Orbite de la Terre et durée des saisons

Astronomie, mathématiques et un peu de programmation dans un tableur

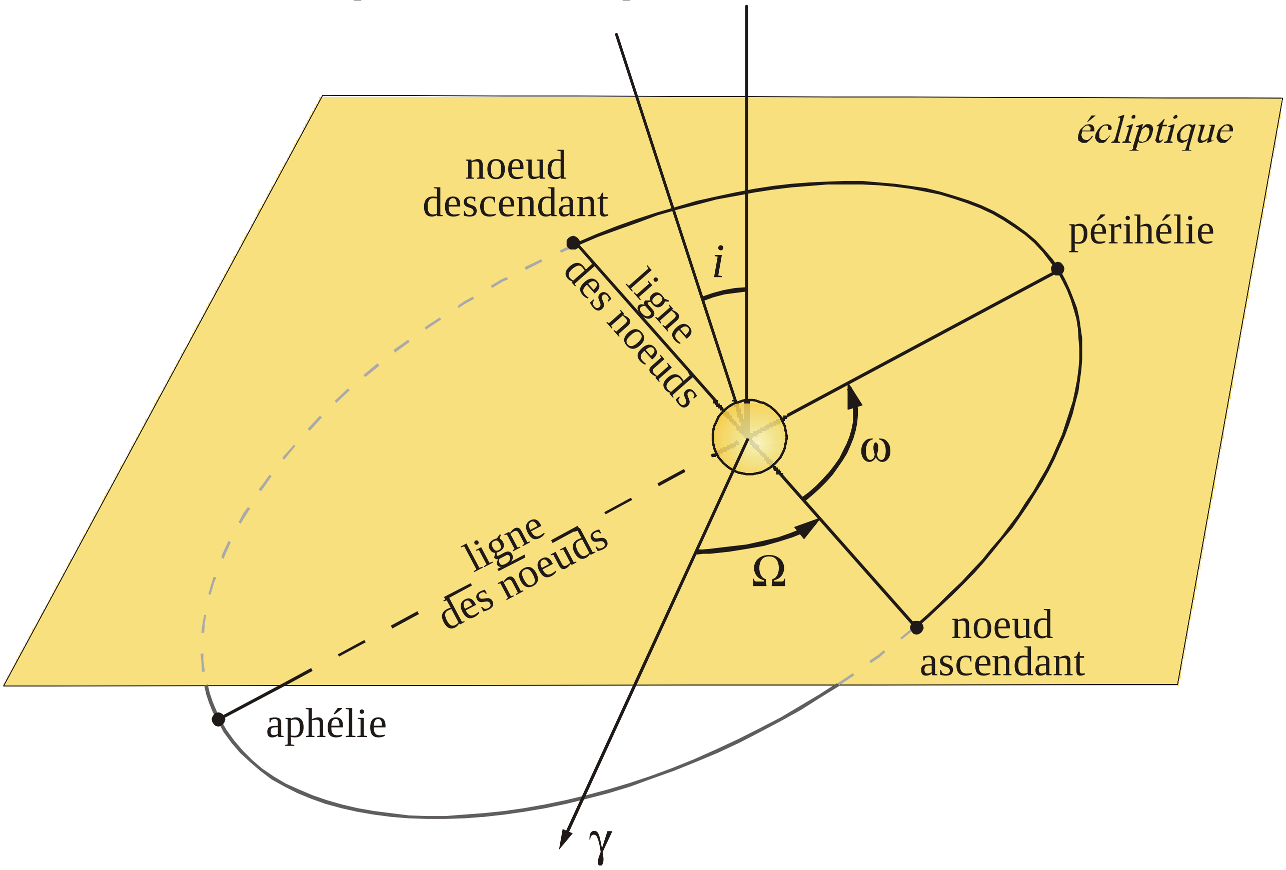
Résumé : *Les durées des saisons sont inégales et influent l'ensoleillement reçu en différentes saisons. Comment recalculer la durée des saisons à partir des éléments de l'orbite de la Terre ou d'une planète.*

Connaissant les élément de l'orbite d'une planète, a, e, i, Ω, ϖ, ω, il est possible de retrouver la durée des saisons avec une simple calculette. Mais comme les paramètres des orbites sont variables et vont faire changer les durées et les ensoleillements, l'usage d'un tableur devient très intéressant pour tabuler les calculs et tracer les résultats.

Dans un premier article nous établirons les quelques formules à utiliser et l'application à la Terre actuelle. Dans un deuxième nous ferons varier les paramètres de l'orbite de la Terre. Enfin dans un troisième partie, nous nous occuperons de Mars que l'on peut extrapoler à d'autres planètes.

Dans ce qui suit, nous supposerons en première approximation, que les orbites des planètes sont régies par les lois de Képler et ne sont donc pas perturbées, sur un intervalle de temps court (par rapport aux ères géologiques).

