SOBRE LA SUMA DE SERIES DIVERGENTES

por

JUAN B. KERVOR
Buenos Aires

El presente trabajo ha sido realizado en el Seminario de Matemáticas que dirige el Prof. Dr. Julio Rey Pastor. Me es grato dejar constancia de mi agradncimiento al eminente maestro por sus indicaciones y consejos que me han sido muy útiles en la preparación de este trabajo.

El Prof. Borel en su célebre memoria sobre *Series Divergentes* (Annales de l'Ecole Normale, tomo 16, pág. 196, Año 1899) estudia para aplicar su método de sumación exponencial la ecuación diferencial lineal

$$x^2 y' + y = x^2 \tag{1}$$

Se sabe que una solución formal de esta ecuación es la serie de potencias de radio nulo

$$y = x^2 - 2\,x^3 + 2.3.\,x^4 - 2.3.4.\,x^5 + 2.3.4.5\,x^6 - \dots \tag{2}$$

Aplicando el método exponencial a esta serie divergente para todo $x \neq 0$ resulta

$$y = \int_0^\infty e^{-u}\,[u\,x - \log\,(1 + u\,x)]\,du$$

Para poder calcular efectivamente esta integral reduciéndola a una conocida, la transformaremos así

$$y = x\int_0^\infty e^{-u}\,u\,du + \int_0^\infty \log\,(1 + u\,x)\;d(e^{-u})$$

$$= x\; + [e^{-u}\log\,(1 + u\,x)]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-u}.xdu}{1+ux}$$

y haciendo el cambio de variable

$$u = z - \frac{1}{x}$$

se tiene como suma de (2)

$$y = x - e^{\frac{1}{x}} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z}\, dz \tag{3}$$

y basta entonces recurrir a las tablas de logaritmo integral (por ej. las de Jahnke y Emde) para el cálculo efectivo de esta expresión.

Así para $x = 1$, por ejemplo, la serie divergente

$$1! - 2! + 3! - 4! + 5! - 6! + \dots$$

tiene como suma

$$S = 1 - e \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z}\, dz = 1 - e\,0{,}2194 = 0{,}40367.$$

Es sabido que la sumación de series potenciales de radio nulo, no puede efectuarse con los métodos de Abel, Cesaro, Euler, etc., y precisamente constituye uno de los grandes méritos que han dado fama al método Borel, el lograr en muchos casos la sumación de tales series.

Sin embargo estos deben ser de un tipo muy particular, para que la correspondiente serie asociada sea una función conocida y por tanto la integral de Borel pueda calcularse.

Nos proponemos dar un método más general que efectúe la sumación de series de radio nulo para las cuales el método de Borel es ineficaz.

Observemos en primer lugar que no tiene nada de extraordinario el hecho de que la suma Borel satisfaga a la ecuación diferencial, pues un sencillo cambio de variables en una integración por partes, transforma lo integral entre 0 y ∞ de Borel en la clásica solución de la ecuación lineal.

En efecto, la solución de (1) está dada por la fórmula

$$y = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x e^{-\frac{1}{x}}\, dx.$$

Integrando por partes se tiene

$$y = e^{\frac{1}{x}} \left[x e^{-\frac{1}{x}} - \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\, dx \right] = x - e^{\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\, dx.$$

Haciendo en la integral el cambio de variable $\frac{1}{x} = z$ se tiene, pues

$$y = x - e^{\frac{1}{x}} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z}\, dz$$

resultado idéntico a (3).

