KAPITOLA 6: Hilbertovy prostory

Definice: **Prostor se skalárním součinem** je dvojice $(V, \langle .\,,.\rangle)$, kde V je lineární prostor a $\langle .\,,.\rangle : V \times V \to \mathbb{C}\,(\mathbb{R})$ splňuje pro všechna $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$ následující podmínky

(i) $\langle x,\, y\rangle \;=\; \overline{\langle y,\, x\rangle}$

(ii) $\langle x + y,\, z\rangle \;=\; \langle x,\, z\rangle + \langle y,\, z\rangle$

(iii) $\langle \alpha x,\, y\rangle \;=\; \alpha \langle x,\, y\rangle,$

(iv) $\langle x,\, x\rangle \;\geq\; 0$

(v) $\langle x,\, x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \mathbf{0}.$

Na základě bodu **(i)** je skalární součin v reálném prostoru symetrický.

Poznámka: Jako jednoduché důsledky axiomů dostáváme

$$\langle x,\, \alpha y\rangle \;=\; \overline{\alpha}\langle x,\, y\rangle,$$
$$\langle x,\, y + z\rangle \;=\; \langle x,\, y\rangle + \langle x,\, z\rangle\,.$$

Značení: $\|x\| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle}$ (později ukážeme, že $\|.\|$ je norma na V)

Příklady: **1)** • $\mathbb{R}^n$: Pro $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x,\, y\rangle = x_1\, y_1 + \ldots + x_n\, y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\,, \qquad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\,.$$

• $\mathbb{C}^n$: Pro $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\langle x,\, y\rangle = x_1\, \overline{y_1} + \ldots + x_n\, \overline{y_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \overline{y_i}\,, \qquad \|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}\,.$$

2) $l^2 \;=\; \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \,\big|\, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$: Pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty},\ y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$

$$\langle x,\, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, \overline{y_i}\,, \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}\,.$$

Je potřeba ukázat, že v definici skalárního součinu řada vpravo konverguje. K tomu si uvědomíme, že z nerovností $0 \leq (a \pm b)^2$, které platí pro reálná a, b, dostáváme $\mp 2ab \leq a^2 + b^2$, tedy $|ab| \leq \frac{1}{2}\,(a^2 + b^2)$. Odtud pro každé i platí $|x_i\, \overline{y_i}| \leq \frac{1}{2}\,(|x_i|^2 + |\overline{y_i}|^2) = \frac{1}{2}\,(|x_i|^2 + |y_i|^2)$. Absolutní hodnoty členů řady vpravo tak máme shora odhadnuté součtem členů dvou konvergentních řad, a tedy tato řada konverguje.

3) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – prostor s mírou, $L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \;=\; \{f : X \to \mathbb{C} \,\big|\, f \text{ je měřitelná}, \int_X |f(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) < \infty\}$:
Pro $f, g \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$

$$\langle f,\, g\rangle = \int_X f(x)\, \overline{g(x)}\ \mathrm{d}\mu(x)\,, \qquad \|f\| = \sqrt{\int_X |f(x)|^2\ \mathrm{d}\mu(x)}\,.$$

4) $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – pravděpodobnostní prostor, V = prostor náhodných veličin s konečným druhým momentem a střední hodnotou: Pro $X, Y \in V$

$$\langle X,\, Y\rangle = E(X\, \overline{Y})\,.$$

Pak např.

$$\mathrm{Var}(X, Y) = \langle X - EX,\, Y - EY\rangle, \quad \sigma(X, Y) = \sqrt{\langle X - EX,\, Y - EY\rangle}.$$

Definice: Prvky $x, y \in V$ jsou **kolmé (ortogonální)** (značíme $x \perp y$), jestliže

$$\langle x,\, y\rangle \;=\; 0.$$

Věta (Pythagorova): Pro $x, y \in V$ platí

$$x \perp y \quad \Rightarrow \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Důkaz: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \underbrace{\langle x, y \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y, x \rangle}_{=0} + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$ □

Věta (Geometrický rozklad): Pro $x, y \in V$, $y \neq \mathbf{0}$ existují jediná $z \in V$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ tak, že

$$z \perp y \qquad \text{a} \qquad x = z + \lambda y.$$

(Jde o rozklad x do dvou kolmých směrům, přičemž jeden z nich je zadán.)

Důkaz: Nejdřív ukážeme jednoznačnost rozkladu. Nechť $x = z + \lambda y$, kde $z \perp y$. Vynásobme rovnost $x = z + \lambda y$ skalárně vektorem y. Dostaneme

$$\langle x, y \rangle = \langle z, y \rangle + \lambda \langle y, y \rangle = \lambda \|y\|^2.$$

Odtud je zřejmé, že pro λ musí platit

$$\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}. \tag{1}$$

Pak ale nutně

$$z = x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y.$$

Nyní se podívejme na existenci rozkladu. Zvolme λ podle (1) a položme $z = x - \lambda y$. Pak $x = z + \lambda y$. Ukážeme ještě, že $z \perp y$:

$$\langle z, y \rangle = \langle x - \lambda y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \lambda \|y\|^2 = \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \|y\|^2 = 0.$$ □

Věta (Schwarzova nerovnost): Pro každé dva prvky x, y prostoru se skalárním součinem V platí

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když x, y jsou lineárně závislé.

Důkaz: Je-li $y = 0$, pak x a y jsou lineárně závislé a $|\langle x, y \rangle| = 0 = \|x\| \, \|y\|$. Předpokládejme tedy, že $y \neq 0$. Zapišme x ve tvaru $x = z + \lambda y$, kde $z \in V$, $z \perp y$, a $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$. Pak podle Pythagorovy věty

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + |\lambda|^2 \|y\|^2 \geq |\lambda|^2 \|y\|^2 = \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 = \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}, \tag{2}$$

tedy

$$\|x\|^2 \|y\|^2 \geq |\langle x, y \rangle|^2.$$

Z (2) rovnost nastává právě tehdy, když $\|z\| = 0$, tj. v případě, že $z = 0$ a $x = \lambda y$.

Příklad: Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ a $f \in L^2\langle a, a+T \rangle$. Fourierův koeficient c_n funkce f je definován vztahem

$$c_n = \langle f, \frac{1}{T} \,\mathrm{e}^{in\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) \,\mathrm{e}^{-in\omega t} \,\mathrm{d}t.$$

Protože

$$\| \mathrm{e}^{in\omega t} \|^2 = \int_a^{a+T} | \mathrm{e}^{in\omega t} |^2 \,\mathrm{d}t = T,$$

máme pro c_n podle Schwarzovy nerovnosti odhad

$$|c_n| \leq \|f\|_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{T}}.$$

Rovnost přitom nastává, právě když f je „čistá frekvence“, tj. násobek $\mathrm{e}^{in\omega t} = \cos n\omega t + i \sin n\omega t$.

Důsledek : Pro prostor V se skalárním součinem platí

$$\|x+y\| \;\le\; \|x\|+\|y\|$$

a $\|.\|$ je norma na V.

Důkaz: Ze Schwarzovy nerovnosti máme

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y,\, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle y,\, x\rangle + \langle x,\, y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,\, y\rangle + \|y\|^2 \le$$

$$\le \|x\|^2 + 2|\langle x,\, y\rangle| + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2.$$

Tím pro $\|.\|$ platí trojúhelníková nerovnost. Splnění zbylých vlastností normy dostáváme přímo z definice skalárního součinu. □

Tvrzení (Rovnoběžníkové pravidlo) : Pro $x,\, y \in V$ máme

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \;=\; 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Důkaz: Použijeme-li podobné přepisy jako v předchozím důkazu, dostaneme

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y,\, x+y\rangle + \langle x-y,\, x-y\rangle =$$

$$= \|x\|^2 + \langle y,\, x\rangle + \langle x,\, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle y,\, x\rangle - \langle x,\, y\rangle + \|y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2\,. \qquad \square$$

Tvrzení : Skalární součin je spojitá funkce, tj.

$$\left.\begin{matrix} x_n \to x \\ y_n \to y \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \langle x_n,\, y_n\rangle \to \langle x,\, y\rangle\,.$$

Důkaz: Máme

$$\langle x_n,\, y_n\rangle = \langle x + (x_n - x),\, y + (y_n - y)\rangle = \langle x,\, y\rangle + \langle x,\, y_n - y\rangle + \langle x_n - x,\, y\rangle + \langle x_n - x,\, y_n - y\rangle,$$

kde pro poslední tři sčítance vpravo platí

$$|\langle x,\, y_n - y\rangle| \;\le\; \|x\| \cdot \|y_n - y\| \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0,$$

$$|\langle x_n - x,\, y\rangle| \;\le\; \|x_n - x\| \cdot \|y\| \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0,$$

$$|\langle x_n - x,\, y_n - y\rangle| \;\le\; \|x_n - x\| \cdot \|y_n - y\| \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Tedy $\langle x_n,\, y_n\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x,\, y\rangle$. □

Definice : Úplný prostor se skalárním součinem se nazývá **Hilbertův prostor**.

Příklady :

- Je-li U prostor se skalárním součinem, $\dim U < \infty$, pak U je Hilbertův prostor.
- l^2 je Hilbertův prostor.
- $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ je Hilbertův prostor.
- Podprostor $V \subset l^2$, který obsahuje právě všechny posloupnosti s konečně mnoha nenulovými členy, není Hilbertův. Uvažujme např. posloupnosti $x^k = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{k}, 0, 0, \dots) \in V$ a posloupnost $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \in l^2 \setminus V$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^2$ konverguje a $\|x - x^k\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} (\frac{1}{n})^2$, máme $\|x - x^k\|^2 \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, a tedy $x^k \to x$ v l^2. Našli jsme tak posloupnost prvků z V, jejíž limita do V nepatří. Podprostor V úplného prostoru l^2 tedy není uzavřený, a tím ani úplný.

