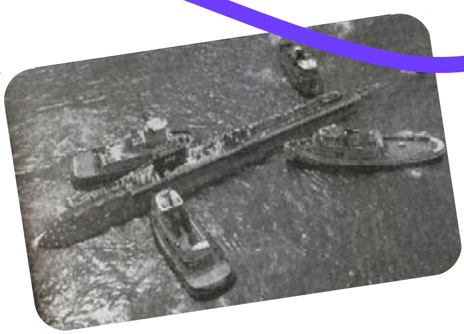
Universidade Federal de Alagoas
Centro de Tecnologia
Curso de Engenharia Civil

Disciplina: Mecânica dos Sólidos 1
Código: ECIV018
Professor: Eduardo Nobre Lages

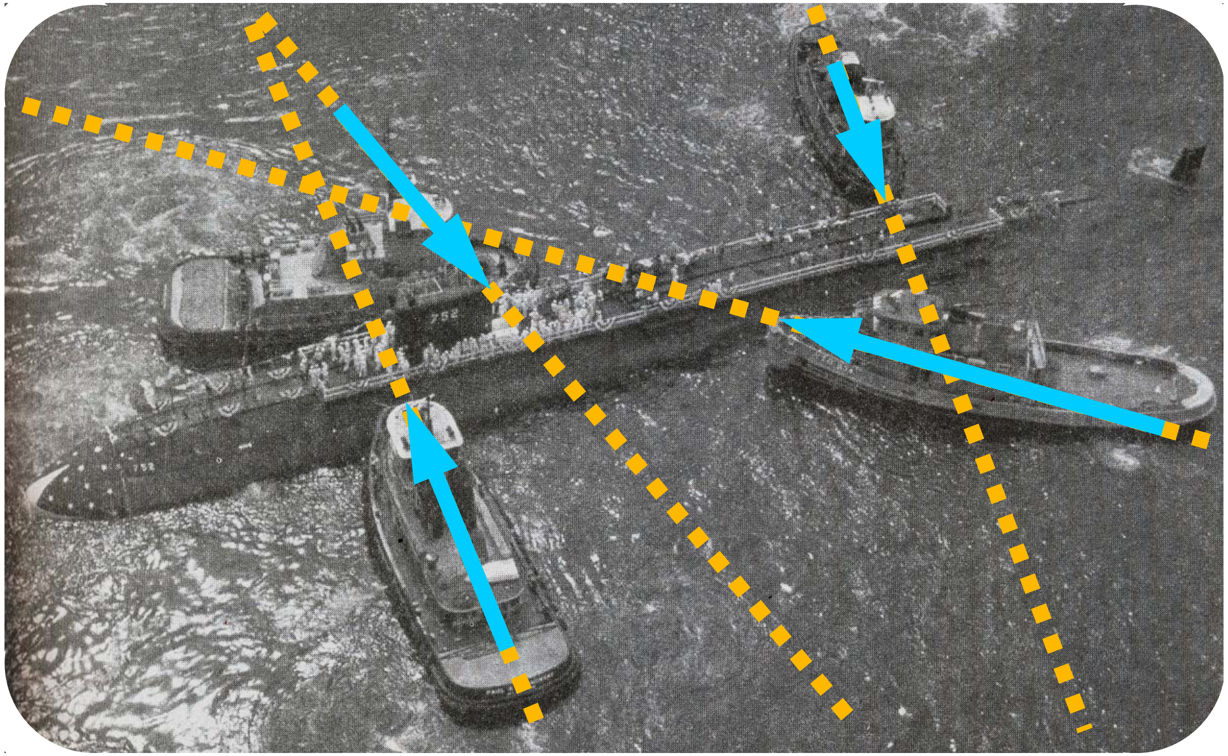
Corpos Rígidos: Sistemas Equivalentes de Forças



Maceió/AL

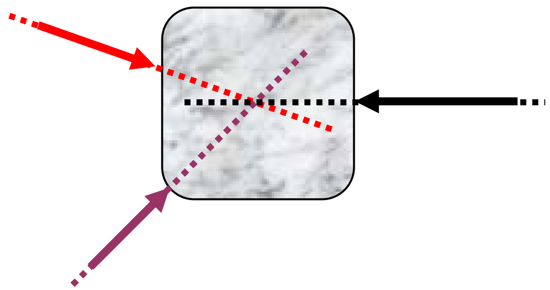
Objetivo

Estudo do efeito de sistemas de forças não concorrentes.

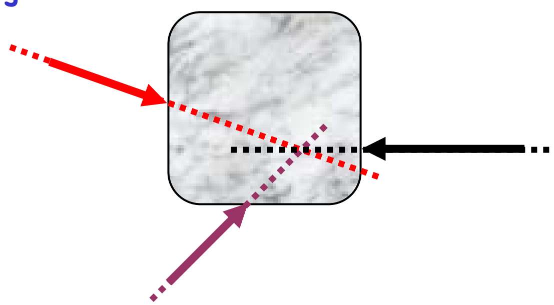


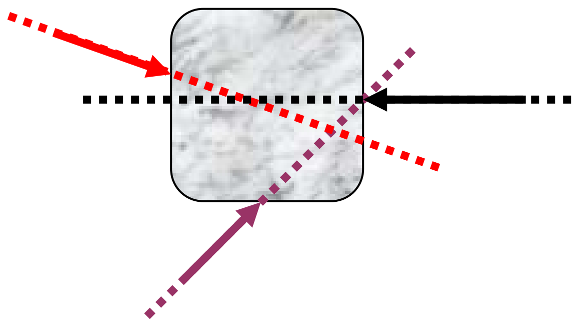
Forças Concorrentes e Não Concorrentes

- Forças concorrentes centradas
  - Podem induzir apenas a translações



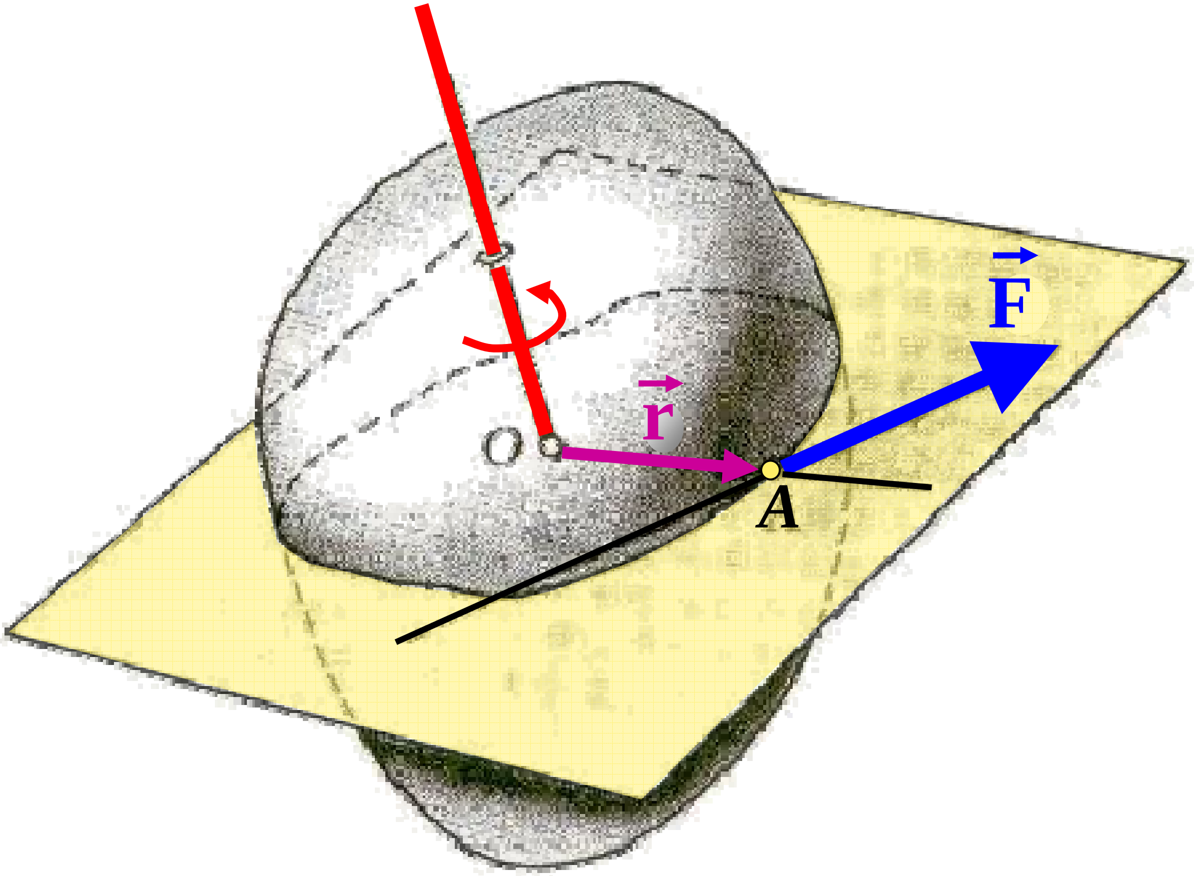
- Forças não concorrentes e concorrentes não centradas
  - Podem induzir a rotações combinadas ou não com translações





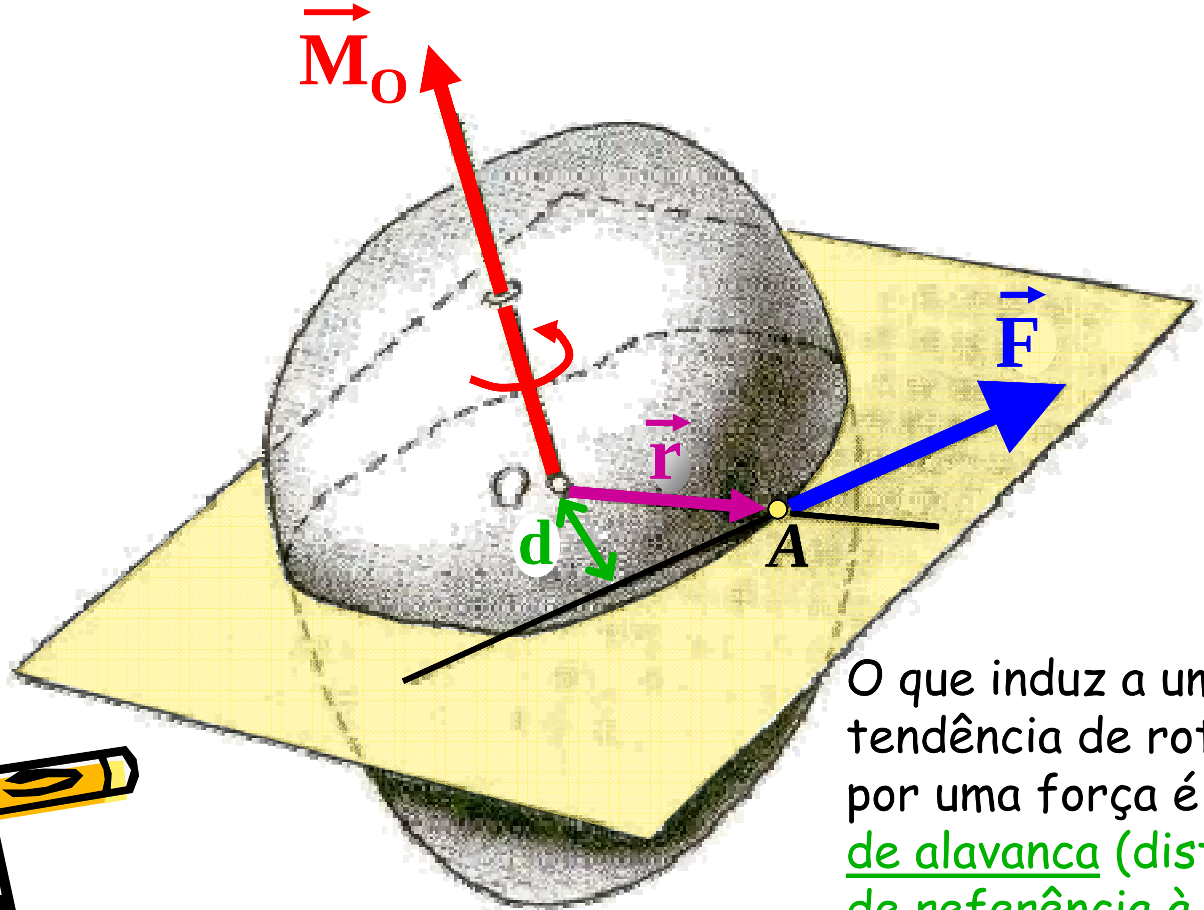
Momento de uma Força em Relação a um Ponto

Uma força aplicada num corpo cria, em relação a um ponto de referência, uma tendência de giro em torno de um eixo perpendicular ao plano formado pelo vetor raio e o vetor força.



Momento de uma Força em Relação a um Ponto

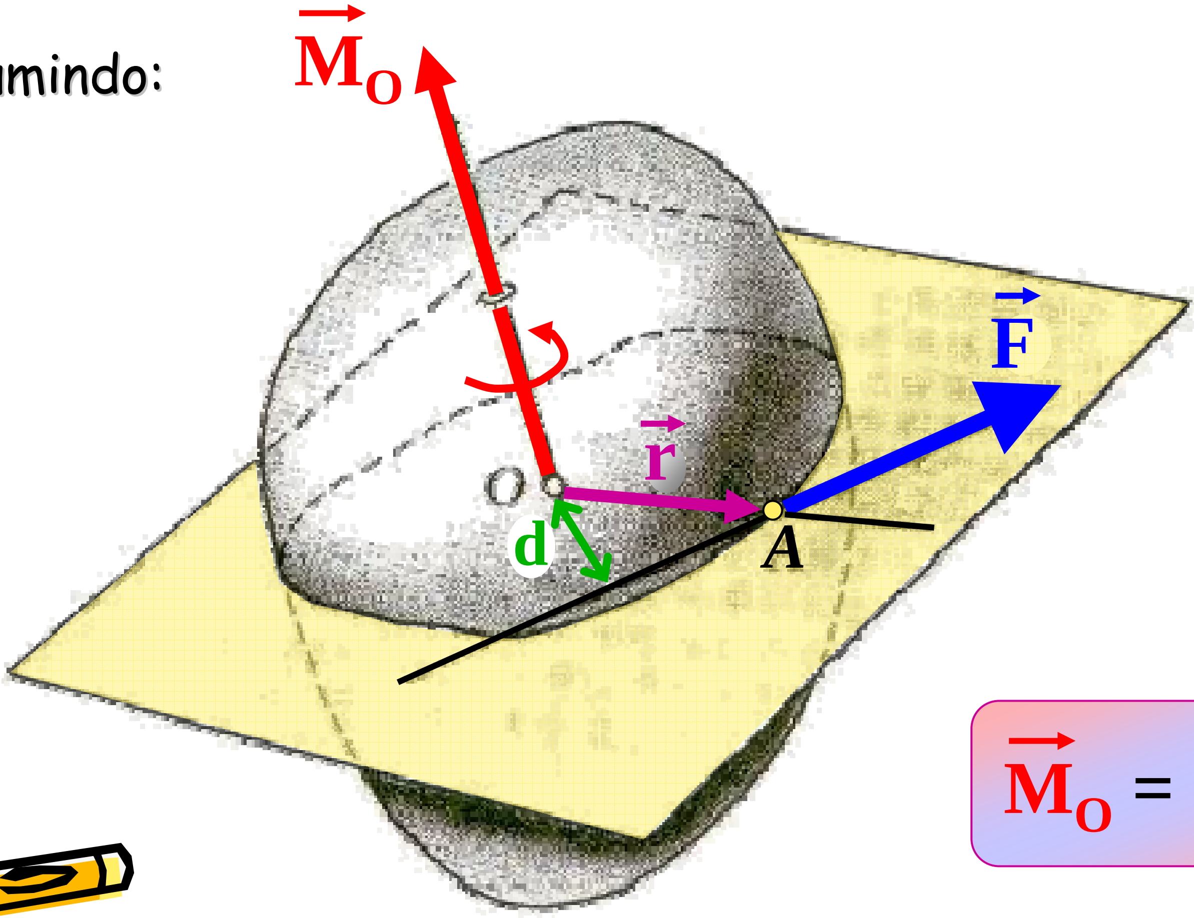
Vamos associar essa tendência de giro a um vetor momento, na direção e sentido da tendência de giro.

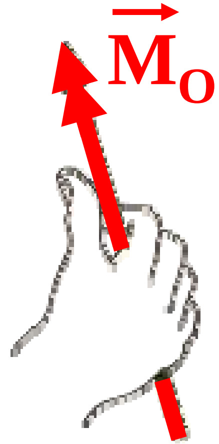


O que induz a uma maior ou menor tendência de rotação produzida por uma força é o chamado braço de alavanca (distância do ponto de referência à linha de ação da força).