Parece pues natural, definir como suma de una serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, que satisface formalmente a una ecuación diferencial lineal, la integral de esta que es nula para $x = 0$. Este método cumple la condición esencial de todo método de sumación, o sea que aplicado a una serie de radio no nulo de como suma el valor de esta serie dentro de su círculo de convergencia. En efecto, tal serie constituye en ese caso el desarrollo convergente de la expresión bien conocida que dá la integral general de la ecuación y por lo tanto la función que damos coincide con la suma efectiva de la serie. Con este método tan sencillo logramos sumar series de la forma

$$y = x^m - m\, x^{m+h} + m(m+h) x^{m+2h} - m(m+h)(m+2h) x^{m+3h} + \dots \tag{4}$$

de radio nulo. Si $m + nh \neq 0$, para todo n, serie que satisface formalmente a la ecuación diferencial

$$x^{h+1} y' + y = x^m$$

cuando m y h satisfacen a cierta relación que veremos más adelante.

Igualmente es posible sumar con una fórmula única, una infinidad de series divergentes de la forma (4) no sumables por el Método de Borel.

I) La ecuación diferencial

$$x^{h+1} y' + y = x^m \tag{5}$$

tiene como solución la expresión

$$y = e^{\frac{1}{hx^h}} \int_0^x e^{-\frac{1}{hx^h}} x^{m-h-1}\, dx \quad \text{para} \quad m \geqq h+1.$$

Para reducir esta integral a un tipo conocido, integramos por partes y se tiene

$$y = e^{\frac{1}{hx^h}} \left[e^{-\frac{1}{hx^h}} \frac{x^{m-h}}{m-h} - \frac{e^{-\frac{1}{hx^h}} x^{m-2h}}{(m-h)(m-2h)} + \right.$$

$$\left. \frac{e^{-\frac{1}{hx^h}} x^{m-3h}}{(m-h)(m-2h)(m-3h)} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{m-nh} e^{-\frac{1}{hx^h}}}{(m-h)(m-2h)\ldots(m-nh)} \right]_0^x +$$

$$\frac{(-1)^{n+2} e^{\frac{1}{hx^h}}}{(m-h)(m-2h)\ldots(m-nh)} \int_0^x e^{-\frac{1}{hx^h}} x^{m-nh-h-1}\, dx$$

o sea

$$y = \frac{x^{m-h}}{m-h} - \frac{x^{m-2h}}{(m-h)(m-2h)} + \frac{x^{m-3h}}{(m-h)(m-2h)(m-3h)} - \ldots +$$

$$\frac{(-1)^{n+1} x^{m-nh}}{(m-h)(m-2h)\ldots(m-nh)} +$$

$$\frac{(-1)^{n+2} e^{\frac{1}{hx^h}}}{(m-h)(m-2h)\ldots(m-nh)} \int_0^x e^{-\frac{1}{hx^h}} x^{m-nh-h-1}\, dx. \tag{6}$$

Ahora bien, veamos qué relación debe haber entre m, n y h para que al tender x hacia cero se tenga $y=0$.

En efecto, para que $y \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow 0$ debe verificarse en (6) que

$$\lim_{x=0} \frac{\int_0^x e^{-\frac{1}{hx^h}} x^{m-nh-h-1} dx}{e^{-\frac{1}{hx^h}}} = 0.$$

Aplicando la regla de L'Hôpital, se tiene:

$$\lim_{x=0} \frac{e^{-\frac{1}{hx^h}} x^{m-nh-h-1}}{e^{-\frac{1}{hx^h}} x^{-h-1}} = \lim_{x=0} x^{m-nh}.$$

Este límite será cero cuando se verifique

$$m-nh>0.$$

Supongamos $m-nh=q \geqq 1$, que será una condición para que se cumpla $y=0$ cuando $x=0$.

