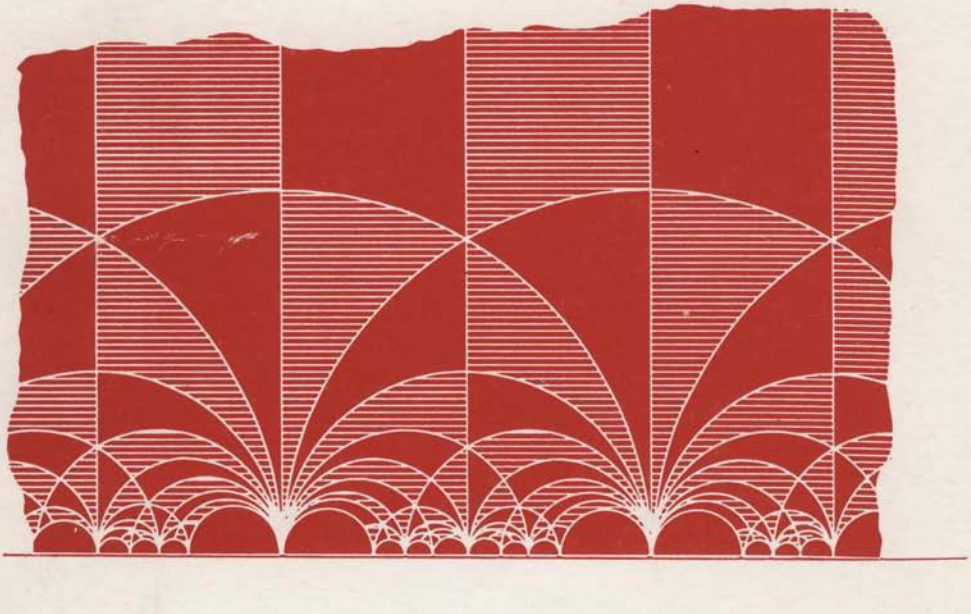
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

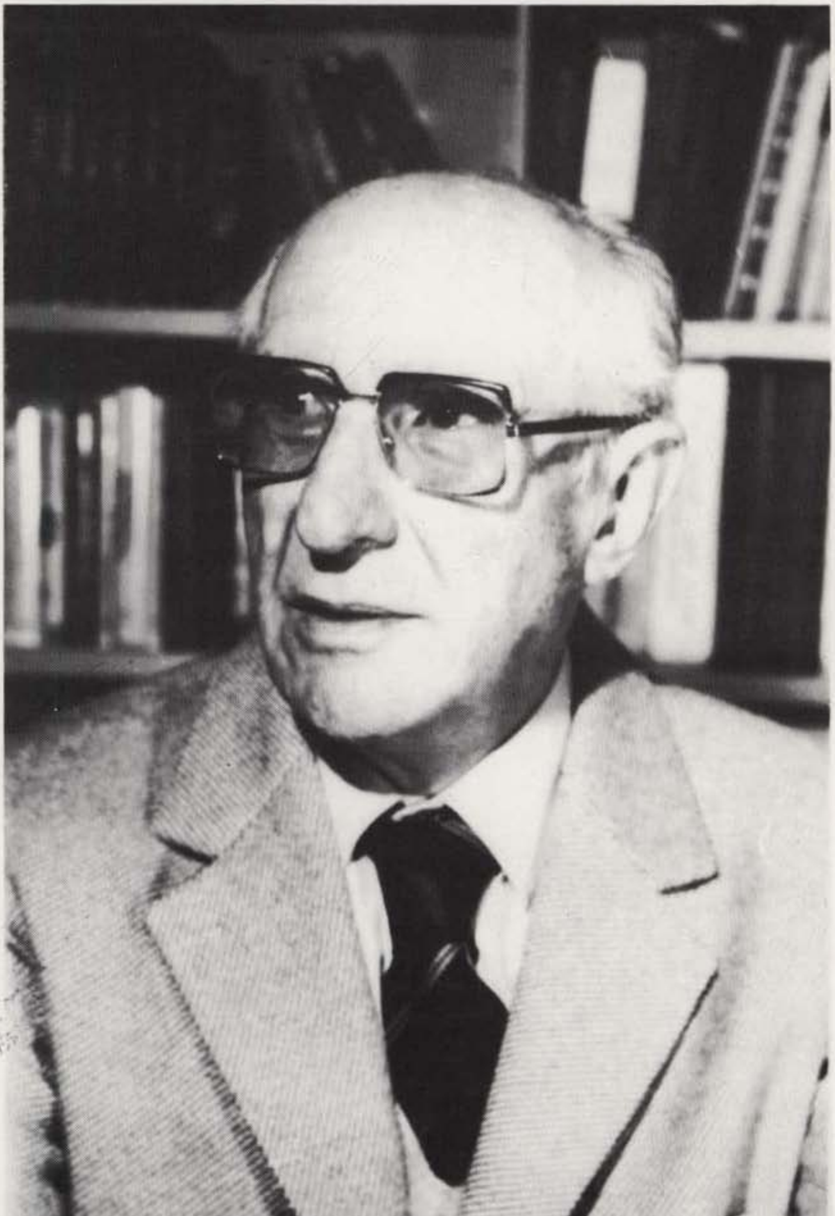
DOCTOR
HONORIS CAUSA

LLUÍS ANTONI SANTALÓ



DISCURS LLEGIT A LA CERIMÒNIA
ELEBRADA AL SALÓ DE SESSIONS
UNTAMENT DE GIRONA
3 DE JUNY DE L'ANY 1986

BELLATERRA/GIRONA, 1986



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

DOCTOR
HONORIS CAUSA
LLUÍS ANTONI SANTALÓ

DISCURS LLEGIT
A LA CERIMÒNIA
D'INVESTIDURA CELEBRADA
AL SALÓ DE SESSIONS
DE L'AJUNTAMENT DE GIRONA
EL DIA 13 DE JUNY
DE L'ANY 1986

BELLATERRA/GIRONA, 1986

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
Bellaterra (Barcelona)
Servei de Publicacions
Dipòsit Legal: B.19.490-1986
Printed in Spain

PRESENTACIÓ DE LLUÍS ANTONI SANTALÓ

PER

JOAN GIRBAU

Quan jo cursava la carrera de Matemàtiques a la Universitat de Barcelona, ja vaig començar a sentir parlar de dos eminents matemàtics catalans de fora de la meva Facultat. Es tractava de Lluís Antoni Santaló i del malaguanyat Ferran Sunyer i Balaguer. Un dia va caure a les meves mans un llibre del professor Santaló, publicat per la coneguda editorial Hermann de París. El seu títol: *Introduction to Integral Geometry.* Recordo que, amb una ingenuïtat de la qual ara em ruboritzo, vaig pensar: «Deu ser molt important en Santaló, que hagi aconseguit de publicar aquest llibre a l'estranger!». El que jo no sabia, aleshores, era la veritable dimensió d'aquell matemàtic català que jo tot just començava a albirar. No sabia que es tractava d'un dels pares de la branca de les matemàtiques que s'ha vingut a denominar Geometria Integral.

S.S. Chern, un dels matemàtics més grans del nostre segle, en carta que m'ha adreçat per a donar suport al nomenament del professor Santaló com a Doctor Honoris Causa per la nostra Universitat, diu: «Ell és el més gran geòmetra integral vivent. L'àrea de la geometria integral és de gran importància tant per a les matemàtiques pures com per a les aplicades, i, durant més de mig segle, el professor Santaló hi ha fet contribucions importants i interessants».

Sobre mi recau l'honor i la responsabilitat de presentar-vos els mèrits científics d'aquest il·lustre fill de Girona. Sempre és difícil d'explicar al públic no especialitzat l'obra d'un científic i, encara més, si es tracta d'un matemàtic. Els avenços en Biologia, en Química o en algunes branques de la Física, en tant que tenen una incidència més immediata en el desenvolupament tecnològic, poden ser copsats més fàcilment per la gent. I, paradoxalment, les Matemàtiques són omnipresents, potser més que cap altra ciència, en el desenvolupament de la Tècnica en general.

Prenem qualsevol matemàtic eminent del passat. Riemann, per exemple. Com podríem fer arribar al gran públic la importància clau d'aquest matemàtic en la Història de la Ciència? Quins descobriments va fer Riemann que tinguessin aplicació material tangible? Els matemàtics coneixem la transcendència dels treballs de Riemann en vàries branques de la Matemàtica: la Geometria que s'anomena de Riemann, per exemple, o la Teoria de Funcions de Variable Complexa. Aquestes teories han tingut una aplicació importantíssima en tota la Física i en la Tècnica en general. Però són les teories, en el seu conjunt, les que s'han aplicat, més que tal o tal altre resultat concret. I les teories són obra, en general, de molts matemàtics. Quasi mai d'un de sol. Per això resulta difícil d'explicar al gran públic l'obra d'un matemàtic, per gran que aquesta sigui.

Els bons matemàtics contribueixen a desenvolupar i perfeccionar branques de les matemàtiques que, posteriorment, en el seu conjunt, tenen aplicacions a d'altres ciències i que, a vegades, poden esdevenir omnipresents en el desenvolupament tecnològic. La importància d'un matemàtic, des d'aquest punt de vista, es pot mesurar pel seu grau de participació en la creació i perfeccionament d'una o vàries teories matemàtiques i pel paper —principal o secundari— que aquestes teories juguen en l'esdevenidor de la Ciència, en general.