Nejlepší aproximace

Definice: Nechť X je normovaný prostor, $M \subset X$ a $x \in X$. Potom **vzdálenost bodu** x **od množiny** M je

$$\operatorname{dist}(x, M) = \delta(x, M) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in M\}$$

Bod $x_0 \in M$ je **nejbližším bodem** k bodu x, jestliže

$$\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x, M).$$

Poznámka: Problém existence a jednoznačnosti nejbližšího bodu (kreslete si obrázky): Nejbližší bod

- nemusí existovat (např. v $\mathbb{R}^2$ pro $x = (0,1)$ a $M = \{(x_1, 0) \,\big|\, 0 < x_1 < 1\}$)
- může existovat právě jeden (např. v $\mathbb{R}^2$ pro $x = (0,1)$ a $M = \{(x_1, 0) \,\big|\, x_1 \in \mathbb{R}\}$)
- může jich existovat více, i nekonečně mnoho (např. v $\mathbb{R}^2$ pro $x = (0,1)$ a $M = \{(x_1, x_2) \,\big|\, x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1\}$)

Definice: Nechť $x, y \in L$, kde L je lineární prostor. **Úsečkou s krajními body** x, y je množina

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda) y \,\big|\, 0 \le \lambda \le 1\}.$$

Množina $K \subset L$ je **konvexní**, jestliže platí implikace

$$x, y \in K \;\Rightarrow\; [x, y] \subset K.$$

Věta (Nejlepší aproximace): Nechť K je uzavřená konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Ke každému $x \in H$ existuje jediný nejbližší bod z množiny K.

Důkaz: **a)** Existence: Mějme $x \in H$, označme $\delta = \operatorname{dist}(x, K)$. Z definice infima existuje posloupnost $(y_n) \subset K$ tak, že

$$\delta_n = \|x - y_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta.$$

Ukážeme, že (y_n) je cauchyovská: Položme $v_n = y_n - x$. Pak $\|v_n\| = \delta_n$ a

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\| = 2\,\|\underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in K} - x\| \ge 2\delta.$$

Použijeme rovnoběžníkové pravidlo pro v_n a v_m a dostaneme

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2 = -\|v_n + v_m\|^2 + 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2) \le -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Posloupnost (y_n) je tak cauchyovská a má limitu $y \in K$ (K je uzavřená). Ze spojitosti funkce $h \mapsto \|x - h\|$ platí

$$\delta_n = \|x - y_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|x - y\|.$$

Přitom také $\delta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta$, tedy $\|x - y\| = \delta$.
b) Jednoznačnost: Nechť y a y_0 jsou nejlepší aproximace x v K, tj. $\|x - y\| = \|x - y_0\| = \delta$. Ukážeme, že pak $y = y_0$. Opět použijeme rovnoběžníkové pravidlo. Dostaneme

$$0 \le \|y - y_0\|^2 = \|(y - x) - (y_0 - x)\|^2 = 2\|y - x\|^2 + 2\|y_0 - x\|^2 - \|(y - x) + (y_0 - x)\|^2 =$$

$$= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2\,\underbrace{\|\underbrace{\frac{y + y_0}{2}}_{\in K} - x\|^2}_{\ge \delta^2} \le 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$

To znamená, že $\|y - y_0\| = 0$, a tedy $y = y_0$. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Značení: Pro $x \in H,\ M, N \subset H$ pokládáme

$$x \perp M \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle x,\, y\rangle = 0 \quad \forall\, y \in M,$$

$$N \perp M \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle x,\, y\rangle = 0 \quad \forall\, x \in N,\ \forall\, y \in M,$$

$$M^{\perp} \;=\; \{\, x \in H \mid\ x \perp M \}\,.$$

Je-li $N \perp M$, pak zřejmě $N \cap M = \{\mathbf{0}\}$. Dále z linearity skalárního součinu v první složce a jeho spojitosti je pro jakoukoliv podmnožinu $M \subset H$ množina $M^{\perp}$ uzavřený podprostor prostoru H.

Věta: Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H a $x \in H$. Bod $x_0 \in M$ je nejbližším bodem množiny M k bodu x právě tehdy, když

$$x - x_0 \;\in\; M^{\perp}.$$

Důkaz: " $\Rightarrow$ " Volme $a \in M,\ a \neq 0$. Na základě geometrického rozkladu existuje $\lambda \in \mathbb{C}\,(\mathbb{R})$ a $z \in H,\ z \perp a,$ tak, že

$$x - x_0 \;=\; \lambda\, a \;+\; z.$$

Podle Pythagorovy věty je

$$\|x - x_0\|^2 = \|\lambda\, a\|^2 + \|z\|^2.$$

Protože $x_0 + \lambda\, a \in M$ a x_0 je nejbližší bod množiny M k bodu x, máme

$$\|x - x_0\|^2 \le \|x - x_0 - \lambda a\|^2 = \|z\|^2 \le \|x - x_0\|^2.$$

To ale znamená, že $\|z\|^2 = \|x - x_0\|^2$, a tím $\|\lambda\, a\|^2 = 0$. Tedy $x - x_0 = z \perp a$. Protože $a \in M$ bylo libovolné, dostáváme, že platí $x - x_0 \in M^{\perp}$.

" $\Leftarrow$ " Ať $x - x_0 \perp M$. Pak pro každé $a \in M$ máme

$$\|x - a\|^2 = \|x - x_0 + \underbrace{x_0 - a}_{\in M}\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - a\|^2 \ge \|x - x_0\|^2.$$

To znamená, že x_0 je nejbližší bod množiny M k bodu x. $\square$

Definice: Podprostory V_1 a V_2 lineárního prostoru V tvoří **algebraický rozklad** prostoru V (prostor V je **direktním součtem** podprostorů V_1 a V_2), jestliže

$$V \;=\; \text{lineární obal }\ V_1 \cup V_2 \qquad \text{a} \qquad V_1 \cap V_2 \;=\; \{\mathbf{0}\}.$$

Píšeme

$$V = V_1 \oplus_{\text{lin}} V_2.$$

Ekvivalentně: Pro každé $v \in V$ existují jediné dva prvky $v_1 \in V_1$ a $v_2 \in V_2$ tak, že $v = v_1 + v_2$.
(Jednoznačnost: Je-li $x = v_1 + v_2 = u_1 + u_2$, kde $v_1, u_1 \in V_1,\ v_2, u_2 \in V_2$, pak $v_1 - u_1 = u_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$.)

Definice: Prostor V se skalárním součinem je **ortogonální součet** podprostorů V_1 a V_2, jestliže

$$V \;=\; \text{lineární obal }\ V_1 \cup V_2 \qquad \text{a} \qquad V_1 \;\perp\; V_2\,.$$

Píšeme

$$V \;=\; V_1 \oplus V_2.$$

Ekvivalentně: Pro každé $v \in V$ existují jediné dva prvky $v_1 \in V_1$ a $v_2 \in V_2$ tak, že $v = v_1 + v_2$ a $v_1 \perp v_2$.
(Jednoznačnost dostáváme jako u algebraického rozkladu z toho, že pro $V_1 \perp V_2$ platí $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$.)

Věta (Projekční): Je-li M uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H, pak

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Důkaz: Nechť x_M je nejbližší bod k bodu x v množině M. Pak $x = x_M + x_{M^\perp}$, kde $x_{M^\perp} = x - x_M \in M^\perp$. Tedy H je lineární obal $M \cup M^\perp$. Protože $M \perp M^\perp$, máme $H = M \oplus M^\perp$. $\square$

Poznámka: Projekční věta nám vlastně říká toto: *Pro každé $x \in H$ je $x = x_M + x_{M^\perp}$, kde $x_M \in M$ a $x_{M^\perp} \in M^\perp$. Aproximace x_M a $x_{M^\perp}$ prvku x v M a $M^\perp$ jsou určeny jednoznačně a jsou v odpovídajícím podprostoru nejlepší.* Prvek $x_{M^\perp}$ je skutečně nejbližší prvek k prvku x v podprostoru $M^\perp$, protože podprostor $M^\perp$ je uzavřený a $x - x_{M^\perp} = x_M \in M = (M^\perp)^\perp$. (Rovnost $M = (M^\perp)^\perp$ je dokázána dále).

Poznámka: Protože $M \cap M^\perp = \{\mathbf{0}\}$, máme z Pythagorovy věty pro $x = x_M + x_{M^\perp}$

$$\|x_M\| = \|x\| \ \Leftrightarrow\ x \in M \qquad \text{a} \qquad \|x_M\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x \in M^\perp.$$

Definice: Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Potom zobrazení $P_M : H \to M$ takové, že

$$P_M: \quad x \quad \mapsto \quad x_M \ \text{ - nejlepší aproximace } x \text{ v } M,$$

nazýváme **ortogonální projekce**.

Platí: P_M je omezený lineární operátor, pro který je $\|P_M\| = 1$ a $P_M^2 = P_M$.

Důkaz: Linearita: Nechť $x, y \in H$, pak $P_M x = x_M \in M, P_M y = y_M \in M$, odkud $P_M x + P_M y \in M$. Dále $x - x_M \in M^\perp$, $y - y_M \in M^\perp$, tedy $(x+y) - (P_M x + P_M y) = (x+y) - (x_M + y_M) = (x - x_M) + (y - y_M) \in M^\perp$. To znamená, že $P_M(x+y) = P_M x + P_M y$. Je-li nyní $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$, pak $\alpha P_M x \in M$ a $\alpha x - \alpha P_M x = \alpha(x - P_M x) \in M^\perp$. Tedy $P_M(\alpha x) = \alpha P_M x$.

Omezenost a velikost normy: Pro $x \in H$ máme $x = x_M + x_{M^\perp}$, kde $x_M \in M$ a $x_{M^\perp} \in M^\perp$ jsou navzájem kolmé. Tedy podle Pythagorovy věty $\|x\|^2 = \|x_M\|^2 + \|x_{M^\perp}\|^2 \geq \|x_M\|^2 = \|P_M x\|^2$. Odtud $\|P_M\| \leq 1$ a P_M je omezený operátor. Navíc pro libovolné $x \in M$ máme $P_M x = x$, tedy $\|P_M x\| = \|x\|$, což znamená, že $\|P_M\| \geq 1$. Z obou odhadů pro $\|P_M\|$ dostáváme $\|P_M\| = 1$.

