mathbf{x} sépare \mathbf{x}^\perp en deux demi-plans.

4.2.2 La tige d'un plan croche

Soient $p \in \text{Min}^{2,1}$ et $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2,1}$ un vecteur de type espace. La *tige* d'un plan croche déterminé par p et \mathbf{x} est

$$\mathcal{S}(p, \mathbf{x}) = p + \left\{ \mathbf{y} \in \mathbf{x}^\perp \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \leq 0 \right\},$$

où \mathbf{x}^\perp est tel que défini à la section 3.4.

4.2.3 Plan croche

Soient $p \in \text{Min}^{2,1}$ et $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2,1}$ un vecteur de type espace. Un *plan croche positivement orienté* déterminé par p et \mathbf{x} est :

$$\mathcal{C}^+(p, \mathbf{x}) = \mathcal{W}_1(p, \mathbf{x}) \cup \mathcal{W}_2(p, \mathbf{x}) \cup \mathcal{S}(p, \mathbf{x}).$$

Un *plan croche négativement orienté* déterminé par p et \mathbf{x} est :

$$\mathcal{C}^-(p, \mathbf{x}) = \mathcal{M}_1(p, \mathbf{x}) \cup \mathcal{M}_2(p, \mathbf{x}) \cup \mathcal{S}(p, \mathbf{x}).$$

4.3 Surface croche

Définition 4.3.1. Soient $p \in \text{Min}^{2,1}$ et $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2,1}$ un vecteur de type espace. Une surface croche est un élément dans l'orbite par $SO(3, 2)$ de $\overline{c(\mathcal{C}^+(p, \mathbf{x}))}$.

Si on se restreint à la composante connexe de l'identité de $SO(3, 2)$, notée $SO^0(3, 2)$, alors on n'obtient que la moitié des surfaces croches, que l'on nommera les surfaces positivement orientées. Pour avoir l'autre moitié, on doit appliquer $SO^0(3, 2)$ à $\overline{c(\mathcal{C}^-(p, \mathbf{x}))}$. On nommera ces dernières des surfaces croches négativement orientées.

4.3.1 Description détaillée d'une surface croche

Une surface croche est déterminée par quatre points, que l'on notera p_0, p_1, p_2 et p_∞ et contient quatre photons, que l'on notera l_1, l_2, ϕ_1 et ϕ_2 . Les photons l_1 et l_2 passent par p_0 , tandis que ϕ_1 et ϕ_2 passent par p_∞ , enfin l_i et ϕ_i passent par $p_i, i \in \{1, 2\}$. De plus, une surface croche est l'union de quatre surfaces; la tige, qui possède deux parties disjointes \mathcal{S}_+ et \mathcal{S}_- et les ailes \mathcal{W}_1 et \mathcal{W}_2 . Chaque partie de la tige est bornée par la moitié de chacun des quatre photons et \mathcal{W}_i est bornée par l_i et ϕ_i . On voit un exemple de surface croche à la figure 4.7.

On débute avec un ensemble de quatre points

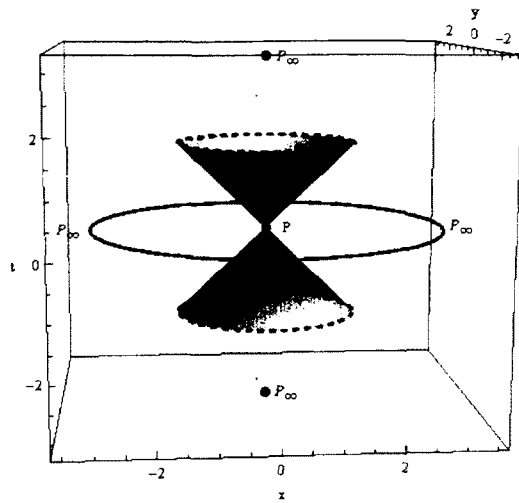
$$\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_\infty\},$$

tel que p_0 et p_∞ ne sont pas incidents et p_1 et p_2 sont sur le cercle de type espace à l'intersection des cônes de lumière de p_0 et de p_∞ , voir figure 4.4.

