Sociedad Colombiana de Matemáticas
XV Congreso Nacional de Matemáticas
2005 **Apuntes**

Lecturas Matemáticas
Volumen Especial (2006), páginas 285–298

Ecuaciones diofánticas y engranajes cilíndricos

Carlos Alberto Casas Figueroa
Universidad Javeriana, Cali, Colombia

Abstract. The problem of designing a cylindrical gear in order to transmit fast wheel work starting from an existent ratio between the number of teeth of two sprockets, can be approached as integer positive solutions of Diophantine equations of the form $ax + by = c$.

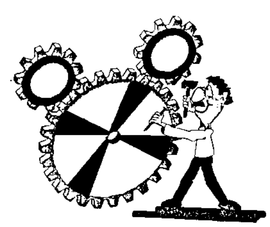
Key words and phrases. Diophantine equations, Gears, Continued fractions, Convergents.

*2000 AMS Mathematics Subject Classification.*Primary: 54H25. Secondary: 47H10.

Resumen. El problema de diseñar un engranaje cilíndrico en el cual se transmite un movimiento rápido de rodaje o desfogue del engranaje a partir de una relación existente entre el número de dientes de dos piñones, se puede abordar como las soluciones enteras positivas de una ecuación diofántica de la forma $ax + by = c$.

1. Introducción

Las ruedas dentadas sirven para la transmisión de potencia o movimientos entre dos o más ejes. La absorción de los choques en un engranaje cilíndrico es igual en cada uno de los dientes, si la relación de transformación es de la forma a/b, donde a y b son números primos relativos entre sí. La obtención de esta relación de transformación donde a y b son el número de dientes del engranaje cilíndrico, se puede apoyar en las ecuaciones diofánticas y el concepto fundamental de las reducidas. El proceso abordado con las ecuaciones diofánticas y las reducidas de una



fracción es un método alternativo para el cálculo de las relaciones de transformación que conlleva a disminuir el error en las relaciones de transformación.

Inicialmente se desarrolla el punto de vista teórico del problema como soporte, para finalmente aplicarlo a los engranajes cilíndricos.

2. Ecuaciones diofánticas

Una ecuación lineal con dos incógnitas no es suficiente para determinar el valor de éstas, si deseamos encontrar una solución única. Pues dos cantidades x e y no están unívocamente determinadas más que en el caso de haber entre ellas dos ecuaciones independientes. Pero si alguna de las incógnitas x e y, se les exige que sean números enteros positivos, esta condición puede reemplazar la segunda ecuación. En este caso la ecuación se llama diofántica, en recuerdo del matemático Diofanto, quien vivió en Alejandría hacia el año 275 de nuestra era y creó el análisis indeterminado o análisis diofántico, que es un método para buscar soluciones enteras de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones algebráicas con coeficientes enteros.

Reciben el nombre de ecuaciones diofánticas de primer grado con dos incógnitas, las ecuaciones de la forma $ax + by = c$, donde las incógnitas x, y son números enteros positivos.

Soluciones posibles: Aún en el caso de ser posible hallar valores de x e y que, satisfaciendo la condición de ser enteros y positivos, verifiquen estas ecuaciones, existirá siempre, una notable diferencia entre las ecuaciones diofánticas de primer grado y las ecuaciones ordinarias de primer grado con dos incógnitas. En efecto ocurre que mientras:

Una ecuación lineal con dos incógnitas	**Una ecuación diofánticas de primer grado**
Tiene infinitas soluciones en los números reales	1. No tiene solución 2.Tiene una o un número finito de soluciones 3. Tiene infinidad de soluciones

Condición para la existencia de soluciones:

Una ecuación Diofántica $ax + by = c$, en la cual los coeficientes de las incógnitas tienen un factor común, que no divide exactamente al segundo miembro, no tiene solución.

Si se divide la ecuación por el factor común a esos coeficientes enteros, en el primer miembro, se obtienen coeficientes enteros para las incógnitas, mientras que en el segundo miembro, resulta una fracción. Como un par de valores enteros x e y hacen que el primer miembro sea entero, sería preciso, para que existiera solución, que un número entero fuera igual a una fracción. Esto no es posible.

