



UNIVERSIDAD DE GRANADA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

Teoría de Interpolación por Superficies Mínimas

Ildefonso Castro Infantes

Dirigida por:

Antonio Alarcón López
Francisco J. López Fernández

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Ildefonso Castro Infantes
ISBN: 978-84-1306-033-0
URI: <http://hdl.handle.net/10481/54080>

Agradecimientos

Lo preciso del lenguaje matemático hace difícil expresar con palabras lo agradecido que me siento en este momento por esta tesis, por mi tesis. La cual pertenece de algún modo a todos vosotros.

No puedo empezar de otra manera que no sea con un infinito gracias a mis directores de tesis, Antonio y Paco, por tanta ilusión y energía que habéis puesto para que hoy yo esté escribiendo estos agradecimientos. Por tantos buenos consejos y tantas matemáticas que he aprendido con vosotros. Realmente gracias.

Gracias también a los compañeros del departamento de geometría y topología de la Universidad de Granada; cada uno en su media ha contribuido en mi etapa como becario predoctoral.

My gratitude to the research group of Complex Analysis of the University of Ljubljana, specially to Franc for the invitation and the receiving; I was given great advices that have improved my mathematical knowledge. Also to Brett, Riccardo and Mi for the days we studied together. It is nice to have friends everywhere.

Estudiar matemáticas ha sido uno de los grandes aciertos en mi vida y en parte es gracias a los maravillosos compañeros que estudiaron conmigo esos años: Dani, Alberto, Marta, Eu, Yaiza, Ofelia, Lucía, Emilio y tantos otros... los Berenjeniles siempre será un grupo maravilloso de personas. También gracias a mis amigos los médicos que me acogieron los primeros años del Cisneros: Nico, Fran, Julio y Alberto; gracias también Carlos por esa segunda etapa.

En este camino como doctorando he conocido a muchos compañeros que como yo disfrutaban estudiando matemáticas. Especial mención para Antonio, desde aquellas tardes de máster hasta las defensas de nuestras tesis habrán pasado muchas jornadas de estudio y merecidas cervezas

posteriores: siempre serán buenos recuerdos entre amigos. También tienen que estar aquí los ya doctores de la universidad de Murcia con Irene a la cabeza, habéis sido parte del camino.

Muchas gracias también a mis amigos de siempre: Jose, Luisma, Ismael, Roble y Pedro. Habéis estado siempre cuando hacía falta, dando ánimo y ayudando; pensar en los momentos juntos es sonreír. Además nuestro grupo de WhatsApp sigue llevando mi nombre, me hacéis muy feliz. Gracias también a Laura, Cristina y las MariPaquis, todos juntos somos un grupo curioso de grandes personas.

Gracias a mis abuelos, por todo su interés en mí y en lo que hago. He tenido además la suerte de contar estos años con mucha familia conmigo en Granada, gracias por estar siempre cuando ha sido necesario. En especial a mis primos: Migue, María, Ana y Pablo; y a los añadidos: Ana María y Fer; que, junto a mis hermanos: Jesús y Santi, habéis hecho que siempre haya motivos para juntarse y celebrar.

Otro gracias de los que es difícil medir para Vero, eres mi modelo a seguir. Me has ayudado en todo lo que se puede ayudar. Todo mi agradecimiento por cuanto haces por mí; tener alguien con quien compartir tanto es increíble.

Para terminar, muchas gracias también a mi familia: Jesús y Santi, compañeros de piso en Granada, con vosotros siempre he tenido un sitio al que llamar casa. La pequeña Gloria, cada gesto que tienes conmigo me da toda la energía que necesito. Y especialmente gracias a mis padres, todo es gracias a vosotros, me habéis inspirado en el camino y apoyado en cada paso del mismo. Sois un ejemplo a imitar en todos los aspectos de la vida.

Granada, septiembre de 2018.

“Comienza haciendo lo que es necesario,
después lo que es posible y de repente
estarás haciendo lo imposible...”

Índice

Summary: Results and Conclusions	XIII
1 Introducción	1
2 Preliminares	15
2.1 Superficies de Riemann	16
2.1.1 Preliminares topológicos y geométricos para superficies	17
2.1.2 Propiedades de las superficies de Riemann	23
2.1.3 1-formas espinoriales	27
2.1.4 Ejemplos	28
2.2 Aproximación e interpolación holomorfas	30
2.3 Variedades complejas	35
2.3.1 Inmersiones holomorfas dirigidas	35
2.3.2 Variedades de Stein y de Oka	36
2.4 Superficies mínimas	40
2.4.1 Representación de Weierstrass	42
2.4.2 Representación espinorial	49
2.4.3 Inmersiones mínimas conformes generalizadas	50
2.5 Superficies mínimas con curvatura total finita	51
3 Interpolación por Superficies Mínimas	55
3.1 Sprays de funciones holomorfas definidos sobre curvas	59
3.1.1 Jets a través de flujos de campos de vectores	60
3.1.2 Curvas definidas en $I := [0, 1]$	61
3.1.3 Curvas contenidas en superficies de Riemann	66
3.2 Interpolación jet con aproximación	68
3.3 Comportamiento global de las inmersiones dirigidas	84
3.3.1 Posición general	86
3.3.2 Completitud	94

3.3.3	La cualidad de ser propia	97
3.4	Demostración del Teorema 3.2	103
3.4.1	Demostración de la primera afirmación	103
3.4.2	Demostración de la afirmación (I)	105
3.4.3	Demostración de la afirmación (II)	106
3.5	Demostración del Teorema 3.1	110
4	Interpolación por Superficies Mínimas con Curvatura Total Finita	115
4.1	Sprays de 1-formas espinoriales	117
4.2	Demostración del Teorema 4.1	122
5	Optimización para Superficies Mínimas con Curvatura Total Finita	127
5.1	Notas sobre curvas planas	128
5.2	Resultados de optimización y aplicaciones	131
5.2.1	Optimización en casos sencillos	131
5.2.2	Demostración del Teorema 1.8	133
5.2.3	Demostración del Teorema 1.7	138
5.2.4	Aplicaciones	139
6	Superficies Mínimas Completas y Densas en Dominios del Espacio Euclídeo	141
6.1	Superficies mínimas completas y densas	143
6.1.1	Demostración del Teorema 6.1	146
6.1.2	Demostración del Teorema 1.10	152
6.2	Otras familias de superficies completas y densas	155
	Bibliografía	161
	Índice de términos	169

Summary: Results and Conclusions

An immersed surface in the Euclidean space of dimension $n \geq 3$ is said to be a *minimal surface* if it is locally area-minimizing, that is to say, small pieces of it are the ones with least area among all the surfaces with the same boundary. These surfaces were first studied by Euler in 1744, he proved that the only rotational minimal surfaces in \mathbb{R}^3 are planes and catenoids. Later, in 1760, Lagrange proved that minimal surfaces are critical points of the area functional and discovered the differential equation determining minimal graphs in \mathbb{R}^3 . Next, Meusnier, in 1776, characterized minimal surfaces as those surfaces with vanishing mean curvature vector field; this is the standard modern definition of a minimal surface. On the other hand, Plateau showed in 1873 that minimal surfaces appear in nature as the shape of soap films, whereas Douglas and Radó independently proved in 1932 that any Jordan curve in \mathbb{R}^n bounds (is the boundary of) an area minimizing (hence, minimal) surface.

A crucial fact in the development of the classical theory of minimal surfaces in \mathbb{R}^n was the discovery by Enneper and Weierstrass of an analytic representation for these surfaces: the so-called *Enneper-Weierstrass representation formula* (see Theorem 2.36). This formula characterizes any minimal surface in \mathbb{R}^n in terms of holomorphic data on a Riemann surface. Given an isometric immersion $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ from a Riemannian surface, M , the metric Laplacian of the immersion satisfies

$$\Delta X = 2\mathbf{H},$$

where \mathbf{H} is the mean curvature vector field of the immersion. The Laplacian operator on a Riemannian surface depends only on the conformal class of the metric, and so harmonic functions are well defined on a Riemann surface. Therefore, if M is a Riemann surface, then a conformal (angle preserving) immersion $X = (X_1, \dots, X_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ is minimal if and only if X is a harmonic map (see Lemma 2.34); in particular, there are no compact minimal surfa-

ces in \mathbb{R}^n with empty boundary. If X is such an immersion, then denoting by ∂ the \mathbb{C} -linear part of the exterior differential $d = \partial + \bar{\partial}$ on M (here $\bar{\partial}$ denotes the \mathbb{C} -antilinear part of d), we have that the 1-form

$$\partial X = (\partial X_1, \dots, \partial X_n)$$

with values in \mathbb{C}^n is holomorphic, has no zeros, and satisfies

$$\sum_{j=1}^n (\partial X_j)^2 = 0 \quad \text{everywhere on } M.$$

Therefore, ∂X determines the Kodaira type holomorphic map

$$G_X: M \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}, \quad M \ni p \mapsto G_X(p) = [\partial X_1(p) : \dots : \partial X_n(p)],$$

which assumes values in the complex hyperquadric

$$Q_{n-2} = \{[z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} : z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}.$$

The map G_X is known as *the generalized Gauss map of X* . It was proved only very recently that, in fact, every holomorphic map $M \rightarrow Q_{n-2}$ is the generalized Gauss map of a conformal minimal immersion $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ (see Alarcón, Forstnerič, and López (15)).

The real part $\Re(\partial X)$ of ∂X is an exact 1-form on M ; the *flux map* (or simply, the *flux*) of X is the group homomorphism $\text{Flux}_X: \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, of the first homology group of M with integer coefficients, given by

$$\text{Flux}_X(\gamma) = \int_{\gamma} \Im(\partial X) = -\mathbf{i} \int_{\gamma} \partial X, \quad \gamma \in \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}),$$

where \Im denotes imaginary part and $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$.

On the other hand, every holomorphic 1-form $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ with values in \mathbb{C}^n , vanishing nowhere on M , satisfying the nullity condition

$$\sum_{j=1}^n (\phi_j)^2 = 0 \quad \text{everywhere on } M, \tag{S.1}$$

and whose real part $\Re(\Phi)$ is exact on M , determines a conformal minimal immersion $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ with $\partial X = \Phi$ by the classical Enneper-Weierstrass (or simply Weierstrass) representation formula:

$$X(p) = x_0 + 2 \int_{p_0}^p \Re(\Phi), \quad p \in M, \tag{S.2}$$

for any fixed base point $p_0 \in M$ and initial condition $X(p_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. We refer to Subsec. 2.4.1 for more information. This enables one to obtain minimal surfaces in \mathbb{R}^n from holomorphic functions on a Riemann surface, M , taking values in the complex subvariety of \mathbb{C}^n determined by the equation $z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0$. This is the fundamental idea of the Weierstrass representation and the starting point of our research.

The contributions of Osserman, in the 1960s, renewed the interest in the theory of minimal surfaces. He studied, mainly, complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 , with finite total curvature, by means of the Enneper-Weierstrass representation formula. This was the beginning of the study of those properties of minimal surfaces which are global, such as completeness, properness, or embeddedness, using complex analytic techniques.

Complete minimal surfaces with finite total curvature are of parabolic conformal type (i.e., they are open and carry no nonconstant negative subharmonic functions). In fact, the underlying complex structure of such a surface is a compact Riemann surface from which finitely many points have been removed; in particular, their topology is finite. All the classical examples of complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 , besides the periodic ones, are parabolic. The pioneer works of Jorge and Xavier (61) from 1980, Nadirashvili (76) from 1996, and Morales (75) from 2003, combined the classical Runge approximation theorem with the Weierstrass formula to refute the belief that hyperbolic Riemann surfaces play a marginal role in the global theory of minimal surfaces. An open Riemann surface is hyperbolic, by definition, if it carries nonconstant negative subharmonic functions; i.e., if it is not parabolic. We discuss about the conformal type of a Riemann surface in Sec. 2.1. We now know that, actually, every open Riemann surface, independently of its conformal type, is the underlying complex structure of a properly immersed minimal surface in \mathbb{R}^3 , see Alarcón and López (19).

