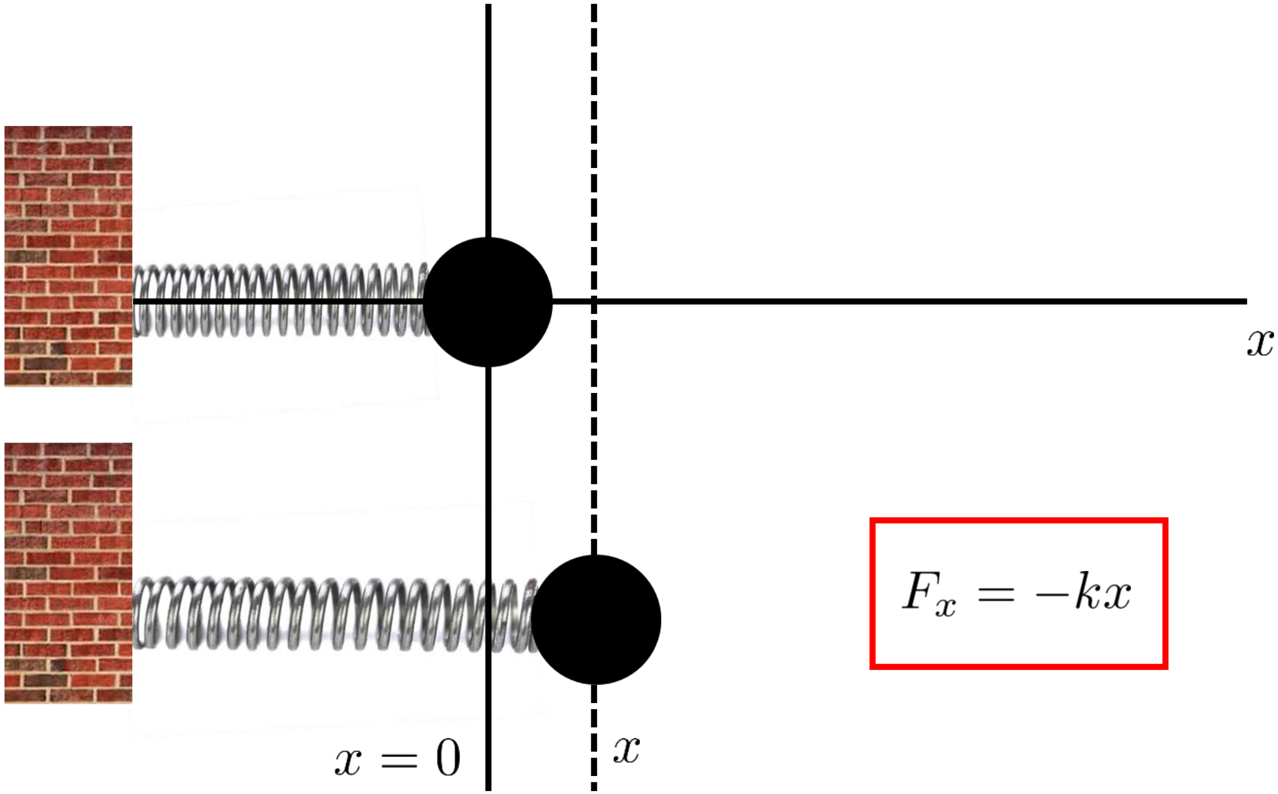
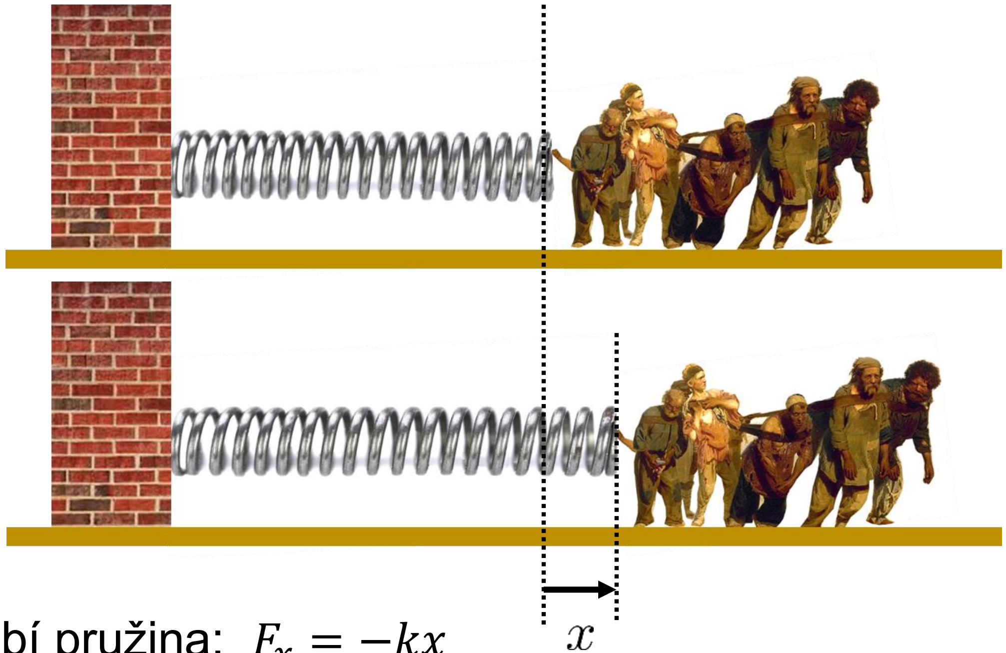
Harmonický oscilátor



$$\boxed{F_x = -kx}$$

V ďalšom, pokiaľ budeme študovať jednorozmerný oscilátor, nebudeme písať pri sile index. Budeme proste písať $F = -kx$ a budeme mať na mysli priemet sily na os x. (Preto nech niekoho neprekvapí záporné znamienko.)