Ejemplo: Sea la ecuación $20x + 15y = 7$

Factor común para 20 y 15 es 5 y no lo es para 7 luego la ecuación sería:

$4x + 3y = 7/5$

Por lo tanto: Para que una ecuación Diofántica $ax+by = c$ tenga soluciones, es preciso que los coeficientes a, b de las incógnitas sean números primos relativos. Es decir factores comunes para $(a, b) = 1$.

Ejemplo: Sea la ecuación $12x - 7y = 4$.

Cumple la condición factores comunes $(12, 7) = 1$. Algunas posibles soluciones son:

x	12	19
y	20	32

Verifiquemos: $12(12) - 7(20) = 4$ $\quad$ $12(19) - 7(32) = 4$
$144 - 140 = 4$ $\quad$ $228 - 224 = 4$

¿Pero cómo se obtuvieron estas soluciones?

Veamos como hallar una solución cualquiera de la ecuación $127x-52y = -1$

Sea la relación $\dfrac{127}{52}$ donde $a = 127$ y $b = 52$.

Ejecutemos la división entre el numerador y el denominador de la fracción, esto origina un cociente incompleto y un residuo, en seguida se efectuan divisiones a partir del divisor original así: primera división, el divisor original dividido por el primer residuo y cada nueva división, el nuevo residuo dividirá al anterior residuo, hasta que se logre un residuo cero.

Sean las divisiones, donde:

a_i : Los cocientes incompletos

r_i : Los residuos

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a	b	r_1	r_2	r_3	r_4
r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	

La expresión obtenida da como resultado:

$$\frac{127}{52} = 2 + \frac{23}{52} = 2 + \frac{1}{52/23} = 2 + \frac{1}{2 + 6/23} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{23/6}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + 5/6}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6/5}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + 1/5}}}$$

La expresión obtenida se llama *fracción continua limitada* o *finita*.

Suprimiendo el último término de esta fracción, que es $1/5$, transformamos la fracción continua que acabamos de obtener en una fracción ordinaria y la restamos de la fracción inicial.

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}=2+\cfrac{1}{\frac{8+1}{4}}=2+\cfrac{1}{\frac{9}{4}}=2+\frac{4}{9}=\frac{22}{9}$$

$$\frac{127}{52}-\frac{22}{9}=\frac{1143-1144}{52\times 9}=\frac{1}{52\times 9}$$

Reduciendo la expresión hallada a un denominador común, se obtiene:

$$\begin{aligned} 127\times 9-52\times 22=-1\Rightarrow 127(9)-52(22)+1&=0\\ 127X-52Y+1&=0 \end{aligned}$$

Comparando esta igualdad obtenida con la ecuación. Concluimos que: $x=9$ e $y=22$ son solución de esta ecuación.

La validez de esta solución se apoya en el concepto de las *reducidas* de una fracción. Llámase *reducida* de una fracción al proceso de suprimir el último término en una fracción continua, esto significa que se obtiene de una fracción continua, tantas reducidas como cocientes incompletos se haya podido efectuar. Observemos en nuestro ejemplo el número de reducidas que se pueden plantear.

a_i

	2	2	3	1	5
127	52	23	6	5	1
23	6	5	1	0	

r_i

Recuerde:
a_i: conciente incompleto
r_i: residuo

Luego:

a_i	2	2	3	1	5

La expresión obtenida da como resultado:

$$\frac{127}{52}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}$$

Tenemos cinco cocientes incompletos luego podemos plantear: $n=5$ *reducidas* así:

Sea R_i una reducida cualquiera

$$\mathbf{R}_5 = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}} = \frac{127}{52} = \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_5}{q_5} \qquad \mathbf{R}_4 = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}} = \frac{22}{9} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_4}{q_4}$$

$$\mathbf{R}_3 = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}} = \frac{17}{7} = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{p_3}{q_3} \qquad \mathbf{R}_2 = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{p_{n-3}}{q_{n-3}} = \frac{p_2}{q_2}$$

$$\mathbf{R}_1 = 2 = \frac{p_{n-4}}{q_{n-4}} = \frac{p_1}{q_1}$$

El cálculo de cada una de ellas se vuelve un proceso dispendioso.