Momento de uma Força em Relação a um Ponto

Resumindo:

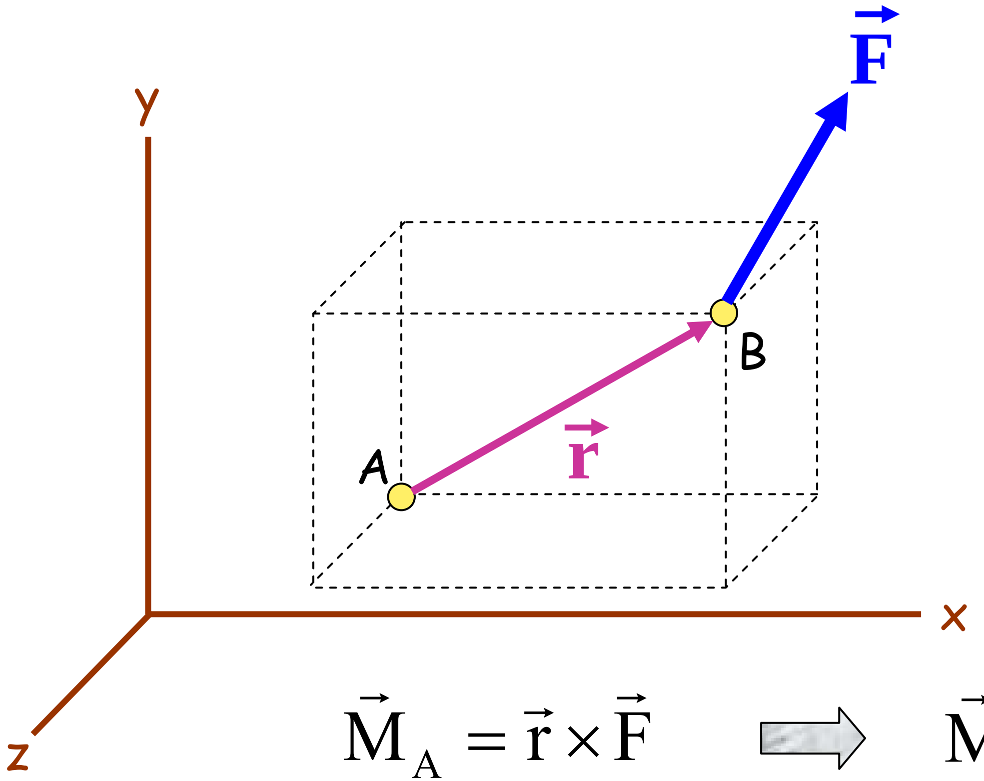




$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M_O = F\,d$$

Componentes Retangulares do Momento de uma Força



$$\vec{F} = (F_x;\ F_y;\ F_z)$$

$$\vec{r} = (r_x;\ r_y;\ r_z)$$

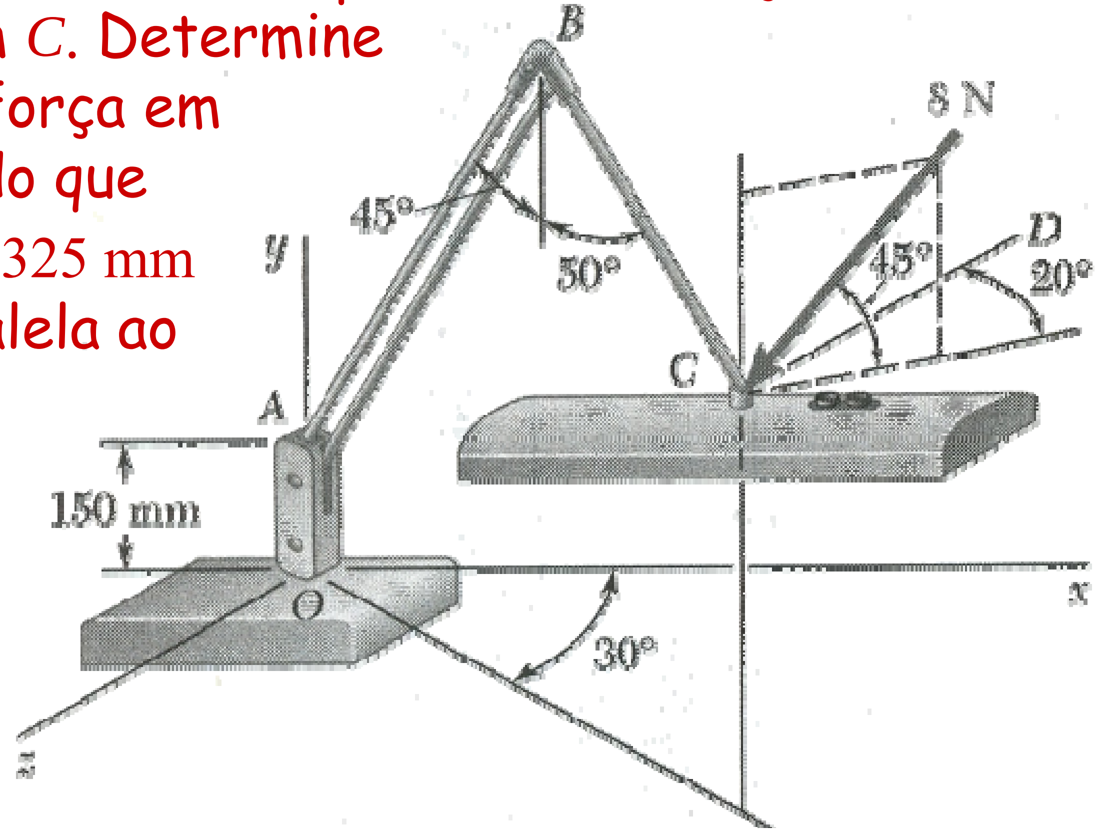
$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A = \left(r_y F_z - r_z F_y ; r_z F_x - r_x F_z ; r_x F_y - r_y F_x\right)$$

Momento de uma Força em Relação a um Ponto

Exemplo:

Os braços AB e BC de uma luminária estão em um plano vertical que forma um ângulo de 30^o com o plano xy. Para reposicionar o feixe de luz, é aplicada uma força de intensidade 8 N em C. Determine o momento dessa força em relação a O sabendo que AB = 450 mm, BC = 325 mm e a linha CD é paralela ao eixo z.



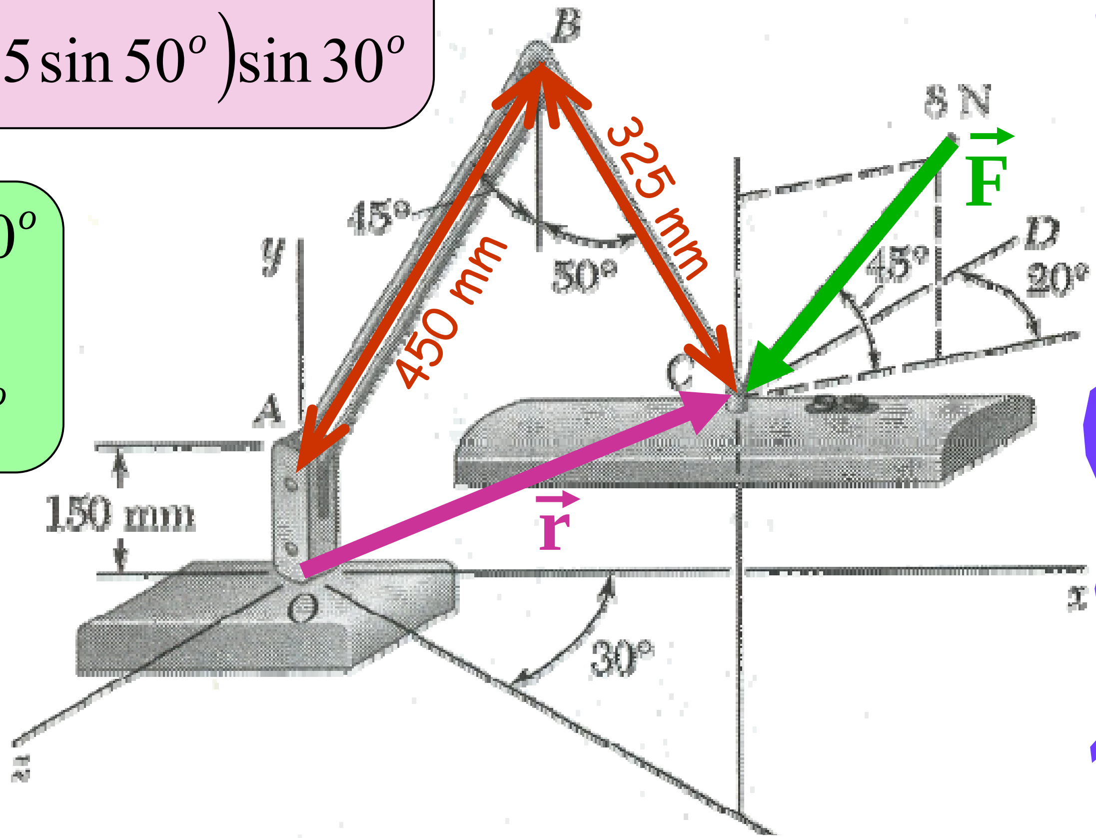
Momento de uma Força em Relação a um Ponto

Exemplo (continuação):

$$r_x = \left(450\sin 45^o + 325\sin 50^o\right)\cos 30^o$$
$$r_y = 150 + 450\cos 45^o - 325\cos 50^o$$
$$r_z = \left(450\sin 45^o + 325\sin 50^o\right)\sin 30^o$$

$$\vec{\mathrm{M}}_O = \vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{F}}$$

$$F_x = -8\cos 45^o \sin 20^o$$
$$F_y = -8\sin 45^o$$
$$F_z = 8\cos 45^o \cos 20^o$$

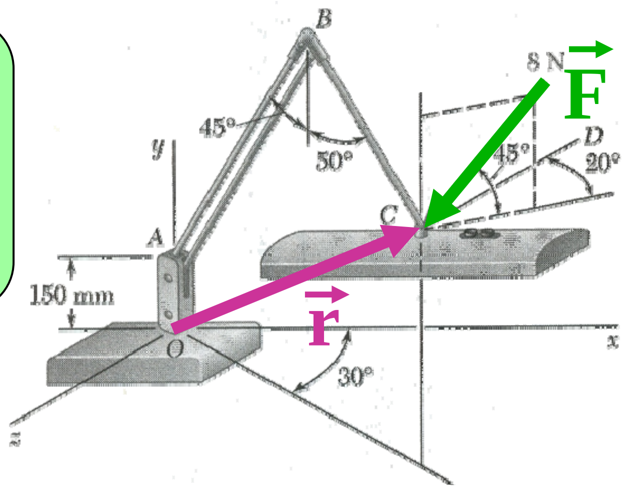


Momento de uma Força em Relação a um Ponto

Exemplo (continuação):

$$r_x = 491{,}2\ \text{mm}$$
$$r_y = 259{,}3\ \text{mm}$$
$$r_z = 283{,}6\ \text{mm}$$

$$F_x = -1{,}935\ \text{N}$$
$$F_y = -5{,}657\ \text{N}$$
$$F_z = 5{,}316\ \text{N}$$

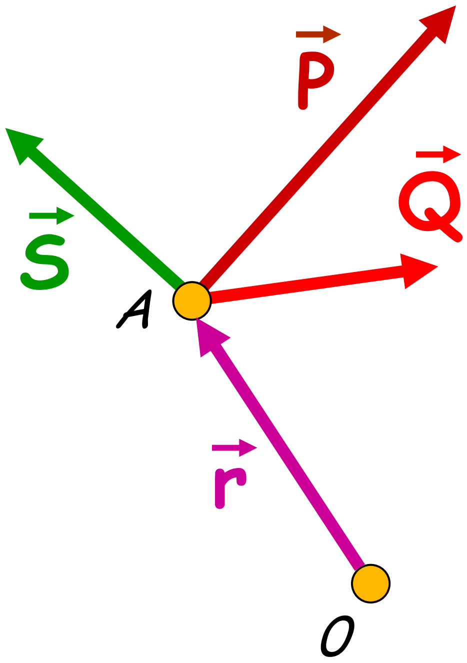


$$\vec{\mathrm{M}}_O = \vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ 491{,}2 & 259{,}3 & 283{,}6 \\ -1{,}935 & -5{,}657 & 5{,}316 \end{vmatrix}$$

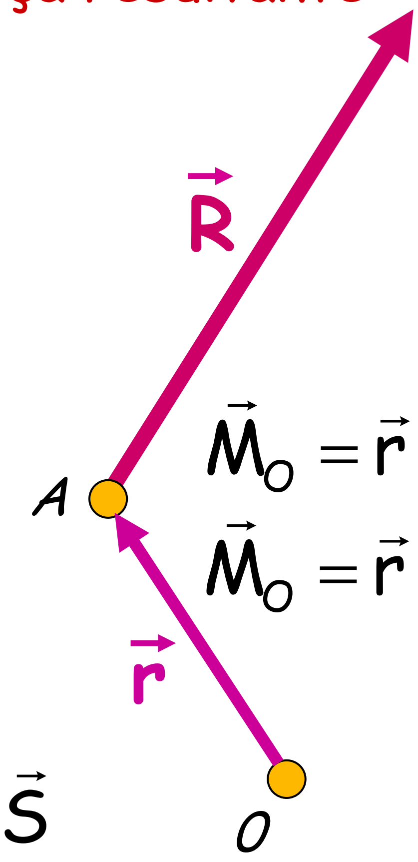
$$\boxed{\vec{\mathrm{M}}_O = \left(2982{,}8; -3160{,}0; -2277{,}0\right)\ \text{N.mm}}$$

Teorema de Varignon

O momento gerado por um sistema de forças concorrentes pode ser calculado somando-se os momentos de cada força ou avaliando-se o momento da força resultante equivalente.



$$\vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{P} + \vec{r}\times\vec{Q} + \vec{r}\times\vec{S}$$



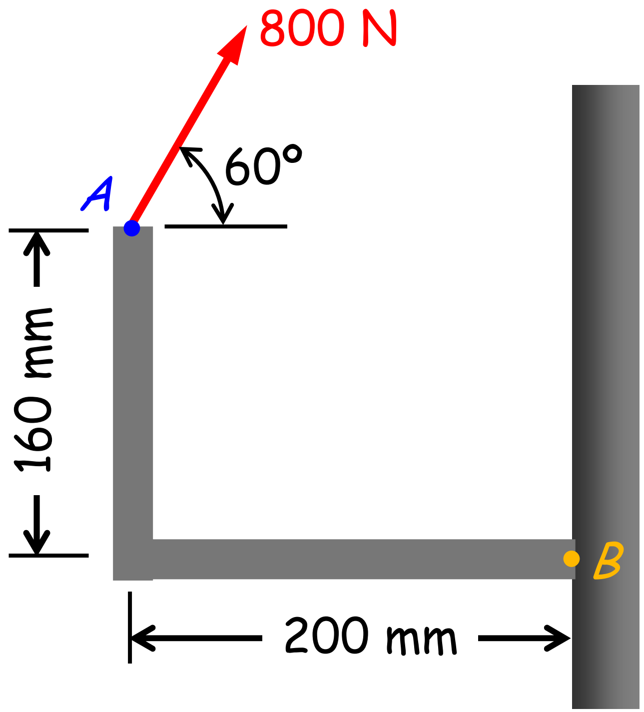
$$\vec{M}_O = \vec{r}\times\left(\vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}\right)$$

$$\vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{R}$$

Teorema de Varignon

Exemplo:

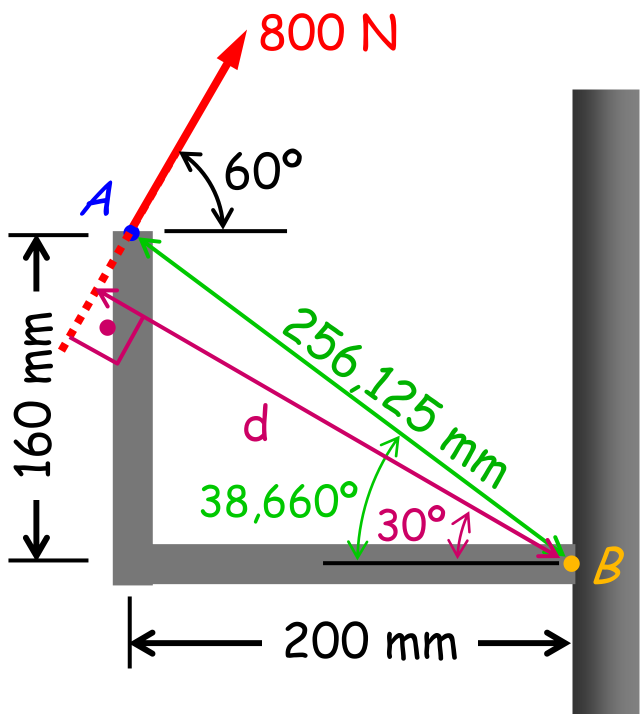
Uma força de 800 N atua sobre um suporte, conforme mostra a ilustração abaixo. Determine o momento da força em relação ao ponto *B*.