The Weierstrass representation formula has greatly influenced the study of minimal surfaces in \mathbb{R}^n by providing powerful tools coming from complex analysis in one and several variables. In particular, the Runge-Mergelyan theorem for open Riemann surfaces (see Bishop (27) and also Runge (85) and Mergelyan (72)) has been exploited by Alarcón, Forstnerič, and López in order to develop a uniform approximation theory for conformal minimal surfaces in the Euclidean space which is analogous to the classical one for holomorphic functions in one complex variable. These results have found

plenty of relevant applications in the theory; see (19, 22, 11, 23, 33, 17, 16, 44) and the references therein.

Nevertheless, the true power of the relationship between minimal surfaces and complex analysis has been exploited only recently with the use of powerful complex analytic methods coming from modern Oka theory. These combine holomorphic approximation techniques with a nonlinear version of the $\bar{\partial}$ -problem and adapt the classical Riemann-Hilbert boundary value problem to the construction of conformal minimal surfaces in \mathbb{R}^n . This connection has given rise to general existence results for minimal surfaces in \mathbb{R}^n with interesting global properties and a given complex structure. For a detailed overview of the aforementioned techniques and a survey of recent results, see Alarcón and Forstnerič (10).

Approximation Theory by holomorphic functions is a central topic in Complex Analysis. It began with the classical Runge Theorem that gives a topological characterization of those subsets of the complex plane, \mathbb{C} , for which any holomorphic function on them may be uniformly approximated by entire functions. This result has been generalized to the more general framework of maps from Stein manifolds to Oka manifolds, and in particular for functions on open Riemann surfaces. We refer to Subsec. 2.3.2 for definitions and background.

Concerning the aim of this thesis, we emphasize that Alarcón and López in dimension $n = 3$ and, later, Alarcón, Forstnerič, and López in arbitrary dimension $n \geq 3$, provided the following Runge-Mergelyan type theorem for conformal minimal surfaces in \mathbb{R}^n .

Theorem 1. (Runge-Mergelyan Theorem for minimal surfaces, (19, 17)). *Let M be an open Riemann surface and let $K \subset M$ be a compact subset such that $M \setminus K$ has no relatively compact connected components. Every conformal minimal immersion $K \rightarrow \mathbb{R}^n$ may be approximated uniformly on K by conformal minimal immersions $M \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

In addition, the approximating conformal minimal immersions $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ may be chosen proper in the space, with prescribed flux according to the one of the given immersion $K \rightarrow \mathbb{R}^n$, and, if $n \geq 5$, to be embeddings.

By a conformal minimal immersion $K \rightarrow \mathbb{R}^n$ from a compact subset $K \subset M$ we mean a conformal minimal immersion defined on an unspecified open neighbourhood of K in M .

Together with approximation theory, Interpolation Theory by holomorphic functions is another central topic in Complex Analysis. This subject began in 1885 with the classical Weierstrass Interpolation Theorem asserting that one may prescribe the values of an entire function on a divergent sequence of points in \mathbb{C} , see Theorem 2.20. This result has been also generalized to more general frameworks. In particular, Florack (36) extended the Weierstrass Theorem for functions on an open Riemann surface, see Theorem 2.21, and Royden (83) obtained a result in this direction, concerning polynomial approximation with interpolation on Riemann surfaces of finite conformal type, see Theorem 2.18. These results have been generalized, ensuring both approximation and interpolation simultaneously, to the context of holomorphic maps from Stein manifolds to Oka manifolds, see Theorem 2.29, this is the core of modern Oka Theory.

The main motivation and also the main goal of this thesis is to initiate and develop the interpolation theory for minimal surfaces in the Euclidean spaces. The most basic result that one expects in this direction is an analogue to the Weierstrass interpolation theorem for conformal minimal immersions from an open Riemann surface to \mathbb{R}^n . Such a result holds true, as we show in the following theorem which was obtained in (4).

Theorem 2. (Weierstrass Interpolation Theorem for conformal minimal surfaces). *Let Λ be a closed discrete subset of an open Riemann surface, M , and let $n \geq 3$ be an integer. Every map $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ extends to a conformal minimal immersion $M \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

Let M be an open Riemann surface and $n \geq 3$ be an integer. By the Identity Principle for harmonic maps, it is not possible to prescribe the values of a conformal minimal immersion $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ on a subset that is not closed and discrete, hence the assumptions on Λ in Theorem 2 are necessary.

Let us say a few words about our methods of proof. Given a holomorphic 1-form θ on M with no zeros (such exists by the Oka-Grauert principle; see (50, 51) or (42, Theorem 5.3.1)), any holomorphic 1-form $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ on M with values in \mathbb{C}^n and satisfying the nullity condition (S.1) can be written in the form $\Phi = f\theta$, where $f: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ is a holomorphic function assuming values in the *null quadric* (also called the *complex light cone*):

$$\mathfrak{A} := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0\}. \quad (\text{S.3})$$

Therefore, if Λ is a closed discrete subset in an open Riemann surface, M , and $\mathfrak{Z}: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a map, then in order to prove Theorem 2 it suffices to find a holomorphic map

$$f: M \rightarrow \mathfrak{A} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^n$$

such that $\Re(f\theta)$ is an exact real 1-form on M and

$$2 \int_{p_0}^p \Re(f\theta) = \mathfrak{Z}(p) \quad \text{for all } p \in \Lambda,$$

where $p_0 \in M \setminus \Lambda$ is a fixed base point. With such a map in hand, the formula in (S.2) with $x_0 = 0$ and $\Phi = f\theta$ provides a conformal minimal immersion $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfying the conclusion of the theorem. The key of this approach to succeed is that the *punctured null quadric*

$$\mathfrak{A}_* := \mathfrak{A} \setminus \{0\} \tag{S.4}$$

is a *complex homogeneous manifold* and hence an *Oka manifold* (see Lemma 2.30); in particular, there are *many* holomorphic maps $M \rightarrow \mathfrak{A}_*$. See Subsec. 2.3.2 for more information about Oka manifolds.

With this program, we prove Theorem 2 in **Chapter 3**. It is the first known result concerning interpolation by minimal surfaces and hence the starting point of this theory. The aim of this Ph.D. Thesis is, nevertheless, to go much further.

We shall obtain Theorem 2 as a consequence of the following much more general result which is also proved in Chapter 3. It ensures not only interpolation but also *jet-interpolation of given finite order*, approximation on Runge compact subsets, control on the flux, and global properties such as completeness and, under natural assumptions, properness and injectivity. This result was shown in (4).

Theorem 3. (Runge Approximation with Jet-Interpolation for conformal minimal surfaces). *Let M be an open Riemann surface, $\Lambda \subset M$ be a closed discrete subset, and $K \subset M$ be a smoothly bounded compact domain such that $M \setminus K$ has no relatively compact connected components. For each $p \in \Lambda$ let $\Omega_p \subset M$ be a compact neighbourhood of p in M , assume that $\Omega_p \cap \Omega_q = \emptyset$ for all $p \neq q \in \Lambda$, and set $\Omega := \bigcup_{p \in \Lambda} \Omega_p$. Also let $n \geq 3$ be an integer,*

$$X: K \cup \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

be a conformal minimal immersion of class $\mathcal{C}^1(K \cup \Omega)$, and $\mathfrak{p}: \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a group homomorphism satisfying

$$\text{Flux}_X(\gamma) = \mathfrak{p}(\gamma) \quad \text{for all closed curves } \gamma \subset K.$$

Then, given an integer $k \geq 0$, X may be approximated uniformly on K by complete conformal minimal immersions $\tilde{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ enjoying the following properties:

- (I) \tilde{X} and X have a contact of order k at every point in Λ .
- (II) $\text{Flux}_{\tilde{X}} = \mathfrak{p}$.
- (III) If the map $X|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ is proper, then we can choose $\tilde{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ to be proper.
- (IV) If $n \geq 5$ and the map $X|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ is injective, then we can choose $\tilde{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ to be injective.

Condition (I) in the above theorem means that $\tilde{X}|_{\Lambda} = X|_{\Lambda}$ and, if $k > 0$, the holomorphic 1-form $\partial(\tilde{X} - X)$, assuming values in \mathbb{C}^n , has a zero of multiplicity (at least) k at all points in Λ ; in other words, *the maps \tilde{X} and X have the same k -jet at every point in Λ* (see Sec. 2.2 for a detailed explanation).

The above result is reminiscent to the generalization of the Weierstrass Interpolation theorem provided by Behnke and Stein in 1949, which asserts that on an open Riemann surface one may prescribe the values up to arbitrary finite order for a holomorphic function at the points in a given closed discrete subset (see (26) or (77, Theorem 2.15.1)). In particular, choosing $k = 1$ in Theorem 3 we obtain that:

On a closed discrete subset of an open Riemann surface, M , one may prescribe the values of a conformal minimal immersion $M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, and of its generalized Gauss map $M \rightarrow Q_{n-2} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$.

(See Corollary 3.21). The case $\Lambda = \emptyset$ in Theorem 3, that is, when one is not interested on interpolating, coincides with Theorem 1.

The assumptions on $X|_{\Lambda}$ in assertions (III) and (IV) in Theorem 3 are clearly necessary. In the case when Λ is infinite, we also point out that there are injective maps $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ which do not extend to a topological (continuous) embedding $M \rightarrow \mathbb{R}^n$; and hence, in general, one can not expect that the

conformal minimal immersion \tilde{X} in (IV) is an *embedding* (i.e., a homeomorphism onto $\tilde{X}(M)$ endowed with the subspace topology inherited from \mathbb{R}^n). Nevertheless, since every proper injective continuous map $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ is an embedding, we may choose the immersion \tilde{X} in Theorem 3 to be a proper conformal minimal embedding provided that $n \geq 5$ and $X|_\Lambda: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ is both proper and injective.

The aforementioned method for constructing conformal minimal surfaces in \mathbb{R}^n , based on Oka theory, was introduced by Alarcón and Forstnerič in (11) and it also works in the more general framework of *directed holomorphic immersions* of open Riemann surfaces into complex Euclidean spaces. Directed immersions have been the focus of interest in a number of classical geometries such as symplectic, contact, Lagrangian, totally real, etc.; we refer for instance to the monograph by Gromov (52), to Eliashberg and Mishachev (34, Chapter 19), and to the introduction of (11) for motivation on this subject. Given a (topologically) closed conical complex subvariety \mathfrak{G} of \mathbb{C}^n , $n \geq 3$, a holomorphic immersion $F: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ of an open Riemann surface M into \mathbb{C}^n is said to be *directed by \mathfrak{G}* , or an *\mathfrak{G} -immersion*, if its complex derivative F' with respect to any local holomorphic coordinate on M assumes values in

$$\mathfrak{G}_* := \mathfrak{G} \setminus \{0\}.$$

Among others, general existence, approximation, and desingularization results were obtained in (11) for certain families of directed holomorphic immersions, including *null curves*: holomorphic curves in \mathbb{C}^n which are directed by the null quadric \mathfrak{N} , see (S.3). It is well known that the real and the imaginary part of a null curve $M \rightarrow \mathbb{C}^n$ are both conformal minimal immersions $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ whose flux map vanishes everywhere on $\mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z})$; conversely, every conformal minimal immersion $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ is locally, on every simply-connected domain of M , the real part of a null curve $M \rightarrow \mathbb{C}^n$, see Sec. 2.4 for details.

The second main theorem in Chapter 3 is the following analogue of Theorem 3 for a wide family of directed holomorphic curves in \mathbb{C}^n , including null curves, which was also proved in (4). Given integers $1 \leq j \leq n$ we denote by $\pi_j: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ the coordinate projection $\pi_j(z_1, \dots, z_n) = z_j$.

