Boletín de Matemáticas
Vol. VI Nº 4 pp. 1-9

EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE ZERMELO EN LOS CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS Y LOS PRINCIPIOS TRANSFINITOS DE EXISTENCIA.

G. H. MEISTERS

Existen varios principios transfinitos de existencia equivalentes entre sí. Se sabe que todos ellos son independientes de los otros principios (axiomas) de la teoría de conjuntos y por lo tanto no pueden "demostrarse" sino únicamente aceptarlos o rechazarlos como axiomas. Su aceptación se basa principalmente en su utilidad para demostrar teoremas. Ha sucedido algunas veces que un teorema demostrado primeramente con su ayuda se ha demostrado luego (con una demostración más larga) sin ella. Por ejemplo, la existencia de una medida invariante en los grupos topológicos localmente compactos [Haar 1933. Henri Cartan 1940. Véase L. Nachbin, "The Haar Integral", D. Van Nostrand Co., Inc., N.Y., 1965] . Por otra parte, existen ciertos teoremas que se saben equivalentes a estos principios de existencia transfinita o que al menos no pueden demostrarse usando únicamente los otros axiomas de la teoría de conjuntos. Por ejemplo el teorema de Tijonov de que el producto cartesiano de cualquier colección de espacios compactos es compacto. [Cfr., Kelley, Fund. Math., 37 (1950), 75-76] ó el teorema de Hamel de que todo espacio vectorial tiene una base de vectores. A menudo veremos que aunque un teorema puede demostrarse sin su ayuda (e.g., el teorema del punto fijo de Zermelo, enunciado adelante), se puede dar una demostración más corta sin su ayuda .

Discutiremos aquí la equivalencia de los siguientes tres principios de existencia transfinita .

1. ***Axioma de elección de Zermelo.*** E. Zermelo (1871 - 1956), "Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann", Math. Ann., 59 (1904), 514 - 516. *Si* $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *es una familia no vacía de conjuntos no vacíos, existe entonces una función* $\phi : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ *tal que* $\phi(\lambda) \in X_\lambda$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$.

2. ***Principio maximal de Hausdorff.*** Felix Hausdorff (1868 - 1914), " Grundzuge der Mengenlehre" , Leipzig, 1914. Reimpreso por la Chelsea Pub. Co., N. Y., p.140. *Todo conjunto preordenado* $(P, <)$ *contiene una cadena maximal.*

3. ***Lema de Zorn.*** Max Zorn, " A remark on a method in transfinite algebra", Bull. Amer. Math. Soc., 41 (1935) , 667-670. Véase también : R. L. Moore, "Foundations of point set theory", Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., volumen 13, N.Y., 1932. En realidad este principio fue descubierto independientemente por R. L. Moore y Kuratowski en 1923.

Si cada cadena en un conjunto preordenado $(P, <)$ *tiene una cota superior en* P, *entonces* P *tiene por lo menos un elemento maximal* .

La demostración de la equivalencia de estos tres principios se facilita enormemente si se establece primero un teorema de punto fijo en los conjuntos ordenados debido a Zermelo. ["Neuer Bewis fur die Moglichkeit einer Wohlordnung", Math. Ann., 65 (1908), 107 - 128] . *Supongamos que cada cadena en un conjunto parcialmente ordenado* $(P, <)$ *y no vacío tiene un extremo superior en* P. *Si para alguna función* $f : P \to P$, $x < f(x)$ *para todos los* x *en* P, *entonces* f *tiene un punto fijo* x^* *en* $P : f(x^*) = x^*$.

La demostración de este teorema *no requiere* ninguno de los anteriores tres principios ni ningún otro de tales principios.

I. El Teorema del punto fijo de Zermelo en los conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 1. Un *conjunto preordenado* $(P, <)$ es un conjunto P provisto de una relación transitiva y reflexiva $<$.

Transitiva : $a < b$ y $b < c$ implica $a < c$.

Reflexiva : $a < a$ para todo a en P.