Teorema de Varignon

Exemplo (continuação):

1ª estratégia – uso direto da definição



$$M = 800 \cdot d$$

$$d = 256{,}125 \cdot \cos 8{,}660°$$

$$d = 253{,}205 \text{ mm}$$

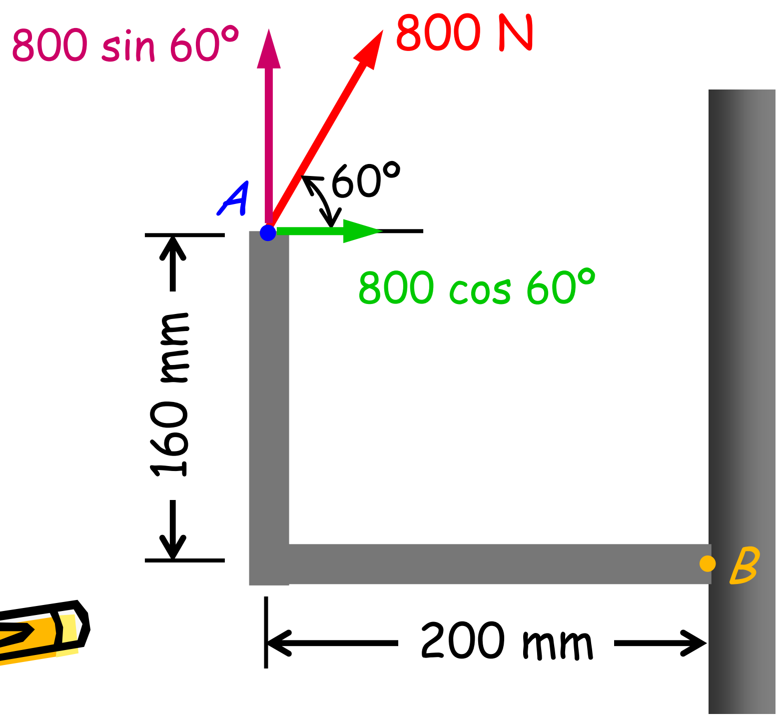
$$M = 800 \cdot 253{,}205$$

$$\boxed{M = 202564 \text{ N} \cdot \text{mm}}$$

Teorema de Varignon

Exemplo (continuação):

2ª estratégia – uso do Teorema de Varignon



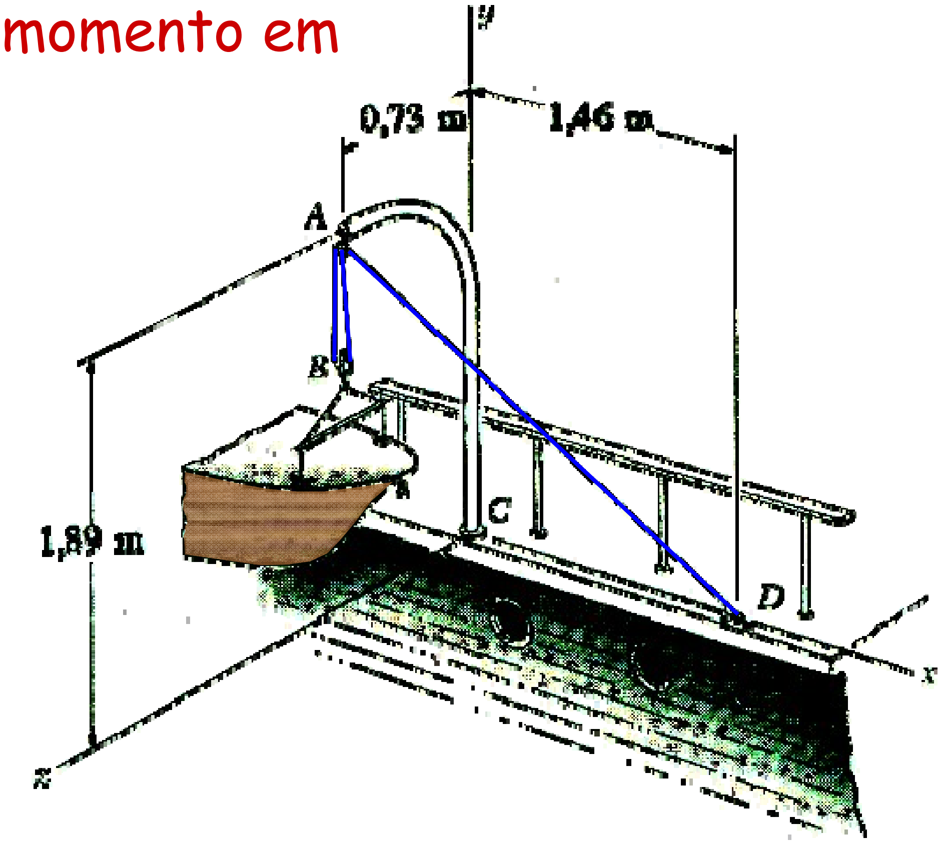
$$\circlearrowright + \quad M = 800 \cdot \cos 60° \cdot 160 + 800 \cdot \sin 60° \cdot 200$$

$$\boxed{M = 202564\ \text{N} \cdot \text{mm}} \circlearrowright$$

Teorema de Varignon

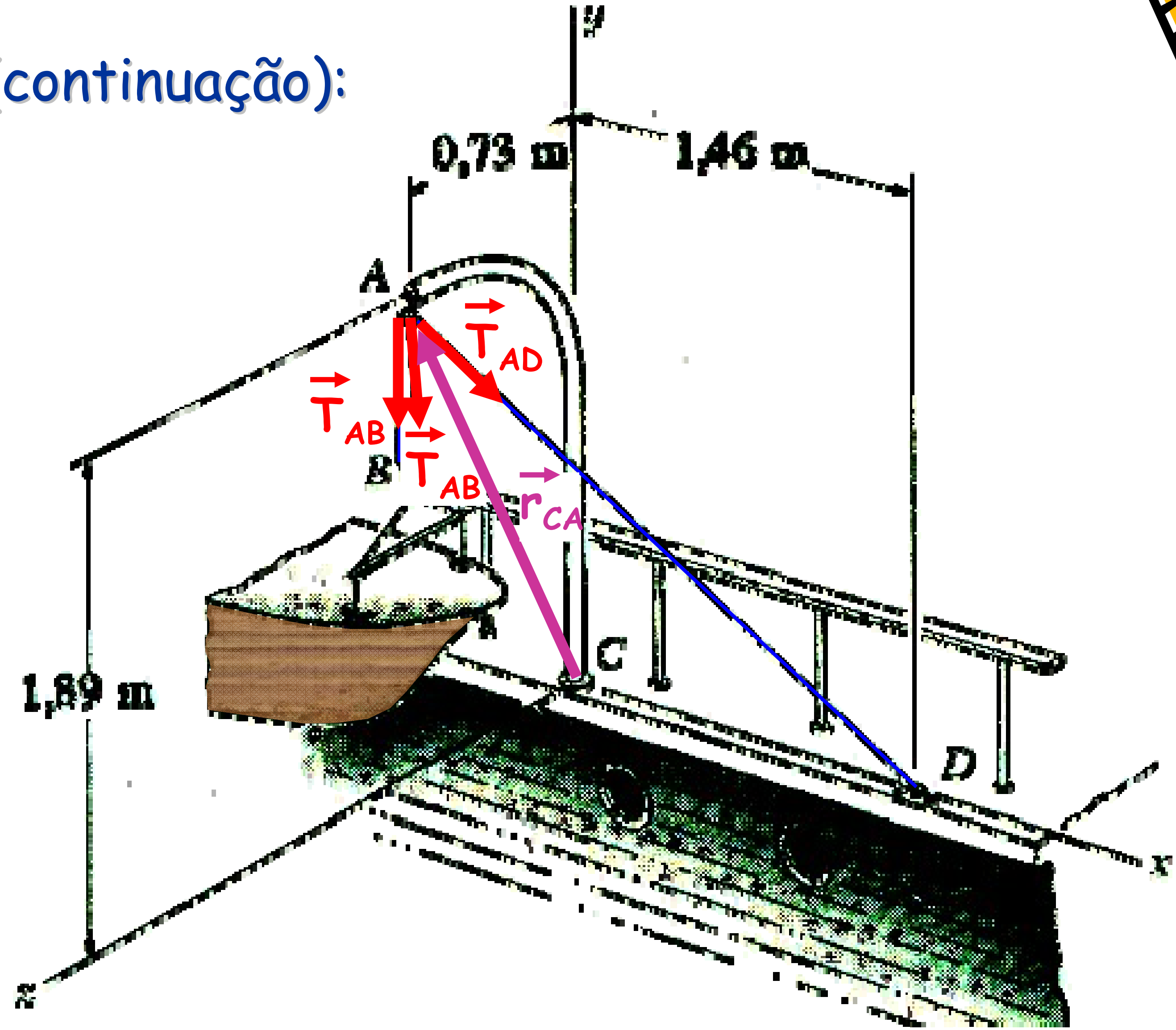
Exemplo:

Um bote está pendurado em dois suportes, um dos quais é mostrado na figura. A tração na linha ABAD é de 182 N. Determine o momento em relação a C da força resultante $\mathbf{R}_A$ exercida pela linha em A.



Teorema de Varignon

Exemplo (continuação):



Teorema de Varignon

Exemplo (continuação):

- $\vec{T}_{AD} = T_{AD}\hat{\lambda}_{AD}$

  $\vec{T}_{AB} = T_{AB}\hat{\lambda}_{AB}$

- $\hat{\lambda}_{AD} = (0{,}585; -0{,}757; -0{,}292)$

  $\hat{\lambda}_{AB} = (0{,}000; -1{,}000; 0{,}000)$

  $T_{AB} = T_{AD} = 182\ \text{N}$

- $\vec{T}_{AD} = (106{,}4; -137{,}7; -53{,}2)\ \text{N}$

  $\vec{T}_{AB} = (0{,}0; -182{,}0; 0{,}0)\ \text{N}$

- $\vec{R} = \vec{T}_{AD} + \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AB}$

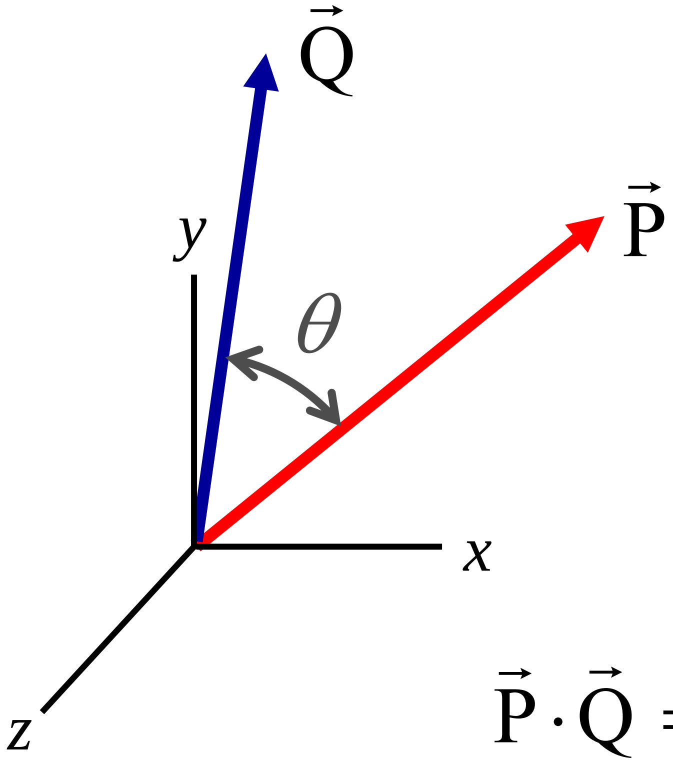
  $\vec{R} = (106{,}4; -501{,}7; -53{,}2)\ \text{N}$

- $\vec{r}_{CA} = (0{,}00; 1{,}89; 0{,}73)\ \text{m}$

- $$\vec{M}_C = \vec{r}_{CA} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0{,}00 & 1{,}89 & 0{,}73 \\ 106{,}4 & -501{,}7 & -53{,}2 \end{vmatrix}$$

  $$= \boxed{(265{,}7; 77{,}7; -201{,}1)\ \text{N.m}}$$

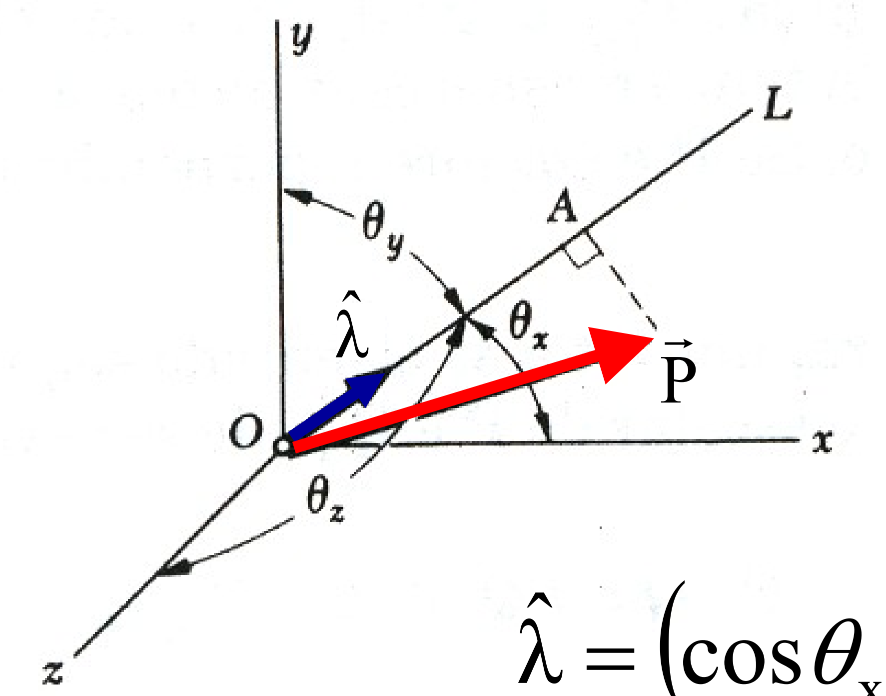
Produto Escalar entre Dois Vetores



$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos\theta$$

$$= P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

Projeção de um Vetor e Vetor Projeção em uma Direção

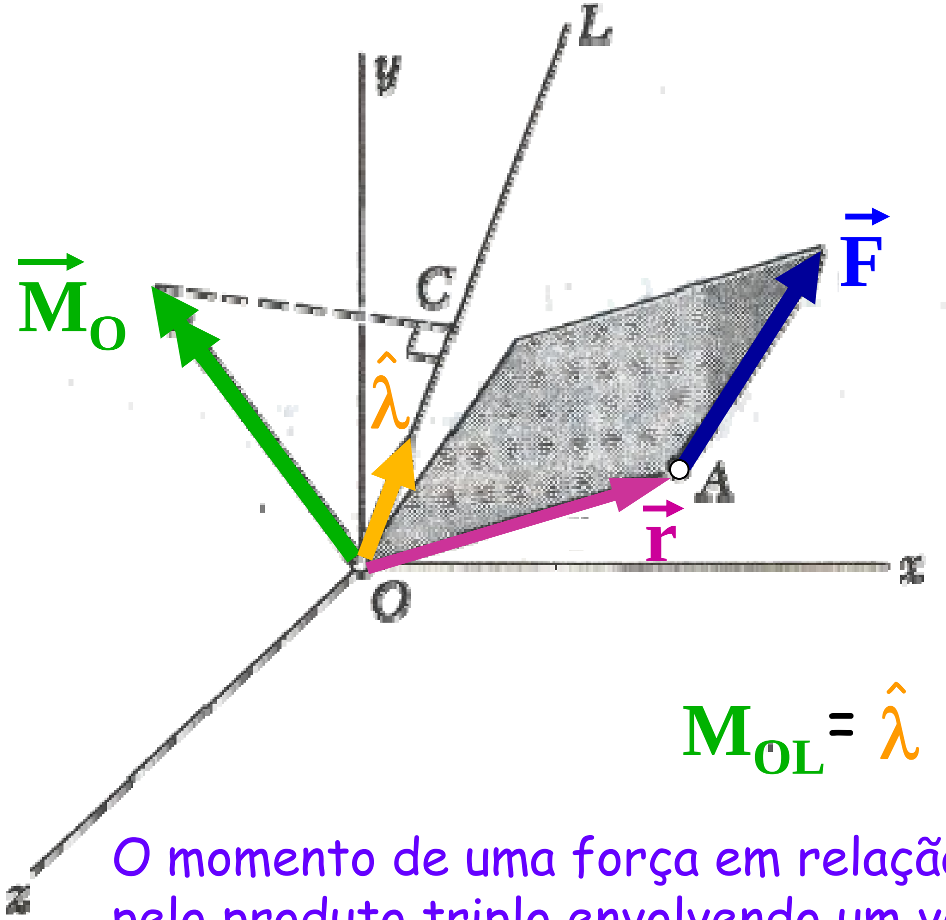


$$\hat{\lambda} = \left(\cos\theta_x ; \cos\theta_y ; \cos\theta_z\right)$$

$$P_{OL} = \vec{P} \cdot \hat{\lambda}$$

$$\vec{P}_{OL} = \left(\vec{P} \cdot \hat{\lambda}\right)\hat{\lambda}$$

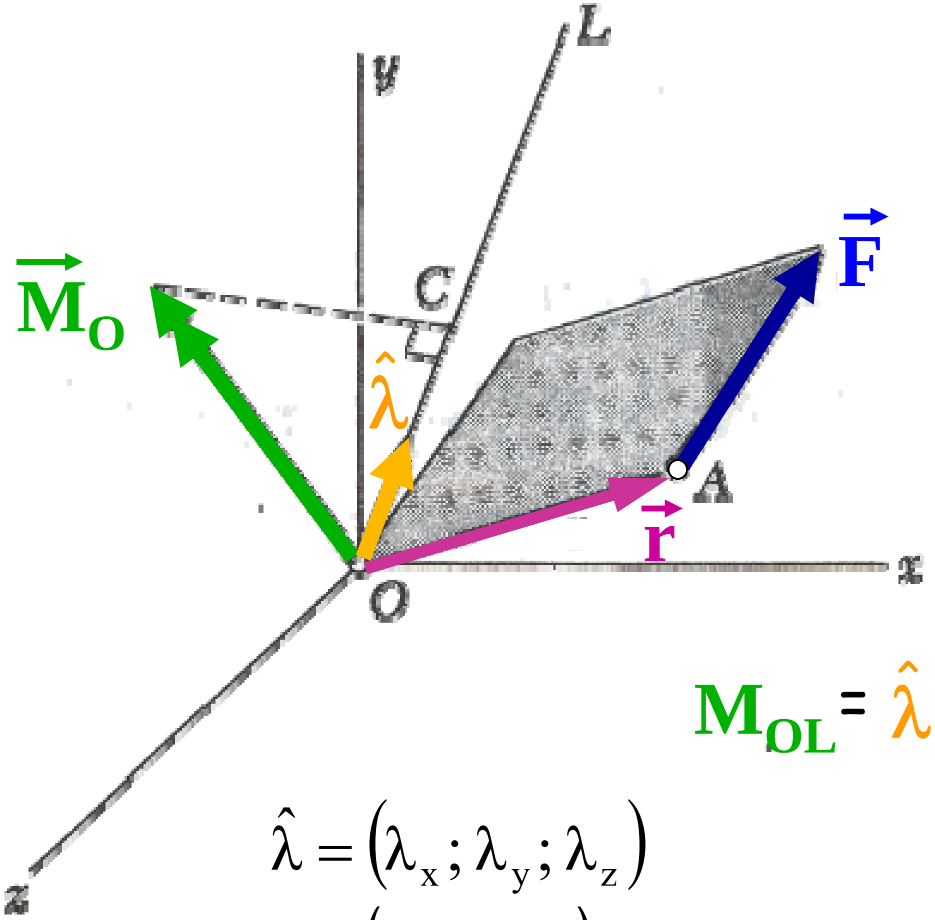
Momento de uma Força em Relação a um Eixo



$$M_{OL} = \hat{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

O momento de uma força em relação a um eixo é dado pelo produto triplo envolvendo um vetor unitário que define o eixo de interesse, um vetor raio que nasce em qualquer ponto no eixo e vai até qualquer ponto ao longo da linha de ação da força envolvida e esse vetor força.