Theorem 4. (Runge Approximation with Jet-Interpolation for directed holomorphic curves). *Let \mathfrak{G} be an irreducible closed conical complex subvariety of \mathbb{C}^n , $n \geq 3$, which is contained in no hyperplane and such that*

$\mathfrak{G}_* = \mathfrak{G} \setminus \{0\}$ is smooth and an Oka manifold. Let M , Λ , K , and Ω be as in Theorem 3 and let $F: K \cup \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ be an \mathfrak{G} -immersion of class $\mathcal{A}^1(K \cup \Omega)$. Then, given $k \in \mathbb{N}$, F may be approximated uniformly on K by \mathfrak{G} -immersions $\tilde{F}: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ such that $\tilde{F} - F$ has a zero of multiplicity (at least) k at every point in Λ .

Moreover, if the map $F|_\Lambda: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^n$ is injective, then we can choose $\tilde{F}: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ to be injective.

Furthermore:

- (I) If $\mathfrak{G} \cap \{z_1 = 1\}$ is an Oka manifold and $\pi_1: \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{C}$ admits a local holomorphic section h near $\zeta = 0 \in \mathbb{C}$ with $h(0) \neq 0$, then we may choose \tilde{F} to be complete.
- (II) If $\mathfrak{G} \cap \{z_j = 1\}$ is an Oka manifold and $\pi_j: \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{C}$ admits a local holomorphic section h_j near $\zeta = 0 \in \mathbb{C}$ with $h_j(0) \neq 0$ for all $j \in \{1, \dots, n\}$, and if the map $F|_\Lambda: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^n$ is proper, then we may choose $\tilde{F}: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ to be proper.

A map $U \rightarrow \mathbb{C}^n$ on a smoothly bounded compact domain $U \subset M$ is said to be of class $\mathcal{A}^1(U)$ if it is of class $\mathcal{C}^1(U)$ and holomorphic on the interior \mathring{U} .

In particular, for any \mathfrak{G} , M , and Λ as in Theorem 4 we have that every map $\Lambda \rightarrow \mathbb{C}^n$ extends to an \mathfrak{G} -immersion $M \rightarrow \mathbb{C}^n$. When the set Λ is empty, the statement of the above theorem, except for assertion (I), follows from (11, Theorems 7.2 and 8.1). On the other hand, if \mathfrak{G} is as in assertion (I) and $F|_\Lambda: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^n$ is not proper, Theorem 4 provides *complete* \mathfrak{G} -immersions $M \rightarrow \mathbb{C}^n$ which are not proper maps; these seem to be the first known examples of such apart from the case when \mathfrak{G} is the null quadric. We emphasize that the particular geometry of \mathfrak{A} has allowed to construct complete null holomorphic curves in \mathbb{C}^n and minimal surfaces in \mathbb{R}^n with numerous different asymptotic behaviours (other than proper in space); see (20, 12, 6, 7, 3) and the references therein.

Following a natural direction, we wonder, in a second step of our development of the interpolation theory for minimal surfaces, whether one can interpolate by minimal surfaces with finite total curvature; a very strong global condition. The family of complete minimal surfaces with finite total curvature has been one of the main focus of interest in the global theory of minimal surfaces in \mathbb{R}^3 ; we refer for instance to (79, 25, 91, 70) for background

on the topic. These surfaces have the simplest topological, conformal, and asymptotic geometry. For this reason, the main insight about modern global theory of minimal surfaces has come from these objects. This subject is intimately related to the one of meromorphic functions and 1-forms on compact Riemann surfaces. Indeed, if M is an open Riemann surface and $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ is a complete conformal minimal immersion with finite total curvature, then there are a compact Riemann surface Σ and a finite set $\emptyset \neq E \subset \Sigma$ such that M is biholomorphic to $\Sigma \setminus E$ and the exterior derivative dX of $X: \Sigma \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^3$, which coincides with its $(1,0)$ -part, ∂X , since X is harmonic, is holomorphic and extends meromorphically to Σ with effective poles at all points in E . In particular, the Gauss map $\Sigma \setminus E \rightarrow \mathbb{S}^2$ of X extends conformally to Σ and, up to composing with the stereographic projection, is a meromorphic function on Σ . Every complete orientable minimal surface in \mathbb{R}^3 with finite total curvature comes in this form via the Weierstrass representation (see Osserman (79)).

As we have already explained, a crucial point for the development of the approximation and interpolation theories for conformal minimal surfaces in \mathbb{R}^n is the observation that the punctured null quadric $\mathfrak{A}_* = \mathfrak{A} \setminus \{0\}$ directing minimal surfaces in \mathbb{R}^n is a complex homogeneous manifold, and hence an Oka manifold. In particular, for any open Riemann surface M , there are *many* holomorphic maps $M \rightarrow \mathfrak{A}_*$, and hence, up to solving the corresponding period problems, there are also *many* conformal minimal immersions $M \rightarrow \mathbb{R}^n$. However, the holomorphic flexibility of \mathfrak{A}_* does not extend to the algebraic category; this is why the construction methods that we have described above do not seem to provide complete minimal surfaces in \mathbb{R}^n with finite total curvature. Only in \mathbb{R}^3 and exploiting the *spinorial representation* for minimal surfaces in that dimension, López (69) was able to prove a Runge-Mergelyan type uniform approximation theorem for complete minimal surfaces with finite total curvature.

Theorem 5. (Runge-Mergelyan Theorem for conformal minimal immersions with finite total curvature, (69)). *Let Σ be a compact Riemann surface with empty boundary, $E \subset \Sigma$ be a non empty finite subset, and $K \subset \Sigma \setminus E$ be a compact subset. Every conformal minimal immersion $K \rightarrow \mathbb{R}^3$ may be approximated uniformly in K by complete conformal minimal immersion $\Sigma \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^3$ with finite total curvature.*

Polynomial Interpolation is a fundamental subject in mapping theory. La-

grange Interpolation Theorem asserts that one may prescribe the values, on a finite subset, of a polynomial $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, while for infinite closed discrete subsets the result does not hold true. In a more general framework, given disjoint finite sets $E \neq \emptyset$ and Λ in a compact Riemann surface Σ , the classical Riemann-Roch theorem enables one to prescribe the values on Λ of a meromorphic function $\Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ that is holomorphic in $\Sigma \setminus E$. We present in **Chapter 4** the following analogue to this result for complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 with finite total curvature, which was obtained in (5). We recall that a conformal minimal immersion $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ has finite total curvature if

$$TC(X) := \int_M K ds^2 = - \int_M |K| ds^2 > -\infty$$

where ds^2 is the area element of the surface and K denotes the Gauss curvature of (M, ds^2) .

Theorem 6. (Weierstrass Interpolation Theorem for conformal surfaces immersions with finite total curvature). *Let Σ be a compact Riemann surface with empty boundary and let $E \neq \emptyset$ and Λ be disjoint finite sets in Σ . Every map $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^3$ extends to a complete conformal minimal immersion $\Sigma \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^3$ with finite total curvature.*

This result provides an improvement to Theorem 2 in the case when the interpolation set is finite, by adding the condition of having finite total curvature. Somewhat surprisingly, no result of this type seems to be available in the literature, even in the specially simple case when $\Sigma \setminus E = \mathbb{C}$. The first result of the interpolation theory for minimal surfaces in \mathbb{R}^n is Theorem 2, which holds true in arbitrary dimension $n \geq 3$, but, as we have already pointed out, the construction method does not ensure any control on the total curvature of the interpolating surfaces.

We emphasize that those surfaces with finite total curvature form a tiny subset in the space of all complete conformal minimal immersions $\Sigma \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^3$ (the fact that this subset is nonempty for every Σ and E was observed by Pirola in (81)). We also point out that the finiteness of the set Λ cannot be deleted from the assumptions of Theorem 6. For instance:

Example. There is no complete nonflat minimal surface in \mathbb{R}^3 with finite total curvature and containing the set $\mathbb{Z}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. See Corollary 5.7 for more general sets.

This example shows that the theorem fails to hold for infinite sets Λ , even under the natural assumptions that Λ is closed and discrete in $\Sigma \setminus E$ and that the prescription of values $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^3$ is proper.

Polynomial Approximation is also a focus of interest in complex analysis, which is naturally linked in a strong way with Polynomial Interpolation. The classical Runge theorem says that for any compact set $K \subset \mathbb{C}$ such that $\mathbb{C} \setminus K$ is connected, every holomorphic function f on a neighbourhood of K may be approximated, uniformly on K , by polynomials $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (see (85)). In addition, if we are given a finite subset $\Lambda \subset K$, then the approximating polynomials can be chosen to agree with f everywhere on Λ (see Walsh (86)).

Behnke and Stein extended Runge's theorem to the more general framework of meromorphic functions on compact Riemann surfaces (see (26)); this was later generalized by ensuring, in addition, interpolation of arbitrary finite order on a finite set. To be precise, Royden proved in (83) that for any Σ , E , and Λ as in Theorem 6, if we are given an integer $k \geq 1$ and a compact subset $K \subset \Sigma \setminus E$ such that $\Lambda \subset K$ and E intersects all connected components of $\Sigma \setminus K$, then every holomorphic function f on a neighbourhood of K may be approximated, uniformly on K , by meromorphic functions F on Σ , being holomorphic in $\Sigma \setminus E$, such that the holomorphic function $F - f: K \rightarrow \mathbb{C}$ has a zero of order at least k at all points in Λ .

We shall obtain Theorem 6 in Chapter 4 as a consequence of the following more precise result providing approximation, interpolation of given finite order, and control on the flux. This result, which may be seen as an analogue of the theorem by Royden for minimal surfaces with finite total curvature, was shown in (5).

Theorem 7. (Runge Approximation with Jet-Interpolation for conformal minimal surfaces with finite total curvature). *Let Σ be a compact Riemann surface with empty boundary, $\emptyset \neq E \subset \Sigma$ be a finite set, $K \subset \Sigma \setminus E$ be a compact set such that every connected component of $\Sigma \setminus K$ contains points of E , and $\Lambda \subset K$ be a finite set. Also let $X: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a conformal minimal immersion of class $\mathcal{C}^1(K)$ and $\mathfrak{p}: \mathcal{H}_1(\Sigma \setminus E; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a group homomorphism such that $\mathfrak{p}(\gamma) = \text{Flux}_X(\gamma)$ for all closed curves $\gamma \subset K$. Then, for any integer $k \geq 0$ and any number $\epsilon > 0$, there is a complete conformal minimal immersion $\tilde{X}: \Sigma \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfying the following conditions:*

- (i) \tilde{X} has finite total curvature.
- (ii) $|\tilde{X}(\zeta) - X(\zeta)| < \epsilon$ for all $\zeta \in K$.
- (iii) \tilde{X} and X have a contact of order k at every point in Λ , i.e., $\tilde{X} = X$ everywhere on Λ and, if $k \geq 1$, $\partial\tilde{X} - \partial X$ has a zero of order at least $k - 1$ at every point in Λ .
- (iv) $\text{Flux}_{\tilde{X}}(\gamma) = \mathfrak{p}(\gamma)$ for all closed curves $\gamma \subset \Sigma \setminus E$.

The aforementioned Theorem 5 was the first known approximation result for complete minimal surfaces with finite total curvature, taking no care about interpolation issues. It corresponds to the case $\Lambda = \emptyset$ in our result. In fact, the crucial novelties of Theorem 7 are conditions (i) and (iii) (except for them, the theorem follows from Theorem 3 or Theorem 5).

The main new ingredient in our method of proof is the construction of holomorphic *sprays of algebraic spinorial representations* of minimal surfaces in \mathbb{R}^3 ; this enables us to combine the ideas in Chapter 3 and (69) in order to ensure, simultaneously, approximation and interpolation of finite order.

Theorem 6 opens the door to a new line of research, namely, the study of *optimal hitting* problems in the framework of complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 with finite total curvature. We now discuss this novel subject which will be treated in **Chapter 5**.

The optimization problem we shall deal with consists on deciding which are the simplest minimal surfaces, in terms of the total curvature, that contain a given finite subset of \mathbb{R}^3 . That is, determining the surfaces with smaller finite total curvature (in absolute value) among all minimal surfaces containing a fixed finite set of points in \mathbb{R}^3 .