Definición 2. Un *conjunto parcialmente ordenado* $(P, <)$ es un conjunto preordenado cuya relación $<$ es antisimétrica.

Antisimétrica : $a < b$ y $b < a$ implica $a = b$.

Observación : Si $(P, <)$ es un conjunto preordenado, entonces "$x < y \wedge y < x$" es una relación de equivalencia (i.e., reflexiva, simétrica y transitiva) y si definimos una relación $[x] < [y]$ en la familia P de las clases de equivalencia $[x]$ de P como $x < y$, entonces $[x] < [y]$ es un orden parcial en $\hat{P}$.

Definición 3. Una *cadena* C en un conjunto preordenado $(P, <)$ es un subconjunto de P tal que para cualesquiera dos elementos $x, y \in C$ ora $x < y$ ora $y < x$.

Definición 4. Un *conjunto totalmente ordenado* es un conjunto parcialmente ordenado que es a su vez una cadena.

Definición 5. Un elemento m de un conjunto preordenado $(P, <)$ se dice un elemento *maximal* de P si y sólo si $m < y$ é $y \in P$ $y \in P$ implica $y < m$.

Observación. Las nociones de *elemento minimal, cota superior, cota inferior, extremo superior* y *extremo inferior* tienen todas definiciones obvias en los conjuntos preordenados.

Teorema del punto fijo de Zermelo. *Supongamos que cada cadena en un conjunto parcialmente ordenado* $(P, <)$ *no vacío tiene un extremo superior en* P. *Si* $f: P \to P$ *es una función que satisface* $x < f(x)$ *para todos los* $x \in P$, *existe entonces un elemento* x^* *de* P *tal que* $f(x^*) = x^*$.

Demostración. Sea a un elemento de P, el cual permanecerá fijo durante la demostración. Un subconjunto B de P se llamará *admisible* si tiene las siguientes propiedades :

(i) $a \in B$

(ii) $f(B) \in B$

(iii) Cada extremo superior de una cadena en B está en B.

Existe por lo menos un conjunto admisible, a saber P. También la intersección de una familia arbitraria de conjuntos admisibles es admisible, pues

$$f(\cap_\alpha B_\alpha) \subset \cap_\alpha f(B_\alpha) \subset \cap_\alpha B_\alpha .$$

Luego la intersección A de *todos los subconjuntos admisibles de* P *es un conjunto admisible mínimo.* Como el conjunto $\{ x \in P : a < x \}$ es un conjunto admisible (esto se verifica fácilmente), se sigue que

(iv) $a < x$ para todo $x \in A$.

Sea ahora $L = \{ x \in A \; ; \; y \in A, \; y < x \;\; y \neq x \Rightarrow f(y) < x \}$.

Mostramos inmediatamente que

(v) $x \in L$ y $z \in A$ implica $f(x) < z$ ó $z < x$.

Fijemos x en L y definamos $B_x = \{ x \in A : f(x) < z$ ó $z < x \}$. La condición (iv) muestra que B_x tiene la propiedad (i). El *conjunto* B_x *tiene la propiedad* (ii) : pues si u es un extremo superior de una cadena F en B_x, entonces ora $y < x$ para cada $y \in F$, en cuyo caso $u < x$ (porque u es un extremo superior de F), ora $f(x) < y$ para algún $y \in F$, en cuyo caso $f(x) < y < u \Rightarrow f(x) < u$. Por consiguiente, B_x es un subconjunto admisible de A, y por lo tanto $B_x = A$ (para cada $x \in L$), lo cual demuestra la propiedad (v).

Mostraremos en seguida que L es admisible. L satisface vacíamente la condición (i)(pues $<$ es antisimétrica). Para demostrar que L tiene la propiedad (ii), sea $x \in L$. Mostraremos que si $z \in A$, $z < f(x)$ y $z \neq f(x)$, entonces $f(z) < f(x)$ [lo cual significa que $f(x) \in L$]. De (v), se tiene ora $f(x) < z$ ora $z < x$, de modo que si $z < f(x)$ y $z \neq f(x)$, entonces $z < x$. Luego como $x \in L$, si $z < x$ y $z \neq x$, se sigue que $f(z) < x < f(x)$; mientras que si $z = x$, $f(z) = f(x)$.