Projekce: Protože pro každé $y \in M$ je $P_M y = y$ a pro každé $x \in H$ je $P_M x \in M$, máme $P_M^2 x = P_M(P_M x) = P_M x$. $\square$

Důsledky (projekční věty): **a)** Pro každý vlastní uzavřený podprostor M v Hilbertově prostoru H existuje nenulový vektor $x \in H$ tak, že

$$x \perp M.$$

b) Je-li M uzavřený podprostor, pak pro $M^{\perp\perp} = (M^\perp)^\perp$ platí

$$M = M^{\perp\perp}.$$

c) Je-li A podmnožina H, pak

$$[A] = A^{\perp\perp},$$

kde $[A] = \overline{\operatorname{lin} A}$.

Důkaz: **a)** Podle projekční věty máme $H = M \oplus M^\perp$. Protože M je vlastní podprostor, musí existovat $0 \neq x \in M^\perp$.
b) Použijeme-li projekční větu postupně na podprostory M a $M^\perp$ dostaneme $H = M \oplus M^\perp = M^\perp \oplus (M^\perp)^\perp$. Odtud $(M^\perp)^\perp = M$.
c) Každý prvek z A je kolmý na všechny prvky v $A^\perp$, tedy $A \subset (A^\perp)^\perp$. Protože $(A^\perp)^\perp$ je uzavřený podprostor obsahující A a $[A]$ je nejmenší uzavřený podprostor obsahující A, máme $[A] \subset (A^\perp)^\perp$. Rovnost obou podprostorů dokážeme sporem. Předpokládejme, že $[A]$ je vlastní podprostor prostoru $(A^\perp)^\perp$. Pak podle části a), aplikované na Hilbertův prostor $(A^\perp)^\perp$ a jeho uzavřený podprostor $[A]$, existuje nenulový prvek $x \in (A^\perp)^\perp \cap [A]^\perp \subset (A^\perp)^\perp \cap A^\perp$. (Je-li totiž $B \subset C$, pak $C^\perp \subset B^\perp$.) Tím jsme ale dostali spor s tím, že $(A^\perp)^\perp \cap A^\perp = \{0\}$. Musí tedy být $[A] = (A^\perp)^\perp$. $\square$

Poznámka: Předpokládejme, že H je Hilbertův prostor a M jeho podprostor takový, že $M = \operatorname{lin}(e_1, \ldots, e_n)$, kde

$$\|e_j\| = 1 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n \qquad \text{a} \qquad \langle e_j, e_i \rangle = 0 \quad \forall\, i \neq j$$

(tj. množina $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je **ortonormální**). Potom pro každé $x \in H$ je

$$P_M(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \langle x,\, e_j \rangle e_j \;=\; \langle x,\, e_1 \rangle\, e_1 + \ldots + \langle x,\, e_n \rangle\, e_n.$$

Pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ totiž platí

$$\langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j,\, e_i \rangle = \langle x,\, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \langle e_j,\, e_i \rangle = \langle x,\, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x,\, e_j \rangle \delta_{ji} = \langle x,\, e_i \rangle - \langle x,\, e_i \rangle = 0,$$

což znamená, že $(x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j) \perp \operatorname{lin}(e_1, \ldots, e_n) = M$. Protože navíc $\sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \in M$, je to nejlepší aproximace x v M.

Je-li nyní M konečně dimenzionální podprostor s obecnou lineární bází $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ a $x \in H$, pak

$$P_M(x) \;=\; a_1 \varphi_1 + \ldots + a_n \varphi_n,$$

kde z podmínek kolmosti $(x - P_M x) \perp \varphi_i \;\; \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$ dostaneme koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ jako řešení soustavy rovnic

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \langle \varphi_j,\, \varphi_i \rangle = \langle x,\, \varphi_i \rangle \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Matice této soustavy

$$\big(\langle \varphi_j,\, \varphi_i \rangle \big)_{i,j=1,\ldots,n}$$

se nazývá **Gramova matice** vektorů $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (obecně ne nutně lineárně nezávislých). V našem případě, kdy $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tvoří bázi podprostoru M, je Gramova matice regulární. Každý konečně dimenzionální podprostor je totiž uzavřený, takže podle věty o nejlepší aproximaci má soustava pro koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ vždy právě jedno řešení. Obecně platí, že Gramova matice vektorů $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ je regulární, právě když jsou vektory lineárně nezávislé. Vektory jsou tedy lineárně nezávislé právě tehdy, když jejich Gramova matice má nenulový determinant.

Metoda nejmenších čtverců

Uvažujme $H = \mathbb{R}^m$ (m velké). Mějme dánu tabulku naměřených hodnot funkce f

x_1	x_2	$\ldots$	x_m	- uzly měření x
f_1	f_2	$\ldots$	f_m	- naměřené hodnoty f

Funkci f bychom chtěli aproximovat pomocí lineární kombinace funkcí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, kde $n \ll m$, pro které jsou vektory $(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_1(x_m))$, $\ldots$, $(\varphi_n(x_1), \ldots, \varphi_n(x_m))$ z $\mathbb{R}^m$ lineárně nezávislé (pak jsou nutně i funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ lineárně nezávislé). Můžeme mít např. $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = x$, $\varphi_3 = x^2$, $\ldots$, $\varphi_n = x^{n-1}$. Hledaná aproximace

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x)$$

funkce f by měla minimalizovat střední kvadratickou odchylku

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} |f_j - \varphi(x_j)|^2 \Big)^{1/2} \;=\; \|(f_1, \ldots, f_m) - (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m)\|_2.$$

Jedná se tu o úlohu ortogonální projekce na lineární obal vektorů $(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_1(x_m))$, $\ldots$, $(\varphi_n(x_1), \ldots, \varphi_n(x_m))$ v $\mathbb{R}^m$.

Zobecnění: V $\mathbb{R}^m$ uvažujeme skalární součin

$$\langle (x_1, \ldots, x_m),\, (y_1, \ldots, y_m) \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{m} w_i x_i y_i\,,$$

kde $w_i > 0$ jsou váhy určující důležitost daného měření.

Ortonormální báze

Definice : Množina A v prostoru se skalárním součinem V je **ortogonální**, jestliže $\langle x, y\rangle = 0$, kdykoliv $x, y \in A$, $x \neq y$. Množina A je **ortonormální**, jestliže je ortogonální a $\|x\| = 1$ pro všechna $x \in A$.

Příklady : 1) $\underline{\mathbb{C}^n}$:

$$\begin{gathered}(1, 0, 0, \ldots, 0, 0)\\(0, 1, 0, \ldots, 0, 0)\\\vdots\\(0, 0, 0, \ldots, 0, 1)\end{gathered}$$

je ortonormální (konečná posloupnost) – „prototyp“

2) Diskrétní Fourierova báze $\mathbb{C}^n$: (konvence: $x = (x(0), x(1), \ldots, , x(n-1))$)

$$F = \{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\},$$

kde pro $m, K = 0, \ldots, n-1$ je

$$f_m(K) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}\, mK}.$$

($i^2 = 1$, $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$)

Pozorování: Funkce $\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}\, mK}$ v proměnné m je n-periodická, m zvětšuje frekvenci, kruhová rychlost: $\frac{2\pi}{n}\, m$, perioda: $T = \frac{n}{m}$.

Ověříme, že $\{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ je ortonormální množina: Označme $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$ ($\omega^n = 1$, $\omega^{k+n} = \omega^k$). Pak $f_m(K) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, \omega^{mK}$ a

$$\langle f_j, f_m\rangle = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{jl}\omega^{-ml} = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{(j-m)l} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{pro } j = m \\ \dfrac{1}{n}\, \dfrac{1-(\omega^{j-m})^n}{1-\omega^{j-m}} = 0 & \text{pro } j \neq m \end{cases}$$

Fourierova báze pro $n = 2$:

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(1,\ \ 1)\\\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(1, -1)\end{gathered}$$

Fourierova báze pro $n = 4$:

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\,(1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1)\\\tfrac{1}{2}\,(1,\ \ i, -1, -i)\\\tfrac{1}{2}\,(1, -1,\ \ 1, -1)\\\tfrac{1}{2}\,(1, -i, -1,\ \ i)\end{gathered}$$

Diskrétní Fourierova transformace (DFT):

$$\big(x(j)\big)_{j=0}^{n-1} \longmapsto \underbrace{(\,\langle x, f_j\rangle\,)_{j=0}^{n-1}}_{\text{souřadnice vůči Fourierově bázi}}$$

Poznámka : Nechť V je prostor se skalárním součinem konečné dimenze a $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je jeho ortonormální báze. Potom pro každá $x, y \in V$ platí

- $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle\, e_j$ (konečně dimenzionální Fourierův rozklad)

  Je-li totiž $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, pak po skalárním vynásobení x bázovým vektorem e_i dostaneme $a_i = \langle x, e_i\rangle$.

- $||x||^2 \;=\; \sum_{j=1}^{n} |\langle x,\, e_j\rangle|^2,$

  neboť máme

$$||x||^2 = \langle x,\, x\rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \langle x,\, e_j\rangle e_j,\, \sum_{k=1}^{n} \langle x,\, e_k\rangle e_k\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x,\, e_j\rangle \overline{\langle x,\, e_j\rangle} = \sum_{j=1}^{n} |\langle x,\, e_j\rangle|^2.$$

  (Můžeme též použít Pythagorovu větu.)

- $\langle x,\, y\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{n} \langle x,\, e_j\rangle \overline{\langle y,\, e_j\rangle}.$

  (Zdůvodnění jako u $\|x\|^2$).

Konečně dimenzionální Hilbertovy prostory jsou tedy v podstatě l_n^2.

Otázka: Jak je tomu v nekonečné dimenzi?