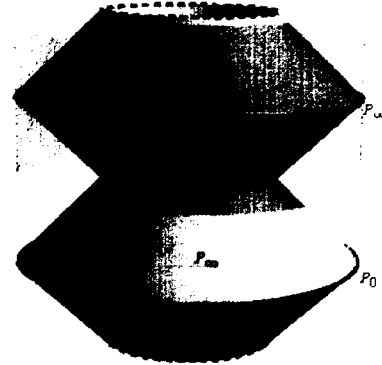
La tige

Soient $p, q \in \text{Ein}^{2,1}$ des points qui n'appartiennent pas au même photon. Le complément $\text{Ein}^{2,1} \setminus (L(p) \cup L(q))$ de l'union des cônes de lumière en p et en q a trois composantes connexes. Pour décrire ces composantes, on considère la carte de Minkowski de q et on analyse $L(p)$ comme un cône de lumière dans $\text{Min}^{2,1}$. Ce dernier découpe l'espace de Minkowski en trois composantes connexes, voir la figure 4.5 :

1. $FP(p)$ correspond à l'ensemble des points r de $\text{Min}^{2,1}$ tels que $r - p$ est un vecteur de type temps pointant vers le futur, c'est-à-dire des points r tels que la dernière coordonnée du vecteur tangent est positive ;
2. $FP(q)$ correspond à l'ensemble des points r de $\text{Min}^{2,1}$ tels que $p - r$ est un vecteur de type temps pointant vers le futur, c'est-à-dire des point r tels que la dernière coordonnée du vecteur tangent est positive ;



(a) Dans le diagramme de Penrose.



(b) Dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$

Figure 4.4 – L'intersection de deux cônes de lumière issus de points non-incidents. Les points sont en noir, leurs cônes de lumière en gris et leur intersection en pointillé.

3. La dernière composante connexe est composée du reste de $\text{Min}^{2,1}$.

Dans $\mathbf{R}^{3,2}$, les droites définissant p_0, p_1, p_2 et p_∞ sont indépendantes. Ainsi, elles engendrent un sous-espace de dimension quatre. C'est un sous-espace de type (2, 2). En effet, si on prend deux points non incidents, comme

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

les points sur l'intersection de leurs cônes de lumière sont de la forme :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0 \right\}.$$

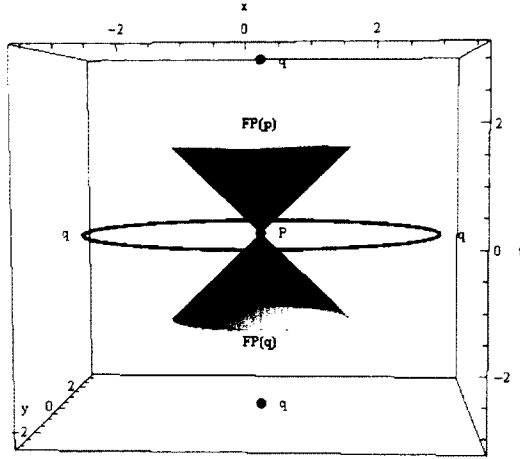


Figure 4.5 – Les trois composantes connexe de $\text{Min}^{2,1}$ privé d'un cône de lumière.

Peu importe quels deux points on choisit pour P_1 et P_2 , l'unique vecteur v tel que

$$\langle v, P_i \rangle = 0$$

pour $i \in \{0, 1, 2, \infty\}$ est de type espace. Comme $O(3, 2)$ peut envoyer tout point non incident vers P_0 et P_∞ , la projectivisation du cône de lumière de l'espace engendré par p_0, p_1, p_2 et p_∞ est une hypersphère d'Einstein :

$$\text{Ein}^{1,1}(\mathcal{P}).$$

On définit la tige d'un plan croche engendrée par \mathcal{P} par

$$\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \text{Ein}^{1,1}(\mathcal{P}) \cap (FP(p_0) \cup FP(p_\infty)).$$

Les ailes

Les photons ϕ_i et l_i coupent le cône de lumière de p_i , $i \in \{1, 2\}$, en deux parties, voir la figure 4.6. Il existe deux façons de choisir ces demi-cônes de lumière pour qu'ils ne s'intersectent pas, une donnant une surface croche positivement orientée et l'autre donnant une surface croche négativement orientée.