Práca pri napínaní pružiny



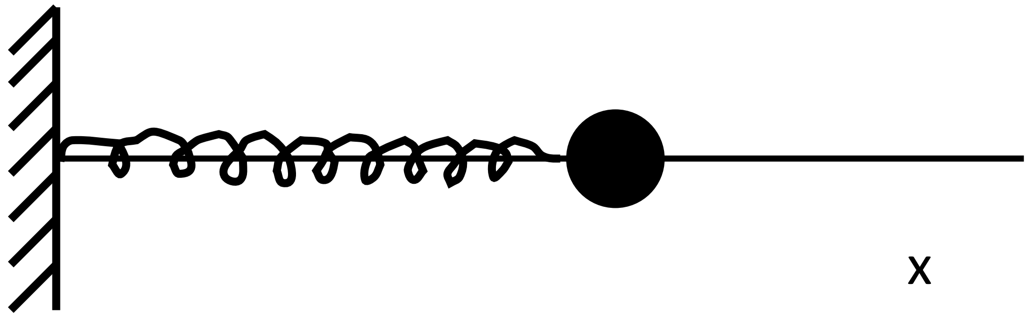
Sila, ktorou pôsobí pružina: $F_x = -kx$
Sila, ktorou pôsobia burlaci: $\tilde{F}_x = kx$
Práca, ktorú vykonajú burlaci pri napínaní pružiny z rovnovážneho stavu o vzdialenosť x:

$$A = \int_0^x \tilde{F}_(x')dx' = \int_0^x kx'dx' = \frac{1}{2}kx^2$$

Potenciálna energia pružnosti

$$\boxed{U(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$

Oscilátor



Rovnovážna poloha nech je $x = 0$

Pružina: $F_x = -Kx$

Pohybová rovnica: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -Kx$

Uhádneme riešenie: $x(t) = A\sin(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$

Naozaj: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 A\sin(\omega t) = -KA\sin(\omega t) = -Kx(t)$

Ale rovnako dobré je aj riešenie $x(t) = B\cos(\omega t)$

Rovnica $m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$ je tzv. lineárna, čo znamená, že súčet jej

dvoch riešení je tiež riešením, teda aj riešenie

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Pri zadaných počiatočných podmienkach $x(0) = x_0, v(0) = v_0$
dopočítame najprv rýchlosť $v(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$
a dostaneme jednoznačne

$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega}v_0\sin(\omega t)}$$

pohyb je periodický s periódou $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

naozaj: $\cos(\omega(t+T)) = \cos(\omega(t+\frac{2\pi}{\omega})) = \cos(\omega t + 2\pi)) = \cos(\omega t)$

Pri ľubovoľných počiatočných podmienkach vieme teda jednoznačne predpovedať budúcnosť, takže sme zrejme našli v tvare

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \qquad \text{(\#)}$$

všetky riešenia pohybovej rovnice. Lebo ak by boli nejaké ďalšie, potom by budúcnosť už nebola jednoznačná. Čo fyzikálne neočakávame. Je na matematikoch, aby naozaj dokázali, že sú to všetky riešenia. Tým sa tu zaoberať nebudeme. Riešenia sme proste uhádli a našli sme ich tak dosť. Ešte trochu iné ekvivalentné vyjadrenie v tvare (budeme hľadať X_0 a δ)

$$x(t) = X_0\cos(\omega t + \delta)$$

$$x(t) = X_0\cos(\omega t)\cos\delta - X_0\sin(\omega t)\sin\delta)$$

porovnaním s (#) dostaneme $A = X_0\cos\delta, B = -X_0\sin\delta$

odtiaľ zrejme $X_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$

Potom treba nájsť také δ, aby platilo $A = X_0\cos\delta, B = -X_0\sin\delta$

$$\boxed{-\frac{B}{A} = \tan\delta, \qquad \delta = \mathrm{atan2}(-B, A)}$$

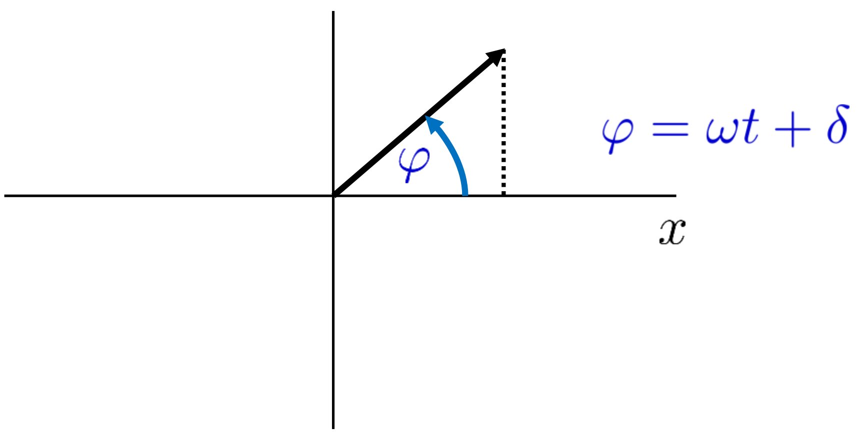
Parametre X_0 a δ vo vyjadrení

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \delta)$$

sa nazývajú „amplitúda“ a „fáza“. Poznamenajme, že v literatúre (učebniciach) nie je zhoda v definícii pojmu „fáza“. Môžete stretnúť vyjadrenia