Momento de uma Força em Relação a um Eixo



$$M_{OL} = \hat{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

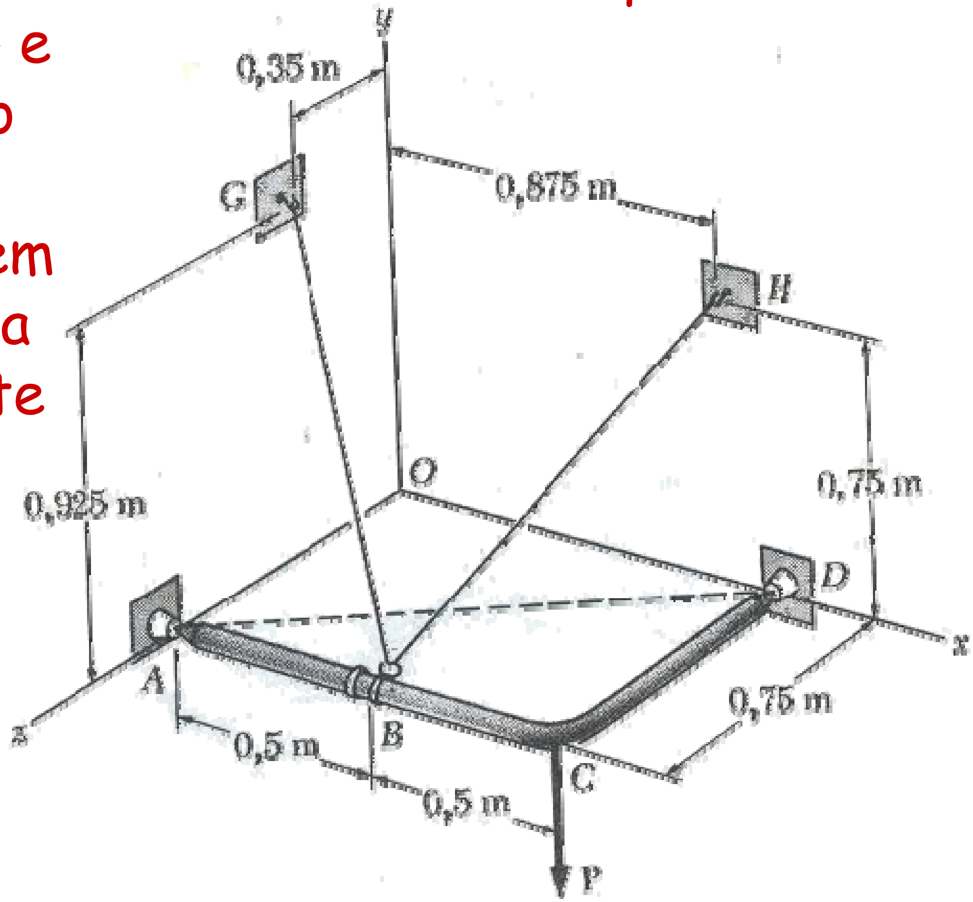
$$\hat{\lambda} = (\lambda_x ; \lambda_y ; \lambda_z)$$
$$\vec{r} = (r_x ; r_y ; r_z)$$
$$\vec{F} = (F_x ; F_y ; F_z)$$

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Momento de uma Força em Relação a um Eixo

Exemplo:

O suporte ACD está articulado em A e D e é sustentado por um cabo que passa através do anel em B e que está preso nos ganchos em G e H. Sabendo que a tração no cabo é de 450 N, determine o momento, em relação à diagonal AD, da força aplicada no suporte pelo segmento BH do cabo.



Momento de uma Força em Relação a um Eixo

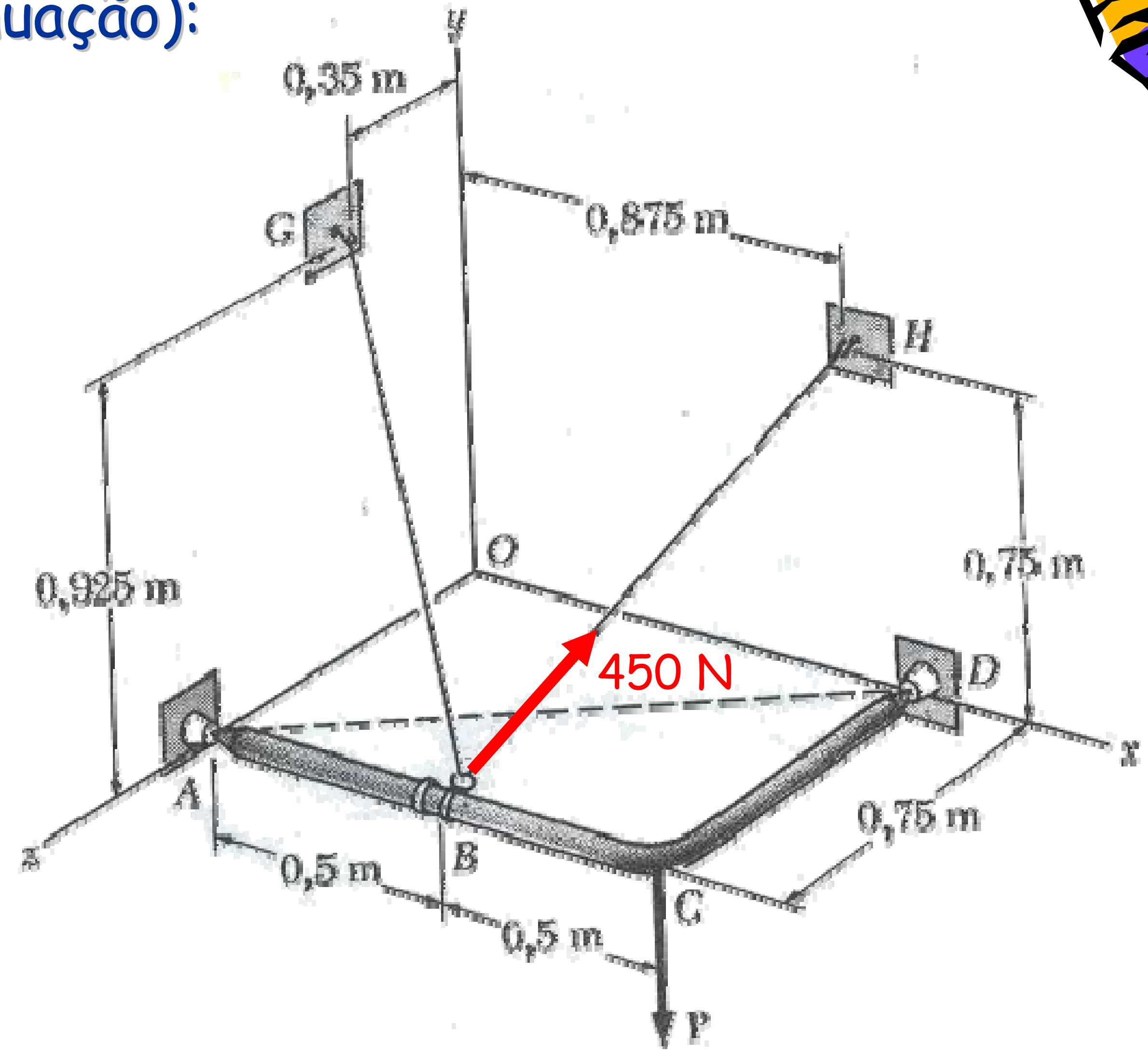
Exemplo (continuação):

$$\vec{T}_{BH} = 450\hat{\lambda}_{BH}$$

$$\hat{\lambda}_{BH} = \frac{\overrightarrow{BH}}{\left\|\overrightarrow{BH}\right\|}$$

$$\hat{\lambda}_{DA} = \frac{\overrightarrow{DA}}{\left\|\overrightarrow{DA}\right\|}$$

$$\vec{r}_{AB} = \overrightarrow{AB}$$



Momento de uma Força em Relação a um Eixo

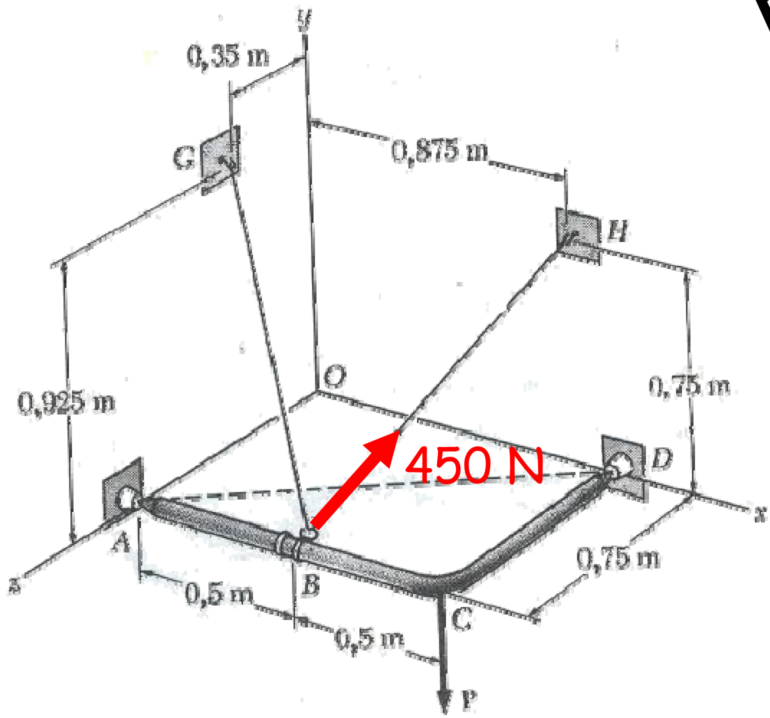
Exemplo (continuação):

$$\hat{\lambda}_{BH} = (0,333; 0,667; -0,667)$$

$$\vec{T}_{BH} = (150; 300; -300)\,\mathrm{N}$$

$$\hat{\lambda}_{DA} = (-0,800; 0,000; 0,600)$$

$$\vec{r}_{AB} = (0,5; 0,0; 0,0)\,\mathrm{m}$$



$$M_{DA} = \hat{\lambda}_{DA} \cdot \left(\vec{r}_{AB} \times \vec{T}_{BH}\right) = \begin{vmatrix} -0,800 & 0,000 & 0,600 \\ 0,5 & 0,0 & 0,0 \\ 150 & 300 & -300 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{M_{DA} = 90,0\ \mathrm{N.m}}$$

Momento de uma Força em Relação a um Eixo

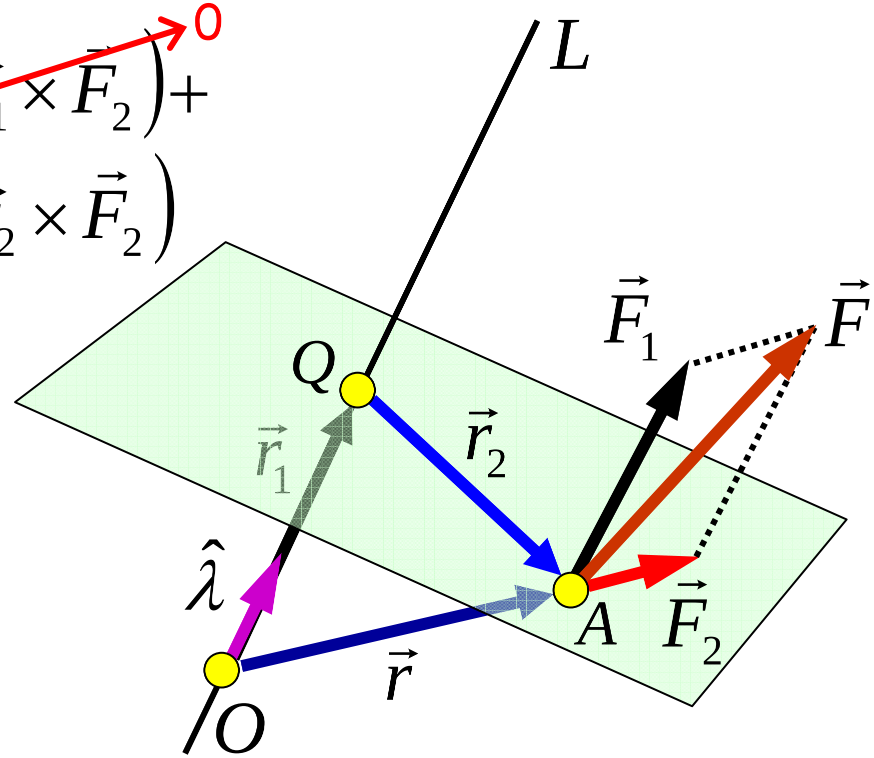
Quem contribui?

$$M_{OL} = \hat{\lambda} \cdot \left(\vec{r} \times \vec{F} \right)$$

$$M_{OL} = \hat{\lambda} \cdot \left[\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 \right) \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \right) \right]$$

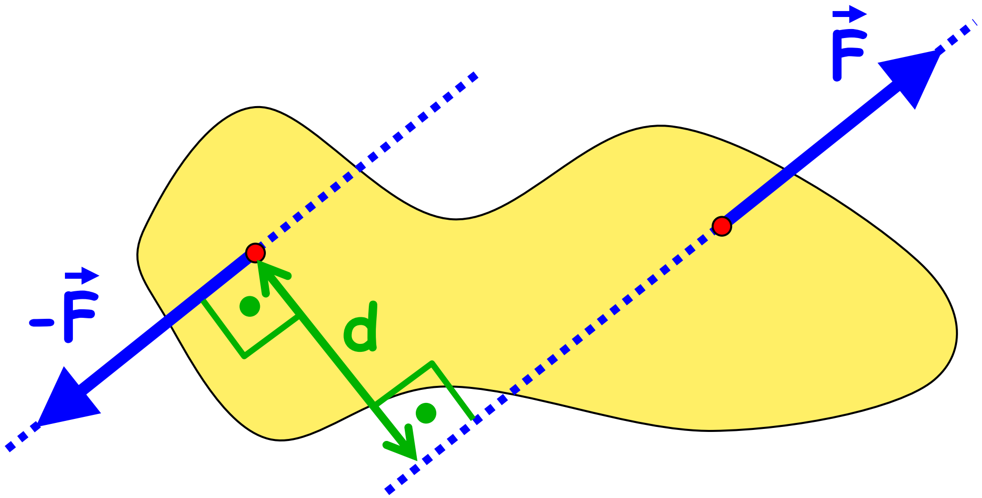
$$M_{OL} = \cancelto{0}{\hat{\lambda} \cdot \left(\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \right)} + \cancelto{0}{\hat{\lambda} \cdot \left(\vec{r}_1 \times \vec{F}_2 \right)} + \cancelto{0}{\hat{\lambda} \cdot \left(\vec{r}_2 \times \vec{F}_1 \right)} + \hat{\lambda} \cdot \left(\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \right)$$

$$M_{OL} = \hat{\lambda} \cdot \left(\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \right)$$



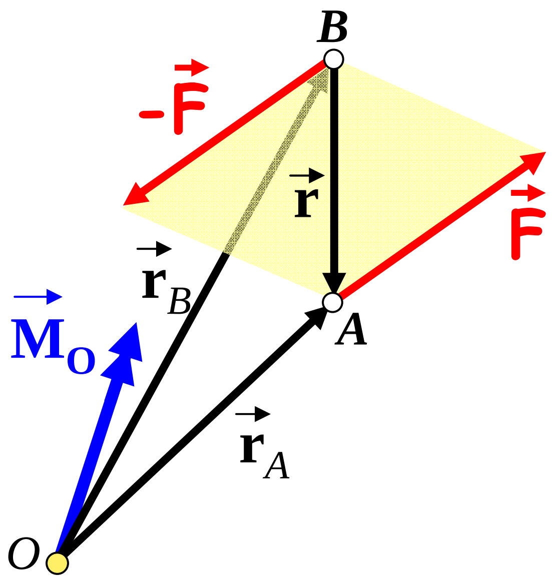
Binário

Definição: Sistema particular de duas forças de mesma intensidade, linhas de ação paralelas e sentidos opostos.