¿Cómo se pueden obtener?

$\mathbf{a}_i$	**2**	**2**	**3**	**1**	**5**

$R_1 = a_1 = 2 \Rightarrow p_1 = 2; q_1 = 1$

$$R_2 = \frac{2\times 2+1}{2} = \frac{(a_1)\times(a_2)+1}{a_2} = \frac{5}{2} \Rightarrow p_2 = 5; q_2 = 2$$

$$R_3 = 2+\cfrac{1}{\cfrac{2\times 3+1}{3}} = 2+\frac{3}{2\times 3+1} = \frac{3\times 2\times 2+3+2}{2\times 3+1}$$
$$= \frac{3(2\times 2+1)+2}{3\times 2+1} = \frac{a_3\times(a_1\times a_2+1)+a_1}{a_3\times a_2+1}$$

Observemos detenidamente $P_2 = a_1\times a_2+1; P_1 = a_1; q_2 = a_2; q_1 = 1$. Luego:

$$R_3 = \frac{a_3\times p_2+p_1}{a_3\times q_2+q_1} = \frac{3\times 5+2}{3\times 2+1} = \frac{17}{7} \Rightarrow p_3 = 17; q_3 = 7\,.$$

Según lo anterior, entonces R_4 y R_5 serán:

$$R_4 = \frac{a_4\times p_3+p_2}{a_4\times q_3+q_2} = \frac{1\times 17+5}{1\times 7+2} = \frac{22}{9} \Rightarrow p_4 = 22; q_4 = 9\,.$$

$$R_5 = \frac{a_5\times p_4+p_3}{a_5\times q_4+q_3} = \frac{5\times 22+17}{5\times 9+7} = \frac{127}{52} \Rightarrow p_5 = 127; q_5 = 52\,.$$

De lo anterior se puede plantear lo siguiente:

Teorema 2.1. *Utilizando el método de inducción matemática se demuestra que las relaciones de este mismo tipo:*

$$P_k = a_k P_{k-1} + P_{k-2} \ ; \ q = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \tag{2.1}$$

son válidas para $k \geq 3$.

Demostración: Supongamos que las igualdades (**??**) se cumplen para cualquier $k \geq 3$. De la definición de las fracciones reducidas se desprende directamente, que sustituyendo en la expresión R_k las magnitudes a_k por: $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$. La expresión R_k se convierte en $\mathbf{R}_{k+1}$. Por inducción tenemos que:

$$R_k = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}$$

Sustituyendo aquí a$_k$ por $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$ resulta

$$R_{k+1} = \frac{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{a_k p_{k-1} + \dfrac{p_{k-1}}{a_{k+1}} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + \dfrac{q_{k-1}}{a_{k+1}} + q_{k-2}}$$

$$R_{k+1} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2} + \dfrac{p_{k-1}}{a_{k+1}}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2} + \dfrac{q_{k-1}}{a_{k+1}}} = \frac{p_k + \dfrac{p_{k-1}}{a_{k+1}}}{q_k + \dfrac{q_{k-1}}{a_{k+1}}}$$

$$R_{k+1} = \frac{\dfrac{(a_{k+1})\, p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}}}{\dfrac{(a_{k+1})\, q_k + q_{k-1}}{a_{k+1}}} = \frac{(a_{k+1})\, p_k + p_{k-1}}{(a_{k+1})\, q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

Así, pues, de la validez de las igualdades (**??**) para cualquier $k \geq 3$, se deduce su validez para $k + 1$. ☑

3. Propiedad de la diferencia entre dos reducidas consecutivas

La diferencia de dos reducidas es:

$$R_k - R_{k-1} = \frac{(-1)^{(k)}}{q_k q_{k-1}} \quad (k > 1)\,.$$

En efecto,

$$R_k - R_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1}}{q_k q_{k-1}}$$