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t - \delta)$$
$$x(t) = X_0 \sin(\omega t + \delta)$$
$$x(t) = X_0 \sin(\omega t - \delta)$$

Parameter δ vo všetkých vyjadreniach sa môže volať „fáza“. Pre niekoho uprednostnenie „kosínusovky“ pred „sínusovkou“ je často motivované tým, že kmitavý pohyb sa dá vnímať ako priemet rotujúceho vektora „na os x“. Ten rotujúci vektor sa niekedy zvykne nazývať „fázor“. Dĺžka fázora je rovná amplitúde X_0.



Je teda zrejmé, že rotujúci fázor príslušný ku kmitaniu

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \delta)$$

môžeme vyjadriť ako komplexnú funkciu reálnej premennej „čas“ takto

$$z(t) = X_0 \exp(i(\omega t + \delta))$$

a kmitavý pohyb potom ako reálnu časť

$$x(t) = \mathrm{Re}\ z(t) = \mathrm{Re}\ X_0 \exp(i(\omega t + \delta))$$

Užitočné je použiť vo vyjadrení komplexnú „amplitúdu“ tak že do nej zahrnieme aj fázu takto

$$X = X_0 e^{i\delta}$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\ z(t) = \mathrm{Re}\ X \exp(i\omega t)$$

Využívame tu Eulerov vzťah $\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$

Pravidlo o „násobení exponent“ potom pracuje namiesto nás (oslobodí nás od používania goniometrických vzťahov), keď dostaneme

$$x(t) = \mathrm{Re}\ z(t) = \mathrm{Re}\ X \exp(i\omega t) = \mathrm{Re}\ X_0 \exp i\delta \exp(i\omega t) = \mathrm{Re}\ X_0 \exp(i\omega t + i\delta)$$

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \delta)$$

Pri práci s komplexným vyjadrením kmitavého pohybu často nepíšeme symbol pre reálu časť a chápeme ho implicitne, keď na konci výpočtu zoberieme len reálnu časť výsledku.

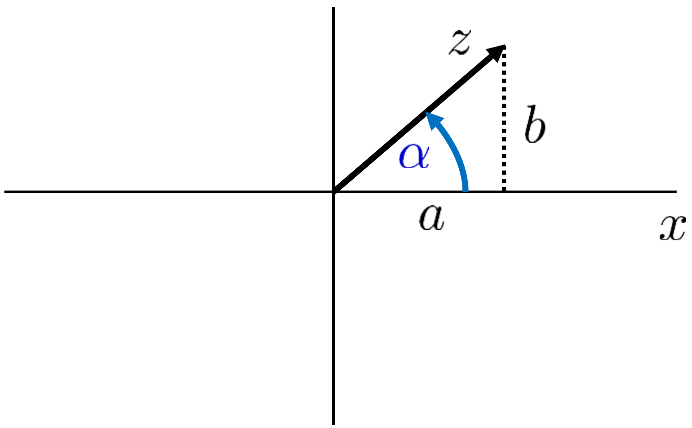
Technika vizualizácie kmitavého pohybu pomocou rotujúcich fázorov má elegantné vyjadrenie pomocou komplexných čísel. Komplexné čísla prinášajú okrem intuitívne priezračnej vizualizácie aj, ako uvidíme neskôr, značné technické zjednodušenie niektorých výpočtov.

Rotujúci vektor v rovine si totiž ľahko môžeme predstaviť ako (rotujúce) komplexné číslo v komplexnej rovine.

Komplexné číslo $z = a + ib$ môžeme vždy vyjadriť v tvare

$$z = |z|e^{i\alpha}$$

kde $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ a $\alpha = \mathrm{atan2}(\frac{b}{a})$. V komplexnej rovine sa to vizualizuje takto



Zachovanie energie

Stav harmonického oscilátora v ľubovoľnom okamihu je určený polohou a rýchlosťou oscilátora. Funkciu polohy sme našli

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \delta)$$

rýchlosť v ľubovoľnom čase určíme derivovaní, teda

$$v(t) = \dot{x}(t) = -X_0 \omega \sin(\omega t + \delta)$$

Kinentická energia oscilátora v čase t bude

$$W_k(t) = \frac{1}{2} m v^2(t) = \frac{1}{2} m X_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

potenciálna energia (pružnosti) bude

$$U(t) = \frac{1}{2} k x^2(t) = \frac{1}{2} k X_0^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

Využijeme vzťah $m\omega^2 = k$ a dostaneme pre celkovú energiu

$$E(t) = W_k(t) + U(t) = \frac{1}{2} m\omega^2 X_0^2 \sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2} m\omega^2 X_0^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

$$\boxed{E(t) = W_k(t) + U(t) = \frac{1}{2} m\omega^2 X_0^2}$$

Vidno, že celková energia oscilátora je na čase nezávislá, teda energia sa zachováva.