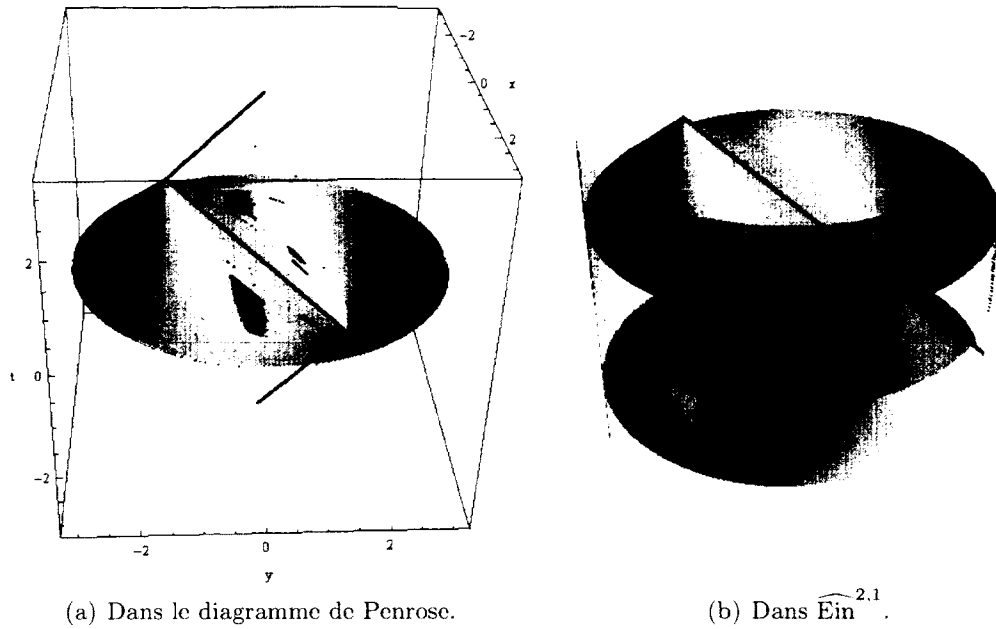


Figure 4.6 – Le cône de lumière de p_i en gris coupé par les deux photons, l_i et ϕ_i , en noir.

4.3.2 Exemple

Comme l'action de $SO(n, 2)$ est transitive sur les surfaces croches, on pourra restreindre plusieurs preuves à une surface croche. On définit donc dès maintenant une surface croche que l'on réutilisera. On considère la compactification du plan croche centré à l'origine de l'espace de Minkowski, avec

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Min}^{2,1},$$

que l'on note SC . Cette surface croche est définie comme suit :

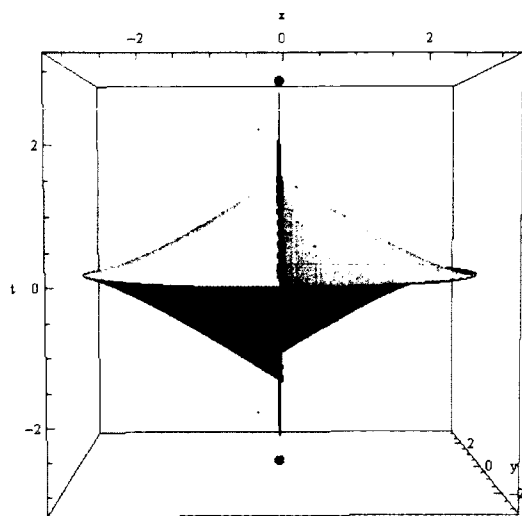
$$\begin{aligned}
p_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{Min} & p_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{Min} \\
p_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{Min} & p_\infty &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{Min} \\
l_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{Min} \mid t \in \hat{\mathbf{R}} \right\} & l_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{Min} \mid t \in \hat{\mathbf{R}} \right\} \\
\phi_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{Min} \mid t \in \hat{\mathbf{R}} \right\} & \phi_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{Min} \mid t \in \hat{\mathbf{R}} \right\} \\
S_+ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ y^2 - z^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{Min} \mid y, z \in \hat{\mathbf{R}}, y^2 - z^2 \leq 0, z \geq 0 \right\} \\
S &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ y^2 - z^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{Min} \mid y, z \in \hat{\mathbf{R}}, y^2 - z^2 \leq 0, z \leq 0 \right\} \\
W_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -y \\ y \\ x^2 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}_{Min} \mid x, y \in \hat{\mathbf{R}}, x \geq 0 \right\} \\
W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \\ x^2 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}_{Min} \mid x, y \in \hat{\mathbf{R}}, x \leq 0 \right\}
\end{aligned}$$