We denote by $\text{TC}(X)$ the total curvature of a complete orientable minimal immersion $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$. We assume that M has empty boundary for the following discussion. Recall that, by the classical Osserman's theorem, $\text{TC}(X)$ is a nonnegative integer multiple of -4π (see Sec. 2.5 or (79)). For any integer $r \geq 1$ we denote by \mathcal{L}_r the space of all complete nonflat immersed orientable minimal surfaces $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ with $|\text{TC}(X)| \leq 4\pi r$. Likewise, for any integer $m \leq 1$ we write $\mathcal{L}_{r;m}$ for the subset of \mathcal{L}_r consisting of those surfaces $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ with Euler characteristic $\chi(M) = m$. Recall that, by Jorge-Meeks formula (2.28) (see (60)), the condition $\mathcal{L}_{r;m} \neq \emptyset$ implies that $2r + m \geq 2$. It

follows that

$$\mathcal{L}_r = \bigcup_{m \leq 1} \mathcal{L}_{r;m} = \bigcup_{m \in \{2-2r, \dots, 1\}} \mathcal{L}_{r;m}.$$

A simple observation is that, up to dilations and rigid motions, every complete minimal surface with finite total curvature contains any given set $A \subset \mathbb{R}^3$ consisting of at most 3 points. If the set A consists of 4 points not contained in a plane, then it is not hard to see that there exists an Enneper's surface which contains A , see Proposition 5.2. Recall that Enneper's surfaces and catenoids are the complete minimal surfaces with least total curvature (in absolute value) among the nonflat ones; they have total curvature -4π .

In view of Theorem 6, given a finite set $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^3$ and an integer $m \leq 1$, there is an integer $r \geq 1$, which in principle could be very large, such that $A \subset X(M)$ for some immersion $X \in \mathcal{L}_{r;m}$. Therefore, fixed integers $r \geq 1$ and $m \leq 1$ with $2r + m \geq 2$, one wonders whether there exist finite sets $A \subset \mathbb{R}^3$ which are *against* the family $\mathcal{L}_{r;m}$, meaning that A is contained in the image of no immersion $X \in \mathcal{L}_{r;m}$, and, if such sets exist, what is the cardinal of the smaller ones. The same questions arise for the bigger family \mathcal{L}_r for any $r \geq 1$.

In this line we prove the following result which was obtained in (5).

Theorem 8. *Let $r \geq 1$ be an integer. For any integer m with $2 - 2r \leq m \leq 1$ there is a set $A_{r;m} \subset \mathbb{R}^3$ which is against the family $\bigcup_{k \leq m} \mathcal{L}_{r;k}$ and consists of $12r + 2m + 1$ points whose affine span is a plane. In particular, the set $A_{r;1}$, which consists of $12r + 3$ points, is against the family \mathcal{L}_r .*

Thus, if $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ is a complete nonflat orientable immersed minimal surface with empty boundary and $\chi(M) \leq m$ and $A_{r;m} \subset X(M)$, then the total curvature $\text{TC}(X) < -4\pi r$. In particular, no complete nonflat orientable immersed minimal surface X with $|\text{TC}(X)| \leq 4\pi r$ contains $A_{r;1}$.

Notice that in the above theorem we have $13 \leq 12r + 2m + 1 \leq 12r + 3$. As an example, recall that \mathcal{L}_1 consists precisely of all catenoids and Enneper's surfaces (see Osserman (79)); and hence Theorem 8 furnishes a set $A \subset \mathbb{R}^3$, consisting of 15 points, which is contained in no catenoid and in no Enneper's surface (we do not know whether this particular number is sharp). In general, it remains an open question whether the bounds $12r + 2m + 1$ and $12r + 3$ given in Theorem 8 are sharp or not; determining the optimal ones (which, by Theorem 6, exist) seems to be a highly nontrivial task.

Theorem 8 is the first result of this type within the theory of minimal surfaces. In order to prove it we shall provide, given a complete minimal surface $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ with finite total curvature, an upper bound on the cardinal of the preimage by X of any affine line in \mathbb{R}^3 not contained in $X(M)$, in terms of the total curvature and the Euler characteristic of X . The following result was proved in (5).

Theorem 9. *Let $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a complete conformal minimal immersion with empty boundary and finite total curvature. If $L \subset \mathbb{R}^3$ is a straight line not contained in $X(M)$, then*

$$\#(X^{-1}(L)) \leq 6\text{Deg}(N) + \chi(M) = -\frac{3}{2\pi}\text{TC}(X) + \chi(M),$$

where $\text{Deg}(N)$ is the degree of the Gauss map N of X .

Despite an upper bound as the one given by Theorem 9 was expected for the family of minimal surfaces with finite total curvature, no explicit one of this type had been obtained so far.

To finish our study we present in **Chapter 6** some general existence results for complete minimal surfaces which are densely contained in a given domain in the Euclidean space of dimension $n \geq 3$.

The existence of complete minimal surfaces densely lying in \mathbb{R}^3 is well-known. The first example of such a surface is due to Rosenberg; he obtained a simply-connected surface with bounded curvature by Schwarzian reflection on a fundamental domain. Later, Gálvez and Mira (49) constructed complete dense simply-connected minimal surfaces in \mathbb{R}^3 , in explicit coordinates, as solution to certain Björling problems. Finally, López (68) constructed complete dense minimal surfaces in \mathbb{R}^3 with simple curvature, that is, with finite total curvature in a weak sense, arbitrary genus, and parabolic conformal type; these were the only known examples with nontrivial topology.

In other line of results, Andrade (24) proved the existence of a complete simply-connected minimal surface in \mathbb{R}^3 whose closure has nonempty interior but it is not the whole space. Thus, it is a natural question whether a fixed domain in \mathbb{R}^3 contains complete minimal surfaces which are densely contained on it; prior to our results, only \mathbb{R}^3 was known to enjoy this property.

We shall settle this question by showing a general existence result, which was obtained in (3), for complete minimal surfaces which are densely con-

tained in any given domain $D \subset \mathbb{R}^n$ for arbitrary dimension $n \geq 3$. We construct such surfaces with *arbitrary orientable topology and flux map*; moreover, if $n \geq 5$ we give examples with no self-intersections. In addition, if $D = \mathbb{R}^n$, we construct such surfaces not only with arbitrary topology but also with *arbitrary underlying complex structure*. To be precise, we prove the following.

Theorem 10. *Let $D \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$, be a domain, M be an open Riemann surface, $\mathfrak{p}: \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a group homomorphism, $K \subset M$ be a smoothly bounded Runge compact domain, and $X: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a conformal minimal immersion of class $\mathcal{C}^1(K)$. Assume that $X(K) \subset D$ and that the flux map $\text{Flux}_X: \mathcal{H}_1(K; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ of X satisfies $\text{Flux}_X(\gamma) = \mathfrak{p}(\gamma)$ for all closed curves $\gamma \subset K$.*

Then, for any $\epsilon > 0$, there are a domain $\Omega \subset M$ and a complete conformal minimal immersion $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfying the following properties:

- (I) $K \subset \Omega$ and Ω is a strong deformation retract of M and homeomorphic to M .
- (II) $\|Y - X\|_{1,K} < \epsilon$.
- (III) $\text{Flux}_Y(\gamma) = \mathfrak{p}(\gamma)$ for all closed curves $\gamma \subset \Omega$.
- (IV) $Y(\Omega) \subset D$ and the closure $\overline{Y(\Omega)} = \overline{D}$.
- (V) Y is one-to-one if $n \geq 5$.

Furthermore, if $D = \mathbb{R}^n$, then we may choose $\Omega = M$.

Theorem 10 provides the first examples of complete dense minimal surfaces in \mathbb{R}^n for $n > 3$. We emphasize that the immersions $Y: \Omega \rightarrow D$ in the theorem cannot be proper maps because of the density of $Y(M)$ in D .

Our result shows that there are numerous complete dense minimal surfaces in $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Indeed, if we denote by $\text{CMI}(M, \mathbb{R}^n)$ the space of all conformal minimal immersions defined on an open Riemann surface M into \mathbb{R}^n (which is nonempty by Alarcón and López (19)), Theorem 10 ensures that

those conformal minimal immersions $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ which are complete and densely contained in \mathbb{R}^n form a dense subset of $\text{CMI}(M, \mathbb{R}^n)$ with respect to the compact-open topology.

It is not difficult to find dense minimal surfaces in \mathbb{R}^n for any $n \geq 3$. In-

deed, solving the Björling problem for any real analytic regular dense curve in \mathbb{R}^n and any tangent plane distribution along it gives such a dense surface. However, this method, which was pointed out to us by Pablo Mira, only produces simply-connected examples and does not guarantee their completeness. Constructing *complete* dense minimal surfaces in \mathbb{R}^n with arbitrary *topology* and even arbitrary *complex structure*, is much more complicated. We shall prove these results by using the strong relationship between minimal surfaces and complex analysis that we have already described.

Going deeper in this direction, it is well-known that a general domain $D \subset \mathbb{R}^n$ does not contain minimal surfaces with arbitrary complex structure. For instance, if D is a relatively compact subset of \mathbb{R}^n , then every minimal surface contained on it must have *hyperbolic* conformal type. However, we prove in Chapter 6 that any domain $D \subset \mathbb{R}^n$ contains complete minimal surfaces which are dense on it whose complex structure is any given bordered Riemann surface. This result was shown in (3).

Theorem 11. *Let $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, be a domain and $\overline{M} = M \cup bM$ be a compact bordered Riemann surface. Every conformal minimal immersion $X: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ of class $\mathcal{C}^1(\overline{M})$, with $X(\overline{M}) \subset D$, may be approximated uniformly on compact subsets of $M = \overline{M} \setminus bM$ by complete conformal minimal immersions $Y: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ assuming values in D and such that $\overline{Y(M)} = \overline{D}$ and $\text{Flux}_Y = \text{Flux}_X$.*

Moreover, if $n \geq 5$ then the approximating immersions Y can be chosen to be one-to-one.

By a *compact bordered Riemann surface* we mean a compact Riemann surface \overline{M} whose boundary $bM \subset \overline{M}$ is nonempty and consists of finitely many pairwise disjoint smooth Jordan curves. The interior $M := \overline{M} \setminus bM$ of \overline{M} is called a *bordered Riemann surface*, see Sec. 2.1 for a detailed explanation.

Comparing with Theorem 10, the novelty is that the complex structure of the examples is prescribed to be any bordered Riemann surface. In case $D = \mathbb{R}^n$, the result follows from Theorem 10.

Capítulo 1

Introducción

Una superficie inmersa en el espacio euclídeo n -dimensional \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, se dice que es una *superficie mínima* si localmente minimiza el área, es decir, si trozos de la misma suficientemente pequeños tienen el menor área entre todas las posibles superficies con su mismo borde. Este tipo de superficies fueron por primera vez estudiadas en 1744 cuando Euler demostró que las únicas superficies mínimas de revolución en \mathbb{R}^3 son los planos y las catenoides. Lagrange continuó con su estudio mostrando en 1760 que las superficies mínimas representan los puntos críticos para el funcional área y presentando la ecuación diferencial de Laplace que cumplen los grafos mínimos en \mathbb{R}^3 .

Meusnier en 1776 caracterizó a las superficies mínimas como aquellas que tienen vector curvatura media nulo en todo punto; esta es la definición moderna usual de una superficie mínima. Plateau realizó multitud de experimentos con pompas de jabón que le llevaron a dar en 1873 una interpretación física de las superficies mínimas, identificándolas con la forma que adoptan películas de jabón sostenidas sobre un borde de alambre. Douglas y Radó independientemente demostraron en 1932 que toda curva de Jordan en \mathbb{R}^3 soporta a una superficie mínima cuyo borde es la curva dada, resolviendo satisfactoriamente lo que se conoce en la literatura como el Problema de Plateau.