Čo mám garantovane vedieť

- vzorec pre silu deformovanej pružiny, tuhosť pružiny
- vzorec pre energiu pružnosti deformovanej pružiny
- pohybová rovnica netlmeného harmonického oscilátora a jej riešenie
- riešenie pohybu harmonického oscilátora zapísané ako komplexný fázor

Lineárny oscilátor s tlmením

Nech proti pohybu pôsobí odpor prostredia úmerný rýchlosti ale proti smeru rýchlosti, teda sila v tvare $-\alpha\dot{x}$ (bodka nad písmenom značí prvú deriváciu podľa času, dve bodky druhú deriváciu podľa času). Pohybová rovnica potom bude

$$m\ddot{x} = -Kx - \alpha\dot{x}$$

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{kde} \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}, \quad b = \frac{\alpha}{2m}$$

Všimnime si, že v pohybovej rovnici sú **dve časové škály**: konštanty ω_0 aj b majú rovnaký fyzikálny rozmer s^{-1}.

Predpokladajme $\omega_0 \gg b$

a hľadajme riešenie v tvare

$$x(t) = Xe^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta)$$

Odkiaľ sa berie taká genialita? Nuž ak trenie je malé, očakávame, že to bude kmitať podobne ako oscilátor, ale trenie spôsobí, že kmity budú postupne zanikať, teda že ich amplitúda bude klesať a vo vzdialenej budúcnosti klesne až na nulu. Jediná funkcia, ktorú poznáme a má také „klesavé vlastnosti“ je exponenciála.

Všimnime si ale, že v navrhovanom riešení

$$x(t) = Xe^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta)$$

máme nejaké parametre (τ, ω, δ), ktoré v rovnici

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{kde} \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}, \quad b = \frac{\alpha}{2m}$$

nevystupujú. Robíme niečo, čomu sa hovorí „hľadajme riešenie v tvare“, čo občas privádza študentov alebo čitateľov do zúfalstva. Ale často stačí len nepodceniť sám seba a zamyslieť sa, čo viedlo k takému návrhu na hľadania. Niečo som sa pokúsil naznačiť v predchádzajúcom odstavci „odkiaľ sa berie taká genialita?“. Možno že nepochopíme na prvýkrát úplne všetko, ale na niečo sa prísť dá. Napríklad, že prečo geniálny autor nazval parameter v exponenciále τ. Lebo potreboval v argumente exponenciály čas t, aby mu to postupne klesalo. Ale v argumente exponenciály nemôžu byť sekundy, lebo nevieme, ako by sa číslo umocňovalo na sekundy. V argumente musí byť fyzikálne bezrozmerná vec, teda sekundy v argumente treba zlikvidovať. Najlepšie dať tam zlomok kde v menovateli budú tiež sekundy, aby sa to vykrátilo. Takže neznámy parameter τ bude v sekundách, má čosi spoločné s nejakým časom, preto označenie τ, lebo to je grécke písmeno pre t. Naučte sa to vnímať okamžite, keď vidíte zápis $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, tak hneď máte vidieť sekundy v menovateli. **Snažte si pri učení sa klásť otázky „Prečo?“**

Máme teda rovnicu $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{kde} \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}, \quad b = \frac{\alpha}{2m}$

a jej riešenie „hľadáme v tvare“ $x(t) = Xe^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta)$

Robí sa to tak, že robíme „ako keby“ skúšku správnosti. Dosadíme navrhované riešenie do rovnice a vyskúšame, či je splnená. A zistíme, že aj môže byť splnená, ale to by sme museli voliť zatiaľ neznáme parametre (τ, ω, δ) nie ľubovoľne, ale nejako konkrétne.

Tak dosaďme, dostaneme

$$\dot{x}(t) = -X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) - Xe^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$$\ddot{x}(t) = X\frac{1}{\tau^2}e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) + X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta)$$
$$+X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta) - Xe^{-t/\tau}\omega^2\cos(\omega t + \delta)$$

Máme teda rovnicu $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{kde} \;\; \omega_0^2 = \frac{K}{m}, \quad b = \frac{\alpha}{2m}$

a jej riešenie „hľadáme v tvare“ $x(t) = Xe^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta)$

Robí sa to tak, že robíme „ako keby“ skúšku správnosti. Dosadíme navrhované riešenie do rovnice a vyskúšame, či je splnená. A zistíme, že aj môže byť splnená, ale to by sme museli voliť zatiaľ neznáme parametre (τ, ω, δ) nie ľubovoľne, ale nejako konkrétne.