Nejdřív se podíváme na existenci ortonormální posloupnosti v daném podprostoru:

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

Nechť $x_1, x_2, ...$ je lineárně nezávislá posloupnost. Nalezněme ortonormální posloupnost $e_1, e_2, \ldots$ tak, že pro všechna n

$$\operatorname{lin}(e_1, \ldots, e_n) \;=\; \operatorname{lin}(x_1, \ldots, x_n) \;:$$

1. krok

$$e_1 = \frac{x_1}{||x_1||}$$

2. krok

$$v_2 = x_2 - P_{\operatorname{lin}(e_1)}(x_2) = x_2 - \langle x_2,\, e_1\rangle\, e_1$$
$$e_2 = \frac{v_2}{||v_2||}$$

3. krok

$$v_3 = x_3 - P_{\operatorname{lin}(e_1, e_2)}(x_3) = x_3 - \langle x_3,\, e_1\rangle e_1 - \langle x_3,\, e_2\rangle\, e_2$$
$$e_3 = \frac{v_3}{||v_3||}$$

$\vdots$

n-tý krok

$$v_n = x_n - P_{\operatorname{lin}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})}(x_n) = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n,\, e_j\rangle\, e_j$$
$$e_n = \frac{v_n}{||v_n||}$$

(Protože je posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ lineárně nezávislá a $\operatorname{lin}(e_1, \ldots, e_n) = \operatorname{lin}(x_1, \ldots, x_n)$, jsou vektory $x_1, v_2, v_3, \ldots$ nenulové, a tedy posloupnost $e_1, e_2, \ldots$ je korektně definovaná.)

Příklad : Najděte ortonormální bázi podprostoru M prostoru $V = \mathbb{R}^3$, kde

$$M = \{(y_1, y_2, y_2) \,\big|\, y_1 + y_2 + y_3 = 0\}.$$

Řešení: Množina M je rovina, jejímž normálovým vektorem je vektor $(1,1,1)$. Lineární bázi podprostoru M tvoří např. vektory $x_1 = (1,-1,0)$, $x_2 = (1,0,-1)$.

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}} \\
v_2 &= x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1 = (1,0,-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}} = (1,0,-1) - \frac{1}{2}\,(1,-1,0) = \Big(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,-1\Big) \\
e_2 &= \frac{(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,-1)}{\sqrt{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

Definice: Množina A v normovaném prostoru X je **hustá**, jestliže jejím uzávěrem je celý prostor X, tj. pokud $\overline{A} = X$.

Definice: Normovaný prostor X je **separabilní**, pokud v X existuje spočetná množina $\{x_n \,|\, n \in N\}$ taková, že

$$\overline{\{x_n |\, n \in N\}} \;=\; X$$

(tj. existuje-li v X spočetná hustá podmnožina).

Tvrzení: Normovaný prostor X je separabilní, jestliže existuje spočetná množina $\{y_n \,|\, n \in N\} \subset X$ tak, že

$$\overline{\operatorname{lin}\{y_n |\, n \in N\}} \;=\; X.$$

Důkaz: Spočetná množina

$$\{\alpha_1\, y_1 + \ldots + \alpha_n\, y_n \,\big|\, n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q}\}$$

má za uzávěr celé X na základě aproximace reálných čísel racionálními. $\square$

Definice: **Ortonormální báze** (ONB) Hilbertova prostoru H je ortonormální množina A taková, že

$$\overline{\operatorname{lin} A} \;=\; H \qquad (\Leftrightarrow A^{\perp} = \{\mathbf{0}\}).$$

Věta: **(1)** Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.

(2) Každá ortonormální množina v Hilbertově prostoru je částí ortonormální báze.

(3) Každá ortonormální množina v separabilním Hilbertově prostoru je spočetná.

Důkaz: **(1)** Ukážeme pro separabilní prostor H. Nechť $\{x_n \,\big|\, n \in \mathbb{N}\}$ je hustá množina v H. Existuje spočetná báze $\{y_n \,\big|\, n \in \mathbb{N}\}$ prostoru $\operatorname{lin}\{x_n \,\big|\, n \in \mathbb{N}\}$. Na posloupnost $y_1, y_2, \ldots$ aplikujeme ortogonalizační proces a dostaneme ortonormální posloupnost $e_1, e_2, \ldots$ takovou, že

$$\operatorname{lin}\{e_n \,\big|\, n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{lin}\{y_n \,\big|\, n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{lin}\{x_n \,\big|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Tedy $\overline{\operatorname{lin}\{e_n \,\big|\, n \in \mathbb{N}\}} \;=\; H$.

(2) Pro H separabilní. Nechť A je ortonormální množina v H. Položme

$$M \;=\; [A]\ (= \overline{\operatorname{lin} A}\,).$$

Prostor $M^{\perp}$ je separabilní a má tedy ortonormální bázi B. (Je-li $\{y_n \,\big|\, n \in \mathbb{N}\}$ hustá v H, pak $\{P_{M^{\perp}}(y_n) \,\big|\, n \in \mathbb{N}\}$ je hustá v $M^{\perp}$.) Množina $A \cup B$ je ortonormální báze H, neboť $M \oplus M^{\perp} = H$.

(3) Důkaz provedeme sporem. Ať A je nespočetná ortonormální množina v H. Ať $\overline{\operatorname{lin}\{y_n |\, n \in N\}} \;=\; H$. Pro každé $x \in A$ existuje $y(x) \in \{y_n |\, n \in N\}$ tak, že $\|x - y(x)\| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Přitom pro $x, z \in A$, $x \neq z$, je $x \perp (-z)$, tedy $\|x - z\| = \|x + (-z)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|-z\|^2} = \sqrt{2}$. Zároveň ale platí $\|x - z\| \leq \|x - y(x)\| + \|y(x) - y(z)\| + \|y(z) - z\| < \sqrt{2} + \|y(x) - y(z)\|$. Musí tak být $y(x) \neq y(z)$ pro $x, z \in A$, $x \neq z$. Tedy $\{y(x) \,\big|\, x \in A\}$ je nespočetná podmnožina spočetné množiny $\{y_n |\, n \in N\}$. Tím jsme došli ke sporu. $\square$

Tvrzení: Ať $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru H.

(i) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, kde $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}(\mathbb{R})$, konverguje právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$.

(ii) Pro $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ je $||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^2$ („nekonečná Pythagorova věta").

Důkaz: **(i)** „$\Rightarrow$" Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ konverguje a její součet je x. Protože podle Pythagorovy věty

$$\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n\| = \sum_{n=1}^{N} \|\alpha_n x_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2,$$

dostáváme ze spojitosti normy limitním přechodem pro $N \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2 = \lim_{N\to\infty} \|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n\|^2 = \|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\|^2 = \|x\|^2 < \infty.$$

„$\Leftarrow$" Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$. Pak pro částečné součty $s_N = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ platí (při $N < K$)

$$\|s_K - s_N\| = \Big\|\sum_{n=N+1}^{K} \alpha_n x_n\Big\|^2 = \sum_{n=N+1}^{K} |\alpha_n|^2 \overset{N,K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Posloupnost částečných součtů $(s_N)_{N=1}^{\infty}$ je tedy cauchyovská, a protože je H úplný prostor, je také konvergentní.

(ii) Viz důkaz **(i)**. $\square$

Věta: Ať H je separabilní Hilbertův prostor s ortonormální bází $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, pak pro každé $x \in H$ platí

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x,\, e_n\rangle\, e_n \qquad \text{(abstraktní Fourierův rozvoj)}$$

a

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x,\, e_n\rangle|^2} \qquad \text{(Parsevalova rovnost).}$$

Důkaz: Označme $V_N = \mathrm{lin}(e_1, \ldots, e_N)$ a P_N ortogonální projekci na V_N. Pak $P_N x = \sum_{n=1}^{N} \langle x,\, e_n\rangle e_n$. Protože $\|P_N\| \le 1$, máme

$$\|P_N x\|^2 = \|\sum_{n=1}^{N} \langle x,\, e_n\rangle e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle x,\, e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2 \qquad \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

Odtud $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x,\, e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2 < \infty$, tedy řada $\sum_{n=1}^{N} \langle x,\, e_n\rangle e_n$ konverguje. Ať nyní $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x,\, e_n\rangle e_n$. Pak $\langle x - y,\, e_n\rangle = \langle x,\, e_n\rangle - \langle x,\, e_n\rangle = 0$, tj. $x - y \perp \{e_n \,\big|\, n \in \mathbb{N}\}$. Musí tedy být $x - y = 0$, a tím $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x,\, e_n\rangle e_n = x$. Parsevalovu rovnost nyní dostáváme z části (ii) předchozího tvrzení. $\square$

Věta: Ať $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ je ortonormální posloupnost v Hilbertově prostoru H. Ať P je ortogonální projekce na uzavřený podprostor $\overline{\mathrm{lin}\{f_n \,|\, n = 1, 2, \ldots\}}$. Potom

$$Px = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x,\, f_n\rangle\, f_n$$

a

$$\|x\|^2 \ge \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x,\, f_n\rangle|^2 \qquad \text{(Besselova nerovnost).}$$

Důkaz: Stejně jako v důkazu předchozí věty dostaneme $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x,\, e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2 < \infty$. Položme $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x,\, f_n\rangle f_n$. Pak $\langle x - y,\, f_m\rangle = 0$ pro každé $m \in \mathbb{N}$, tedy $x - y \in \overline{\mathrm{lin}\{f_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}}^{\perp}$, a tím $y = Px$. $\square$

Prototyp : „Fourierova řada“

• Uvažujme komplexní Hilbertův prostor $L^2\langle a,\, a+T\rangle,\ T>0$ (obsahuje komplexní funkce). Označme $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a položme

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{T}}\, \mathrm{e}^{in\omega x}.$$

Věta : Posloupnost funkcí $(e_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ je ortonormální báze prostoru $L^2\langle a,\, a+T\rangle$.

