

**Appunti del corso di:**

# **Laboratorio II: Elettromagnetismo**

**a.a. 2015-2016**

**Il docente del corso:**

**G.V.Margagliotti**

**Email: [giacomo.margagliotti@ts.infn.it](mailto:giacomo.margagliotti@ts.infn.it)**

**tel.: 040-5583376**

## **Introduzione**

.....

.....

**(\*) Paragrafo da inserire**

# 1 \_ Tensioni e correnti continue

Lo studio dei fenomeni elettrici ha mostrato un vero salto di qualità quando hanno cominciato ad essere disponibili dispositivi in grado di fornire, con continuità, cariche elettriche in quantità opportuna e a potenziali noti.

Questi dispositivi sono sostanzialmente i generatori di corrente continua. In questo paragrafo introduttivo ne sono brevemente illustrati tre tipi, che non esauriscono comunque le varietà disponibili: le pile, le celle fotovoltaiche (di cui si parlerà poi più estesamente a proposito dei diodi a semiconduttore), e i generatori ad effetto termoelettrico.

Rimandiamo a paragrafi successivi, nella seconda parte delle dispense, per quanto concerne cenni ai generatori di corrente continua basati su circuiti raddrizzatori/rettificatori e stabilizzatori abbinati a sorgenti di corrente alternata.

## 1.1 \_ Pile, celle fotovoltaiche e sistemi termoelettrici

### 1.1.1 \_ La Pila di Volta

Alessandro Volta (1745-1827) ideò la “pila” nel 1799 e la chiamò “*apparato elettromotore*”, da cui anche il nome di **forza elettromotrice** o **f.e.m.** per la differenza di potenziale elettrico sviluppabile dalla pila. L’unità di misura del potenziale elettrico è poi stata chiamata Volt (V), in onore di Volta. Egli ottenne i suoi risultati come conseguenza delle ricerche sugli effetti di contatto tra metalli diversi con l’interposizione di soluzioni ioniche, stimolato in ciò anche dalle precedenti ricerche di Galvani sull’*elettricità animale*.

Nella sua comunicazione del 20 marzo 1800 a Sir Joseph Banks della Royal Society, Volta scrisse:

*"... Non è che l'insieme di un numero di buoni conduttori di differente specie, disposti in modo particolare, 30, 40, 60 pezzi, o più, di rame, o meglio d'argento, applicati ciascuno a un pezzo di stagno o, ciò che è molto meglio, di zinco, e un numero uguale di strati d'acqua, o di qualche altro umore che sia miglior conduttore dell'acqua semplice, come l'acqua salata, la liscivia, ecc., o dei pezzi di cartone, di pelle ecc., bene imbevuti di questi umori: di tali strati interposti a ogni coppia o combinazione di due metalli differenti, una tale serie alternata, e sempre nel medesimo ordine di questi tre pezzi conduttori, ecco tutto ciò che costituisce il mio nuovo strumento".*



Fig. 1.1 \_ Pila a dischi

Il principio di funzionamento<sup>1</sup> si basa su reazioni chimiche spontanee di ossidoriduzione, in cui l'energia chimica dei prodotti è minore di quella dei reagenti. La differenza di energia viene parzialmente convertita in energia "elettrica" disponibile. Volta provò diverse soluzioni, saline o acidule, e diversi metalli per gli elettrodi. La coppia Rame-Zinco (Cu-Zn) risultò la più efficiente. In questo caso la reazione che sostiene la pila è:  $Zn + 2H^+ \Rightarrow Zn^{++} + H_2$ , che porta Zn in soluzione con concomitante produzione di Idrogeno molecolare gassoso. L'elettrodo di Zn costituisce quindi l'anodo<sup>2</sup> di ciascun elemento della pila, e perde massa man mano che la reazione procede, quando si utilizza la pila producendo una corrente elettrica.

Gli ioni  $H^+$ , in realtà  $H_3O^+$ , provengono o dall'acqua della soluzione elettrolitica di cui sono imbevuti gli strati assorbenti tra due coppie bi-metalliche adiacenti, quando si usa un sale, o dall'Idrogeno derivante dalla dissociazione dell'acido impiegato nella preparazione della soluzione diluita, generalmente acido solforico ( $H_2SO_4$ ). Essi si dirigono verso l'elettrodo in Cu, da cui estraggono elettroni, e che costituisce quindi il catodo (positivo), dove ha luogo la reazione di riduzione; non è dunque fondamentale il materiale utilizzato per esso, purché sia conduttore.

La formazione di idrogeno gassoso al catodo, conseguente all'estrazione di elettroni da questo da parte degli ioni  $H_3O^+$ , riveste e polarizza l'elettrodo costituendo un pesante fattore limitativo per l'impiego prolungato di questo tipo di pila, cui si aggiunge la rapida diminuzione della corrente dovuta all'inevitabile deperimento della soluzione elettrolitica.

La f.e.m. sviluppata da ogni elemento della pila di Volta è di circa 1.06 V.

In seguito Volta preferì utilizzare la pila nella configurazione a "corona di tazze" poiché faceva circolare un "maggior flusso elettrico" ed era di più comodo ed efficace utilizzo. Data la sua configurazione, permetteva infatti di sostituire con facilità ponti di elettrodi Zn-Cu o di rabboccare la soluzione acida nelle singole tazze.

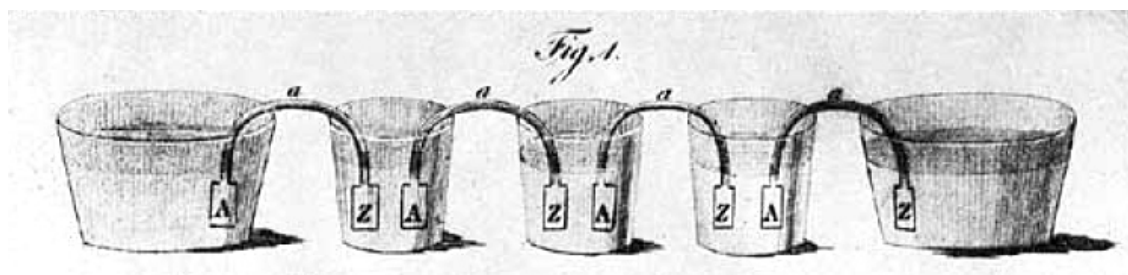


Fig. 1.2 \_ Disegno originale di A. Volta per la Pila a corona di tazze

<sup>1</sup> Si veda ad esempio: F.Tommasini e A.Morgante, "Correnti radiazioni e Quanti", cap. 3, par. 3.1.

<sup>2</sup> L'anodo (denominazione introdotta da Faraday) in una pila è l'elettrodo presso il quale ha luogo l'ossidazione, in questo caso spontanea, che produce elettroni, per cui l'anodo è anche il polo negativo. In una cella elettrolitica, poiché l'ossidazione, forzata dall'esterno, sottrae elettroni, l'anodo è il polo positivo. Anche nei dispositivi elettronici l'anodo corrisponde al polo positivo.

### 1.1.2 \_ La Pila Daniell

Il chimico inglese Daniell realizzò la pila che porta il suo nome nel 1836. Si tratta di una pila a due liquidi, detti anche conduttori di seconda classe: una soluzione satura di  $\text{CuSO}_4$  (di colore azzurro cielo) e una soluzione di  $\text{ZnSO}_4$ .

Gli elettrodi sono uno in rame, immerso nella soluzione di  $\text{CuSO}_4$ , e uno in zinco immerso nella soluzione di  $\text{ZnSO}_4$ .

Nella pila ha luogo la reazione di ossidoriduzione spontanea  $\text{Zn} + \text{Cu}^{++} \Rightarrow \text{Zn}^{++} + \text{Cu}$ , e dall'entità dei potenziali chimici si deduce la forza elettromotrice risultante che è di circa 1.1 V.

Contrariamente a quanto avviene nella pila di Volta, in questo caso, l'elettrodo di rame partecipa attivamente alla reazione. Mentre infatti l'elettrodo di zinco si consuma, come nella pila di Volta, nella pila Daniell la massa del catodo in rame cresce, poiché gli ioni  $\text{Cu}^{++}$  si riducono a rame metallico, aderendo alla superficie dell'elettrodo.

Per conservare nel tempo il livello di saturazione della soluzione di  $\text{CuSO}_4$  questa viene solitamente portata a soprassaturazione.

La pila Daniell è un dispositivo elettrochimico in cui non si ha polarizzazione del catodo ed è quindi molto più efficiente della pila di Volta, sia in termini di durata che per la costanza della corrente elettrica continua erogata.

Essa può essere realizzata in diverse configurazioni:

- Per gravità

Si sfrutta la proprietà della soluzione soprassatura di  $\text{CuSO}_4$  di essere più densa della soluzione di  $\text{ZnSO}_4$ . Si collocano sul fondo di un recipiente cilindrico di vetro, un elettrodo di rame a forma di pettine e dei cristalli di  $\text{CuSO}_4$ , quindi si versa la soluzione satura di  $\text{CuSO}_4$ . Si versa poi delicatamente la soluzione di  $\text{ZnSO}_4$  che data la minor densità, galleggia sopra quella di  $\text{CuSO}_4$ . Si immerge quindi in essa l'elettrodo di zinco (simile per forma a quello di rame e in grado di agganciarsi alle pareti del contenitore), e la pila è pronta per funzionare.

- A ponte salino

La semi-cella del rame e quella dello zinco sono fisicamente separate e contenute in due diversi recipienti di vetro. Il collegamento tra i due sistemi elettrochimici è realizzato tramite un ponte salino, costituito ad esempio da un tubo di vetro ad U contenente ovatta imbevuta di una soluzione acquosa di  $\text{KNO}_3$ .

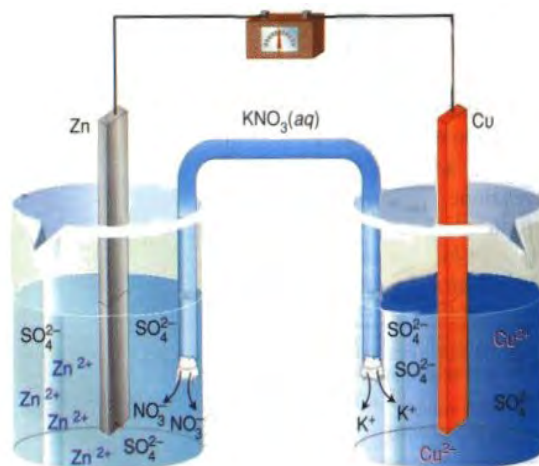


Fig. 1.3 \_ Pila Daniell a ponte salino

- A setto poroso

È forse il modello più comune di pila Daniell. Nella sua geometria più semplice ed essenziale la realizzazione prevede l'impiego di un vaso di vetro al cui interno si inserisce un setto poroso di forma cilindrica. All'interno del setto si pongono l'elettrodo in rame, anch'esso di forma cilindrica, alcuni cristalli di  $\text{CuSO}_4$  e si versa quindi la soluzione satura di  $\text{CuSO}_4$ . All'esterno del setto, immerso nella soluzione di  $\text{ZnSO}_4$ , si colloca l'elettrodo di zinco, a forma di camicia cilindrica.

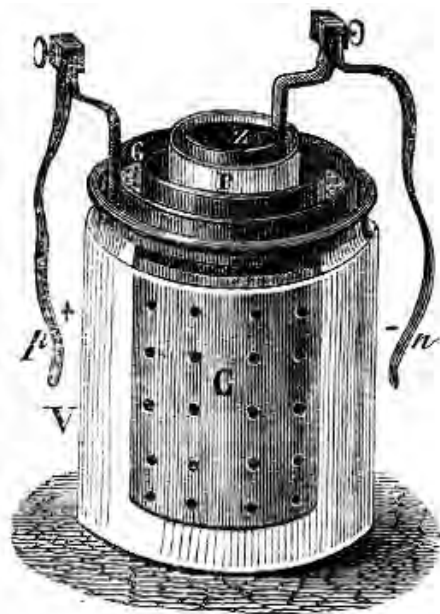
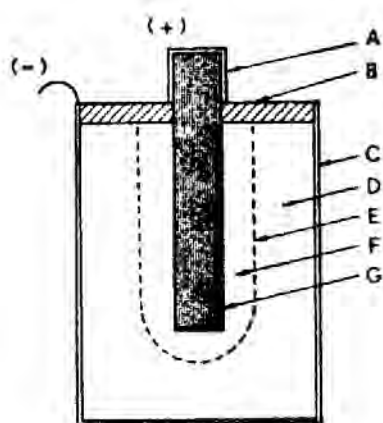


Fig. 1.4 \_ Pila Daniell a setto poroso

### 1.1.3 \_ La Pila Leclanché e le moderne pile a secco

I sistemi sinora descritti hanno svolto un ruolo importantissimo ma erano difficilmente portatili e nel contempo molto sensibili alla posizione d'uso. Il problema fu superato con l'introduzione delle "pile a secco".

Il primo esempio fu realizzato da Leclanché nel 1866. È detta "pila a secco" in quanto gli elettroliti non sono contenuti allo stato liquido, ma gelificati (ad es. con amido) o assorbiti su materiale inerte. La pila a secco fornisce una f.e.m. di circa 1.48 Volt ed è costituita da una sbarretta centrale di grafite, che funge da polo positivo, circondata da una pasta di  $\text{MnO}_2$ , insolubile, immersa nell'elettrolito, a sua volta costituito da una soluzione acquosa gelificata di  $\text{NH}_4\text{Cl}$  (cloruro d'ammonio) al 10% circa. Il tutto è contenuto in un cilindretto di Zn, che funge da polo negativo.

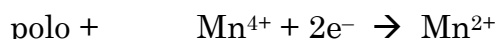
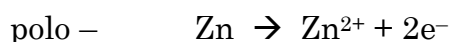


Pila Leclanché

- A) cappelotto di ottone
- B) chiusura isolante
- C) contenitore di zinco (polo -)
- D) soluzione gelificata di  $\text{NH}_4\text{Cl}$
- E) membrana porosa
- F) soluzione gelificata e  $\text{MnO}_2$
- G) elettrodo di carbone (polo +)

Fig. 1.5 \_ Pila Leclanché

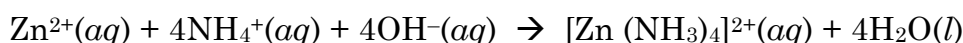
Le reazioni che si sviluppano presso gli elettrodi sono:



Al polo negativo, lo zinco si ossida e passa in soluzione come  $\text{Zn}^{2+}$  (il contenitore di zinco si consuma); al polo positivo gli elettroni vengono catturati dal biossido di manganese che da  $\text{Mn}^{4+}$ , si riduce a  $\text{Mn}^{2+}$ ; il conduttore di grafite non subisce trasformazioni chimiche.

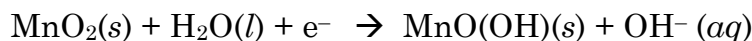
Gli ioni  $\text{Zn}^{2+}$  prodotti dall'ossidazione di Zn reagiscono con l'ammoniaca prodotta dagli ioni  $\text{NH}_4^+$  presenti nell'elettrolito; questa reazione mantiene bassa la concentrazione di  $\text{Zn}^{2+}$  e permette di stabilizzare il valore della f.e.m.

La reazione che ha luogo al polo negativo è dunque:



Durante il funzionamento si forma lo ione complesso  $[\text{Zn}(\text{NH}_3)_4]^{2+}$ , il cui cloruro col tempo cristallizza, diminuendo la conducibilità dell'elettrolito. Riscaldando moderatamente una pila Leclanché esaurita, il sale diffonde lontano dall'anodo e la pila riacquista in parte la propria funzionalità.

Il processo di ossidazione che ha luogo al catodo fornisce gli ioni  $\text{OH}^-$  e semplificando, può essere riassunto come:

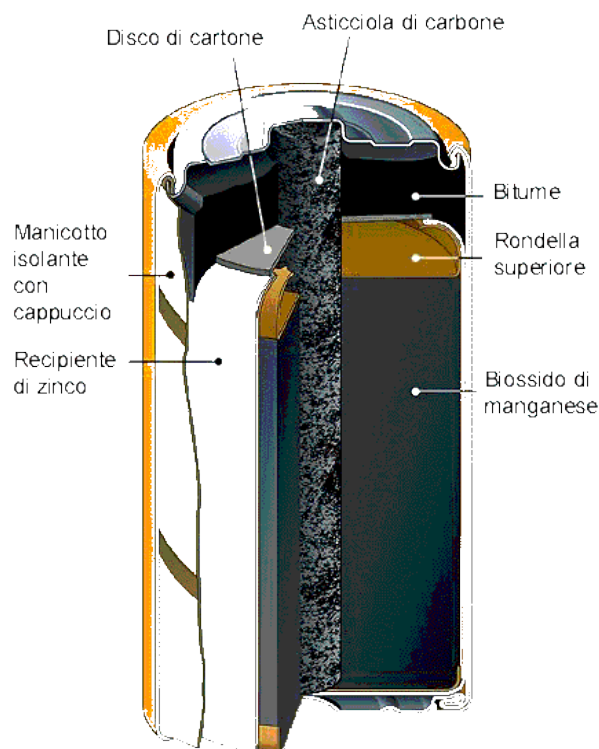


Nella versione moderna della pila zinco-carbone, l'elettrodo positivo (catodo) è formato da una miscela di ossido di manganese e polvere di carbone che ricopre una barretta di grafite. Questa, come detto, costituisce il catodo.

L'elettrolito acquoso, contenente cloruro di ammonio e cloruro di zinco, viene quindi gelificato, così da ottenere una pila a secco.

Il tutto è contenuto in una capsula di zinco che costituisce l'anodo della pila.

Le pile zinco-carbone sono soggette al fenomeno di auto-scarica più delle altre pile.



**Struttura di una tipica pila zinco - carbone (Sorgente: Varta)**

Fig. 1.6

L'auto-scarica si manifesta a circuito aperto e può essere dovuta a difetti in prossimità del contatto fra elettrodi ed elettrolito (corrosione), alla presenza di impurezze negli elettrodi o nell'elettrolito, ma anche al non perfetto isolamento fra elettrodi di polarità opposta.

Vediamo ora rapidamente una parziale carrellata di altri tipi di pile a secco oggi in uso:

a) Pila zinco-cloruro: si basa sulla stessa tecnologia della pila zinco-carbone, ma utilizza come elettrolito una soluzione acquosa di cloruro di zinco, meno aggressivo del cloruro d'ammonio nei confronti dello zinco.

b) Pile alcaline: sviluppate negli anni '60 dalla Mallory (ora Duracell), anche le pile alcaline utilizzano zinco e biossido di manganese, come le pile zinco-carbone, ma i due elettrodi hanno struttura porosa e l'elettrolito è un composto alcalino (idrossido di potassio). Queste modifiche hanno consentito di triplicare la durata di scarica rispetto alle pile zinco-carbone. Sino al 1994 queste pile contenevano una certa quantità di mercurio, per ottimizzare la conservazione dello stato di carica; il mercurio è stato ora totalmente eliminato per esigenze di rispetto ecologico.

c) Pila zinco-aria: sviluppata nei primi anni del '90 da C. Fery, la pila zinco-aria utilizza l'ossigeno dell'aria in prossimità del catodo di carbone poroso immerso in un elettrolito alcalino. La lenta diffusione dell'ossigeno limita la potenza di queste pile (sono adatte ad applicazioni con assorbimenti di corrente inferiori a 5÷10 mA). La pila è contenuta in una capsula di metallo che forma il terminale positivo, mentre l'anodo occupa la maggior parte del volume disponibile. Nella capsula sono presenti uno o più fori per consentire all'aria di penetrare all'interno a contatto del catodo. Queste pile sono utilizzate negli impianti di telecomunicazioni non collegati alla rete elettrica e in strutture molto piccole (pile a bottone), come le protesi auditive.

d) Pile al litio: il basso peso specifico e l'alto potenziale elettrico del litio lo rendono molto interessante per la costruzione di pile di elevata capacità specifica (3,86 Ah/g, 7,23 Ah/cm<sup>3</sup>)<sup>3</sup>. Altri vantaggi sono: tensione fra i terminali più che doppia di quella delle pile alcaline e una minore sensibilità alla temperatura.

#### 1.1.4 \_ Celle foto-voltaiche

Una descrizione più completa e approfondita dei principi fisici alla base del funzionamento di un dispositivo a cella foto-voltaica sarà ripresa, nel presente corso, in concomitanza ai paragrafi dedicati al diodo a

---

<sup>3</sup> Ah è il simbolo dell' "Amperora", o "Ampère-ora, e rappresenta una quantità di carica. 1 Ah = (carica elettrica che attraversa le estremità di una batteria che fornisce 1 Ampere di corrente per 1 ora).



semiconduttore (paragrafi 1.7÷1.7.5). In prima istanza si presenterà ora l'argomento in modo puramente descrittivo, accennando solamente ad alcuni concetti fondamentali e facendo ricorso a pochi schemi intuitivi.

La cella foto-voltaica è un dispositivo che converte direttamente parte dell'energia luminosa che la investe in energia elettrica, generando una tensione ai propri capi ed essendo in grado di erogare corrente: produce cioè una f.e.m. Questo processo richiede l'utilizzo di materiali che assorbendo radiazione luminosa, eccitano elettroni dalla propria banda di valenza alla banda di conduzione con efficienza tale da permettere ai portatori di carica, una volta chiuso il circuito su un carico resistivo esterno, di percorrerlo, sospinti dalla tensione foto-voltaica, e dopo aver dissipato in esso la propria energia ritornare nella cella e quindi iterare il processo, finché il circuito permane chiuso e opportunamente irradiato. La conversione foto-voltaica può essere ottenuta utilizzando svariati materiali, ma nella pratica si usano prevalentemente semiconduttori sotto forma di giunzioni p-n, ovvero diodi.

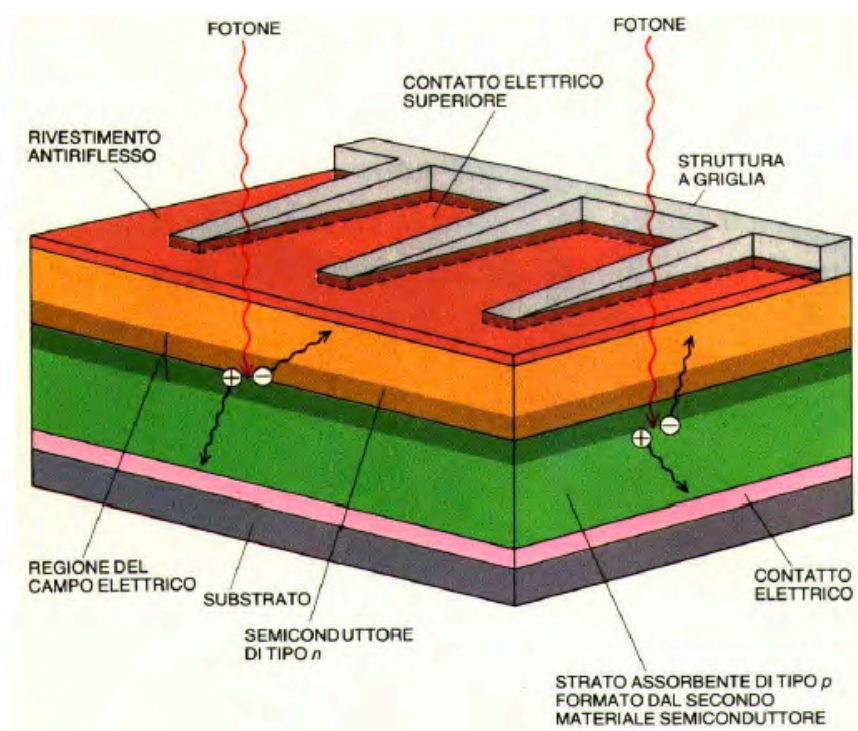


Fig. 1.7 Struttura schematica degli strati costituenti una cella fotovoltaica commerciale; il substrato grigio in basso è solitamente in vetro o plastica e la griglia superiore costituisce il secondo contatto elettrico

L'energia luminosa che non contribuisce al processo di produzione di corrente elettrica deve essere dissipata termicamente.

Un parametro caratteristico molto importante di una cella foto-voltaica è l'efficienza di conversione, definita come il rapporto tra la potenza elettrica estratta dalla cella, e quella luminosa incidente.

### 1.1.5 \_ Generatori termoelettrici

Un generatore termoelettrico si basa sulla conversione diretta di calore in energia elettrica. Sulla stessa base fenomenologica si fondano sia la trasformazione irreversibile di elettricità in calore descritta da Joule che i tre diversi effetti reversibili noti, dai nomi dei loro scopritori, come Seebeck, Peltier e Thomson.

Per quanto concerne Joule egli scoprì che in un conduttore percorso da una corrente elettrica  $I$  si produce calore in modo proporzionale al prodotto  $I^2R$ , dove  $R$  è la resistenza elettrica del conduttore. Analizzeremo meglio e più completamente questo fenomeno e certe sue conseguenze più oltre.

Nel 1823 il fisico tedesco T.J. Seebeck scoprì che se si realizza un circuito chiuso connettendo due spezzoni di conduttori metallici diversi e si pongono le due zone di giunzione a differenti valori di temperatura, si instaura una f.e.m. la cui intensità dipende dalla differenza di temperatura fra le due zone di giunzione, oltre che dai tipi di conduttore metallico coinvolti. Questo circuito è detto termocoppia (Fig. 1.8).

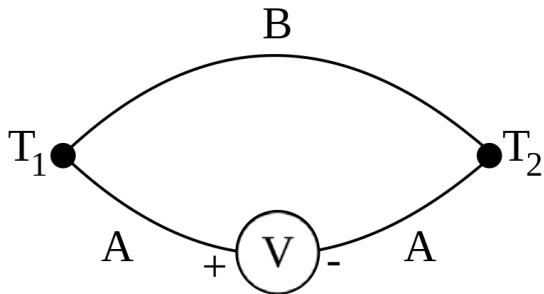


Fig. 1.8 \_ Schema di termocoppia con due diversi metalli A e B, chiusa su un voltmetro ( $T_1 > T_2$ )

Più precisamente si ha che instaurando un gradiente termico  $\vec{\nabla}T$  in una sostanza solida, si determina l'insorgenza in essa di un campo elettrico  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ , orientato con verso opposto a  $\vec{\nabla}T$  (effetto Seebeck). Il rapporto  $|\vec{\nabla}V|/|\vec{\nabla}T| = S$  è detto *coefficiente di Seebeck* ed è espresso in  $V/^\circ K$  o, più spesso in  $\mu V/^\circ K$ .

I metalli più adatti ad applicazioni termoelettriche sono quelli a più alto valore del coefficiente di Seebeck (dell'ordine di  $10 \mu V/^\circ K$ ), ma le termocoppie realizzabili con essi hanno efficienze dell'ordine di 1%, e sono quindi antieconomiche come sorgenti di potenza elettrica, ma adatte ad esempio per essere usate come sensori termici. La d.d.p. sviluppata con due giunzioni Cu-Fe a  $100^\circ C$  l'una rispetto all'altra è di 0.86 mV.

Un rinnovato interesse per la produzione di potenza elettrica grazie alla termoelettricità si è sviluppato in seguito alla realizzazione di materiali semiconduttori con alti valori di coefficiente di Seebeck (dell'ordine di alcune centinaia di  $\mu V/^\circ K$ ).

Le proprietà elettriche dei materiali semiconduttori dipendono però fortemente dalla temperatura operativa; un semiconduttore funziona dunque come un buon materiale termoelettrico soltanto in opportuni intervalli di temperatura, specifici per ogni tipo di semiconduttore.

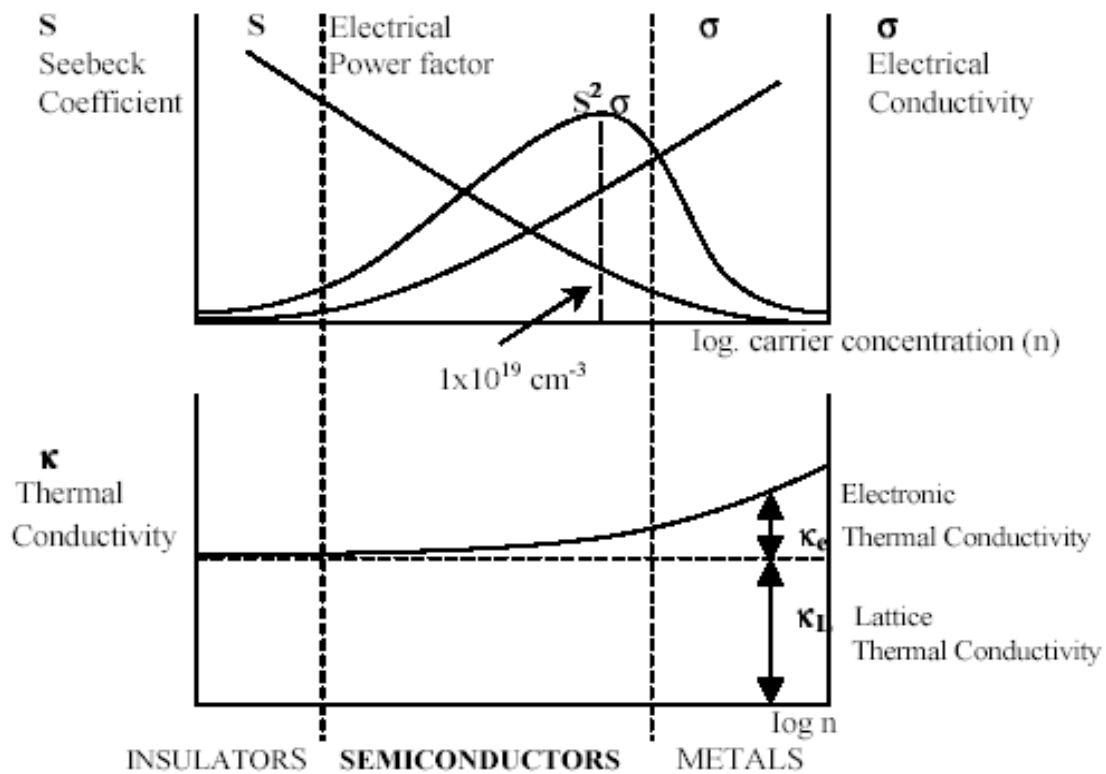


Fig. 1.9 \_ Proprietà termoelettriche di metalli, semiconduttori e isolanti

I generatori termoelettrici hanno sinora trovato le loro più importanti applicazioni nel campo dell'esplorazione spaziale. L'utilizzo di sorgenti radioattive fornisce la sorgente di calore necessaria al funzionamento di generatori termoelettrici per lunghi periodi; ciò garantisce adeguate potenze elettriche anche per quei satelliti, come ad esempio i Voyager o Cassini, che nei loro viaggi interplanetari si allontanano molto dal Sole rendendo poco efficiente l'utilizzo di celle foto-voltaiche.

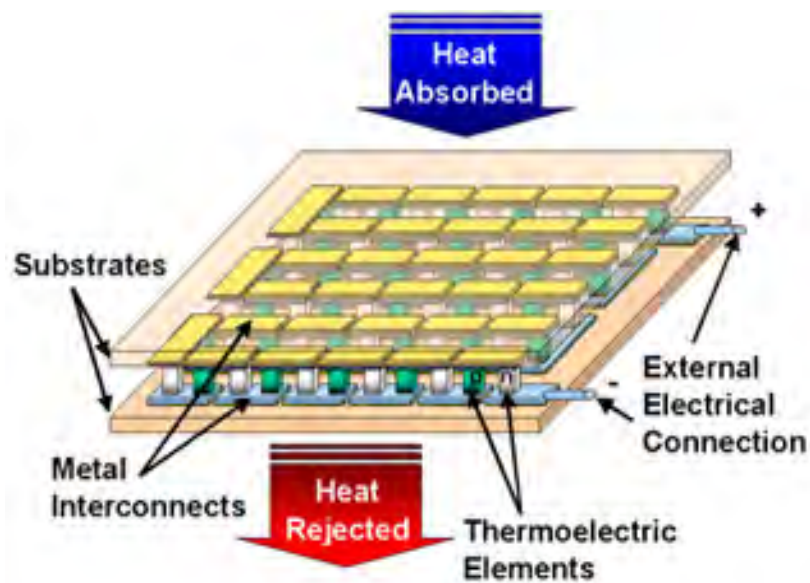


Fig. 1.10.a \_ Tipico elemento di un generatore termoelettrico

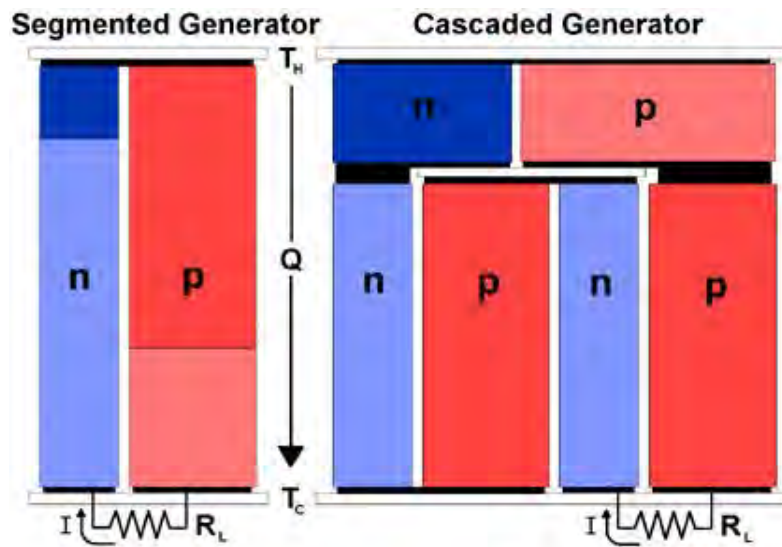


Fig. 1.10.b \_ Esempi di struttura di un elemento termoelettrico unitario, basato su materiali semiconduttori

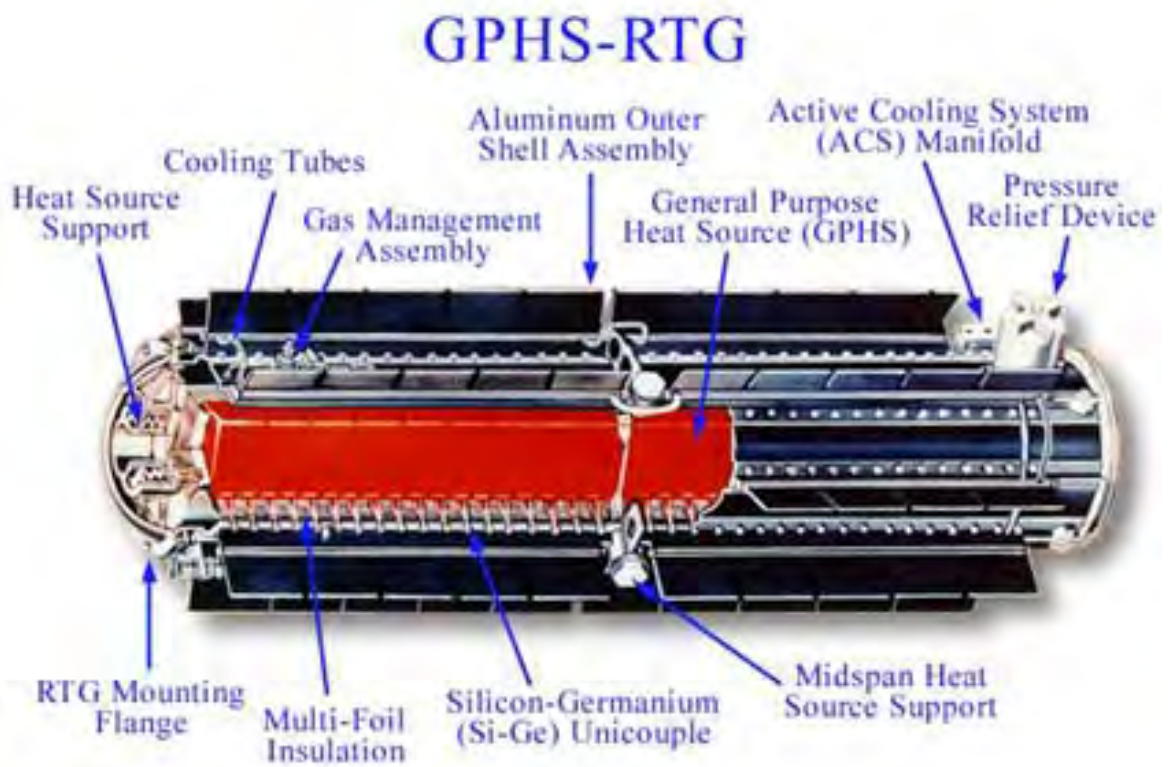


Fig. 1.10.c \_ Esempio di generatore termoelettrico a radioisotopi (NASA)

I generatori sono quindi strutture in grado di fornire tensioni e correnti elettriche in funzione del tempo:

$$V = V(t) , I = I(t)$$

e vedremo nel successivo paragrafo 1.5 come si caratterizzano generatori reali di tensioni e correnti, in funzione delle loro caratteristiche intrinseche e del trasferimento di potenza attuabile verso circuiti esterni.