Un hecho crucial para el estudio de las superficies mínimas, sobre todo para el que realizamos en esta tesis, es el descubrimiento de una represen-

tación analítica de las mismas por Enneper y Weierstrass. La conocida como *Representación de Enneper-Weierstrass* (véase el Teorema 2.36) se fundamenta en el hecho de que dada una inmersión isométrica $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de una superficie riemanniana M (una superficie diferenciable con una métrica riemanniana asociada), el laplaciano de la inmersión es dos veces el vector curvatura media:

$$\Delta X = 2\mathbf{H}.$$

El laplaciano depende solo de la clase conforme de la métrica y por tanto una inmersión conforme $X = (X_1, \dots, X_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida sobre una superficie de Riemann M es mínima si, y solo si, sus coordenadas son armónicas, es decir, $\Delta X = 0$ (véase el Lema 2.34); esto es equivalente a que la $(1, 0)$ -derivada $\partial X = (\partial X_1, \dots, \partial X_n)$ sea una 1-forma holomorfa compleja. Además, la inmersión X es conforme si, y solo si, ∂X cumple la condición de nulidad

$$(\partial X_1)^2 + \dots + (\partial X_n)^2 = 0.$$

Esto nos va a permitir construir superficies mínimas orientadas en \mathbb{R}^n mediante aplicaciones holomorfas definidas sobre una superficie de Riemann M y con valores en la subvariedad compleja de \mathbb{C}^n que viene definida por la ecuación $z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0$. Es usual referirse a esta subvariedad como *cuádriga nula* y la denotamos por \mathfrak{A} . Esta es la idea fundamental de la Representación de Enneper-Weierstrass que estudiaremos con detalle en la Sección 2.4.

En 1986, Osserman (79) atrajo de nuevo el interés por las superficies mínimas utilizando la representación de Enneper-Weierstrass para el estudio de las superficies mínimas completas con curvatura total finita. Esto supuso el inicio del estudio de propiedades globales para las superficies mínimas inmersas en el espacio euclídeo, tales como la completitud, el que sean embebimientos o el ser topológicamente propias, utilizando herramientas del análisis complejo.

Las superficies mínimas con curvatura total finita tienen tipo conforme parabólico, es decir, son superficies mínimas abiertas y no admiten funciones subarmónicas negativas y constantes. De hecho, la estructura compleja de una tal superficie es la de una superficie de Riemann compacta menos una cantidad finita de puntos; en particular, tienen topología finita. Todos los ejemplos clásicos de superficies mínimas completas en \mathbb{R}^3 , excepto los periódicos, son parabólicos. Los trabajos pioneros de Jorge y Xavier

(61) de 1980, de Nadirashvili (76) de 1996 y Morales (75) en 2003 combinaron la fórmula de Enneper-Weierstrass junto al clásico teorema de aproximación de Runge para refutar el pensamiento que hasta entonces imperaba sobre que las superficies mínimas de tipo conforme hiperbólico jugaban un papel marginal en la teoría global. Para una superficie de Riemann no compacta y sin borde, tener tipo conforme hiperbólico consiste en admitir funciones subarmónicas negativas no constantes; de lo contrario, el tipo conforme es parabólico. Discutiremos sobre el tipo conforme de una superficie de Riemann en la Sección 2.1. Ahora sabemos que toda superficie de Riemann abierta, independientemente de su tipo conforme, es la estructura compleja de una superficie mínima propiamente inmersa en \mathbb{R}^3 , véase Alarcón y López ().

La representación de Weierstrass ha influido enormemente en el estudio de las superficies mínimas en \mathbb{R}^n proporcionando poderosas herramientas provenientes del análisis complejo. En particular, los teoremas de Runge y Mergelyan para superficies de Riemann abiertas han sido explotados profusamente en el desarrollo de una teoría de aproximación uniforme para inmersiones mínimas conformes en el espacio euclídeo análoga a la existente para funciones holomorfas de una variable. Estos resultados han encontrado multitud de aplicaciones en la literatura, véanse por ejemplo los trabajos (19, 22, 11, 23, 33, 17, 16, 44) y las referencias que allí aparecen.

Sin embargo, no ha sido hasta estos últimos años que esta relación entre el Análisis Complejo y las Superficies Mínimas ha alcanzado su apogeo gracias fundamentalmente a las técnicas provenientes del análisis complejo englobadas en lo que se conoce como *teoría de Oka*: múltiples técnicas de aproximación combinadas con una versión no lineal del problema $\bar{\partial}$ y soluciones al problema de valores en el borde de Riemann-Hilbert. Esta colaboración ha permitido construir superficies mínimas con interesantes propiedades globales con un completo control sobre su estructura compleja u holomorfa, un hito en la teoría de superficies mínimas. Para un desarrollo más extenso de las técnicas citadas y los resultados conocidos, véase por ejemplo Alarcón y Forstnerič (10).

La Teoría de Aproximación por funciones holomorfas es un tema central en el Análisis Complejo. Su origen está en el clásico teorema de Runge, que caracteriza topológicamente los subconjuntos del plano complejo sobre los que se pueden aproximar funciones holomorfas. Este resultado ha

sido generalizado al ambiente más general de las *variedades de Stein* y de *Oka* pasando por las superficies de Riemann. Presentaremos este tipo de variedades complejas así como algunos resultados de aproximación en la Sección 2.1.

En lo relativo a los intereses de esta tesis, cabe destacar que Alarcón y López para dimensión $n = 3$ y posteriormente Alarcón, Forstnerič y López para el caso de dimensión arbitraria $n \geq 3$ demostraron la siguiente versión del Teorema de Runge-Mergelyan para superficies mínimas.

Teorema 1.1. (Teorema de Runge-Mergelyan para superficies mínimas, (19, 17)). *Sea M una superficie de Riemann abierta y sea $K \subset M$ un subconjunto compacto tal que $M \setminus K$ no tiene componentes conexas relativamente compactas. Toda inmersión mínima conforme $K \rightarrow \mathbb{R}^n$ puede ser aproximada uniformemente en K por inmersiones mínimas conformes $M \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

Además las inmersiones mínimas conformes $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ pueden elegirse propias, con control de su flujo, y en el caso $n \geq 5$ embebidas.

Por definición, una inmersión mínima conforme $K \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida sobre un compacto $K \subset M$ es la restricción a K de una inmersión mínima conforme definida en un entorno de K . Discutiremos sobre este concepto y sobre las propiedades globales implícitas en el teorema, así como de la noción de flujo de una inmersión mínima conforme, a lo largo del Capítulo 2.

Paralelamente a la aproximación, la Teoría de Interpolación por funciones holomorfas es un tema central de estudio en el Análisis Complejo. Sus inicios se sitúan en 1885 con el clásico Teorema de Interpolación de Weierstrass, que afirma que podemos prescribir los valores de una función entera sobre una sucesión de puntos divergente, véase el Teorema 2.20. Al igual que ha ocurrido con la aproximación, los resultados de interpolación han sido trasladados a los ambientes más generales antes descritos. En particular, Florack (36) demostró una versión del Teorema de Weierstrass para cualquier superficie de Riemann abierta, véase el Teorema 2.21, y Royden (83) obtuvo un resultado de aproximación e interpolación algebraica para superficies de Riemann de tipo conforme finito, véase el Teorema 2.18. Generalizaciones de estos resultados, tanto de aproximación como de interpolación e incluso resultados en que se combinan ambas, han sido demostrados para aplicaciones holomorfas definidas sobre variedades de Stein y

con valores en variedades de Oka, véase el Teorema 2.29.

La principal motivación de esta tesis y su principal objetivo es obtener análogos naturales a los citados resultados de interpolación en el ambiente de las superficies mínimas.

Así, en el **Capítulo 3** demostraremos el siguiente resultado de interpolación por superficies mínimas, que fue obtenido en (4).

Teorema 1.2. (Teorema de Interpolación de Weierstrass para inmersiones mínimas conformes). *Sea Λ un subconjunto cerrado y discreto de una superficie de Riemann abierta M y sea $n \geq 3$ un entero. Toda aplicación $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ se extiende a una inmersión mínima conforme $M \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

Si M es una superficie de Riemann abierta y $n \geq 3$ un entero, por analiticidad no es posible prescribir los valores de una inmersión mínima conforme $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobre un subconjunto que tenga un punto de acumulación, por tanto las hipótesis sobre Λ en el Teorema 1.2 son necesarias.

El Teorema 1.2 es el primer resultado de interpolación conocido para superficies mínimas y supone el inicio de la Teoría de Interpolación por superficies mínimas que vamos a desarrollar a lo largo de toda la memoria.

Deduciremos el Teorema 1.2 como consecuencia de un resultado más general, véase el Teorema 3.2, que asegura aproximación uniforme sobre compactos e interpolación jet de orden finito. Además, las soluciones construidas podrán elegirse completas, propias cuando la aplicación $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ lo sea, embebidas si $n \geq 5$ y con control del flujo, véase la Definición 2.39.

Demostraremos también en el Capítulo 3 un resultado de tipo Mergelyan-Weierstrass, es decir, de aproximación más interpolación, para inmersiones holomorfas dirigidas; dentro de esta familia de curvas complejas se encuentran las curvas nulas, que son aquellas inmersiones holomorfas dirigidas por la *cuádrica nula* y que, como veremos con detalle en la Sección 2.4, guardan una estrecha relación con las superficies mínimas. A modo de adelanto, la parte real e imaginaria de una curva nula es una inmersión mínima conforme y al contrario, una inmersión mínima conforme con flujo nulo es la parte real de una curva nula. Dedicaremos la mayor parte del Capítulo 3 a los preparativos y la demostración del resultado para inmersiones holomorfas dirigidas, mientras que la Sección 3.5 se dedicará a explicar las modificaciones requeridas de la demostración para deducir el Teorema de tipo Mergelyan-Weierstrass para inmersiones mínimas conformes.

Siguiendo una dirección natural, el siguiente paso en el desarrollo de la teoría de interpolación por superficies mínimas es preguntarse si es posible interpolar mediante superficies mínimas con curvatura total finita; una condición global muy fuerte. Las superficies mínimas completas con curvatura total finita son uno de los principales focos de interés dentro de la teoría global de superficies mínimas en \mathbb{R}^3 ; véanse por ejemplo (79, 25, 91, 70) para más información. Esta familia contiene las superficies completas de geometría más simple desde el punto de vista topológico, conforme y comportamiento asintótico, siendo fuente de inspiración constante para la teoría moderna de superficies mínimas. Este campo está íntimamente relacionado con la geometría algebraica, en particular con la teoría de funciones y 1-formas meromorfas sobre superficies de Riemann compactas. En efecto, si M es una superficie de Riemann abierta y $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión mínima conforme y completa con curvatura total finita, entonces existe una superficie de Riemann compacta Σ y un subconjunto finito $\emptyset \neq E \subset \Sigma$ tal que M es biholomorfa a $\Sigma \setminus E$ y la diferencial exterior dX de $X : \Sigma \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^3$ es holomorfa y se extiende de forma meromorfa a Σ con polos efectivos en todos los puntos de E . En particular, la aplicación de Gauss $\Sigma \setminus E \rightarrow \mathbb{S}^2 \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de X se extiende de forma conforme a Σ y, salvo componer con la proyección estereográfica, es una función meromorfa en Σ . Osserman demostró en (79) que toda superficie mínima completa orientable en \mathbb{R}^3 con curvatura total finita es de esta forma.

Como ya hemos mencionado, la clave para el desarrollo de las teorías de aproximación e interpolación por superficies mínimas fue la observación de que la subvariedad compleja punteada $\mathfrak{A} \setminus \{0\}$, que hemos presentado por el nombre de cuádrice nula, es una variedad de Oka. La estrecha relación entre las superficies mínimas y las curvas nulas han permitido este desarrollo de forma satisfactoria. En particular, para toda superficie de Riemann abierta M , hay *muchas* aplicaciones holomorfas $M \rightarrow \mathfrak{A}_*$, y por tanto, salvo resolver el problema de periodos inherente al proceso de integración (véase el Teorema 2.36), hay también *muchas* inmersiones mínimas conformes. Sin embargo, la flexibilidad holomorfa de la cuádrice nula no se extiende a la categoría algebraica, por lo que la teoría de Oka se muestra insuficiente para el control algebraico en procesos de aproximación e interpolación. En otras palabras, los métodos de construcción basados en la teoría de Oka a priori no proporcionan superficies mínimas completas en \mathbb{R}^n con curvatura total finita. Solo en \mathbb{R}^3 y haciendo uso de la *representación*

espinorial para inmersiones mínimas conformes en \mathbb{R}^3 , López (69) fue capaz de demostrar un teorema de aproximación uniforme tipo Runge-Mergelyan para superficies mínimas completas con curvatura total finita.