Tak dosaďme, dostaneme

$$\dot{x}(t) = -X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) - Xe^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$$\ddot{x}(t) = X\frac{1}{\tau^2}e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) + X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta)$$
$$+X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta) - Xe^{-t/\tau}\omega^2\cos(\omega t + \delta)$$

$$-Xe^{-t/\tau}(\omega^2 - \frac{1}{\tau^2})\cos(\omega t + \delta) + 2X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta)$$
$$-2bX\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) - 2bXe^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta)$$
$$+X\omega_0^2 e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) \stackrel{?}{=} 0$$

$$-Xe^{-t/\tau}(\omega^2 - \frac{1}{\tau^2})\cos(\omega t + \delta) + 2X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$$-2bX\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) - 2bXe^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$$+X\omega_0^2 e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) \stackrel{?}{=} 0$$

$$-Xe^{-t/\tau}(\omega^2 - \frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2 + \frac{2b}{\tau})\cos(\omega t + \delta)$$

$$+2X(\frac{1}{\tau} - b)e^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta) \stackrel{?}{=} 0$$

Znamienko rovnosti má platiť stále, teda v každom čase. Tlo je možné len tak, že koeficienty pri sínuse aj pri kosínuse sú rovné nule. Aby vypadol sínus, musíme voliť

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = b}$$

a aby vypadol kosínus, musíme voliť $\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - b^2}$

Parameter δ môže myť ľubovoľný (v podstate iba hovorí kedy začneme počítať čas)

Lineárny oscilátor s tlmením

Pohybová rovnica tlmeného oscilátora

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

má teda riešenie

$$x(t) = Xe^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) = Xe^{-bt}\cos(\omega t + \delta)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - b^2 \qquad \frac{1}{\tau} = b$$

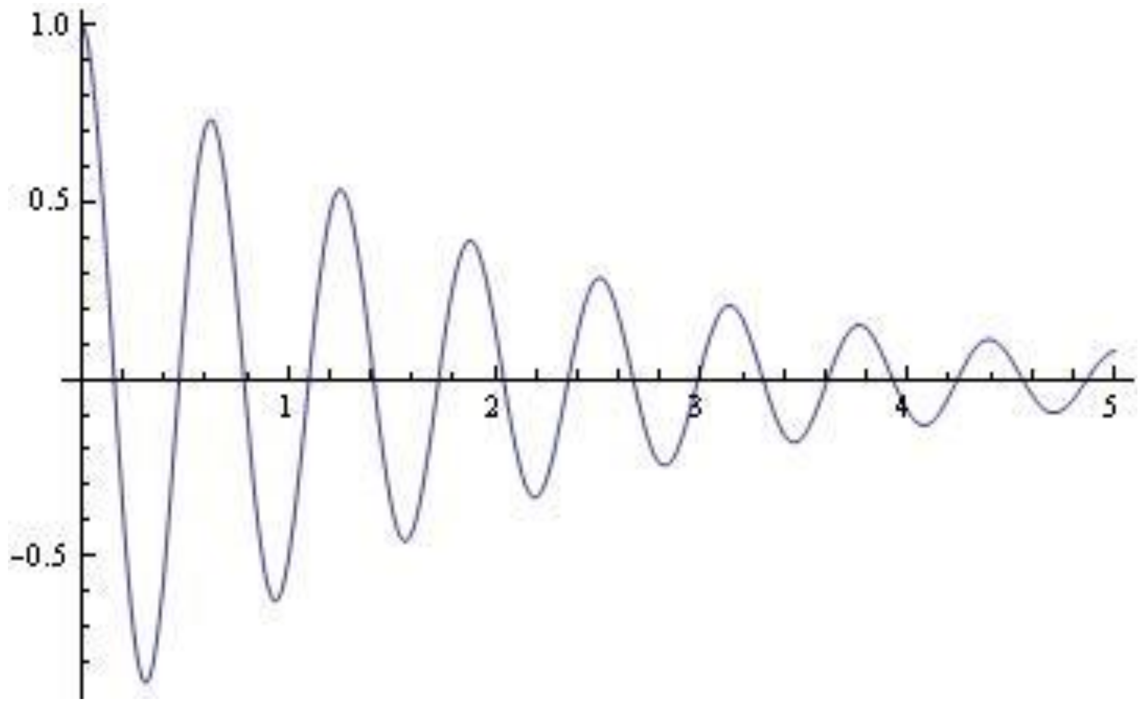
Parameter δ je ľubovoľný

Predpokladáme pritom, že trenie je dostatočne malé, teda že platí $\omega_0^2 > b^2$.

V prípade, veľkého trenia, teda pri $\omega_0^2 \geq b^2$ pohyb nemá kmitavý charakter, treba hľadať iné riešenie, ale nebudeme sa tým zaoberať.