I - Les éléments caractéristiques de l'orbite d'une planète



Pour connaître à tout instant la position d'une planète par rapport au Soleil, il faut posséder les éléments de l'orbite :

Dans le plan de l'orbite de la planète :

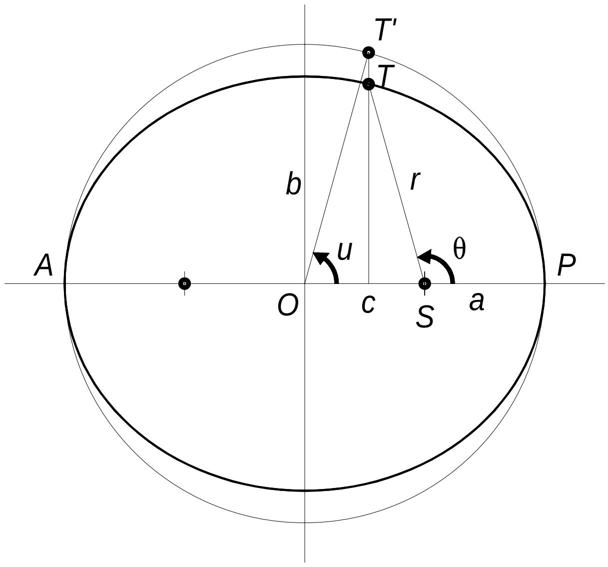
- a demi-grand axe
- e excentricité de l'orbite
- P période sidérale
- t_0 temps du passage au périhélie

Du plan de l'orbite par rapport à l'écliptique :

- i inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique
- Ω longitude du noeud ascendant
- ω angle noeud ascendant périhélie ou $\varpi=\omega+\Omega$.

Pour la Terre, $\Omega = 0$

Si θ est l'angle entre la direction du périhélie et la planète, la distance au Soleil est



$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

Pour connaître r et θ en fonction de t, on utilise deux variables intermédiaires u l'*anomalie excentrique* et M l'*anomalie moyenne*, angle au centre d'une planète fictive qui accomplirai l'orbite à vitesse angulaire constante

$$M = \frac{2\pi}{P}(t-t_0) = \frac{360}{P}(t-t_0) \qquad (1)$$

Passer de θ à u est simple par la formule

$$\tan\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2} \qquad (2)$$

Et entre u et M (u et M en radians) on a :

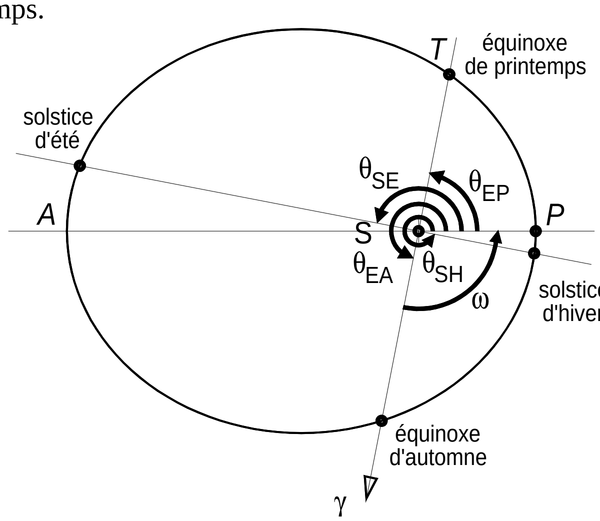
$$u - e\sin u = M \qquad (3)$$

Ces équations vont permettent pour les positions θ des équinoxes et solstices d'en calculer les instants.

II - Positions des équinoxes et des solstices

Pour la Terre tout est simple, à l'équinoxe de printemps, le Soleil est au point γ et l'on connaît la position du périhélie. On peut calculer l'angle de équinoxe de printemps.

$$\theta_{EP} = 180 - \omega$$



Les autres positions s'en déduisent,

Solstice d'été

$\theta_{SE} = \theta_{EP} + 90°$ (modulo 360)

Equinoxe d'automne

$\theta_{EA} = \theta_{SE} + 90°$ (modulo 360) (4)

Solstice d'hiver

$\theta_{SH} = \theta_{EA} + 90°$ (modulo 360)

A l'aide des formules (1), (2) et (3), on calcule les temps de passages aux différents points par rapport au passage au périhélie et on déduit la durée des saisons.

Pour chaque position, à partir θ_{EP}, θ_{SE}, θ_{EA}, θ_{SH}, on calcule :

l'angle u (équation 2), M (équation 3) et les temps t_{EP}, t_{SE}, t_{EA}, t_{SH} (équation 1) qui sont les temps de passage aux quatre positions remarquables.

La durée des saisons se fait par différences. Si celle-ci est négative, on ajoute P (365,25j) pour rendre la valeur positive.