---

Per i possibili regimi di funzionamento dei circuiti elettrici si distinguono solitamente due condizioni:

- 1) **fenomeni stazionari**, per i quali  $V(t) = \text{cost.}$  e  $I(t) = \text{cost.}$ , assumendo idealmente  $-\infty < t < \infty$ ;
- 2) **fenomeni dipendenti dal tempo**, a loro volta suddivisi in:
  - **fenomeni periodici**;
  - **fenomeni aperiodici** che possono essere sia **transienti** che **impulsivi**

Studieremo i fenomeni stazionari durante i prossimi paragrafi, per dedicarci ai fenomeni periodici e transienti nella seconda metà del corso. Faremo solo qualche breve accenno ai fenomeni impulsivi, di cui sentirete molte cose interessanti in corsi futuri.

## 1.2 \_ Tensioni e correnti

Prima di passare allo studio del funzionamento dei principali strumenti per la misura dei valori assunti da grandezze elettriche, richiamiamo brevemente alcune nozioni fondamentali.

### 1.2.1 \_ Regole di Kirchhoof

Il campo di forza elettrostatico  $\vec{F}_e$  è conservativo, muovendo dunque in esso un oggetto carico che non lo perturbi, lungo un cammino chiuso qualunque  $C$ , si compie un lavoro nullo:

$$L = \int_C \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.1)$$

Detti  $A$  e  $B$  due punti distinti qualsiasi di  $C$ , si ha:

$$\int_C \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = \int_{C_{AB}} \vec{F}_e \cdot d\vec{s} + \int_{C_{BA}} \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.2)$$

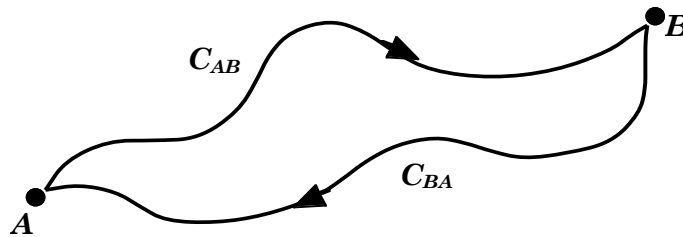


Fig. 1.11

Dunque

$$\int_{C_{AB}} \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = - \int_{C_{BA}} \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = \int_{-C_{BA}} \vec{F}_e \cdot d\vec{s} \quad (1.3)$$

dove  $-C_{BA}$  indica il tratto di curva  $C_{BA}$  percorso in verso opposto; l'integrazione da  $A$  a  $B$  non dipende quindi dal particolare cammino fatto. Ciò permette di introdurre una funzione  $U$ , detta *energia potenziale*, che dipende solo dalla posizione:

$$U(B) - U(A) = \int_A^B dU = - \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{s} \quad (1.4)$$

La quantità  $dU = -\vec{F}_e \cdot d\vec{s} = -F_{ex} dx - F_{ey} dy - F_{ez} dz$  è quindi un differenziale esatto, e  $-U$  è la funzione primitiva di  $\vec{F}_e$ , unica e definita a meno di una costante additiva arbitraria. La forza è allora ottenibile come gradiente dell'energia potenziale:

$$\vec{F}_e = -\vec{\nabla}U \quad \text{cioè:} \quad -F_{ex} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad -F_{ey} = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad -F_{ez} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1.5)$$

È facile dimostrare che forze centrali soddisfacenti al principio di sovrapposizione, come la forza elettrica in condizioni statiche, sono conservative.

Ciò permette di definire una funzione *differenza di energia potenziale*  $\Delta U(A,B)$ , che dipende solo dai punti  $A$  e  $B$  e non dal cammino percorso.

Pensando a una distribuzione statica di carica  $Q$  come origine della forza elettrica per il sistema in studio, ha senso definire il cosiddetto *campo elettrico*  $\vec{E}(\vec{r})$  come una proprietà di ogni punto  $\vec{r}$  dello spazio esterno al volume occupato da  $Q$ , tale che immaginando di porre in  $\vec{r}$  una carica  $q$  che non perturbi  $\vec{E}(\vec{r})$ , essa senta la forza elettrica  $\vec{F}_e(\vec{r}) = q \cdot \vec{E}(\vec{r})$ .

Naturalmente anche il campo  $\vec{E}$  è conservativo e si può definire una funzione *differenza di potenziale* (d.d.p.)

$$\Delta V = \Delta V(A,B) = V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.6)$$

così da avere  $\Delta U = q \cdot \Delta V$ . Come nel caso dell'energia potenziale, dalla (1.6) si ottiene che il campo elettrico è proporzionale al gradiente di questa nuova funzione:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (1.7)$$

L'unità di misura della d.d.p. nel sistema MKS è il Volt, e per l'energia si ha:

$$1 \text{ Joule} = (1 \text{ Volt}) \cdot (1 \text{ Coulomb}).$$

Un'altra unità di misura dell'energia usata frequentemente è l'*elettronvolt* (eV), che è correlato alla carica elementare:

$$1 \text{ eV} = (1 \text{ Volt}) \cdot (1 \text{ carica elett.}) \approx (1 \text{ Volt}) \cdot (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}.$$

Come  $U$  anche il potenziale  $V$  è definito a meno di una costante additiva arbitraria.

Le considerazioni svolte finora sono valide per qualunque sistema fisico isolato, e in particolare lo sono all'interno dei conduttori utilizzati per costruire circuiti elettrici. Considerando ad esempio il circuito in fig. 1.12.a

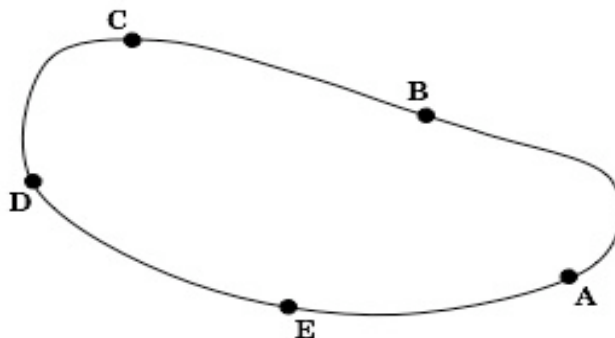


Figura 1.12.a



e indicate le differenze di potenziale tra  $A$  e  $B$ ,  $B$  e  $C$ , etc. con i simboli  $\Delta V_{AB}$ ,  $\Delta V_{BC}$ , etc., si ha:

$$\Delta V_{AB} + \Delta V_{BC} + \Delta V_{CD} + \Delta V_{DE} + \Delta V_{EA} = 0 \text{ , cioè: } \sum_i \Delta V_i = 0 \quad (1.8)$$

dove  $\Delta V_i$  rappresenta la generica differenza di potenziale ai capi dell' $i$ -mo tratto di circuito.

Quanto detto vale anche nel caso in cui un tratto di circuito sia costituito da una pila o da un qualsiasi altro generatore di tensione continua<sup>4</sup>, rappresentato dal simbolo  $\parallel\parallel\parallel$  come in fig. 1.12b. L'equazione (1.8) è sempre valida: ricordando che il lavoro fatto dal generatore per separare le cariche deve essere uguale a quello fatto da queste per circolare nel resto del circuito, nell'esempio di fig. 1.12.b il segno della differenza di potenziale ai capi del generatore è opposto a quelli delle altre differenze (percorrendo il circuito sempre nello stesso verso).

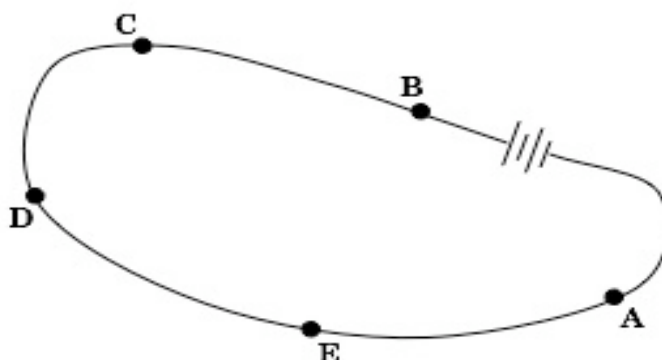


Figura 1.12.b

Dunque:

$$\Delta V_{BC} + \Delta V_{CD} + \Delta V_{DE} + \Delta V_{EA} = -\Delta V_{AB} = \Delta V_{BA} \quad (1.9)$$

con:  $\Delta V_{AB} = \mathcal{E} - IR_i$ , essendo  $\mathcal{E}$  la forza elettromotrice del generatore,  $I$  la corrente elettrica che scorre nel circuito e quindi anche nel generatore, ed  $R_i$  la resistenza interna di quest'ultimo. I concetti di corrente elettrica e resistenza ora anticipati, verranno ampiamente discussi nel seguito. Nel caso di situazione non "statica" si considera l'equazione di Maxwell  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  che esprime la *legge di induzione*. In condizioni statiche la derivata parziale rispetto al tempo si annulla e resta soltanto  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ ; ricordando che il rotore di un gradiente è sempre nullo si ritrova quindi che  $\vec{E}$  può essere espresso come gradiente di un potenziale.

Se però è presente un campo magnetico variabile nel tempo, allora si può considerare una superficie  $S$  delimitata da un contorno  $C$  e calcolare il flusso del rotore del campo elettrico ottenendo, dal teorema di Stokes e dalla legge di Faraday:

<sup>4</sup> Il discorso si può complicare nel caso della presenza di una generica sorgente di f.e.m..



$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.10)$$

dove  $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  è il flusso del campo magnetico attraverso la superficie  $S$ . Quindi l'integrale di linea del campo elettrico non si annulla più, ma è uguale alla derivata parziale rispetto al tempo del flusso del campo magnetico

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.11)$$

**In condizioni non statiche, dunque, il campo elettrico non è più conservativo**, e la sua circuitazione lungo un contorno  $C$  è uguale alla derivata temporale del flusso magnetico attraverso una superficie  $S$  orlata dal contorno  $C$ .

L'equazione (1.11) assomiglia peraltro, almeno formalmente, alla (1.9). Si può schematizzare ciò dicendo che il lavoro per unità di carica fatto per trasportare una carica (positiva) lungo un circuito elettrico è dato dalla somma delle tensioni generate lungo il circuito da effetti elettrochimici o dovuti a induzione:

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \sum_{\text{generatori}} \Delta V_n \quad (1.12)$$

dove la tensione tra due punti  $A$  e  $B$  di un dato circuito elettrico è definita semplicemente come il lavoro per unità di carica necessario a spostare una carica positiva da  $A$  a  $B$ .

Nel caso in cui non ci siano generatori o campi magnetici variabili, il lavoro che definisce la tensione coincide con quello che definisce la differenza di potenziale  $V$ , e per questo si tende spesso a confondere la tensione con la differenza di potenziale; per entrambi si utilizza inoltre lo stesso simbolo  $V$ .

La formula (1.12) appena introdotta è detta **regola di Kirchhoof per le tensioni**.

Si vedano ora alcune utili definizioni:

- un tratto di conduttore d'un circuito si chiama *ramo*;
- una porzione di circuito che si chiude su se stesso è detto *maglia*;
- un punto di un circuito da cui si dipartono tre o più rami è detto *nodo*.

La conservazione della carica elettrica in ogni processo fisico implica che la carica che entra in un nodo d'un circuito in un certo intervallo di tempo dovrà coincidere con quella che ne esce nello stesso intervallo di tempo, e ciò equivale a dire che la somma algebrica delle correnti che entrano in un nodo si deve annullare: ciò corrisponde alla **regola di Kirchhoof per le correnti**.

Si possono dunque enunciare le seguenti due regole di Kirchhoof:

**1<sup>a</sup>) Regola di Kirchhoof** \_ La somma delle correnti entranti in un nodo stazionario è uguale alla somma delle correnti uscenti dallo stesso nodo:

$$\sum_{\langle \text{nodo} \rangle} I_i = 0 \quad (1.13)$$

**2<sup>a</sup>) Regola di Kirchhoof** \_ La somma delle tensioni ai capi degli elementi circuitali di una maglia, inclusi gli eventuali generatori con la loro resistenza interna, è nulla:

$$\sum_{\langle \text{maglia} \rangle} \Delta V_i = 0 \quad (1.14)$$

### 1.2.2 \_ La legge di Ohm

Applicando solo una differenza di potenziale (d.d.p.), e non una f.e.m., ai capi aperti di un filo conduttore si produce una forza che spinge gli elettroni di conduzione nel verso che va dal capo del filo a potenziale minore a quello a potenziale maggiore. Se il filo non è collegato ad altri conduttori, dopo una fase transiente iniziale, più o meno rapida a seconda delle caratteristiche del filo, il moto netto delle cariche cessa e la situazione, dal punto di vista elettrico, ridiviene statica.

Collegando invece il filo in modo che elettroni entrino ad una estremità uscendo quindi dall'altra, sospinti da una f.e.m., si può instaurare un flusso di carica anche se il conduttore resta globalmente neutro<sup>5</sup>.

Per indurre le cariche a spostarsi all'interno del conduttore si possono utilizzare svariati tipi di generatori (pile, celle foto-voltaiche, ... per tensioni continue; dinamo, onde elettromagnetiche, ... per tensioni variabili).

– In generale un dispositivo che produce una tensione nota e indipendente dal circuito esterno ad esso collegato e che permette e mantiene in esso un flusso continuo di carica, si chiama *generatore di tensione*.

– I *generatori di corrente* producono e mantengono invece, nel circuito esterno collegato, una corrente nota e indipendente dal circuito stesso.

Come si vedrà di seguito, il generatore di tensione ideale è un dispositivo privo di resistenza interna; il generatore di corrente ideale dovrebbe invece avere resistenza interna infinita.

Se in un conduttore passa una carica  $\Delta Q$  nel tempo  $\Delta t$ , si definisce la *corrente elettrica media* che attraversa quel conduttore nel tempo  $\Delta t$  come  $\langle I \rangle = \Delta Q / \Delta t$ , e ovviamente la corrente elettrica  $I(t)$  sarà definita come:

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ(t)}{dt}$$

---

<sup>5</sup> La “non neutralità” violerebbe il principio di conservazione dell’energia per il sistema “circuito” considerato come “isolato”.

Poiché in natura la carica elettrica si presenta in modo quantizzato, non può cioè assumere valori arbitrariamente piccoli ma soltanto multipli interi di particolari valori, e per le cariche osservabili soltanto multipli interi di una carica pari a quella dell'elettrone, allora quest'ultima definizione è in realtà scorretta ma data la piccolezza della carica dell'elettrone, e la gran quantità di elettroni che tipicamente caratterizzano le correnti con cui avremo a che fare, possiamo assumerla come una buona approssimazione!

L'unità di corrente nel Sistema Internazionale è l'Ampère (A):  $1\text{A} = (1\text{Coulomb})/(1\text{s})$ .

Si trova sperimentalmente che per molti tipi di conduttori vale, almeno approssimativamente, una relazione di proporzionalità tra tensione applicata e corrente che lo attraversa. Questa relazione è nota col nome di *legge di Ohm*:

$$V(t) = R \cdot I(t) = R \frac{dQ(t)}{dt} \quad (1.15)$$

Il coefficiente di proporzionalità  $R$  è detto "resistenza del conduttore" e si misura in Ohm ( $\Omega$ ).

$$1\Omega = (1\text{ Volt})/(1\text{ Ampère}) = (1\text{ Volt}) \cdot (1\text{ secondo})/(1\text{ Coulomb}).$$

$R$  può essere correlata con le caratteristiche geometriche e strutturali del conduttore in questione tramite la relazione (*detta 2ª legge di Ohm*)

$$R = \int_0^l \frac{\rho(l')}{\Sigma(l')} dl' \quad (1.16)$$

dove:  $\rho(l')$ , detta resistività e misurata in (Ohm·metri), è una caratteristica specifica del materiale conduttore, eventualmente dipendente dalla coordinata di posizione  $l'$  nel conduttore stesso;  $l$  è la lunghezza globale efficace del conduttore;  $\Sigma(l')$  è l'area della sezione retta del conduttore in corrispondenza alla coordinata  $l'$ .

La resistività  $\rho$  di gran parte dei conduttori dipende dalla temperatura assoluta  $T$  secondo una legge del tipo  $\rho \propto \mu T^m$ . Questa dipendenza, in intervalli di temperatura specifici per ogni conduttore e per scopi pratici, è spesso approssimata con un andamento lineare. In questi casi si preferisce esprimere la resistività  $\rho$  in funzione della temperatura  $\theta$  espressa in gradi centigradi, contata a partire da  $20\text{ °C}$ , scrivendo:

$$\rho = \rho_{20} [1 + \alpha \cdot (\theta - 20)] \quad (1.17)$$

dove  $\rho_{20}$  = resistività misurata a  $\theta = 20\text{ °C}$ , ed  $\alpha$  è detto *coefficiente termico della resistività*.

*Resistività e coefficienti termici per alcune sostanze conduttrici e non riferiti alla temperatura di 20 °C*

<b>Materiale</b>	<b>Resistività (<math>\Omega \cdot m</math>)</b>	<b>Coeff. Termico (<math>^{\circ}C^{-1}</math>)</b>
argento	$1.59 \cdot 10^{-8}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$
rame	$1.67 \cdot 10^{-8}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$
oro	$2.35 \cdot 10^{-8}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$
alluminio	$2.65 \cdot 10^{-8}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$
tungsteno	$5.65 \cdot 10^{-8}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
zinco	$5.92 \cdot 10^{-8}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$
nichel	$6.84 \cdot 10^{-8}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$
ferro	$9.71 \cdot 10^{-8}$	$6.5 \cdot 10^{-3}$
platino	$10.6 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
stagno	$11.0 \cdot 10^{-8}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$
niobio	$12.5 \cdot 10^{-8}$	
piombo	$20.7 \cdot 10^{-8}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$
mercurio	$98.4 \cdot 10^{-8}$	
carbonio (grafite)	$1.38 \cdot 10^{-5}$	$-0.5 \cdot 10^{-3}$
germanio	0.46	$-48 \cdot 10^{-3}$
silicio	$2.30 \cdot 10^3$	$-75 \cdot 10^{-3}$
acqua	$2 \cdot 10^5$	
vetro	$10^{10} \div 10^{14}$	
zolfo	$2 \cdot 10^{15}$	
quarzo fuso	$10^{16} \div 10^{17}$	

Per spostare una carica  $Q$  fra due punti tra i quali vi sia una d.d.p.  $V$ , si effettua dunque un lavoro  $L = Q \cdot V$ . Il lavoro effettuato nell'unità di tempo  $W = dL/dt$  è detto potenza elettrica e si misura in Watt (W).

Poiché inoltre:

$$\frac{dL}{dt} = V \frac{dQ}{dt} = V \cdot I$$

in un ramo di circuito con resistenza  $R$ , sottoposto alla d.d.p.  $V$  e percorso da corrente continua  $I$ , la potenza  $W$  dissipata (sotto forma di calore, luce, ecc. ...), è data da:

$$W = V \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{V^2}{R}$$

Quindi:

$$1W = (1 \text{ Volt})(1 \text{ Ampère}) = (1 \text{ Ohm})(1 \text{ Ampère})^2 = (1 \text{ Volt})^2(1 \text{ Ohm})^{-1}$$

Sia il generatore di tensione che il filo elettrico sono degli *elementi circuitali*, e quando si mettono insieme diversi elementi circuitali si costruisce un *circuito elettrico*. Nella figura alla pagina successiva sono riportati i simboli di alcuni elementi circuitali che saranno considerati nel corso delle presenti lezioni.

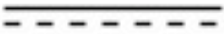




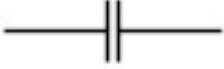

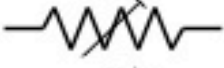
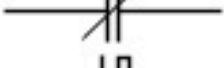
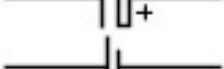

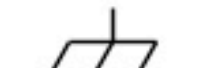











	corrente continua
	corrente alternata
	elemento conduttore ideale (privo di resistenza)
	interruttore aperto
	resistenza
	condensatore
	induttanza
	resistenza variabile
	condensatore variabile
	condensatore elettrolitico
	batteria (generatore di corrente continua)
	generatore di corrente alternata
	connessione di massa
	connessione di terra
	lampada ad incandescenza
	lampada al neon
	diodo
	fotodiode
	diode led
	diode zener
	diode varatore
	spina coassiale
	trasformatore

Fig. 1.13 Simboli di alcuni comuni elementi circuitali

## 1.3 \_ Strumenti di misura

### 1.3.1 \_ I multimetri digitali

Gli strumenti con cui si misura la tensione sono detti *voltmetri*, quelli con cui si misura la corrente elettrica sono detti *amperometri* e quelli con cui si misura la resistenza sono detti *ohmetri*, ma è più frequente trovare questi strumenti riuniti in un unico oggetto chiamato *multimetro* o *tester*.

La figura mostra lo schema di base del funzionamento di un voltmetro digitale:

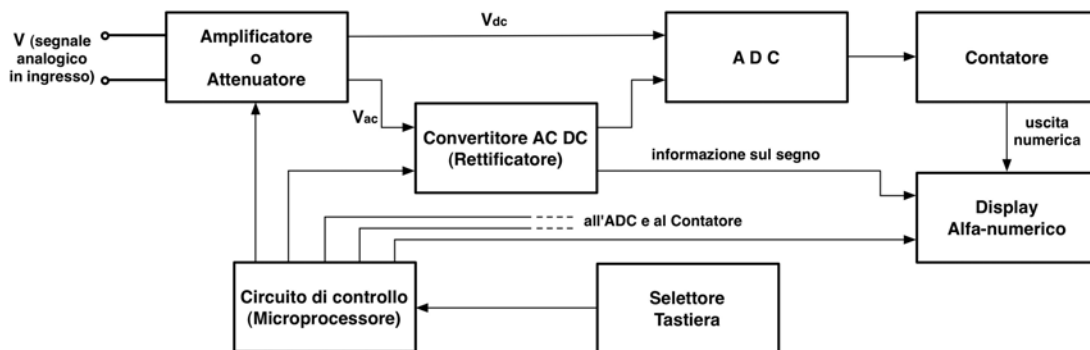


Fig. 1.14

Il cuore di un voltmetro è l'ADC (Analog-to-Digital Converter) e si tratta di un circuito elettronico che converte una tensione continua, ovvero un segnale analogico, in una sequenza di segnali digitali<sup>6</sup> che rappresentano un numero binario (Appendice 2).

Questi segnali digitali sono poi inviati a un display contenente circuiti logici e uno schermo per la visualizzazione di dati e simboli alfanumerici.

Questi strumenti contengono anche un circuito di condizionamento in ingresso che serve sia a cambiarne il fondo-scala che in alcuni modelli, a modificarlo in modo da poterlo utilizzare come amperometro o ohmetro. Facendo ad esempio passare la corrente esterna attraverso una resistenza nota e misurando la tensione ai capi di questa, si ricava il valore della corrente in base alla legge di Ohm e alla tensione misurata.

Analogamente se lo strumento contiene una pila di f.e.m. nota, si può ottenere una misura di resistenza per mezzo di una misura della corrente estratta da questa pila.

Nelle figure 1.15 e 1.16 sono illustrati, con le loro caratteristiche fondamentali, due esempi di multimetri digitali commerciali.

Per la descrizione dettagliata delle funzioni di tali strumenti si rimanda alla consultazione degli specifici libretti di istruzioni.

<sup>6</sup> Dall'Inglese digit che significa cifra. I segnali digitali si utilizzano per rappresentare numeri interi all'interno dei moderni sistemi di calcolo e in gran parte della strumentazione scientifica. Gli strumenti digitali convertono un segnale analogico in un segnale digitale, ed effettuano l'eventuale successiva elaborazione su questo segnale digitale.

È importante osservare che le cifre rappresentate sul display di strumenti come questi possono non avere sempre ovvia e immediata significatività.

**Specifiche del multimetro:**

**Accuratezza**

tensioni continue	0.7%
tensioni alternate	1.2%
misure di resistenza	0.7%

**Risposta in corrente alternata**

frequenza massima	500 Hz
-------------------	--------

**Risoluzione/Portata**

tensioni continue	100 $\mu$ V/1000 V
tensioni alternate	1mV/750 V
ture di resistenza	0.1 $\Omega$ /30 M $\Omega$
corrente	10 $\mu$ A/10 A



Fig. 1.15



Fig. 1.16 \_ Multimetro digitale Agilent, mod. 34401A, 6 1/2-digit

Questa può essere comunque sempre dedotta dalla consultazione delle specifiche dello strumento: nel caso di quello mostrato in fig. 1.15, ad esempio, l'accuratezza<sup>7</sup> per le tensioni continue è 0.7%.

<sup>7</sup> Si ricordi che all'incertezza globale su una misura concorrono svariati contributi che si possono distinguere in casuali e sistematici. Il contributo casuale è associato ad una distribuzione di probabilità ed è in generale tanto maggiore quanto più grande è la varianza di questa distribuzione. Il contributo sistematico è una quantità media, in linea di principio ignota, che può avere segno sia positivo che negativo e viene sommata a tutte le misure. Uno strumento si dice preciso se l'incertezza statistica ha una varianza piccola. Si dice invece accurato se ha una piccola incertezza sistematica. Le specifiche riportate nei fogli d'accompagnamento degli strumenti utilizzano una definizione un po' diversa dell'accuratezza, accettata nell'industria, secondo cui l'accuratezza va intesa come una combinazione di incertezza casuale e sistematica.

Il multimetro illustrato in fig. 1.16 è un modello più sofisticato e accurato, con cui si possono effettuare anche misure di frequenza e periodo, e che può essere collegato ad un sistema di acquisizione dati basato sullo standard IEEE-488<sup>8</sup>. Nella tabella seguente sono riportate alcune sue caratteristiche specifiche relative alla misura di tensioni continue.

Accuratezza entro 1 anno dall'ultima calibrazione

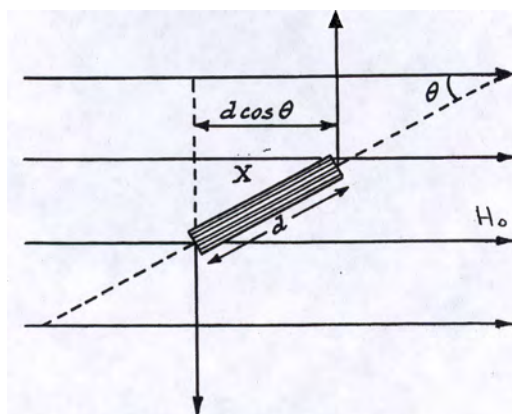
tensione	risoluzione	errore (% lettura + % range)	resistenza d'ingresso
100 mV	100 nV	0.0050+0.0035	10 MOhm o > 10 GOhm
1 V	1 μV	0.0040+0.0007	10 MOhm o > 10 GOhm
10 V	10 μV	0.0035+0.0005	10 MOhm o > 10 GOhm
100 V	100 μV	0.0045+0.0006	10 MOhm
1000 V	1 mV	0.0045+0.0010	10 MOhm

Si noti che in tabella è riportata anche la resistenza d'ingresso che come si avrà modo di vedere in seguito, è una quantità importante nelle misure.

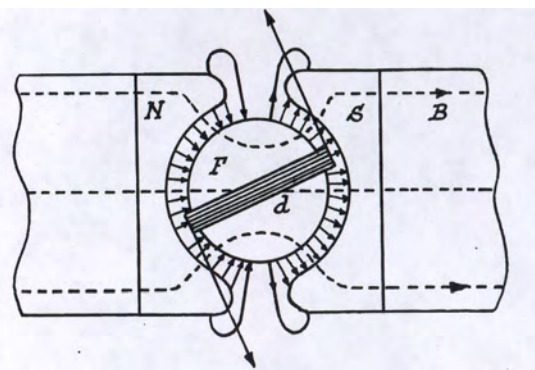
### 1.3.2 \_ Gli strumenti analogici o ad *equipaggio mobile*

#### – Amperometro a bobina mobile

La struttura fondamentale di questo strumento è costituita da una bobina piatta di  $n$  spire rettangolari, sostenuta da due perni in modo da poter ruotare attorno all'asse di simmetria verticale. La bobina è immersa in un campo magnetico  $\vec{B}$  di intensità costante e direzione radiale in ogni punto rispetto all'asse (fig. 1.17.b).



a) Bobina in campo uniforme  $M = N a b i B$   
dove:  $b = d \cos \alpha$ .



b) Bobina in un campo di intensità costante e radiale (nel traferro): in questo caso è  $M = N a d i B$ .

Fig. 1.17.a

Fig. 1.17.b

<sup>8</sup> Vedi ad es. il sito: <http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE-488>



Il campo magnetico è realizzato da un magnete permanente a ferro di cavallo con espansioni N, S sagomate a forma cilindrica (fig. 1.17.b). Tra le espansioni è fissato un blocchetto cilindrico di ferro dolce a cavallo del quale è posto un telaio rettangolare d'alluminio su cui è avvolto il filo di rame che costituisce la bobina mobile. Un opportuno sistema di contrappesi garantisce che il baricentro di tutto l'equipaggio mobile si trovi sul proprio asse di rotazione, annullando su di esso il momento risultante della forza peso e permettendo così il funzionamento dello strumento in qualsiasi posizione.

La corrente  $I$  percorre la bobina che tramite il telaio è meccanicamente solidale con due molle a spirale piana, avvolte in senso inverso l'una rispetto all'altra e posizionate simmetricamente una sulla parte superiore ed una su quella inferiore dell'equipaggio mobile. Esse hanno il compito di generare una coppia elastica di torsione il modulo del cui momento è approssimativamente pari ad  $M = -h\vartheta$  ( $h =$  costante elastica) in corrispondenza ad ogni rotazione della bobina di un angolo  $\vartheta$  rispetto a una determinata posizione di equilibrio corrispondente allo *zero*. Ciò vale ovviamente, con approssimazione tanto migliore quanto più piccoli sono gli angoli di torsione.

Il passaggio della corrente  $I$  provoca un momento di forza elettromagnetica il cui modulo è espresso da:

$$M = nadBI = \Phi^* I \quad (1.18)$$

dove  $a$  e  $d$  rappresentano le lunghezze dei lati di ogni spira rettangolare,  $\Phi^* = nadB$  è il flusso magnetico concatenato con la bobina.

Il momento  $\bar{M}$  allontana il telaio della bobina dalla posizione di equilibrio, ovvero dallo *zero* corrispondente all'assenza di corrente  $I$  nella bobina, e conseguentemente le molle esercitano una coppia elastica di richiamo di modulo  $M = h\vartheta$ . Si ha nuovamente condizione d'equilibrio quando  $\vartheta$  assume il valore  $\vartheta_{eq}$  tale che

$$\vartheta_{eq} = \frac{\Phi^*}{h} I \quad (1.19)$$

L'angolo di rotazione è dunque proporzionale alla corrente  $I$  entro i limiti di validità dell'approssimazione lineare per la reazione elastica delle molle.

Lo strumento, data la struttura radiale del campo magnetico, ha quindi una *scala lineare*.

### – Funzionamento di un amperometro

L'equipaggio mobile dello strumento subisce una rotazione, evidenziata da un indice solidale che si muove lungo un quadrante graduato, in corrispondenza al passaggio di corrente.

Un amperometro è caratterizzato dalla *portata* e dalla *resistenza interna*; ha una certa rilevanza anche il *consumo specifico* che è però funzione delle prime due.

La *portata* o *fondo scala* dell'amperometro rappresenta il massimo valore  $I_M$  di corrente misurabile.

La *resistenza interna* corrisponde alla resistenza  $R_i$  dell'avvolgimento (bobina) in cui viene convogliata la corrente da misurare.

Il *consumo specifico*  $P_a$ , è definito come il prodotto della corrente di fondo scala per la resistenza interna, tipica del valore di fondo scala scelto:  $P_a = R_i \cdot I_M = R_i \cdot I_M^2 / I_M = W_M / I_M$ , e coincide col rapporto tra la potenza massima dissipata nell'avvolgimento e la massima corrente misurabile, ovvero con la massima caduta di potenziale  $V_M$  ai capi dello strumento.