Tendremos entonces como solución de la ecuación diferencial (1) que cumple la condición $y=0$ para $x=0$ la siguiente expresión

$$y=\frac{x^{m-h}}{m-h}-\frac{x^{m-2h}}{(m-h)(m-2h)}+\frac{x^{m-3h}}{(m-h)(m-2h)(m-3h)}\cdots+$$

$$\frac{(-1)^{n+1}x^q}{(m-h)(m-2h)\ldots q}+\frac{(-1)^{n+2}e^{\frac{1}{hx^h}}}{(m-h)(m-2h)\ldots q}\int_0^x e^{-\frac{1}{hx^h}} x^{q-h-1}\,dx.$$

Haciendo en esta última integral el cambio de variable

$$\frac{1}{hx^h}=t$$

se tiene finalmente como solución de (5)

$$y=\frac{x^{m-h}}{m-h}-\frac{x^{m-2h}}{(m-h)(m-2h)}+\frac{x^{m-3h}}{(m-h)(m-2h)(m-3h)}-\dots+$$

$$\frac{(-1)^{n+1}x^q}{(m-h)(m-2h)\dots q}+\frac{(-1)^{n+2}e^{\frac{1}{hx^h}}}{h^{\frac{q}{h}}\,(m-h)(m-2h)\dots q}\int_{\frac{1}{hx^h}}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t^{\frac{q}{h}}}dt \qquad (7)$$

expresión convergente para $x>0$.

La expresión (7) puede aún simplificarse, pues suponiendo $\frac{q}{h}<1$ tenemos

$$\int_{\frac{1}{hx^h}}^{\infty} e^{-t}\,t^{-\frac{q}{h}}\,dt=\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{-\frac{q}{h}}\,dt-\int_0^{\frac{1}{hx^h}} e^{-t}\,t^{-\frac{q}{h}}\,dt. \qquad (8)$$

Pero

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{-\frac{q}{h}}\,dt=\left[\frac{e^{-t}t^{1-\frac{q}{h}}}{1-\frac{q}{h}}\right]_0^{\infty}+$$

$$+\frac{1}{1-\frac{q}{h}}\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{1-\frac{q}{h}}\,dt=\frac{1}{1-\frac{q}{h}}\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{1-\frac{q}{h}}\,dt.$$

Recordando el valor de la integral euleriana de 2ª. especie, se tiene

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{-\frac{q}{h}}\,dt=\left(-\frac{q}{h}\right)!.$$

Para calcular el sustraendo de (8) integramos por partes

$$\int_0^{\frac{1}{hx^h}} e^{-t}\,t^{-\frac{q}{h}}\,dt=\left[\frac{e^{-t}t^{1-\frac{q}{h}}}{1-\frac{q}{h}}\right]_0^{\frac{1}{hx^h}}+\frac{1}{1-\frac{q}{h}}\int_0^{\frac{1}{hx^h}} e^{-t}\,t^{1-\frac{q}{h}}\,dt=$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{hx^h}}}{(1-\frac{q}{h})h^{1-\frac{q}{h}}\,x^{h(1-\frac{q}{h})}} + \frac{1}{1-\frac{q}{h}}\int_0^{\frac{1}{hx^h}} e^{-t}\,t^{1-\frac{q}{h}}\,dt.$$

Se tiene entonces

$$\int_{\frac{1}{hx^h}}^{\infty} e^{-t}\,t^{-\frac{q}{h}}\,dt = \left(-\frac{q}{h}\right)! - \frac{e^{-\frac{1}{hx^h}}}{(1-\frac{q}{h})h^{1-\frac{q}{h}}\,x^{h(1-\frac{q}{h})}} -$$

$$- \frac{1}{1-\frac{q}{h}}\int_0^{\frac{1}{hx^h}} e^{-t}\,t^{1-\frac{q}{h}}\,dt. \qquad (9)$$