III - Éléments de l'orbite de la Terre

a = 149 598 034 km demi-grand axe

e = 0,0167 excentricité de l'orbite

P = 365,25 j période sidérale

ω = 102,9373˚ angle noeud ascendant périhélie ou $\varpi=\omega+\Omega$.

t_0 temps du passage au périhélie, se calcule avec ω, mais peut être pris à 0.

IV - Programmation

La programmation des formules est simple. Il faut se souvenir que les angles sont en radians dans les fonctions trigonométriques.

Pour les angles, il y a lieu de se ramener à l'intervalle 0-360˚, ainsi que pour les durées qui sont à l'intérieur de la période P (365,25 jours).

IV - Distances Soleil Terre aux solstices, ensoleillement.

Les changements climatiques sont en partie conditionnés par la différence des ensoleillements aux cours des saisons et surtout la différence entre l'ensoleillement été-hiver. Il est intéressant de calculer le rapport des énergies reçues en fonction des variations des distances entre l'été et l'hiver.

Comme l'énergie reçue varie avec l'inverse du carré des distances

$$\frac{E_{SH}}{E_{SE}} = \frac{\frac{1}{r^2{}_{SH}}}{\frac{1}{r^2{}_{SE}}} = \frac{r^2{}_{SE}}{r^2{}_{SH}}$$

Comme on calcule les θ pour les différentes positions, les r sont calculables immédiatement. Le rapport est trouvé.

Les énergies reçues en un point de la Terre sont fonction de l'inclinaison des rayons du Soleil donc de la latitude φ. On pourra comparer les énergies reçues sur les deux hémisphères.

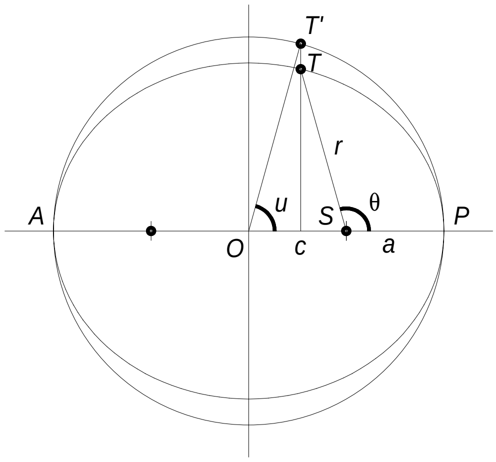
V - Fichier Excel

Les calculs et la programmation des formules se trouvent dans le fichier *durees_saisons.xls* disponible sur le site

http://www-obs.univ-lyon1.fr/labo/fc/cdroms/cdrom2007/cd_tls2007/index.htm#a11

Annexe

Démonstration de la formule reliant l'anomalie vraie θ à l'anomalie excentrique *u*



On pose $a = OP$, $c = OS$, $e = c/a$

$$r\cos\theta = a(\cos u - e)$$

car du cercle et de l'ellipse on tire :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y'^2}{a^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \qquad \frac{y'^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

7

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,y'^2 = \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)y'^2 = \left(1 - e^2\right)y'^2$$

$$r\sin\theta = a\sqrt{1 - e^2}\ \sin u$$

En combinant les expressions de $r\cos\theta$ et $r\sin\theta$ on obtient :

$$r = a\left(1 - e\cos u\right)$$

$$\cos\theta = \frac{a\left(\cos u - e\right)}{a\left(1 - e\cos u\right)} \qquad\qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{1 - e^2}\sin u}{1 - e\cos u}$$

On exprime $\sin\theta$ et $\cos\theta$ en fonction de l'arc moitié ainsi que $\cos u$ dans les deux formules.

$$r\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = a\left(\cos u - e\right)$$

$$r\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right) = a\left(1 - e\cos u\right)$$

Par addition et soustraction on obtient :

$$r\cos^2\frac{\theta}{2} = a\left(\cos u - e + 1 - e\cos u\right) = a\left(\cos^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{u}{2} - e\left(\cos^2\frac{u}{2} + \sin^2\frac{u}{2}\right) + \cos^2\frac{u}{2} + \sin^2\frac{u}{2} - e\left(\cos^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{u}{2}\right)\right)$$

$$r\sin^2\frac{\theta}{2} = a\left(1 - e\cos u - \cos u + e\right) = \left(\cos^2\frac{u}{2} + \sin^2\frac{u}{2} - e\left(\cos^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{u}{2}\right) - \left(\cos^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{u}{2}\right) + e\left(\cos^2\frac{u}{2} + \sin^2\frac{u}{2}\right)\right)$$

$$r\cos^2\frac{\theta}{2} = 2a\cos^2\frac{u}{2}\left(1 - e\right)$$

$$r\sin^2\frac{\theta}{2} = 2a\sin^2\frac{u}{2}\left(1 + e\right)$$

Et en divisant membre à membre et en prenant la racine : $\tan\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\,\tan\dfrac{u}{2}$

Pour des démonstrations approfondies et élargies, voir *Astronomie générale* d'André Danjon, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1980.