L'obra del professor Santaló ha contribuït decisivament al desenvolupament de la Geometria Integral, que posteriorment ha tingut aplicacions pràctiques importants en el camp de l'estereologia, la qual es planteja el problema de descobrir certes característiques de l'interior d'un sòlid a través de les seves seccions per rectes o plans. Suposem un cos X de l'espai, que conté, en el seu interior, impureses que poden ser altres sòlids o superfícies. Es tracta de deduir o estimar la mesura d'aquestes impureses pel que se sap d'elles a través de seccions per plans o rectes. En aquest problema, les fórmules de la Geometria Integral resulten extraordinàriament útils.

El professor Santaló, acabats els seus estudis de llicenciatura a la Universitat de Madrid, se'n va anar a Hamburg amb una beca de l'Acadèmia de Ciències de Madrid. Allà, l'any 1934, el professor Blaschke va organitzar un seminari amb el títol general de «Geometria Integral» (títol elegit pel mateix Blaschke) que tenia per objecte de reprendre, des d'un punt de vista exclusivament geomètric, els resultats de la teoria geomètrica de probabilitats iniciada per Buffon —eminent biòleg del segle XVIII—, seguida per Laplace i Crofton en el segle XIX, i definitivament consolidada per H. Poincaré i E. Cartan a començament del nostre segle. Assistiren a aquell seminari alguns estudiants estrangers entre els quals hi havia L.A. Santaló, S.S. Chern, B. Petkantschin i O. Varga. El professor Blaschke va saber il·lusionar els seus estudiants en aquell tema i de seguida es van recollir els primers fruits d'aquella labor. Un article del mateix Blaschke seguit per un altre del seu deixeble Petkantschin van obrir les portes de les aplicacions geomètriques d'aquella teoria.

En aquell ambient Santaló va iniciar els seus primers treballs sobre el tema, obtenint, en dimensió 2, allò que més tard s'anomenaria fórmula fonamental cinemàtica, i que seria generalitzada en dimensió 3 per Blaschke i en dimensió superior per Chern i Yien.

Els primers resultats de Blaschke i Petkantschin dels quals hem parlat, introduïen el que s'anomena «densitats per als subespais lineals». El problema de trobar densitats anàlogues per als subespais lineals de l'espai projectiu, invariants pel grup projectiu, va ser resolt negativament per O. Varga el 1936. No obstant això, Varga va obtenir resultats interessants per a parells de subespais lineals, els quals van ser desenvolupats i sistematitzats posteriorment per Santaló en un article remarcable publicat l'any 1950. Pocs anys després, Santaló estén la fórmula fonamental cinemàtica a espais de curvatura constant.

Poc a poc, Santaló es va convertint en un dels especialistes més destacats en el seu camp i, l'any 1953, publica un llibre sobre la Geometria Integral, en el qual, d'una manera elegant i sistemàtica, aborda tot allò d'interessant que en aquella àrea existeix fins aleshores.

La producció científica de Santaló és fecundíssima i jo no puc aquí, ni de lluny, tractar de recollir tots els temes als quals ell s'ha dedicat. El que si m'agradaria, és de reflectir les opinions que sobre la seva personalitat i la seva obra han manifestat alguns matemàtics de gran vàlua en ocasió d'aquest nomenament com a Doctor Honoris Causa.

El professor A. Lichnerowicz diu d'ell: «L.A. Santaló és una alta personalitat científica de la nostra comunitat. Ell ha estat, àdhuc abans que el professor S.S. Chern, un pioner en Geometria Integral i és precisament per aquesta causa que el seu nom passarà, sens dubte, a la posterioritat. Autor de descobriments i fórmules importants sovint utilitzades, en particular, per exemple, per Chern, ha dedicat a la Geometria Integral vàries monografies editades en francès, espanyol i anglès que han estat normatives. Molt recentment, algunes desigualtats isoperimètriques interessants obtingudes per Gromov i M. Berger en Geometria riemanniana utilitzen resultats de Santaló».

El professor G.D. Chakerian diu d'ell: «El professor Santaló és el principal nom de la meva generació en les àrees de la Geometria Integral i de les Probabilitats Geomètriques. La seva influència en el desenvolupament de la Geometria en els últims cinquanta anys ha estat pregona i les seves contribucions, profundes i permanents».

El professor F. Pohl escriu: «Jo no he tingut mai la satisfacció de conèixer personalment el professor Santaló, malgrat que entre nosaltres hi ha hagut correspondència per carta. Jo el conec únicament per la seva obra publicada... El professor Santaló és un dels pares de la Geometria Integral i el seu màxim exponent en els últims quaranta anys... Voldria mencionar la seva demostració de la desigualtat isoperimètrica com un dels seus treballs que jo més admiro. Durant molts anys el seu llibre de 1952 va ser el text estàndard sobre el tema, fins que va quedar superat pel seu llibre de 1976 a l'Enciclopèdia. La Geometria Integral, incloent les contribucions fonamentals de Santaló, ha tingut innombrables aplicacions en tots els camps de la ciència i la tecnologia en els últims quaranta anys. Santaló mateix ha contribuït directament en algunes d'aquestes aplicacions. No és gaire comú per a un matemàtic, o àdhuc per a un científic, de veure els fruits de la seva obra reflectits en altres camps de la Ciència».

El professor M. Stoka diu de Santaló, entre altres coses: «Els seus llibres *Introduction to Integral Geometry* i *Integral Geometry and Geometric Probability* han esdevingut ja clàssics. Frases com "el teorema de Santaló" o la "fórmula de Santaló" apareixen constantment en qualsevol treball que tracti de Geometria Integral».

El professor J. Teixidor, eminent matemàtic de l'Empordà, membre de l'Institut d'Estudis Catalans i entranyable mestre meu, escriu: «Veig amb molt de goig el propòsit de la Universitat Autònoma de Barcelona d'investir Doctor Honoris Causa el professor Lluís Antoni Santaló i Sors. Es podria dir que aquest serà un servei més, de gran relleu, que la Universitat Autònoma farà a Girona i al país i que ve a completar el pas que anys enrera donà l'Institut d'Estudis Catalans nomenant-lo Membre Corresponent de la Secció de Ciències. De llavors data la meva relació personal amb el professor Santaló a qui jo havia après a admirar a l'ombra de Blaschke, a l'escola del qual al començament dels anys trenta Santaló havia donat les seves primeres contribucions importants a la Geometria Integral entorn de la seva fórmula cinemàtica. Malgrat el daltabaix de la guerra civil i l'exili, Santaló ha mantingut sempre una producció regular d'elevat nivell i, treballador infatigable, ha donat a la comunitat científica internacional monografies i obres de consulta normatives en Geometria Integral i Probabilitats Geomètriques. A més, encara ha tingut temps per contribuir a l'ensenyament universitari amb obres dedicades a diversos camps de la Geometria que recullen una experiència i unes dots de docent excepcionals...»

Entre les moltes cartes de suport al nomenament del professor Santaló com a Doctor Honoris Causa s'hi compten les de la pràctica totalitat de catedràtics de Geometria Diferencial de l'Estat espanyol. Voldria destacar, d'entre elles, un petit paràgraf escrit pel professor Etayo, de la Universitat Complutense, perquè defineix molt bé la personalitat humana de Santaló. Diu Etayo: «Produeix alegria comprovar com uns valors cultivats en la senzillesa i absència d'aparositat acaben per ser descoberts pels altres i posats en relleu amb tota justícia». En efecte, heus aquí els trets fonamentals de la manera de fer de Santaló: senzillesa i absència d'aparatositat.

Per concloure, voldria dir que els mèrits del professor Santaló han estat reconeguts oficialment, amb anterioritat, per dues institucions eminents del nostre país, l'Institut d'Estudis Catalans, que el va nomenar Membre Corresponent de la Secció de Ciències, i la Universitat Politècnica de Catalunya, que el va nomenar Doctor Honoris Causa. Malgrat això crec que l'acte d'avui té una significació especial per al professor Santaló, perquè es tracta del reconeixement de la seva ciutat natal, Girona, i també pels lligams específics que darrerament l'uneixen, des del punt de vista científic, amb la nostra Universitat, on els professors A. Reventós i E. Gallego han resolt una seva conjectura matemàtica.

Professor Santaló: Vostè, pel seu treball seriós, intens i constant, per la seva entrega total a la Ciència, constitueix un exemple per a tots nosaltres. Gràcies per haver acceptat aquesta distinció de la Universitat Autònoma de Barcelona.

QUÈ SÓN LES MATEMÀTIQUES?

PER

LLUÍS ANTONI SANTALÓ

Agraïments

Haig d'expressar, emocionat, el meu agraïment a la Universitat Autònoma de Barcelona, per l'alta distinció de nomenarme Doctor Honoris Causa, i també al Col·legi Universitari de Girona per haver proposat tal distinció i haver organitzat aquest Acte Solemne d'Investidura, precisament aquí, a Girona, la ciutat estimada i inoblidable en la qual vaig néixer i on vaig passar tots els anys de la meva infantesa i adolescència. La ciutat del Grup Escolar, de les meves primeres lletres i de l'Institut del Segon Ensenyament, tan plens de records i anècdotes que han quedat gravats en la memòria a través dels canvis en el temps i en l'espai. Lluny o a prop, en les hores de felicitat o en les de tristesa i enyorança, la imatge de Girona, amb els seus carrers plens d'història i els meus amics i companys d'aventures inoblidables, han estat sempre gravades en el meu pensament i en el meu cor.