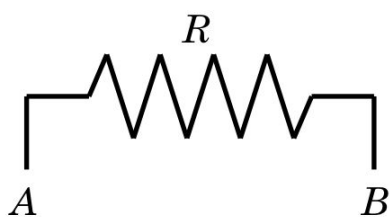
Per misurare, con un amperometro, la corrente circolante in un tratto di circuito, lo strumento va inserito in serie nel circuito stesso. Ciò provoca ovviamente una modifica del circuito con una conseguente perturbazione della corrente da misurare.

Riferendosi alle figure 1.18.a e 1.18.b, detta  $V$  la d.d.p. tra i punti  $A$  e  $B$ , dalla legge di Ohm si ha:

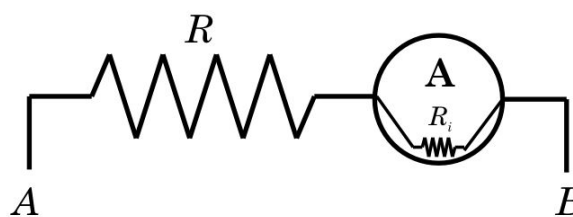
$$I = \frac{V}{R} \quad (\text{corrente imperturbata}) \quad ; \quad I^* = \frac{V}{R_i + R} \quad (\text{corrente perturbata})$$

$$\text{da cui: } I - I^* = \Delta I = V \left[ (R)^{-1} - (R_i + R)^{-1} \right] = \frac{VR_i}{R(R + R_i)} = I \frac{R_i}{R + R_i}.$$

Dunque  $\Delta I$  rappresenta la correzione sistematica da apportare al valore di corrente letto  $I^*$ , per dedurre la corrente  $I$  che effettivamente passerebbe nel circuito in assenza dell'amperometro.



a)  
Fig. 1.18.a



b)  
Fig. 1.18.b

La corrente perturbata  $I^*$  differisce quindi tanto meno da  $I$  quanto più vale  $R_i \ll R$ . **Un amperometro è dunque tanto migliore quanto più è piccola la sua resistenza interna  $R_i$ .**

Naturalmente, se l'amperometro viene lasciato sempre inserito in un ramo di circuito, allora la sua lettura corrisponde all'effettiva corrente che transita in quel ramo di circuito, e nell'amperometro stesso.

La portata nominale di un amperometro è limitata dal suo fondo scala; per ovviare a ciò si ricorre all'inserzione di opportune resistenze tarate, dette *shunt*, in parallelo all'amperometro.

Applicando le leggi di Kirchhoff al circuito di fig. 1.19 si ha:

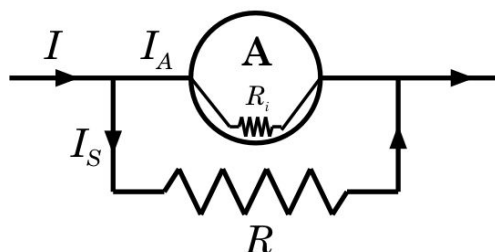


Fig. 1.19

$$\left. \begin{array}{l} I = I_A + I_S \\ R \cdot I_S = R_i \cdot I_A \end{array} \right\} \Rightarrow I - I_A = I_A \frac{R_i}{R} \Rightarrow I_A \left( 1 + \frac{R_i}{R} \right) = I \Rightarrow I_A = \frac{1}{1 + R_i/R} I$$

che fornisce la frazione  $I_A$  della corrente totale  $I$  che attraversa l'amperometro in funzione della resistenza di shunt  $R$ .

Da ciò si ottiene che per aumentare di un fattore  $n$  la portata d'un amperometro, bisogna porre in parallelo ad esso uno shunt  $R_n$  pari alla  $(n-1)^{ma}$  parte della sua resistenza interna  $R_i$ , ovvero:  $R_n = R_i/(n-1)$ .

### - Galvanometro

I galvanometri sono strumenti in grado di misurare correnti di ridottissima intensità (sino a  $10^{-11}$  A).

Il loro funzionamento è analogo a quello degli amperometri, salvo per il fatto che la coppia elastica non è generata da molle ma dalla torsione di un sottile filo, che può essere di bronzo fosforoso, rame o oro, cui è sospeso l'equipaggio mobile e che ha anche il compito di convogliare la corrente nella bobina.

La lettura non viene fatta traguardando la posizione di un indice, ma col metodo della leva ottica.



Fig. 1.20 Galvanometro di D'Arsonvaal

## - Voltmetro

Si ricordi che le misure di d.d.p. o tensione, sono sempre misure relative, e che la tensione va sempre riferita a un certo terminale.

Utilizzando la legge di Ohm si può ricondurre una misura di d.d.p. a una misura di corrente. Si ottiene ciò collegando in parallelo i due punti di un circuito tra i quali si vuol misurare la d.d.p., mediante un amperometro la cui resistenza interna  $R_i$  sia stata fortemente aumentata tramite l'aggiunta in serie di una resistenza  $R'$ .

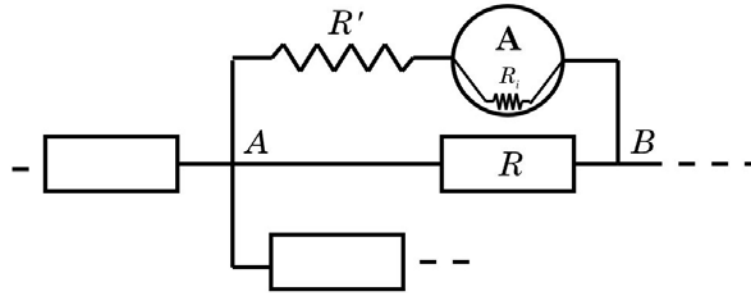


Fig. 1.21

La d.d.p. cercata è allora approssimativamente data da:

$$V'_{AB} = V'_A - V'_B = (R' + R_i) \cdot I_G,$$

dove  $I_G$  rappresenta l'intensità della corrente che attraversa lo strumento, ed  $(R' + R_i)$  è detta *resistenza interna* del voltmetro.

Si osservi che come l'amperometro, anche il voltmetro altera col suo inserimento il circuito in esame. Se la corrente totale che scorre tra i punti  $A$  e  $B$  del circuito è sempre la stessa, prima e dopo l'inserimento del voltmetro, detta  $V_{AB}$  la tensione ai capi di  $R$  prima dell'inserimento dello strumento si ha:  $V_{AB} = IR$ . Dopo l'inserimento dello strumento invece:

$$V'_{AB} = I \frac{R(R' + R_i)}{R + (R' + R_i)} = V_{AB} \frac{(R' + R_i)}{R + (R' + R_i)}$$

che è la d.d.p. dedotta dalla misura della corrente  $I_G$  che attraversa lo strumento. Dunque:

$$V_{AB} = \frac{V'_{AB} [R + (R' + R_i)]}{R' + R_i}$$

La differenza relativa per la tensione fra i punti  $A$  e  $B$  in presenza dello strumento è quindi:

$$\frac{V_{AB} - V'_{AB}}{V_{AB}} = \frac{\Delta V_{AB}}{V_{AB}} = 1 - \frac{R' + R_i}{R + (R' + R_i)} = \frac{R}{R + (R' + R_i)}$$

$\Delta V_{AB}/V_{AB}$  è quindi tanto più trascurabile quanto più vale  $R < (R' + R_i)$ .

$\Delta V_{AB}$  rappresenta dunque la correzione sistematica da apportare al valore misurato  $V'_{AB}$  per ottenere l'effettiva d.d.p. tra i punti  $A$  e  $B$  in assenza

del voltmetro ma nell'ipotesi che la sua introduzione non modifichi l'entità della corrente nel circuito.

Per aumentare di  $n$  volte la *portata* o *fondo scala* dello strumento, bisogna quindi aggiungergli in serie una resistenza  $R'$  pari ad  $(n-1)$  volte la sua resistenza interna specifica  $R_i$ .

Viceversa, ponendo in serie allo strumento una resistenza  $R'$  qualunque, la portata sarà corrispondentemente aumentata di un fattore  $x$  pari a:  
 $x = 1 + R'/R_i$ .

Per quanto possa dunque essere grande la resistenza interna  $(R'+R_i)$  dello strumento, è però inevitabile che la sua inserzione in un circuito ne perturbi in modo a volte non trascurabile le caratteristiche, falsando di conseguenza il risultato della misura stessa.

Ciò non avverrebbe se la resistenza interna  $(R'+R_i)$  fosse infinita.

Uno strumento che in certe condizioni approssima abbastanza bene questa caratteristica è il *voltmetro elettrostatico*.

### - Voltmetro elettrostatico

Si tratta sostanzialmente di un elettrometro senza campo ausiliario (Appendice 4).

Esso è costituito da un condensatore realizzato con tre lamine, due delle quali, indicate con  $M_0$ , sono fra loro identiche e rigidamente fissate in modo da lasciare libero uno spazio d'aria che permette la penetrazione parallela della terza lamina  $M_1$ , solidale a un equipaggio mobile che può ruotare intorno ad un perno  $O$ . Quest'ultimo è connesso ad una molla a spirale piana  $m$  di costante elastica  $h$  (Fig. 1.22).

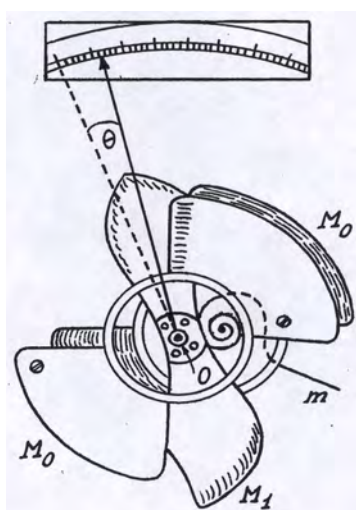


Fig. 1.22

La penetrazione più o meno profonda della lamina  $M_1$  fra le due lamine fisse  $M_0$ , conseguente alla rotazione di un angolo  $\vartheta$  dell'equipaggio mobile, determina la variazione della capacità  $C(\vartheta)$  del condensatore  $M_0-M_1$ , in modo approssimativamente proporzionale a  $\vartheta$ , data l'opportuna sagomatura di  $M_1$ :  $C(\vartheta) \propto K \cdot \vartheta$ .

Se ai capi del condensatore si applica una d.d.p.  $V$ , l'equipaggio mobile sarà soggetto ad un momento di forza di modulo  $M$  tendente a far aumentare l'angolo  $\vartheta$ .

Supponendo il sistema isolato, quindi costante la carica elettrica  $Q$  sulle lamine, si ha, detta  $E$  l'energia elettrostatica del condensatore:

$$M = -\frac{\partial E}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{Q^2}{2C} \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{[C(\vartheta)]^2} \frac{\partial C}{\partial \vartheta} = \frac{1}{2} V^2 \left( \frac{\partial C}{\partial \vartheta} \right) \quad (1.20)$$

Assumendo  $C(\vartheta) \propto K \cdot \vartheta$ , si ha  $dC/d\vartheta \propto K$ , da cui:

$$M \propto \frac{1}{2} KV^2 \quad (1.21)$$

Poiché infine ad  $M$  fa riscontro una coppia elastica il cui momento ha modulo pari ad  $h\vartheta$ , esercitata dalla molla piana a spirale, la condizione d'equilibrio dà:

$$\vartheta \propto \frac{K}{2h} V^2 \quad (1.22)$$

Quindi, nell'ipotesi  $C(\vartheta) \propto K \cdot \vartheta$ , lo strumento ha una scala quadratica.

### - Ohmetro

L'Ohmetro è uno strumento a lettura diretta, di rapido impiego, che permette misure di valori di resistenze con incertezze tipiche di qualche unità percentuale. Gli elementi costitutivi essenziali di un Ohmetro sono una pila, di resistenza interna  $R_i$  e f.e.m.  $\mathcal{E}$ , e un milliamperometro  $S$  di resistenza interna  $R$ ;  $R_2$  rappresenta l'eventuale resistenza di shunt. Il circuito viene chiuso sulla resistenza da misurare  $R_x$ , in modo che la corrente  $I^*$  misurata da  $S$ , sia una funzione ben definita di  $R_x$ .

Si consideri ad esempio come possibile schema operativo quello in figura 1.23.

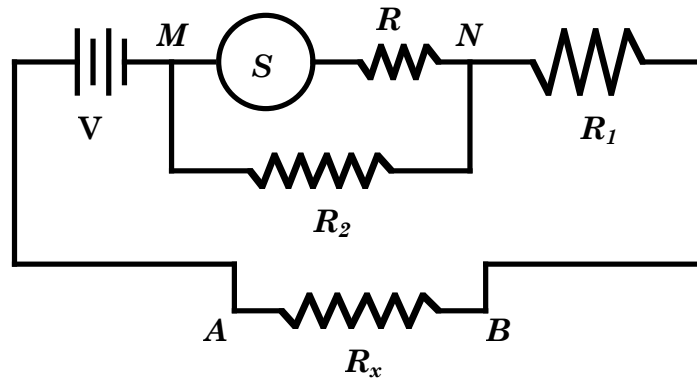


Fig. 1.23

Indicando con  $I$  la corrente che attraversa il ramo  $MABN$ , e con  $I^*$  la corrente che attraversa il milliamperometro, si ha che attraverso  $R_2$  passa la corrente  $I_2 = I - I^*$ . Quindi  $I = I^* + I_2$ ;  $I^*R = I_2R_2 = (I - I^*)R_2$  da cui:

$$I^* = \frac{R_2}{R + R_2} I \Rightarrow I = I^* (1 + R/R_2)$$

Inoltre:  $I = \frac{V}{R_x + R_1 + RR_2/(R + R_2)}$  da cui:

$$I^*(V, R, R_1, R_2, R_x) = \frac{\frac{V}{1 + R/R_2}}{R_x + R_1 + RR_2/(R + R_2)} = \frac{\frac{\mathcal{E} - IR_i}{1 + R/R_2}}{R_x + R_1 + RR_2/(R + R_2)}$$

$$R_x = \frac{\mathcal{E} - IR}{I^*} - \left( R_1 + \frac{RR_2}{R_1 + R_2} \right)$$

Quindi  $I^*$  è funzione di  $R_x$  e degli altri parametri che però, una volta determinata la posizione di misura dell'ohmetro, restano costanti.

Ciò permette quindi di affermare che  $I^* = I^*(R_x)$ , e tracciare di conseguenza una scala delle resistenze che per quanto visto, risulterà inversa e di forma iperbolica rispetto alla corrente  $I^*$ .

Per poter utilizzare tutta la scala a disposizione del milliamperometro  $S$ , i parametri vanno scelti in modo che  $I^*(0)$  coincida con la corrente  $I_{\max}^*$  di fondo scala.

La scala di un ohmetro va da  $R_x = 0$  ( $I^*(0) = I_{\max}^*$ ) ad  $R_x = \infty$  ( $I^*(\infty) = 0$ ); non si può dunque parlare di un vero e proprio fondo scala. La dipendenza  $R_x \propto 1/I^*$  fa inoltre sì che l'incertezza relativa  $\Delta R_x/R_x$  diverga rapidamente sia in corrispondenza ai valori bassi che a quelli alti della scala effettiva sullo strumento. Si può verificare che per mantenere  $\Delta R_x/R_x \leq 0.05$  ci si deve limitare ad un intervallo di lettura centrale pari a circa metà della scala completa compresa fra 0 ed 1 per  $I^*/I_{\max}^*$ ; bisogna cioè evitare che  $R_x$  diventi sensibilmente diverso da  $R$ .

Si ovvia a questo inconveniente realizzando diverse disposizioni di lavoro per l'ohmetro, corrispondenti a diversi valori dei parametri, tali da portare il tratto quasi lineare della curva  $I^* = I^*(R_x)$  in differenti intervalli di variazione della resistenza, possibilmente ognuno sul prolungamento dell'altro.

## - Strumento universale

In fig. 1.24 è mostrato un tipico strumento universale a bobina mobile. Esso permette di effettuare misure di tensioni in corrente continua e in corrente alternata; misure d'intensità di corrente in continua e in alternata; misure di resistenza per valori sino a 0.1 Ohm, in corrente continua; misure di resistenza in corrente alternata; misure di capacità; prova diodi e transistor e grazie all'utilizzo di uno specifico cavo di connessione, misure di frequenza.

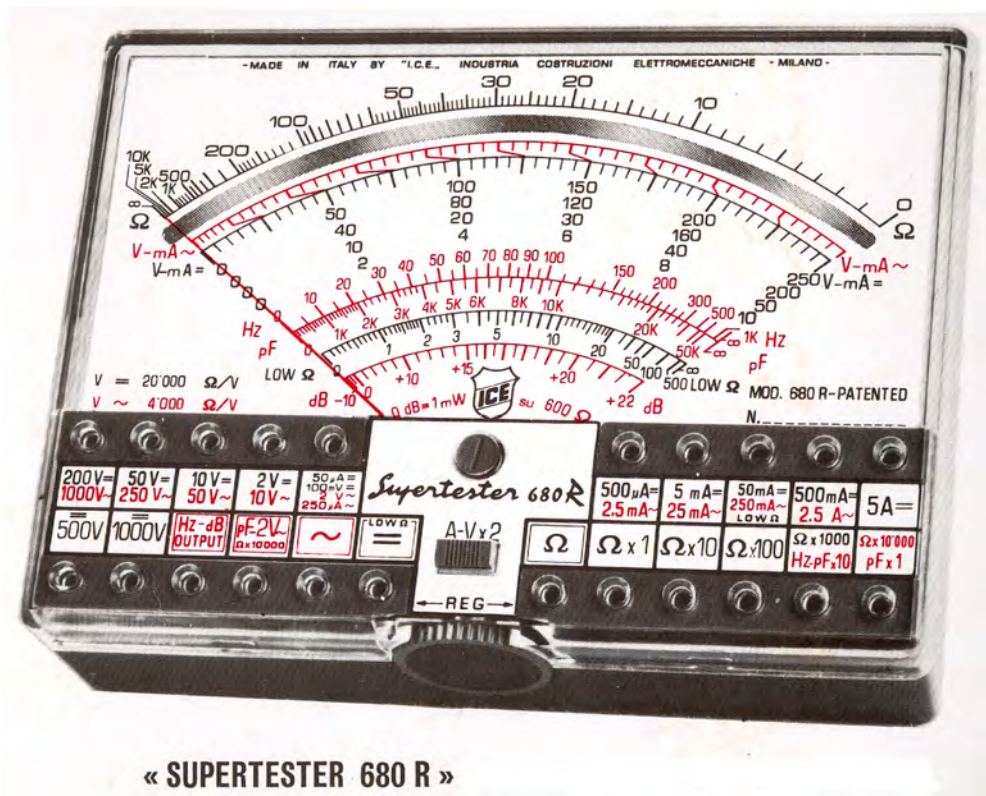


Fig. 1.24

Quanto detto sinora sul funzionamento degli strumenti analogici, e non strettamente legato alla struttura meccanica del loro funzionamento, vale ovviamente anche per gli strumenti digitali.

## 1.4 \_ Resistenze elettriche e codice dei colori

La realizzazione di circuiti elettrici richiede praticamente sempre l'introduzione di conduttori con valori ben definiti della resistenza. Le resistenze più comuni sono solitamente costituite da cilindretti contenenti polvere di grafite compattata, oppure da pellicole metalliche depositate su un substrato isolante (par. 2.8).

Per la rapida individuazione del valore delle resistenze prodotte commercialmente, si utilizza la tecnica di marcarle con delle strisce colorate. In Fig. 1.25 alla pagina successiva è illustrato questo *codice dei colori*.



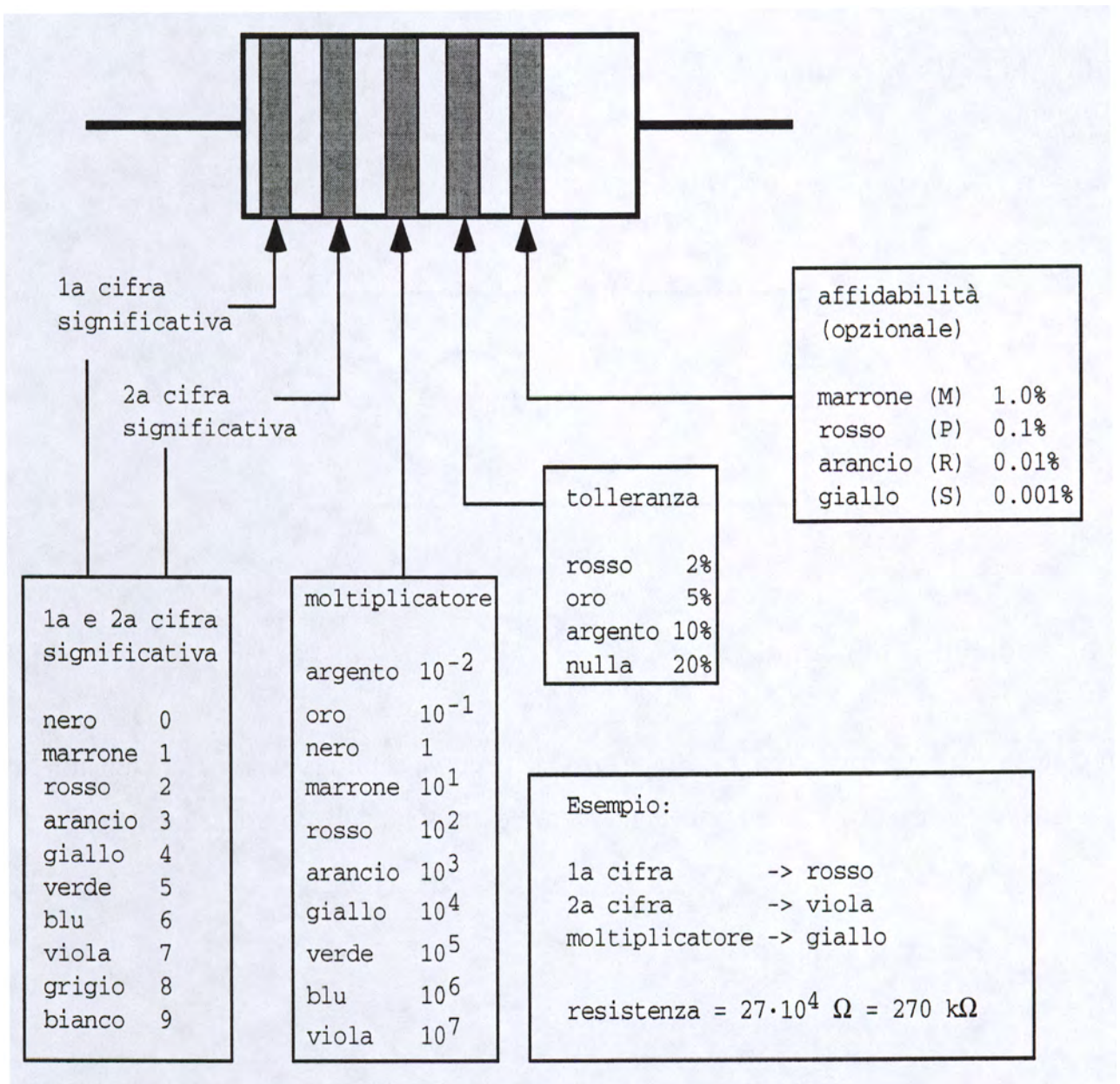


Fig. 1.25

Le resistenze sono costruite con una precisione definita (specificata dalla tolleranza), e non ha quindi senso commercializzare resistenze con valori che differiscono fra loro meno della tolleranza costruttiva, ad esempio non ha senso commercializzare resistenze da  $1000 \Omega$  e da  $1001 \Omega$  se la tolleranza di costruzione è 1% (che in questo caso corrisponde a  $10 \Omega$ ). Nella lista seguente sono indicati i valori commerciali per resistenze con tolleranza del 10%: 10, 12, 15, 18, 22, 27, 33, 39, 47, 56, 68, 82, 100 (ovviamente moltiplicando per i successivi ordini di grandezza si ottiene la totalità dei valori di resistenza disponibili, sempre al 10%). Ciò significa che si possono ad esempio acquistare resistenze al 10% con valori da  $22 \Omega$  o da  $33 \text{ k}\Omega$ , ma non da  $25 \Omega$ .

## Osservazioni

Si ricordi di tener sempre in debito conto delle resistenze (in genere delle impedenze) introdotte dai cavi di connessione, dai contatti, dagli strumenti di misura utilizzati (per un amperometro ad esempio dipendono dalla scala di misura impostata), ed eventualmente dall'ambiente circostante. Qualora se ne trascuri l'influenza, bisogna sempre giustificarlo quantitativamente.

Inoltre, ogni valore misurato o quotato dovrà essere sempre accompagnato dal proprio livello di incertezza ed eventualmente da un'indicazione su come questo sia stato stimato, distinguendo, se ne fosse il caso, fra contributi statistici, sistematici e di sensibilità della strumentazione.

È ora il momento di cominciare a mettere mano davvero all'attività di laboratorio esercitandosi, per verificare in pratica quanto descritto e quanto verrà presentato in seguito e anche sperimentando, per rimisurare costanti fisiche già note o per studiare l'andamento di certi fenomeni in funzione di osservabili che li caratterizzano.

Da qui in poi ci saranno quindi, intervallati al richiamo di alcuni propedeutici argomenti fondamentali e di complemento ad essi, dei paragrafi intitolati come Esercitazione o Esperienza, che proporranno delle specifiche misure da effettuarsi in laboratorio da parte di gruppi di tre o al massimo quattro persone, e riporteranno anche numerose indicazioni e suggerimenti pratici. A conclusione di alcune di queste esercitazioni o esperienze si richiederà, come parte della fase didattica, una relazione scritta completa di analisi dei dati raccolti, frutto dell'attività congiunta di tutti i componenti di ogni gruppo.

## 1.5 \_ Generatori reali

Ricordando che  $W = V^2/R$ , si deduce che un generatore di tensione ideale dovrebbe essere in grado di erogare una potenza arbitrariamente grande pur di chiuderlo su una resistenza  $R$  opportunamente piccola.

Considerando poi che si ha anche  $W = I^2R$ , si deduce similmente che un generatore di corrente ideale dovrebbe poter erogare una potenza arbitrariamente grande, pur di chiuderlo su una resistenza  $R$  opportunamente grande.

Quanto detto non è però fisicamente realizzabile, i generatori reali si comportano infatti in modo alquanto diverso.

### 1.5.1 \_ Generatori reali di tensione

Un generatore reale di tensione è un dispositivo che genera una d.d.p.  $V$  ma offre nel contempo una resistenza finita  $R_i$  (resistenza interna) al passaggio della corrente. La resistenza interna  $R_i$  è una caratteristica costruttiva intrinseca di ogni generatore, dunque ineliminabile.

Un generatore reale di tensione può dunque essere schematizzato come in figura 1.26 .

Ne consegue che la d.d.p. da esso fornita non è costante, come per un generatore ideale, ma dipende dal carico resistivo esterno  $R$ . Detta infatti  $V_R$  la d.d.p. ai capi di tale carico, se  $V$  è la tensione ai capi del generatore *nudo*, ovvero la f.e.m.  $\mathcal{E}$ , si ha:

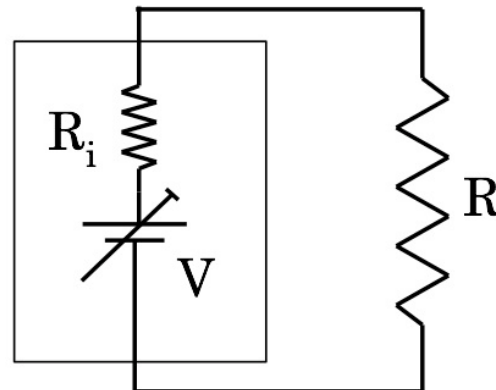


Fig. 1.26

$$\mathcal{E} = V = I(R + R_i) = V_R + IR_i$$

$$V_R = V - IR_i = V - \frac{VR_i}{R + R_i} = V \left( 1 - \frac{R_i}{R + R_i} \right) = \frac{VR}{R + R_i}$$

cioè: 
$$V_R = V \frac{1}{1 + R_i/R}$$

da confrontarsi con:  $V_R = V$  per il corrispondente generatore ideale.

Si ha che  $V_R \rightarrow V$  per  $R_i/R \rightarrow 0$ . Ovvero il generatore reale di tensione tende a quello ideale quanto minore è il rapporto fra la sua resistenza interna  $R_i$  e quella di carico  $R$ .

Siccome poi  $V$  ed  $R_i$  sono caratteristiche costruttive intrinseche del generatore reale, l'approssimazione del suo comportamento ideale dipende sostanzialmente dalla resistenza di carico  $R$ .

### 1.5.2 \_ Generatori reali di corrente

Un generatore reale di corrente è un dispositivo che genera una corrente  $I$  ma nel contempo assorbe una parte  $I_i$  di tale corrente sulla propria resistenza interna  $R_i$ .

Esso può quindi essere schematizzato come un generatore ideale posto in parallelo alla propria resistenza interna  $R_i$ .

$I$  ed  $R_i$  sono caratteristiche costruttive intrinseche del generatore e la corrente da esso fornita non è costante, ma dipende dal carico resistivo esterno  $R$ . Detta infatti  $I_R$  la corrente che scorre in  $R$ , si ha:

$$I_R = \frac{V}{R}$$

$$I = I_i + I_R = V \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R} \right) = V \frac{R + R_i}{RR_i} = I_R \frac{R + R_i}{R_i}$$

da cui: 
$$I_R = I \frac{1}{1 + R/R_i}$$

da confrontarsi con:  $I_R = I$  per il corrispondente generatore ideale.

Si ha che  $I_R \rightarrow I$  per  $R/R_i \rightarrow 0$ . Ovvero il generatore reale di corrente tende a quello ideale quanto minore è il rapporto fra la resistenza di carico  $R$  e la sua resistenza interna  $R_i$ .

Siccome poi  $I$  ed  $R_i$  sono caratteristiche costruttive intrinseche del generatore reale, anche in questo caso l'approssimazione del suo comportamento ideale dipende sostanzialmente dalla resistenza  $R$  di carico.

Un generatore reale di corrente si comporta quindi approssimativamente come un generatore ideale se la potenza che eroga è piccola rispetto a quella massima che è in grado di erogare.

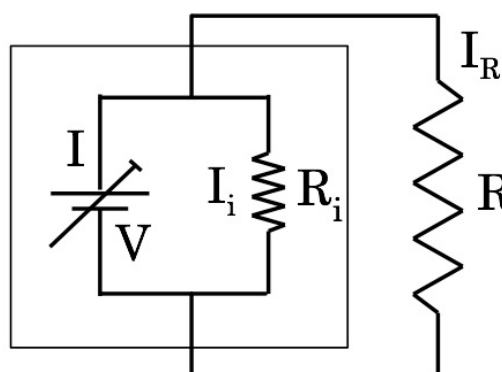


Fig. 1.27

### 1.5.3 \_ Potenza erogabile dai generatori

Analizziamo i rapporti tra la potenza totale prodotta e quella erogabile, sia per un generatore di tensione che per un generatore di corrente.

- Per un **generatore di tensione** si ha:

$$W_{Tot} = \frac{V^2}{R_i + R} = \frac{V^2}{R_i} \frac{1}{1 + R/R_i}$$

Detto  $W_{Max} = V^2/R_i$  si ha che  $W_{Tot} \rightarrow W_{Max}$  per  $R/R_i \rightarrow 0$ .

Per la potenza  $W_{est}$  utilizzabile dalla resistenza  $R$  di carico si ha invece:

$$\begin{aligned} W_{est} = V_R I = R I^2 &= R \left( \frac{V}{R + R_i} \right)^2 = \frac{R R_i}{R_i} \left( \frac{V}{R + R_i} \right)^2 = \frac{V^2}{R_i} \frac{R R_i}{(R + R_i)^2} = \\ &= W_{Max} \frac{R R_i}{(R + R_i)^2} = W_{Max} \frac{R/R_i}{(1 + R/R_i)^2} \end{aligned}$$

che come si può facilmente verificare presenta, per  $R/R_i = 1$  un valore massimo pari a  $W_{Max}/4$ .

Si ottiene dunque, per la potenza  $W_{int}$  dissipata all'interno del generatore:

$$\begin{aligned} W_{int} = W_{Tot} - W_{est} &= W_{Max} \left( \frac{R_i}{R + R_i} - \frac{R R_i}{(R + R_i)^2} \right) = W_{Max} \frac{R_i^2}{(R + R_i)^2} = \\ &= W_{Max} \frac{1}{(1 + R/R_i)^2} \end{aligned}$$

Quindi  $W_{int}$ , come  $W_{Tot}$ , presenta un andamento decrescente al crescere di  $R$ , ma è comunque sempre minore di  $W_{Tot}$  per ogni scelta di  $R$  e per  $R/R_i = 1$  vale  $W_{Max}/4$ , come  $W_{est}$ .

Definita l'efficienza  $\eta_V$  di un generatore di tensione come:

$$\eta_V = \frac{W_{est}}{W_{Tot}} = \frac{R}{R + R_i} = \frac{1}{1 + R_i/R}$$

si vede che essa tende al valore massimo, pari ad 1, per  $R/R_i = \infty$ , che corrisponde però a  $W_{est} = W_{int} = 0$ .

Il modo per estrarre la massima potenza possibile da un generatore di tensione è quindi porre  $R = R_i$ , in tal modo metà della potenza totale prodotta dal generatore sarà disponibile per il carico esterno  $R$  e l'altra metà sarà assorbita dal generatore stesso.

Per un generatore di tensione ideale, in cui  $R_i = 0$ , sarebbe stato:

$$W_{int}^{(id)} = 0, \quad W_{Tot}^{(id)} = W_{est}^{(id)} = \frac{V^2}{R}, \quad \eta_V^{(id)} = 1$$

Le differenze fra generatore reale e generatore ideale sono ovviamente dovute alla resistenza interna  $R_i$  del primo.

Si possono presentare casi in cui  $R_i$  non sia costante nel tempo. Per le batterie  $R_i$  aumenta all'aumentare dell'energia totale erogata. La batteria tenderà dunque a scaricarsi non perché  $V$  diminuisce ma piuttosto perché all'aumentare di  $R_i$  la potenza corrispondentemente assorbibile dal carico esterno  $R$  diminuisce.