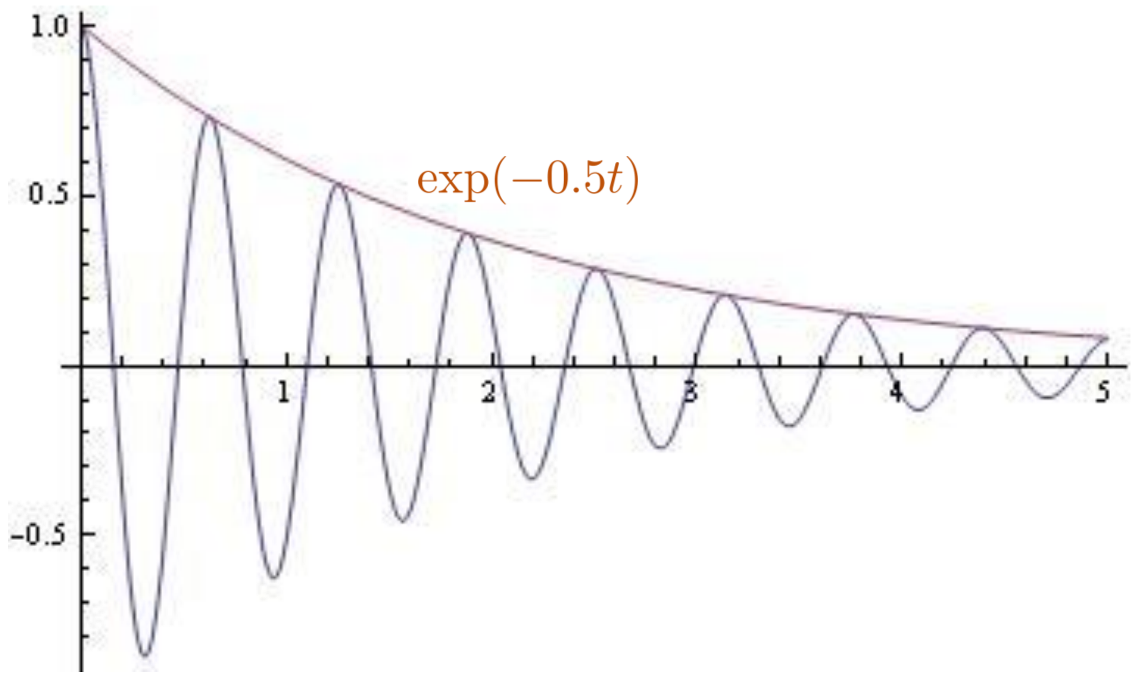
$$x(t) = Xe^{-bt}\cos(\omega t + \delta)$$

Graf pre hodnoty: $b = 0.5, \omega = 10, \delta = 0$

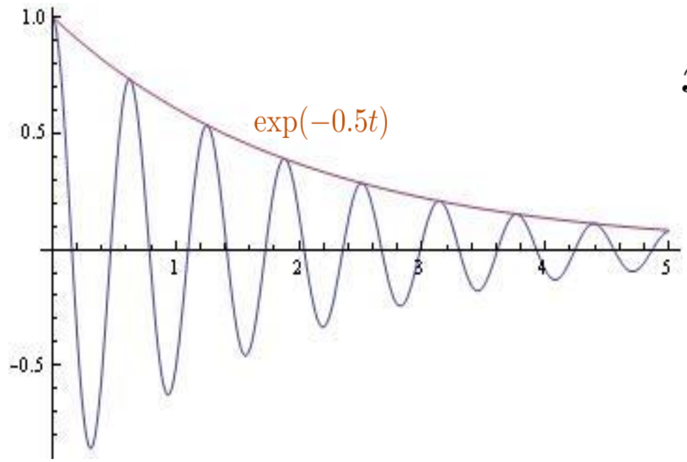


$$x(t) = Xe^{-bt}\cos(\omega t + \delta)$$

$$b = 0.5, \omega = 10, \delta = 0$$



Čo je to perióda (frekvencia) neperiodického signálu?

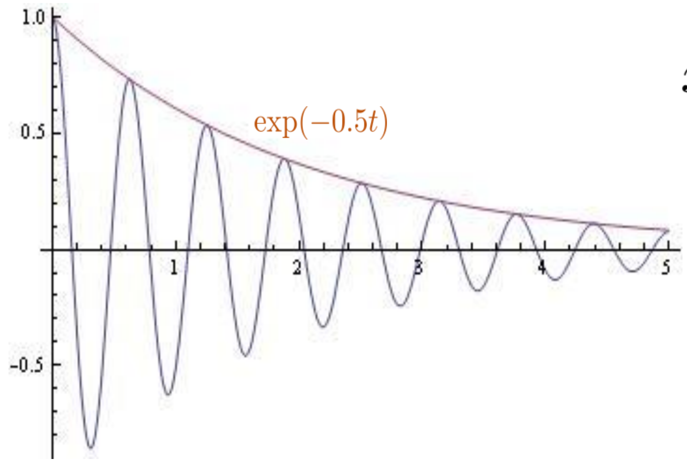


$$x(t) = Xe^{-bt}\cos(\omega t + \delta)$$
$$b = 0.5, \omega = 10, \delta = 0$$

Napočítam 8 píkov za 5 sekúnd

$$f = \frac{8}{5} = 1.6s^{-1}$$
$$\omega = 2\pi f = 10.05s^{-1}$$

Čo je to perióda (frekvencia) neperiodického signálu?



$$x(t) = Xe^{-bt}\cos(\omega t + \delta)$$

$$b = 0.5, \omega = 10, \delta = 0$$

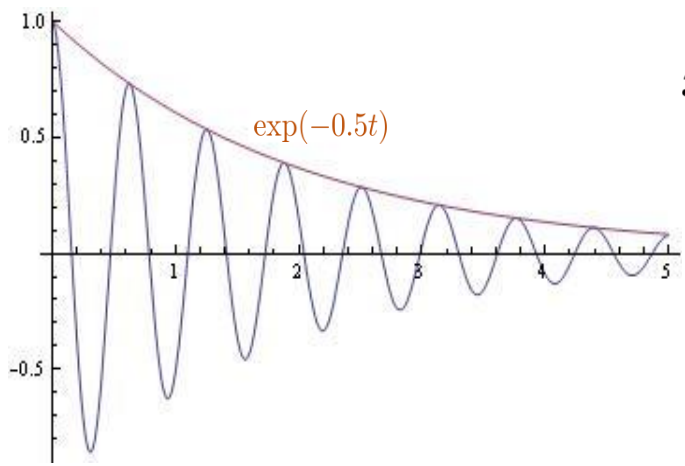
?