Teorema 1.3. (Teorema de Runge-Mergelyan para Superficies Mínimas con curvatura total finita, (69)). *Sea Σ una superficie de Riemann compacta sin borde, sea $E \subset \Sigma$ un subconjunto finito no vacío y sea $K \subset \Sigma \setminus E$ un subconjunto compacto. Toda inmersión mínima conforme $K \rightarrow \mathbb{R}^3$ puede ser uniformemente aproximada en K por una inmersión mínima conforme completa $\Sigma \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura total finita.*

La interpolación polinómica es también un tema fundamental en la teoría de aplicaciones. El Teorema de interpolación de Lagrange afirma que se pueden fijar los valores, en cantidad finita, de un polinomio $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, sin embargo para conjuntos infinitos arbitrarios el resultado no es cierto. En ambientes más generales, dados subconjuntos finitos $E \neq \emptyset$ y Λ contenidos en una superficie de Riemann compacta Σ , el teorema clásico de Riemann-Roch nos permite prescribir los valores en Λ de una función meromorfa $\Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ que sea holomorfa en $\Sigma \setminus E$. En el **Capítulo 4** demostraremos un análogo a este resultado para superficies mínimas completas en \mathbb{R}^3 con curvatura total finita, otro de los objetivos fundamentales de esta tesis. Este resultado fue demostrado en (5). Recordemos que una inmersión mínima conforme $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene curvatura total finita si

$$\text{TC}(X) := \int_M K ds^2 = - \int_M |K| ds^2 > -\infty,$$

donde ds^2 es el elemento de área sobre la superficie y K es la curvatura de Gauss de (M, ds^2) .

Teorema 1.4. (Teorema de Interpolación de Weierstrass para inmersiones mínimas conformes con curvatura total finita). *Sea Σ una superficie de Riemann compacta sin borde y sean $E \neq \emptyset$ y Λ subconjuntos finitos y disjuntos contenidos en Σ . Toda aplicación $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^3$ se extiende a una inmersión mínima conforme completa $\Sigma \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura total finita.*

Este resultado mejora al Teorema 1.2 cuando el número de puntos involucrados en la interpolación es finito; añade a las superficies mínimas interpolantes la propiedad de tener curvatura total finita. Sorprende que no se conozcan resultados de este tipo en la literatura, ni siquiera en el caso

más sencillo cuando $\Sigma \setminus E = \mathbb{C}$. El primer resultado de la teoría de interpolación por superficies mínimas en \mathbb{R}^n es el Teorema 1.2, que es válido para cualquier dimensión $n \geq 3$, pero, como ya hemos señalado, los métodos de prueba no garantizan ningún control sobre la curvatura total de las superficies que interpolan.

Resaltamos que las superficies mínimas con curvatura total finita forman un subconjunto pequeño en el espacio de las inmersiones mínimas conformes completas $\Sigma \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^3$. El hecho de que esta familia es no vacía para todo Σ y E fue demostrado por Pirola en (81). También es interesante señalar que la hipótesis sobre Λ de ser finito no se puede mejorar en el Teorema 1.4. Por ejemplo:

Ejemplo 1.5. No existen superficies mínimas completas no llanas contenidas en \mathbb{R}^3 con curvatura total finita y conteniendo al subconjunto $\mathbb{Z}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Véase el Corolario 5.7 para subconjuntos omitidos más generales.

Esto muestra que el teorema no es cierto para subconjuntos Λ infinitos, incluso bajo la hipótesis natural de que Λ sea cerrado y discreto en $\Sigma \setminus E$ y la aplicación $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^3$ que determina los valores sea propia.

En el Capítulo 4, combinaremos las ideas del Capítulo 3 junto a las de (69) para demostrar, simultáneamente, el resultado de aproximación e interpolación de orden finito enunciado en el Teorema 4.1. De este resultado deduciremos el Teorema 1.4. La principal novedad será la construcción de *sprays de 1-formas espinoriales holomorfas* que representen a superficies mínimas en \mathbb{R}^3 vía la representación espinorial de las mismas. Para más detalles sobre 1-formas espinoriales y la representación espinorial de las superficies mínimas véanse las subsecciones 2.1.3 y 2.4.2, respectivamente.

El Teorema 1.4 motiva una nueva línea de investigación en el ámbito de las superficies mínimas completas en \mathbb{R}^3 con curvatura total finita. Nos referimos a problemas de optimización asociados a procesos de interpolación, conocidos en la literatura inglesa por la expresión "*optimal hitting problems*". Expliquemos a continuación en qué consiste este nuevo tema de estudio que vamos a tratar en el **Capítulo 5**.

El problema de optimización con el que vamos a tratar consiste en decidir cuál es la superficie mínima más sencilla, en términos de la curvatura total finita, que pasa por un subconjunto finito dado de \mathbb{R}^3 . Es decir, de-

terminar el valor de la curvatura total (en valor absoluto) más pequeño alcanzado dentro de la familia de superficies mínimas que pasan por un subconjunto finito de puntos A dado.

Denotemos por $\text{TC}(X)$ la curvatura total de una superficie mínima orientable completa $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ sin borde y recordemos que, por el teorema clásico de Osserman, $\text{TC}(X)$ es un múltiplo entero no negativo de -4π , véase la Sección 2.5.

Definición 1.6. Para cada entero $r \geq 1$ denotamos por \mathcal{L}_r el espacio de todas las superficies mínimas orientables inmersas $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ que son completas, no llanas y tienen curvatura total $|\text{TC}(X)| \leq 4\pi r$. Del mismo modo, para todo entero $m \leq 1$ escribimos $\mathcal{L}_{r;m}$ para denotar el subconjunto de \mathcal{L}_r formado por aquellas superficies $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ que tienen característica de Euler $\chi(M) = m$.

Recordemos que, por la fórmula de Jorge-Meeks (2.28) (véase la Sección 2.5 o (60)), $\mathcal{L}_{r;m} \neq \emptyset$ implica que $2r + m \geq 2$. Por lo que se tiene que

$$\mathcal{L}_r = \bigcup_{m \leq 1} \mathcal{L}_{r;m} = \bigcup_{m \in \{2-2r, \dots, 1\}} \mathcal{L}_{r;m}.$$

A modo de motivación, comentamos que, tras componer con homotecias y movimientos rígidos, cualquier superficie mínima completa con curvatura total finita pasa por un conjunto A formado por tres puntos. Si el conjunto A está formado por 4 puntos no contenidos en un plano, no es difícil ver que existe una superficie de Enneper que lo contiene (véase la Proposición 5.2).

En vista del Teorema 1.4, dado un subconjunto finito $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^3$ y un entero $m \leq 1$, existe un entero *suficientemente grande* $r \geq 1$ tal que $A \subset X(M)$ para alguna inmersión $X \in \mathcal{L}_{r;m}$. De forma dual, fijados $r \geq 1$ y $m \leq 1$ con la condición necesaria $2r + m \geq 2$ (proveniente de la fórmula de Jorge-Meeks), podemos preguntarnos si existen o no subconjuntos finitos $A \subset \mathbb{R}^3$ que estén en *oposición* a la familia $\mathcal{L}_{r;m}$, significando esto que A no está contenido en la imagen de ninguna inmersión $X \in \mathcal{L}_{r;m}$; y si tales subconjuntos existen, cuál es el cardinal mínimo admisible para ellos. La misma pregunta puede establecerse para la familia de inmersiones más grande \mathcal{L}_r para cualquier $r \geq 1$. Esta es la formulación del problema de optimización conocido como “*optimal hitting*” que vamos a estudiar con detalle.

En esta línea de trabajo demostramos el siguiente resultado que fue obtenido en (5).

Teorema 1.7. *Sea $r \geq 1$ un entero. Para todo entero m con $2 - 2r \leq m \leq 1$ existe un conjunto $A_{r;m} \subset \mathbb{R}^3$ que está en oposición a la familia $\bigcup_{k \leq m} \mathcal{Z}_{r;k}$ y está formado por $12r + 2m + 1$ puntos contenidos en un plano. En particular, el conjunto $A_{r;1}$, formado por $12r + 3$ puntos, está en oposición de la familia \mathcal{Z}_r .*

Así, si $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie mínima completa inmersa y no llana con $\chi(M) \leq m$ y $A_{r;m} \subset X(M)$, entonces la curvatura total $\text{TC}(X) < -4\pi r$. En particular, no existen superficies mínimas completas X inmersas no llanas y orientables con $|\text{TC}(X)| \leq 4\pi r$ que contengan al conjunto $A_{r;1}$.

En el teorema anterior tenemos que $13 \leq 12r + 2m + 1 \leq 12r + 3$. Recordemos que, por ejemplo, \mathcal{Z}_1 está formado por todas las catenoides y las superficies de Enneper, véase Osserman (79), y por tanto el Teorema 1.7 proporciona un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ formado por 15 puntos que no está contenido en ninguna catenoide ni en ninguna superficie de Enneper (esta cota concreta no parece ser óptima). El Teorema 1.4 garantiza que existe una cota óptima para la cantidad de puntos opuestos en el espíritu de la del Teorema 1.7. En general, queda abierto el problema de determinar cuándo las cotas $12r + 2m + 1$ y $12r + 3$ dadas por el Teorema 1.7 son óptimas.

El Teorema 1.7 es el primer resultado de este tipo en la teoría de superficies mínimas, cuya prueba se puede encontrar en el **Capítulo 5**. Será fundamental establecer una cota para el número de puntos en la intersección de una recta y una superficie mínima con curvatura total finita en posición general, en términos de la curvatura total y la topología de la superficie; véase el Teorema 1.8 que fue demostrado en (5).

Teorema 1.8. *Sea $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión mínima conforme completa y sin borde con curvatura total finita. Si $L \subset \mathbb{R}^3$ es una línea recta afín que no está contenida en $X(M)$, entonces*

$$\#(X^{-1}(L)) \leq 6\text{Deg}(N) + \chi(M) = -\frac{3}{2\pi}\text{TC}(X) + \chi(M),$$

donde $\text{Deg}(N)$ denota el grado de la aplicación de Gauss N de X .

A pesar de que la existencia de una cota como la establecida por el Teorema 1.8 era esperada para la familia de las superficies mínimas con

curvatura total finita, este resultado es el primero que puede encontrarse en la literatura.

Para concluir la investigación realizada en esta tesis incluiremos a lo largo del **Capítulo 6** algunos resultados sobre la existencia de superficies mínimas que son completas y densas en el espacio euclídeo de dimensión n , $n \geq 3$.

La existencia de superficies mínimas completas y densas en \mathbb{R}^3 es bien conocida. El primer ejemplo de estas superficies es debido a Rosenberg y fue obtenido utilizando la reflexión de Schwartz en un dominio fundamental para una superficie mínima con borde poligonal, por tanto se trata de ejemplos simplemente conexos con curvatura acotada. Posteriormente, Gálvez y Mira (49) encontraron ejemplos explícitos de superficies mínimas simplemente conexas en \mathbb{R}^3 como soluciones a ciertos problemas de Björling. López (68) construyó superficies mínimas completas densas con curvatura sencilla, esto es, con curvatura total finita en un sentido débil, de cualquier género y con tipo conforme parabólico. Se trata de los primeros ejemplos densos conocidos con topología no trivial, incluyendo superficies mínimas *universales* en el sentido de que aproximan a cualquier superficie mínima compacta con borde en \mathbb{R}^3 .