Para verificar que L tiene la propiedad (iii), sea v un extremo superior de una cadena $F \subset L$. Para ver que $v \in L$, sea $z \in A$, $z < v$, $z \neq v$. De

(v) se ve fácilmente que cada $x \in F$ satisface ora $z < x$ ora $x < f(x) < z$ La segunda posibilidad no puede ser válida para todo $x \in F$, pues entonces tendríamos $v < z$ (contrariamente a la hipótesis que $z < v$ y $z \neq v$). Luego para algún $z \in F$, $z < x$. Si $z < x$ y $z \neq x$, entonces $f(z) < x < v$, por la definición de L. Si $z = x$, y como $z \neq v$, existe un y en F con $z < y$ é $z \neq y$, en cuyo caso $f(z) < y < v$. En consecuencia, en ambos casos $f(z) < v$, lo cual muestra que $v \in L$ y que L tiene la propiedad (iii).

Por lo tanto, L es un subconjunto admisible de A, y así $L = A$. Por consiguiente, por (v) vemos que para dos elementos arbitrarios x, z en A, ora $z < x$ ora $x < f(x) < z$, lo cual indica que A está totalmente ordenado. Si $x^* \in P$ es un extremo superior de A, y como $f(x^*) \in A$, tenemos $x^* < f(x^*) < x^*$, y por consiguiente, dado que $<$ es antisimétrica, $f(x^*) = x^*$.

p.q.q.d.

II. Equivalencia de los principios transfinitos de existencia.

Teorema [*Teorema de Zermelo + Axioma de escogencia $\Rightarrow$ Principio maximal de Hausdorff*]. *Todo conjunto preordenado $(P, <)$ contiene una cadena maximal.*

Demostración. Sea C la familia de todas las cadenas en $(P, <)$ y ordenemos C por inclusión. Entonces el conjunto parcialmente ordenado $(C, \subset)$ no es vacío (porque contiene la "cadena vacía" ϕ aún si P es vacío), y además $(C, \subset)$ satisface las hipótesis del teorema del punto fijo de Zermelo. Si C no tiene elementos maximales, entonces a cada $C \in C$ corresponde un $f(C) \in C$ que contiene a C propiamente. (Aquí hemos usado el axioma de elección). Pero entonces esta función $f: C \to C$ contradice el teorema del punto fijo de Zermelo.

p.q.q.d.

Teorema. [Principio maximal de Hausdorff => Lema de Zorn] . *Si cada cadena en un conjunto preordenado* $(P, <)$ *tiene una cota superior en* P, *entonces* P *contiene por lo menos un elemento maximal.*

Demostración. Observemos en primer lugar que como cada cadena en P tiene una cota superior en P, el conjunto P no puede ser vacío, pues ϕ es una cadena en P aún si P es vacío. Ahora, por el principio maximal de Hausdorff, P contiene una cadena maximal C. Sea x una cota superior de C. Entonces $x^* \in C$, pues C es maximal. Además x^* es un elemento maximal de P. Pues si $y \in P$, $x^* < y$ é $y \notin C$, entonces $C \cup \{y\}$ es una cadena que contiene a C como subconjunto propio, lo cual contradice la hipótesis de que C es una cadena maximal en P. Por consiguiente $y \in P$ y $x^* < y$, implica $y \in C$, luego $y < x^*$

l.q.q.d.

Teorema. [Lema de Zorn => Axioma de elección]. *Si* $\{ X_\lambda ; \lambda \in \Lambda \}$ *es una familia no vacía de conjuntos no vacíos, entonces existe una función* $\phi : \Lambda \to \cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ tal que $\phi(\lambda) \in X_\lambda$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$.