- Per un **generatore di corrente** valgono considerazioni analoghe:

$$W_{Tot} = IV = I^2 R_i \frac{1}{1 + R_i/R} = W_{Max} \frac{1}{1 + R_i/R}$$

$$W_{est} = I^2 \frac{RR_i^2}{(R + R_i)^2} = W_{Max} \frac{RR_i}{(R + R_i)^2}$$

In questo caso  $W_{tot}$  ha un andamento in funzione di  $R/R_i$  opposto a quanto era invece per un generatore di tensione; l'andamento di  $W_{est}$  è invece lo stesso che nel caso di un generatore di tensione. Per l'efficienza di un generatore di corrente si ha quindi:

$$\eta_I = \frac{W_{est}}{W_{tot}} = \frac{1}{1 + R/R_i}$$

L'andamento di  $\eta_I$  è dunque opposto a quello di  $\eta_V$ .

Per un generatore di corrente ideale, in cui  $R_i = \infty$ , sarebbe stato:

$$W_{Tot}^{(id)} = W_{est}^{(id)} = I^2 R, \quad \eta_I^{(id)} = 1$$

Un generatore di corrente o uno di tensione, si comportano quindi allo stesso modo, dal punto di vista della potenza utilizzata da una resistenza di carico  $R$  (ciò è desumibile anche dalla regola di Norton<sup>9</sup>).

La potenza sviluppata all'interno del generatore stesso è invece molto diversa nei due casi: essa tende infatti a 0 per  $R/R_i \rightarrow \infty$  in un generatore di tensione, mentre tende a 0 per  $R/R_i \rightarrow 0$  in un generatore di corrente.

Il comportamento di un generatore dipende quindi essenzialmente dalla resistenza di carico  $R$  e si può schematizzare come segue:

$R/R_i \rightarrow \infty$	buon generatore di tensione
$R/R_i \approx 1$	buon generatore di potenza
$R/R_i \rightarrow 0$	buon generatore di corrente

<sup>9</sup> Per la regola di Norton vedi a pag. 45, paragrafo 1.6.3.

## **Esercitazione 1: Misura di forze elettromotrici e di resistenze interne di pile ed accumulatori**

Si scelga una pila (o un accumulatore), si ponga un voltmetro su una scala DC adeguata e si premano i puntali sui morsetti della pila, leggendo la tensione rilevata e valutando sensibilità e accuratezza della misura. Se il voltmetro è un buon voltmetro, assorbe una corrente piccolissima (la si valuti), quindi la tensione misurata sarà di poco (quanto ?) inferiore alla forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  della pila. Si ripeta la misura con altre pile ed accumulatori confrontando i risultati con i valori nominali forniti dal costruttore. Se i valori misurati sono maggiori o uguali a quelli nominali è probabile che la pila sia carica, altrimenti è probabile che sia scarica. Questa ovvia osservazione è però solamente indicativa in quanto, come visto nel paragrafo precedente, la forza elettromotrice dipende tutto sommato poco dallo stato di carica (1.5.1).

Si proceda quindi selezionando su un amperometro il fondo-scala di 10 A e con cavetti di collegamento e morsetti, si costruisca un circuito ponendo in serie l'amperometro, un reostato con cursore a centro corsa e un alloggiamento per pile/accumulatori. Inserita una pila (o un accumulatore) nell'alloggiamento si misuri la corrente che attraversa l'amperometro. Poiché il circuito non ha biforcazioni, la prima regola di Kirchhoff assicura che la corrente è uniforme lungo tutto il circuito, quindi la corrente letta dall'amperometro attraversa anche la pila, la resistenza e i cavetti di collegamento. Si aggiusti la scala dell'amperometro in funzione del valore di corrente letto per ottimizzare la sensibilità della misura. Il cambio di scala potrebbe modificare la corrente in quanto la resistenza interna dell'amperometro dipende dalla scala usata, tuttavia la misura dell'amperometro non richiede correzioni: la corrente misurata è proprio quella che attraversa ogni elemento di circuito, amperometro compreso, finché questo è parte del circuito.

Circolando quindi con i puntali del voltmetro sempre nello stesso verso ed evitando di scambiare l'ordine (per non determinare ambiguità nel segno del valore letto), si misurino le tensioni ai capi della resistenza, ai capi di ciascun cavetto di collegamento, dell'amperometro e della pila.

Si controlli se nel corso di tali misure la corrente varia; ciò potrebbe avvenire per tre ragioni:

- perché i contatti sono "ballerini" (ossidati, sporchi, non ben premuti); toccandoli con i puntali del voltmetro potrebbero migliorare (aumento di corrente) o peggiorare; ci si assicuri che ciò non avvenga;
- se la resistenza interna del voltmetro non è sufficientemente maggiore rispetto a quella dell'elemento circuitale analizzato, il collegamento del voltmetro fornisce un'ulteriore via non trascurabile alla corrente; questo effetto non dovrebbe essere significativo nelle nostre condizioni se la resistenza interna del voltmetro è grande rispetto a quelle dei vari componenti della maglia (par. 1.3.2);
- se la pila o l'accumulatore non fossero ben carichi, la corrente potrebbe avere un picco iniziale seguito da un rapido decadimento.

In condizioni quasi stazionarie si verifichi che la tensione misurata ai morsetti della pila sia uguale alla somma delle tensioni misurate ai capi dei vari cavetti, della resistenza variabile e dell'amperometro, ovvero si verifichi la validità delle regole di Kirchhoff per le tensioni. Si valutino quindi, sulla base della legge di Ohm  $R = V/I$  la "resistenza per metro" dei vari cavetti di collegamento e la "resistenza interna" dell'amperometro sulle varie scale selezionabili, annotandosi i risultati (le sensibilità dell'amperometro e del voltmetro utilizzati permettono di valutare la resistenza per metro dei cavi utilizzati?).

Si sposti quindi il cursore reostatico<sup>10</sup>, successivamente in nuove posizioni (s'osservi che non è necessario conoscere il valore di resistenza inserito, è sufficiente che tale valore si mantenga stabile durante ogni singola misura) misurando di volta in volta la corrente  $I$  e la tensione  $V$  ai morsetti della pila. Riportando i risultati su un opportuno grafico  $I$ - $V$  si ottengono alcuni punti della cosiddetta *curva di scarica* della pila (Fig. 1.28).

Approssimando con una retta la curva che interpola questi punti sperimentali, si può valutare la resistenza interna della pila come pendenza di tale retta, ovvero:

$$R_i = \frac{\mathcal{E} - V}{I} \quad ; \quad \mathcal{E} = V + IR_i \quad ; \quad V = \mathcal{E} - IR_i \quad (1.23)$$

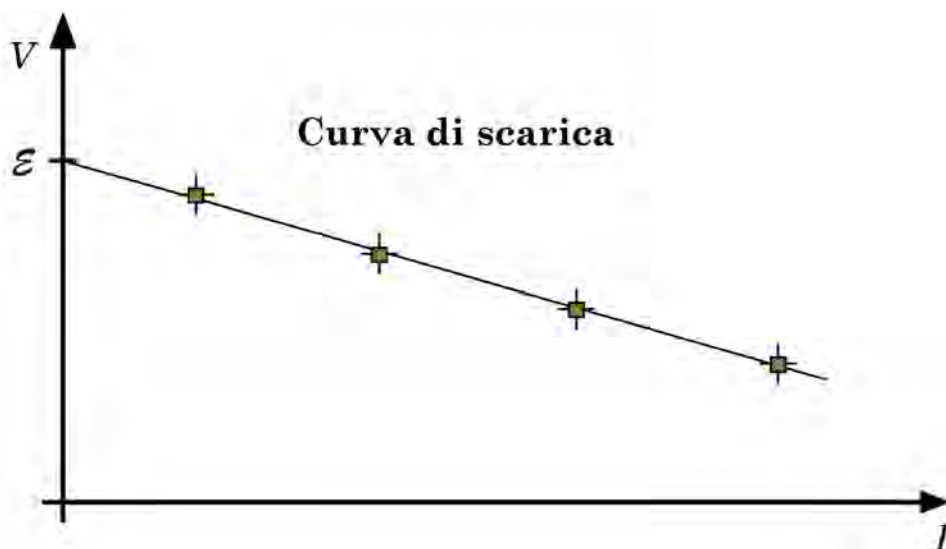


Fig. 1.28

La resistenza interna  $R_i$  è un indice affidabile dello stato di invecchiamento della pila (accumulatore): è piccola, dai decimi di Ohm sino a pochi Ohm, quando la pila è giovane e aumenta man mano che la

<sup>10</sup> In mancanza di un reostato si può utilizzare una "scatola di resistenze" che permette, tramite chiusura o apertura di interruttori, l'inserzione o disinserzione di resistenze in serie. Al momento dell'uso si apra e chiuda più volte ogni interruttore onde ripulirlo, per strofinio, da eventuali depositi di ossido che potrebbero determinare cattivi contatti con conseguenti instabilità non valutabili per il valore di resistenza inserito.



pila invecchia, ovvero man mano che con l'utilizzo le sue parti costituenti si deteriorano (ossidazioni, essiccamento delle soluzioni gelificate, ...). Infatti, come accennato in precedenza, la diminuzione della tensione erogata è dovuta più ad un aumento della resistenza interna che non a una diminuita efficacia della sorgente di tensione.

Si vede altresì che l'estrapolazione della retta al valore di corrente nulla, corrispondente all'inserimento di una resistenza infinita, ovvero a *circuito aperto*, fornisce il valore stimato della forza elettromotrice della pila come intercetta sull'asse  $V$  delle ordinate.

Per valutare la resistenza interna di altre pile, senza dover usare l'amperometro, si ponga l'alloggiamento della pila in serie ad una resistenza campione  $R_c$ , del valore di pochi Ohm; si misuri la forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  della pila prima di inserirla nell'alloggiamento, e si misuri la tensione  $V$  ai morsetti dopo aver inserito la pila nell'alloggiamento.

La resistenza interna si ottiene allora come:

$$R_i = R_c \frac{\mathcal{E} - V}{V} \quad (1.24)$$

## 1.6 \_ Misure di resistenza elettrica

### 1.6.1 \_ Metodo voltamperometrico

Tale metodo si basa sullo schema circuitale illustrato in Fig. 1.29.

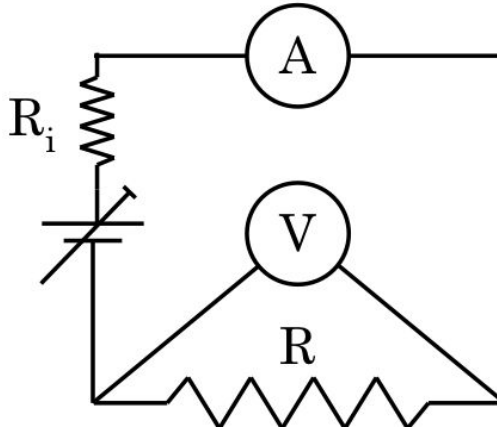


Fig. 1.29

Con questo tipo di collegamento, detto “voltamperometrico”, il voltmetro misura la tensione  $V$  ai capi della resistenza incognita  $R$ , purché i cavetti di collegamento abbiano resistenza molto minore di quella del voltmetro, e l’amperometro misura la corrente  $I$  che scorre nella resistenza incognita  $R$ , purché la via fornita alla corrente dal voltmetro sia trascurabile; se si volesse tenerne conto si potrebbe valutare la corrente nella resistenza incognita come  $I - V/R_V$ , essendo  $R_V$  la resistenza interna del voltmetro ma nella gran parte dei casi la correzione sarebbe molto minore della sensibilità dell’amperometro.

Si osservi che per ottenere indicazioni preliminari sul valore di una resistenza incognita può essere usato un singolo multimetro posto su scale ohm-metriche. In tal caso, all’interno del multimetro, una pila e una resistenza calibrata  $R_C$ , dipendente dalla scala scelta, vengono collegate in serie tra i morsetti dello strumento; quando la resistenza incognita viene collegata ai morsetti, il multimetro misura la corrente  $I$  e la converte in una misura di resistenza sulla base della relazione

$$R = \frac{\mathcal{E}}{I} - R_C - R_i \quad (1.25)$$

dove  $\mathcal{E}$  ed  $R_i$  si riferiscono alla pila interna al multimetro. Ma se la resistenza  $R$  da misurare non è ben maggiore di  $R_i$ , il multimetro usato come ohmetro risulta ovviamente non accurato, come anche discusso nel precedente paragrafo 1.3.2, alle pagg. 30-31. In tal caso le “misure” di resistenza eseguite direttamente con normali multimetri devono essere considerate alla stregua di indicazioni puramente preliminari, essendo il metodo voltamperometrico di gran lunga più accurato.

Ovviamente un'unica misura di una coppia di valori  $(I, V)$  fornisce anch'essa un valore solamente indicativo di  $R$ : il modo adeguato di operare consiste nel raccogliere svariate coppie di valori  $(I_i, V_i)$  e costruire una curva tensione-corrente per la resistenza in esame. Verificatane l'ohmicità si deduce quindi il valore dalla pendenza della retta ottenuta come regressione lineare sui dati sperimentali (Fig. 1.30).

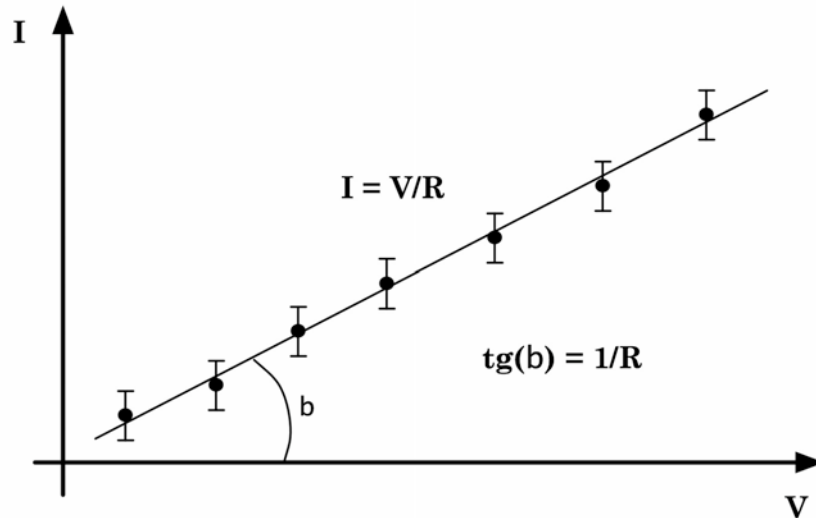


Fig. 1.30

### 1.6.2 \_ Il metodo del “Ponte di Wheatstone”

Lo schema operativo del ponte di Wheatstone è mostrato in Fig. 1.31.

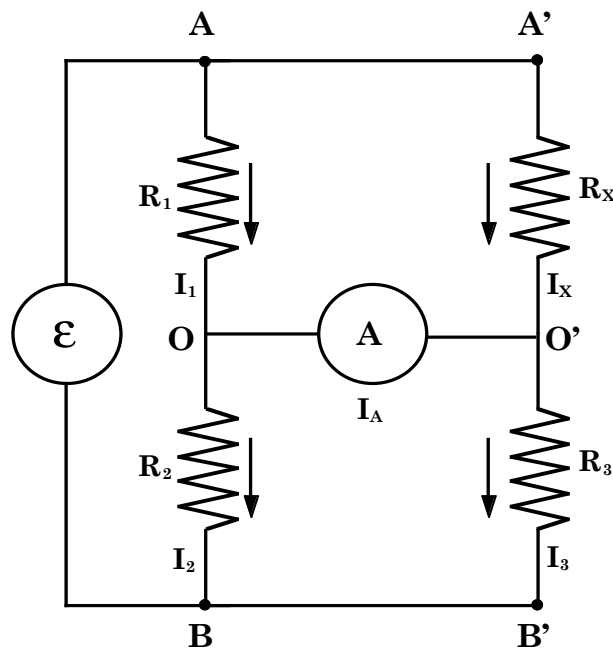


Fig. 1.31

Per trovare il valore della resistenza incognita  $R_X$  si regolano le resistenze  $R_1, R_2, R_3$  sino ad azzerare la corrente  $I_A$  nell'amperometro A. Si dice allora che il ponte è "equilibrato". Se  $I_A = 0$  dalla prima regola di Kirchhoff si ha,

$$I_X = I_3 \quad , \quad \text{ed} \quad I_1 = I_2$$

e per la legge di Ohm,

$$\mathcal{E} = I_1(R_1 + R_2) = I_X(R_X + R_3)$$

dove  $\mathcal{E}$  indica il valore della forza elettromotrice che alimenta il ponte.

Applicando la seconda regola di Kirchhoff alla maglia AOO'A' e alla maglia OBB'O' si avrà, poiché  $I_A$  è nulla,

$$R_1 \cdot I_1 = I_X \cdot R_X$$

$$R_2 \cdot I_2 = I_3 \cdot R_3$$

da cui, dividendo membro a membro e ricordando che è  $I_1 = I_2$  ;  $I_3 = I_X$ , si ricava:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_X}{R_3} \quad , \quad \text{da cui infine:} \quad R_X = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} \quad (1.26)$$

È dunque chiaro che l'incertezza associabile alla misura di  $R_X$  dipende sia dalla sensibilità dell'amperometro utilizzato che dall'incertezza associata alla conoscenza di  $R_1, R_2$  ed  $R_3$ . Bisognerà inoltre evitare, in fase di misura, il riscaldamento delle resistenze che ne altererebbe il valore.

Un accorgimento che garantisce precisione e rapidità nell'ottenimento dell'equilibramento del ponte di Wheatstone consiste nel fare in modo che il rapporto  $R_1/R_2$ , che all'equilibrio deve coincidere con  $R_X/R_3$ , non sia troppo diverso dall'unità. Così infatti si riducono le incertezze relative su ogni valore di  $R_1, R_2$  ed  $R_3$  dovute ad esempio alle resistenze dei fili di connessione e dei contatti presenti nel circuito a ponte. Ciò si ottiene con un'opportuna scelta di  $R_3$ : quanto più  $R_3$  approssima  $R_X$  tanto meglio è garantita la condizione di cui sopra. Ciò richiede ovviamente di disporre di un'ampia scelta di resistenze calibrate da usarsi come  $R_3$ .

Sulla natura della forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  non è stato necessario porre alcuna limitazione. Essa può essere quindi di qualsiasi natura (continua, alternata sinusoidale, di forma qualunque) purché le resistenze presentino, al passaggio di quel segnale in corrente, sempre lo stesso valore, e non entrino apprezzabilmente in gioco gli effetti dell'induttanza  $L^*$  e della capacità  $C^*$  parassite, associate alla resistenza stessa. Infatti, a rigore, ogni elemento indicato con  $R_1, R_2, R_3, R_X$ , dovrebbe essere rappresentato come mostrato in Fig. 1.32.

Una resistenza reale corrisponde quindi all'insieme d'un elemento resistivo puro  $R$ , di uno induttivo  $L^*$  in serie ad  $R$ , e uno capacitivo  $C^*$  in parallelo ad entrambi (par. 2.8).

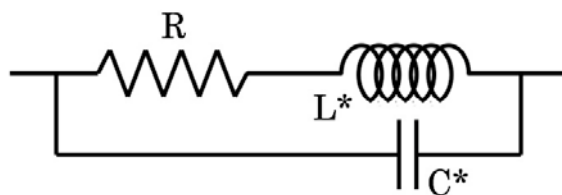


Fig. 1.32

Questo fatto, come si vedrà in seguito, permette di sfruttare la configurazione a ponte per ottenere anche raffinate misure di capacità, tramite il ponte di Sauty (par. 2.6.2).

### 1.6.3 \_ Conseguenze delle regole di Kirkhhoof

Come conseguenza della linearità delle regole di Kirkhhoof si hanno le seguenti ulteriori regole di cui si tralascia la dimostrazione.

- a) **Regola di sovrapposizione:** la corrente che scorre in ogni ramo di una rete è data dalla sovrapposizione delle correnti che ciascun generatore produrrebbe da solo in quel ramo.
- b) **Regola di reciprocità:** se un generatore posto in un dato ramo produce una certa corrente in un altro ramo, allora lo stesso generatore, posto nel secondo ramo, produrrà la stessa corrente nel ramo precedente.

Le regole indicate permettono sostanzialmente di risolvere qualsiasi rete, anche se talvolta con calcoli piuttosto complicati, in relazione alla complessità della rete stessa.

A questo proposito vi sono due ulteriori regole che permettono in alcuni casi di semplificare i calcoli.

- c) **Regola di Thevenin:** data una rete comunque complessa, ai soli fini di una utilizzazione al suo esterno a partire da due suoi punti A e B, essa equivale ad un generatore di tensione  $V_0$  in serie ad una resistenza  $R_0$ , dove  $V_0 = V_A - V_B$ , cioè  $V_0$  è la d.d.p. tra i punti A e B quando all'esterno della rete il circuito è aperto e si ha  $R_0 = V_0 / I_0$ , con  $I_0$  pari alla corrente che si avrebbe all'esterno del circuito con una connessione di corto circuito ( $R = 0$ ) tra A e B.
- d) **Regola di Norton:** data una rete comunque complessa, ai soli fini di una utilizzazione al suo esterno a partire da due suoi punti A e B, essa equivale ad un generatore di corrente  $I_0$  in parallelo alla resistenza  $R_0$ , dove  $I_0 R_0 = V_0$ , con  $V_0$  la d.d.p. del circuito equivalente alla Thevenin.

## Esercitazione 2: Verifica delle regole di Kirkhhoof

Con questa esercitazione si vogliono sottoporre a verifica le leggi di Kirkhhoof per le tensioni e le correnti su un certo insieme di circuiti, costituiti sostanzialmente da maglie più o meno complesse di elementi resistivi e generatori.

La strumentazione in uso sarà quindi costituita da generatori di tensione/corrente, cavi di connessione con relativi spinotti e coccodrilli, resistenze (note o incognite), tester.

Disponendo preliminarmente dei valori di f.e.m. erogata e delle resistenze in gioco, è importante dedurre i valori di tensione e corrente che caratterizzano rispettivamente i rami e i nodi del circuito risolvendo le opportune equazioni: si tratta di un utile esercizio di algebra lineare! Successivamente si passerà alla verifica sperimentale.

A tal proposito è importante ricordare che:

- percorrendo una maglia con i puntali del tester, misurando sia tensioni che correnti, è bene non invertire mai l'ordine dei puntali stessi;
- bisogna sempre tener conto di ogni eventuale cambio di fondo-scala effettuato sul tester;
- bisogna tener conto dell'influenza del tester stesso sul circuito (come resistenza aggiuntiva in parallelo o in serie a seconda che lo si utilizzi come voltmetro o amperometro);
- è bene misurare le cadute di potenziale anche ai capi dei fili di connessione, a patto di disporre di un tester di adeguata sensibilità;
- bisogna verificare la stabilità e la bontà dei contatti;
- non bisogna superare le potenze massime assorbibili da ogni elemento del circuito, pena il loro danneggiamento irreversibile.

Spesso si vogliono poter assegnare valori specifici di tensione a punti diversi di un circuito, senza dover ricorrere ad altrettanti diversi generatori. In tal caso è sufficiente disporre di un generatore che eroghi una f.e.m. superiore al massimo valore di tensione richiesto per il circuito in questione e ricorrere ad un'opportuna combinazione di resistenze in serie, detta **partitore di tensione**, per ottenere i valori desiderati.

a) In Fig. 1.33.a è riportato un esempio di partitore di tensione.

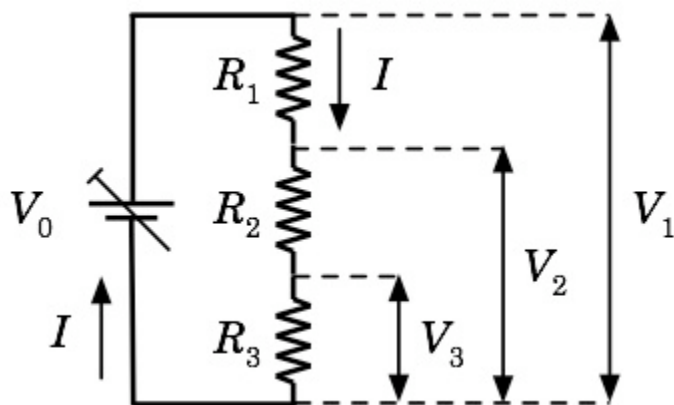


Fig. 1.33.a

Lo si realizzi praticamente e si misurino direttamente i valori di tensione  $V_1, V_2, V_3, \Delta V_1 = V_1 - V_2, \Delta V_2 = V_2 - V_3, \Delta V_3 = V_3$ , per diverse combinazioni di valori di  $V_0 = \text{f.e.m.}, R_1, R_2$  ed  $R_3$ .

Si confrontino i valori misurati con quelli calcolati sulla base dei valori di  $R_1, R_2$  ed  $R_3$  noti tramite il codice cromatico e/o perché precedentemente misurati ad esempio con metodo voltamperometrico; nel primo caso si verifichi il rispetto o meno delle tolleranze dichiarate.

Una volta misurata la corrente  $I$  si verifichino anche le relazioni:

$$V_1 = I(R_1 + R_2 + R_3) = IR_1 + IR_2 + IR_3 = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3$$

$$V_2 = \Delta V_2 + \Delta V_3$$

$$\Delta V_1 = IR_1 = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3} R_1$$

$$\Delta V_2 = IR_2 = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3} R_2$$

$$\Delta V_3 = V_3 = IR_3 = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3} R_3$$

$$V_2 = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3} (R_2 + R_3)$$

tenendo sempre conto dell'influenza del tester, dei cavi di connessione, dell'incertezza sui valori misurati di  $R_1, R_2$  ed  $R_3$  (o delle tolleranze, se si utilizzano i valori di resistenza dichiarati in base al codice cromatico).

b) Similmente a quanto visto per le tensioni, ricorrendo a un'opportuna disposizione di resistenze in parallelo si può ottenere una partizione di correnti. Si consideri ad esempio il circuito di Fig. 1.33.b

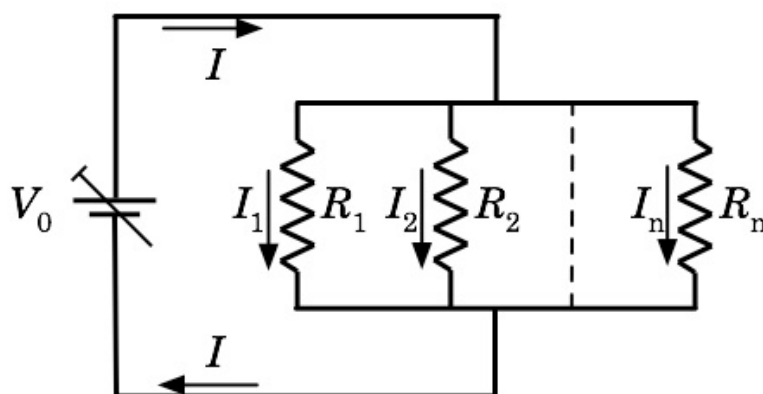


Fig. 1.33.b

Per la corrente totale  $I$  che scorre nel circuito si ha:

$$I = \frac{V}{R_{eq}}, \text{ con } R_{eq} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \right)^{-1}, \text{ da cui } V = IR_{eq}.$$

Detta  $I_j$  la corrente che scorre nella resistenza  $R_j$  del circuito, si ha dunque:

$$I_j = \frac{V}{R_j} = \frac{IR_{eq}}{R_j} = I \frac{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \right)^{-1}}{R_j}$$

Scegliendo quindi opportunamente i valori delle resistenze  $R_j$ , si può ottenere qualsiasi valore di corrente purché inferiore ad  $I$ .

Osservando quanto ottenuto ora per le correnti e nell'esempio precedente per le tensioni, si vede che moltiplicando i valori di ogni resistenza per uno stesso fattore non si modificano né la partizione della tensione né quella della corrente; si influisce invece sull'assorbimento di potenza da parte delle resistenze presenti nei partitori.

c) Come terzo esempio si considerino i circuiti nelle figure seguenti:

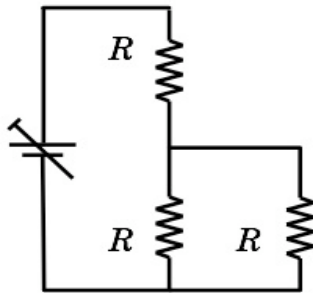


Fig. 1.34.a

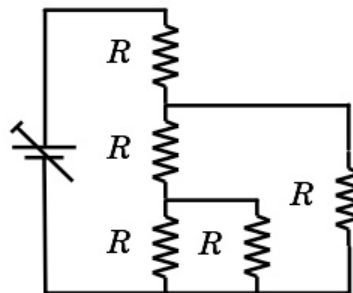


Fig. 1.34.b

È interessante studiare questi circuiti anche dal punto di vista delle loro resistenze equivalenti. Dette queste rispettivamente  $R_{2eq}$  ed  $R_{3eq}$ , si verifichi che:

$$R_{2eq} = \frac{3}{2} R ; \quad R_{3eq} = \frac{8}{5} R$$

Si dimostri inoltre che se si conosce  $R_{(n)eq}$ , allora:  $R_{(n+1)eq} = \frac{R^2 + 2RR_{(n)eq}}{R + R_{(n)eq}}$ .

Si calcoli anche il valore limite  $R_{(\infty)eq}$ .

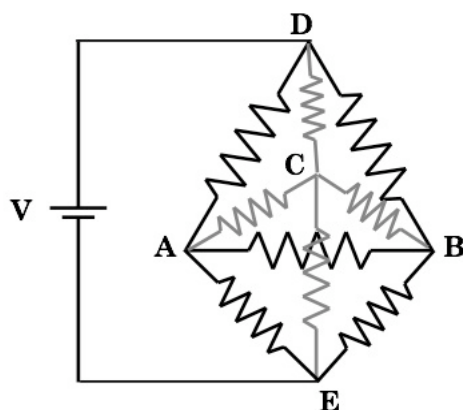
Mediante l'uso di tester si verifichino altresì le leggi di Kirchhoff per entrambi i circuiti delle figure 1.34.a e 1.34.b. Sfruttando il metodo volt-amperometrico, si misurino singolarmente gli effettivi valori di tutte le resistenze in gioco e si misurino direttamente anche  $R_{2eq}$  ed  $R_{3eq}$ , confrontandone quindi i valori misurati con quelli deducibili sostituendo nelle formule teoriche gli effettivi valori misurati di ogni singola



resistenza, o i valori desumibili dal codice cromatico. Si tenga sempre opportunamente conto delle incertezze in gioco.

Si valuti se esiste un valore di  $n$  oltre il quale, a causa delle incertezze sperimentali, le misure non sono più in grado di distinguere senza ambiguità tra  $R_{(n)eq}$  ed  $R_{(n+1)eq}$ .

d) Come quarto esempio si consideri il circuito tetraedrico in figura, in cui tutte e nove le resistenze hanno lo stesso valore  $R$ .



Si calcolino e quindi si misurino i valori delle tensioni nei punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$ .

Si calcolino e si misurino anche le correnti nei rami,  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$ ,  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ ,  $AE$ ,  $BE$ ,  $CE$ .

Si valuti la resistenza equivalente fra i punti  $D$  ed  $E$  e la si confronti col valore misurato.

In tutte le operazioni si tenga sempre conto delle incertezze sperimentali.

Fig. 1.35

Si consideri anche un circuito con 12 resistenze uguali sistemate come i lati di un cubo e si valuti la resistenza equivalente fra due spigoli di una qualunque delle diagonali del cubo. Si verifichi quindi sperimentalmente il risultato conseguito.

Per affrontare e risolvere questo tipo di problemi è utile considerare le particolari simmetrie dei sistemi in esame!

e) Come ulteriore esempio si consideri il circuito rappresentato nella figura seguente, che contiene più sorgenti di f.e.m..

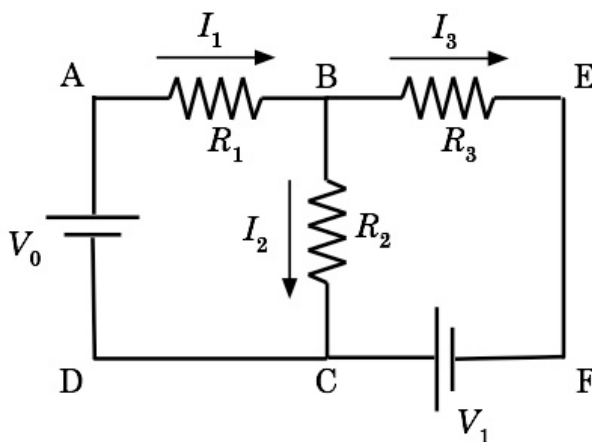


Fig. 1.36

Il lavoro fatto per spostare una carica lungo la maglia ABCDA equivale all'energia ceduta dal generatore, quindi la somma delle tensioni relative ad ogni ramo AB, BC, CD, DA, uguaglia la tensione ai capi del generatore. Dalla legge di Ohm:  $\Delta V_{AB} = I_1 R_1$ ,  $\Delta V_{BC} = I_2 R_2$ , per cui  $V_0 = I_1 R_1 + I_2 R_2$ .

Considerazioni analoghe valgono per le due maglie restanti: BEFCB e ABEFCDA.

Si osservi ancora che la carica che entra nel nodo B durante l'arco di tempo  $\Delta t$  è la somma delle cariche provenienti dai tre rami AB, BC e BE e deve essere nulla in virtù della conservazione della carica totale e in quanto non v'è modo di accumularla nel nodo, quindi:  $\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 = 0$ .

Dividendo tutto per  $\Delta t$  si ottiene:  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$  (la convenzione di segno mostrata in figura indica  $I_1$  entrante nel nodo,  $I_2$  e  $I_3$  uscenti).

Note le tensioni dei generatori si calcolino le correnti:

$$\begin{array}{ll} V_0 = I_1 R_1 + I_2 R_2 & \text{maglia ABCDA} \\ V_1 = I_3 R_3 - I_2 R_2 & \text{maglia BEFCB} \\ V_0 + V_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3 & \text{maglia ABEFCDA} \\ I_1 = I_2 + I_3 & \text{nodo B} \\ I_2 + I_3 = I_1 & \text{nodo C} \end{array}$$

Si hanno tre maglie e due nodi in totale per cui si possono scrivere cinque equazioni; ma vi sono soltanto tre variabili indipendenti, quindi tre equazioni linearmente indipendenti che possono essere scritte in forma matriciale come:

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con soluzione:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{R_3(R_1 + R_2) + R_1 R_2} \begin{pmatrix} (R_3 + R_2)V_0 + R_2 V_1 \\ R_3 V_0 - R_1 V_1 \\ R_2 V_0 + V_1(R_1 + R_2) \end{pmatrix}$$

Si è ipotizzato che i generatori siano ideali, privi cioè di resistenza interna (come si modificherebbero le equazioni se si tenesse conto anche di ciò?).