On peut voir SC représentée dans deux modèles à la figure 4.7.

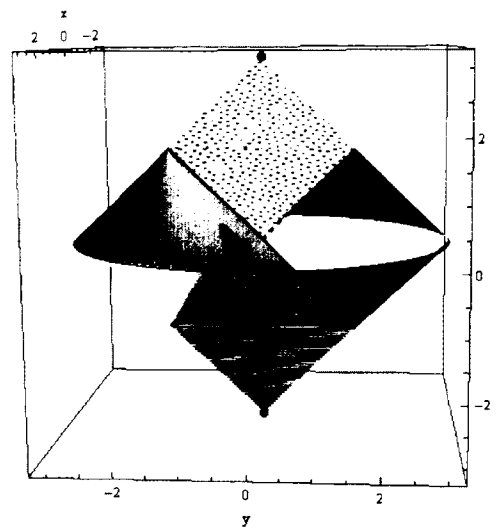
4.4 Propriétés

Lemme 4.4.1. *Les surfaces croches ne sont pas orientables.*

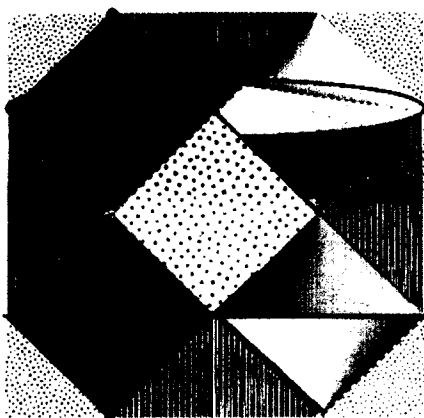
Démonstration. Pour montrer que les surfaces croches ne sont pas orientables, il suffit de montrer que SC n'est pas orientable. Pour ce faire, on montre qu'il existe une trajectoire qui reverse l'orientation dans SC .



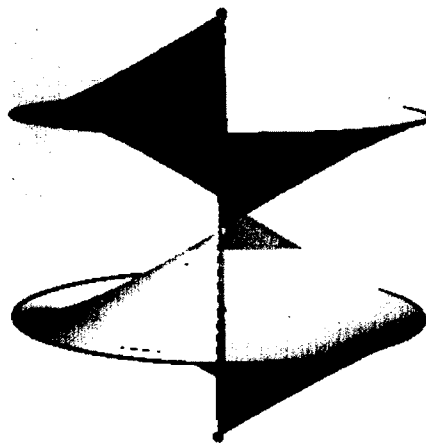
(a) Dans le diagramme de Penrose.



(b) Dans le diagramme de Penrose.



(c) Dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$



(d) Dans $\widehat{\text{Ein}}_{diag}^{2,1}$

Figure 4.7 – SC représentée dans deux modèles. Le point p_0 est en gris, p_1 est en gris foncé, p_2 est en gris pâle, p_∞ est en noir, l_1 est en noir avec un trait plein, l_2 est en noir en pointillé, ϕ_1 est en gris avec un trait plein, ϕ_2 est en gris en pointillé, \mathcal{S} est en pointillé et ligné, \mathcal{W}_1 est en gris et \mathcal{W}_2 est en gris pâle.