As duas forças não irão transladar o corpo sobre o qual atuam, mas tenderão a fazê-lo girar.

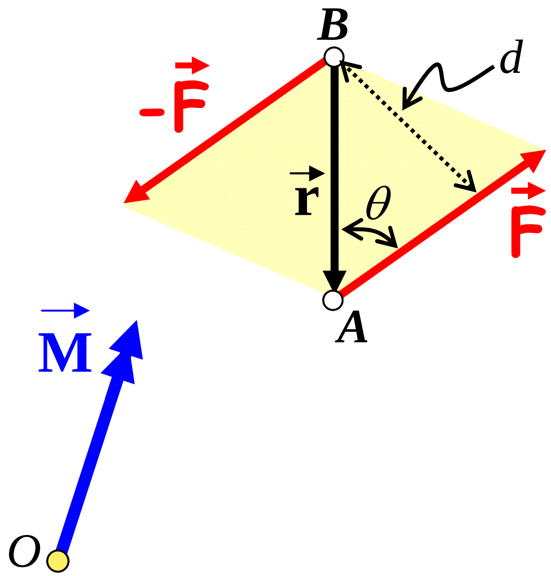
Momento de um Binário



$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \left(-\vec{F}\right) = \vec{r}_A \times \vec{F} - \vec{r}_B \times \vec{F} = \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \times \vec{F}$$

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Momento de um Binário



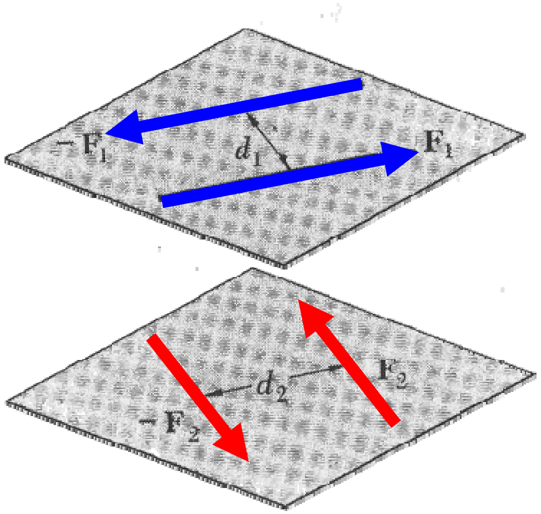
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

O vetor momento de um binário independe do ponto de referência, caracterizando-o como um vetor livre que pode ser representado em qualquer posição.

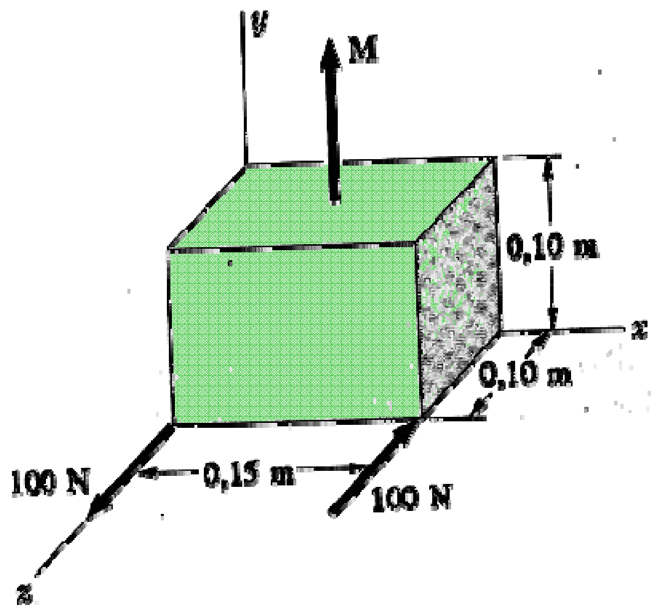
O vetor momento representativo da tendência de giro é perpendicular ao plano das forças (regra da mão direita).

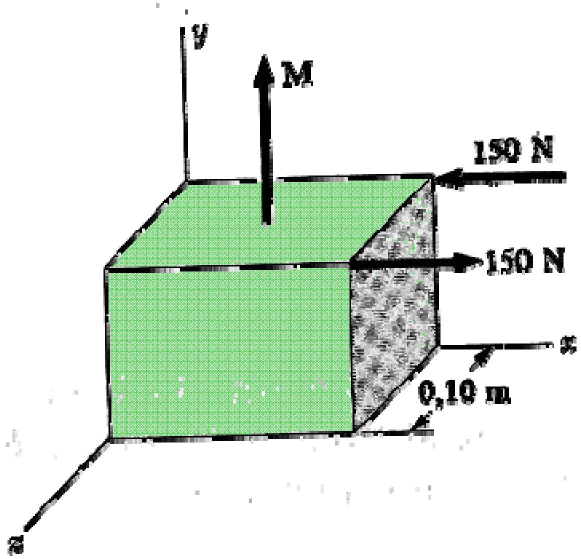
$$M = rF\sin\theta \Rightarrow \boxed{M = Fd}$$

Binários Equivalentes



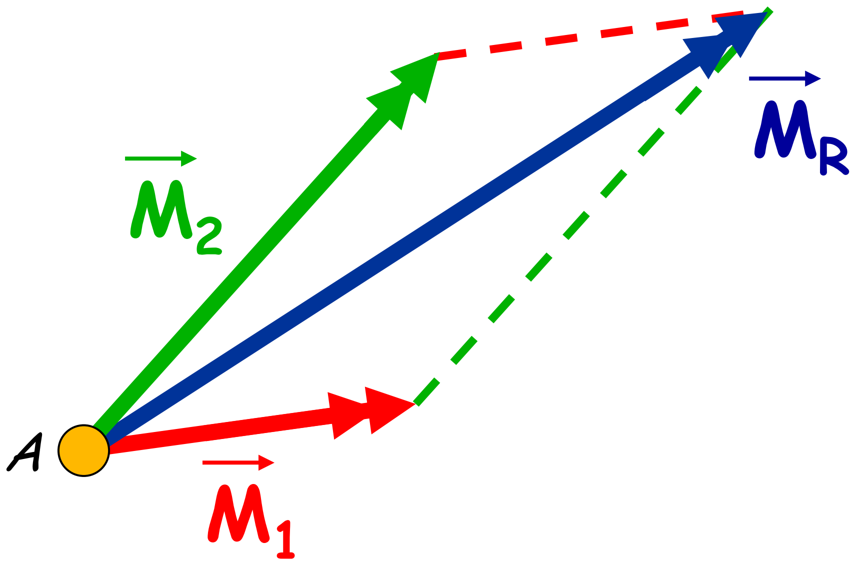
$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$





Adição de Binários

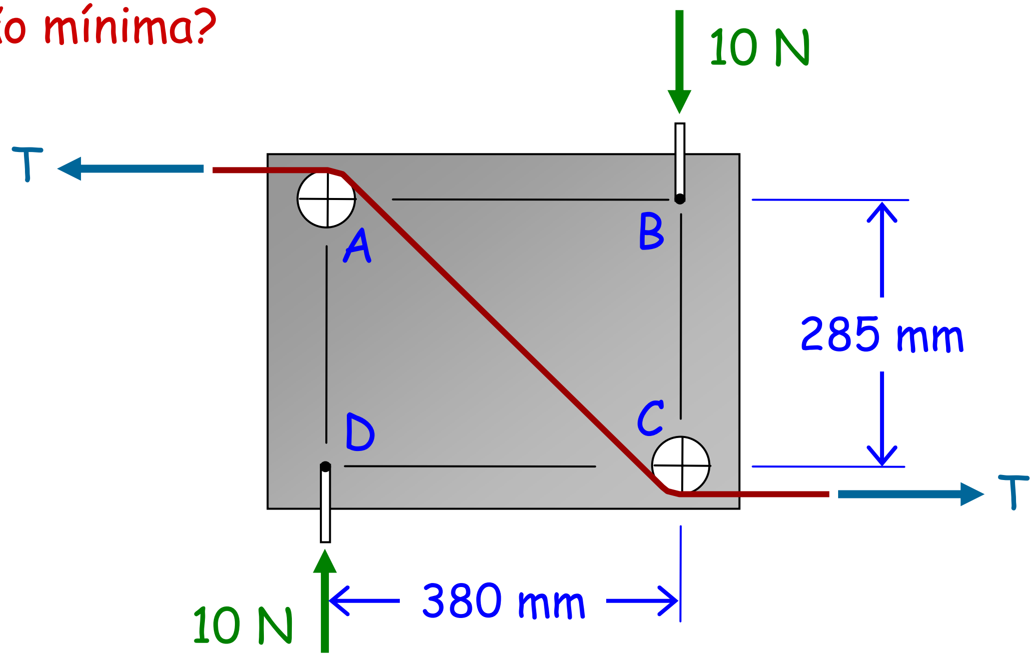
Binários são representados por vetores e por sua vez podem ser combinados empregando-se a lei do paralelogramo.



Adição de Binários e Binários Equivalentes

Exemplo:

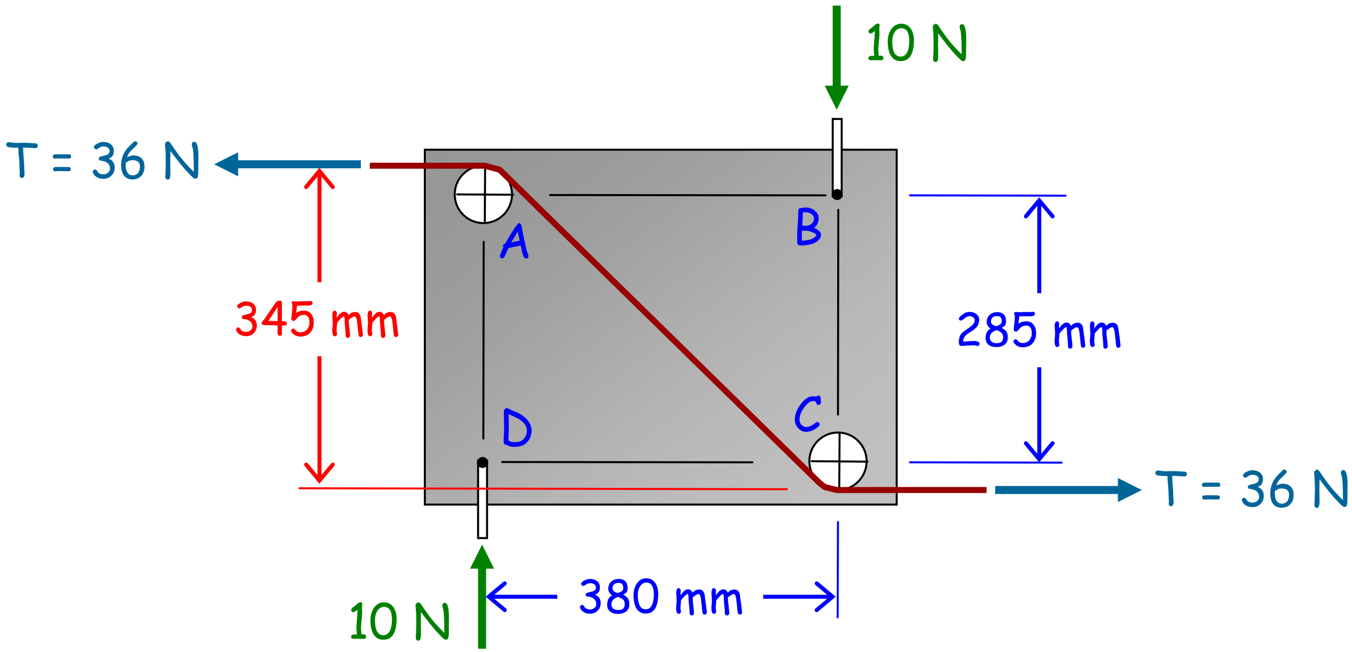
Duas cavilhas de 60 mm de diâmetro são montadas sobre uma placa de aço em A e C e duas barras são presas à placa em B e D. Uma corda é passada em torno das cavilhas, enquanto as barras exercem forças de 10 N sobre a placa. (a) Determine o binário resultante que atua sobre a placa quando T = 36 N. (b) Se apenas a corda for usada, em que direção ela deverá ser puxada para se criar o mesmo binário com a mínima tração na corda? Qual o valor da tração mínima?



Adição de Binários e Binários Equivalentes

Exemplo (continuação):

(a)



$$\circlearrowleft + \quad M = 10 \cdot 380 - 36 \cdot 345 = -8620\ \text{N} \cdot \text{mm}$$

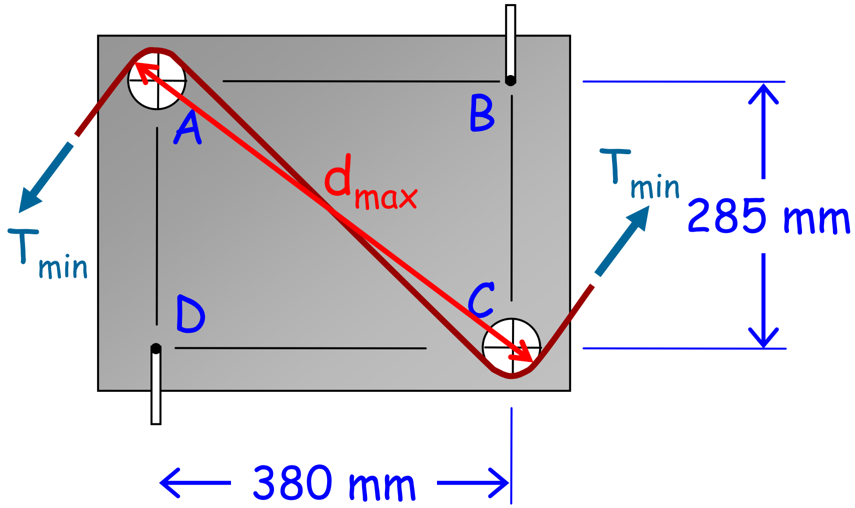
$$\boxed{M = 8620\ \text{N} \cdot \text{mm}} \ \circlearrowright$$

Adição de Binários e Binários Equivalentes

Exemplo (continuação):

(b) $M = 8620\ \mathrm{N \cdot mm}$

Sabe-se que a intensidade do momento gerado por um binário é dada pelo produto da intensidade da força que forma o binário pelo braço de alavanca. Como se deseja minimizar a força, deve-se maximizar o braço de alavanca.