Ahora bien, para calcular esta última integral procedemos así

$$\int_0^{\frac{1}{hx^h}} e^{-t}\,t^{1-\frac{q}{h}}\,dt = \int_0^{\frac{1}{hx^h}} \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots\right) t^{1-\frac{q}{h}}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{hx^h}} \left(t^{1-\frac{q}{h}} - t^{2-\frac{q}{h}} + \frac{t^{3-\frac{q}{h}}}{2!} - \frac{t^{4-\frac{q}{h}}}{3!} + \frac{t^{5-\frac{q}{h}}}{4!} - \frac{t^{6-\frac{q}{h}}}{5!} + \dots\right) dt$$

$$= \left[\frac{t^{2-\frac{q}{h}}}{2-\frac{q}{h}} - \frac{t^{3-\frac{q}{h}}}{3-\frac{q}{h}} + \frac{t^{4-\frac{q}{h}}}{2!\,(4-\frac{q}{h})} - \frac{t^{5-\frac{q}{h}}}{3!\,(5-\frac{q}{h})} + \frac{t^{6-\frac{q}{h}}}{4!\,(6-\frac{q}{h})} - \right.$$

$$\left. \frac{t^{7-\frac{q}{h}}}{5!\,(7-\frac{q}{h})} + \dots \right]_0^{\frac{1}{hx^h}} = \frac{1}{h^{2-\frac{q}{h}}\,(2-\frac{q}{h})\,x^{h(2-\frac{q}{h})}} -$$

$$- \frac{1}{h^{3-\frac{q}{h}}\,(3-\frac{q}{h})\,x^{h(3-\frac{q}{h})}} + \frac{1}{2!\,h^{4-\frac{q}{h}}\,(4-\frac{q}{h})\,x^{h(4-\frac{q}{h})}}$$

$$- \frac{1}{3!\,h^{5-\frac{q}{h}}\,(5-\frac{q}{h})\,x^{h(5-\frac{q}{h})}} + \frac{1}{4!\,h^{6-\frac{q}{h}}\,(6-\frac{q}{h})\,x^{h(6-\frac{q}{h})}} - \dots$$

serie alternada rápidamente convergente.

Resumiendo

$$\int_0^{\frac{1}{hx^h}} e^{-t}\, t^{1-\frac{q}{h}}\, dt = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{p!\, h^{p+2-\frac{q}{h}} \left(p+2-\frac{q}{h}\right) x^{h\left(p+2-\frac{q}{h}\right)}}. \tag{10}$$

Teniendo en cuenta (9) y (10) se tiene finalmente como solución de la ecuación (5) la expresión

$$y = \frac{x^{m-h}}{m-h} - \frac{x^{m-2h}}{(m-h)(m-2h)} + \frac{x^{m-3h}}{(m-h)(m-2h)(m-3h)} - \ldots +$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1} x^q}{(m-h)(m-2h)\ldots q} + \frac{(-1)^{n+2} e^{\frac{1}{hx^h}} \left(-\frac{q}{h}\right)!}{h^{\frac{q}{h}} (m-h)(m-2h)\ldots q} -$$

$$\frac{(-1)^{n+2}}{h(m-h)(m-2h)\ldots q} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{q}{h}\right) x^{h\left(1-\frac{q}{h}\right)}} - \frac{(-1)^{n+2} e^{\frac{1}{hx^h}}}{h^{\frac{q}{h}} (m-h)(m-2h)\ldots q} \times$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{q}{h}\right)} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{p!\, h^{p+2-\frac{q}{h}} \left(p+2-\frac{q}{h}\right) x^{h\left(p+2-\frac{q}{h}\right)}}. \tag{11}$$

La expresión (11) es convergente para todo $x > 0$, pues la serie (10) es una serie alternada convergente para todo valor positivo de x. Para $x \to 0$ la serie tiende en virtud de (10) a

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{1-\frac{q}{h}}\, dt = \left(1 - \frac{q}{h}\right)!$$

y para $x \to \infty$ tiende a cero como es obvio verlo.

Tomando en la serie de (11) un número $p+1$ par de términos, se tiene de acuerdo a la teoría de las series alternadas convergentes que el error cometido será menor que el $(p+2)^{\text{ésimo}}$ término y mayor que la diferencia entre el $(p+3)^{\text{ésimo}}$ término con el $(p+2)^{\text{ésimo}}$.