El meu sincer agraïment, també, al doctor J. Girbau per la seva benvolent i amable presentació i a les autoritats acadèmiques i ciutadanes per la seva presència en aquest acte. A tots, moltes gràcies.

Per tal de seguir les pautes reglamentàries caldria ara exposar algun tema sobre la meva especialitat. He pensat que podria ser oportú de fer algunes reflexions sobre què és la Matemàtica o què són les Matemàtiques, i com s'han anat creant a través dels segles fins arribar a l'estat actual, ple de realitats i de promeses.

Què són les Matemàtiques?

En general, quan es tracta de Matemàtiques, la gent pensa en les que va aprendre a l'escola, reduïdes gairebé sempre a les quatre operacions elementals i a classificar figures geomètriques, junt amb les seves àrees i volums.

Aquells que, a més de l'escola primària han fet estudis secundaris o, àdhuc universitaris, seguint carreres en les quals les matemàtiques són tan sols aplicació, veuen que a les operacions elementals se n'hi afegeixen d'altres més complicades, tals com resoldre equacions, relacions trigonomètriques o les operacions del càlcul infinitesimal; però sempre, per a ells, les matemàtiques s'identifiquen amb la calculatòria: fer matemàtiques és portar a terme unes quantes operacions conegudes, mitjançant certes regles operatòries. Semblaria, doncs, que fer matemàtiques és fer càlculs i operacions i que els matemàtics professionals frueixen calculant amb els nombres i fent operacions cada vegada més complicades. Res, però, més lluny de la realitat. El matemàtic fa càlculs considerant-ho una càrrega necessària, però, sempre que pot, inventa aparells, com les modernes computadores electròniques, per tal que calculin per ells, atès que sempre ho fan més ràpid i millor.

Les matemàtiques són tots els càlculs que hom pugui imaginar però, a més, moltes altres coses. Són construccions inacabables en el món de les idees, que admeten molta fantasia i creen formes i coses noves dia a dia, coses que per als entesos són una de tantes manifestacions de l'art, amb la seva bellesa i harmonia. Lluny de ser una cosa acabada que els nens troben a l'escola com una fatalitat i amb la qual de grans topen com una necessitat, les matemàtiques tenen la seva vida pròpia i constitueixen un gran edifici sustentat per les lleis de la lògica, i, per tant, indestructible i perdurable a través dels segles, amb les seves ales, les seves torres i les seves interconnexions.

Per entendre millor això, el més adient serà de fer un recorregut a través de la història, per tal de veure què han estat les matemàtiques a través del temps, com han evolucionat i en quin estat es troben en el dia d'avui.

En l'antic Egipte, el document de matemàtiques més antic és l'anomenat *Papirus Rhind*, del segle XVII abans de la nostra era. Es tracta d'una col·lecció de problemes i de regles per a «escodrinyar la natura i arribar a conèixer tot el que existeix, tots els misteris i tots els secrets». Els problemes són elementals i operatoris (proporcions, regla de tres, repartiments proporcionals), és a dir, per als egipcis d'aquella època, les matemàtiques eren les de les nostres escoles primàries tradicionals. Observem, però, que en les seves paraules inicials ja s'endevina una certa mística i un cert caire esotèric, que les matemàtiques han tingut gairebé sempre, tot meravellant i entusiasmant molts profans, i moltes vegades, amb exageració de les seves possibilitats.

No es presenten novetats d'importància fins a l'època de la Grècia esplendorosa dels segles VII i VI abans de la nostra era. Ni els egipcis ni els grecs no tenien un sistema de numeració comparable amb el que avui tenim, de caràcter decimal i amb les xifres hindú-aràbigues, de manera que els càlculs aritmètics es feien amb molta dificultat. No es manejaven nombres una mica grans, i les operacions entre ells es feien amb dificultat i complicació. Per això les matemàtiques, com a ciència del càlcul, no podien progressar gaire; els grecs donen un cop de timó i conceben les matemàtiques com a filosofia. Per raonament lògic descobreixen els nombres irracionals i amb ells tot un món de nous problemes. Estudien la línia recta i les corbes i, com a base per a les construccions geomètriques, prenen el regle (per a traçar rectes) i el compàs (per a dibuixar circumferències). Neix tota una geometria amb problemes propis, fora de les aplicacions pràctiques, però de gran interès conceptual. Són els famosos problemes de la trisecció de l'angle, la duplicació del cub i la quadratura del cercle. Es tracta de problemes matemàtics per excel·lència, que ja no són de tipus calculatori i que per a les necessitats pràctiques no tenen cap valor, però que conceptualment van ser l'origen de reflexions matemàtiques durant molts segles. Per als grecs, les matemàtiques deixen de ser càlcul per esdevenir especulació filosòfica.

Així, Sòcrates, en la *República* de Plató, diu: «encara que els matemàtics parlen de quadrar, desenvolupar, agregar,... en realitat no tenen altre objecte que el coneixement», i també «el càlcul fa passar els homes de les tenebres a la llum, de l'Hades al sojorn dels déus». Per això, recomana que els futurs dirigents de la República siguin coneixedors del càlcul, però «no d'una manera superficial, sinó fins a elevar-se per la intel·ligència pura a la contemplació de la natura i dels nombres, i que conreïn aquesta ciència, no com els comerciants i traficants amb vista a les compres i les vendes, sinó per a facilitar a l'ànima els mitjans per a elevar-se des de l'esfera de la generació fins a la veritat i l'essència».

Aquesta importància donada per Plató a les matemàtiques, per boca de Sòcrates, ha estat l'origen del fet que tots els sistemes educacionals al llarg de la història les hagin tingut com a disciplina obligatòria.

Cap al segle III abans de la nostra era, apareix Euclides amb la seva obra fonamental, els *Elements*. És la culminació de les matemàtiques gregues i el seu far més elevat com a filosofia, que va il·luminar i guiar tota la producció matemàtica del món durant més de vint segles. En aquesta obra s'estructuren les matemàtiques com a construccions fetes a partir d'uns axiomes i definicions, fins a arribar a teoremes no evidents mitjançant successives cadenes de raonaments lògics. És l'exemple del què, més o menys explícitament, han estat sempre les matemàtiques, i del què són actualment després de les revisions dels seus fonaments fetes el segle passat.

Un exemple de la diferència entre les matemàtiques com a càlcul i com a filosofia, el trobem en els *Elements* d'Euclides quan demostra que existeixen infinits nombres primers (amb la mateixa demostració que encara avui es repeteix a les escoles). Existeixen infinits nombres primers, però si a Euclides li haguessin demanat que en donés algún una mica gran (posem de deu xifres en el sistema decimal que avui tenim) li hauria estat difícil, perquè no disposava d'un sistema de càlcul apropiat. Una cosa és demostrar l'existència i una altra la construcció efectiva, problema que no es presenta en les matemàtiques com a conjunt de càlculs i operacions.

La civilització romana no va distingir-se pels estudis matemàtics. No tenint un instrument de càlcul apropiat, atès que el sistema de numeració romana no es presta al càlcul, i havent perdut l'esperit filosòfic dels grecs, les matemàtiques quedaren estancades.

A l'Edat Mitjana, la bandera de les matemàtiques passà a mans dels àrabs. Ells van perfeccionar, amb les xifres aràbigues, el sistema de numeració decimal que venia de l'Índia, i amb la seva imaginació i fantasia van aplicar les noves regles del càlcul a resoldre problemes curiosos i atraients que poc a poc donaren origen a l'àlgebra. A més, en les seves obres arquitectòniques, mosaics i adorns de capitells, els àrabs van crear molta geometria que, junt amb el caràcter d'endevinalla dels seus problemes algèbrics van fer que, per a ells, les matemàtiques passessin de càlcul i filosofia a art i poesia.

Mentrestant, la civilització cristiana de l'Edat Mitjana només reprodueix i tradueix els llibres de l'antiguitat. Pensar per compte propi és considerat supèrbia i no hi ha producció original. Cap al primer mil·lenari, any 1000, i en gran part a causa de la influència del matemàtic Gerbert d'Aurillac (930-1003), que va ésser Papa amb el nom de Silvestre II, es va introduir a Europa el sistema actual de numeració, gràcies als hindús i als àrabs, la qual cosa va donar resultats sorprenents. Es pot dir que, amb la introducció d'aquesta nova eina de treball, es va destruir una primera barrera aritmètica que feia difícils o impossibles els càlculs numèrics amb nombres una mica grans.