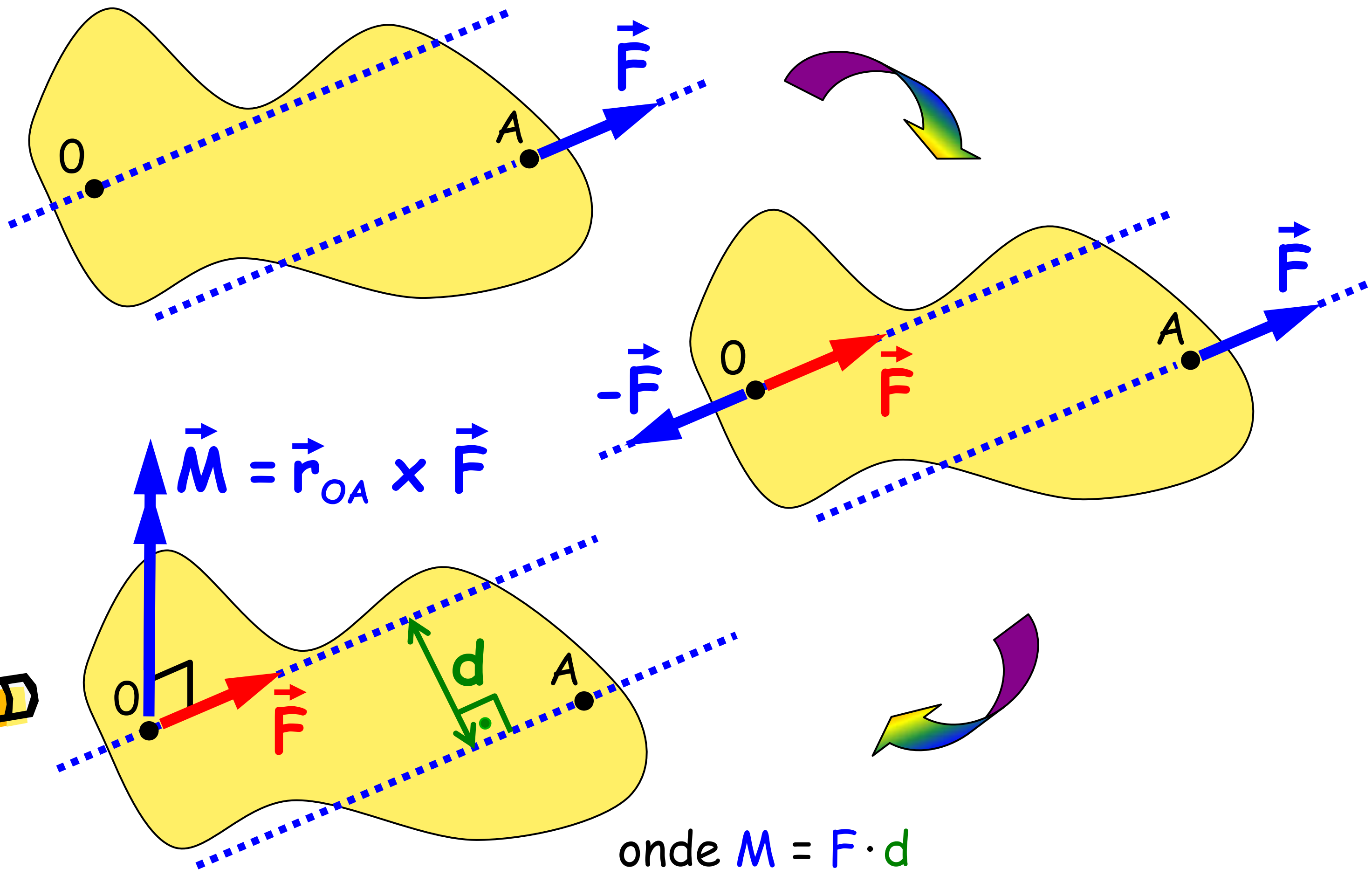
$$M = T_{min} \cdot d_{max}$$

$$d_{max} = \sqrt{380^2 + 285^2} + 60 = 535\ \mathrm{mm}$$

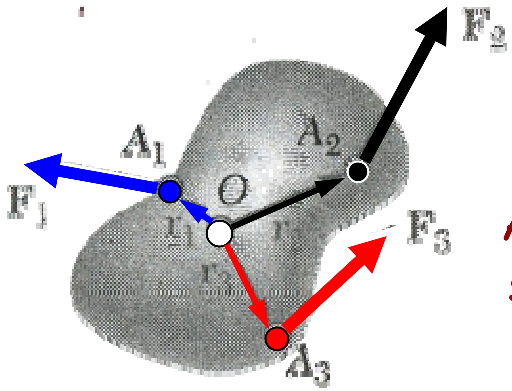
$$T_{min} = \frac{8620}{535} \Rightarrow \boxed{T_{min} = 16{,}1\ \mathrm{N}}$$

Substituição de uma Força por uma Força e um Binário

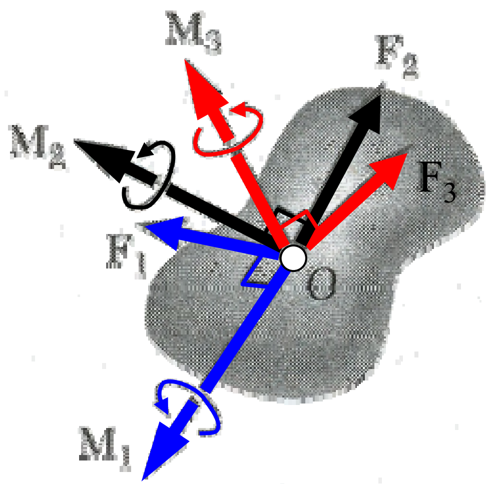
<u>Motivação</u>: Como modificar a linha de ação de uma força mantendo os mesmos efeitos sobre o corpo em que atua?



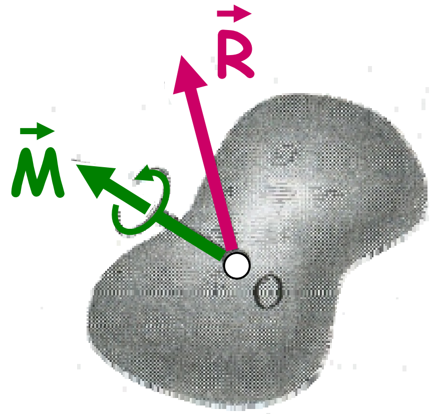
Redução de um Sistema de Forças a uma Força e um Binário



A estratégia anterior pode ser aplicada com cada uma das forças do sistema original, tendo como referência o mesmo ponto O.



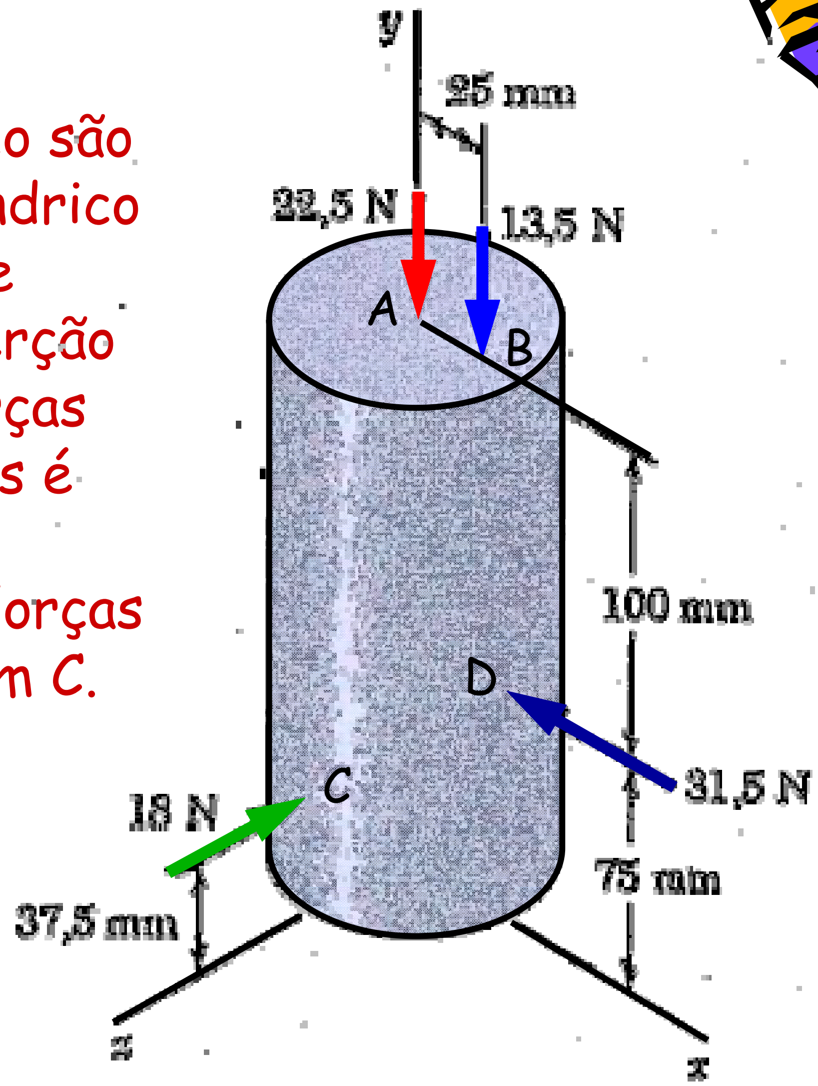
Após isso, combinam-se as forças e os vetores momentos originários dos binários, chegando-se ao sistema resultante equivalente com uma única força e um único vetor momento.



Redução de um Sistema de Forças a uma Força e um Binário

Exemplo:

À medida que buchas de plástico são inseridas em um recipiente cilíndrico de chapa metática de 75 mm de diâmetro, a ferramenta de inserção exerce sobre o invólucro as forças mostradas. Cada uma das forças é paralela a um dos eixos de coordenadas. Substitua essas forças por um sistema força-binário em C.



Redução de um Sistema de Forças a uma Força e um Binário

Exemplo (continuação):

- $\vec{F}_A = (0; -22{,}5; 0)\,\text{N} \quad \vec{r}_A = (0; 0; -37{,}5)\,\text{mm}$
- $\vec{F}_B = (0; -13{,}5; 0)\,\text{N} \quad \vec{r}_B = (25; 0; -37{,}5)\,\text{mm}$
- $\vec{F}_C = (0; 0; -18)\,\text{N} \quad \vec{r}_C = (0; 0; 0)\,\text{mm}$
- $\vec{F}_D = (-31{,}5; 0; 0)\,\text{N} \quad \vec{r}_D = (0; 37{,}5; -37{,}5)\,\text{mm}$

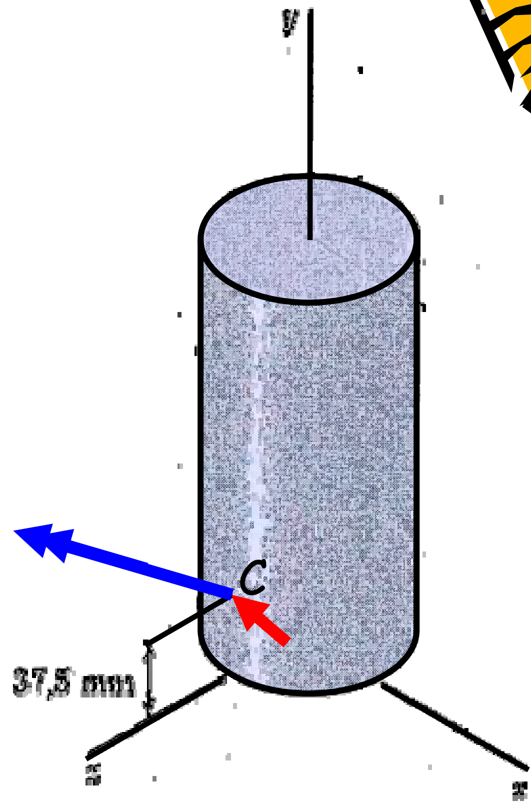
No estabelecimento do vetor raio fez-se uso da idéia de que é possível encerrar esse vetor em qualquer ponto ao longo da linha de ação da correspondente força.

Redução de um Sistema de Forças a uma Força e um Binário

Exemplo (continuação):

- $\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D$

$$\boxed{\vec{R} = \left(-31{,}5; -36; -18\right)\text{N}}$$



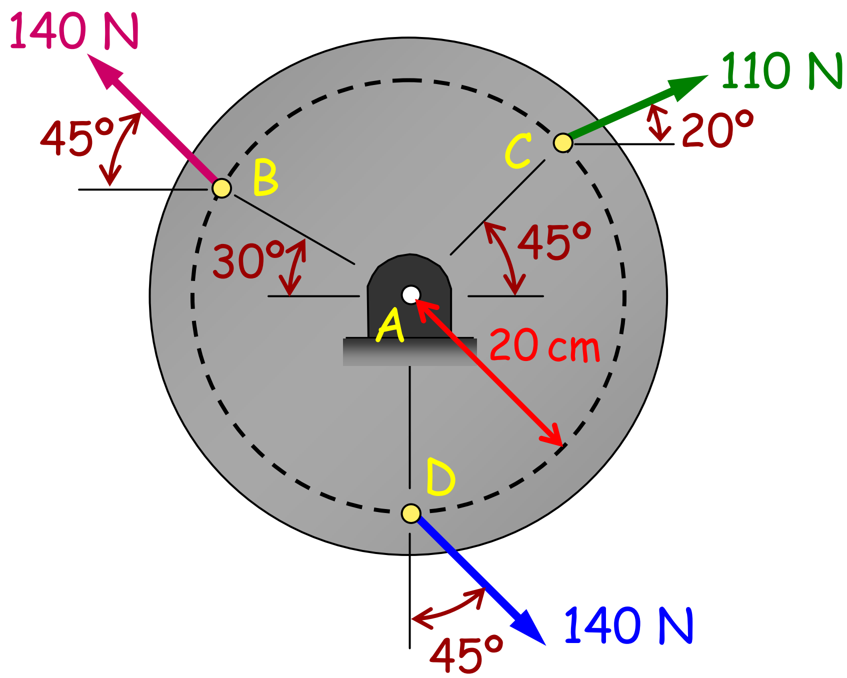
- $\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F}_A + \vec{r}_B \times \vec{F}_B + \vec{r}_C \times \vec{F}_C + \vec{r}_D \times \vec{F}_D$

$$\boxed{\vec{M} = \left(-1350{,}00; 1181{,}25; 843{,}75\right)\text{N.mm}}$$

Redução de um Sistema de Forças a uma Força e um Binário

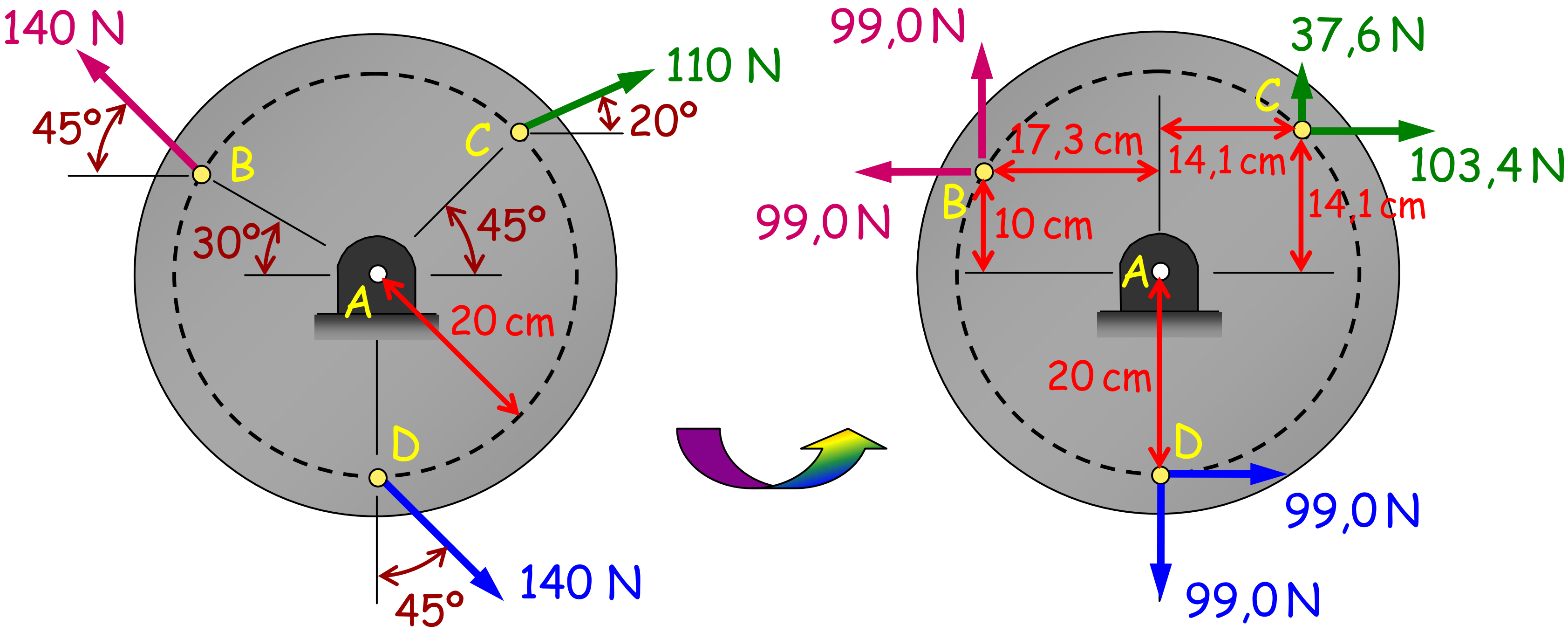
Exemplo:

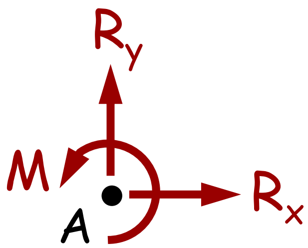
Três cabos presos a um disco exercem sobre o disco as forças mostradas. Substitua as três forças por um sistema força-binário equivalente em A.