Důkaz: Ukážeme jen, že posloupnost $(e_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ je ortonormální. Dokázat, že její lineární obal je hustý v prostoru $L^2\langle a,\, a+T\rangle$ je komplikované. Máme

$$\langle e_n,\, e_m\rangle = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} \mathrm{e}^{in\omega x}\,\mathrm{e}^{-im\omega x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} \mathrm{e}^{i(n-m)\omega x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{T}\,T \;=\; 1 & \text{pro } n=m, \\ \frac{1}{T}\left[\frac{\mathrm{e}^{i(n-m)\omega x}}{i(n-m)\omega}\right]_a^{a+T} = 0 & \text{pro } n\neq m. \end{cases}$$

(Využili jsme toho, že pro $n \neq m$ jsou funkce $\mathrm{e}^{i(n-m)\omega x}$ T-periodické.) Tedy posloupnost $(e_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ je opravdu ortonormální. □

Mějme nyní funkci $f \in L^2\langle a,\, a+T\rangle$. Pak

$$\langle f,\, e_n\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{T}}\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{e}^{-in\omega x}\,\mathrm{d}x,$$

a tedy na základě předchozí věty

$$f \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle f,\, e_n\rangle e_n \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\Big(\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{e}^{-in\omega x}\,\mathrm{d}x\Big)}_{=:\ c_n}\mathrm{e}^{in\omega x} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{in\omega x} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty}(\sqrt{T}\,c_n)\,e_n,$$

kde $\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} g_n$. Funkce f se rovná součtu řady v prostoru $L^2\langle a,\, a+T\rangle$, tedy ve smyslu skoro všude.

Parsevalova rovnost nám dává

$$\|f\|_2^2 \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\,|c_n|^2 \;=\; T\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

• Reálná ortonormální báze v $L^2\langle a,\, a+T\rangle$: Protože $(\,\mathrm{e}^{in\omega x})_{n=-\infty}^{\infty}$ je ortogonální systém, tvoří reálné funkce

$$\begin{aligned} \sin n\omega x &= \frac{\mathrm{e}^{in\omega x} - \mathrm{e}^{-in\omega x}}{2i}, \\ \cos n\omega x &= \frac{\mathrm{e}^{in\omega x} + \mathrm{e}^{-in\omega x}}{2} \end{aligned}$$

také ortogonální systém (stačí zde jen ukázat, že pro každé n je $\langle \sin n\omega x,\, \cos n\omega x\rangle = 0$). Platí přitom

$$\|1\|_2^2 \;= \|\cos 0\omega x\|_2^2 \;=\; T$$

a pro $n \neq 0$

$$\begin{aligned} \|\sin n\omega x\|_2^2 &= \int_a^{a+T}\sin^2 n\omega x\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^{a+T}\frac{1-\cos 2n\omega x}{2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{T}{2}, \\ \|\cos n\omega x\|_2^2 &= \int_a^{a+T}\cos^2 n\omega x\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^{a+T}\frac{1+\cos 2n\omega x}{2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Tvrzení : Posloupnost funkcí

$$\Big\{\frac{1}{\sqrt{T}},\ \sqrt{\frac{2}{T}}\,\sin n\omega x,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\,\cos n\omega x \;\Big|\; n=1,2,\dots\Big\} \tag{3}$$

tvoří ortonormální bázi prostoru $L^2\langle a,\, a+T\rangle$.

Důkaz: Lineární obal prvků této posloupnosti obsahuje všechny funkce $\mathrm{e}^{in\omega x},\ n = 0, \pm1, \pm2, \dots$. □

Pro reálnou funkci $f \in L^2\langle a,\, a+T\rangle$ platí (ve smyslu skoro všude)

$$f \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\, a_n \cos n\omega x \;+\; b_n \sin n\omega x),$$

kde a_n, b_n jsou reálné a stanoví se skalárním součinem s prvky báze (3), tedy

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x)\ \mathrm{d}x$$

a pro $n \neq 0$

$$a_n \;=\; \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \cos n\omega x\ \mathrm{d}x,$$

$$b_n \;=\; \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \sin n\omega x\ \mathrm{d}x.$$

Důležité aproximační věty

Věta (Weierstrassova) : Pro $-\infty < a < b < \infty$ tvoří polynomy hustou množinu v $C\langle a, b\rangle$ (s maximovou normou).

Věta : Je-li $1 \le p \le \infty$, $-\infty < a < b < \infty$, pak spojité funkce tvoří hustou množinu v $L^p\langle a, b\rangle$.

Definice : **Nosič funkce** je uzávěr množiny všech bodů, v kterých je funkce nenulová.

Věta : Nekonečně diferencovatelné funkce s omezeným nosičem jsou husté v prostoru $L^p\langle a, b\rangle$, kde $1 \le p \le \infty$, $-\infty \le a < b \le \infty$.

Důsledek : Pro $-\infty < a < b < \infty$ platí

(i) Polynomy jsou husté v $L^2\langle a, b\rangle$.

(ii) $\overline{\mathrm{lin}\,(\mathbf{1}, x, x^2, \dots)} \;=\; L^2\langle a, b\rangle$.

Důkaz: **(i)** Pro funkce $u, v \in C\langle a,\, b\rangle$ je

$$\|u - v\|_2^2 \;=\; \int_a^b |u(x) - v(x)|^2 \,\mathrm{d}x \;\le\; \int_a^b \|u(x) - v(x)\|_{\sup}^2 \,\mathrm{d}x \;\le\; \|u - v\|_{\sup}^2\, (b - a).$$

Mějme nyní dánu funkci $f \in L^2\langle a,\, b\rangle$ a $\varepsilon > 0$. Protože jsou spojité funkce husté v $L^2\langle a,\, b\rangle$, existuje funkce $g \in C\langle a,\, b\rangle$ taková, že

$$\|f - g\|_2 \;<\; \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Podle Weierstrassovy věty k této spojité funkci g existuje polynom p tak, že

$$\|g - p\|_{\sup} \;\le\; \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{b - a}}\,.$$

Pak

$$\|f - p\|_2 \;\le\; \|f - g\|_2 + \|g - p\|_2 \;\le\; \|f - g\|_2 + \|g - p\|_{\sup}\sqrt{b - a} \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{b - a}}\,\sqrt{b - a} \;=\; \varepsilon.$$

Tedy každou funkci z $L^2\langle a,\, b\rangle$ můžeme libovolně přesně aproximovat polynomem.

(ii) Množina $\overline{\mathrm{lin}\,(\mathbf{1}, x, x^2, \dots)}$ je tvořena právě všemi polynomy, a ty jsou podle (i) husté v $L^2\langle a,\, b\rangle$. $\square$

Důsledek : Ortogonalizací posloupnosti $\mathbf{1}, x, x^2, \dots$ získáme ONB prostoru $L^2\langle a, b\rangle$, kde $-\infty < a < b < \infty$.

Příklady důležitých ortonormálních bází

(1) $L^2\langle a,\, b\rangle$ (reálný): Vyjdeme z lineárně nezávislé podmnožiny $\{1,\, x,\, x^2,\, \dots\}$ (jejíž lineární obal je hustý v $L^2\langle a,\, b\rangle$) a aplikujeme na ni Gram-Schmidtův ortogonalizační proces. Získáme tak ortonormální bázi prostoru $L^2\langle a,\, b\rangle$ tvořenou funkcemi

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\; P_n(x),$$

kde P_n jsou tzv. **Legendreovy polynomy** ($P_0(x) = 1,\, P_1(x) = x,\, P_2(x) = \frac{1}{2}\,(3x^2 - 1),\, P_3(x) = \frac{1}{2}\,(5x^2 - 3x),\, \dots$).

(2) $L^2(\mathbb{R})$ (reálný): Dá se ukázat, že posloupnost funkcí $w(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}},\ tw(t),\ t^2 w(t), \dots$ má hustý lineární obal v $L^2(\mathbb{R})$. Gram-Schmidtovým procesem získáme ortonormální bázi

$$e_n(t) \;=\; \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}\;\; \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\; H_n(t),$$

kde H_n jsou tzv. **Hermitovy polynomy** ($H_0(t) = 1,\ H_1(t) = 2t,\ H_2(t) = 4t^2 - 2,\ H_3(t) = 8t^3 - 12t,\ \dots$).

(3) $L^2\langle 0,\, \infty)$ (reálný): Lze ukázat, že $\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}},\ t\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}},\ t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}, \dots$ je posloupnost s hustým lineárním obalem v $L^2\langle 0,\, \infty)$. Gram-Schmidtovým procesem získáme ortonormální bázi

$$h_n(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\; L_n(t),$$

kde L_n jsou tzv. **Laguerreovy polynomy** ($L_0(t) = 1,\ L_1(t) = 1 - t,\ L_2(t) = 1 - 2t + \frac{1}{2}\,t^2,\ L_3(t) = 1 - 3t + \frac{3}{2}\,t^2 - \frac{1}{6}\,t^3,\ \dots$).

(4) Waveletové báze v $L^2(\mathbb{R})$: Vyjděme z funkce $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ a z ní vytvořme afinními transformacemi funkce

$$2^{\frac{j}{2}}\,\psi(2^j x - k), \qquad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Pokud tyto funkce tvoří ortonormální bázi v $L^2(\mathbb{R})$, nazýváme ji waveletová báze. Funkci ψ pak říkáme **mateřský wavelet**.

Funkcionály a operátory na Hilbertových prostorech

Věta (Rieszova) : Pro každý spojitý lineární funkcionál f na Hilbertově prostoru H existuje právě jeden vektor $y \in H$ tak, že

$$f(x) = \langle x,\, y\rangle \qquad \forall x \in H.$$

Navíc platí $||f|| = ||y||$.

Důkaz: Nulovému funkcionálu $f = 0$ odpovídá zřejmě právě vektor $y = 0$. Pro každé $x \in H$ totiž platí $\langle x,\, 0\rangle = 0 = f(x)$ a vektor y musí splňovat $0 = f(y) = \langle y,\, y\rangle$. Ať tedy $f \neq 0$. Množina

$$N = \operatorname{Ker} f \;=\; \{x \in H \,\big|\, f(x) = 0\}$$

je uzavřený podprostor prostoru H. Tento podprostor je vlastní, tedy existuje nenulový vektor $z \perp N$ (tj. $f(z) \neq 0$). Ukážeme, že $H = N \oplus \operatorname{lin}(z)$. Mějme $x \in H$ a zkusme najít β tak, že $x - \beta z \in N$. Má být

$$0 = f(x - \beta z) = f(x) - \beta f(z).$$

Protože $f(z) \neq 0$, dostáváme odtud $\beta = \frac{f(x)}{f(z)}$. Tudíž

$$x = \Big(x - \frac{f(x)}{f(z)}\, z\Big) + \frac{f(x)}{f(z)}\, z \in N \oplus \operatorname{lin}(z).$$

To znamená, že $H \subset N \oplus \operatorname{lin}(z)$. Opačná inkluze je zřejmá.