Amb l'àlgebra i el nou sistema de numeració, de seguida van aparèixer nous problemes i nova matemàtica. Els segles XV i XVI van ser brillants a Itàlia en aquest sentit. Com si imitessin les aventures dels llibres de cavalleria, els matemàtics celebraven torneigs i palestres matemàtiques, en les quals posaven a prova els seus coneixements i el seu enginy. No s'esperava dels problemes cap aplicació pràctica, ni els autors esperaven altra recompensa que «renom i fama» entre els seus contemporanis. Foren famosos, per exemple, els «cartelli» de desafiaments matemàtics de Ludovic Ferrari (1522-1565), i Nicolo Tartaglia (1499-1557), a través dels quals va sorgir la solució de les equacions de tercer grau donada per Tartaglia. Els problemes no sorgien d'aplicacions pràctiques i, en general, es fabricaven artificialment, tan sols per l'atracció de l'enunciat i per a posar a prova la capacitat de l'oponent. Per exemple: «trobeu un nombre que en afegir-li la seva tercera potència resulti 3», o bé, «dos homes han guanyat conjuntament 100 ducats i els volen repartir de manera que a un d'ells li toqui l'arrel cúbica de l'altre; com ho han de fer?». El curiós del cas és que aquest tipus de problemes motivava la curiositat d'una part gran de la població, que acudia i participava als desafiaments públics.

Al segle XVI, amb Galileo Galilei (1564-1642), les matemàtiques prenen l'aspecte pràctic de servir per a entendre la natura i els seus fenòmens. En *Il Saggiatore*, Galileu diu: «El llibre de la Natura està escrit amb llenguatge matemàtic, que té per caràcters triangles, circumferències i altres figures geomètriques, sense les quals és impossible d'entendre una sola paraula i es caminaria sempre com en un obscur laberint».

Amb la Nova Ciència de Galileu, que posa en primer pla l'experimentació, les matemàtiques, que havien pujat alt en el món de les idees, baixen novament a la terra per a ajudar a entendre els fenòmens naturals. Les matemàtiques serveixen per a mesurar la natura i els seus fenòmens, com a primer pas per a la seva descripció i comprensió.

Amb aquesta idea, immediatament després de Galileu, apareix Isaac Newton (1643-1727), creador, amb Leibniz (1646-1716), d'una obra fonamental per a tot el futur de les matemàtiques: el càlcul infinitesimal. Per a Newton, les matemàtiques són filosofia quan discuteixen els infinitèsims i les fluxions, i són tècnica quan apliquen totes aquestes adquisicions a la mecànica, al moviment dels astres i a altres lleis de la natura.

Els segles XVIII i XIX són un seguit d'èxits de les matemàtiques de Newton a l'hora d'explicar els fenòmens naturals. Els resultats són sorprenents en mecànica celest, mecànica dels medis continus i en l'electromagnetisme.

Al segle XIX, es desenvolupa un aspecte de les matemàtiques que havia estat desconegut a l'antiguitat i considerat com a entreteniment en els seus orígens (Fermat (1601-1665), Pascal (1623-1662), Jacob Bernoulli (1654-1705)), tot prenent carta de ciutadania matemàtica amb J.L. Laplace (1749-1827). Em refereixo al càlcul de probabilitats. Les matemàtiques havien estat considerades sempre com les ciències exactes per excel·lència, i el que no es podia calcular exactament quedava fora del seu camp. Per això, ciències exactes i ciències matemàtiques eren sinònims. Amb el càlcul de probabilitats, però, es provà que les matemàtiques poden dir també coses sobre allò incert i aleatori. És a través de les probabilitats i l'estadística que les matemàtiques entren en el tractament de les ciències de l'home, que havien estat excloses des de Sòcrates, el qual deia que «l'objecte de les matemàtiques és el coneixement del que existeix sempre, no del que neix i mor en el temps».

Actualment, les lleis dels processos aleatoris poden ésser tractades per les matemàtiques, la qual cosa ha significat una gran extensió del camp de la seva aplicació, principalment en el que es refereix als fenòmens biològics. I, no solament en el camp de les aplicacions, sinó que des del punt de vista conceptual, les idees probabilistes han entrat perfectament dins de l'edifici en construcció de les matemàtiques.

L'extensió del camp de les aplicacions no va fer que les matemàtiques oblidessin el seu aspecte filosòfic. Durant el segle XIX es va progressar molt en la teoria dels nombres [Gauss (1777-1855), Legendre (1752-1833)] i es van aclarir molts punts dels fonaments, tant en el camp de la geometria (geometries no-euclidianes), com de l'aritmètica, en donar definicions rigoroses dels nombres reals i naturals per Dedekind (1831-1916) i Peano (1858-1932), tot culminant amb l'obra transcendental de George Cantor (1845-1918) sobre la teoria de conjunts. Les noves matemàtiques ajuden el càlcul, però també fan comprendre el concepte d'espai i el concepte de nombre, amb totes les seves generalitzacions.

Arribem així al segle XX, el segle dels grans descobriments i del creixement explosiu de totes les branques de les ciències. Les matemàtiques estan suficientment desenvolupades per a poder ser útils a aquest creixement i, en realitat, confirmen la teoria de Galileu que, sense elles, difícilment s'hauria pogut arribar a tant. Simplement, en lloc de triangles i cercles, els elements matemàtics per a entendre la natura són avui grups, tensors, espinors, autovalors i altres creacions que semblen imprescindibles per a comprendre els nous fenòmens atòmics. Les aplicacions de les matemàtiques s'estenen a les ciències de la vida (biologia, sociologia, psicologia) i són imprescindibles tant per al creixement com per a una fonamentació rigorosa d'aquestes ciències.

També són imprescindibles per al progrés tecnològic. Les meravelles actuals en el camp de l'electrònica, per exemple, no haurien estat possibles sense els grans progressos de les matemàtiques en els últims segles i dècades. De vegades, es menyspreen una mica perquè són —diuen— pura teoria. Però sense aquesta teoria, les tècniques no haurien pogut avançar gaire. Amb les matemàtiques soles és evident que l'home no hauria arribat mai a la Lluna, però sense les matemàtiques tampoc.

Cap a la meitat del segle actual va tenir lloc un fet revolucionari: l'aparició de les computadores electròniques. És un exemple del poder conjunt de les matemàtiques més teòriques i de la tècnica quan treballen coordinades. Un exemple de la unitat del coneixement i de la ciència. Abans recordàvem que cap a l'any 1000, amb la introducció del sistema decimal i les xifres aràbigues, s'havia destruït una primera barrera calculatòria i es podia, de cop i volta, calcular amb nombres grans, amb més precisió, senzillesa i intensitat que durant els segles anteriors. Ara, en apropar-nos a l'any 2000, amb les computadores electròniques s'ha destruït una segona barrera calculatòria. Ja no hi ha pràcticament límit en el nombre d'incògnites dels problemes ni en el nombre d'equacions que les vinculen, com tampoc en el volum dels nombres que sigui necessari d'utilitzar.

Encara no ens podem adonar del progrés que això significa. Així com el sistema de numeració decimal va fer possible la creació per Newton del càlcul infinitesimal, base de tota la ciència i tecnologia modernes, qui sap si les computadores actuals faran possible la creació de nous càlculs o noves estructures matemàtiques que permetin desxifrar molts dels enigmes actuals, per exemple les lleis de les partícules elementals o les de l'economia de les poblacions.

Les computadores electròniques serveixen per a emmagatzemar coneixements (bancs de dades) i poden substituir amb avantatge molts llibres, taules i formularis impresos. Des de la impremta de Guttenberg (1397-1468), l'home ha tingut els llibres per a guardar coneixement i tenir a mà les dades necessàries per a la seva feina. Fins al dia d'avui, es pot dir que l'home culte és una parella formada per ell mateix i la seva biblioteca. Alguna vegada s'ha dit, per aquest fet, que l'home ha viscut a la galàxia Guttenberg. Però per al pròxim mil·lenni, les biblioteques resulten insuficients i poc manejables. Ja no hi ha espai per a guardar l'enorme quantitat de coses que es publiquen. D'altra banda, la quantitat d'informació que es necessita per a actuar a la vida és molt superior a la d'èpoques anteriors. Per això, es diu que la humanitat passa a la galàxia Marconi, en la qual cada home culte és la parella formada per ell mateix i una terminal de computadora.

Amb l'ajuda de les computadores i el progrés correlatiu de les matemàtiques, aquestes han estès considerablement el seu camp d'acció, i han eixamplat de manera extraordinària els seus dominis d'aplicació. Si per a Galileu les matemàtiques eren imprescindibles per a entendre la natura inanimada, avui dia podem dir que també són imprescindibles per a entendre la vida i les ciències vinculades a ella.

Han aparegut noves branques del coneixement que admeten tractament matemàtic, com la teoria de la decisió (viure és una contínua decisió i les matemàtiques poden ajudar a prendre la decisió correcta), teoria de la informació (s'aconsegueix mesurar la quantitat d'informació d'un missatge o d'un símbol, la qual cosa resulta fonamental en la teoria de les comunicacions), biologia matemàtica (com la «morfologia matemàtica» de René Thom), la intel·ligència artificial (construir aparells que actuïn de manera semblant al cervell humà; avui dia les màquines ja superen l'home en possibilitats de càlcul, però encara no en d'altres aspectes, com en la reconstrucció d'imatges, traducció automàtica, reconeixement de patrons), criptografia (per a desxifrar codis i missatges; és curiós que en aquesta direcció la teoria de nombres juga un paper important), conjunts difusos o borrosos de Zadeh, fractals de Mandelbroijt, etc.