Supponendo d'aver preventivamente misurato sia i valori delle resistenze che le f.e.m. dei generatori utilizzati, si misurino sul circuito, con un tester, le grandezze calcolate in base alle regole di Kirchhoff e si confrontino i valori sperimentali con quelli teorici, tenendo conto sia delle incertezze sperimentali che dell'eventuale influenza del tester.

Si cerchi di valutare anche il contributo dovuto alla potenza ceduta per effetto Joule e la sua influenza sui risultati finali.

## Esperienza 1: Misura della resistività e del coefficiente termico per la resistività di un filo conduttore

Scopo di questa esperienza è verificare se la resistività elettrica  $\rho$  di un conduttore metallico segue con buona approssimazione la legge fenomenologica (1.17)  $\rho = \rho_{20}[1 + \alpha \cdot (\theta - 20)]$ , per temperature  $\theta$  comprese nell'intervallo  $0^\circ C \leq \theta \leq 100^\circ C$ .

A tale scopo conviene scegliere un conduttore di forma opportuna, per il quale sia facile esprimere la resistenza elettrica  $R$  in funzione degli altri parametri che lo caratterizzano.

Si utilizzi un filo di rame smaltato con vernice isolante, di lunghezza  $l$  e sezione retta di forma circolare e diametro  $D$  (a meno dello spessore della smaltatura). Detta  $S = \pi(D/2)^2$  l'area di tale sezione retta, la resistenza  $R$  del filo può essere scritta come:

$$R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{4l}{\pi D^2} \quad , \quad \text{da cui:} \quad \rho = \frac{\pi D^2 R}{4 l}$$

$\rho$  risulta quindi espressa in funzione di quantità misurabili.

Il filo sarà poi inserito, come elemento resistivo, in una maglia contenente un generatore di tensione e un amperometro. Ponendo un voltmetro in parallelo ai capi del filo e agendo sul generatore si potranno effettuare delle misure voltamperometriche allo scopo di costruire la curva tensione-corrente  $I-V$  del filo e dedurne di conseguenza la resistenza. Ciò dovrà però essere fatto in condizioni di valori di temperatura  $\theta$  noti, costanti e uniformi per l'intero filo durante ogni set di misure per la costruzione delle curve tensione-corrente  $I-V$ .

Per rendere più agevole ed efficace l'uniforme termostatazione dell'intero filo conviene avvolgerlo a formare una bobina di dimensioni sufficientemente ridotte da poter essere completamente immersa in un bagno termico. Sarà opportuno inoltre evitare di sovrapporre l'uno all'altro strati successivi di spire di filo, in quanto in tal modo le spire più interne risulterebbero parzialmente isolate dal bagno termico. D'altronde potrebbe essere utile evitare effetti induttivi (ciò nel caso si utilizzasse corrente alternata a bassa frequenza) costruendo la bobina in modo che ogni sua spira percorsa da corrente in un senso, sia il più adiacente possibile ad un'altra sua spira percorsa dalla corrente in senso opposto (paragrafo 2.8). Bisogna prestare attenzione, nel manipolare il filo e nell'avvolgerlo, a non danneggiarne la smaltatura isolante, infatti la conseguenza potrebbe essere la presenza di cortocircuiti che introdurrebbero un errore sistematico che si rifletterebbe sul dato della lunghezza  $l$  del filo stesso.

Anche la misura del diametro effettivo  $D$  richiede una certa cura in quanto bisogna prescindere dallo spessore dello strato isolante (un modo potrebbe essere quello di eliminarlo bruciandolo con l'aiuto di un fiammifero e asportandone poi con cura i residui combusti, onde lasciare libero un tratto di filo di rame nudo ma geometricamente e dimensionalmente indenne).

Alternativamente si potrebbe usare filo non smaltato ma bisognerebbe prestare un'attenzione assoluta nell'evitare cortocircuiti o conduzioni spurie all'interno del liquido di termostatazione.

Il diametro del filo potrà quindi essere misurato con un calibro Palmer cinquantalesimale.

Si veda dunque l'elenco del materiale necessario ad eseguire l'esperienza:

- alcuni metri di filo conduttore a sezione circolare e diametro costante
- un generatore a bassa tensione, regolabile
- un voltmetro e un amperometro
- un calorimetro
- un termometro
- cavi di rame e morsetti per i collegamenti elettrici
- un calibro Palmer
- un metro a nastro
- un tubicino in plastica a sezione circolare

Si proceda quindi realizzando la bobina, eventualmente anti-induttiva, col filo di rame a disposizione e aiutandosi col tubicino in plastica. Si metta a nudo il metallo dei due estremi liberi del filo della bobina onde permettere la connessione al resto del circuito di misura. Si tenga conto del punto/zona di contatto di tali capi di filo col resto del circuito onde evitare errori sistematici sull'effettivo valore della lunghezza  $l$  del filo.

A questo punto si immerga la bobina nel bagno termico e si attenda un tempo sufficiente alla sua termostatazione (come può essere controllata l'avvenuta termostatazione basandosi su misure voltamperometriche?).

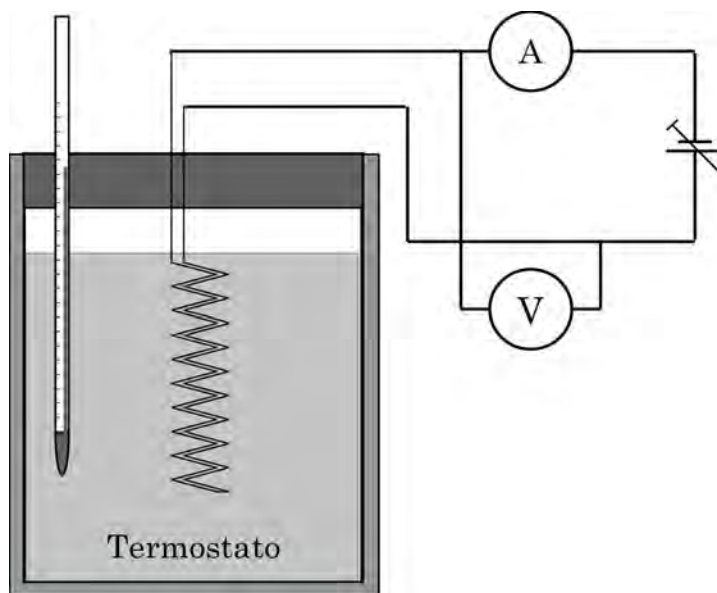


Fig. 1.37 Schema della disposizione di misura

Si effettuino le misure necessarie a costruire una curva  $I$ - $V$  mantenendo opportunamente sotto controllo le modificazioni termiche che potrebbero insorgere anche per effetto Joule e tenendo anche conto delle posizioni in cui è attuata la contattazione con il voltmetro.

Si iteri dunque la sequenza con nuovi bagni termici a temperature diverse.

Si dispone a questo punto di un certo numero di coppie di valori tensione-corrente  $[V_{\theta_i,j} \pm \Delta(V_{\theta_i,j}); I_{\theta_i,j} \pm \Delta(I_{\theta_i,j})]$ , con le relative incertezze strumentali associate, corrispondente ognuno a un diverso e misurato valore  $\theta_i \pm \Delta(\theta_i)$  di temperatura. L'indice  $j$  corre sulle diverse misure per ogni singola curva  $I-V$ .

Effettuando, per queste coppie di valori delle regressioni lineari pesate con una funzione del tipo  $I(V) = I(0) + \sigma(\theta_i)V$ , si ottiene quanto ad esempio mostrato per due diversi valori della temperatura in Fig. 1.38 per un particolare caso concreto in cui:  $l = 10.00 \pm 0.01$  m,  $D = (2.5 \pm 0.1) \cdot 10^{-4}$  m.

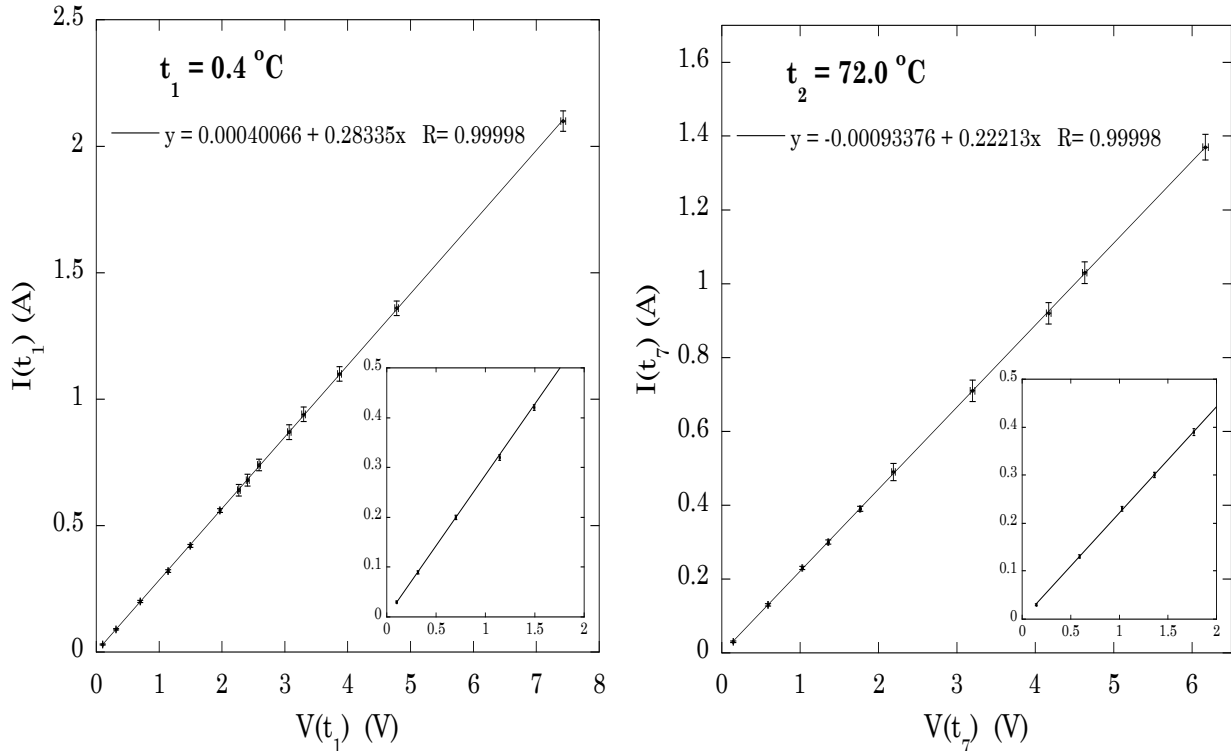


Fig. 1.38 \_ Le incertezze indicate sono quelle strumentali divise per  $\sqrt{3}$

Supponendo la completa ohmicità della bobina di filo in esame si ha:  $R(\theta_i) = 1/\sigma(\theta_i)$ , con  $R(\theta_i)$  resistenza del filo alla temperatura  $\theta_i$ . L'incertezza sul valore di  $R(\theta_i)$  è dunque:

$$\delta R(\theta_i) = \left[ \frac{\delta \sigma(\theta_i)}{\sigma(\theta_i)} \right] R(\theta_i) = \delta \sigma(\theta_i) / \sigma^2(\theta_i)$$

In tabella sono riportati i valori di  $R(\theta_i)$  per sette valori di temperatura:

$\theta$ °C	$\delta\theta$ °C	$R$ ( $\Omega$ )	$\delta R$ ( $\Omega$ )
0.04	0.01	3.53	0.06
12.0	0.1	3.73	0.08
20.5	0.1	3.77	0.08
22.8	0.2	3.85	0.13
39.0	0.2	4.03	0.14
59.4	0.3	4.35	0.12
72.0	0.4	4.50	0.13

Si possono quindi ora calcolare i corrispondenti valori di  $\rho(\theta_i)$  e dell'incertezza  $\delta\rho(\theta_i) = \left[ \left( \frac{2\Delta D}{D\sqrt{3}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta l}{l\sqrt{3}} \right)^2 + \left( \frac{\delta R}{R} \right)^2 \right]^{1/2} \frac{\pi D^2 R}{4l}$  associata ad ognuno di essi, sostituendo quanto trovato per  $R(\theta_i)$  e sommando in quadratura, data la mutua indipendenza dei vari termini:

$\theta$ °C	$\delta\theta$ °C	$\rho(\theta_i)$ ( $\Omega \cdot m$ )	$\delta\rho(\theta_i)$ ( $\Omega \cdot m$ )
0.04	0.01	$1.732 \cdot 10^{-8}$	$8.51 \cdot 10^{-10}$
12.0	0.1	$1.831 \cdot 10^{-8}$	$9.32 \cdot 10^{-10}$
20.5	0.1	$1.851 \cdot 10^{-8}$	$9.40 \cdot 10^{-10}$
22.8	0.2	$1.889 \cdot 10^{-8}$	$10.80 \cdot 10^{-10}$
39.0	0.2	$1.989 \cdot 10^{-8}$	$11.48 \cdot 10^{-10}$
59.4	0.3	$2.133 \cdot 10^{-8}$	$11.45 \cdot 10^{-10}$
72.0	0.4	$2.210 \cdot 10^{-8}$	$12.02 \cdot 10^{-10}$

Si dispone ora di un set di dati costituito dalle corrispondenti coppie di valori  $[\theta_i, \rho(\theta_i)]$  con le relative incertezze associate, utilizzabili per verificare il grado di attendibilità della relazione (1.17).

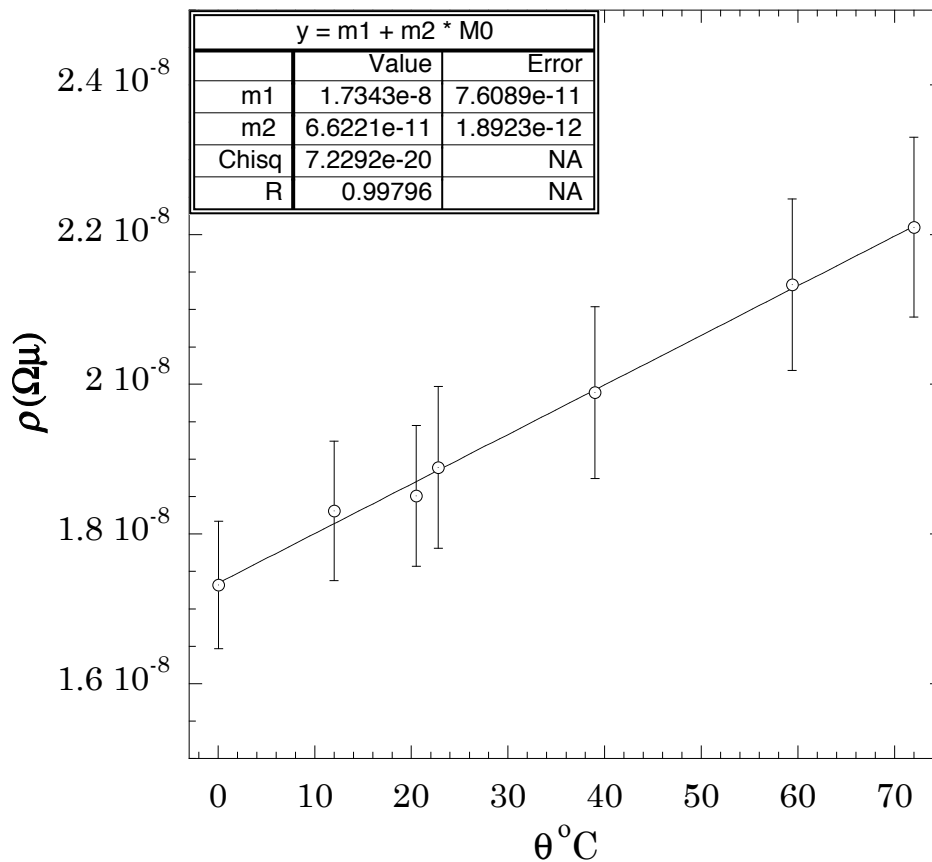


Fig. 1.39

Effettuando una regressione lineare pesata su tali valori si ottiene:

$$\rho_{20} = 1.73 \cdot 10^{-8} \pm 0.08 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

$$\alpha = 3.8 \cdot 10^{-3} \pm 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Entro una deviazione standard, entrambi i risultati sperimentali sono in accordo con i risultati accettati per il rame:

$$\rho_{20} = 1.67 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

$$\alpha = 4.2 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

L'incertezza associata alla resistività permette inoltre di identificarla univocamente, entro una deviazione standard, rispetto a quelle di altri materiali; così non è per il coefficiente  $\alpha$  che è stato determinato con un'incertezza relativa non trascurabile:  $\delta\alpha/\alpha = 0.34$ .

Suggerimenti:

- 1) Estrapolare alla temperatura dell'azoto liquido in ebollizione a una atmosfera di pressione ( $\theta \cong -199 \text{ } ^\circ\text{C}$ ), confrontare con l'eventuale curva  $I$ - $V$  ottenuta a tale temperatura e trarne le conseguenze.
- 2) Discutere l'utilità di considerare il punto (0,0) come appartenente ad ogni curva  $I$ - $V$ , anche per valutare la presenza di eventuali sistematicità.
- 3) Tener conto anche del contributo sistematico dovuto alla variazione di  $l$  e  $D$  con la temperatura [ $x(\theta \pm \delta\theta) \cong x(\theta)(1 \pm \lambda \cdot \delta\theta)$ , con  $\lambda$  coefficiente di dilatazione termica lineare] e discuterne le conseguenze.
- 4) Indicare su quali termini bisognerebbe agire e come, per migliorare sensibilmente la misura ( $D$ ,  $R$  ...).

## Esperienza 2: Misura della curva caratteristica di una lampadina a incandescenza

La legge di Ohm è un caso particolare di caratteristica tensione-corrente, ovvero della relazione che intercorre fra la tensione ai capi di un certo componente elettrico e la corrente che contemporaneamente scorre in esso. Come vedremo, una lampadina a incandescenza, nel suo normale regime di funzionamento, non obbedisce alla legge di Ohm.

Ci si propone quindi di misurare la caratteristica tensione-corrente per una lampadina a incandescenza a bassa tensione, analizzando poi entro quali limiti essa segua la legge di Ohm.

Dalla caratteristica tensione-corrente si dedurranno quindi anche la *resistenza equivalente* e la *resistenza dinamica* della lampadina a incandescenza.

### Materiale occorrente:

- una lampadina ad incandescenza a bassa tensione
- un portalampada
- una scatola rigida a tenuta di luce
- un fotodiodo con segnale amplificato (Appendice 3)
- nastro adesivo nero opaco
- un generatore c.c. a bassa tensione regolabile
- due voltmetri
- un amperometro
- filo di rame e morsetti per i collegamenti elettrici

### Montaggio dell'esperienza:

Si realizzi il circuito mostrato in figura:

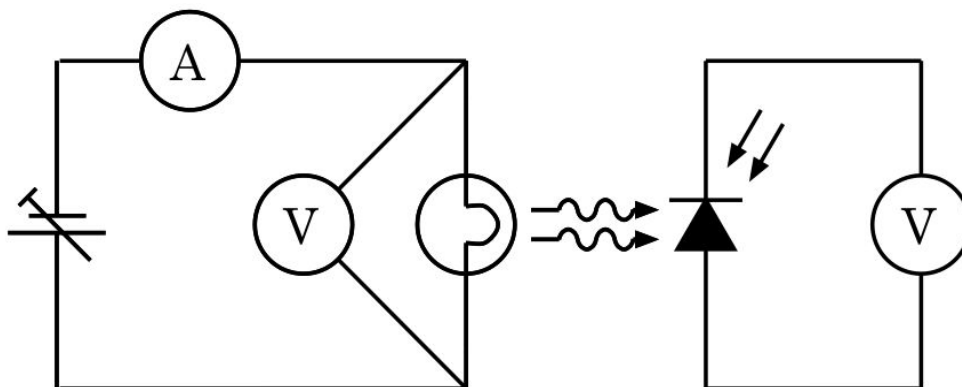


Fig. 1.40



### Esecuzione della misura:

La curva caratteristica tensione-corrente per una resistenza che obbedisca alla legge di Ohm ha l'andamento mostrato in Fig 1.41.

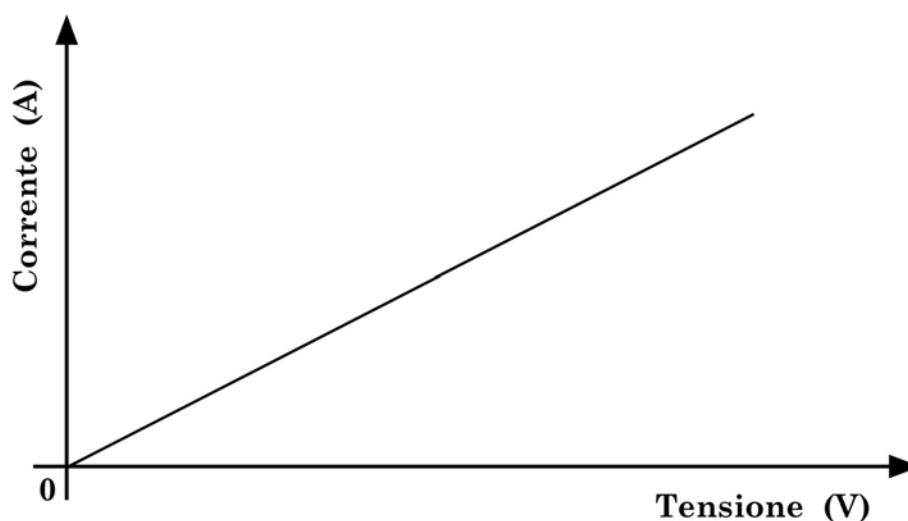


Fig. 1.41

Per caratterizzare la lampadina bisogna dunque costruire la sua curva tensione-corrente, bisogna cioè misurare la corrente che la attraversa in funzione della tensione applicata ai suoi terminali.

Siccome oltretutto la lampadina è un oggetto atto ad emettere luce, può essere interessante studiare come la curva caratteristica tensione-corrente dipenda dalla quantità di luce emessa dalla lampadina (la luce emessa è chiaramente funzione dell'energia rilasciata nel filamento della lampadina dalla corrente elettrica che l'attraversa, oltre che della composizione, forma e dimensioni del filamento e del suo potere emissivo).

Si monti quindi il fotodiode su un lato aperto della scatola a tenuta di luce, entro la quale sarà stata sistemata la lampadina alloggiata sul portalampada, e con il nastro adesivo nero si fissi tutto avendo cura di oscurare in modo che il fotodiode non possa vedere altra luce che quella eventualmente prodotta dalla lampadina.

A questo punto si legga l'uscita in corrente (tensione) del fotodiode che corrisponderà al suo segnale in assenza di luce.

Si proceda quindi ad alimentare con tensioni via via crescenti la lampadina, effettuando di volta in volta la lettura della sua tensione di alimentazione, della corrente che l'attraversa e del segnale in corrente (tensione) corrispondentemente fornito dal fotodiode.

Prima di procedere è bene avere già un'idea di massima della progressione con cui fornire gli incrementi di tensione, e ciò può essere dedotto dalla conoscenza della tensione operativa per la lampadina, fornita dal costruttore, e dalla conoscenza della tensione di bruciamento della lampadina.

Il secondo dato può chiaramente essere ottenuto solo in modo distruttivo, dopodiché la lampadina in questione non è più utilizzabile. Conviene

quindi supporre che le lampadine fornite dal costruttore come equivalenti, si somiglino effettivamente al punto da avere circa lo stesso valore di tensione di bruciamento, sacrificare dunque alcune lampadine per valutarne la tensione di bruciamento e considerare il valore medio che così se ne deduce per quel tipo di lampadine, ai fini di una predeterminazione del numero e dell'entità degli incrementi di tensione da apportare per l'effettuazione della misura.

Ovviamente l'indicazione sul numero minimo di punti sperimentali necessari ad una adeguata caratterizzazione della lampadina verrà in prima istanza da un confronto fra considerazioni statistiche e risoluzioni degli strumenti di misura, unitamente all'andamento che si comincia ad individuare per la curva  $I(V)$ , man mano che si raccolgono i dati.

Una accortezza da mantenere è quella di procedere all'inizio con incrementi di tensione minimi, compatibili con i minori valori possibili fornibili dall'alimentatore, tenendo nel contempo sotto stretto controllo la risposta sia in  $V$  che in  $I$  del fotodiodo. Ciò allo scopo di evidenziare l'eventuale dipendenza della curva caratteristica tensione-corrente dalla graduale accensione della lampadina. Non appena si nota che la risposta del fotodiodo comincia a saturare, questo va spento e fisicamente sconnesso dalla lampadina, assieme alla scatoletta a tenuta di luce. Il calore prodotto e la grande intensità luminosa potrebbero, infatti, danneggiare il fotodiodo.

Da qui in poi si può quindi procedere con successivi incrementi di tensione secondo quanto predeterminato in base alle considerazioni suggerite dalla conoscenza del valor medio della tensione di bruciamento.

È bene che la lampadina utilizzata per la misura della caratteristica tensione-corrente non venga sottoposta ad incrementi e successivi decrementi di tensione, soprattutto quando la tensione raggiunta è prossima o superiore a quella operativa consigliata dal costruttore: la sua struttura potrebbe infatti subire modificazioni tali che la curva caratteristica ne risulterebbe irreversibilmente alterata rispetto a quanto si otterrebbe con una progressione unica di tensione da zero Volt al valore di bruciamento.

Un'ulteriore accortezza da utilizzare, specie quando le tensioni applicate sono maggiori di quella operativa, è di procedere con una certa solerzia alle misure impiegando possibilmente tempi comparabili per ogni incremento di tensione; al crescere della temperatura del filamento infatti, quest'ultimo comincia ad evaporare e quindi modifica col tempo la sua forma e dimensioni, nonché le sue caratteristiche resistive.

Come si spiega l'annerimento della superficie interna del vetro di lampadine vecchie? Perché esso è presente in particolare in certe zone della superficie interna dell'ampolla?

Potrebbe avere senso effettuare un controllo della temperatura della lampadina (o del suo filamento) in funzione delle diverse tensioni applicate? Come lo si potrebbe attuare?

### Analisi dei dati raccolti:

I dati raccolti costituiranno una tabella a quattro colonne relative rispettivamente ai valori di tensione  $V$  e corrente  $I$  letti sul circuito con la lampadina, e ai valori di corrente (tensione) corrispondentemente letti dal fotodiodo (finché questo è utilizzato).

Riportando in un grafico le coppie di valori  $(V,I)$  per la lampadina esaminata se ne ottiene la caratteristica tensione-corrente. In Fig. 1.42 è riportato un tipico esempio, evidenziando la zona a più bassa tensione.

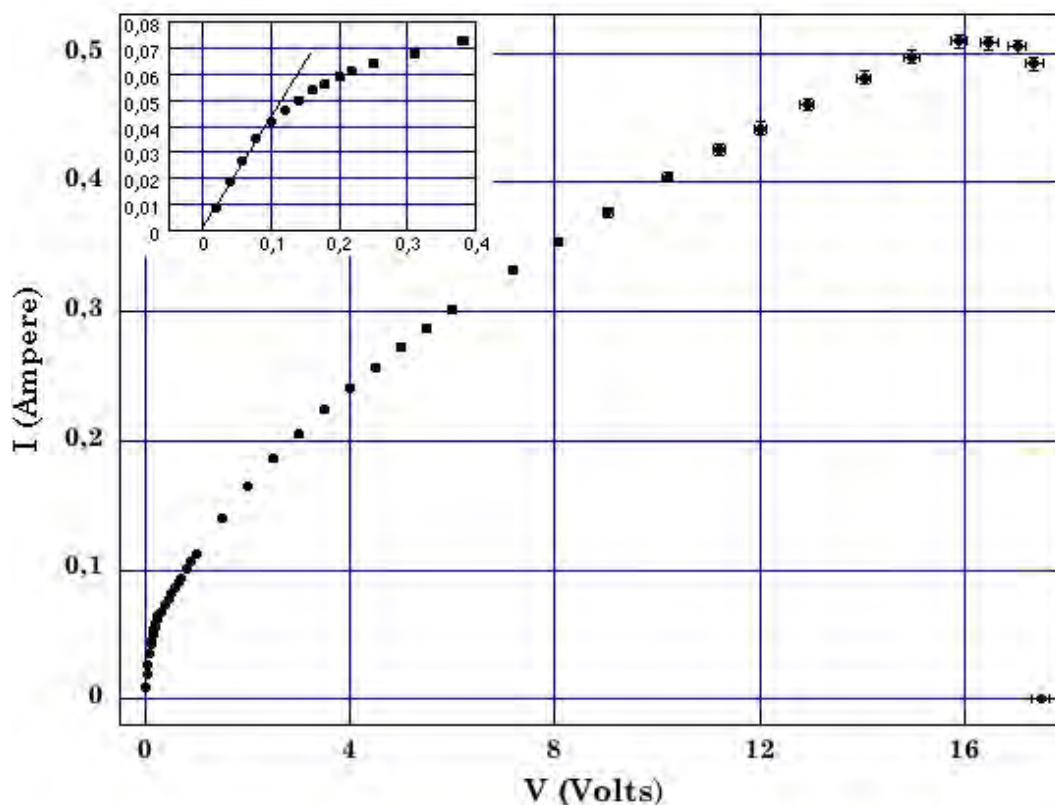


Fig. 1.42

La si studi e si provi a individuare l'eventuale presenza di zone a diverso regime di funzionamento per la lampadina , correlandole anche con quanto fornito in proposito dal fotodiodo.

Si cerchi anche di capire, sulla base di ragionevoli considerazioni in merito ai fenomeni che coinvolgono il filamento durante tutte le fasi dell'esperimento<sup>11</sup>, se vi sono delle funzioni analitiche semplici e

<sup>11</sup> Osservando il tipico grafico  $(I,V)$  per una lampadina sottoposta all'intervallo di tensioni da 0 V sino al punto di bruciamento, si nota che esso può essere grosso modo suddiviso in tre zone: la prima, in cui la lampadina non emette ancora luce percepibile dal fotodiodo e che sembra seguire un andamento lineare crescente quasi ohmico; la seconda, estesa per la gran parte dell'intervallo di tensioni applicato a partire dai valori ai quali il fotodiodo comincia a rilevare luce emessa dalla lampadina, con un andamento monotono crescente ma meno ripido di quello rettilineo; la terza, eventualmente caratterizzata da fluttuazioni e che diviene rapidamente decrescente in prossimità del punto di bruciamento del filamento.

fisicamente plausibili che possono approssimarne l'andamento trovato nella sua globalità, o in sue zone diverse, e cercare l'eventuale intervallo di raccordo.

Se si unisce il generico punto  $(V_i, I_i)$  del grafico tensione-corrente con l'origine  $(V = 0, I = 0)$ , si ottiene un segmento che dovrebbe rappresentare la curva caratteristica della lampadina, se questa fosse un elemento circuitale che rispetta la legge di Ohm con valore della resistenza pari a  $R_i = V_i / I_i$ . Facendo lo stesso per ogni altro punto del grafico si può costruire l'andamento della cosiddetta *resistenza equivalente* per la lampadina, in funzione della tensione applicata; se ne discuta il significato.

Si può anche definire la *resistenza dinamica*  $R_d$  di un componente circuitale come:

$$R_d = dV/dI \quad (1.27)$$

Si proceda quindi a valutare e graficare opportunamente la resistenza dinamica della lampadina analizzata, sia come rapporto incrementale che come derivata dell'eventuale funzione analitica approssimante la curva caratteristica. Se si sono utilizzate differenti funzioni analitiche approssimanti in diversi intervalli di tensione, se ne tenga conto. Si rammenti che i raccordi analitici tra andamenti diversi in intervalli contigui si possono ottenere imponendo la continuità delle funzioni e delle loro derivate prime nei punti di raccordo.

Cosa si può dire, sulla base dei risultati ottenuti, circa il comportamento della lampadina in funzione della sua emissione luminosa e del suo approssimarsi al punto di bruciamento? Una migliore analisi di quest'ultimo potrebbe richiedere un infittimento delle misure in prossimità della presunta tensione di bruciamento, la cui attuazione è però fuori dalla portata degli strumenti disponibili nel laboratorio didattico.

È significativa, ai fini della misura, la perturbazione dovuta all'introduzione del voltmetro in parallelo alla lampadina?

È interessante analizzare in particolare la seconda zona: si ricordi che la resistività  $\rho$  di un conduttore metallico dipende dalla temperatura di quest'ultimo secondo una legge del tipo  $\rho \propto \mu T^\eta$ , e quindi anche  $R = V/I \propto T^\eta$ , con  $\eta$  costante caratteristica del tipo di metallo; si ricordi anche la legge di Stefan-Boltzmann  $W = e\sigma A(T^4 - T_0^4)$  per la potenza  $W$  irradiata, con  $e$  emissività del materiale,  $\sigma$  costante di Stefan-Boltzmann,  $A$  superficie emittente,  $T$  temperatura del conduttore e  $T_0$  temperatura ambiente da cui, per  $T \gg T_0$ ,  $W \propto T^4$ . Dalle leggi di Ohm e Joule si ha:  $R = V/I \propto T^\eta$  e  $W = VI \propto T^4$ , da cui infine si ottiene  $I \propto V^{4-\eta/4+\eta}$ . Per descrivere l'andamento della curva caratteristica nella seconda zona si potrà quindi utilizzare una legge della forma:  $I = kV^\beta$ , dove  $k$  e  $\beta$  sono parametri da determinare tramite best-fit sui dati.

## 1.7 \_ Il diodo: generalità sui semiconduttori

I semiconduttori sono materiali che a temperatura ordinaria (300 °K) hanno una conduttività inferiore a quella dei conduttori, ma superiore a quella degli isolanti. A differenza di quanto avviene nei conduttori, nei semiconduttori la conduttività aumenta all'aumentare della temperatura. Le caratteristiche indicate si spiegano tenendo presente il tipo di legame cui gli elettroni sono sottoposti.

In un conduttore vi sono circa  $10^{28}$  elettroni liberi (di conduzione) per  $m^3$ , pressoché indipendentemente dalla temperatura. Questi sono in continuo stato d'agitazione termica e possono muoversi derivando sotto l'effetto di campi elettrici, dando così luogo a conduzione. L'agitazione termica cresce con la temperatura e ciò ostacola il loro moto di deriva riducendo la conduttività (formula 1.17).