Napočítam 8 píkov za 5 sekúnd

$$f = \frac{8}{5} = 1.4s^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = 10.05s^{-1}$$

Čo je to perióda (frekvencia) neperiodického signálu?



$$x(t) = Xe^{-bt}\cos(\omega t + \delta)$$

$$b = 0.5, \omega = 10, \delta = 0$$

?

Napočítam 8 píkov za 5 sekúnd

$$f = \frac{8}{5} = 1.4 s^{-1}$$

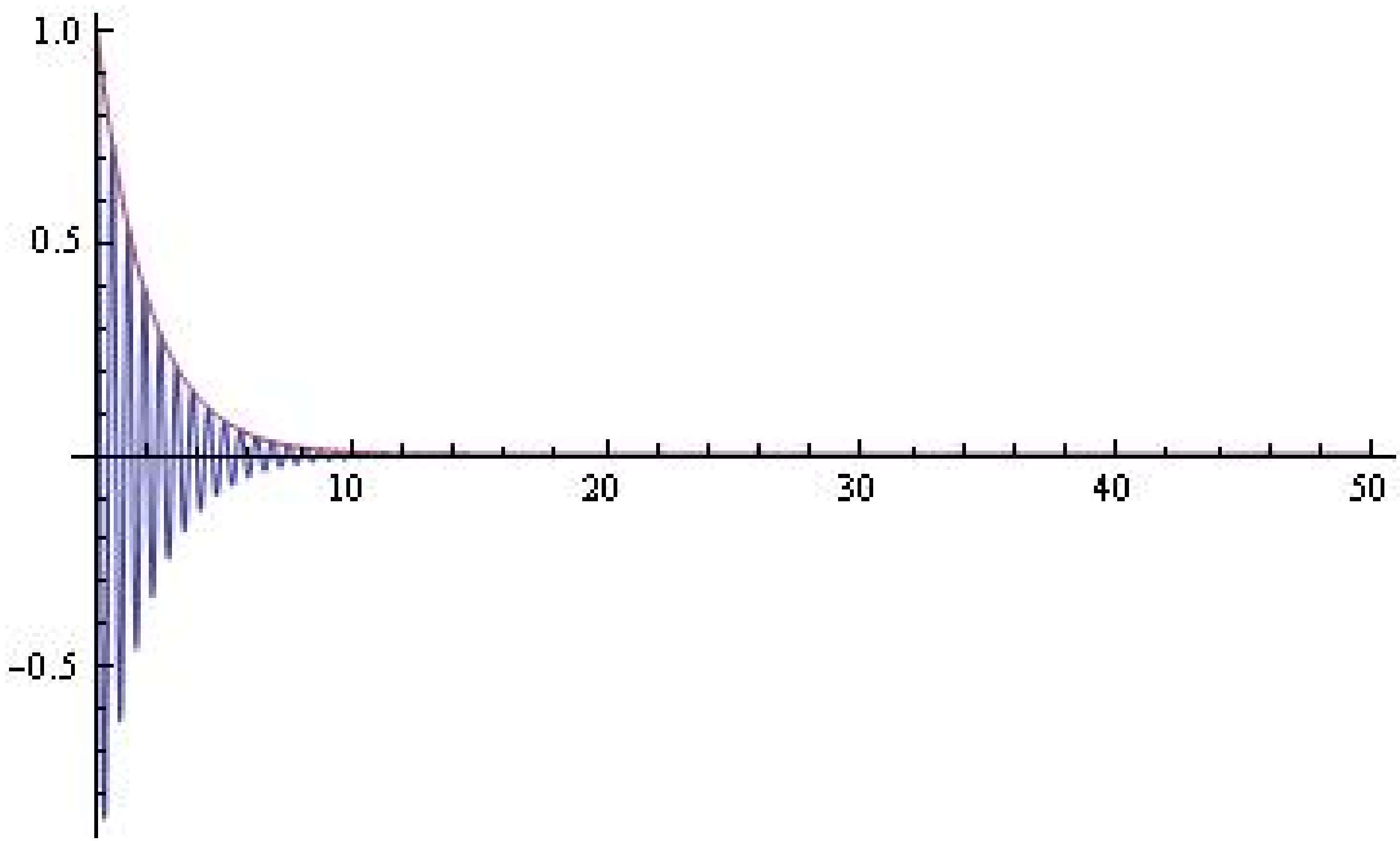
$$\omega = 2\pi f = 10.05 s^{-1}$$

O poslednom píku nemám istotu, preto $f = \dfrac{8 \pm 1}{5} = (1.6 \pm 0.2) s^{-1}$

Keby som rátal píky nie počas 5 sekúnd ale počas 50 sekúnd, naivne by som čakal, že dostanem $f = \dfrac{80 \pm 1}{50} = (1.6 \pm 0.02) s^{-1}$

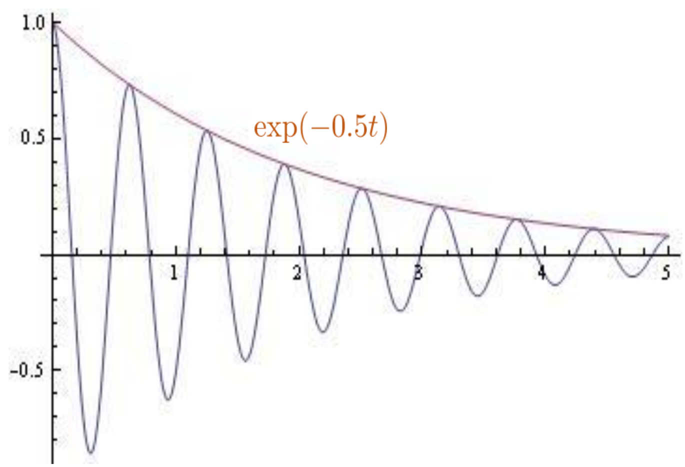
Skúste určiť počet píkov za 50 sekúnd signálu!