Vista aquesta gran varietat d'aspectes de les matemàtiques actuals, resulta cada vegada més difícil de donar una definició precisa d'aquesta ciència. Potser la millor sigui considerar-les com un conjunt de construccions en el món de les idees, edificades, a partir de certes definicions i axiomes inicials, per successives deduccions lògiques, junt amb tots els càlculs i regles operatòries que es puguin anar fent amb els elements d'aquestes construccions. Són així un conjunt de models, més o menys relacionats entre ells, que els matemàtics van construint pel sol plaer i curiositat de fer-ho, sense pensar gairebé mai en les seves possibles aplicacions pràctiques. No obstant això, és freqüent que aquests models resultin *a posteriori* adequats per a explicar els fenòmens naturals, tant de les coses inanimades, com dels éssers vivents. L'elecció del model apropiat a cada conjunt de fenòmens i l'adaptació del model a la realitat és l'objecte de les anomenades matemàtiques aplicades.

El segon mil·lenni acaba i presenta una humanitat i una civilització dominades per la ciència i per la tècnica. Els pobles o els individus que no estiguin versats en aquestes qüestions tindran dificultats per a subsistir. La vida es torna difícil i complicada i, per a poder viure-la amb plenitud, farà cada vegada més falta una preparació científica i tecnològica elaborada i subtil. Un coneixement exacte de les matemàtiques s'anirà fent cada vegada més imprescindible, per a no quedar enrera en la marca general. Per això, la cura i l'interès en tot el món per a una bona educació matemàtica des del primer ensenyament, per a tots els ciutadans. Més que formar matemàtics, es tracta de formar intel·ligències amb esperit matemàtic, és a dir, que sàpiguen moure's amb soltesa pels camins del raonament lògic. No farà falta saber calcular —que per a això hi ha les màquines— sinó saber dirigir els càlculs necessaris dins de les seves immenses possibilitats, tot seleccionant per a cada problema els càlculs més adequats i convenients.

De vegades, es té por que amb aquest necessari predomini en l'educació de l'aspecte científico-tecnològic, sobre la base del raonament matemàtic, l'home vagi perdent les seves facultats afectives i es torni d'un temperament fred i rígid, refractari als sentiments afectius i a les passions. Res d'això. El fet de tenir el pensament preparat per al clar raonament lògic i matemàtic, no vol dir que sigui en detriment del sentiment. Es pot pensar i creure i es pot raonar i estimar. L'harmonia entre el pensament i el sentiment perdurarà sempre i fins i tot, quant més elaborat el pensament i més desenvolupades les facultats raonadores, segurament més purs i elevats seran els sentiments. L'home informàtic del tercer mil·lenni no serà un robot sense consciència, sinó un conjunt cada vegada més perfecte de cor i enteniment, cada vegada més a imatge i semblança de Déu, el seu creador.

CURRICULUM VITAE

DE

LLUÍS ANTONI SANTALÓ

Dades personals

Cognom: Santaló
Nom: Lluís Antoni
Lloc i data de naixement: Girona - 09.10.1911
Nacionalitat: Argentí - Nacionalitzat
Cèdula d'Identitat: 4.340.792, classe 1911 D.M. Buenos Aires, Reg. Ml.I, Of. Enroladora Sec. XII.
Domicili: Cochabamba 780, Dep. 10 Buenos Aires.

Títol

Doctor en Ciències Exactes per la Universitat de Madrid el 15.02.1936

Càrrecs professionals exercits

a) Investigador Principal i Sots-director de l'Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Litoral. Rosario (1939-1949).
b) Cap Instructor del Seminario de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires (1947-1952).

c) Professor de la Facultad de Ciencias Físico-matemáticas de la Universidad Nacional de la Plata (1949-1956).
d) Professor de la Escuela Superior Técnica del Ejército (1955-1959).
e) Membre de la Sección Matemática de la Comisión Nacional de la Energía Atómica (1952-1957).
f) Professor de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires (1957-segueix).
g) Professor-Titular plenari de la Universidad de Buenos Aires (1961-segueix).

Antecedents acadèmics

a) Acadèmic de l'Academia Nacional de Ciencias de Lima (Perú).
b) Acadèmic de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid (1955).
c) Acadèmic de l'Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires (1960).
d) Acadèmic de l'Academia Nacional de la Ciencia de Córdoba (1961).
e) Acadèmic de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona (1970).

Premis i beques

a) Premio Nacional de Cultura (1954).
b) Premi de la Sociedad Científica Argentina del quinquenni 1959-1964.
c) Premi Mibashan del Consejo Nacional Investigaciones Científicas y Técnicas (1968).
d) Premi Príncipe de Asturias de Investigación Científica (1983).
e) Doctor Honoris Causa per la Universitat Politècnica de Catalunya (1977).
f) Becari de la Fundació Guggenheim (1948-1948).

Treballs de recerca publicats

1. «Area engendrada por un segmento que se mueve conservándose normal a una *línea* y describiendo una superficie desarrollable», *Revista Matemática Hispano-Americana*, vol. 9, 1934, 101-107.
2. «Unos problemas de combinatoria», *Matemática Elemental*, vol. III, 1934, 21-22.
3. «Algunas propiedades de las curvas esféricas y una característica de esfera», *Rev. Mat. Hisp-Am.*, vol. X, 1935, 1-4.
4. «Superficies desarrollables que pasan por una línea», *Las Ciencias*, vol. I, 1934.
5. «Una fórmula integral para las figuras convexas en el plano y en el espacio», *Rev. Mat. Hisp-Am.*, vol. II, 1936, 209-216.
6. «Unos problemas referentes a probabilidades geométricas», *Rev. Mat. Hisp-Am.*, vol. II, 1936, 87-97.
7. «Geometría integral 4: Sobre la medida cinemática en el plano», *Hamburg Abhandlungen*, vol. XI, 1936, 222-236.
8. «Integral geometrie 5: Ueber das kinematische Mass in Raum», *Actualités Hermann*, n.º 357, París 1936.
9. «Geometría Integral 7: Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano y en el espacio», *Revista de la Academia de Ciencias de Madrid*, vol. 33, 1936, 3-50 (Tesis doctoral de l'autor).
10. «Curvas sobre una superficie que cumplen la condición dsf (k,t) ds = o», *Rev. Mat. Hisp-Am.*, vol. 12, 1937, 3-12.
11. «Geometría integral 15: Fórmula fundamental de la medida cinemática para cilindros y planos paralelos móviles», *Hamburg Abhandlungen*, vol. 12, 1937, 38-41.
12. «Geometría integral 32: Sobre valores medios y probabilidades geométricas», *Hamburg Abhandlungen*, vol. 13, 1940, 284-294.
13. «Géométrie intégrale 32: Quelques formules intégrales dans le plan et dans l'espace», *Hamburg Abhandlungen*, vol. 13, 1940, 344-356.
14. «Valor medio del número de partes en que una figura convexa

es dividida por rectas arbitrarias», *Revista de la Unión Mat. Arg.*, vol. 7, 1940-41.

15. «Generalización de un problema de probabilidades geométricas», *Revista de la Unión Mat. Arg.*, vol. 7, 1940-41.

16. «Un esquema de valores medios en la teoría de probabilidades geométricas», *Revista de Ciencias*, Lima, vol. 42, 1940, 146-154.

17. «A theorem and inequality referring to rectifiable curves», *American Journal of Mathematics*, vol. 63, 1941, 635-644.

18. «Quelques propriétés des courbes gauches dans la géométrie différentielle affine», *Portugaliae Mathematica*, vol. 3, 1942, 63-68.

19. «Sur quelques problèmes de probabilités géométriques», *Tohoku Mathematical Journal*, vol. 47, 1940, 159-171.

20. «Verallgemeinerung cines Satz von T. Kubota ueber Eilinien», *Tohoku Math. Journal*, vol. 48, 1941, 64-67.

21. «Algunas propiedades infinitesimales de las curvas plans», *Math. Notae*, vol. 1, 1941, 129-144.

22. «Geometría integral de figuras ilimitadas», *Publicaciones del Instituto de Matemáticas. Rosario*, vol. 1, 1939, 5-58.

23. «Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo». *Publicaciones del Inst. de Mat. Rosario*, vol. 2, 1940, 37-46.

24. «Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas», *Publ. del Inst. de Mat. Rosario*, vol. 2, 1940, 49-60.

25. «Curvas extremales de la torsión total y curvas D». *Publ. del Inst. de Mat. Rosario*, vol. 3, 1941, 133-156.

26. «Complemento a la nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas"», *Publ. del Inst. de Mat. Rosario*, vol. 3, 1942, 203-210.

27. «Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollables en el espacio euclidiano de 4 dimensiones», *Publ. del Inst. de Mat. Rosario*, vol. 4, 1942, 3-44.

28. «Algunos valores medios y desigualdades referentes a curvas situadas sobre la superficie esférica», *Revista de la Unión Mat. Argentina*, vol. 8, 1942.