Nei semiconduttori gli elettroni di valenza sono legati molto debolmente (silicio e germanio sono tetravalenti). A temperature basse essi si comportano alla stregua di isolanti, ma già a temperature ordinarie l'energia termica in gioco è sufficiente a rompere legami favorendo la conduzione elettrica (l'energia necessaria a liberare un elettrone rompendo un legame è di 0.75 eV nel germanio e di 1.12 eV nel silicio; per confronto in un materiale isolante sono necessari circa 10 eV). Il numero degli elettroni liberi cresce esponenzialmente con la temperatura e quindi anche la conduttività (nel germanio circa il 5% per grado).

Bisogna inoltre tener presente che nei semiconduttori la conduzione è un processo che non coinvolge solamente gli elettroni, ma anche le cosiddette *lacune*, ovvero i "buchi" lasciati nel reticolo cristallino dagli elettroni che rotto il legame, si sono staccati dagli atomi cui appartenevano. La lacuna può infatti essere riempita da un elettrone di un atomo adiacente, dando così luogo ad una nuova lacuna traslata; questo processo può essere indirizzato da un campo elettrico che determina lo spostamento della lacuna in un verso preferenziale, che è opposto a quello degli elettroni.

Quello ora descritto si dice *semiconduttore intrinseco* e a temperatura ordinaria presenta valori di resistività molto diversi a seconda del materiale: 0.46  $\Omega m$  per il germanio e 2.5  $K\Omega m$  per il silicio puro.

Il semiconduttore intrinseco svolge, nei dispositivi a semiconduttore, il ruolo che nei tubi elettronici svolge lo spazio vuoto, ovvero quello di mezzo in cui si muovono le cariche.

Aggiungendo a un semiconduttore intrinseco tetravalente piccolissime dosi di impurità (drogaggio) pentavalente (antimonio, fosforo, arsenico), dette *donatori* o di *tipo n*, gli atomi di queste si inseriscono nel reticolo utilizzando quattro dei loro elettroni di valenza per formare legami covalenti. Il quinto elettrone resta legato all'atomo d'origine con un'energia molto piccola, dell'ordine di 0.01 eV, e a temperatura ordinaria può considerarsi libero.

Aggiungendo invece ad un semiconduttore intrinseco tetravalente piccolissime dosi di impurità trivalente (boro, gallio, indio), dette *accettori* o di *tipo p*, gli atomi di queste si inseriscono nel reticolo completando

solamente tre legami covalenti e generando la mancanza di un elettrone, ovvero una lacuna. Anche l'energia necessaria allo spostamento delle lacune è molto piccola cosicché a temperatura ordinaria le lacune sono in gran parte libere.

### 1.7.1 \_ La giunzione p-n

La giunzione p-n è costituita da un cristallo semiconduttore drogato con impurità p da un lato ed n dal lato opposto (Fig. 1.43a).

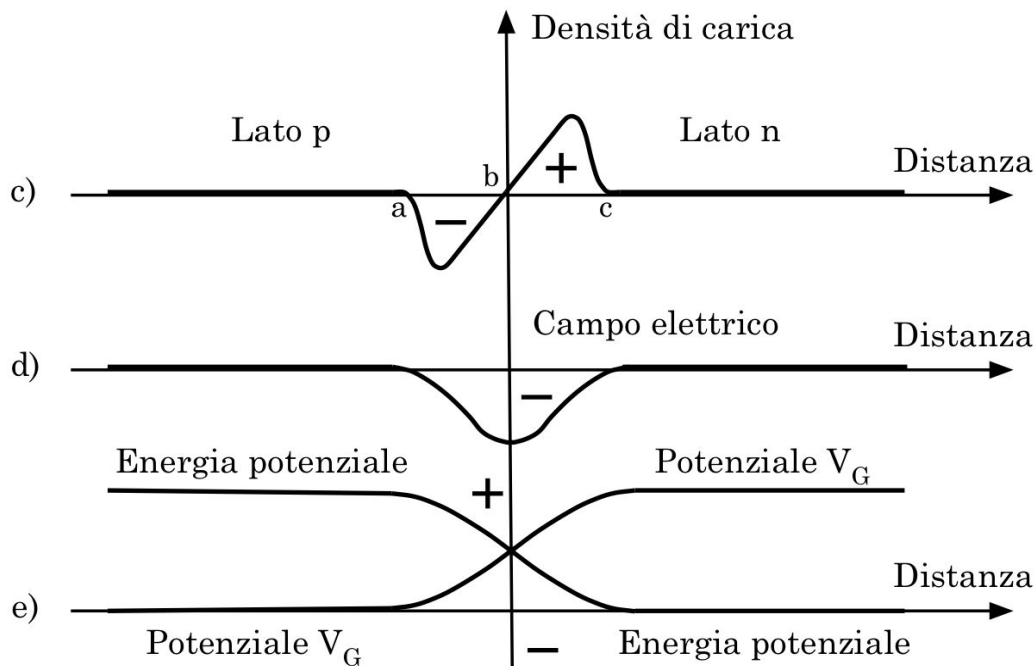
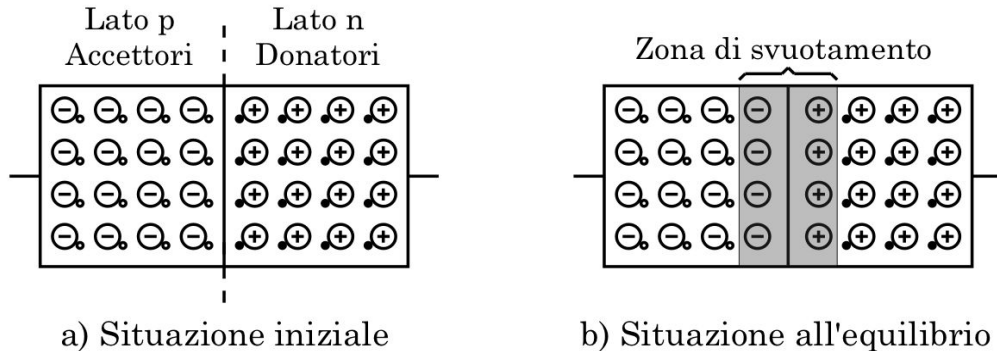


Fig. 1.43

Gli ioni donatori sono positivi, avendo liberato un elettrone, gli accettori sono invece negativi, avendone acquisito uno. A causa delle impurità quindi, nel lato p vi sono lacune libere e nel lato n elettroni liberi; a ciò si aggiunge un certo numero di lacune ed elettroni termici provenienti dal semiconduttore di supporto. Lato p ed n presentano quindi cariche libere di entrambi i segni, ma da un lato prevalgono quelle di un segno e

dall'altro quelle di segno opposto. Le cariche prevalenti da ogni lato vengono dette *di maggioranza*, quelle minoritarie vengono dette *di minoranza*. Queste ultime, che sono uniformemente distribuite nell'intero semiconduttore, sono in equilibrio.

Al momento della realizzazione della giunzione, gli eccessi iniziali di elettroni e lacune determinano invece una corrente transiente diffusiva di elettroni verso il lato *p* e viceversa per le lacune, che prosegue sino a che la d.d.p. che si instaura non bilancia il tutto in una condizione di equilibrio dinamico, con un residuo e costante scambio di cariche attraverso la giunzione, in prossimità della quale si viene quindi a creare una zona pressoché priva di cariche libere, detta *zona di transizione*, o di *carica spaziale* o di *svuotamento*, con spessori dell'ordine di  $10^{-6}$  m, cui contribuisce maggiormente il materiale di tipo *p*. Nella zona di svuotamento restano le cariche fisse dovute agli ioni, positive sul lato *n* e negative sul lato *p* (Fig. 1.43b,c).

Dopo questa fase transiente iniziale, se il semiconduttore è isolato e non gli è applicata alcuna d.d.p. dall'esterno, non scorre in esso alcuna corrente netta.

Dette  $\rho_{n(n)}$ ,  $\rho_{n(p)}$ , le densità di elettroni rispettivamente ai confini delle zone *n* e *p* della giunzione, e  $\rho_{p(n)}$ ,  $\rho_{p(p)}$  le corrispondenti densità di lacune, si trova che all'equilibrio:

$$\rho_{n(p)} = \rho_{n(n)} e^{-\frac{eV_G}{kT}} \quad , \quad \rho_{p(n)} = \rho_{p(p)} e^{-\frac{eV_G}{kT}} \quad (1.28)$$

dove  $e$  è la carica elementare ( $e \approx 1.6 \cdot 10^{-19}$  Coulomb),  $V_G$  è il potenziale di gap della giunzione ( $V_G = 0.785$  V per il germanio,  $V_G = 1.21$  V per il silicio),  $k$  è la costante di Boltzmann ( $k \approx 1.38 \cdot 10^{-23}$  J $\cdot$ K $^{-1}$ ),  $T$  è la temperatura assoluta.

Si ottiene quindi per la corrente totale all'equilibrio dovuta agli elettroni:

$$I_{tot}^{(-)} = I_{n \rightarrow p}^{(-)} - I_{p \rightarrow n}^{(-)} \propto \rho_{n(n)} e^{-\frac{eV_G}{kT}} - \rho_{n(p)} = 0$$

e similmente per quella dovuta alle lacune:

$$I_{tot}^{(+)} = I_{n \rightarrow p}^{(+)} - I_{p \rightarrow n}^{(+)} \propto \rho_{p(n)} - \rho_{p(p)} e^{-\frac{eV_G}{kT}} = 0$$

Se si applica alla giunzione una tensione con **polarità inversa** (Fig. 1.44a), ovvero positiva al lato *n* rispetto al lato *p*, si estraggono lacune dal lato *p* ed elettroni dal lato *n* determinando un ampliamento dell'estensione della zona di svuotamento. Il valore della barriera di potenziale aumenterà conseguentemente fino a bilanciare l'effetto della tensione applicata dall'esterno, e non si avrà l'insorgenza di conduzione per quanto concerne le cariche di maggioranza, ma solo un loro temporaneo riassetamento. Le cariche di minoranza (elettroni nel lato *p* e lacune nel lato *n*), la cui entità dipende dalla temperatura, trovano le condizioni della barriera di potenziale ora favorevoli al loro passaggio quindi attraversano la giunzione dando luogo a una debole corrente  $I_0$  detta *corrente inversa di*

*saturazione*, sostanzialmente indipendente dal valore della tensione applicata ed espressa da:

$$I_0 = KT^m e^{-eV_G/kT} \quad (1.29)$$

con  $K = \text{cost.}$ ,  $m = 2$  per il germanio ed  $m = 1.5$  per il silicio.

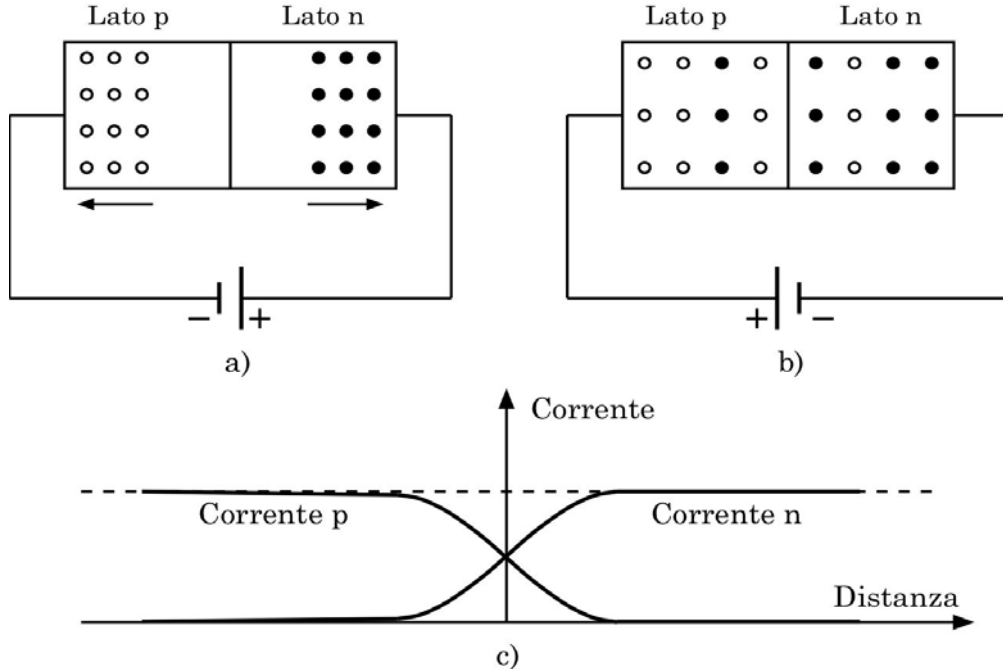


Fig. 1.44

Applicando invece alla giunzione una tensione  $V$  con **polarità diretta** (Fig. 1.44b) si riduce il valore della barriera di potenziale in prossimità della giunzione favorendone il passaggio da parte dei portatori di maggioranza e determinando l'insorgenza di una corrente netta rilevante. All'interno della giunzione lacune ed elettroni si intersecano e si neutralizzano gradatamente: la corrente risulta costituita all'inizio della zona p da lacune che si dirigono verso la zona n; nella zona di giunzione le lacune scompaiono a poco a poco e la corrente corrispondente diminuisce (Fig. 1.44c) mentre insorge una corrente concorde, ma dovuta ad elettroni che si dirigono verso la zona p, che cresce gradualmente in modo da mantenere costante la corrente totale; nella zona n la corrente è costituita esclusivamente da elettroni.

In questo caso si ottiene quindi, per la corrente totale dovuta agli elettroni:

$$\begin{aligned} I_{tot}^{(-)} &= I_{n \rightarrow p}^{(-)} - I_{p \rightarrow n}^{(-)} \propto \rho_{n(n)} e^{-e(V_G - V)/kT} - \rho_{n(p)} = \\ &= \rho_{n(n)} e^{-e(V_G - V)/kT} - \rho_{n(n)} e^{-eV_G/kT} = \rho_{n(n)} e^{-eV_G/kT} (e^{eV/kT} - 1) \end{aligned}$$

e similmente per quella  $I_{tot}^{(+)}$  dovuta alle lacune. Per la corrente totale che attraversa la giunzione polarizzata direttamente si ottiene quindi:

$$I_{tot} = I_{tot}^{(-)} + I_{tot}^{(+)} = I_0 (e^{eV/kT} - 1) \quad (1.30)$$

detta legge di conduzione di una giunzione p-n ideale.



## 1.7.2 \_ Il diodo semiconduttore (a giunzione)

Per quanto detto sopra la giunzione p-n è una struttura che presenta una forte diversità di conduzione nei due sensi e ciò permette di utilizzarla come diodo.

Il *diodo semiconduttore* si presenta come un dispositivo elettronico a due terminali, il cui simbolo circuitale è:  $\rightarrow|$ .

Esso è dunque un buon conduttore quando la sua polarizzazione è del tipo  $\rightarrow|$ , ovvero diretta.

Un diodo polarizzato inversamente, data la particolare struttura della sua distribuzione di carica, può essere usato anche come condensatore a capacità variabile in funzione della tensione (per i condensatori si veda il par. 2.8), e in tal caso è detto *diodo vario-cap* (Appendice 5).

Esteriormente i diodi si presentano solitamente come cilindretti con due terminali, e il terminale negativo è identificato da una strisciolina:  $\rightarrow|$  =  $\square$ .

Il diodo semiconduttore *ideale* ha una caratteristica tensione-corrente non lineare espressa dalla legge di conduzione di una giunzione p-n *ideale*. Le equazioni di Kirchhoff per circuiti che contengono diodi semiconduttori sono dunque equazioni non lineari, spesso difficili da analizzare.

I circuiti contenenti un solo elemento non lineare possono essere analizzati grazie al metodo della retta di carico.

Per il caso di un circuito costituito ad esempio da un diodo e due resistenze, come mostrato in Fig. 1.45, detto rettificatore a semionda (si veda Esperienza 11),

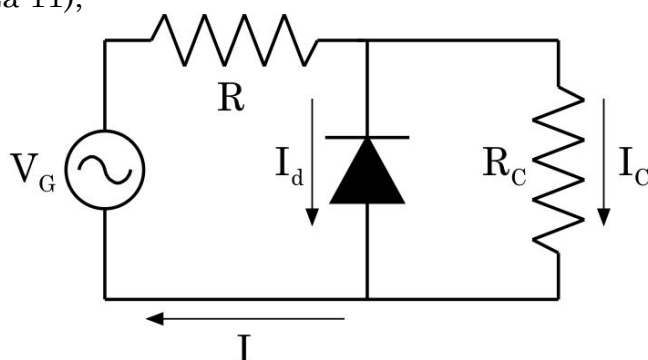


Fig. 1.45

il sistema completo di equazioni di Kirchhoff è dato da:

$$\begin{cases} V_G = IR + V_d \\ V_d = I_C R_C \\ I = I_d + I_C \\ V_d = V_d(I_d) \end{cases} \quad (1.31)$$

che combinando le prime tre si riduce alla coppia di equazioni:

$$\begin{cases} V_G = I_d R + V_d (1 + R/R_C) \\ V_d = V_d(I_d) \end{cases} \quad (1.32)$$

La prima rappresenta una retta nel piano  $(V_d, I_d)$ , mentre la seconda non è altro che l'inverso della curva caratteristica  $I_d = I_d(V_d)$  del componente non lineare (in questo caso il diodo), e la coppia soluzione  $(V_d^*, I_d^*)$ , si può trovare come intersezione geometrica delle due curve.

Ciò permette dunque di dedurre la corrente  $I_d^*$  che attraversa il diodo in funzione della tensione  $V_G$  applicata.

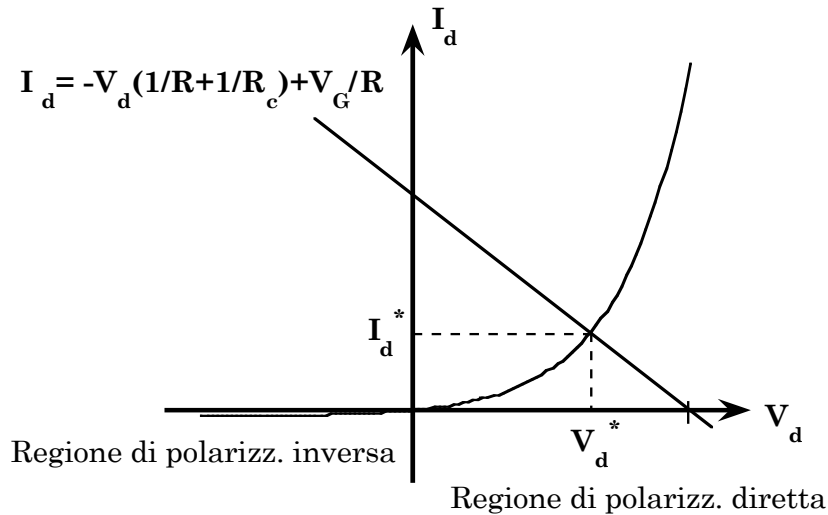


Fig. 1.46

Per un *diodo reale* bisogna tener conto anche delle caratteristiche specifiche del materiale semiconduttore con cui è realizzato e ciò si ottiene, in prima approssimazione, aggiungendo un fattore  $\eta$  a denominatore dell'esponente; l'equazione caratteristica assume quindi la forma:

$$I_{tot} = I_0 \left( e^{qV/\eta kT} - 1 \right) \quad (1.33)$$

Per piccole correnti si ha  $\eta \cong 1$  per diodi al germanio ed  $\eta \cong 2$  per diodi al silicio. Al crescere delle correnti  $\eta \rightarrow 1$  anche per diodi al silicio.

Prendendo il logaritmo naturale di entrambi i membri della 1.33 e trascurando l'unità rispetto al termine esponenziale che a temperatura ordinaria vale circa 36, si ottiene la formula approssimata:

$$\lg I_{tot} = \lg I_0 + \lg \left( e^{\frac{qV}{\eta kT}} - 1 \right) \cong \lg I_0 + \frac{qV}{\eta kT} \quad (1.34)$$

che rappresenta una retta intersecante l'asse delle correnti in  $\lg I_0$  sia nel piano  $(\lg(I_{Tot}), V)$  che in quello  $(\lg(I_{Tot}), 1/T)$ . Dalle pendenze di tali rette si può estrarre il coefficiente  $\eta$ .

Un modo per meglio valutare  $I_0$  consiste nel sostituire il valore  $\eta_{fit}$  di  $\eta$  trovato dal fit, nella formula non approssimata ed esplicitare in funzione di  $I_0$ :  $I_0 = I_{Tot} / (e^{qV/\eta_{fit}kT} - 1)$ .

In Fig. 1.47 sono riportate come esempio le curve caratteristiche, nella regione di polarizzazione diretta, per un diodo al germanio (1N270) e per un diodo al silicio (1N3605) alla temperatura di 25 °C.

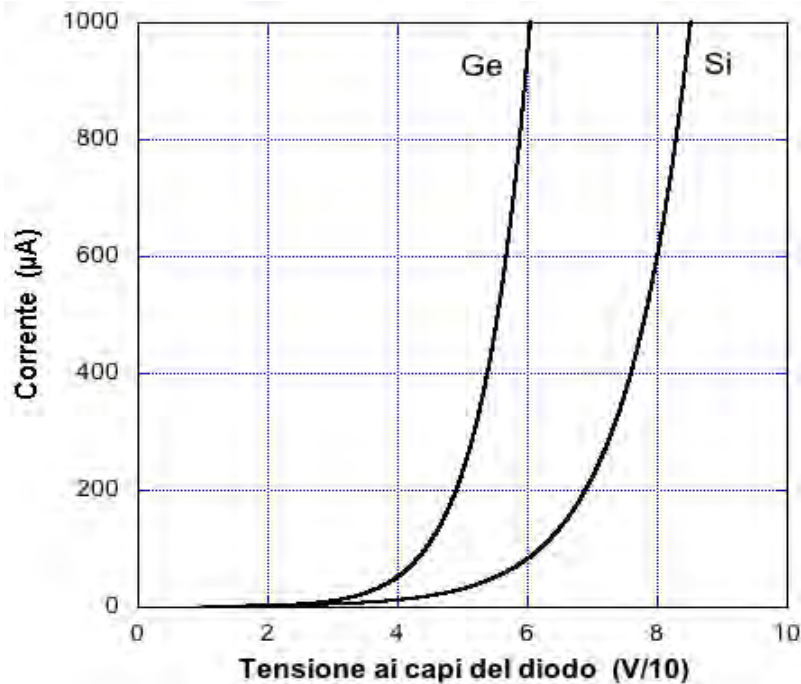


Fig. 1.47

Un diodo reale, se sottoposto a una tensione di polarizzazione inversa sufficientemente elevata, superiore in valore assoluto a un'opportuna soglia  $V_{ZK}$ , manifesta una conducibilità elettrica molto maggiore di quella descritta dall'equazione (1.33) della caratteristica I-V di un diodo.

L'andamento tipico è quello mostrato in Fig. 1.48.

Il fenomeno che ha luogo all'aumentare della tensione di polarizzazione inversa viene detto di *break-down*; analizziamo ora come può manifestarsi.

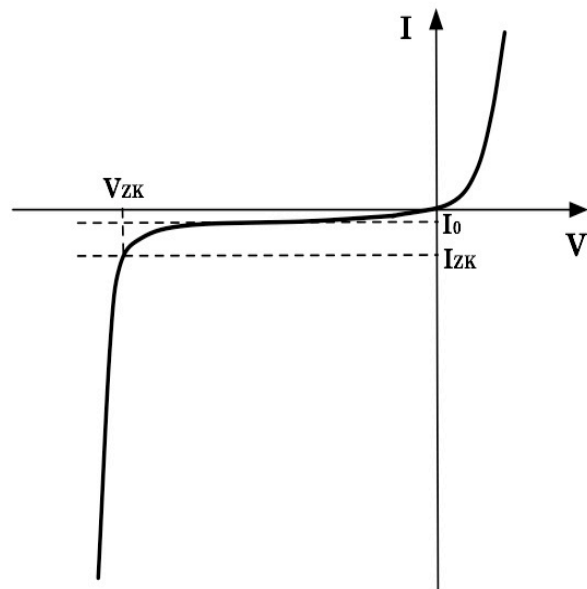


Fig. 1.48

In alcuni casi elettroni e lacune generati termicamente acquisiscono dal potenziale applicato energia sufficiente a produrre nuovi portatori rimuovendo dai loro legami elettroni di valenza. Questi contribuiscono a creare nuovi portatori iterando a loro volta il processo e dando luogo al fenomeno di *moltiplicazione a valanga*. Quando il diodo si trova in questa

condizione è caratterizzato da forti correnti inverse e si dice che lavora nella regione di *break-down a valanga*.

Qualora i portatori di cariche inizialmente disponibili non riescano ad acquisire sufficiente energia per iniziare il processo di moltiplicazione, è possibile innescarlo comunque, rompendo direttamente i legami degli elettroni di valenza grazie ad un opportuno campo elettrico. In tal caso si parla di *break-down Zener*.

Se un diodo viene progettato con caratteristiche di dissipazione di potenza adeguate a lavorare nella regione di break-down, viene detto “diodo Zener” e può essere proficuamente utilizzato come *riferimento di tensione* ovvero come *stabilizzatore di tensione*.

Un suo impiego tipico è illustrato in Fig. 1.49.

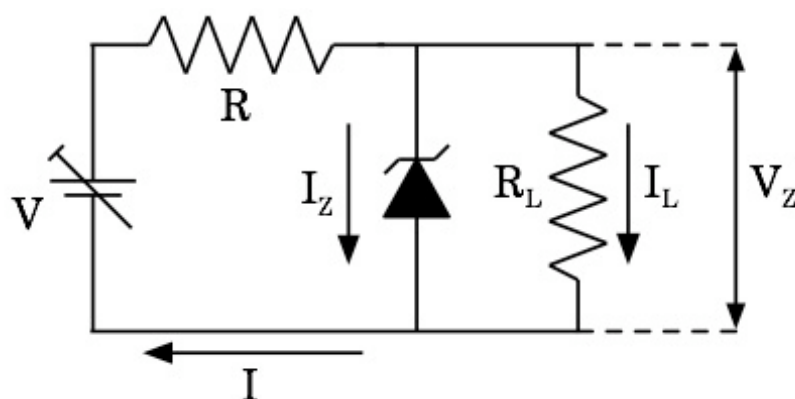


Fig. 1.49

$V$  ed  $R$  sono scelti in modo da far lavorare il diodo in regione di break-down. La tensione ai capi del diodo Zener coincide sempre con  $V_Z$ , ovvero quella ai capi del carico  $R_L$ , ed  $I_Z$  è la corrente nel diodo Zener. In questa condizione il diodo è in grado di mantenere stabile la tensione del carico rispetto a modificazioni di corrente nello stesso e/o a variazioni della tensione d'alimentazione. Nella regione di break-down infatti, forti variazioni di corrente nel diodo causano piccole variazioni di tensione ai suoi capi (e quindi ai capi di  $R_L$ ); variazioni di corrente nel carico o della tensione d'alimentazione, modificano quindi la corrente nel diodo in modo da ridurre le corrispondenti variazioni di tensione sul carico.

L'intervallo di tensioni entro cui il diodo svolge efficacemente il ruolo di “regolatore” è definito, come limite inferiore, dal valore di corrente  $I_{ZK}$  che caratterizza il “ginocchio” dell'inizio della zona di break-down, e come limite superiore dai limiti d'impiego per dissipazione di potenza.

Per quanto concerne le differenze fra le curve caratteristiche  $I/V$  di un diodo semiconduttore al Germanio, rispetto a quello al Silicio, si considerino le differenze strutturali del Germanio rispetto al Silicio.

Qualitativamente, in primo luogo l'atomo di Germanio, essendo più grande dell'atomo di Silicio, ha gli orbitali più esterni a una maggior distanza dal nucleo dell'atomo, rispetto al Silicio, e nella struttura cristallina del semiconduttore risulta che basta meno energia, e quindi meno tensione di polarizzazione diretta, per liberare cariche e per cominciare quindi a

percepire una corrente. A parità di tensione di polarizzazione diretta, per piccoli valori di questa tensione, la pendenza positiva della curva I/V del Germanio è maggiore di quella del Silicio.

Inoltre, essendo il numero atomico del Germanio 32, rispetto a 14 del Silicio, succede che una corrente che si instaura in un cristallo di Germanio sente, a parità di altri fattori, una maggior “resistenza” a scorrere nel cristallo stesso, rispetto a quanto non avvenga per il Silicio, data la maggior densità di elettroni.

Si può quindi dire che per il Germanio comincia abbastanza rapidamente a dominare un effetto di tipo ohmico/resistivo, al crescere dell'intensità della corrente che lo percorre, rispetto al Silicio, e ciò ovviamente, si ripercuote in una modifica della forma della curva I/V che al crescere di V tende a un aspetto più ohmico (meno pendente) rispetto a quello esponenziale di un diodo ideale.

### 1.7.3 \_ Il LED

Il LED, dall'Inglese *light emitting diode* (diodo emettitore di luce), è costituito da una giunzione p-n che può ad esempio essere realizzata in arseniuro di gallio (GaAs), in grado di emettere luce di colore rosso, o in fosforo di gallio (GaP), in grado di emettere luce di colore giallo o verde.

L'emissione di luce ha luogo quando la giunzione, polarizzata direttamente, è percorsa da corrente elettrica. Essa è dovuta al fenomeno di ricombinazione radiativa spontanea fra elettroni e lacune iniettate dalla corrente nella zona di svuotamento e viene detta *elettro-luminescenza*. La frequenza  $\nu$  associata ai fotoni emessi dipende dal valore  $E_g$  del gap energetico fra la banda di valenza e quella di conduzione del semiconduttore:

$$\nu = E_g / h$$

dove  $h = 6.6260693 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4.1356674 \cdot 10^{-21} \text{ MeV}\cdot\text{s}$ , è la costante di Plank.

La luce prodotta fuoriesce quindi dalle pareti laterali della regione di giunzione rendendosi visibile a occhio nudo, se di frequenza opportuna.

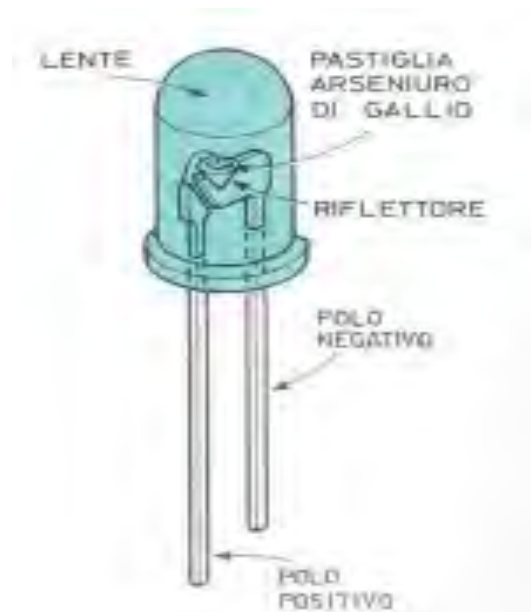


Fig. 1.50 Immagine di un LED

I LED sono oggi impiegati in numerosissime situazioni al posto di altre sorgenti più comuni di luce e posseggono inoltre, rispetto a queste, la pregevole caratteristica di un bassissimo rapporto fra la potenza consumata e la potenza luminosa emessa corrispondentemente.

Per evitare il danneggiamento che ne deriverebbe se fossero attraversati da intensità eccessive di corrente, si pone sempre in serie ad essi un'opportuna resistenza limitatrice che mantenga la corrente entro pochi milliampère.

Lavorando opportunamente a specchio le pareti laterali della zona di giunzione di un LED si può creare una cavità ottica simile a quella di un laser. Ciò ha permesso effettivamente di realizzare laser a semiconduttore, quali ad esempio i piccoli laser utilizzati come puntatori.

#### 1.7.4 \_ Rivelatori di radiazioni ionizzanti

La regione di svuotamento di un diodo semiconduttore possiede delle proprietà che la rendono adatta alla rivelazione di particelle o radiazioni ionizzanti quali  $e^\pm$ ,  $p^\pm$ ,  $\pi^\pm$ , ioni, raggi  $\gamma$ , ...

Il campo elettrico built-in presente in essa fa sì che qualunque elettrone (lacuna) creato al suo interno o nelle sue immediate prossimità, venga poi sospinto verso la zona n (zona p) del semiconduttore.

Il fatto che nella regione di svuotamento sia quindi fortemente depressa la presenza di cariche libere e che le cariche efficaci esistenti, cioè quelle degli ioni donatori e accettori, siano praticamente immobilizzate nel reticolo cristallino non potendo contribuire alla conducibilità, fa sì che la resistività di tale regione sia molto alta rispetto a quella delle zone p o n adiacenti.

Il passaggio di particelle o radiazioni ionizzanti entro la regione di svuotamento di una giunzione p-n determina, per effetto del rilascio d'energia durante l'interazione fra particella (radiazione) e materiale della giunzione, la creazione di coppie elettrone-lacuna. Queste cariche vengono quindi estratte dalla regione di svuotamento dal campo elettrico in essa presente e il loro moto conseguente dà luogo a una corrente che può essere misurata, costituendo in tal modo un segnale elettrico associato all'interazione fra particella ionizzante e giunzione p-n.

Quindi una giunzione p-n funziona già di per sé come un rivelatore di particelle ionizzanti in quanto produce impulsi di corrente misurabili ai suoi capi in risposta all'interazione con le radiazioni stesse.

L'intensità di tali segnali è tanto maggiore quanto maggiore è il numero di coppie elettrone-lacuna create e questo dipende a sua volta dall'energia minima necessaria a creare una tale coppia (pari ad esempio a 3.62 eV nel silicio a temperatura ambiente), dall'energia associata alla radiazione incidente, dalla frazione di questa rilasciata nella regione di svuotamento, che a sua volta dipenderà ad esempio dallo spessore di questa. Potendo aumentare lo spessore della regione di svuotamento e l'intensità del campo elettrico presente in essa, si dovrebbero ottenere quindi segnali più intensi a parità di particella incidente. Ciò si ottiene polarizzando inversamente la giunzione.