En una línea paralela de resultados, Andrade (24) dio un ejemplo de una superficie mínima completa simplemente conexa en \mathbb{R}^3 que no es densa en todo el espacio pero su clausura tiene interior no vacío. Esto plantea como problema natural el preguntarse qué dominios de \mathbb{R}^3 contienen superficies mínimas completas y densas; hasta entonces el único dominio que se sabía cumplía esa propiedad era el propio \mathbb{R}^3 .

El objetivo de este capítulo es responder a la pregunta anterior mostrando un resultado general, que fue obtenido en (3), de existencia de superficies mínimas completas densas en *cualquier* dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ para dimensión arbitraria $n \geq 3$. Vamos a construir ejemplos con *topología arbitraria* y, si $n \geq 5$, sin autointersecciones. Además, para $D = \mathbb{R}^n$ proporcionamos ejemplos no solo con topología arbitraria sino con cualquier *estructura compleja* abierta.

Teorema 1.9. Sean M una superficie de Riemann abierta y $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio. Existe una superficie mínima completa orientable S en \mathbb{R}^n que es homeomorfa a M y cumple que $S \subset D$ y $\bar{S} = \bar{D}$.

Además, para $n \geq 5$ puede elegirse S sin autointersecciones y en el caso $D = \mathbb{R}^n$ puede elegirse S conformemente equivalente a M .

El Teorema 1.9 proporciona los primeros ejemplos de superficies mínimas completas y densas en \mathbb{R}^n para $n > 3$. También proporciona los primeros ejemplos de superficies completas y densas en un dominio distinto del propio \mathbb{R}^n . Notemos que la densidad de S en D no permite que las superficies construidas en el teorema sean propias. La prueba de este teorema será consecuencia de un resultado de aproximación uniforme sobre compactos para inmersiones mínimas conformes con imagen densa en un dominio arbitrario, véase el Teorema 6.1.

Resaltamos que las superficies mínimas completas y densas en \mathbb{R}^n con $n \geq 3$ son sorprendentemente abundantes. En efecto, si denotamos por $\text{CMI}(M, \mathbb{R}^n)$ el espacio de todas las inmersiones mínimas conformes definidas sobre una superficie de Riemann abierta M y con valores en \mathbb{R}^n , que es no vacío por los resultados de Alarcón y López (19), entonces el Teorema 6.1 asegura que

aquellas inmersiones mínimas conformes $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ que son completas y tienen imagen densa forman un subconjunto denso en $\text{CMI}(M, \mathbb{R}^n)$ con respecto a la topología compacto-abierta.

Es bien conocido que un dominio general $D \subset \mathbb{R}^n$ no contiene superficies mínimas con estructura compleja arbitraria. Si, por ejemplo, D es relativamente compacto entonces solo puede admitir superficies mínimas de tipo conforme hiperbólico (véase Farkas y Kra (35, p. 179)). No obstante, en el Capítulo 6 probamos que todo dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ contiene superficies mínimas completas que son densas cuya estructura compleja es la de cualquier superficie de Riemann bordeada, véase la Definición 2.13. Este resultado fue demostrado en (3).

Teorema 1.10. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, un dominio y sea $\overline{M} = M \cup bM$ una superficie de Riemann compacta bordeada. Toda inmersión mínima conforme $X: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $X(\overline{M}) \subset D$ puede ser uniformemente aproximada en subconjuntos compactos de $M = \overline{M} \setminus bM$ por inmersiones mínimas conformes completas $Y: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ con valores en D y tales que $\overline{Y(M)} = \overline{D}$.*

Además, si $n \geq 5$ entonces las inmersiones Y que aproximan pueden ser elegidas inyectivas.

Por una inmersión mínima conforme $\bar{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1(\bar{M})$ nos referimos a una aplicación de clase $\mathcal{C}^1(\bar{M})$ cuya restricción a M es una inmersión mínima conforme.

En el caso $D = \mathbb{R}^n$ este resultado es consecuencia del Teorema 1.9. La novedad reside en el caso D distinto de \mathbb{R}^n , donde se puede prescribir la estructura conforme de cualquier superficie de Riemann bordeada.

Organización de los capítulos

En el **Capítulo 2** estudiaremos todos los conceptos y resultados previos necesarios para comprender el contenido de esta memoria, y que en algunos casos la motivan. Los capítulos 3 y 4 se centrarán en el estudio de la interpolación por superficies mínimas: el **Capítulo 3** en la interpolación general y el **Capítulo 4** en la interpolación por superficies mínimas con curvatura total finita. En el **Capítulo 5** trataremos los problemas de optimización para superficies mínimas con curvatura total finita. Terminaremos con el **Capítulo 6**, donde abordaremos la existencia de superficies mínimas densas en dominios del espacio euclídeo.

Capítulo 2

Preliminares

Antes de presentar los conceptos que vamos a necesitar para un correcto desarrollo de los resultados de esta tesis daremos algunas nociones básicas, principalmente para fijar la notación que seguiremos a lo largo de la memoria.

Denotamos por \mathbb{R} y \mathbb{C} los cuerpos de números reales y complejos respectivamente. Consideramos \mathbb{R}^n el espacio euclídeo real y \mathbb{C}^n el espacio euclídeo complejo de dimensión $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Denotamos por $i = \sqrt{-1}$, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ y $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Dado un número entero $n \in \mathbb{N}$ y siendo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, denotamos por $|\cdot|$, $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ y $\text{length}(\cdot)$ la norma, la distancia y la longitud en el espacio euclídeo \mathbb{K}^n , respectivamente. Escribimos $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para denotar el producto escalar de vectores en \mathbb{K}^n .

Dado un subconjunto A de un espacio topológico T , denotamos por $\overset{\circ}{A}$ y \overline{A} su interior y su clausura topológica respectivamente. Para la frontera utilizamos la notación $\partial A := \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Escribimos $A \Subset B$ para referirnos a que A y B cumplen que $\overline{A} \subset \overset{\circ}{B}$. Decimos que un subconjunto $A \subset T$ es un subconjunto discreto si para cada punto $p \in A$ existe un entorno abierto U de p en T tal que $U \cap A = \{p\}$. En un espacio topológico métrico T , un subconjunto es discreto y cerrado si, y solo si, es numerable y no tiene puntos de acumulación; en particular, todo subconjunto finito es cerrado y discreto.

Si $f: T \rightarrow \mathbb{K}^n$ es una función continua, llamamos soporte de f al conjunto

de puntos en los que f no se anula (esto es, no toma el valor $0 \in \mathbb{K}^n$), y decimos que f tiene soporte en K si f se anula en todo punto de $T \setminus K$. Si K es un subconjunto compacto de T , para una función continua $f: K \rightarrow \mathbb{K}^n$ denotamos por

$$\|f\|_{0,K} := \text{máx}\{|f(p)|: p \in K\}$$

la norma del máximo de f en K . De un modo similar, dado $x = (x_1, \dots, x_n)$ en \mathbb{K}^n denotamos por

$$|x|_\infty := \text{máx}\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \quad \text{y} \quad \|f\|_{\infty,K} := \text{máx}\{|f(p)|_\infty: p \in K\}.$$

Si $r \in \mathbb{Z}_+$ y K es un subconjunto compacto de una variedad diferenciable M , denotamos por $\mathcal{C}^r(K)$ el espacio de las funciones diferenciables hasta orden r en (un entorno abierto de) K y denotamos por $\|f\|_{r,K}$ la norma estándar \mathcal{C}^r de una función $f: K \rightarrow \mathbb{K}^n$ de clase $\mathcal{C}^r(K)$, donde las derivadas están medidas respecto a una métrica riemanniana prefijada en M ; la elección precisa de la métrica no será relevante en general y cuando lo sea será especificado.

2.1. Superficies de Riemann

La Teoría de Superficies de Riemann ocupa un lugar importante dentro de las matemáticas. Las superficies de Riemann son uno de los objetos culmen al cálculo tradicional y están relacionadas fuertemente con la geometría o la aritmética. Proporcionan un modelo para el desarrollo de numerosas teorías matemáticas, incluyendo topología de variedades, análisis, geometría algebraica, geometría riemanniana y también diversos temas de física matemática.

Las superficies de Riemann son también muy importantes en el estudio de las Superficies Mínimas y, más generalmente, en la geometría riemanniana. Como se ha puesto de manifiesto en la introducción de esta tesis, las superficies mínimas guardan una estrecha relación con el Análisis Complejo que será tratada en profundidad en la Sección 2.4.

Las superficies de Riemann deben su nombre al célebre matemático alemán Bernhard Riemann, que las introdujo en 1851 en (82) como parte de una disertación sobre la teoría general de funciones de variable compleja, basada en lo que hoy conocemos como las ecuaciones de Cauchy–

Riemann. La información que vamos a presentar sobre dichas superficies puede verse detallada en el libro de Farkas y Kra (35).

Definición 2.1. Una *superficie de Riemann* M es una superficie diferenciable con un atlas de cartas holomorfas, equivalentemente, una variedad compleja de dimensión uno. A un atlas así se le llama *estructura conforme o compleja* de M .

A lo largo de este trabajo toda superficie de Riemann será considerada conexa si lo contrario no es indicado. Observamos que de la propia definición se deduce que toda superficie de Riemann es orientable; en efecto, cualquier transformación holomorfa conserva la orientación.

2.1.1. Preliminares topológicos y geométricos para superficies

Antes de comenzar con el estudio de las superficies de Riemann recordamos algunas nociones básicas de teoría de superficies que resultarán de nuestro interés. Salvo mención explícita de lo contrario, todas las superficies que trataremos serán orientables. Aunque muchos de los resultados que vamos a comentar tienen sentido en el contexto de superficies topológicas, los enunciaremos para superficies diferenciables. No obstante recordamos que la topología de una superficie diferenciable determina unívocamente su estructura diferenciable, por lo que este planteamiento es consistente.

Dado un subconjunto compacto K en una superficie denotamos por $\chi(K)$ la *Característica de Euler* del mismo. Si denotamos por $g \geq 0$ el género topológico de K y por $k \geq 0$ el número de componentes conexas del borde, entonces se tiene que

$$\chi(K) = 2 - 2g - k.$$

Para la demostración de algunos de los resultados de esta memoria necesitaremos construir cierto tipo de sucesiones de compactos exhaustivas para una superficie diferenciable con ciertas propiedades topológicas. Estas sucesiones estarán formadas por un tipo de subconjuntos compactos que, como comprobaremos más adelante, tienen un papel fundamental para el análisis complejo y por tanto para los intereses de esta tesis.

Definición 2.2. Decimos que un subconjunto $K \subset M$ contenido en una superficie diferenciable es Runge si su complemento $M \setminus K$ no tiene ninguna componente conexa relativamente compacta.

Demostremos a continuación la existencia de cierto tipo de exhaustiones por subconjuntos compactos de superficies diferenciables abiertas. Aunque este resultado es bien conocido añadimos una demostración por completitud, para más detalles véase (29, 21).

Lema 2.3. Sea M una superficie diferenciable orientable y abierta. Existe una sucesión $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de M , con borde diferenciable, cumpliendo las siguientes propiedades:

(a) M_n es conexo y Runge para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión exhaustiva, es decir:

$$M_1 \Subset M_2 \Subset \cdots \Subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = M.$$

(c) La característica de Euler $\chi(M_{n+1} \setminus \overset{\circ}{M}_n) \in \{-1, 0\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Empezamos la demostración tomando una sucesión exhaustiva $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de M por compactos conexos con borde diferenciable, esto existe por paracompacidad. Construyamos en primer lugar una exhaustión $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de M formada por subconjuntos conexos Runge. Para ello, si U_1 es Runge definimos $V_1 = U_1$; si no lo fuera definimos V_1 como la unión de U_1 con todas las componentes conexas acotadas (esto es, relativamente compactas) de $M \setminus U_1$. De este modo, V_1 es conexo y Runge.