Hledáme tedy $y \in H$ takové, že $\langle x,\, y\rangle = f(x) = 0$ pro každé $x \in N$ a $\langle z,\, y\rangle = f(z)$. Z první podmínky musí být $y \perp N$, tj. $y = \alpha z$, z druhé pak pro α dostáváme

$$f(z) \;=\; \langle z,\, \alpha z\rangle \;=\; \overline{\alpha}\|z\|^2,$$

odkud $\alpha = \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2}$. Tedy

$$y = \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2}\, z\,.$$

Potřebujeme ještě ověřit velikost normy. Pro $x \in B_H$, tj. $\|x\| \le 1$, máme

$$|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\| \le \|y\|.$$

Platí tedy $\|f\| = \sup_{x\in B_H} |f(x)| \le \|y\|$. Přitom $\frac{y}{\|y\|} \in B_H$ a

$$\left|f\Big(\frac{y}{\|y\|}\Big)\right| = \left|\Big\langle \frac{y}{\|y\|}\,, y\Big\rangle\right| = \|y\|.$$

Tedy $\|f\| = \|y\|$ a věta je dokázána. □

Poznámka : Nechť H, K jsou Hilbertovy prostory. Jako dříve označíme $B(H,K)$ prostor všech omezených operátorů z H do K (definičním oborem je celé H) a speciálně $B(H) := B(H,H)$. Nechť $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ je ortonormální báze prostoru H. Operátor $T \in B(H)$ je jednoznačně určen „nekonečnou maticí" vůči bázi $(e_j)_{j=1}^{\infty}$

$$(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}, \qquad \text{kde } a_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle.$$

Jde o analogii s maticovou reprezentací lineárního zobrazení na prostoru konečné dimenze, kde pro

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \in H$$

máme

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T e_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} \langle Te_j, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \langle Te_j, e_i\rangle \alpha_j\Big) e_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j\Big) e_i.$$

Zapsáno maticově

$$\begin{pmatrix} \langle Tx, e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle Tx, e_n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Definice : Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $f \in L^\infty(X)$. Pak operátor $T_f : L^2(X) \to L^2(X)$ definovaný předpisem $T_f g = fg$ nazýváme **multiplikativní operátor**.

Poznámka : **(1)** Všimněme si, že pro $g \in L^2(X)$ je $T_f g$ opravdu prvkem prostoru $L^2(X)$. Máme totiž

$$\int_X |T_f g|^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_X |fg|^2 \,\mathrm{d}\mu \le \int_X (\|f\|_{L^\infty(X)} |g|)^2 \,\mathrm{d}\mu \le \|f\|^2_{L^\infty(X)} \int_X |g|^2 \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Odtud také vidíme, že operátor T_f je omezený a platí $\|T_f\| \le \|f\|_{L^\infty(X)}$. Ukážeme, že pokud je míra μ na X σ-konečná (tj. existují množiny X_i konečné míry, pro které je $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X$), platí i opačná nerovnost, a tedy $\|T_f\| = \|f\|_{L^\infty(X)}$. Pro jednoduchost budeme dále psát $\|.\|_\infty$ místo $\|.\|_{L^\infty(X)}$. Podle definice L^∞-normy je

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R} \,|\, |f| \le C \;\text{ s.v. na } X\}.$$

Z definice infima má pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina $M_n = \{x \,\big|\, |f(x)| > \|f\|_\infty (1 - \frac{1}{n})\}$ kladnou míru. Pokud je $\mu(X) < \infty$, je též $\mu(M_n) < \infty$. Pokud je $\mu(X) = \infty$, mají všechny množiny $M_{n,i} = M_n \cap X_i$ konečnou míru, a protože $0 < \mu(M_n) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(M_{n,i})$, musí mít některá z těchto množin míru kladnou. Pokud je $\mu(M_n) = \infty$, nahradíme v dalším M_n některou z množin $M_{n,i}$ s kladnou mírou. Uvažujme funkce $g_n = \chi_{M_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Protože je $\mu(M_n) < \infty$, je $g_n \in L^2(X)$. Přitom

$$\|T_f g_n\|^2 = \int_X |fg_n|^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f|^2 |g_n|^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_{M_n} |f|^2 |g_n|^2 \,\mathrm{d}\mu \ge \int_{M_n} (\|f\|_\infty (1 - \frac{1}{n}))^2 |g_n|^2 \,\mathrm{d}\mu$$

$$= (\|f\|_\infty(1-\frac{1}{n}))^2 \int_{M_n} |g_n|^2 \,\mathrm{d}\mu = (\|f\|_\infty(1-\frac{1}{n}))^2 \int_X |g_n|^2 \,\mathrm{d}\mu = (\|f\|_\infty(1-\frac{1}{n}))^2 \|g_n\|^2_{L^2(X)}.$$

Takže $\|T_f\| \geq \|f\|_\infty(1-\frac{1}{n})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což nám už dává $\|T_f\| \geq \|f\|_\infty$.

(2) Ukážeme, že platí: Pokud je $\mu(X) < \infty$, pak $T_f = 0$ právě tehdy, když $f = 0$ skoro všude na X.

Jestliže je funkce f skoro všude nulová, pak operátor T_f je nulový přímo z jeho definice. Než dokážeme opačnou implikaci, uvědomíme si, že v našem případě, kdy $\mu(X) < \infty$, pro $h \in L^\infty(X)$ platí

$$\int_X |h|^2 \,\mathrm{d}\mu \;\leq\; \int_X \|h\|^2_{L^\infty(X)} \,\mathrm{d}\mu \;=\; \|h\|^2_{L^\infty(X)}\, \mu(X) \;<\; \infty.$$

To znamená, že $L^\infty(X) \subset L^2(X)$. (Mohli jsme tu též použít Důsledek 3.4 z kapitoly o prostorech L^p.) Předpokládejme tedy nyní, že $f \in L^\infty(X)$ a $T_f = 0$. Jestliže budeme operátor T_f aplikovat na funkci $\overline{f}$ $\big(\in L^2(X)\big)$, dostaneme $|f|^2 = T_f\overline{f} = 0$ v $L^2(X)$. Funkce f je tedy skoro všude na X nulová.

Tvrzení: Nechť H, K jsou Hilbertovy prostory a $T : H \to K$ je omezený lineární operátor (tj. $T \in B(H,K)$). Pak existuje jediný operátor $T^* \in B(K,H)$ takový, že

$$\langle Tx,\, y\rangle_K \;=\; \langle x,\, T^*y\rangle_H \qquad \forall\, x \in H,\, y \in K.$$

Důkaz: Mějme $y \in H$. Pak $f_y(x) = \langle Tx,\, y\rangle$ je omezený lineární funkcionál na H. Podle Rieszovy věty existuje právě jedno $y' \in H$ takové, že

$$\langle Tx,\, y\rangle_K \;=\; \langle x,\, y'\rangle_H \qquad \forall\, x \in H.$$

Definujme $T^* : K \to H$ předpisem

$$T^*(y) \;=\; y'.$$

Ukážeme, že T^* je omezený lineární operátor.

<u>Linearita:</u> Nechť $y_1, y_2 \in K$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Pak

$$\langle x\,,\, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)\rangle \;=\; \langle Tx\,,\, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle \;=\; \overline{\alpha}\langle Tx,\, y_1\rangle + \overline{\beta}\langle Tx,\, y_2\rangle \;=\; \overline{\alpha}\langle x\,,\, y_1'\rangle + \overline{\beta}\langle x,\, y_2'\rangle \;=$$

$$=\; \overline{\alpha}\langle x\,,\, T^*y_1\rangle + \overline{\beta}\langle x,\, T^*y_2\rangle \;=\; \langle x\,,\, \alpha\, T^*y_1\rangle + \langle x,\, \beta\, T^*y_2\rangle \;=\; \langle x\,,\, \alpha\, T^*y_1 + \beta\, T^*y_2\rangle\,.$$

Tedy $T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \;=\; \alpha T^*y_1 + \beta\, T^*y_2$.

<u>Omezenost:</u> Pro $y \in H$ a spojitý lineární funkcionál f definovaný předpisem $f(x) = \langle x,\, T^*y\rangle$ máme z Rieszovy věty a Schwarzovy nerovnosti

$$\|T^*y\| \;=\; \|f\| \;=\; \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in H}} |f(x)| \;=\; \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in H}} |\langle x,\, T^*y\rangle| \;=\; \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in H}} |\langle Tx,\, y\rangle| \;\leq\; \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in H}} (\|Tx\|\,\|y\|) \;=\; \|y\| \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in H}} \|Tx\| \;=\; \|y\|\,\|T\|.$$

To znamená, že T^* je omezený a $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Jednoznačnost dokažte jako cvičení. $\square$

Definice: Operátor T^* z předchozího tvrzení se nazývá **adjungovaný operátor** k operátoru T.

Platí: Nechť $T \in B(H,K)$. Pak $T^{**}(=\;(T^*)^*\,) \;=\; T$ a $\|T\| \;=\; \|T^*\|$.

Důkaz: Pro každé $x \in H$ a $y \in K$ platí

$$\langle y,\, (T^*)^*x\rangle = \langle T^*y,\, x\rangle = \overline{\langle x,\, T^*y\rangle} = \overline{\langle Tx,\, y\rangle} = \langle y,\, Tx\rangle.$$

To znamená, že $(T^*)^* = T$. Aplikujeme-li nyní odhad normy adjungovaného operátoru z konce důkazu předchozí věty na adjungované operátory k operátorům T a T^*, dostaneme nerovnosti $\|T\| \geq \|T^*\|$ a $\|T^*\| \geq \|(T^*)^*\| = \|T\|$. Musí tedy platit $\|T^*\| = \|T\|$. $\square$

Příklady : **(1)** $\underline{H = \mathbb{C}}$: V tomto případě odpovídají omezené operátory násobení skalárem. Je-li $T \in B(\mathbb{C})$, $Tx = \alpha x$, pak $T^*x = \overline{\alpha}x$. Tedy adjunkce odpovídá konjugaci.