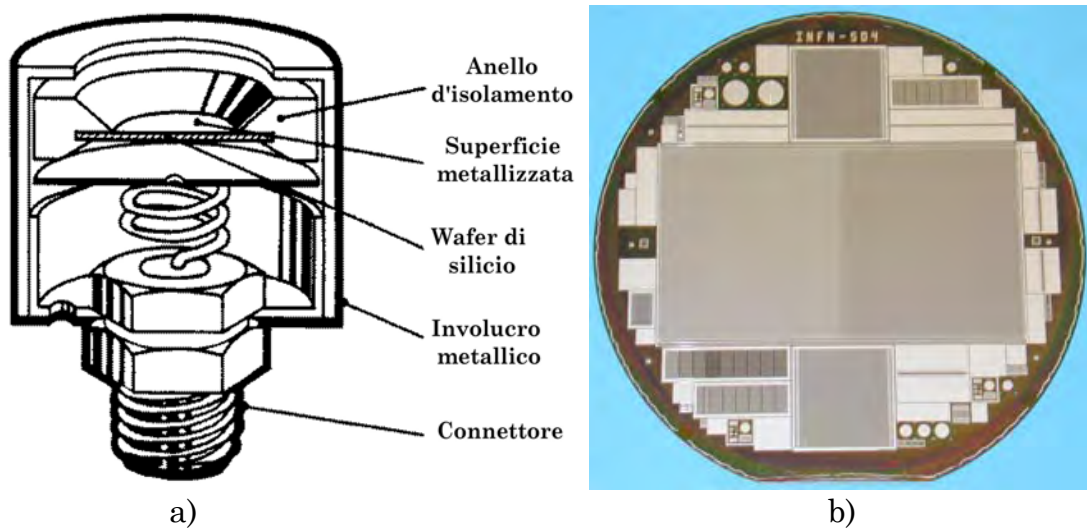


Fig. 1.51 a) \_ Un esempio di rivelatore a giunzione p-n di silicio. b) \_ Un esempio di wafer di silicio dello spessore di 300  $\mu\text{m}$  contenente un rivelatore a microstrip di silicio assieme ad altre strutture.

### Esperienza 3: Misura della curva caratteristica di un diodo semiconduttore in funzione della temperatura

Scopo della misura è determinare la curva caratteristica di un diodo semiconduttore a diverse temperature ed estrarre il valore del coefficiente  $\eta$  dai dati ottenuti.

#### Materiale occorrente:

- un diodo semiconduttore
- una resistenza per limitare la corrente nel diodo
- un deviatore
- un generatore a bassa tensione
- un voltmetro
- un amperometro
- un termometro (una termocoppia)
- fili di rame e morsetti per i collegamenti elettrici
- contenitori per i liquidi di termostatazione (acqua, azoto liquido, ecc. )
- fogli di mylar (pellicola per avvolgimento cibi !)
- guanti isolanti termici

#### Montaggio dell'esperienza:

Si realizzi il circuito mostrato in figura:

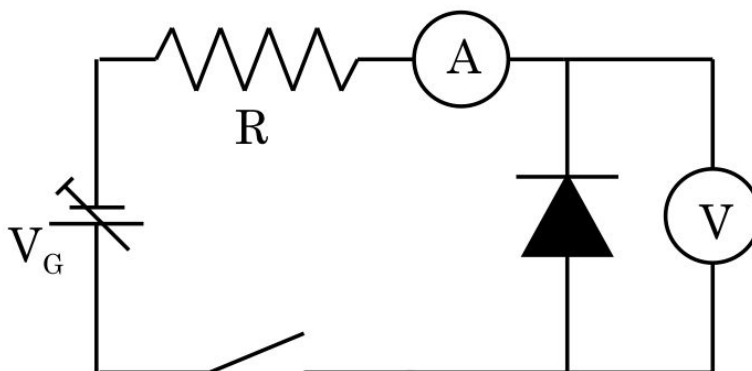


Fig. 1.52

#### Esecuzione della misura:

Si dispone in laboratorio di quattro termostati a temperature diverse: l'ambiente, un termostato ad acqua che può raggiungere circa i 343 °K, dei calorimetri con acqua e ghiaccio in fusione e dei calorimetri contenenti azoto liquido (si ricordi che la temperatura d'ebollizione dell'azoto liquido alla pressione di 1 atmosfera è 77.3 °K).



Ci si procuri le caratteristiche del diodo utilizzato, fornite dal costruttore. La resistenza  $R$  va scelta allo scopo di limitare la corrente che può transitare nel diodo entro valori tollerabili dallo stesso e desumibili dalle caratteristiche reperite, mantenendo comunque la possibilità di agire su un intervallo ampio di tensioni erogate dal generatore, onde non ridurre la risoluzione. Dopo aver montato il circuito di figura 1.52, avendo avuto cura di lasciare i tratti di cavo verso i terminali del diodo sufficientemente lunghi, si avvolga il diodo con uno strato di mylar e si disponga dunque la termocoppia a stretto contatto col diodo, separata unicamente dal mylar. Ciò permetterà di tenere costantemente sotto controllo la temperatura del diodo.

Si avvolga tutto con alcuni strati di mylar, sufficienti a garantire l'ottenimento di un tratto di circuito contenente diodo e termocoppia, impermeabilizzato, ma non troppo isolato termicamente. In alternativa al mylar si può usare una cannucchia di plastica per bibite.

Si immerga a questo punto il tratto di circuito impermeabilizzato nel termostato ad acqua e non appena la temperatura rilevata dalla termocoppia si stabilizza, si alimenti il diodo, polarizzato direttamente, con tensioni via via crescenti, monitorando e rilevando i valori misurati di corrente e tensione. Si rilevi di volta in volta anche la temperatura che aumenterà all'aumentare della tensione applicata, portando quindi la risposta del diodo a discostarsi da quanto previsto ... .

Si proceda sino a mettere chiaramente in evidenza la salita esponenziale della curva caratteristica, senza però raggiungere valori di tensione superiori a quelli massimi di operatività consigliati dal costruttore (in caso contrario il diodo, percorso da corrente eccessiva, potrebbe subire modificazioni e/o danni irreversibili, ed è bene che ciò non succeda almeno sino a quando non lo si è caratterizzato completamente, in funzione della temperatura).

Si ritorni quindi a tensione nulla verificando in alcuni punti di riottenere le stesse coppie di valori tensione-corrente già misurate.

Si effettuino a questo punto alcune misure in polarizzazione inversa da confrontarsi col valore asintotico  $I_0$  della corrente inversa di saturazione che si dedurrà dall'analisi della curva caratteristica nel tratto a polarizzazione diretta<sup>12</sup>. Anche in questo caso il diodo è esposto a danni irreversibili (*breakdown*), la tensione di *breakdown* ha però un valore assoluto tipicamente molto maggiore di quello che potrebbe determinare il bruciamento del diodo in polarizzazione diretta.

Una volta completata la serie di misure nel termostato ad acqua, dopo aver tolto alimentazione al diodo, si estraiga il tratto di circuito dal termostato e gli si dia il tempo di entrare in equilibrio termico con l'ambiente.

Si proceda quindi a temperatura ambiente (costantemente monitorata dalla termocoppia abbinata al diodo) effettuando una serie di misure

---

<sup>12</sup> Attenzione alla resistenza interna del voltmetro sul fondo-scala usato, potrebbe essere minore di quella del diodo polarizzato inversamente, per cui in realtà si sta praticamente costruendo la curva caratteristica della resistenza ohmica interna del voltmetro !

equivalente a quella effettuata nel termostato, sino cioè a raggiungere nel diodo gli stessi valori di corrente.

Quindi, dopo aver tolto alimentazione al diodo, lo si immerga, sempre protetto dal mylar, nel contenitore col ghiaccio in fusione, gli si dia tempo di entrare in equilibrio termico con quest'ultimo e sempre controllando la temperatura tramite la termocoppia, si effettui una serie completa di misure equivalenti alle precedenti. Infine, seguendo la stessa procedura dei casi precedenti, si immerga il diodo, sempre protetto dal mylar, nel calorimetro ad azoto liquido e gli si dia tempo di entrare in equilibrio termico con questo (per garantire la costanza della temperatura raggiunta è necessario che l'azoto circostante il diodo sia sempre in ebollizione. Si valuti anche l'utilità o meno di mantenere la termocoppia). Si proceda dunque, anche in queste condizioni, ad una serie completa di misure di coppie di valori ( $V,I$ ) equivalente alle precedenti in corrente.

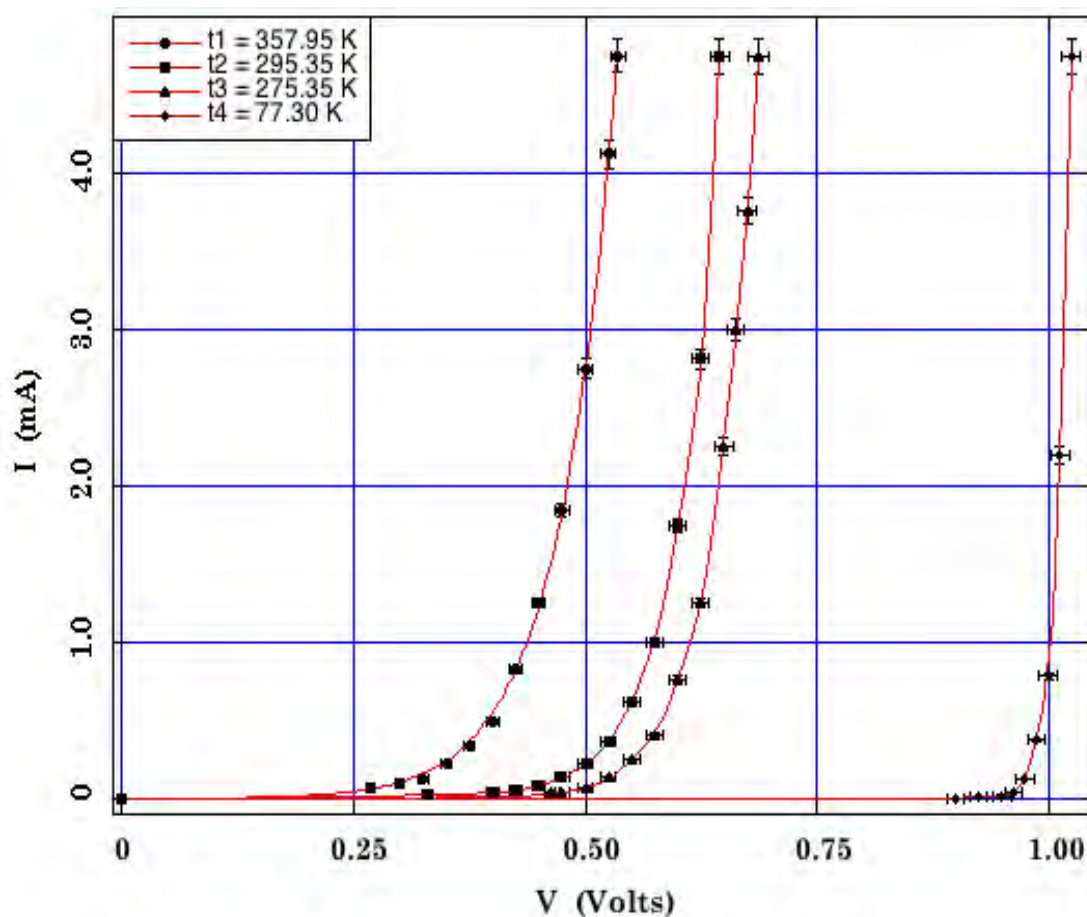


Fig. 1.53 \_ Caratteristiche  $I-V$  di un diodo al silicio per 4 diversi valori di temperatura. Le curve interpolanti i dati sperimentali sono state ottenute a partire dalla (1.33).

Per quanto concerne il numero di coppie ( $V,I$ ) da rilevare al fine di poter ottenere, in ognuna delle condizioni operative, la curva caratteristica del diodo, valgono ragionamenti del tipo di quelli fatti nel caso della precedente esperienza con la lampadina ad incandescenza. Si tenga presente che la ricostruzione del tratto di un andamento presenta

difficoltà tanto maggiori quanto maggiori sono le variazioni di pendenza dell'andamento stesso nel tratto in questione. In figura è presentato un tipico risultato per un diodo al silicio nelle condizioni sperimentali descritte.

Cosa si può dire circa l'influenza del voltmetro in parallelo al diodo sui valori di tensione misurati e sulla corrente che effettivamente attraversa il diodo?

Si vedano in proposito le considerazioni fatte nel paragrafo 1.3.2.

### Analisi dei dati raccolti

In questo caso i dati raccolti costituiranno quattro tabelle, una per ogni termostato, a tre colonne relative rispettivamente ai valori di tensione  $V$ , corrente  $I$  e temperatura  $T$  misurati.

Si riportino su uno stesso grafico le coppie di valori  $(V,I)$  per i quattro termostati, ottenendo le corrispondenti quattro caratteristiche tensione-corrente per il diodo in polarizzazione diretta.

Si calcolino quindi i valori della resistenza dinamica del diodo tramite rapporti incrementali, se ne grafichi l'andamento nei quattro casi discutendone le conseguenze.

Si cerchi di determinare l'intervallo di tensione esplorato in cui una funzione del tipo (1.30) interpola al meglio i dati acquisiti per ognuna delle quattro condizioni operative, riportando i valori corrispondentemente ottenuti per i parametri, fra i quali vi sono anche  $I_0$  ed  $\eta$ , ed il livello di significatività dell'interpolazione ottenuta.

Si grafichino le funzioni interpolanti ottenute sovrapposte ai dati sperimentali.

Alternativamente, si riportino i dati sperimentali ottenuti secondo un'opportuna scala *linearizzante* (semilogaritmica) e si proceda a quanto descritto nel punto precedente, utilizzando come funzione interpolante una della forma della (1.34).

Anche in questo caso si otterranno i corrispondenti valori per i parametri  $I_0$  ed  $\eta$ .

Cosa si può dire, sulla base dei risultati sperimentali, circa l'andamento di  $V$  ed  $I$  con la temperatura? Si considerino  $\left(\frac{dV}{dT}\right)_{I=\text{cost.}}$  e  $\left(\frac{dI}{dT}\right)_{V=\text{cost.}}$ .

Cosa si può dire dal confronto fra i valori di  $I_0$  ottenuti tramite l'interpolazione e i dati sperimentali raccolti polarizzando inversamente il diodo alle diverse temperature? Si consideri l'influenza del voltmetro in questa configurazione.

Si provi poi a costruire la curva  $I-V$  anche per un led a temperatura ambiente.

### 1.7.5 \_ Celle fotovoltaiche

Il Sole può essere assimilato in prima approssimazione a un corpo nero di temperatura compresa tra i 5800 e i 6100 °K. Complessivamente esso produce una potenza di circa  $3.88 \cdot 10^{26}$  W, emessa isotropicamente sotto forma di radiazione elettromagnetica che giunge sulla Terra con un'intensità media di circa  $1367 \text{ W/m}^2$ , su una superficie posta esternamente all'atmosfera, ortogonalmente alla congiungente Terra-Sole. Il valore rilevato al suolo è inferiore a causa della presenza dell'atmosfera, e varia con una serie di altri fattori quali latitudine, periodo dell'anno, condizioni meteo, ecc.

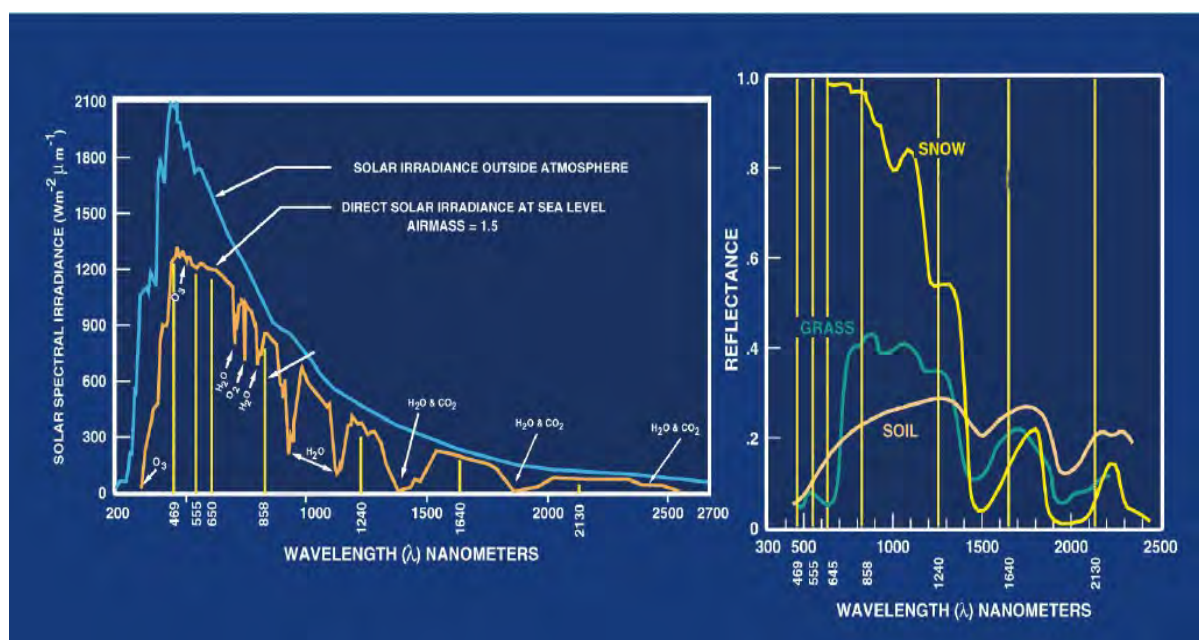


Fig. 1.54 \_ Influenza dell'assorbimento atmosferico sullo spettro solare; riflettività del suolo in diverse condizioni.

Nel grafico a sinistra di Fig. 1.54, la curva azzurra rappresenta la distribuzione spettrale al di fuori dell'atmosfera, che coincide quasi esattamente con quella di corpo nero; la curva arancio rappresenta la medesima distribuzione dopo l'assorbimento da parte dell'atmosfera, con indicati i contributi legati alla presenza di acqua, anidride carbonica e ozono. Il grafico presenta in ordinata, valori normalizzati per il contributo energetico di ciascuna lunghezza d'onda, avendo considerata uguale l'energia di differenti frequenze a pari intensità incidente.

Il picco principale della densità spettrale si ha in corrispondenza delle frequenze della luce visibile, nell'intervallo di lunghezze d'onda comprese tra  $0.38 \mu\text{m}$  e  $0.78 \mu\text{m}$ : in tale intervallo cade il 45% della radiazione solare, mentre l'1% è composta da frequenze maggiori (raggi X ed UV) e il 54% da frequenze minori (infrarosso).

La potenza che dal Sole giunge sulla Terra ammonta a circa  $2 \cdot 10^{17}$  W, quasi oltre 2000 volte il consumo medio attuale (2011) di tutta l'Umanità.

Con questa potenzialmente enorme disponibilità d'energia radiante si può pensare di utilizzare dei "diodi" per ottenere dell'energia elettrica direttamente fruibile.

Come visto, nella "zona di svuotamento" di un diodo è presente un campo elettrico built-in, dovuto al fatto che in tale spessore ciascuno dei due semiconduttori della giunzione si è sostanzialmente svuotato dei propri portatori di carica maggioritari, che hanno per diffusione attraversato l'interfaccia per ricombinarsi con portatori di segno opposto.

Supponiamo ora che un fotone colpisca un elettrone appartenente alla porzione di semiconduttore drogata p, posto entro il raggio d'azione del campo elettrico built-in. Supponiamo inoltre che l'elettrone si trovi in banda di valenza, in corrispondenza del livello di Fermi (gli elettroni nella banda di conduzione vengono allontanati dall'azione del campo elettrico). In questo caso si hanno due possibilità:

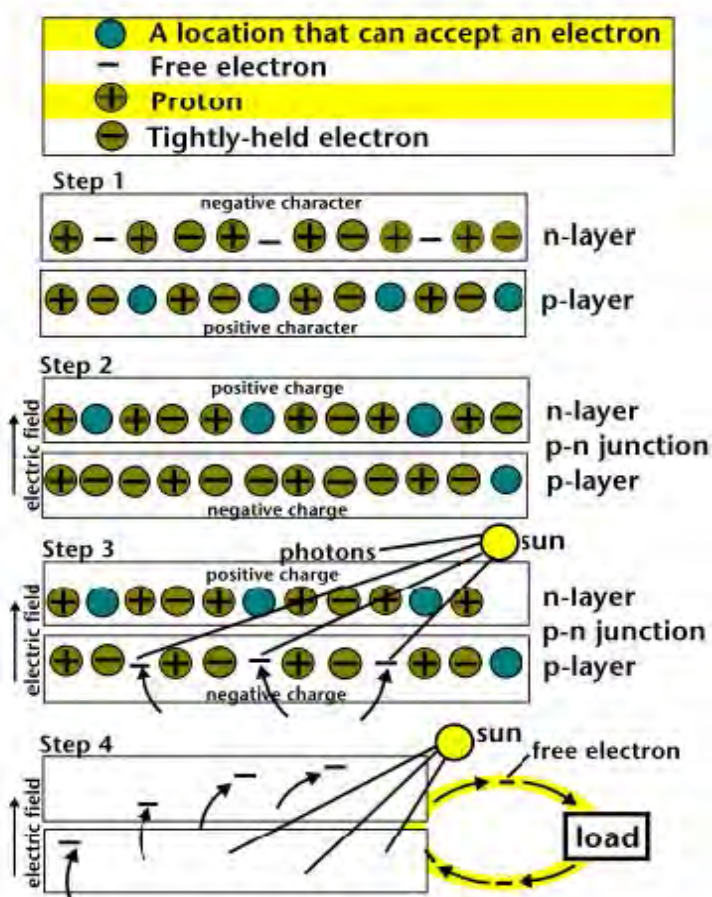


Fig. 1.55 \_ Schema semplificato del funzionamento di una cella fotoelettrica.

- il fotone, poco energetico, eccita l'elettrone che pur rimanendo nell'atomo, in seguito si diseccita per emissione a sua volta di un quanto di luce;
- la seconda possibilità, di maggiore interesse, è che il fotone sia sufficientemente energetico da permettere all'elettrone bersaglio di

passare dalla banda di valenza a quella di conduzione [step 3 in Fig. 1.55]. In tal caso l'energia ceduta dal fotone è maggiore o uguale al "bandgap" dell'elettrone colpito, che ha un valore caratteristico per ciascun elemento.

In tabella ci sono i valori di riferimento per alcuni materiali utilizzati nelle applicazioni fotovoltaiche.

Materiale	Bandgap (eV)
Si	1.10
Ga	0.67
GaP	1.25
GaAs	1.47
GaSb	0.68
InP	1.27
InAs	0.36
InSb	0.17
ZnSe	2.67
ZnTe	2.26
CdSe	2.59
CdTe	1.5

Se il fotone è sufficientemente energetico, si hanno un elettrone libero e un atomo ionizzato. Nonostante l'elettrone libero tenda a legarsi nuovamente con l'atomo cui apparteneva, il campo elettrico built-in lo costringe a migrare verso la zona carica positivamente, ovvero verso il semiconduttore drogato n. Qui si determina quindi, rispetto alla condizione di equilibrio, un eccesso di carica negativa. Lasciando poi evolvere spontaneamente il fenomeno, un elettrone migrerebbe a sua volta nella direzione opposta alla precedente, al fine di ristabilire l'equilibrio elettrostatico. Se si connettono le due porzioni del diodo tramite un opportuno

conduttore esterno, la carica negativa in eccesso lo potrà percorrere generando nel circuito una corrente elettrica.

Sperimentalmente si ha che l'intensità della corrente prodotta dipende sia dall'intensità che dalla frequenza della radiazione incidente, ma la dipendenza da queste due grandezze è di tipo differente.

Per frequenze inferiori a un ben preciso livello di soglia, non si ha alcuna produzione di corrente. La spiegazione di questo fatto è dovuta a Einstein e corrisponde all'effetto fotoelettrico, che oltretutto mostra anche come la quantità di elettroni di conduzione che si rendono disponibili dipenda direttamente, una volta fissato lo spettro energetico della luce incidente, dall'intensità della stessa.

Detto  $W$  il *bandgap* dell'elettrone colpito dal fotone, la conservazione dell'energia implica  $\frac{1}{2} \cdot m_e v_{\max}^2 = h\nu - W$ ; da ciò si ricava che in corrispondenza del potenziale di soglia  $eV_0 = h\nu - W$ .

Di tutta l'energia che investe la cella sotto forma di radiazione luminosa, la cella riesce però a convertirne solo una parte in energia elettrica. Questo dipende solo marginalmente dall'esistenza della frequenza di soglia per i fotoni incidenti. Lo spettro solare, comprendendo lunghezze d'onda che vanno da 0.1  $\mu\text{m}$  a 4.9  $\mu\text{m}$  (pur essendo concentrato principalmente tra i 0.2  $\mu\text{m}$  e i 4.5  $\mu\text{m}$ ), include le lunghezze d'onda ottimali per tutti i tipi di dispositivi fotovoltaici più diffusi.

Le cause che in una cella reale determinano l'effettiva efficienza di conversione luce/corrente sono molteplici, alcune sono intrinsecamente legate ai principi fisici di base che intervengono nei processi di conversione luce/corrente. Eccone alcune:

1 \_ Qualsiasi modulo o pannello fotovoltaico ha sempre un coefficiente di riflessione diverso da zero. Quindi non tutti i fotoni che incidono sulla cella raggiungono effettivamente la giunzione p/n. Un sensibile contributo al mancato assorbimento della radiazione incidente sulla cella viene dai contatti metallici che necessariamente coprono parte della superficie del semiconduttore esposta alla luce (circa il 7%), permettendo il convogliamento degli elettroni prodotti verso il circuito elettrico esterno.

2 \_ Fotoni troppo energetici: se un elettrone viene colpito da un fotone con energia superiore a quella di bandgap l'elettrone passa nella banda di valenza, ma l'energia in eccesso viene dissipata sotto forma di calore all'interno della cella. Sperimentalmente si trova che l'efficienza della maggior parte dei sistemi fotovoltaici cala piuttosto sensibilmente con l'aumento della temperatura.

3 \_ Qualsiasi circuito, di ogni genere e tipo, presenta una certa resistenza interna. Sotto questo aspetto, il punto critico delle celle è rappresentato dal punto di raccordo tra la giunzione p/n e il circuito esterno. L'interfaccia tra semiconduttore drogato e conduttore presenta una resistenza non trascurabile al passaggio degli elettroni, nonostante si utilizzino contatti in alluminio, argento o una lega dei due. D'altronde i contatti elettrici stessi presentano una propria resistività caratteristica: la resistenza complessiva può venire ridotta incrementando lo spessore di tali contatti, ma ciò riduce la superficie di interazione tra luce e semiconduttore.

4 \_ Gli elettroni che nel semiconduttore p passano dalla banda di valenza a quella di conduzione, prima di essere immessi nel circuito esterno devono attraversare sia l'interfaccia tra le giunzioni che l'intero strato di semiconduttore n. Poiché lo spessore medio delle giunzioni nelle celle attualmente più diffuse sul mercato è di 0.3 mm, è evidente che il percorso medio di una carica, prima di raggiungere i contatti elettrici metallici, non è affatto trascurabile. È quindi alta la probabilità che un elettrone, lungo il proprio cammino, trovi una lacuna con la quale ricombinarsi, influenzando negativamente sull'intensità della corrente in uscita.

Questo fenomeno di ricombinazione è di fatto, quello sul quale si basa il principio di funzionamento dei LED, per i quali l'energia liberata in seguito alla ricombinazione viene emessa mediante un fotone nello spettro del visibile. Per ciascun semiconduttore le cariche presentano un valore caratteristico della "lunghezza di diffusione", definita come cammino libero medio di una carica prima che sia soggetta a ricombinazione. Per una cella efficiente, la lunghezza di diffusione è maggiore o uguale allo spessore del semiconduttore della giunzione.



## L'EFFICIENZA DELLA CELLA

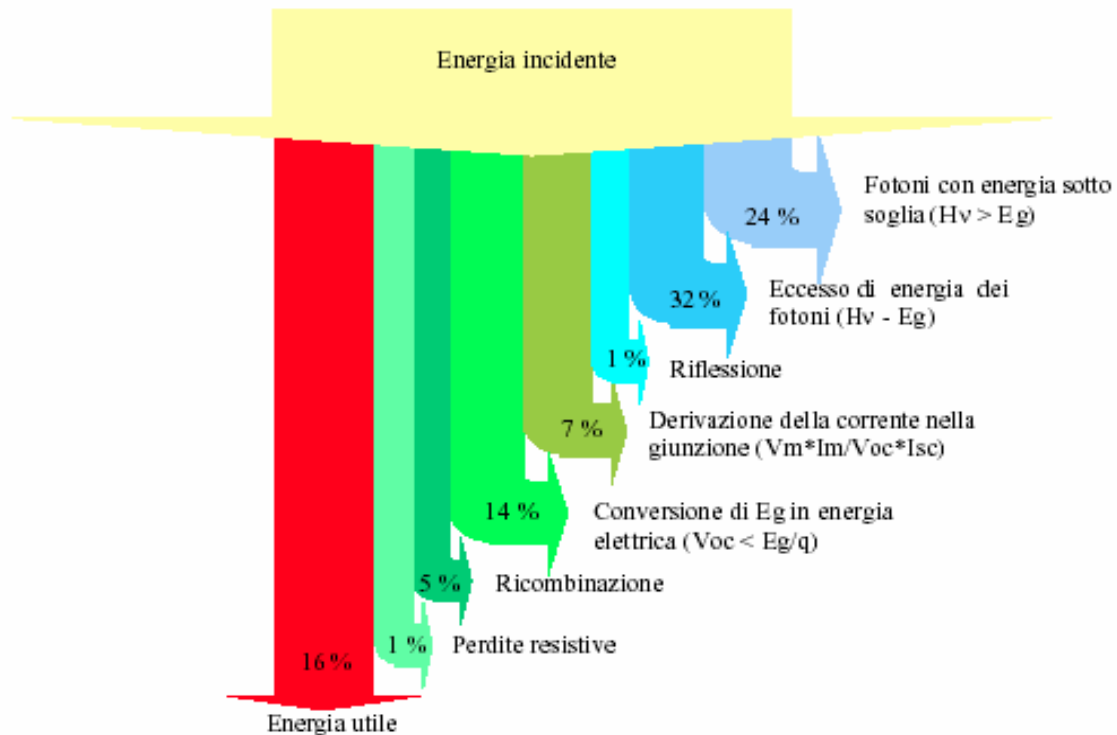


Fig. 1.56 \_ Sintesi dei fattori che concorrono a limitare l'efficienza.

Ricaviamo ora la caratteristica I-V di una cella fotovoltaica. Procediamo disegnando dapprima lo schema del circuito equivalente di una cella.

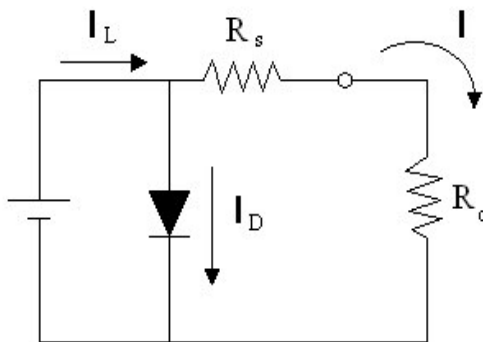


Fig. 1.57

La corrente  $I_L$  prodotta e dovuta alla radiazione luminosa incidente è rappresentata da un generatore di corrente posto in parallelo a un diodo, che rappresenta la giunzione p-n della cella. La corrente totale risultante  $I$  è la differenza tra la corrente  $I_L$  generata dalla luce e la corrente  $I_D$  del diodo:

$$I = I_L - I_D = I_L - I_0 \left( e^{\frac{qV}{kT}} - 1 \right) \quad \text{o,} \quad I = I_L - I_0 \left( e^{\frac{qV - IR_s}{kT}} - 1 \right)$$

tenendo esplicitamente conto di  $R_s$ .

La curva caratteristica I-V risultante e la sua relazione con la caratteristica del diodo sono mostrate qualitativamente in Fig. 1.58.



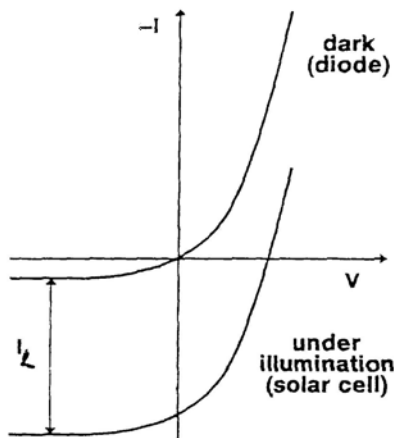
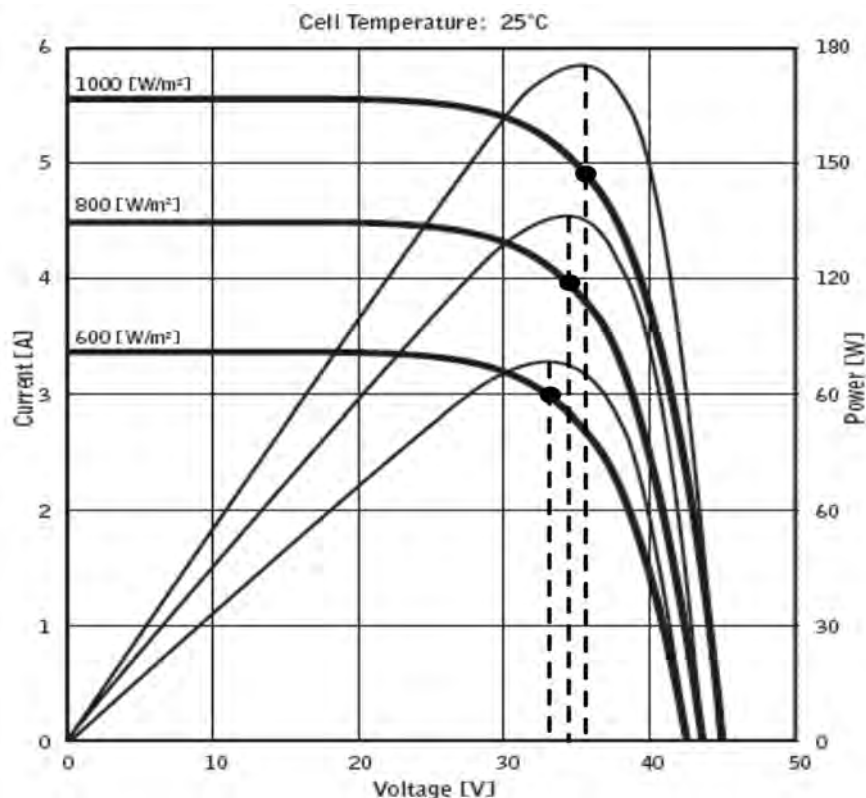


Fig. 1.58

Nello schema del circuito equivalente di Fig. 1.57,  $R_c$  simboleggia la resistenza di carico mentre  $R_s$  tiene conto della resistenza ohmica dei contatti, del materiale semiconduttore e delle perdite elettriche nel collegamento metallo-semiconduttore. La corrente  $I_{sc}$  di corto circuito è la massima corrente generata dalla luce; in condizioni di corto circuito il diodo non assorbe corrente quindi  $I_L = I$ . A circuito aperto, invece, si ha la massima tensione  $V_{oc}$  ai capi della cella, corrispondente a quella tensione per cui la corrente risultante in uscita è nulla.