Cette trajectoire suivra le photon

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{Min} .$$

Dans ce cas, $P \in \mathcal{S}$ et $P \in \mathcal{W}_2$. On construira trois familles de chemins dont l'union est continue et l'orientation n'est pas conservée. Les chemins qui sont dans la carte de Minkowski du point impropre correspondent à des vecteurs de l'espace de Minkowski.

Tous les chemins considérés ont pour point de départ un point de P . De façon continue, les chemins changeront de côté.

D'abord, soit \mathcal{F} la famille composée des chemins de \mathcal{S}

$$c_t : [0, 1] \rightarrow SC$$

$$s \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t - s \\ t + s \\ -4st \\ 1 \end{pmatrix}_{Min}$$

où $t \in \hat{\mathbf{R}}_+^*$. On a que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0 \\ t - s \\ t + s \\ -4st \\ 1 \end{pmatrix}_{Min} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -4s \\ 0 \end{pmatrix}_{Min} .$$

De plus, lorsque $t = 0$, on retrouve dans \mathcal{F} le chemin c_0

$$c_0 : [0, 1] \rightarrow SC$$

$$s \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -s \\ s \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans W_2 . on considère la famille de chemins \mathcal{F}'

$$c'_t : [0, 1] \rightarrow SC$$

$$s \mapsto (1-s) \begin{pmatrix} 0 \\ -(t+1) \\ -(t+1) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{Min} + s \begin{pmatrix} -2(t+1) \\ -(t+1)^2 \\ -(t+1)^2 \\ 4(t+1)^2 \\ 1 \end{pmatrix}_{Min}$$

où $t \in \hat{\mathbf{R}}_+^-$. Comme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c'_t(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -4s \\ 0 \end{pmatrix}_{Min},$$

$\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ est une famille de chemins continue.

Pour \mathcal{F}' , lorsque $t = 0$, on a le chemin c'_0 partant de

$$c'_0 : [0, 1] \rightarrow SC$$

$$s \mapsto (1-s) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{Min} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}_{Min}$$

Ajoutons à $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ la famille $\mathcal{F}'' \subset W_2$ constituée des chemins

$$c''_t : [0, 1] \rightarrow SC$$

$$s \mapsto (1-s) \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{Min} + s \begin{pmatrix} -2 \\ t \\ t \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}_{Min}$$

où $-1 \leq t \leq 0$. Dans ce cas, lorsque $t = -1$, le chemin de \mathcal{F}'' est $c'_0 \in \mathcal{F}'$, mais lorsque $t = 0$, le vecteur a le même point de départ que c_0 sur P , mais son point d'arrivée est de