Apoyándonos en las igualdades (**??**) reemplacemos k por $k-1$

$$\begin{aligned} P_k q_{-1} - q_k P_{k-1} &= (a_k P_{k-1} + P_{k-2}) q_{k-1} - (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) P_{k-1} \\ &= a_k P_{k-1} q_{k-1} + q_{k-1} P_{k-2} - a_k P_{k-1} q_{k-1} - P_{k-1} q_{k-2} \\ &= -(P_{k-1} q_{k-2} - q_{k-1} P_{k-2})\,, \end{aligned}$$

reduciendo términos. Repitiendo la misma transformación en las expresiones obtenidas, resulta una sucesión de igualdades:

$$\begin{aligned} (P_k q_{k-1} - q_k P_{k-1}) &= (-1)(P_{k-1} q_{k-2} - q_{k-1} P_{k-2}) \\ &= (-1)^2 (P_{k-2} q_{k-3} - q_{k-2} P_{k-3}) \\ &= (-1)^3 (P_{k-3} q_{k-4} - q_{k-3} P_{k-4}) \ldots \\ &= (-1)^{k-2} (P_2 q_1 - q_2 P_1)\,; \end{aligned}$$

como $P_2 = a_1 a_2 + 1$, $q_2 = a_2$, $P_1 = a_1$, $q_1 = 1$,

$$(P_k q_{k-1} - q_k P_{k-1}) = (-1)^{k-2}((a_1 a_2 + 1) \times 1 - a_2(a_1)) = (-1)^{k-2}.$$

De esto se deduce que:

$$R_k - R_{k-1} = \frac{p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1}}{q_k q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-2}}{q_k q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{(-1)^2 q_k q_{k-1}}\,.$$

$$R_k - R_{k-1} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}\,. \tag{3.1}$$

Cuando el desarrollo de a/b en fracción continua posee n términos, la $n-$ésima fracción reducida R_n coincide con a/b. Por lo tanto $R_k - R_{k-1} = \dfrac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}$ si $k = n$, entonces;

$$\frac{a}{b} \quad = R_n,$$

luego

$$\frac{a}{b} - R_{k-1} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}.$$

Apliquemos lo anterior a la ecuación $ax - by = c$, con factores comunes para $(a, b) = 1$. Luego a/b es continua y $a/b = R_n$; entonces

$$\frac{a}{b} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}$$

haciendo común denominador y simplificando

$$\frac{a q_{n-1} - b p_{n-1}}{b q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}$$

como a/b y p_{n-1}/q_{n-1} son reducidas consecutivas, entonces $b = q_n$.

Por lo tanto

$$aq_{n-1} - bP_{n-1=}(-1)^n \tag{3.2}$$

multiplicando la expresión (**??**) por (-1) $^{n-1}$C tenemos, donde C es una constante entera

$$\begin{aligned} a[(-1)^{n-1}Cq_{n-1}] - b[(-1)^{n-1}CP_{n-1}] &= (-1)^n(-1)^{n-1}C \\ &= (-1)^{2n-1}C, \end{aligned}$$

como $2n-1$ es impar

$$\begin{aligned} a[(-1)^{n-1}Cq_{n-1}] - b[(-1)^{n-1}CP_{n-1}] &= -C \\ a[(-1)^{n-1}Cq_{n-1}] - b[(-1)^{n-1}CP_{n-1}] + C &= 0 \\ a(x) - b(y) + C &= 0. \end{aligned}$$

De donde $X = (-1)^{n-1}Cq_{n-1}$; $\quad Y = (-1)^{n-1}CP_{n-1}$, conforman una solución de esta ecuación.

Para otras soluciones se utiliza lo siguiente:

Teorema 3.1. *Sean a, b números primos entre sí y $[x_o,\ y_o]$ es una solución arbitraría de la ecuación lineal $aX - bY + C = 0$. Entonces:*

$$X = x_o + bt;\ Y = y_o + at,$$

$t = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots, \pm n$, *serán otras soluciones.*

Demostración: Sea $[x, y]$ solución arbitraria de la ecuación, entonces de las igualdades $ax - by + c = 0$ y $ax_o - by_o + c = 0$ tenemos que:

$$ax - ax_o - by + by_o = 0, \quad y - y_0 = \frac{a(x-x_0)}{b}, \tag{3.3}$$

como $y - y_o$ es un número entero; a y b números primos entre sí, la expresión $x - x_o$ debe dividirse por b sin resto, es decir, $x - x_o$ adquiere la forma $x - x_o = bt$ en la que t es número entero. Por lo tanto, $x = x_o + bt$; reemplazando este valor en (**??**) tenemos:

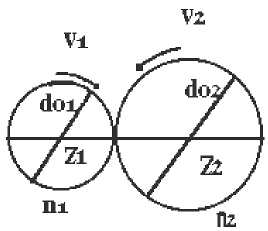
$$y - y_0 = \frac{abt}{b} \Rightarrow y = y_0 + at.$$

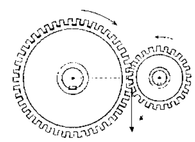
4. Aplicaciones

Ruedas dentadas y transmisiones por medio de ellas mismas. Las ruedas dentadas sirven para la transmisión directa de potencia o movimientos entre dos o más ejes. La transmisión del esfuerzo tiene lugar por medio del engrane de los flancos de los dientes.

La velocidad tangencial común es

$$v = \mathbf{v_1} = \mathbf{v_2} = \mathbf{d_{o1}n_1}\frac{\pi}{\mathbf{60}} = \mathbf{d_{o2}n_2}\frac{\pi}{\mathbf{60}} = \mathbf{r_{o1}n_1}\frac{\pi}{\mathbf{30}} = \mathbf{r_{o2}n_2}\frac{\pi}{\mathbf{30}}[\mathbf{m/s}]$$





Si d_o y r_o se miden en metros. De aquí se deduce:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_{o2}}{d_{o1}} = \frac{r_{o2}}{r_{o1}},$$

con $v_1 = r_{o1}w_1 = r_{o2}w_2$.

La relación de transformación vale:

$$i = \frac{w_1}{w_2} = \frac{d_{o2}}{d_{o1}} = \frac{r_{o2}}{r_{o1}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

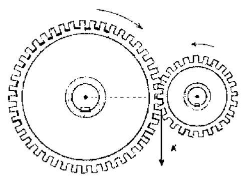
Para la elección de la relación de transformación hay que tener en cuenta las siguientes consideraciones: Si se requiere un rápido rodaje o desfogueo del engranaje, la relación de transformación deberá ser un número entero, porque así siempre engranan los mismos pares de dientes.

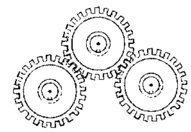
Para $i = 1/1$ son los mismos en cada vuelta; para $i = 2/1$ cada diente de la rueda menor engrana alternativamente con solo dos dientes de la rueda antagonista, pero si presentan oscilaciones periódicas en el esfuerzo a transmitir (prensas de rodillera, prensas de estampar, ...) entonces las transformaciones por números enteros han de evitarse a toda costa, de no hacerlo, siempre soportarían las puntas de carga los mismos pares de dientes y se desgastarían prematuramente.

En tales casos, a ser posible, cada diente de la rueda menor debe engranar sucesivamente con todos los de la mayor, de manera que todos los dientes se repartan por igual la absorción de los choques. Esto se consigue con relaciones de transformación que no se pueden simplificar, por ejemplo 19 : 45.

Las ecuaciones diofánticas nos permite calcular engranajes cilíndricos dada la relación de velocidad o relación de transmisión de ellos.

Ejemplo N°1. Se desean construir dos ruedas dentadas para un engranaje que den una relación de transmisión: $i = 131/85$, esto podría realizarse, si una de las ruedas tuviese 131 dientes y la otra 85; no obstante, no conviene que las ruedas tengan menos de 10 dientes ni más de 30. Calcular el número de dientes que debe tener cada rueda para que esto se cumpla.