La condizione di lavoro ottimale della cella è rappresentata dal punto della curva caratteristica tensione-corrente in corrispondenza del quale il prodotto  $I \cdot V$ , che esprime la potenza elettrica ottenibile a parità di altre condizioni, risulta massimo ( $W_M = I_M \cdot V_M$ ). Questo punto di massima potenza, che come si intuisce dalla Fig. 1.59 coincide col “ginocchio” della curva caratteristica, è un parametro importante per individuare il livello di prestazione di ogni singola cella.



1.59 \_ Curva I-V per una cella fotoelettrica, a varie irradianze. Il ginocchio corrisponde al massimo della potenza per ogni valore di irradianza. (Quarto quadrante di Fig. 1.58, cambiato di segno).

Quanto ottenuto rappresenta una condizione ideale: nella realtà una cella oppone resistenze differenti alle correnti auto-generate rispetto a quelle dovute a una tensione applicata dall'esterno. Ciò in quanto la radiazione luminosa che colpisce una cella determina la produzione di cariche libere su tutta la sua superficie, queste cariche poi raggiungono i contatti elettrici sfruttando tutto il volume del semiconduttore nel quale si trovano. Una tensione applicata dall'esterno invece determina nella giunzione una corrente che tende a localizzarsi in una regione limitata del semiconduttore, in genere sulla superficie e nella zona distante dai bordi della cella.

A pari intensità la corrente auto-generata è come se scorresse, di fatto, in un conduttore di sezione maggiore, che per la legge di Ohm oppone una resistenza minore. Non è semplice tenere conto analiticamente di questo fenomeno, perché è quantitativamente imprevedibile e strettamente connesso alla struttura di ogni singola cella.

Graficamente si nota che la potenza prodotta dalla cella per una coppia di valori  $(I_0, V_0)$  è proporzionale all'area del rettangolo avente due vertici opposti, uno nell'origine degli assi e l'altro in corrispondenza del punto  $(I_0, V_0)$  sulla curva caratteristica.

Nella progettazione di un impianto si cerca di far lavorare cella il più vicino possibile alla zona del picco, sebbene sia di fatto impossibile realizzare sistemi che mantengano la cella costantemente nell'esatta condizione di massima potenza prodotta, al variare soprattutto del carico resistivo esterno.

I parametri che caratterizzano una cella e con cui se ne definisce la resa, sono basati su una scelta internazionale concordata per le condizioni di lavoro standard. Esse riguardano la potenza luminosa incidente e la temperatura di esercizio, fissate rispettivamente a  $1000 \text{ W/m}^2$  (con spettro corrispondente a quello solare a livello del suolo) e  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Partendo dalle coordinate del ginocchio si definisce il "fattore di riempimento" della cella o "fill-factor" (FF):

$$\text{FF} = \frac{V_{\text{Max}} I_{\text{Max}}}{V_{\text{sc}} I_{\text{oc}}}$$

Il fill-factor, sempre  $< 1$ , dipende dal semiconduttore utilizzato. Un valore tipico per celle al silicio è 0.84. Noti  $V_{\text{Max}}$ ,  $I_{\text{Max}}$  e fissata la potenza luminosa incidente  $W_{\text{Inc}}$ , l'efficienza della cella è definita come rapporto tra la potenza utile in uscita dal circuito e quella luminosa incidente sulla cella:

$$\eta = \frac{V_{\text{Max}} I_{\text{Max}}}{W_{\text{Inc}}} = \frac{\text{FF} \cdot V_{\text{oc}} I_{\text{sc}}}{W_{\text{Inc}}}$$

I valori sperimentali dei rendimenti delle celle attuali possono superare il 60%, ma i valori delle rese delle celle commerciali sono fermi da anni attorno al 12%. La scarsa efficienza delle celle commerciali è dovuta essenzialmente alla necessità di contenerne i costi per ragioni di mercato.

## 1.8 \_ La costante di Faraday e i conduttori ionici

La costante di Faraday  $F$  è definita come il prodotto fra il numero di Avogadro  $N_0$  ( $N_0 \cong 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ) e la carica elementare  $e$ :  $F = e \cdot N_0$ .

Essa è quindi misurata in Coulomb.

La sua importanza storica e concettuale è evidente: non appena si sia in grado di misurare il numero di Avogadro  $N_0$ <sup>13</sup>, essa fornisce il valore della carica elementare  $e$ , il cui valore oggi accettato è:  $1.60217653 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

Ciò, unitamente ad altri esperimenti di cui tratteremo più oltre e che permettono di misurare il rapporto  $e/m$  fra la carica e la massa dell'elettrone, mette dunque in grado di determinare la massa  $m$  di quest'ultimo.

Si riesce così a caratterizzare l'elettrone a meno del suo spin intrinseco.

Come si vedrà, la carica di un elettrone può essere ottenuta anche da una misura diretta, col metodo di Millikan, e confrontata con quanto ottenuto dalla costante di Farady, una volta noto  $N_0$ . D'altronde, una volta misurati  $F$  ed  $e$  si può dedurre  $N_0$ .

Ipotizzando come fatto da Faraday, peraltro giustamente, che la carica elettrica sia quantizzata, si può procedere alla misura della costante  $F$  facendo passare una certa quantità nota  $Q$  di carica elettrica in un circuito contenente una cella elettrolitica.

In figura 1.60 è schematicamente illustrato il montaggio della struttura sperimentale.

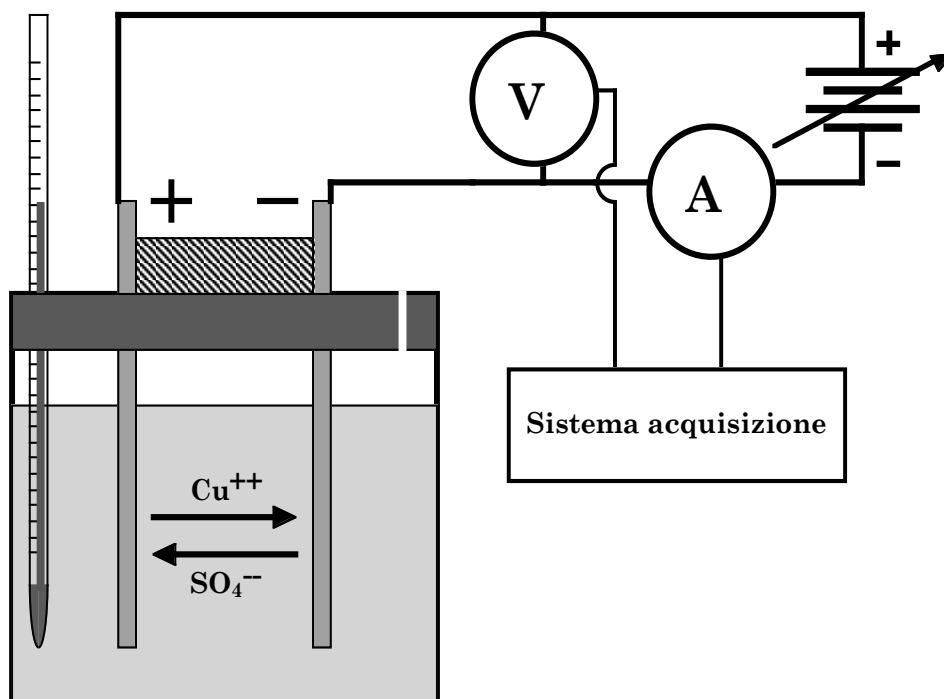


Fig. 1.60

<sup>13</sup> La prima misura sperimentale di  $N_0$  fu effettuata da J.B. Perrin, che per i risultati ottenuti vinse anche il Premio Nobel nel 1926.

La cella elettrolitica è riempita con una soluzione acquosa di solfato di rame ( $\text{CuSO}_4$ ) e vi sono immersi due elettrodi di rame collegati a un generatore di corrente.

Un voltmetro è posto in parallelo alla cella elettrolitica per misurare la tensione applicata agli elettrodi e un amperometro è montato in serie per misurare la corrente che attraversa il circuito.

Volendo, la cella elettrolitica potrebbe essere realizzata utilizzando altri sali diversi dal solfato di rame, ad esempio il solfato di zinco con elettrodi di zinco, ma il solfato di rame dà luogo a soluzioni colorate (azzurrine), il che aiuta ad esempio a rilevare immediatamente l'eventuale presenza di gradienti di concentrazione del sale nella soluzione in funzione delle correlate diverse intensità di colorazione della stessa.

Chiamiamo  $c_s$  la concentrazione del solfato di rame in acqua misurata in (molecole)/ $\text{cm}^3$ .

Se la soluzione non è troppo concentrata, si può supporre che il sale sia completamente dissociato in ioni  $\text{Cu}^{++}$  e ioni  $\text{SO}_4^{--}$ .

Se il circuito elettrico viene chiuso sull'alimentatore (generatore di corrente continua), la d.d.p. che si instaura fra i due elettrodi fa sì che i cationi (ioni  $\text{Cu}^{++}$ ) presenti in soluzione si muovano verso il catodo, mentre gli anioni (ioni  $\text{SO}_4^{--}$ ) si muoveranno verso l'anodo.

Quando i cationi raggiungono il catodo, la loro carica ionica positiva viene neutralizzata dagli elettroni forniti dal catodo ed essi si depositano quindi su quest'ultimo sotto forma di rame metallico.

Quando un anione raggiunge l'anodo si combina con il rame dell'elettrodo estraendo uno ione  $\text{Cu}^{++}$  dall'anodo, che si ritrova quindi con un eccesso di due cariche negative, e ricostituisce una molecola di  $\text{CuSO}_4$  che rapidamente si dissocia in  $\text{Cu}^{++}$  ed  $\text{SO}_4^{--}$  per la presenza del solvente (acqua). Il processo elettrolitico non cambia dunque la quantità totale di sale dissociato presente nella soluzione.

Il processo di trasporto della carica corrisponde inoltre anche a un trasporto di massa, con rame che viene sottratto all'anodo e rame che viene corrispondentemente depositato sul catodo. Nel corso dell'esperimento sono chiaramente visibili la progressiva corrosione di un elettrodo e la concomitante crescita dell'altro.

Entrambe le specie ioniche presenti in soluzione contribuiscono alla corrente totale  $I_{cella}$  che attraversa la cella:

$$I_{cella} = I_{\text{Cu}^{++}} + I_{\text{SO}_4^{--}} \quad (1.35)$$

In genere la corrente che attraversa la soluzione varia nel tempo: il generatore di corrente utilizzato infatti, per quanto stabilizzato, non è un generatore ideale e le variazioni di dimensioni e forma degli elettrodi dovute a corrosione/accrecimento, assieme ad eventuali modificazioni locali di concentrazione (legate a sedimentazione del soluto e ad evaporazione o condensazione del solvente), chimiche e/o termiche della soluzione, producono anche variazioni della corrente totale che attraversa la cella durante l'esperimento.

La carica totale che sarà quindi transitata fra i due elettrodi nel tempo  $\Delta t$  è espressa da:

$$Q = \int_0^{\Delta t} I_{cella}(t) dt \quad (1.36)$$

Se d'altra parte con  $\Delta m$  si indica la massa sottratta all'anodo nel tempo  $\Delta t$  ed  $A$  è il peso atomico del rame espresso in grammi, allora il numero di atomi di rame estratti dall'anodo, coincidente col numero di atomi di rame depositati sul catodo, è dato da  $(\Delta m/A) \cdot N_0$ , e ricordando che il rame è bivalente si deduce che la quantità totale  $Q$  di carica netta trasportata è:

$$Q = \frac{2\Delta m}{A} eN_0 \quad (1.37)$$

Uguagliando le due espressioni trovate per  $Q$  si ottiene la costante  $F$  di Faraday:

$$F = eN_0 = \frac{A}{2\Delta m} \int_0^{\Delta t} I_{cella}(t) dt \quad (1.38)$$

Se gli elettrodi di rame vengono scelti di forma e dimensioni adatte e conseguentemente posizionati nella soluzione con una geometria opportuna, si può inoltre essere in grado di valutare anche le dimensioni efficaci degli ioni presenti in soluzione, purché quest'ultima sia a concentrazione sufficientemente bassa.

Si scelgano ad esempio due elettrodi di forma rettangolare e li si posizioni uno di fronte all'altro, parallelamente, a una distanza  $l$ . Sia  $S$  l'area della superficie di ogni elettrodo che risulta affacciata all'altro una volta immersi nella soluzione.

Supponendo di poter trascurare l'azione del campo gravitazionale su ogni ione rispetto a quello elettrico agente a circuito chiuso, si può esprimere la velocità di deriva  $v_\infty$  degli ioni fra un elettrodo e l'altro all'equilibrio asintotico, in termini di quantità facilmente misurabili.

Detta  $V$  la d.d.p. fra i due elettrodi, si supponga in prima approssimazione che a circuito chiuso vi sia un campo elettrico di modulo  $E \cong V/l$ , uniforme e ortogonale alle superfici affacciate degli elettrodi, entro il volume delimitato dagli elettrodi stessi nella soluzione salina. Si supponga altresì che il campo sia trascurabile al di fuori di tale volume.

In tal caso si può ipotizzare, in prima approssimazione, che la corrente ionica  $I_{cella}$  nella cella si sviluppi praticamente tutta entro tale volume e ricordando che essa è dovuta a contributi di flussi opposti di cariche ioniche  $q$  di segno opposto e valore assoluto pari a  $|q| = 2e$ , che  $c_s$  indica la concentrazione di  $\text{CuSO}_4$  nella soluzione in (molecole)/ $\text{cm}^3$  (ricordando che si suppone di lavorare in condizioni di piccole concentrazioni, minori di quella di saturazione, che dipenderebbe tra l'altro dalla temperatura  $T$  della soluzione, la concentrazione ionica totale corrispondente è quindi costante e pari a  $2c_s$ ), e supponendo inoltre che la velocità di deriva sia praticamente la stessa per entrambe le specie ioniche presenti, si ha:

$$I_{cella} = |\vec{j}| \cdot S \cong 2c_S \cdot 2e \cdot v_\infty S = 4ec_S v_\infty S \quad (1.39)$$

dove  $\vec{j}$  rappresenta la densità di corrente elettrica. Da ciò:

$$v_\infty = \frac{I_{cella}}{4ec_S S} \quad (1.40)$$

Si osservi che generalmente sia  $V$  che  $\vec{j}$ ,  $I$ ,  $c_S$ ,  $v_\infty$ ,  $S$ , possono dipendere dal tempo: per quanto riguarda ad esempio  $S$ , eventuali evaporazioni o condensazioni d'acqua nella soluzione, determinano modificazioni corrispondenti di  $c_S$ , delle porzioni di elettrodi immerse e in generale del valore di  $S$ , oltre che nella progressione di accrescimento del catodo e nella corrispondente erosione dell'anodo.

Equiparando la cella ad un elemento ohmico si può scrivere:

$$I_{cella} = \frac{V}{R_{cella}} \quad (1.41)$$

da cui:

$$v_\infty = \frac{V}{4ec_S SR_{cella}} \quad (1.42)$$

Supponendo ora che gli ioni in movimento nella soluzione acquosa siano approssimabili con piccole sfere di raggio  $r$  e che la *legge di Stokes* valga ancora per oggetti così piccoli, si trova che la forza d'attrito che agisce sugli ioni nelle condizioni di equilibrio è:

$$F_{attrito} = 6\pi\eta r v_\infty \cong 2eE \cong \frac{2eV}{l} \quad (1.43)$$

dove  $\eta$  è la viscosità dell'acqua che a temperatura ambiente (300 °K) vale:  $\eta \cong 10^{-3}$  (N · s)/m<sup>2</sup>. Il raggio di uno ione, espresso in funzione di quantità misurabili, è quindi approssimativamente dato da:

$$r \cong \frac{eV}{3\pi\eta l v_\infty} = \frac{4e^2 c_S SR_{cella}}{3\pi\eta l} \quad (1.44)$$

Il valore di  $R_{cella}$  può essere ottenuto dalla (1.41), costruendo una curva tensione-corrente per la cella.

Per ottenere il valore di  $c_S$  si può procedere nel modo seguente.

Misurando la massa  $M$  di un volume noto  $V$  di soluzione preparato a partire da una massa iniziale  $M_{H_2O}$  di acqua si ha, per la densità di massa

$\rho_S$  della soluzione:

$$\rho_S = \frac{M}{V} = \frac{M_{H_2O} + M_{CuSO_4}}{V} = \rho_{H_2O} + \rho_{CuSO_4} \quad (1.45)$$

La densità di massa  $\rho_{CuSO_4}$  del solfato di rame disciolto in acqua è quindi:

$$\rho_{CuSO_4} = \frac{M_{CuSO_4}}{V} = \frac{M - M_{H_2O}}{V} \quad (1.46)$$

Ricordando che i pesi atomici di rame, zolfo e ossigeno sono rispettivamente:  $A_{Cu} = 63.546$  g,  $A_S = 32.06$  g,  $A_O = 15.9994$  g, si ottiene il peso molare del solfato di rame pari a: 159.60(4) g.

La concentrazione  $c_S$  del solfato di rame in acqua espressa in (molecole)/cm<sup>3</sup> è dunque:

$$c_S = \frac{\rho_{CuSO_4} \text{ (g/cm}^3\text{)}}{159.604 \text{ g}} N_0 \quad (1.47)$$

Osservazione 1)

Per il moto di deriva di un oggetto in un campo di forze si usa spesso introdurre un parametro indicato con  $\mu$ , detto *mobilità*, definito come il rapporto tra la velocità di deriva dell'oggetto e l'intensità del campo. Nel presente caso il campo è quello elettrico  $\vec{E}$  fra gli elettrodi, quindi nelle approssimazioni fatte si ha:

$$v_\infty = \mu E = \mu \frac{V}{l} \Rightarrow \mu = \frac{v_\infty l}{V} = \frac{l}{4ec_S SR_{cella}} \quad (1.48)$$

Osservazione 2)

Le molecole d'acqua hanno un momento di dipolo elettrico non nullo. Ciò fa sì che se in acqua è presente uno ione, le molecole d'acqua immediatamente adiacenti ad esso si orientano in modo da cercare di neutralizzarne la carica e lo circondano *vestendolo* ovvero *solvatandolo*. La struttura che ne risulta è qualcosa di più grande dello ione di partenza, costituito dallo ione stesso assieme alle molecole d'acqua che ne sentono più fortemente l'influenza. Ovviamente le molecole d'acqua che solvatano ogni ione non sono sempre le stesse, ma il loro numero medio si conserva e dipende dalla temperatura della soluzione.

Il moto di deriva dello ione nella soluzione è quindi in realtà il moto di tutta questa struttura più grande. Si può immaginare che la velocità di deriva sia quindi inferiore a quanto sarebbe per lo ione *nudo*, sia perché le dimensioni sono maggiori sia perché il *vestito* di molecole d'acqua in qualche modo gioca anche un ruolo di schermo elettrostatico.

Le dimensioni che si possono dedurre per lo ione sfruttando la legge di Stokes, sono dunque prossime più a quelle dello *ione solvatato* che non dello *ione nudo*.

Osservazione 3)

L'introduzione di un voltmetro in parallelo alla cella perturba chiaramente la corrente che circola in essa, come visto al paragrafo 1.3.2. Facendo riferimento allo schema di Fig. 1.61, siano  $V_{AB}$  la d.d.p. misurata ai capi

della cella in assenza del voltmetro,  $V'_{AB}$  la d.d.p. ai capi della cella in presenza del voltmetro,  $I$  la corrente totale erogata dal generatore e misurata dall'amperometro e che scorre nel parallelo cella più voltmetro,  $I_C$  ed  $I_V$  le correnti che scorrono rispettivamente nella cella e nel voltmetro,  $R_V$  la resistenza interna nota del voltmetro per il fondo scala utilizzato,  $R_C$  la resistenza incognita della cella.

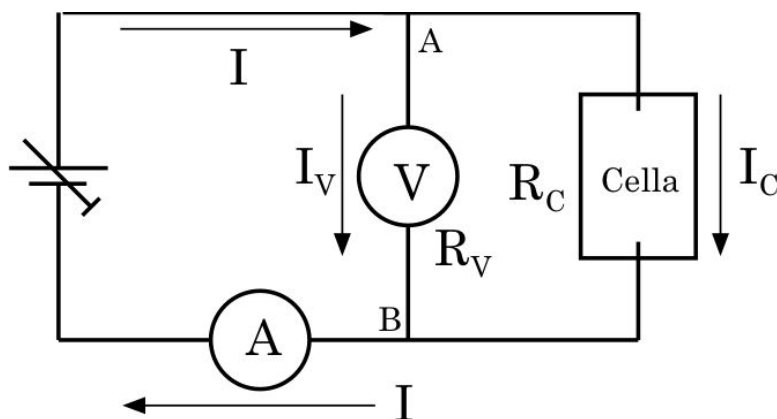


Fig. 1.61

Poiché la quantità  $V'_{AB}$  è il valore misurato dal voltmetro, ed  $I$  è la corrente misurata dall'amperometro, essendo nota  $R_V$ , si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$\left. \begin{aligned} I &= I_C + I_V \\ I_V &= \frac{V'_{AB}}{R_V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I = I_C + \frac{V'_{AB}}{R_V} \Rightarrow I_C = I - \frac{V'_{AB}}{R_V}$$

$$I_C = \frac{V'_{AB}}{R_C} \Rightarrow R_C = \frac{V'_{AB}}{I_C} = \frac{V'_{AB} R_V}{IR_V - V'_{AB}}$$

Questo, oltre a fornire i valori della corrente che effettivamente attraversa la cella durante l'esperimento in funzione di quantità note o misurate nel corso dell'esperimento stesso, permette di controllare entro quali limiti la resistenza  $R_C$  della cella, e quindi della soluzione salina di  $\text{CuSO}_4$ , obbedisca alla legge di Ohm.

Se la cella si comportasse come un elemento ohmico ideale,  $R_C$  dovrebbe infatti essere indipendente dalla corrente  $I_C$  che circola in essa.

Si può quindi costruire una curva tensione/corrente per la cella variando  $V'_{AB}$  e riportando il corrispondente valore di  $I_C$  calcolato come sopra. L'eventuale linearità di tale caratteristica tensione/corrente fornirà il livello di ohmicità della cella stessa.



## **Esperienza 4: Resistenza di un conduttore ionico (soluzione salina), misura della costante di Faraday e stima delle dimensioni efficaci di uno ione solvatato**

### Materiale occorrente:

- un voltmetro
- un amperometro
- un termometro a mercurio
- una bilancia
- due contenitori di cui uno graduato e un agitatore
- poliuretano per il tappo di chiusura della cella
- un generatore di tensione/corrente
- due elettrodi in rame piani, di uguale forma e dimensioni
- un distanziatore in materiale isolante a facce piane parallele
- nastro adesivo, alcool e carta vetrata 00
- filo di rame e morsetti per i collegamenti elettrici
- guanti di protezione in lattice
- soluzione di solfato di rame a bassa concentrazione (il solvente è acqua bidistillata)
- sistema d'acquisizione dei parametri  $V(t)$  ed  $I(t)$ .

### Montaggio dell'esperienza ed esecuzione della misura

Per l'esecuzione della misura si devono preparare i due elettrodi in rame nell'opportuna configurazione geometrica.

A tale scopo, dopo aver marchiato con un punzone i due elettrodi per poterli in seguito riconoscere, bisogna pulirli accuratamente con alcool etilico onde asportare ogni residuo di grasso o altro, e quindi, se vi fosse evidente presenza di ossido, carteggiarli leggermente con carta vetrata 00. Dopo aver asportato ogni residuo del carteggiamento i due elettrodi vanno pesati singolarmente.

Bisogna poi fissarli uno di fronte all'altro, separati dall'opportuno distanziatore isolante, utilizzando del nastro adesivo e facendo in modo che risultino il più possibile paralleli uno all'altro, così da delimitare un ideale parallelepipedo retto, con dimensioni quelle laterali degli elettrodi e la distanza  $l$  fra essi.

Tutte le manipolazioni degli elettrodi, sino alla loro immersione nella soluzione salina, andranno effettuate usando guanti di lattice onde evitare di risporcarne la superficie o di favorire una più rapida ricomparsa dello strato di ossido.

Contemporaneamente dovrà essere stata approntata la soluzione ad opportuna concentrazione di  $\text{CuSO}_4$  con cui riempire il contenitore che costituirà la cella. Per l'esatta determinazione della concentrazione  $\rho_{\text{CuSO}_4}$

si procede come indicato precedentemente avendo cura di misurare dapprima la massa d'acqua, poi il volume e la massa di soluzione ottenuta con quell'acqua.

Si osservi che la misura della massa d'acqua comporta due pesate: la prima coinvolge il contenitore graduato vuoto entro cui verrà prodotta la soluzione, assieme all'agitatore, la seconda il contenitore graduato riempito della quantità d'acqua desiderata, sempre assieme all'agitatore.

Si userà acqua bi-distillata al fine di ridurre la presenza di sostanze disciolte diverse dal  $\text{CuSO}_4$  utilizzato per la cella.

Anche durante la terza pesata, quella per determinare la massa della soluzione ottenuta e dedurre quindi  $\rho_{\text{CuSO}_4}$ , bisognerà naturalmente lasciare l'agitatore nel contenitore graduato con la soluzione<sup>14</sup>.

Per evitare che durante il tempo che intercorre fra la preparazione della soluzione e l'accensione della cella, la densità  $\rho_{\text{CuSO}_4}$  cambi a causa di eccessiva evaporazione o condensazione di acqua nella soluzione stessa, è bene fare in modo che questa sia sempre in equilibrio termico con l'ambiente.

(Lo scioglimento di  $\text{CuSO}_4$  in acqua è un processo eso o endo-termico?)

Si inserisca dunque il blocco, costituito dai due elettrodi fissati al distanziatore, nell'opportuno foro ricavato nel tappo di chiusura della cella precedentemente sagomato (il tappo dovrà contenere anche un foro che permetta l'inserimento d'un termometro a mercurio per monitorare la temperatura della soluzione) e si fissi opportunamente il tutto (usando nastro adesivo ed eventualmente spessori di materiale isolante) in modo che una volta messo in posizione il tappo, i due elettrodi peschino nella soluzione salina per un tratto consistente della loro lunghezza, mantenendosi nel contempo ad almeno 1÷2 cm dal fondo e costituendo un ideale parallelepipedo retto, due facce del quale sono le parti di elettrodi immerse.

Si inserisca il termometro, si colleghino i due elettrodi al circuito di alimentazione e misura tramite due morsetti e si evidenzi la quota del livello della superficie libera della soluzione.

È bene che il tappo presenti un piccolo foro aperto per favorire l'uscita di eventuali gas o vapori prodotti entro la cella garantendo un equilibrio di pressione fra la cella e l'ambiente esterno (ci si assicuri preventivamente della non nocività di questi eventuali gas o vapori).

Il circuito sarà stato preparato parallelamente all'approntamento della cella secondo lo schema di Fig. 1.60.

Prima di accendere l'alimentatore si accenda il sistema di acquisizione che dovrà mostrare la lettura di valori nulli sia per la d.d.p.  $V'_{AB}$  letta dal voltmetro che per la corrente  $I$  misurata dall'amperometro (è possibile che

---

<sup>14</sup> Perché si consiglia sempre di lasciare l'agitatore nel contenitore graduato durante tutte le fasi di preparazione della soluzione ?

la cella, per come preparata, funzioni da generatore?). Si annoti l'ora di accensione dell'acquisizione, ciò permetterà in seguito una correlazione tra il tempo misurato dal sistema d'acquisizione, a partire dallo start, e l'ora di effettuazione di eventuali osservazioni o rilevazioni.

A sistema d'acquisizione avviato si accenda l'alimentatore stabilizzato e lo si regoli sino a registrare sull'amperometro un valore di corrente dell'ordine di 100÷120 mA verificandone la stabilità nel tempo (pensate che questo valore della corrente sia un buon compromesso?).

Si passi dunque alla fase di verifica dell'eventuale ohmicità della cella misurando alcune coppie di valori ( $V'_{AB}$ ,  $I_c$ ) in un intervallo di  $I$  compreso fra  $I = 0$  ed  $I \approx 400$  mA, verificando sempre che ognuna di esse si mantenga stabile nell'arco di alcune decine di secondi.

Si ripristini poi la condizione iniziale e si lasci funzionare la cella per circa 24 ore, controllando e registrando saltuariamente temperatura e livello della soluzione, oltre al corretto funzionamento degli strumenti e del programma d'acquisizione dati.

Se si notasse l'inizio dell'insorgenza di concrezioni cristalline di rame a forma ramificata sul catodo, se ne annoti con attenzione il tempo d'inizio. Ciò causa infatti una modificazione nella geometria della cella che la rende ad esempio non più utile, dal momento dell'insorgenza di tali strutture, alla valutazione delle dimensioni efficaci degli ioni. Si presti anche attenzione al fatto che le concrezioni non crescano sino a determinare corto-circuito fra le due piastre, in tal caso infatti la corrente fra le piastre non sarebbe più solamente di tipo ionico ma troverebbe una via preferenziale, a bassissima resistenza, attraverso il "filo di rame" creatosi. Si avrebbe quindi una conduzione in parallelo, minoritaria quella ionica attraverso la cella, maggioritaria quella elettronica, ma senza corrispondente trasporto di massa, attraverso il filo di rame, che falserebbe la misura.

Trascorse le 24 ore si tolga dapprima alimentazione alla cella e si interrompa infine il funzionamento del programma d'acquisizione avendo cura di chiudere e salvare il *file* contenente i dati registrati.

Quindi si sgancino i morsetti dagli elettrodi. Si rilevino un'ultima volta temperatura e livello della soluzione. Si estraiga il blocco degli elettrodi facendo attenzione a non toccarne le parti che risultavano immerse onde evitare di asportarne o depositarvi alcunché.

Sempre con la stessa attenzione si riseparino i due elettrodi e dopo averli lasciati asciugare completamente li si pesi (per evitare di asportare accidentalmente materiale dagli elettrodi in questa fase, conviene porli ad asciugare su due pezzi di foglio d'alluminio preventivamente pesati e quindi, ad asciugamento avvenuto, porre sulla bilancia ogni foglio d'alluminio col relativo elettrodo deducendo il peso di questo per differenza). È possibile dedurre quanto serve dalla pesata di uno solo dei due elettrodi?

Si dispone a questo punto di tutti i dati necessari, comprese le sensibilità degli strumenti utilizzati, come da caratteristiche riportate nei manuali di accompagnamento.

### Analisi dei dati raccolti

Lo scopo di questa esperienza è triplice: misurare la costante  $F$  di Faraday, studiare le caratteristiche di ohmicità della cella elettrolitica e dare un'indicazione sul valore delle dimensioni lineari efficaci degli ioni in soluzione nella cella.

I valori oggi (2011) accettati per  $F$ , per il numero  $N_0$  di Avogadro e per il valore della carica elementare  $e$  sono rispettivamente:

$$F = 9.64853397 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot (\text{mol})^{-1}$$

$$N_0 = 6.02214179 \cdot 10^{23} \text{ (mol)}^{-1}$$

$$e = 1.602176487 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

I dati raccolti dal sistema d'acquisizione si presenteranno sotto forma di una tabella a una o due colonne e tante righe quanti sono stati gli *step*, temporalmente equispaziati, di lettura degli strumenti. Sulla base delle considerazioni riportate in Osservazione 3) si ottengono da tali valori i corrispondenti valori della corrente  $I_{C_i}$  che è effettivamente transitata attraverso la cella.

Essendo nota perché impostata dallo sperimentatore la durata  $\Delta t_i$  di ogni *step*, supponendo ragionevolmente che la corrente  $I_i$  e la tensione  $V'_i$  registrate ad ogni *step* non varino durante il tempo  $\Delta t_i$  (si scelga dunque  $\Delta t_i = \Delta t_j \forall i \neq j$ , opportunamente breve e si tenga conto anche del livello d'incertezza associato alla sua misura), se  $n$  è il numero totale di *step* allora si avrà, per la carica totale  $Q$  transitata fra i due elettrodi:

$$Q \cong \sum_{i=1}^n I_{C_i} \cdot \Delta t_i \quad (1.49)$$

Ovviamente:  $\Delta t = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$  è il tempo totale di durata dell'esperimento. Il confronto fra i valori misurati per i pesi dei due elettrodi all'inizio e a fine esperimento permette d'ottenere  $\Delta m$ . Si ricordi, se serve, che il valore medio standard per l'accelerazione gravitazionale terrestre a livello del mare è:  $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ .

Si è a questo punto in grado di fornire il valore misurato per  $F$ :

$$F \cong \frac{A}{2\Delta m} \sum_{i=1}^n I_{C_i} \cdot \Delta t_i \quad (1.50)$$

con la relativa incertezza sperimentale.

I dati raccolti permettono anche di mettere alcuni punti, col relativo intervallo d'incertezza, sul grafico tensione-corrente della cella come elemento circuitale.

Cosa si può dire in merito alla resistenza equivalente  $R_c$  della cella in funzione di  $V'_{AB}$ ?

Per passare alla determinazione delle dimensioni lineari efficaci degli ioni, è chiaramente necessario essere prima riusciti a provare l'ohmicità della cella almeno in un intervallo di valori di corrente e tensione comprendente quelli ai quali si è lavorato. Si sfruttano dunque la (1.41), la (1.43) e la (1.44).

Per determinare  $S$  è sufficiente misurare con un calibro le dimensioni iniziali degli elettrodi, controllare che una volta montati siano effettivamente paralleli ed allineati l'uno all'altro, misurandone quindi anche la separazione  $l$ , e valutare nel modo migliore possibile la porzione di essi immersa nella soluzione.

Si noti però che quest'ultima può cambiare col tempo in funzione dell'evaporazione. Ciò conduce anche a variazioni della corrente nella cella e conseguentemente della resistenza della stessa.

Questo cosa suggerisce sul modo di calcolare il valore di  $R_c$  da inserire in (1.41)?

I valori ottenuti possono essere confrontati ad esempio con i valori noti del raggio covalente e del raggio atomico del rame, pari rispettivamente a:

$1.17 \cdot 10^{-10}$  m, e  $1.568 \cdot 10^{-10}$  m.