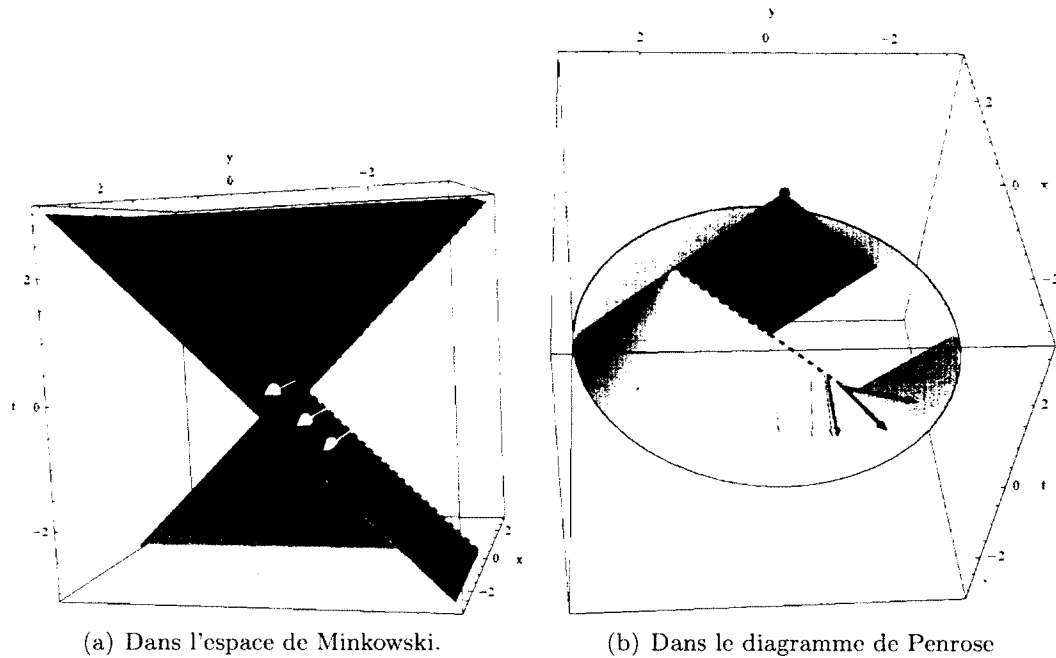


Figure 4.8 – Les vecteurs de \mathcal{F} sont en noir, ceux de \mathcal{F}' sont en gris foncé et finalement ceux de \mathcal{F}'' sont en gris pâle.

l'autre côté de P . L'orientation est donc renversée. On peut voir à la figure 4.8 les trois familles de chemins. □

Théorème 4.4.2. *Une surface croche est homéomorphe à une bouteille de Klein.*

Démonstration. On a une décomposition en polygones d'une surface croche (SC). Le nombre de points de cette décomposition est $p = 4$, le nombre de segments est $l = 8$ et le nombre de faces est $f = 4$. On peut évaluer la caractéristique d'Euler de SC :

$$\chi(SC) = p - l + f = 0.$$

On conclut, en vertu du théorème de classification des surfaces compactes et du lemme 4.4.1 que SC est homéomorphe à une bouteille de Klein. □

Définition 4.4.3. Soit T un espace topologique. Un sous-espace connexe $S \subset T$ a deux côtés s'il existe un voisinage $U \subset T$ de S tel que $(T \setminus S) \cap U$ n'est pas connexe.

Théorème 4.4.4. Une surface croche a deux côtés.

Démonstration. Sans perte de généralité, on montre que SC a deux côtés. On effectue la preuve dans la base de Ω . On se place dans la carte de Minkowski $C(p_\infty)$ de p_∞ . On a que

$$SC \cap C(p_\infty) = p_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup W_1 \cup W_2 \cup \mathcal{S}.$$

Cette surface a deux côtés dans $\text{Min}^{2,1}$. Pour que SC possède deux côtés, les jointures en ϕ_1 et en ϕ_2 doivent conserver les côtés. Pour le prouver, on utilise une stratégie semblable à celle utilisée pour démontrer le lemme 4.4.1.

On considère un chemin partant de W_1 :

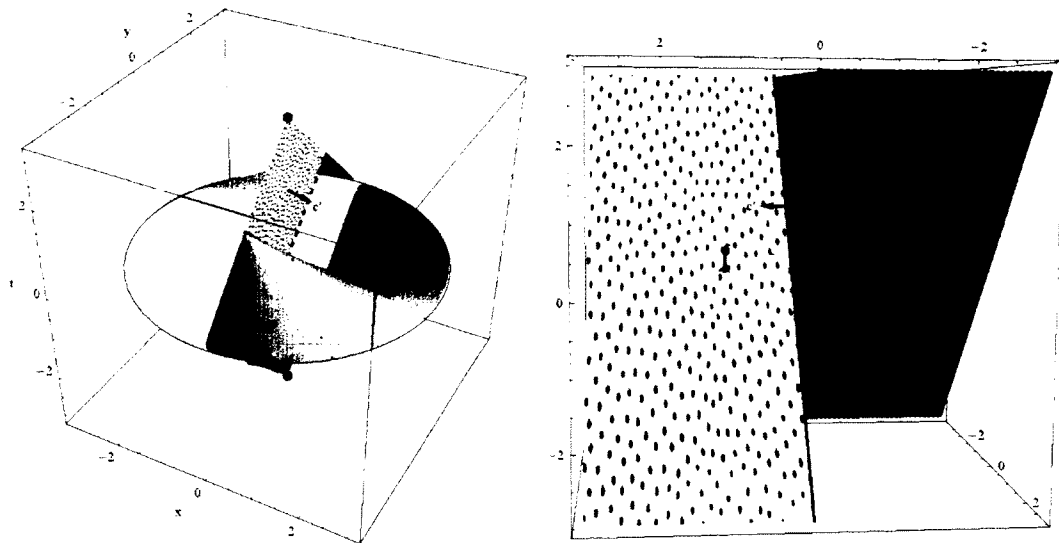
$$c : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \text{Ein}^{2,1}$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{Min}}.$$