(2) $\underline{H = \mathbb{C}^n}$: Buď $(e_j)_{j=1}^n$ kanonická báze v $\mathbb{C}^n$. Pak podle poznámky za Rieszovou větou je operátor $T \in B(\mathbb{C}^n)$ reprezentován maticí $(a_{ij})_{i,j=1}^n = \mathbf{A}$, kde $a_{ij} = \langle Te_j,\, e_i\rangle$. Adjungovaný operátor T^* je analogicky reprezentován maticí $(b_{ij})_{i,j=1}^n = \mathbf{B}$, kde

$$b_{ij} = \langle T^*e_j,\, e_i\rangle = \langle e_j,\, Te_i\rangle = \overline{\langle Te_i,\, e_j\rangle} = \overline{a_{ji}}.$$

Adjungovanému operátoru tak odpovídá tzv. hermitovsky sdružená matice (píšeme $\mathbf{B} = \mathbf{A}^H$).

(3) $\underline{H = L^2(\mathbb{R})}$: Mějme dánu funkci $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Nechť T_f je multiplikativní operátor na $L^2(\mathbb{R})$ daný funkcí f. Pak pro $g, h \in L^2(\mathbb{R})$ platí

$$\langle T_f g,\, h\rangle = \langle fg,\, h\rangle = \int_{\mathbb{R}} (fg)\, \overline{h}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g\, \overline{(\overline{f}\, h)}\, \mathrm{d}x = \langle g,\, \overline{f}\, h\rangle = \langle g,\, T_{\overline{f}}\, h\rangle.$$

Tedy $T_f^* = T_{\overline{f}}$.

Platí : **Pravidla pro adjunkci** Pro $T, R \in B(H)$ platí

(a) $(T + R)^* = T^* + R^*$

(b) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}\, T^*, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$

(c) $(TR)^* = R^*T^*$

(d) $T^{**} = T$

Důkaz: Ověřte z definice. $\square$

Značení: : Nechť $T \in B(H)$, potom označíme

$R(T) = \{Tx \mid x \in H\}$ („range“, obor hodnot operátoru T),

$N(T)$ (= $\mathrm{Ker}(T)$) $= \{x \in H \mid Tx = 0\}$ (jádro, nulový prostor operátoru T).

Věta : Nechť $T \in B(H)$. Potom

$$N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}.$$

Důkaz: Nechť nejdřív $z \perp R(T^*)$. Pak pro každé $x \in H$ je $0 = \langle z, T^*x\rangle = \langle Tz, x\rangle$. Tedy $Tz = 0$ a $z \in N(T)$. To znamená, že $\overline{R(T^*)}^\perp = R(T^*)^\perp \subset N(T)$. Mějme nyní $z \in N(T)$. Pak pro každé $y \in H$ máme $\langle z, T^*y\rangle = \langle Tz, y\rangle = 0$, odkud $z \perp R(T^*)$. Tedy $N(T) \subset R(T^*)^\perp = \overline{R(T^*)}^\perp$. Dokázali jsme tak, že $N(T) = \overline{R(T^*)}^\perp$. Odtud okamžitě dostáváme $N(T)^\perp = \big(\overline{R(T^*)}^\perp\big)^\perp = \overline{R(T^*)}$. $\square$

Poznámka : Máme rozklady

$$H = N(T) \oplus \overline{R(T^*)} \qquad \text{a} \qquad H = N(T^*) \oplus \overline{R(T)},$$

pro konečnou dimenzi

$$H = N(T) \oplus R(T^*) \qquad \text{a} \qquad H = N(T^*) \oplus R(T).$$

Tedy např. je-li operátor T <u>na</u>, pak je operátor T^* prostý, apod.

Definice : Nechť V je komplexní lineární prostor. Potom $b : V \times V \to \mathbb{C}$ se nazývá **seskvilineární forma**, jestliže pro každá $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

(i) $b(x + y, z) = b(x, z) + b(y, z)$,
$b(x, y + z) = b(x, y) + b(x, z)$,

(ii) $b(\alpha\, x, y) = \alpha\, b(x, y)$,

(iii) $b(x, \alpha\, y) = \overline{\alpha}\, b(x, y)$.

Příklad : Pro $T \in B(H)$ je $b(x, y) = \langle Tx,\, y\rangle$ seskvilineární forma.

Věta (Polarizační identita) : Nechť b je seskvilineární forma na V. Potom

$$4\, b(x,y) \;=\; b(x+y, x+y) \;-\; b(x-y, x-y) \;+\; i\left[\, b(x+iy, x+iy) \;-\; b(x-iy, x-iy)\,\right].$$

Důkaz proveďte přímým výpočtem jako cvičení. $\square$

Důsledek : Je-li b seskvilineární forma na V, pak

$$b(x,x) \;=\; 0 \quad \forall\, x \in V \qquad \Rightarrow \qquad b(x,y) = 0 \quad \forall\, x,\, y \in V.$$

Důsledek : Nechť $T,\, S \in B(H)$, kde H je komplexní Hilbertův prostor. Potom platí:

(i) Jestliže $\langle Tx,\, x\rangle \;=\; 0$ pro každé $x \in H$, pak $T = 0$.

(ii) Jestliže $\langle Tx,\, x\rangle \;=\; \langle Sx,\, x\rangle$ pro každé $x \in H$, pak $T = S$.

Důkaz: **(i)** Pokud $\langle Tx,\, x\rangle \;=\; 0$ pro každé $x \in H$, pak podle polarizační identity aplikované na $b(x, y) = \langle Tx,\, y\rangle$ je $\langle Tx,\, y\rangle = 0$ pro každá $x, y \in H$, což znamená, že pro všechna $x \in H$ je $Tx \in H^{\perp} = \{0\}$.

Tvrzení **(ii)** dostaneme aplikací prvního tvrzení na operátor $T - S$.

Poznámka : Předchozí důsledek neplatí pro reálný prostor. Vezměme např. za T rotaci v $\mathbb{R}^2$ o $\frac{\pi}{2}$. Pak $\langle Tx,\, x\rangle = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^2$, a přitom $T \neq 0$.

Definice : Nechť $T \in B(H)$. Pak

(i) T se nazývá **samoadjungovaný**, jestliže $T = T^*$,

(ii) T se nazývá **pozitivní**, jestliže $\langle Tx,\, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in H$,

(iii) T se nazývá **unitární**, je-li bijekce a přitom $T^{-1} = T^*$ $\quad (\Leftrightarrow \quad T^*T = TT^* = I)$.

Příklady : **(1)** Už víme, že všechny lineární operátory na prostoru $H = \mathbb{C}$ jsou tvaru $Tx = ax$, kde $a \in \mathbb{C}$, a že adjunkci odpovídá konjugace, tedy pro operátor $Tx = ax$ je $T^*x = \overline{a}x$. Samoadjungované operátory na $\mathbb{C}$ tak odpovídají vynásobení reálným číslem.

(2) Podívejme se nyní na multiplikativní operátory T_f na $L^2\langle a,\, b\rangle$ $(-\infty < a < b < \infty,\ f \in L^{\infty}\langle a,\, b\rangle)$. Stejně jako v případě multiplikativních operátorů na $L^2(\mathbb{R})$ můžeme ukázat, že $T_f^* = T_{\overline{f}}$. Operátor T_f tedy bude samoadjungovaný právě tehdy, když bude platit $T_f = T_{\overline{f}}$ neboli když $T_{f-\overline{f}} = 0$. To ale, jak už víme, nastává jen v případě, že $f - \overline{f} = 0$ skoro všude na $\langle a,\, b\rangle$. Samoadjungované multiplikativní operátory na $L^2\langle a,\, b\rangle$ tak odpovídají funkcím, které jsou skoro všude na $\langle a,\, b\rangle$ reálné.

(3) Nyní nás budou zajímat samoadjungované operátory na Hilbertových prostorech konečné dimenze. Můžeme se omezit na $H = \mathbb{C}^n$. Už víme, že pokud je operátor $T \in B(\mathbb{C}^n)$ reprezentován maticí $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ a k němu adjungovaný operátor T^* maticí $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j=1}^n$, pak $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Tedy $\mathbf{B} = \mathbf{A}^H$. Operátor T na $\mathbb{C}^n$ tak bude samoadjungovaný právě tehdy, když jeho matice $\mathbf{A}$ bude hermitovská, tj. pokud bude platit $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$.

Tvrzení : Nechť H je komplexní Hilbertův prostor. Operátor $T \in B(H)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když

$$\langle Tx,\, x\rangle \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in H.$$

Důkaz: Nechť je nejdřív T samoadjungovaný. Pak pro každé $x \in H$ platí $\langle Tx,\, x\rangle = \langle x,\, T^*x\rangle = \langle x,\, Tx\rangle = \overline{\langle Tx,\, x\rangle}$. Musí tedy být $\langle Tx,\, x\rangle \in \mathbb{R}$. Předpokládejme nyní naopak, že $\langle Tx,\, x\rangle \in \mathbb{R}$ pro všechna $x \in H$. Pak pro všechna $x \in H$ také platí $\langle Tx,\, x\rangle = \overline{\langle x,\, Tx\rangle} = \langle x,\, Tx\rangle = \langle T^*x,\, x\rangle$. Z důsledku (ii) polarizační identity tak dostáváme, že $T = T^*$, a tedy operátor T je samoadjungovaný. $\square$

Příklady : **(1)** Nechť $T \in B(\mathbb{C})$, $Tx = ax$. Pak $\langle Tx, x\rangle = a|x|^2$, tedy operátor T je pozitivní právě tehdy, když $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$.