En nuestro caso tendremos

$$R_n < \frac{e^{\frac{1}{hx^h}}}{h^{\frac{q}{h}}(m-h)(m-2h)\ldots q} \cdot \frac{1}{1-\frac{q}{h}} \times$$

$$\times \frac{1}{(p+1)!\, h^{p+3-\frac{q}{h}}\left(p+3-\frac{q}{h}\right) x^{h\left(p+3-\frac{q}{h}\right)}}. \tag{12}$$

Veamos un ejemplo, supongamos $h=2$, $m=5$. Se tiene la ecuación diferencial

$$x^3 y' + y = x^5. \tag{13}$$

La solución formal de esta ecuación en serie de potencias y tal que para $x=0$ se tenga $y=0$, es la siguiente

$$y = x^5 - 5\,x^7 + 5.7\,x^9 - 5.7.9\,x^{11} + 5.7.9.11\,x^{13} - \ldots . \tag{14}$$

Por otro lado aplicando (11) y haciendo $q=1$ se tiene en virtud de la ecuación de condición

$$m - n\,h = q, \quad 5 - 2\,n = 1, \quad \text{o sea} \quad n = 2.$$

Por lo tanto tendremos

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + \frac{e^{\frac{1}{2x^2}}}{3.\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)! - \frac{1}{2.3} \cdot \frac{2}{x} -$$

$$- \frac{e^{\frac{1}{2x^2}}}{3.\sqrt{2}} \cdot 2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{p!\,2^{p+3/2}(p+3/2)x^{2p+3}}. \tag{15}$$

Haciendo $x=1$ en (14) se tiene la serie divergente

$$1 - 5 + 5.7 - 5.7.9 + 5.7.9.11 - 5.7.9.11.13 + \ldots \tag{16}$$

cuya suma se obtiene haciendo $x=1$ en (15).

Se tiene entonces como suma de (16)

$$y = \frac{\sqrt{e}}{3.\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)! - \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{e}}{3}\left[\frac{1}{2.3} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2^2.5} + \frac{1}{2!2^3.7} - \frac{1}{3!2^4.9} + \dots\right].$$

Tomando $p=3$ o sea 4 términos de la serie entre corchetes, se tiene de acuerdo a (12) la suma con un error

$$R_n < \frac{2\sqrt{e}}{3} \cdot \frac{1}{4!2^5 11} < \frac{\sqrt{e}}{3.4!2^4.11} < 0{,}000\ 13.$$

Ahora bien para calcular S recordemos que

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Se tiene entonces como suma de (16) por exceso

$$S = 0{,}2185.$$

Resumiendo los resultados obtenidos en este trabajo podemos afirmar lo siguiente:

La serie divergente

$$y = x^m - m\,x^{m+h} + m(m+h)\,x^{m+2h} -$$

$$- m(m+h)\,(m+2\,h)\,x^{m+3h} + \dots \qquad (17)$$

satisface formalmente a la ecuación diferencial

$$x^{h+1}\,y' + y = x^m.$$

Ahora bien, cuando se cumple

$$m \geqq 2, \quad h \geqq 1, \quad q \geqq 1$$

y la ecuación de condición

$$m - n\,h = q \qquad (18)$$

es posible sumar una infinidad de series divergentes de la forma (17) *aplicando la fórmula* (11).

En particular para $h=1$ y $m=2$, tenemos la ecuación diferencial (1) que usa el Prof. Borel, en su memoria y su correspondiente solución formal en serie de potencias que se obtiene haciendo $h=1$ y $m=2$ en (17) o sea

$$x^2 - 2\,x^3 + 2.3.\,x^4 - 2.3.4\,x^5 + 2.3.4.5\,x^6 - \dots$$

cuya suma se obtiene aplicando (11) y teniendo en cuenta que de (18) resulta $q=1$.

Aplicando (7) tenemos entonces

$$y = x - e^{\frac{1}{x}} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

resultado bien conocido.