Encore une fois ce chemin correspond à un vecteur dans la carte de Minkowski du point impropre. On déplacera ce chemin en passant par ϕ_i pour un $i \in \{1, 2\}$. Pour ce faire, on se place dans le référentiel de la carte de Minkowski de p_0 avec la transformation

$$\iota = \begin{pmatrix} 1_3 & \mathbf{0}_{1,3} & \mathbf{0}_{1,3} \\ \mathbf{0}_{3,1} & 0 & 1 \\ \mathbf{0}_{3,1} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette transformation fixe c et envoie l_i sur ϕ_i . On envoie donc c de façon continue, en



(a) Dans le diagramme de Penrose.

(b) Dans $\text{Min}^{2,1}$.

Figure 4.9 - c , c' et $\iota c'$.

passant par l_1 ou l_2 , sur un chemin partant de S_+ :

$$c' : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \text{Ein}^{2,1}$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \\ t^2 - 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{Min}}$$

On applique de nouveau ι et comme

$$\iota c' = \begin{pmatrix} \frac{t}{t^2-1} \\ 0 \\ \frac{1}{t^2-1} \\ \frac{1}{t^2-1} \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{Min}} \quad \text{où } 0 \leq t \leq \frac{1}{2},$$

est du même côté de SC que le chemin c dans la carte de Minkowski du point impropre. (voir figure 4.9). On conclut que SC a deux côtés.

□

4.5 Applications

On montre quelque chose d'un peu plus fort que le théorème 4.4.4. En effet, on a montré qu'une surface croche sépare l'univers d'Einstein en deux parties non connexes. On peut développer une méthode pour obtenir des surfaces croches disjointes. C'est ce que font Charette, Francœur et l'auteur de ce mémoire dans un article en préparation [CFL]. Deux surfaces croches ainsi obtenues bornent un domaine.

Pour obtenir deux surfaces croches disjointes, on débute avec deux plans croches, C_1 et C_2 , centrés à l'origine et ayant l'origine comme unique point d'intersection. On considère la compactification de ces plans croches, \overline{C}_1 et \overline{C}_2 . Alors,

$$\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 = \{p_0, p_\infty\}.$$

Pour obtenir des surfaces croches disjointes, on va « décoller » ces deux surfaces croches à l'aide de transformations judicieusement choisies. En bref, on déplace les surfaces croches à chacun des deux points d'intersection dans la direction opposée à l'autre surface croche.

On utilise ensuite la technique que l'on a développée pour décoller ces surfaces croches afin d'identifier des domaines fondamentaux pour des groupes de Schottky.

Définition 4.5.1 ([Fra02]). *Un groupe de Schottky $\gamma = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ agissant sur une variété V est un groupe tel qu'il existe $2n$ ouverts dans V ; $U_1^-, U_1^+, \dots, U_n^-, U_n^+$ tel que*

$$g_i \left(V \setminus \overline{U_i^-} \right) = U_i^+.$$

Ayant un domaine fondamental, on sait qu'un groupe de Schottky agit de façon proprement discontinue. De plus, grâce au lemme du ping pong, qui dit qu'un groupe de Schottky est libre, on peut montrer qu'un tel groupe agit de façon libre et proprement discontinue.

Conclusion

L'univers d'Einstein $\text{Ein}^{n-1,1}$ de dimension n est le projectif du cône de lumière de $\mathbf{R}^{n,2}$. C'est une variété lorentzienne conformément plate. On s'intéresse particulièrement à cet espace, parce que son revêtement universel est un modèle pour l'ensemble des variétés lorentziennes conformément plates. C'est-à-dire que les variétés lorentziennes sont toutes localement conformément équivalentes à $\text{Ein}^{n-1,1}$.