Por la propiedad de la diferencia de reducidas consecutivas y el Teorema **??**, tenemos:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} i = 131/85 = 1.541$$

$P_n = 131$, $q_n = 85$, $P_{n-1} = y$, $q_{n-1} = x$. Por lo tanto

$$\frac{131}{85} - \frac{y}{x} = \frac{(-1)^n}{85x} \Rightarrow 131x - 85y = (-1)^n. \tag{4.1}$$

Como $(131, 85) = 1$, (**??**) es una ecuación diofántica. Calculemos las reducidas:

a_i

	1	1	1	5	1	1	3
131	85	46	39	7	4	3	1
46	39	7	4	3	1	0	

r_i

$$R_1 = \frac{1}{1} = \frac{p_1}{q_1} \qquad R_2 = \frac{2}{1} = \frac{p_2}{q_2}$$

$$R_3 = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{3}{2} = \frac{p_3}{q_3} \qquad R_4 = \frac{a_4 p_3 + p_2}{a_4 q_3 + q_2} = \frac{17}{11} = \frac{p_4}{q_4}$$

$$R_5 = \frac{a_5 p_4 + p_3}{a_5 q_4 + q_3} = \frac{20}{13} = \frac{p_5}{q_5} \qquad R_6 = \frac{a_6 p_5 + p_4}{a_5 q_5 + q_4} = \frac{37}{24} = \frac{p_6}{q_6}$$

$$R_7 = \frac{a_7 p_6 + p_5}{a_7 q_6 + q_5} = \frac{131}{85} = \frac{p_7}{q_7}$$

De donde $P_{n-1} = 37$ y $q_{n-1} = 24$. Como la ecuación es de la forma $ax - by = c$ entonces tenemos:

$$131(X) - 85(Y) + (-1)^6 = 0.$$

La solución es:

$$X = (-1)^{n-1} C Q_{n-1} = (-1)^6 (1) * 24 = 24$$
$$Y = (-1)^{n-1} C P_{n-1} = (-1)^6 (1) * 37 = 37$$

Pero el ejercicio nos pide que las ruedas no deben tener menos de 10 dientes ni más de 30. Luego $i = 24/37$, entonces planteamos una nueva ecuación diofántica

$$\frac{24}{37} - \frac{y}{x} = \frac{(-1)^n}{37x} \Rightarrow 24x - 37y = (-1)^n. \tag{4.2}$$

Calculemos las reducidas: Calculadas sus reducidas, se halla que $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{11}{17}$,

	0	1	1	1	5	2
24	37	24	13	11	2	1
24	13	11	2	1	0	

de donde, las ruedas deben tener 11 y 17 dientes respectivamente. Luego $i = 17/11 = 1.545$.

Error $131/85 - 17/11 = -0.0042$ por exceso.

Error relativo: $0.0042/(131/85) = 0.0027$.

Ejemplo N°2. Para calcular el menor número de vueltas n_0 que se debe dar al husillo desembragado del carro de un torno, para pasar de una a otra entrada al roscar un tornillo de filete múltiple de cuatro entradas, de paso 3/2, siendo la constante del torno 5/8, se llega a la ecuación:

$$4(5/8)n_0 - 4(3/2)n_1 = 3/2 \quad \Leftrightarrow \quad 5n_0 - 12n_1 = 3;$$

entonces $5(n_0) - 12(n_1) - 3 = 0$, que es una ecuación diofántica, con $(5, 12) = 1$. Calculemos las reducidas:

	0	2	2	2
5	12	5	2	1
5	2	1	0	

$$R_1 = \frac{0}{1} = \frac{p_1}{q_1} \qquad R_2 = \frac{1}{2} = \frac{p_2}{q_2}$$

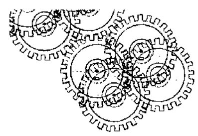
$$R_3 = \frac{a_3p_2 + p_1}{a_3q_2 + q_1} = \frac{2}{5} = \frac{p_3}{q_3} \qquad R_4 = \frac{a_4p_3 + p_2}{a_4q_3 + q_2} = \frac{5}{12} = \frac{p_4}{q_4}$$

Como $n_o = (-1)^3Cq_{n-1} = (-1)^3(-3)5 = 15$ y $n_1 = (-1)^3CP_{n-1} = (-1)^3(-3)2 = 6$ y nos piden el menor valor de n_o, entonces por el Teorema **??**,

$$n_o = 15 + 12t \Longrightarrow n_o = 15 + 12(-1) = 3.$$

$$n_1 = 6 + 5t \Longrightarrow n_1 = 6 + 5(-1) = 1.$$

Ejemplo No 3. Se necesitan dos ruedas: Una de 237 dientes y otra de 295. No disponemos más que de ruedas de 10, 15, 20, 25, 30, 35, y 40 dientes.