Demostración. Sea F la familia de todas las funciones Ψ cuyos dominios D_Ψ son subconjuntos de Λ y $\Psi(\lambda) \in X_\lambda$ para cada $\lambda \in D_\Psi$. Ordenemos parcialmente F por *extensión de funciones* : es decir, definamos $\Psi_1 < \Psi_2$ equivaliendo a $D_{\Psi_1} \subset D_{\Psi_2}$ y $\Psi_1(\lambda) = \Psi_2(\lambda)$ para todos los $\lambda \in D_{\Psi_1}$. Entonces cada cadena en $(F, <)$ tiene una cota superior en F ; en efecto :

si $\{ \Psi_2 : \alpha \in A \}$ es una cadena en F, definamos $D = U_{\alpha \in A} D_{\Psi_\alpha} \subset \Lambda$ y $\Psi(\lambda) = \Psi_\alpha(\lambda)$ para $\lambda \in D_{\Psi_\alpha} \subset D$. Como las funciones $\{ \Psi_\alpha ; \alpha \in A \}$ forman una cadena, lo anterior define Ψ como una función, $\Psi \in F$, y Ψ es una cota superior (una extensión) de todas las funciones Ψ_α. Por el lema de Zorn F debe contener un elemento maximal, digamos ϕ. Se sigue que $D_\phi = \Lambda$, porque si hay un elemento $\lambda_o \in \Lambda$ tal que $\lambda_o \notin D_\phi$, entonces dado que $X_{\lambda o}$ no es vacío, existe un elemento $y \in X_{\lambda o}$ y ϕ', definida por $\phi'(\lambda_o) = y$ é $\phi'(\lambda) = \phi(\lambda)$ para todo $\lambda \in D_\phi$, es entonces una extensión propia de ϕ la cual pertenece a F, y contradice la maximalidad de $\phi \in F$.

l.q.q.d.

Teorema. *El Lema de Zorn implica el Teorema del punto fijo de Zermelo. Aún si reemplazamos "cota superior" por "extremo superior").*

Demostración. Sean $(P, <)$ y $f : P \to P$ satisfaciendo las hipótesis del teorema del punto fijo de Zermelo. Entonces $(P, <)$ satisface también las hipótesis del lema de Zorn. Sea x^* un elemento maximal de P (cuya existencia resulta del lema de Zorn). Como $x^* < f(x^*)$ y $f(x^*) \in P$, síguese que $f(x^*) < x^*$, usando la maximalidad de x^*. Pero como $<$ es antisimétrica, tenemos $f(x^*) = x^*$.

p.q.q.d.

III. Algunos otros principios equivalentes al lema de Zorn.

1. Una familia Φ de conjuntos se dice de carácter finito si y sólo si cada subconjunto finito de un miembro de Φ es un miembro de Φ y todo conjunto A del cual todo subconjunto finito pertenece a Φ, también pertenece a Φ.

Lema de Tukey. *Toda familia no vacía de carácter finito tiene un elemento maximal.*

Ejercicio. Deduzca esto del lema de Zorn.

2. ***Lema de Kuratowski.*** *Toda cadena en un conjunto parcialmente ordenado está contenido en una cadena maximal.*

Ejercicio. Deduzca esto del lema de Zorn.

3. Un conjunto se dice *bien ordenado* si se le ha provisto con un orden total para el cual todo subconjunto no vacío tiene un elemento mínimo.

Principio de la buena ordenación. *Todo conjunto no vacío admite un buen orden.* Este resultado fue deducido por Zermelo del Axioma de elección en 1904.

4. ***Comparabilidad de cardinales.*** Dados dos conjuntos, ellos son equivalentes (i.e., están en correspondencia biunívoca), o uno de ellos es equivalente a un subconjunto del otro. En otras palabras, dados dos números cardinales, uno es menor que el otro.

Para más detalles sobre la teoría de conjuntos (incluyendo su desarrollo histórico y sus aspectos filosóficos) recomendamos vivamente:

Abraham A. Fraenkel. " Abstract Set Theory", North-Holland Pub. Co., Amsterdam 1953.

También para una lectura más avanzada ver

Paul J. Cohen " Set Theory and the Continuum Hypothesis", Benjamín, 1966 .

* * *