Redução de um Sistema de Forças a uma Força e um Binário

Exemplo (continuação):





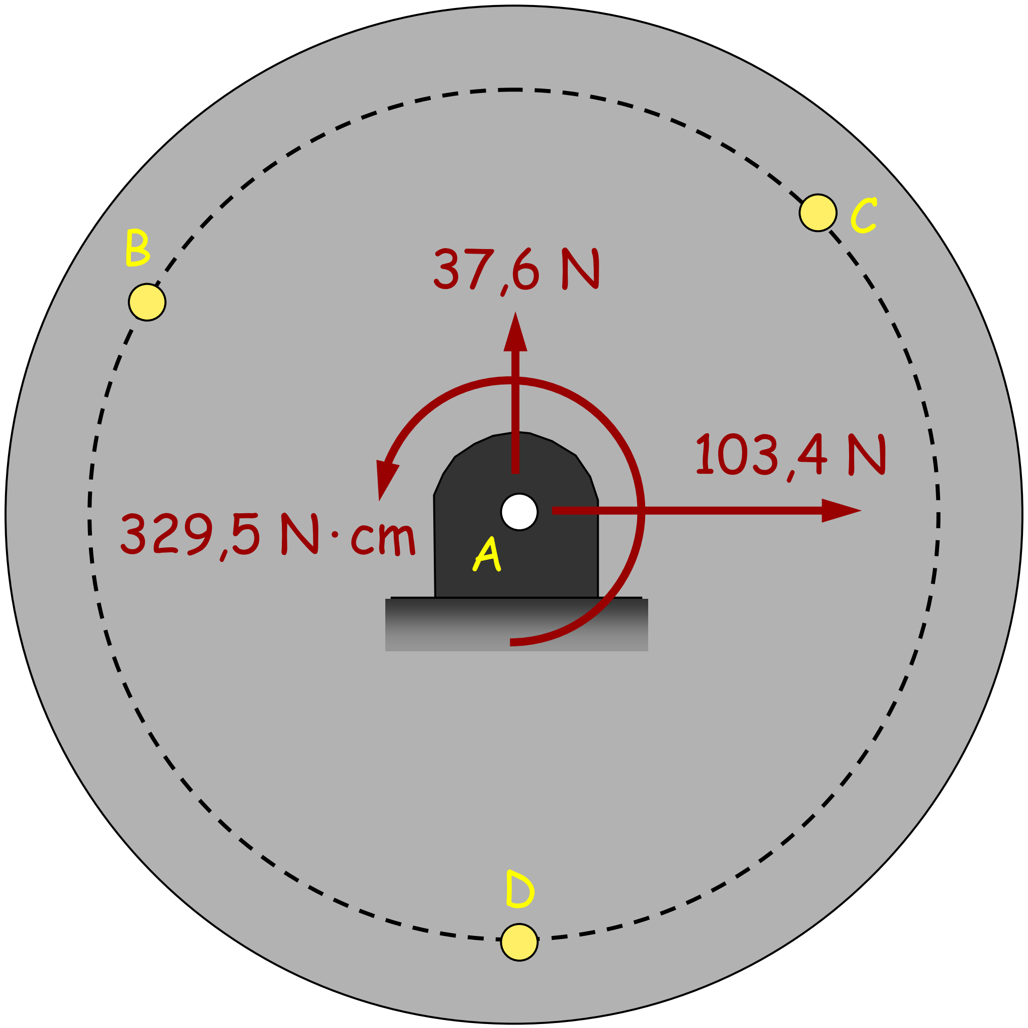
$R_x = 99{,}0 + 103{,}4 - 99{,}0 = 103{,}4 \text{ N}$

$R_y = -\,99{,}0 + 37{,}6 + 99{,}0 = 37{,}6 \text{ N}$

$M = 99{,}0 \cdot 20 - 103{,}4 \cdot 14{,}1 + 37{,}6 \cdot 14{,}1 + 99{,}0 \cdot 10 - 99{,}0 \cdot 17{,}3 = 329{,}5 \text{ N} \cdot \text{cm}$

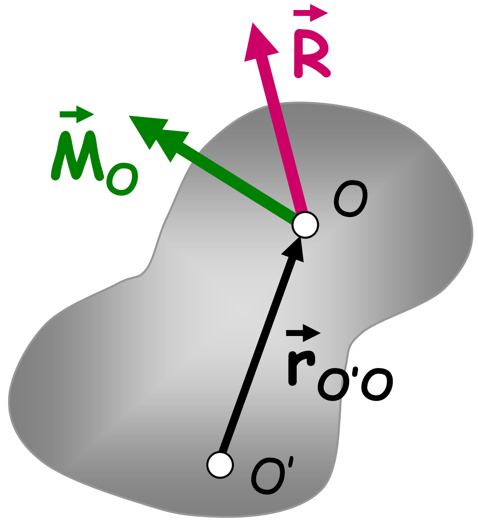
Redução de um Sistema de Forças a uma Força e um Binário

Exemplo (continuação):

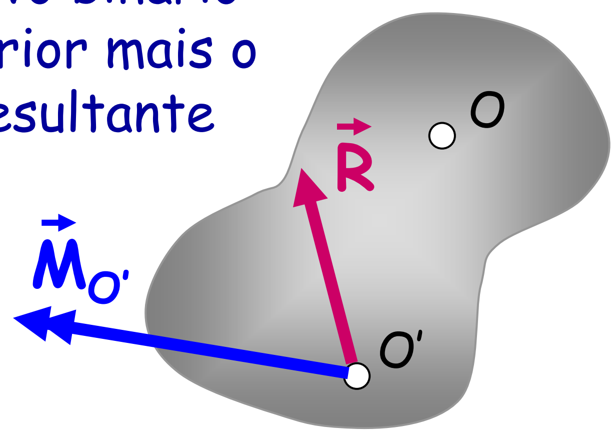


Redução de um Sistema de Forças a uma Força e um Binário

Uma vez que um sistema de forças tenha sido reduzido a uma força e um binário em um ponto O, ele pode ser facilmente reduzido a uma força e um binário em um outro ponto O′.

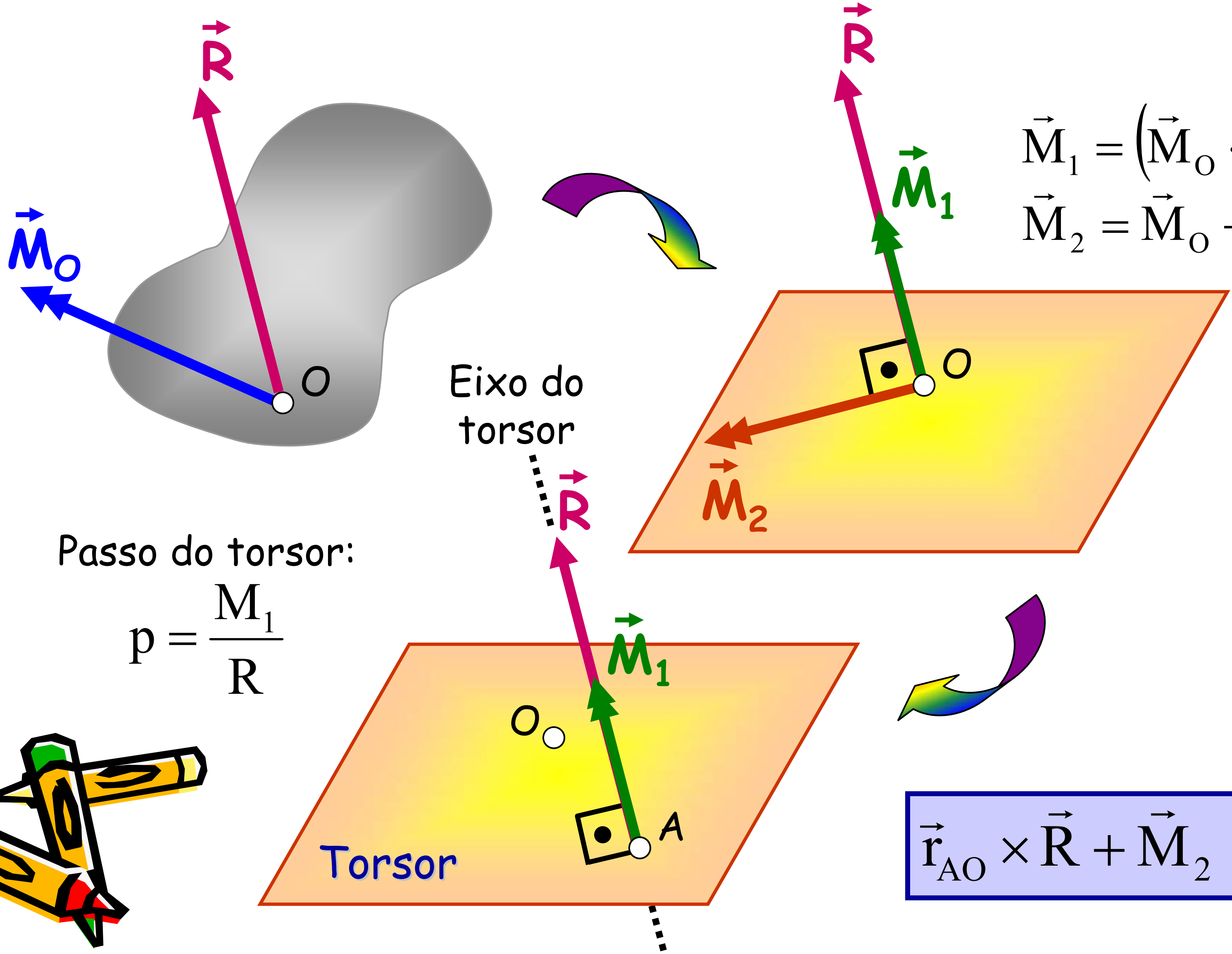


A força resultante permanecerá inalterada, a menos da sua linha de ação, mas o novo binário resultante será igual à soma do anterior mais o momento em relação a O′ da força resultante aplicada na posição inicial.



$$\boxed{\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{r}_{O'O} \times \vec{R}}$$

Redução de um Sistema de Forças a um Torsor



$$\vec{M}_1 = \left(\vec{M}_O \cdot \hat{\lambda}_{\vec{R}}\right)\hat{\lambda}_{\vec{R}}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{M}_O - \vec{M}_1$$

Passo do torsor:

$$p = \frac{M_1}{R}$$

$$\boxed{\vec{r}_{AO} \times \vec{R} + \vec{M}_2 = \vec{0}}$$

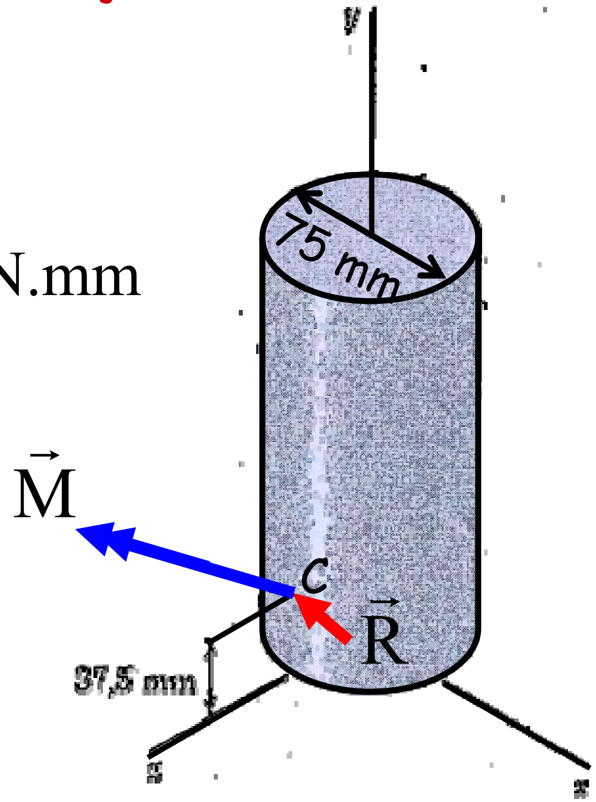
Redução de um Sistema de Forças a um Torsor

Exemplo:

Reduzir o sistema força-binário apresentado abaixo à forma mais simples de representação. Sabe-se que

$$\vec{R} = (-31{,}5; -36; -18)\,\text{N}$$

$$\vec{M} = (-1350{,}00; 1181{,}25; 843{,}75)\,\text{N.mm}$$



Redução de um Sistema de Forças a um Torsor

Exemplo (continuação):

$$\hat{\lambda}_{\vec{R}} = \frac{\vec{R}}{R} = (-0{,}616; -0{,}704; -0{,}352)$$

$$\vec{M}_1 = \left(\vec{M} \cdot \hat{\lambda}_{\vec{R}}\right)\hat{\lambda}_{\vec{R}} = (183{,}14;\ 209{,}30;\ 104{,}65)\ \text{N.mm}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{M} - \vec{M}_1 = (-1533{,}14;\ 971{,}95;\ 739{,}10)\ \text{N.mm}$$

$$\vec{r}_{EC} = (-x;\ 37{,}5 - y;\ 37{,}5 - z)$$

$$\vec{r}_{EC} \times \vec{R} + \vec{M}_2 = \vec{0} \quad \begin{cases} -858{,}14 + 18y - 36z = 0 \\ 1920{,}35 + 36x - 31{,}5y = 0 \\ -209{,}30 - 18x + 31{,}5z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} x &= -11{,}63 + 1{,}75z \\ y &= 47{,}67 + 2z \end{aligned}}$$

Redução de um Sistema de Forças a um Torsor

Exemplo (continuação):

- Torsor $\begin{cases} \vec{R} = (-31{,}5; -36; -18)\,\text{N} \\ \vec{M}_1 = (183{,}14; 209{,}30; 104{,}65)\,\text{N.mm} \end{cases}$

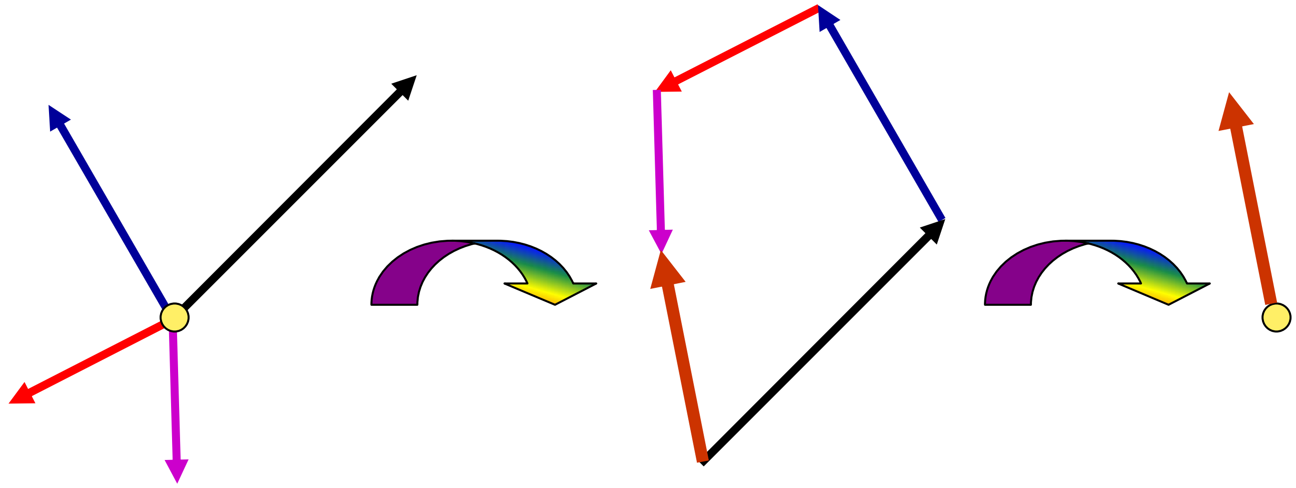
- Eixo do Torsor $\begin{cases} \hat{\lambda} = (-0{,}616; -0{,}704; -0{,}352) \\ \text{Passando pelo ponto } (-11{,}63; 47{,}67; 0)\ \text{mm} \end{cases}$

- Passo do Torsor $\{\ p = 5{,}81\,\text{mm}$

Casos Particulares de Redução de um Sistema de Forças

Forças concorrentes:

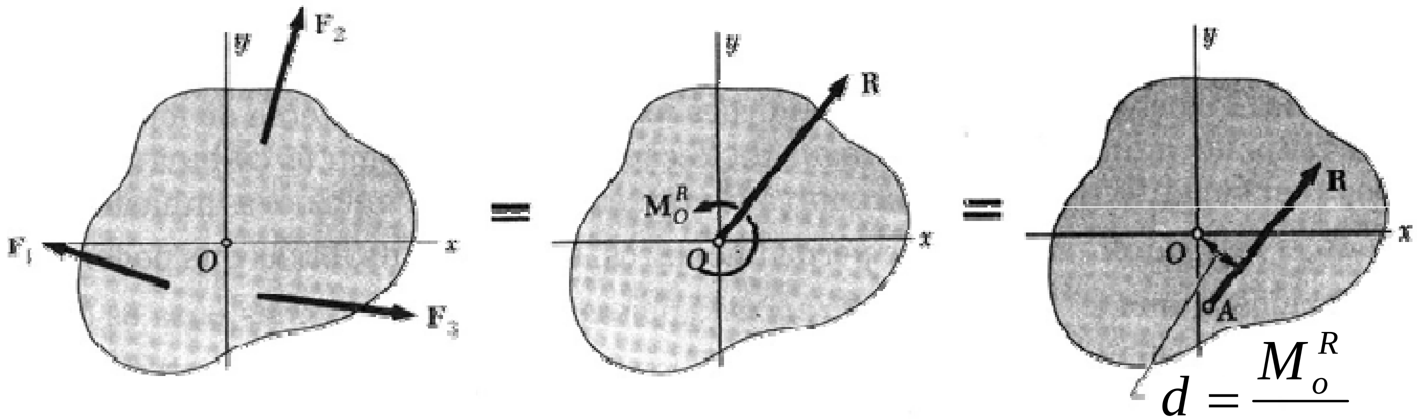
Quando existe um ponto comum a todas as linhas de ação das forças envolvidas no processo de redução, essas podem ser somadas diretamente para obter a força resultante empregando-se, por exemplo, a regra do polígono.



Casos Particulares de Redução de um Sistema de Forças

Forças coplanares:

Como todas as forças atuam num plano em comum, a força resultante também estará no mesmo plano. Em relação a qualquer novo ponto de reposicionamento do sistema de forças, o binário introduzido por qualquer força terá a direção perpendicular ao plano em pauta. Assim sendo, o binário resultante também será perpendicular a esse plano. Adequadamente o sistema resultante força-binário (perpendiculares) poderá ser reposicionado para se resumir apenas a uma força.