Une façon d'obtenir des variétés lorentziennes passe par les groupes kleinien. Un groupe $G \subset PO(n, 2)$ est dit kleinien s'il est un sous-groupe discret agissant de façon proprement discontinue sur un ouvert non-vide de $\text{Ein}^{n-1,1}$ [Fra02]. Dans ce cas, $\text{Ein}^{n-1,1}/G$ est une variété lorentzienne.

Une façon de montrer qu'un groupe est kleinien est d'en exhiber un domaine fondamental. Pour borner des domaines fondamentaux, on utilise des surfaces croches [BCD⁺08]. Les surfaces croches sont la compactification des plans croches de l'espace de Minkowski. Ces derniers bornent des domaines fondamentaux dans l'espace de Minkowski.

Le but de ce mémoire était de définir les surfaces croches, d'en présenter certaines propriétés et de discuter brièvement de la façon dont ces surfaces servent à identifier des groupes kleinien. Pour ce faire, dans le premier chapitre, on a survolé le travail ayant déjà été effectué dans ce sens, et on a discuté des motivations pour étudier l'univers d'Einstein et les surfaces croches.

Au deuxième chapitre, on a introduit l'univers d'Einstein. On a présenté plusieurs façons conceptuelles et paramétriques de représenter cet espace. En particulier, on a montré que $\text{Ein}^{n-1,1} \cong (\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1) / \pm$, que $\text{Ein}^{n-1,1} \cong \overline{\text{Min}^{n-1,1}}$ et que le revêtement double de $\text{Ein}^{n-1,1}$ est isomorphe au bord conforme de l'espace anti de-Sitter. De plus, on a discuté quelques propriétés élémentaires de $\text{Ein}^{n-1,1}$.

Au troisième chapitre, on a défini des objets importants de $\text{Ein}^{n-1,1}$. On en a présenté certaines propriétés, surtout en dimensions deux et trois.

Finalement, au quatrième chapitre, on a discuté des surfaces croches de $\text{Ein}^{2,1}$. On a présenté ces surfaces comme étant la compactification des plans croches de l'espace de Minkowski. De plus, on a offert une description détaillée des surfaces croches dans le langage de l'univers d'Einstein, en tentant de faire abstraction de l'espace de Minkowski plongé dans $\text{Ein}^{2,1}$. Finalement, on a prouvé des propriétés élémentaires des surfaces croches.

Toutes les figures de ce mémoire sont de l'auteur et ont été générées avec le logiciel MATHEMATICA. De plus, les preuves de ce mémoire sont originales, sauf la preuve du théorème 4.4.2 qui suit celle de [BCD⁺08].

Bibliographie

- [BCD⁺08] Thierry Barbot, Virginie Charette, Todd Drumm, William M. Goldman, and Karin Melnick. A primer on the (2+1) Einstein universe. *Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry*, 2008.
- [CFL] Virginie Charette, Dominik Francocur, and Rosemonde Lareau-Dussault. Fundamental polyhedra in the Einstein Universe. En préparation.
- [DG92] Todd A. Drumm and William M. Goldman. The Geometry of Crooked Planes. *Topology*, 1992.
- [d'I92] Ray d'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Clarendon Press, 1992.
- [Dru90] Todd A. Drumm. *Fundamental polyhedra for Margulis space-time*. PhD thesis, University of Maryland, 1990.
- [Fra02] Charles Frances. *Géométrie et dynamique lorentziennes conformes*. Thèse de doctorat, L'École normale supérieure de Lyon, décembre 2002.
- [Fra03] Charles Frances. The conformal boundary of Margulis space-times. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336*, 2003.
- [Lee06] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2006.

[Ros12] Clara Rossi Salvemini. *Espace-temps globalement hyperboliques conformément plats*. Thèse de doctorat. Université d'Avignon et des pays du Vaucluse, mai 2012.