29. «Sobre el concepto de curvatura de superficies», *Math. Notae*, vol. 1942, 165-184.
30. «Integral formulas in Crofton's style on the sphers and some inequalities referring to spherical curves», *Duke Math. Jour.*, vol. 9, 1942, 707-722.
31. «Algunas desigualdades entre los elementos de un triángulo», *Math. Notae*, vol. 3, 1943, 65-73.
32. «Sobre la cónica osculatriz en un punto ordinario de la curva plana», *Revista de la Unión Mat. Argentina*, vol. 9, 1943.
33. «La desigualdad isoperimétrica sobre superficies de curvatura constante negativa», *Revista de Mat. y Física Teórica de la Universidad de Tucumán*, vol. 3, 1942.
34. «Una propiedad característica del círculo», *Math. Notae*, vol. 3, 1943, 142-147.
35. «Sobre la distribución probable de corpúsculos en un cuerpo deducida de la distribución en sus secciones y problemas análogos», *Revista de la Unión Mat. Argentina*, vol. 9, 1943, 145-164.
36. «Integral geometry in surfaces of constant negative curvature», *Duke Math. Jour.*, vol. 10, 1943, 687-704.
37. «Propiedades de las figuras convexas sobre la esfera», *Math. Notae*, vol. 4, 1944, 11-40.
38. «Acotaciones para la longitud de una curva o para el número de puntos necesarios para cubrir aproximadamente un dominio», *Anais da Academia Brasileira de Ciencias*, vol. 16, 1944.
39. «Superficies cuyas curvas-D son geodésicas o trayectorias isogonales de las líneas de curvatura», *Publicaciones del Inst. de Mat. Rosario*, vol. 5, 1943, 255-267.
40. «Note on convex spherical curves», *Bulletin of the American Math. Soc.*, 50, 1944, 528-534.
41. «Area acotada por la curva engendrada por un extremo de un segmento cuyo otro extremo recorre una curva fija y aplicación de la obtención de algunos teoremas sobre óvalos», *Math. Notae*, 4, 1944, 213-226.
42. «Un teorema sobre representación conforme», *Math. Notae*, vol. 5, 1945, 20-40.

43. «Valor medio del número de regiones en que un cuerpo del espacio es dividido por planos arbitrarios», *Revista de la Unión Mat. Argentina*, vol. 10, 1945, 101-108.

44. «Sobre el círculo de radio máximo contenido en un recinto», *Revista de la Unión Mat. Argentina*, vol. 10, 1945, 155-162.

45. «Note on convex curves on the hyperbolic plane», *Bulletin of the American Math. Soc.*, vol. 51, 1945, 405-412.

46. «Complemento a la nota "Sobre un problema diofántico"», *Math. Notae*, vol. 5, 1945, 162-171.

47. «Algunas propiedades de las curvas alabeadas en la geometría diferencial proyectiva», *Actas de la Academia de Ciencias de Lima*, vol. 8, 1945, 203-216.

48. «Sobre un complejo lineal ligado a una curva cerrada del espacio», *Math. Notae*, vol. 6, 1946, 45-56.

49. «Convex regions on the dimensional spherical surface», *Annals of Mathematics*, vol. 47, 1946, 448-459.

50. «A geometrical characterization for the affine differential invariants of a space curve», *Bulletin of the Am. Math. Soc.*, vol. 52, 1946, 625-632.

51. «Sobre la longitud de una curva del espacio como valor medio de las longitudes de sus proyecciones ortogonales», *Math. Notae*, vol. 6, 1946, 158-166.

52. «Una fórmula integral referente a figuras convexas», *Revista de la Unión Mat. Argentina*, vol. 7.

53. «Unas fórmulas integrales referentes a cuerpos convexos», *Revista de la Unión Mat. Argentina*, vol. 12, 1946, 78-87.

54. «Sobre los cuerpos convexos de anchura constante en En'», *Portugaliae Mathematica*, vol. 5, 1946, 195-201.

55. «Estudios numerativos sobre las propiedades de contacto de las superficies en un espacio de dimensiones» (en col·laboració amb B. Levi i De Maria), *Publ. del Inst. de Mat. Rosario*, vol. 8, 1946, 3-72.

56. «On the first two moments of measure of a random set», *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 18, 1947, 37-49.

57. «Sobre la medida del conjunto de figuras convexas congruentes

contenidas en el interior de un rectángulo o de un triángulo», *Actas Academia de Ciencias de Lima*, vol. 10, 1947, 102-118.
58. «Affine invariants of certain pairs of curves and surfaces», *Duke Math. Journal*, vol. 14, 1947, 559-574.
59. «Una propiedad característica de las cuádricas de revolución y de los cilindros cuya sección recta es una espiral logarítmica», *Math. Notae*, vol. 7, 1947, 81-90.
60. «Sobre figuras planas hiperconvexas», *Summa Brasiliensis Mathematicae*, vol. 1, fasc. 11, 1946, 221-239.
61. «Sobre la distribución de planos en el espacio», *Revista de la Unión Mat. Argentina*, vol. 13, 1948, 120-124.
62. «Curvas D sobre conos», *Math. Notae*, vol. 7, 1947, 179-190.
63. «Beweis eines Satzes von Bottema Ueber Eilinien», *Tohoku Math. Journal*, vol. 48, 1941, 221-224.
64. «Integral geometry on surfaces», *Duke Math. Journal*, vol. 16, 1949, 361-375.
65. «Un invariante afín para las curvas convexas del plano», *Math. Notae*, vol. 8, 1949, 103-111.
66. «Integral geometry on projective and affine spaces», *Annals of Mathematics*, vol. 51, 1950, 739-755.
67. «Geometría integral en los espacios tridimensionales de curvatura constante», *Math. Notae*, vol. 9, 1950, 1-28.
68. «On parallel hypersurfaces in the elliptic and hyperbolic n-dimensional space», *Proc. of the Am. Math. Soc.*, vol. 1, 1950, 325-330.
69. «Unas fórmulas integrales y una definición del área q-dimensional de un conjunto de puntos», *Revista de Mat. y Física Teórica de la Univ. de Tucumán*, vol. 7, 1950.
70. «Un invariante afín para los cuerpos convexos del espacio de n dimensionales», *Portugaliae Math.*, vol. 8, 1949, 155-161.
71. «Unas desigualdades entre los elementos de un tetraedro en geometría noeuclidiana», *Math. Notae*, vol. 9, 1950, 113-117.
72. «Sobre unas fórmulas integrales y valores medios referentes a figuras convexas móviles en el plano», *Publ. de la Fac. de Ciencias Exactas de la Univ. de Buenos Aires*, vol. 1, n.º 2, 1950, 25-45.

73. «Observaciones sobre superficies y poliedrales inscritas», *Las Ciencias*, Madrid, vol. 15, 1950.
74. «Generalización de una desigualdad de H. Hornich a espacios de curvatura constante», *Revista de la Unión Mat. Argentina*, vol. 15, 1951, 62-66.
75. «La probabilidad en las construcciones geométricas», *Anales de la Soc. Científica Argentina*, vol. 152, 1951, 203-229.
76. «On permanent vector varieties in n dimensions», *Portugaliae Math.*, vol. 10, 1951, 125-127.
77. «Integral Geometry in general spaces», *Proceedings of the International Congress of Mathematiciens*, Cambridge, 1950, vol. 1, 483-489.
78. «Integral Geometry in Hermitian spaces American I», of *Math.*, vol. 74, 1952, 423-434.
79. «Dos propiedades de los círculos sobre la superficie esférica», *Math. Notae*, vol. 11, 1952, 73-78.
80. «Geometría integral en espacios de curvatura constante», *Publicaciones de la Com. Nac. de la Energía Atómica. Serie Matemática*, vol. 1, fasc. 1, 1952, 1-68.
81. «Problemas de geometría integral», *Symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en América Latina*, Punta del Este, Uruguay, 1951, 23-40.
82. «Algunos valores medios sobre la semiesfera», *Math. Notae*, vol. 12-1, 1952, 32-37.
83. «Measure of sets of geodesics in a riemmanian space and applications to integral formulas in elliptic and hyperbolic spaces», *Summa Brasiliensis Mathematicae*, vol. 3, n.° 1, 1952, 1-11.
84. «On the kinematic formula in spaces of constant curvature», *Proceedings of the International Congress of Mathematiciens*, Amsterdam, 1954.
85. «Unas generalizaciones del teorema de los cuatro vértices», *Math. Notae*, vol. 12, 1954, 69-78.
86. «Sobre unos tensores análogos al de curvatura en espacios de conexión afín no simétrica», *Revista de Mat. y Física Teórica de la Universidad de Tucumán*, vol. 10, 1954, 19-26.