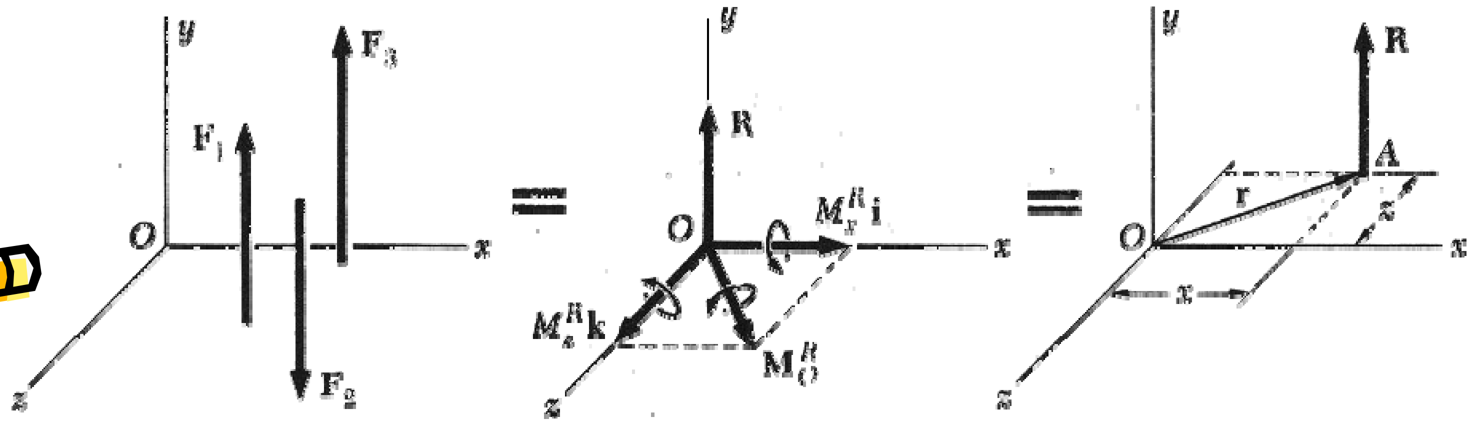


$$d = \frac{M_o^R}{R}$$

Casos Particulares de Redução de um Sistema de Forças

Forças paralelas:

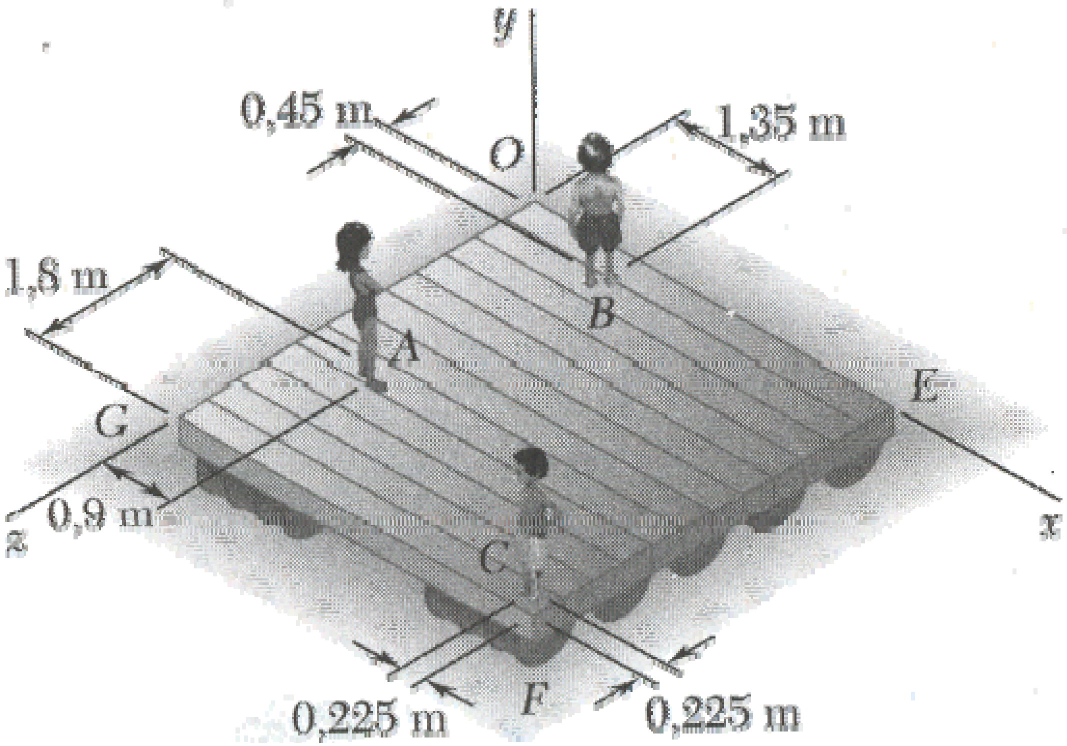
Como todas as forças são paralelas, a força resultante também terá a mesma direção. Em relação a qualquer novo ponto de reposicionamento do sistema de forças, o binário introduzido por qualquer força terá a direção perpendicular a da força. Assim sendo, o binário resultante também será perpendicular a direção das forças. Adequadamente o sistema resultante força-binário (perpendiculares) poderá ser reposicionado para se resumir apenas a uma força.



Casos Particulares de Redução de um Sistema de Forças

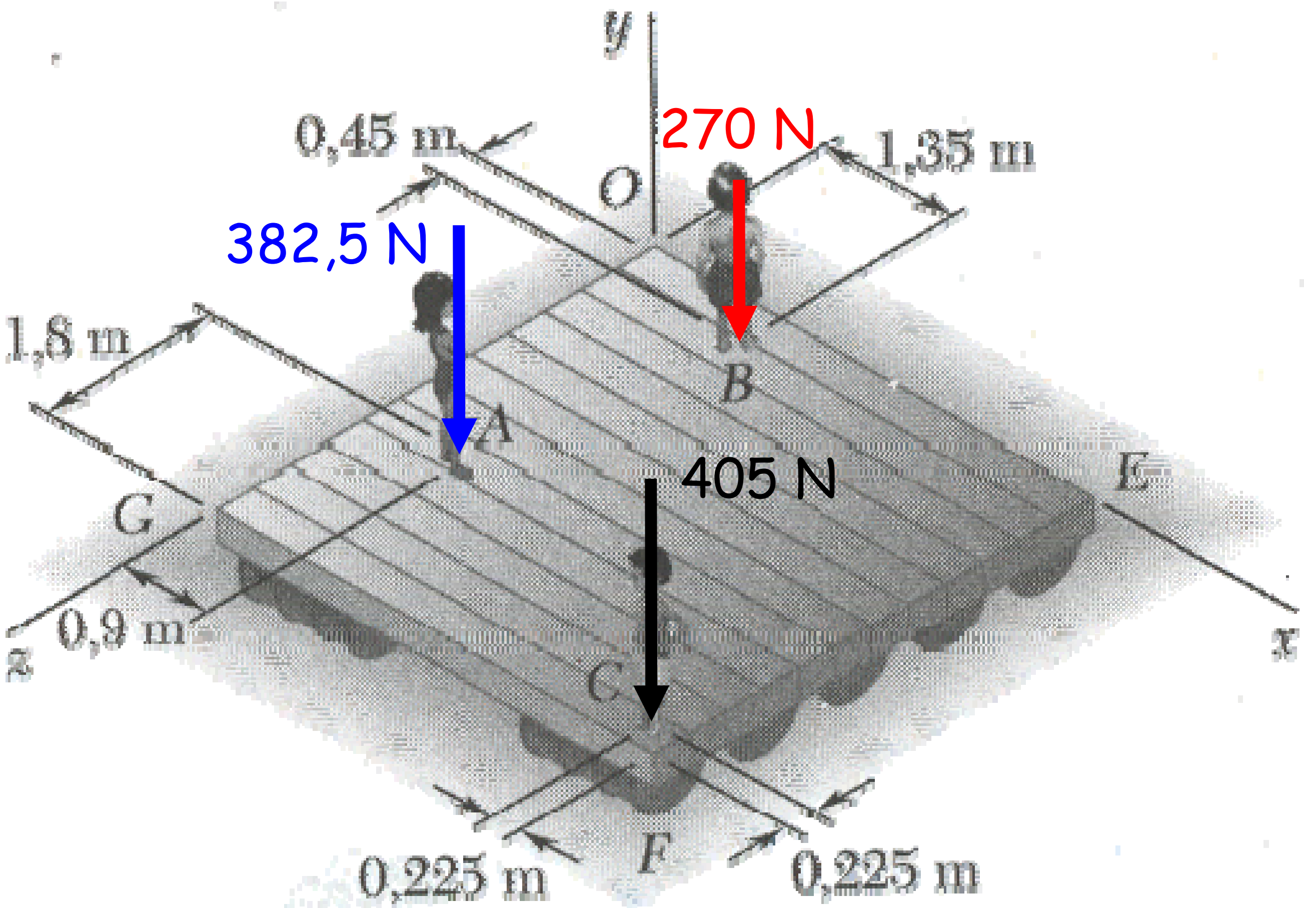
Exemplo:

Três crianças estão em pé sobre uma balsa de 4,5 x 4,5 m. Sabendo que os pesos das crianças nos pontos A, B e C são de 382,5 N, 270 N e 405 N, respectivamente, determine a intensidade e o ponto de aplicação da resultante dos três pesos.



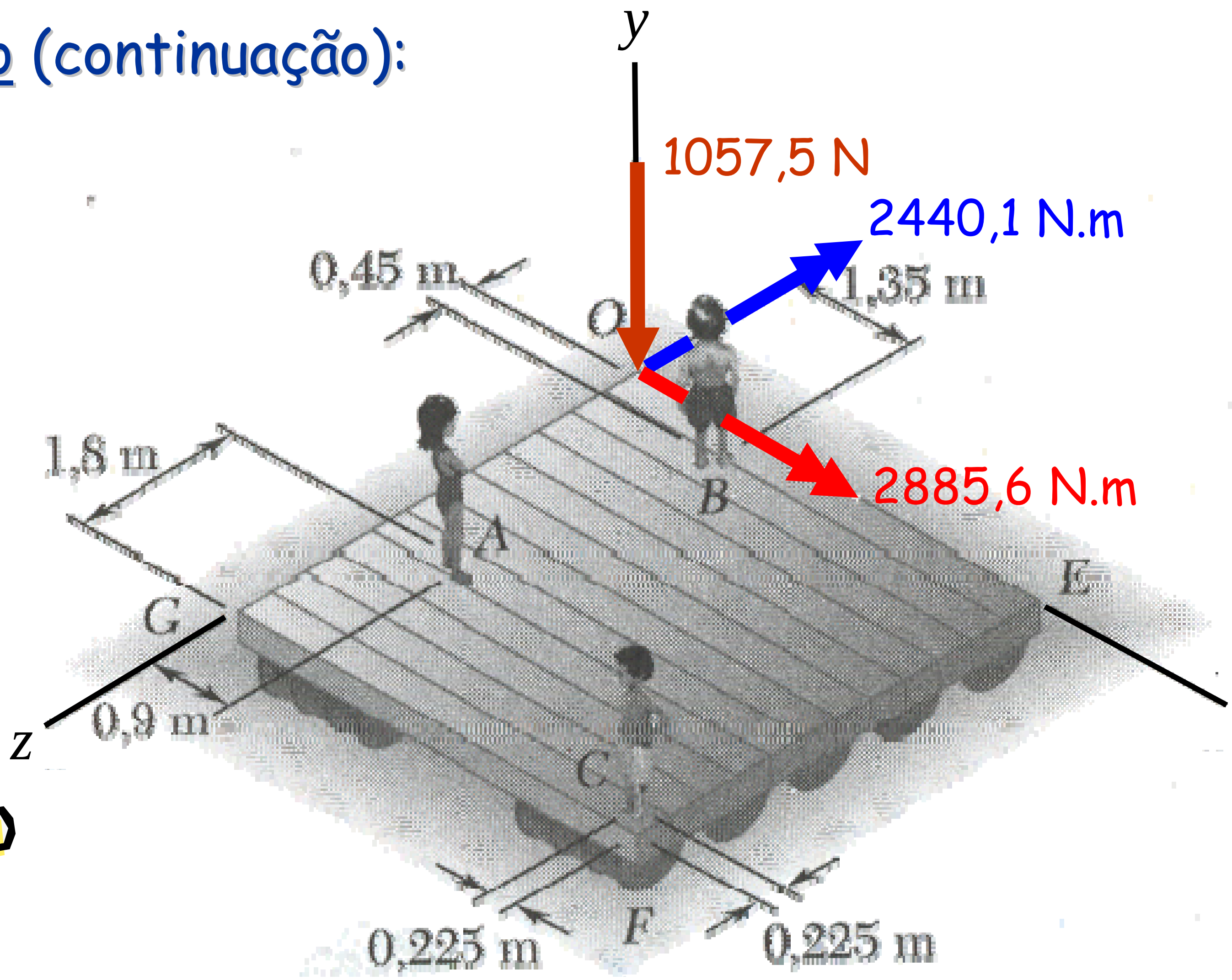
Casos Particulares de Redução de um Sistema de Forças

Exemplo (continuação):



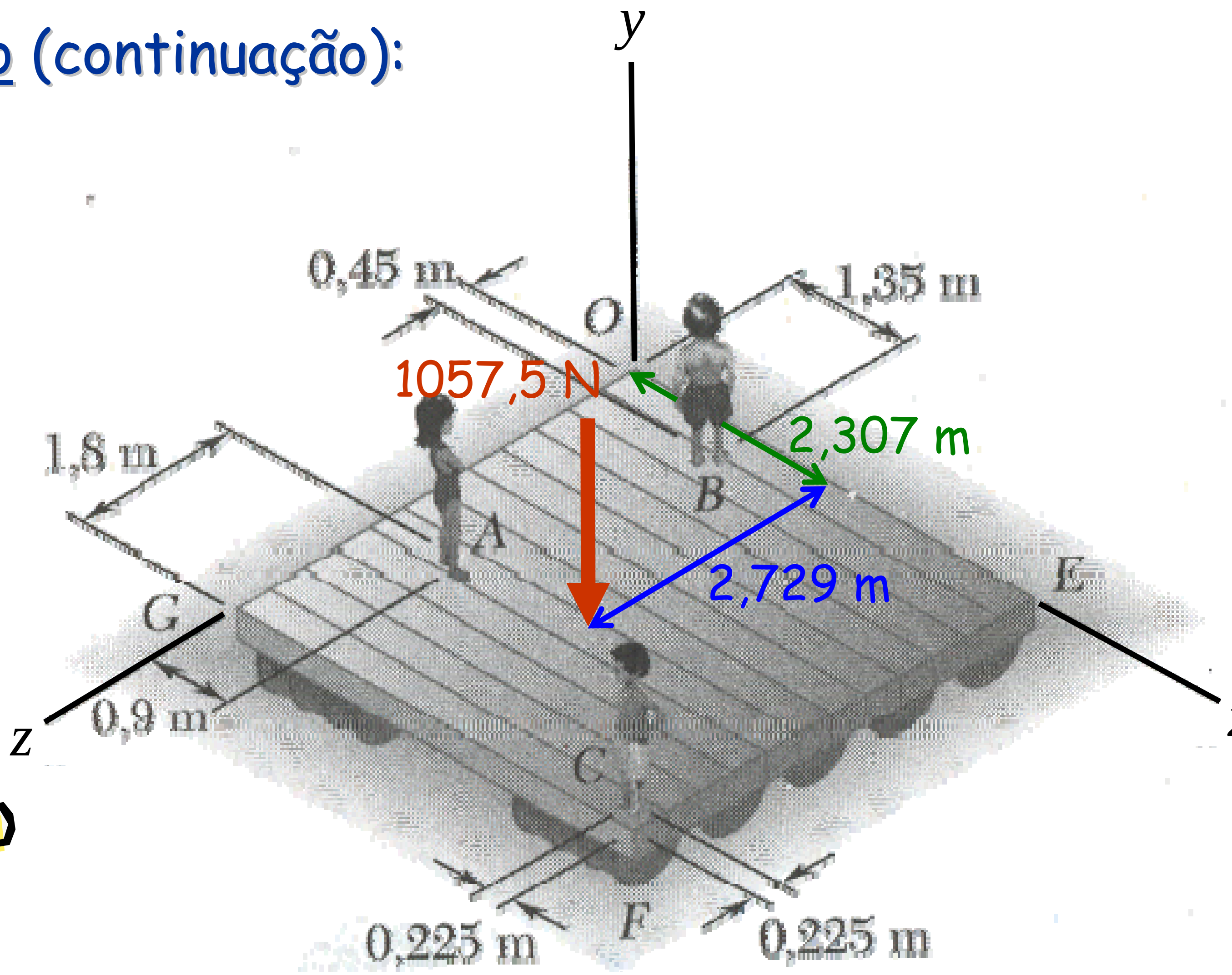
Casos Particulares de Redução de um Sistema de Forças

Exemplo (continuação):



Casos Particulares de Redução de um Sistema de Forças

Exemplo (continuação):



Sistemas Eqüipolentes e Sistemas Equivalentes de Forças

Dois sistemas de forças são **eqüipolentes** se puderem ser reduzidos ao mesmo sistema força-binário em um dado ponto de referência, ou seja,

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}' \quad e \quad \sum \vec{M}_O = \sum \vec{M}'_O$$

Dois sistemas de forças são **equivalentes** se forem **eqüipolentes** e provocarem os mesmo efeitos sobre o corpo em que atuam.