Pub. Mat. UAB
N°21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

EXPRESION DEL EXOTISMO DE UNA FOLIACION EN FUNCION DE LAS CLASES DE HOLONOMIA Y LAS CLASES DE ATIYAH-MOLINO

Xosé Masa

Dpto. de Xeometría e Topoloxía
Universidad de Santiago de Compostela

In this note, we construct the leaf-type global differential forms on a foliated manifold, representing the fiber-type class of the foliation, by choising a convenient adapted connection. Kamber-Tondeur method, with the pertinent modifications, is used.

Sea M una variedad diferenciable, F una foliación de codimensión p, P el fibrado principal de las referencias transversas a F, P_H una reducción de P mediante un subgrupo cerrado H. En esta situación, se define el *exotismo* de una foliación como un homomorfismo de la cohomología de cierta álgebra universal en la cohomología de de Rham de la variedad:

$$h: H^*(W(g,H)_p) \longrightarrow H^*_{DR}(M)$$

Este homomorfismo, a nivel de cocadenas, induce un homomorfismo entre las sucesiones espectrales asociadas a cierta filtración del álgebra universal, una, y a la foliación, la segunda:

$$h_r: \ E_r^{2a,u-a}(W) \longrightarrow {}_F E_r^{a,u}$$

que es un homomorfismo multiplicativo $(r\geq 1)$[2].

Para r=1, h_1 queda determinado por sus valores sobre $E_1^{2a,0}(W) \cong I^{2a}(G)_p$ (polinomios invariantes truncados por el grado p) y sobre $E_1^{0,u}(W) \cong H^u(g,H)$ (cohomología del complejo de elementos h-básicos $(\Lambda g^*)_H$ en Λg^*).

$h_1^{2a,0}$ define las clases características derivadas de Atiyah-Molino, que son elementos de los grupos de cohomología $H^a(M,P^a)$, en donde P es el haz diferencial de las formas diferenciales foliadas. Nosotros estudiamos este homomorfismo y su relación con el invariante de Godbillon-Vey [3].

El homomorfismo $h_1^{0,u}$ que define las clases características derivadas de tipo-fibra, en la notación de Kamber-Tondeur, toma valores en la cohomología $H^u(M, P^0)$, cuyos elementos pueden siempre ser representados, con ayuda de una métrica, por formas de tipo hoja, es decir, "tangentes" a la foliación. El propósito de esta nota es presentar una realización de $h_1^{0,u}$ mediante formas de este tipo. La existencia de formas globales que definen estas clases ya fué demostrada por Kamber-Tondeur. En el caso de foliación con fibrado normal trivializado, Shulman y Tischler aproximan una solución[5]. Restringiéndose a cada hoja, para obtener una clase de la cohomología de de Rham de la hoja, las "clases de holonomía", están los cálculos de Reinhart y Goldman, con la hipótesis de fibrado normal trivializado, el primero, y de fibrado normal a la hoja trivializado, el segundo. Nuestra construcción parte de las hipótesis mas generales y las clases de holonomía son las imágenes de las clases derivadas de tipo-fibra por el homomorfismo

$$H^*(M, P^0) \longrightarrow H^*_{DR}(L)$$

inducido por la inclusión de la hoja en la variedad.

Nuestra construcción sigue los pasos de la de Kamber-Tondeur y se basa en la elección de una conexión adapatada conveniente.

En P existe una foliación natural $\tilde{F}$ de la misma dimensión que F. Sea γ la forma de una H-conexión en P y realicemos νF con la ayuda de una métrica sobre M. Sea $\overline{\nu F}$ el levantamiento horizontal de νF por γ y consideremos una métrica sobre P que haga normal $T\tilde{F}$, $\overline{\nu F}$ y el fibrado tangente a las fibras de P. Respecto a $\tilde{F}$ y esta métrica, γ se descompone en $\gamma = \theta + \alpha$, θ de tipo (1,0) (se anula sobre los campos tangentes a las hojas) y α de tipo (0,1). θ *define una conexión adaptada.*

Consideremos ahora la foliación $\pi^{-1}F$ sobre P, en donde π es la proyección de P sobre M. Respecto a esta foliación y la misma métrica, el operador diferencial d_P se descompone en función de como actua sobre el tipo de las formas, definiendo un nuevo operador diferencial $d_{\pi^{-1}F}$ que lleva una forma de tipo (a,u) en una forma de tipo (a, u+1). Debido a que la parte de tipo (o,2) de la curvatura de la conexión θ es cero, θ permite definir un homomorfismo diferencial

$$\Lambda^* g \longrightarrow \Lambda^{0*}(P,\ d_{\pi^{-1}F})$$

En P/H consideramos las distribuciones $\tilde{F}_H$ y $\overline{\nu F}_H$ inducidas por $\tilde{F}$ y $\overline{\nu F}$ y consideramos una métrica que haga normal a estas distribuciones y el fibrado tangente a las fibras. El anterior homomorfismo induce entonces otro

$$\Lambda^*(g\ ,\ H) \longrightarrow \Lambda^{0,*}(P/H,\ d_{\pi_1^{-1}F})$$

siendo π_1 la proyección de P/H sobre M.

Sea ahora s la sección de P/H $\longrightarrow$ M que define la reducción P_H. De la elección hecha de la conexión adaptada y de las métricas se deduce que s define un homomorfismo diferencial

$$s^*: \Lambda^{0,*}(P/H, d_{\pi_1^{-1}\mathcal{F}}) \longrightarrow \Lambda^{0,*}(M, d_{\mathcal{F}})$$

La composición de estos dos es el homomorfismo buscado. En cohomología, es independiente de la H-conexión considerada y depende de la sección s, salvo que H contenga un subgrupo compacto maximal. De la construcción se deduce que *este homomorfismo se anula si existe una H-conexión adaptada.*

REFERENCIAS

1. R. GOLDMAN *The holonomy ring on the leaves of foliated manifolds.* J. Differential Geometry 11 (1976) 411-449

2. F. KAMBER and Ph. TONDEUR *Characteristic invariants of foliated manifolds* Manuscripta Mathematica 11 (1974) 51-89.- *Foliated Bundles and Characteristic classes* Springer Lecture Notes 493 (1975)

3. X. MASA *Cohomología y Foliaciones. Relación entre el invariante de Godbillon-Vey de una foliación y su clase de Atiyah.* Journées S.M.F. de Geometrie Differentielle. Schnepfenried (1973)

4. B. REINHART *Holonomy invariants for framed foliations* Differential Geometry Colloquium, Santiago de Compostela, (1972) Springer Lecture Notes 392, 47-52.

5. H. SHULMAN and D. TISCHLER *Leaf invariants of foliations and the van Est isomorphism* J. Differential Geometry 11 (1976) 535-546.