(2) Ukážeme, že multiplikativní operátor $T_f : L^2\langle a, b\rangle \to L^2\langle a, b\rangle$ je pozitivní, právě když $f \geq 0$ skoro všude na $\langle a, b\rangle$. Pokud $f \geq 0$ skoro všude, pak pro každou funkci $g \in L^2\langle a, b\rangle$ je

$$\langle T_f g, g\rangle = \int_a^b f(x)|g(x)|^2 \, \mathrm{d}x \geq 0,$$

takže operátor T_f je pozitivní. Jestliže $f < 0$ na množině kladné míry, tj. $\lambda_1(M) > 0$, kde

$$M = \{x \in \langle a, b\rangle \mid f(x) < 0\},$$

pak alespoň jedna z množin

$$M_n = \left\{x \in \langle a, b\rangle \,\middle|\, f(x) < -\frac{1}{n} \right\}$$

musí mít kladnou míru (je totiž $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M$). Nechť např. $\lambda_1(M_{n_0}) > 0$. Pro $g = \chi_{M_{n_0}}$ platí

$$\langle T_f g, g\rangle = \int_{M_{n_0}} f(x) \, \mathrm{d}x < -\frac{1}{n_0} \lambda_1(M_{n_0}) < 0.$$

Takže v tomto případě operátor T_f není pozitivní.

(3) Nechť $T \in B(\mathbb{C}^n)$, $T \simeq (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Pak pro $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ je

$$\langle Tx, x\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j\overline{\alpha_i}.$$

Operátor T je tedy pozitivní právě tehdy, když je matice $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ pozitivně semidefinitní.

Důsledek : Každý pozitivní operátor $T \in B(H)$ na komplexním Hilbertově prostoru H je samoadjungovaný.

Důkaz: Jestliže je T pozitivní, pak pro každé $x \in H$ je $\langle Tx, x\rangle \geq 0$, a tedy $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$. Podle tvrzení před příklady je tak T samoadjungovaný. □

Tvrzení : Nechť H je Hilbertův prostor a $x_1, \ldots, x_n \in H$. Potom matice $(\langle x_i, x_j\rangle)_{i,j=1,\ldots,n}$ je pozitivně semidefinitní.

Důkaz: Označme $A = (\langle x_i, x_j\rangle)_{i,j=1,\ldots,n}$. Z vlastností skalárního součinu pro každou n-tici (komplexních) koeficientů $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ platí

$$0 \leq \langle \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n, \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\overline{\alpha_j}\langle x_i, x_j\rangle = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot A \cdot (\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n})^T.$$

Matice A je tedy pozitivně semidefinitní. □

Tvrzení : Nechť H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in B(H)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) T je unitární.

(ii) T je izometrie (tj. $\|Tx\| = \|x\| \ \forall x \in H$) a T je surjektivní .

(iii) T zachovává skalární součin a T je surjektivní.

(Surjektivní zobrazení je zobrazení na.)

Důkaz: **(i) ⇒ (iii)** Pokud je T unitární, pak pro každé $x \in H$ platí $T^*Tx = Ix = x$, tedy

$$\langle x, y\rangle = \langle T^*Tx, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle .$$

Podle definice je unitární zobrazení bijektivní, tedy je též surjektivní.

(iii) ⇒ (ii) je zřejmé.

(ii) ⇒ (i) Nechť je T surjektivní izometrie. Pak pro každé $x \in H$ platí $\langle x, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle$. Tedy $T^*T = I_H$ (I_H je tu identita na H). Potřebujeme ještě ukázat, že také $TT^* = I_H$. Protože je každá izometrie prostá, existuje operátor T^{-1} inverzní k T. Protože je T surjektivní, je operátor T^{-1} definován na celém H, tedy $TT^{-1} = I_H$. Můžeme tak psát

$$TT^* \;=\; TT^*I_H \;=\; T\underbrace{T^*T}_{I_H}T^{-1} \;= TT^{-1} = I_H .$$

To znamená, že $T^* = T^{-1}$ a T je tím unitární. □

Příklady : **(1)** Nechť $T \in B(\mathbb{C})$, $Tx = ax$, $a \neq 0$. Pak $T^{-1}x = a^{-1}x$, $T^*x = \overline{a}x$. Operátor T je tedy unitární právě tehdy, když $a^{-1} = \overline{a}$. A to nastává právě tehdy, když $1 = a^{-1}a = \overline{a}a = |a|^2$, tj. pokud je a komplexní jednotka.

(2) Multiplikativní operátor $T_f : L^2\langle a, b\rangle \to L^2\langle a, b\rangle$ je unitární, právě když $|f| = 1$ skoro všude na $\langle a, b\rangle$. Abychom to dokázali, předpokládejme nejdřív, že $|f| = 1$ skoro všude na $\langle a, b\rangle$. Pak $T_f : g \mapsto fg$ je <u>na</u>, neboť pro každé $g \in L^2\langle a, b\rangle$ je podíl $\frac{g}{f}$ definován skoro všude,

$$\int_a^b \left|\frac{g}{f}\right|^2 \mathrm{d}x \;=\; \int_a^b |g|^2 \,\mathrm{d}x \;<\; \infty$$

(tedy $\frac{g}{f} \in L^2\langle a, b\rangle$) a $T_f\big(\frac{g}{f}\big) = g$. Protože

$$\|T_f g\|^2 \;=\; \int_a^b |f(x)g(x)|^2 \,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x \;=\; \|g\|^2,$$

je T_f izometrie, a tedy podle předchozího tvrzení je také unitární.

Mějme nyní $f \in L^\infty\langle a, b\rangle$, pro které je T_f je unitární. Pak

$$I \;=\; T_f T_f^* \;=\; T_f T_{\overline{f}} \;=\; T_{|f|^2}.$$

Protože je ale $I = T_1$, dostáváme odtud, že $T_{|f|^2-1} = 0$. To ovšem podle poznámky (ii) za definicí multiplikativního operátoru znamená, že $|f|^2 = 1$ skoro všude na $\langle a, b\rangle$. A to jsme potřebovali ukázat.

(3) Unitární operátory na $\mathbb{C}^n$ jsou popsány dále.

Tvrzení : Nechť $T \in B(H)$ je unitární operátor. Pak k němu adjungovaný operátor T^* je také unitární.

Důkaz: T je unitární, tedy je to bijekce a platí $T^* = T^{-1}$. Takže i T^* je bijekce a $(T^*)^{-1} = T = (T^*)^*$. Operátor T^* je tak také unitární. □.

Definice : Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se nazývá **unitární**, pokud je unitární operátor $T \in B(\mathbb{C}^n)$ definovaný předpisem

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \;=\; \mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, \qquad\qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Tvrzení : Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}$ je unitární matice.

(ii) Sloupcové vektory $s_1, \ldots, s_n$ matice $\mathbf{A}$ tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{C}^n$.

(iii) Řádkové vektory $r_1, \ldots, r_n$ matice $\mathbf{A}$ tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{C}^n$.

Důkaz: Nechť $e_1, \ldots, e_n$ je kanonická ortonormální báze v $\mathbb{R}^n$. Zřejmě $s_i = Te_i$, $i = 1, \ldots, n$, kde T je operátor odpovídající matici $\mathbf{A}$.

(i) ⇒ (ii) Protože je operátor T unitární, zachovává skalární součin. Vektory $s_1, \ldots, s_n$ jsou tak navzájem kolmé, a tím i lineárně nezávislé. Protože jejich počet je roven dimenzi $\mathbb{C}^n$, tvoří bázi $\mathbb{C}^n$. Báze je ortonormální, protože unitární operátor zachovává normu.

(ii) ⇒ (i) Nechť $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Pak

$$T\,x \;=\; \mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n .$$

Tedy

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 = \langle Tx,\, Tx\rangle \;&=\; \langle x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n,\, x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i\,\overline{x}_j\,\langle s_i,\, s_j\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \;=\; \|x\|^2 .\end{aligned}$$

To znamená, že T je izometrie. Protože vektory $s_1, \ldots, s_n$ generují obor hodnot operátoru T a tvoří přitom ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$, je T zobrazení <u>na</u>.

(i) ⇔ (iii) Vektory $r_1, \ldots, r_n$ tvoří ortonormální bázi právě tehdy, když ji tvoří vektory $\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_n$. Tyto vektory jsou ale sloupcovými vektory matice A^H, která koresponduje operátoru T^*. Tedy podle již dokázané ekvivalence **(i) ⇔ (ii)** vektory $r_1, \ldots, r_n$ tvoří ortonormální bázi právě tehdy, když je operátor T^* unitární. Ten je ale z definice unitární právě tehdy, když je unitární operátor T, tj. když je unitární matice $\mathbf{A}$. □

Definice : Zobrazení $U : H \to K$ mezi Hilbertovými prostory H a K se nazývá **unitární**, jestliže je bijektivní a zachovává skalární součin. Existuje-li takové zobrazení mezi H a K, nazýváme prostory H a K **izomorfní**.

Věta : Každý separabilní Hilbertův prostor je izomorfní s l^2.

Důkaz: Ať $e_1, e_2, \ldots$ je ortonormální báze Hilbertova prostoru H. Uvažujme zobrazení

$$U:\; H \to l^2 :\; x \mapsto (\,\langle x,\, e_n\rangle_H\,)_{n\in\mathbb{N}} \,\in\, l^2 .$$

Ze spojitosti skalárního součinu pro $x, y \in H$ máme

$$\langle Ux,\, Uy\rangle_{l^2} \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x,\, e_n\rangle_H\,\overline{\langle y,\, e_n\rangle_H} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x,\, e_n\rangle_H\,\langle e_n,\, y\rangle_H = \langle \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x,\, e_n\rangle_H\, e_n\,,\, y\rangle_H = \langle x,\, y\rangle_H .$$

U tedy zachovává skalární součin a je tak prosté. Nechť $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in l^2$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in H$ konverguje. Pro její součet x platí $\langle x,\, e_n\rangle_H = \alpha_n$, a tedy $\alpha = Ux$. To znamená, že U je také <u>na</u>, takže je to bijekce zachovávající skalární součin. U je tedy unitární a H je jeho prostřednictvím izomorfní s l^2. □