87. «Sobre el teorema de Holditch y análogos en geometría no euclidiana», *Math. Notae*, vol. 14, 1954, 32-49.
88. «Cuestiones sobre geometría diferencial afín de superficies», *Coloquio sobre algunas cuestiones matemáticas que se están estudiando en América Latina*, II, Villavicencio, Mendoza, 1954, 21-33.
89. «On geometry of numbers», *Japanese J. of Math.*, vol. 7, 1955, 208-213.
90. «Cuestiones de geometría diferencial e integral en espacios de curvatura constante», *Rendiconti del Seminario Mat. di Torino*, vol. 14, 1955, 277-295.
91. «Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe et problemes qui s'y rattachent», *Coloquio sobre cuestiones de realidad*, Liège, 1955, 177-190.
92. «Sobre la distribución de los tamaños de los corpúsculos contenidos en un cuerpo a partir de la distribución en sus secciones», *Trabajos de Estadística*, Madrid, vol. 6, 1956, 181-196.
93. «Sobre las cuerdas de una curva convexa», *Revista de la Unión Matemática Argentina*, vol. 17, 1955, 217-222.
94. «Curvas sobre una superficie extremales de una función de la curvatura y de la torsión», *Abhandlungen der Hamburgische Universitat*, vol. 20, 1956.
95. «Sobre la unicidad de los operadores vectoriales», *Math. Notae*, vol. 14, 1955, 120-132.
96. «On the mean curvatures of a flattened convex body», *Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul*, vol. 21, 1956, 189-194.
97. «Unas propiedades de la representación conforme local de una superficie sobre otra», *Revista de la Unión Mat. Argentina*, vol. 18, 1957, 45-52.
98. «Geometría diferencial afín y cuerpos convexos», *Math. Notae*, vol. 16, 1957, 20-42.
99. «Un nuevo invariante afín para las figuras convexas del plano y del espacio», *Math. Notae*, vol. 16, 1958, 78-91.
100. «Sobre las ecuaciones del campo unificado de Einstein», *Revista de Mat. y Física Teórica de la Universidad Tucumán*, vol. 12, 1959, 31-55.

101. «Unas desigualdades referentes a figuras convexas del plano y del espacio», *Actas de la reunión de la Unión Mat. Arg. en Bahía Blanca*, 1957.
102. «Two applications of the integral geometry in affine and projective spaces», *Publ. Math. Debrecen*, vol. 7, 1960, 226-237.
103. «Sobre las teorías del campo unificado», *Revistado de la Unión Matemática Argentina*, vol. 19, 1960, 195-206.
104. «Una fórmula de Steiner para superficies paralelas en geometría afín», *Rev. de Mat. y Fís. Teórica de la Universidad de Tucumán*, vol. 13, 1960, 194-208.
105. «Sobre los sistemas completos de desigualdades entre elementos de una figura convexa plana», *Math. Notae*, vol. 17, 1961, 82-104.
106. «On the measure of sets of parallel linear spaces in affine space», *Canadian J. of Math.*, 14, 1962, 313-319.
107. «Sobre la fórmula fundamental cinemática de la geometría integral en espacios de curvatura constante», *Math. Notae*, 18, 1963, 79-94.
108. «Sobre la fórmula de Gauss-Bonnet para poliedros en espacios de curvatura constante», *Revista de la Unión Mat. Argentina*, 20, 1960, 79-91.
109. «Sobre unas propiedades características de la esfera», *Rev. Mat. i Física Teórica Univ. Tucumán*, 14, 1962, 287-297.
110. «Una relación entre las curvaturas medias de cuerpos convexos paralelos entre espacios de curvatura constante», *Revista de la Unión Mat. Argentina*, vol. 21, 1963, 121-137.
111. «On Einstein's unified field theory», Artículo del libro *Perspectives in Geometry and Relativity*, Indiana University Press, 1966, 342-352.
112. «Integral Geometry of the proyective groups on the plane depending on more than 3 parameters», *Ann. Scient. Université de Jassy*, vol. 11, 1965, 307-335.
113. «Valores medios para polígonos formados por rectas al azar en el plano hiperbólico», *Rev. Mat. y Fís. Teórica Universidad de Tucumán*, vol. 16, 1966, 29-44.

114. «Sobre el recíproco de un teorema de Jacobi referente a curvas del espacio», *Rev. Mat. y Fís. Teórica Universidad de Tucumán*, vol. 17, 1967, 83-89.
115. «Curvaturas totales absolutas de variedades contenidas en el espacio euclideo», *Acta compostelana*, vol. 4, 1967, 149-158.
116. «Horocycles and convex sets in hyperbolic plane», *Arch. Math. (Basel)*, 18, 1967, 529-533.
117. «Spaces with two affine connections», *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 59, 1967, 3-8.
118. «Grupos del plano respecto de los cuales los conjuntos de puntos y rectas admiten una medida invariante», *Rev. Unión Mat. Argentina*, 23, 1967, 119-148.
119. «Integral Geometry», Artículo del libro *Studies in global Analysis and Geometry* editado por S.S. Chern. The Mathematical Association of America. Prentice Hall. 1967, 147-193.
120. «Horospheres and convex bodies in hyperbolic space», *Proc. Amer. Math. Society*, 1968, 390-395.
121. «Curvaturas absolutas totales de variedades contenidas en un espacio euclidiano», *Acta Científica Compostelana*, vol. 5, 1968, 149-158.
122. «On some geometric inegualities in the style of Fary», *American J. Math.*, 91, 1969, 25-41.
123. «Spaces with two affine connections», *Bull. Calcuta Math. Soc.*, 59, 1967, 3-8.
124. «Convexidad en el plano hiperbólico», *Rev. Mat. y Fís. Teórica Universidad Tucumán*, 19, 1969, 174-183.
125. «Algunos problemas de geometría diferencial», *Notas Científicas serie A. Matemática*, vol. 7, Lima, 1969, 27-43.
126. «Mean values and curvatures», *Izv. Akad. Nauk. Armejan, SSR, Ser. Mat.*, vol. 5, 1970, 286-295.
127. «Probabilidades sobre cuerpos y cilindros convexos», *Rev. Unión Matem. Argentina*, 25, 1970, 286-295.
128. «Averages for polygons formed by random lines in Euclidean and Hyperbolic planes» (en col·laboració amb Y. Yañez), *Journal of Applied Probability*, 9, 1972, 140-157.

129. «Sobre algunas teorías asimétricas del campo unificado», *Rev. R. Academia de Ciencias de Madrid*, 66, 1972, 395-425.
130. «Unified field theories of Einstein's type deduced from a variational principle: Conservation laws», *Tensor*, 25, 1972, 383-389.
131. «Total curvatures of compact manifolds immersed in euclidean space», *Sympos. Matematica Instituto Naz. Alta Matematica*, Roma Academic Press 1947, 350-363.
132. «Curvas y cuaterniones», *Rev. Unión Matemática Argentina*, 27, 1974-75, 41-52.
133. «The kinematic formula in integral geometry for cylinders», *Annali di Mat. Pura ed. Appl.*, 103, 1975, 71-79.
134. «Algunos problemas de Geometría Diferencial», *Not. Ci. Ser. M. Mat.*, 7, 1969, 27-34.
135. (En col·laboració amb N.A. Fava) «Plate and line segmen process», *J. Appl. Prob.*, 15, 1978.
136. «Conjuntos de segmentos sobre superficies», *Math. Notae*, 26, 1977-1978, 63-72.
137. «Random processes of linear segments and graphs. Geometric probability and biological structure», *Lecture Notes in Biomath.*, 23, Springer 1978, 279-294.
138. «Random lines and tessellations in a plane», *Stochactica*, 4, 1980, 3-13.
139. (En col·laboració amb N.A. Fava) «Random processes of manifolds in R^n», *Wahrsch. Verw. Gebiete*, 50, 1979, 85-96.
140. «Cauchy and Kubota's formula for convex bodies elliptic n space», *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, 38, 1980, 51-58.
141. «Integral geometry: history and perspectives», *Proceedings of IV International Colloquium on Diff. Geom. Santiago Compostela*, Univ. Santiago de Compostela, 1979, 1-48.

Llibres publicats

1. *Historia de la Aeronáutica*, Espasa-Calpe, Argentina, Buenos Aires, 1946.

2. (En col·laboració amb J. Rey Pastor) *Geometría Integral*, Espasa-Calpe, Argentina, Buenos Aires, 1951.
3. *Introduction to Integral Geometry*, Hermann, París, 1953. (Existeix traducció al rus).
4. *La Probabilidad y sus Aplicaciones*, Ed. Iberoamericana, Buenos Aires, 1955.
5. (En col·laboració amb Rey Pastor i Balazat). *Geometría Analítica*, Ed. Kapeluz, Buenos Aires, 1955.
6. *Vectores y Tensores*, Editorial Universitaria de Buenos Aires (EUDEBA).
7. *Geometrías no euclidianas*, EUDEBA, 1961.
8. *Geometría Proyectiva*, EUDEBA, 1966.
9. *Espacios Vectoriales y Geometría Analítica*, Monografías de la OEA, Washington, 1965.
10. *Probabilidad e Inferencia Estadística*, Monografías de la OEA, Washington, 1970.
11. *La Matemática en la Escuela Secundaria*, EUDEBA, 1966.
12. *Integral Geometry and Geometric probability*, Addisson Wesley, Publi. Co., 1976.
13. *Geometría espinorial*, Cursos Mat. Consejo Nacional de Investig. Científicas, Instituto Argentino de Mat., Buenos Aires, 1976.

Articles de divulgació i conferències publicades

1. «Algunos problemas geométricos que plantea la navegación aérea», *Boletín Mat.*, vol. 13, 1940.
2. «Sobre las probabilidades continuas», *Ciencia*, México, vol. 1, 1940.
3. «Posibilidades del vuelo interplanetario», *Rev. de Ingeniería y Arquitectura*, Rosario, 1942.
4. «La Matemática y el Lenguaje», Conferència publicada per la Asociación Cultural de Conferencias, Rosario, 1941.
5. «Nicolo Tártaglia y la resolución de la ecuación de tercer grado», *Math. Notae*, vol. 1, 1941.