Determinar los que debe tener la otra para que con ellas se pueda efectuar el trabajo.

Si $i = \dfrac{237}{295}$, entonces los posibles juegos de ruedas son:

$$\begin{array}{l}
(10, 15); (10, 20); (10, 25); (10, 30); \\
(10, 35); (10, 40) \\
(15, 20); (15, 25); (15, 30); (15, 35); (15, 40) \\
(20, 25); (20, 30); (20, 35); (20, 40) \\
(25, 30); (25, 35); (25, 40) \\
(30, 35); (30, 40) \\
(35, 40)
\end{array}$$

Tenemos: $\dfrac{237}{295} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{(-1)^n}{295x} \Rightarrow 237x - 2957y = (-1)^n$ 237 Y (-1)^n.

	0	1	4	11	1	1	2
237	295	237	58	5	3	2	1
237	58	5	3	2	1	0	

Podemos observar que aquí se generarían siete (7) reducidas. Luego la ecuación es $237X - 295Y = (-1)^7$ y entonces tenemos:

$$237X - 295Y + 1 = 0\,; \tag{4.3}$$

la relación es $i = \dfrac{237}{295} = 0.8033$, $R_6 = \dfrac{94}{117}$, donde $P_{n-1} = 94$ y $Q_{n-1} = 117$ que están muy lejos de lo que se tiene.

Planteamos otra ecuación:

$$94X - 117Y = (-1)^n \tag{4.4}$$

se calculan sus reducidas

	0	1	4	11	2
94	117	94	23	2	1
94	23	2	1	0	

$R_4 = \dfrac{45}{56}$, que está lejos de nuestra condición $94X - 117Y = (-1)^5$.

De nuevo planteamos una nueva ecuación:

$$45X - 56Y = (-1)^n \tag{4.5}$$

se calculan sus reducidas

	0	1	4	11
45	56	45	11	1
45	11	1	1	0

Si $R_3 = \dfrac{4}{5}$ estos valores están por debajo de lo deseado, pero 4 y 5 sí son factores a la vez de 20 y 25, respectivamente, que es uno de los juegos de ruedas que se puede combinar. Por tanto $P_{n-1} = 4$ y $Q_{n-1} = 5$.

Sustituyamos en la ecuación (**??**)

$$45X - 56Y = (-1)^4 \Leftrightarrow 45X - 56Y = 1$$

multiplicada por 5

$$45(5Q_{n-1}) - 56(5P_{n-1}) = 5$$

Por lo tanto

$$X = 5Q_{n-1} = 25$$
$$Y = 4P_{n-1} = 20.$$

entonces $i = \dfrac{20}{25} = 0.80$.

Error $\dfrac{237}{295} - \dfrac{20}{25} = 0.003$ por defecto.

Error relativo $= \dfrac{0.003}{237/295} = 0.004$

Bibliografía

[1] J. Shigley. *Diseño en Ingeniería Mecánica*. Editorial Mc. Graw Hill: México, 1995.
[2] R. Norton. *Diseño de Maquinaria*. Editorial Mc. Graw Hill: Madrid, 2000.
[3] K. H. Rosen. *Matemática discreta y sus aplicaciones*. Editorial Mc. Graw Hill: Madrid, 2004.
[4] A. O. Guelfond. *Resolución de ecuaciones en números enteros*. Editorial Mir: Moscú, 1979.
[5] R. P. Grimaldi. *Matemática discreta y combinatoria*. Addison–Wesley Iberoamericana: México, 1997.
[6] K. H. Rosen. *Elementary Number Theory and its applications*, 2nd. Ed. Addison-Wesley: Boston, 1998.
[7] D. M. Burton. *Elementary Number Theory*. (3^a Ed.). Wm. C. Brown: Boston, 1994.

(Recibido en mayo de 2006. Aceptado para publicación en diciembre de 2006)

Facultad de Ingeniería
Universidad Javeriana
Cali, Colombia
e-mail: ccasasf@puj.edu.co