Nedá sa to, lebo čas 50 sekúnd je pridlhý voči tomu ako rýchlo klesá oná exponenciála



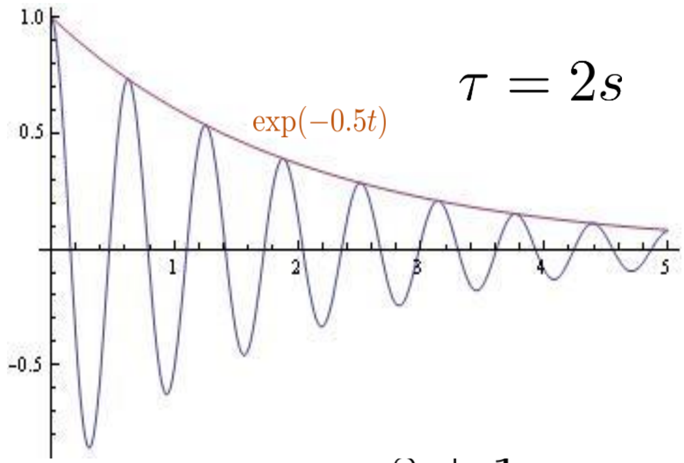
Ako rýchlo klesá exponenciála?

$$\exp(-bt) = \exp(-\frac{t}{\tau}) \qquad \tau = \frac{1}{b}$$



$$\exp(-0.5t) = \exp(-\frac{t}{2})$$

Za dobu $t \approx \tau$ exponenciála už viditeľne poklesne, za dobu $t \approx \text{niekoľko}\ \tau$ poklesne tak, že sa už píky ďalej rátať nedajú



$$\tau = 2s$$

$$f = \frac{8 \pm 1}{5} = (1.6 \pm 0.2)s^{-1}$$

Chyba (nepresnosť) určenia frekvencie je teda

$$\Delta f \approx \pm \frac{1}{\text{niekoľko } \tau}$$

Rádovo teda platí čosi, čo sa zvykne volať „princíp neurčitosti“

$$|\Delta f|\tau \approx 1$$

Absolútna chyba určenia frekvencie krát doba prítomnosti signálu je rádovo rovná jednej

Disipácia energie tlmených kmitov

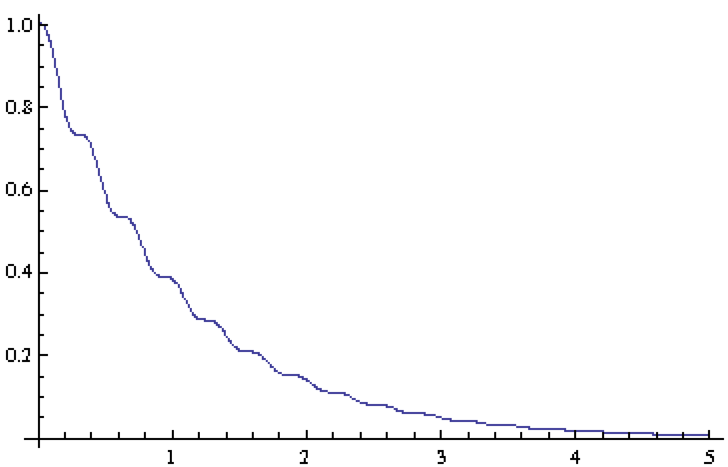
$$\boxed{x(t) = Xe^{-bt}\cos(\omega t) \qquad v(t) = -Xbe^{-bt}\cos(\omega t) - Xe^{-bt}\omega\sin(\omega t)}$$

$$E(t) = W_k(t) + U(t)$$
$$= \frac{1}{2}kX^2e^{-2bt}\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}mX^2b^2e^{-2bt}\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}mX^2\omega^2e^{-2bt}\sin^2(\omega t) +$$
$$+ mb\omega X^2e^{-2bt}\cos(\omega t)\sin(\omega t)$$

Využijeme: $m\omega^2 = m\omega_0^2 - mb^2 = k - mb^2$

$$\boxed{E(t) = \frac{1}{2}m\omega^2X^2e^{-2bt} + mX^2b^2e^{-2bt}\cos^2(\omega t) + mb\omega X^2e^{-2bt}\cos(\omega t)\sin(\omega t)}$$

```
Plot[(1 + 2 b^2 (Cos[omega t])^2 / (omega)^2 + b / omega Sin[2 omega t])
  Exp[-2 b t], {t, 0, 5}]
```



Graf pre $\omega = 10, b = 0.5$
Plotované je

$$\frac{2E(t)}{m\omega^2X^2}$$