6. «Isaac Newton y el Binomio», *Math. Notae*, vol. 2, 1942.
7. «La probabilidad y sus diversas aplicaciones», Conferència publicada per l'Asociación Cultural de Conferencias, Rosario, 1942.
8. «Breve historia y estado actual de algunas quimeras y fantasías del hombre», *Revista Centro Estudiantes Fac. Ciencias Mat.*, Rosario, 1943.
9. «Origen y desarrollo de la geometría integral», *Revista de la Univ. Católica del Perú*, vol. 12, 1944.
10. «Origen y evolución de algunas teorías matemáticas», *Revista de Ingeniería*, Montevideo, octubre, 1945.
11. «Sobre el problema del radio de acción de los aviones», *Rev. del Centro de Estudiantes de la Fac. de Ciencias Mat.*, Rosario, 1945.
12. «Las probabilidades geométricas y la geometría integral», Conferència a la Fac. d'Ing. de Montevideo. Publicada al Butlletí de la mateixa Facultat, vol. 3, 1945.
13. «Contribuciones de la aviación al progreso de las ciencias», Conferència publicada per l'Asoc. Cultural de Conf. de Rosario, 1945.
14. «Aplicaciones y problemas actuales de algunas teorías matemáticas», Conferència pronunciada a la Soc. Cient. Argent. i publicada als Anals de la mateixa, vol. 150, 1950.
15. «Nuevos problemas planteados a la matemática por otras ciencias», *Boletín del Centro de Coordinación Científica*, UNESCO, 1952.
16. «El problema de la unificación de los campos: la última teoría de Einstein», *Mundo Atómico*, año 4, 1953.
17. «La última teoría del campo único de Einstein», *Ciencia e Investigación*, vol. 9, 1953.
18. «La probabilidad en geometrías no euclidianas», *Estocásticas*, vol. 2, 1954.
19. «Aspectos modernos en el campo de la geometría», *Ciencia y Tecnología*, vol. 4, n.º 12, 1954.
20. «La obra de Einstein en el campo matemático», *Ciencia e Investigación*, Julio, 1955.

21. «Geometría analítica y geometría sintética», *Ciencia e Investigación*, 1961.
22. «La Matemática en la Argentina», *Revista de la Universidad de Buenos Aires*, 1961.
23. (En col·laboració amb C. Carranza) «Geometrías finitas», *Ciencia e Investigación*, Buenos Aires, 1963.
24. «Perspectivas del desarrollo de la matemática en América Latina», *Revista de la Unión Mat. Argentina*, 20, 1960, 23-32.
25. «La obra científica de Beppo Levi», *Math. Notae*, 18, 1962, 23-28.
26. «La enseñanza de las ciencias en la escuela media: La Matemática», *Ciencia e Investigación*, Buenos Aires, 1963, 245-252.
27. (En col·laboració amb A. Valeiras) «La formación de profesores de matemáticas», *Educación Matemática en las Américas*, I, Columbia University Teachers College, 1962.
28. «La Matemática moderna en la escuela primaria y en la secundaria», *La Educación*, Washington, OEA, 1965, n.° 37-38, 25-44.
29. «Problemas que encuentra la reforma de la matemática en América Latina referentes a los profesores y programas», *Educación Matemática en las Américas*, II, Informe de la Conferencia de Lima, 1966, 23-29.
30. «Preparación de profesores de matemática para la enseñanza secundaria» (en col·laboració amb R. Voelker), *Educación Matemática en las Américas*, II, 1966, 189-196.
31. «La Matemática y la Educación», *Publicación de la Oficina de Ciencias de la UNESCO para América Latina*, Montevideo, 1972.
32. «La Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires en el período 1865-1930» (Primer Congreso Argentino de Historia de la Ciencia), *Boletín de la Acad. Nac. Ciencias*, Córdoba, 1970, 255-273.

Anàlisi global de la recerca realitzada

La labor creadora del Professor Santaló s'ha manifestat en diferents camps de la Matemàtica. A continuació s'explica la recerca realitzada en cada un d'aquests camps.

1) *Geometría Integral.* La idea principal de la recerca en aquest camp va consistir a estendre i aplicar l'anomenada «mesura cinemàtica» que havia estat introduïda accidentalment per Poincaré. Els primers treballs en aquesta direcció són 7/, 8/, 9/ i 15/. Per generalitzacions successives a figures ilimitades 23/, a figures sobre l'esfera 28/, 30/, a figures del pla hiperbòlic 33/, i a figures hiperconvexes 60/, aquesta línia d'investigació culmina amb l'obtenció de la fórmula fonamental cinemàtica en espais de curvatura constant, i la seva aplicació 80/, 84/ i 90/. El problema tractat és essencialment el següent: sigui E un espai en el qual actua transitivament un grup G de transformacions. Donada una figura F continguda a E considerem el conjunt de posicions de F, és a dir, el conjunt de figures transformades de F per G. Es tracta de mesurar aquest conjunt de posicions. Aquesta mesura no és altra que la mesura de Haar de G, que existeix si G és localment compacte i que es pot calcular explícitament si G és un grup de Lie. La majoria de problemes considerats consisteixen a calcular explícitament la mesura de conjunts particulars, per a grups G també particulars, en especial per al grup d'isometries si E és un espai euclidià o no euclidià (de curvatura constant). D'aquests càlculs particulars se'n dedueixen importants conseqüències geomètriques. Per exemple, s'obtenen desigualtats isoperimètriques i fórmules integrals per a cossos convexos que generalitzen les primitives fórmules de Crofton de les probabilitats geomètriques (13/, 52/, 53/, 72/).

Vinculada a la mesura cinemàtica hi ha la mesura en les espais homogenis, l'exemple més important de la qual és el de la mesura de subespais lineals de l'espai euclidià, afí o projectiu 77/. No sempre existeix aquesta mesura i l'anàlisi dels casos d'existència o no existència dóna lloc a resultats interessants, 66/, 106/, 91/, 112/, 118/. La geometria integral en espais complexos dóna lloc a una generalització de la clàssica fórmula de Bézout per a corbes algebraiques, 78/.

Com aplicacions dels resultats obtinguts es pot mencionar una nova manera de definir longitud de corbes, 17/, o l'àrea de subvarietats, 69/ o mesurar conjunts de geodèsiques, 83/.

Com exposicions de conjunt de la teoria podem citar els llibres, 3/, i 12/ de l'apartat VII.

2) *Geometria diferencial clàssica.* Entre els temes de geometria diferencial clàssica, 3/, 10/, 27/, 39/, 41/, 55/, 59/, 62/ 71/, 108/, 110/, caldria mencionar l'estudi de corbes de Darboux amb la demostració que aquestes corbes coincideixen amb les extremals de la torsió total, 25/, 94/. També caldria citar una sèrie de resultats en el camp de la geometria diferencial afí i projectiva, 47/, 50/, 97/. A 97/ s'utilitza per primera vegada el mètode de la referència mòbil de E. Cartan per a l'estudi de la geometria diferencial afí, com reconeix Mihailescu en una memòria de la Reial Acadèmia de Bèlgica (Brussel·les, 1965).
3) *Geometria dels cossos convexos.* Els resultats obtinguts en el camp de la Geometria Integral van resultar de gran utilitat en la teoria de cossos convexos. Es van originar nous problemes i se'n van poder resoldre d'altres de vells. Va tenir especial repercusió el treball, 24/ que modernament té aplicació en qüestions d'optimització (vegeu, per exemple, el llibre de Stoer-Witzgall, *Convexity and Optimization in finite dimensions I*, Sprenger, Berlin, 1970).
4) *Teoria de nombres.* Dins de la Teoria de nombres hi ha una important branca anomenada «Geometria dels nombres» iniciada per Minkowski en la qual la convexitat i la mesura en grups tenen una aplicació directa. En aquesta branca podríem citar el treball, 66/ on es dóna una nova demostració d'un teorema clàssic de Minkowski, 22/ on es generalitza un resultat també clàssic de Blichfed, i els treballs, 70/, 89/, 22/, citats en el llibre de Lekkerkerker, *Geometry of numbers*, North-Holland 1969.
5) *Teoria del camp unificat.* Alguns dels treballs estan vinculats amb la Física, 76/. Generalitzen un resultat de Synge sobre camps vectorials. Diversos treballs es vinculen directament o indirecta a la teoria del camp unificat d'Einstein (1950) en el seu aspecte

geomètric, amb la idea de caracteritzar d'alguna manera les equacions del camp. Aquests treballs són, 86/, 103/, 111/, 129/, i 130/. En ells s'estudien unes equacions del camp molt generals que contenen com a cas particular les d'Einstein i Shcrödinger.

6) *Aplicacions a la tecnologia*. Alguns dels resultats de la primera època de la Geometria integral tenen importants aplicacions tecnològiques, per a analitzar, per exemple, la composició de conglomerats (Vegeu el llibre *Stereology*, Proceedings of the 2th Congress for Stereology, Springer, Berlin, 1967).

UNIVERSITAT AUTONOMA Ð BARCELONA BELLATERRA