De forma inductiva, para todo $n \geq 2$ construimos V_n como la unión de V_{n-1} , U_n y las componentes conexas acotadas de $M \setminus U_n$. Observamos que V_n es conexo y Runge. Como $U_n \subset V_n$ y $V_n \Subset V_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión exhaustiva de M formada por compactos conexos Runge con borde diferenciable.

Las propiedades (a) y (b) se cumplen formalmente por la sucesión $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Para concluir, añadiremos convenientes términos intermedios a la sucesión $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con el objetivo de garantizar también la propiedad (c).

Sean V_k y V_{k+1} , $k \in \mathbb{N}$, dos términos consecutivos de la sucesión. Nuestra intención es intercalar entre ellos subconjuntos conexos Runge con borde

diferenciable en sucesión creciente con la propiedad de que la diferencia de dos consecutivos tenga la característica de Euler adecuada, -1 o 0 . Por simplicidad en la exposición llamemos $A := V_k \Subset B := V_{k+1}$ y $m = -\chi(B \setminus \mathring{A}) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Si $m \in \{0, 1\}$ entonces hemos terminado, por tanto suponemos que $m \geq 2$. Afirmamos que existen $m - 1$ compactos Runge en M con borde diferenciable, que llamamos N_1, \dots, N_{m-1} , tales que

$$A := N_0 \Subset N_1 \Subset N_2 \Subset \dots \Subset N_{m-1} \Subset B := N_m$$

y además las características de Euler de las diferencias entre términos consecutivos es siempre -1 , es decir:

$$\chi(N_i \setminus \mathring{N}_{i-1}) = -1 \quad \text{para todo } i = 1, \dots, m.$$

En efecto, razonamos por inducción sobre m . Si $m \in \{0, 1\}$ no hay nada que demostrar. Supongamos entonces que la afirmación es cierta cuando los subconjuntos cumplen $-\chi(B \setminus \mathring{A}) \leq m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, y demostrémosla en el caso $-\chi(B \setminus \mathring{A}) = m + 1$. Por ser A y B compactos conexos Runge y $A \Subset B$, se cumple que:

- (I) A y $B \setminus \mathring{A}$ comparten al menos una componente borde γ_1 que verifica que $\gamma_1 \subseteq bA \cap b(B \setminus \mathring{A})$.
- (II) $B \setminus \mathring{A}$ tiene al menos una componente de su borde que no interseca a A , y por tanto es distinta de γ_1 , a la que llamamos γ_2 . En particular, se tiene que $b(B \setminus \mathring{A})$ tiene al menos dos componentes conexas.

Sea $g \geq 0$ el género de $B \setminus \mathring{A}$ y $k \geq 2$ el número de componentes conexas de $b(B \setminus \mathring{A})$. Recordemos que $\chi(B \setminus \mathring{A}) = 2 - 2g - k$. Como $-\chi(B \setminus \mathring{A}) = m + 1 > 1$ (esto es, $2g + k \geq 4$), las propiedades (I) y (II) garantizan la existencia de un subconjunto compacto W en M con borde diferenciable tal que:

- (i) W tiene género 0 y 3 componentes conexas en su borde.
- (ii) $W \subset B$, $\gamma_2 \subseteq bW$ y $W \cap A = \emptyset$.
- (iii) Si $\gamma \subset bW$ es una componente conexa de bW , entonces se cumple que o $\gamma \subset bB$ o $\gamma \subset \mathring{B}$.

La propiedad (iii) equivale en este contexto a decir que el conjunto $bW \cap bB$ está formado por una o dos componentes conexas que pertenecen tanto a la frontera de W como a la de B .

Definimos $N_{m-1} := \overline{B \setminus W}$ y observamos que N_{m-1} es conexo y Runge, $A \Subset N_{m-1} \Subset B$, $\chi(N_{m-1} \setminus \mathring{A}) = -m$ y $\chi(B \setminus \mathring{N}_{m-1}) = -1$. Por la hipótesis de inducción aplicada al par $A \Subset N_{m-1}$, existen compactos conexos Runge con borde diferenciable N_1, \dots, N_{m-2} en M tales que $A = N_0 \Subset N_1 \Subset \dots \Subset N_{m-2} \Subset N_{m-1}$ y además

$$\chi(N_i \setminus \mathring{N}_{i-1}) = -1 \quad \text{para todo } i = 1, \dots, m-1.$$

Así, la sucesión ampliada de compactos conexos Runge con borde diferenciable N_1, \dots, N_{m-1} satisface las condiciones requeridas para el par $A \Subset B$ y cierra la inducción.

Finalmente, la sucesión $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con las propiedades requeridas se genera aplicando el proceso que acabamos de describir para los subconjuntos A y B a cada par $V_k \Subset V_{k+1}$ con $-\chi(V_{k+1} \setminus \mathring{V}_k) > 1$, intercalando los subconjuntos compactos intermedios necesarios, y reenumerando la nueva sucesión obtenida. \square

Es interesante reflexionar sobre las operaciones topológicas implícitas en el Lema 2.3. Las dos situaciones posibles corresponden a saltos en la característica de Euler de valor -1 y 0 , cada una de ellas se corresponde con una de las siguientes situaciones geométricas:

Caso $\chi(B \setminus \mathring{A}) = 0$. El compacto B tiene el mismo género y número de componentes conexas en el borde que A , es decir, $B \setminus \mathring{A}$ es una unión finita de anillos con borde diferenciable disjuntos dos a dos.

Caso $\chi(B \setminus \mathring{A}) = -1$. Sea $W := B \setminus \mathring{A}$ y recordemos que W tiene al menos dos componentes borde ($k \geq 2$), al menos una contenida en bA y al menos otra fuera de A y contenida en bB . Como $\chi(W) = 2 - 2g - k = -1$, donde g es el género de W , entonces necesariamente $g = 0$ y $k = 3$. Este caso da lugar a dos, y no más, situaciones topológicas distintas: una de ellas consiste en convertir una componente del borde de la superficie en dos y está ilustrada en la Figura 2.1, la otra posible situación consiste en añadir género a la superficie uniendo dos componentes del borde, como puede verse en la Figura 2.2.

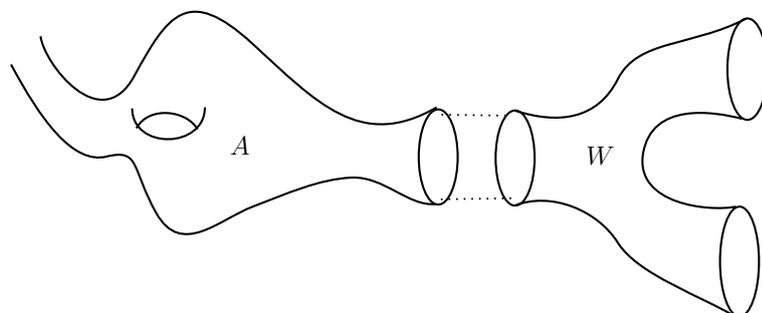


Figura 2.1: Posibilidad 1: Añadir una componente a la frontera.

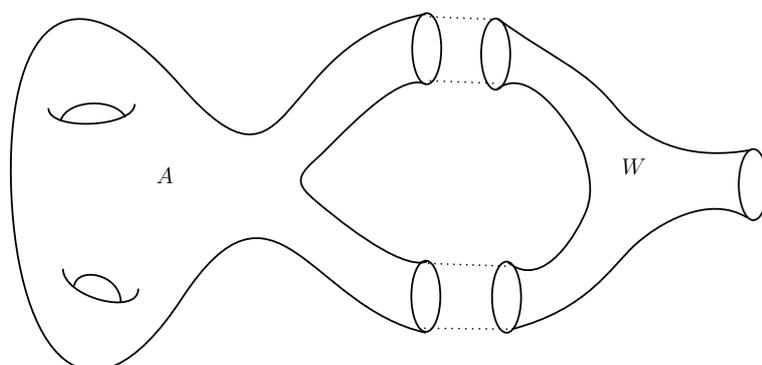


Figura 2.2: Posibilidad 2: Añadir género y quitar una componente borde.

Nota 2.4. Trabajaremos a lo largo de la memoria de esta tesis con el primer grupo de homología $\mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z})$ de una superficie diferenciable M . Si tenemos una situación topológica como la descrita en las Figuras 2.1 y 2.2, es decir, dos subconjuntos compactos con borde diferenciable $A \Subset B$ tales que $\chi(B \setminus \mathring{A}) = -1$, entonces, si $W = B \setminus \mathring{A}$, el cambio en la topología puede describirse por una curva α contenida en \mathring{W} excepto por sus extremos que están contenidos en $bA \cap bW$, alterando la naturaleza del grupo $\mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z})$.

A continuación hacemos un repaso de algunos conceptos propios de la geometría riemanniana. Dada una superficie diferenciable conexa S (posiblemente con borde no vacío) y una métrica riemanniana ds^2 en S , deno-

tamos por

$$\text{dist} : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_+$$

la distancia intrínseca inducida por ds^2 en S . Recordemos que

$$\text{dist}(p, q) := \inf\{\text{length}(\gamma) : \gamma \subset S \text{ arco uniendo } p \text{ con } q\}, \quad p, q \in S,$$

donde length significa longitud respecto a ds^2 . De igual modo, si $K \subset S$ es un subconjunto relativamente compacto, definimos

$$\text{dist}(p, K) := \inf\{\text{dist}(p, q) : q \in K\}, \quad p \in S.$$

En términos de estos conceptos se aborda el estudio del comportamiento global de las superficies riemannianas.

Definición 2.5. Una superficie riemanniana (S, ds^2) se dice que es *completa* si toda curva divergente $\gamma : [0, 1) \rightarrow S$ tiene longitud infinita.

El Teorema de Hopf-Rinow afirma que (S, ds^2) es completa si, y solo si, la distancia dist es completa en el sentido métrico, esto es, toda sucesión de Cauchy es convergente, véase por ejemplo el libro de Do Carmo (30, Theorem 2.8).

Si $X : S \rightarrow \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, es una inmersión diferenciable, denotamos por dist_X la distancia riemanniana inducida en S por el pull-back de la métrica euclídea de \mathbb{K}^n vía X , es decir:

$$\text{dist}_X(p, q) := \inf\{\text{length}(X(\gamma)) : \gamma \subset S \text{ arco uniendo } p \text{ con } q\}, \quad p, q \in S,$$

donde $\text{length}(X(\gamma))$ es la longitud euclídea de $X(\gamma)$. Decimos que X es una inmersión completa si lo es la métrica dist_X .

A continuación comentamos algunas nociones básicas de naturaleza extrínseca aplicables a inmersiones en el espacio euclídeo, que serán de utilidad a lo largo de la memoria.

Definición 2.6. Una aplicación $f : T_1 \rightarrow T_2$ entre espacios topológicos es propia si la preimagen de todo subconjunto compacto de T_2 es un subconjunto compacto de T_1 .

Así, una inmersión $X : S \rightarrow \mathbb{K}^n$ con $n \geq 3$ se dice es propia si la imagen por X de toda curva divergente $\gamma : [0, 1) \rightarrow S$ es una curva divergente en \mathbb{K}^n .

Recordamos que una curva $\gamma: [0, 1) \rightarrow S$ se dice *divergente* en S si el punto $\gamma(t) \in S$ escapa de cualquier compacto contenido en S cuando $t \rightarrow 1$.

Finalmente presentamos el siguiente concepto relativo a aplicaciones con valores en el espacio euclídeo complejo \mathbb{C}^n , que posteriormente jugará un papel técnico importante.

Definición 2.7. Sean Q un espacio topológico y $n \geq 3$ un entero. Una aplicación continua $f: Q \rightarrow \mathbb{C}^n$ se dice que es *llana* si

$$f(Q) \subset \mathbb{C}z_0 = \{\zeta z_0 : \zeta \in \mathbb{C}\} \text{ para algún } z_0 \in \mathbb{C}^n;$$

en otro caso f se dirá *no llana*. Decimos que $f: Q \rightarrow \mathbb{C}^n$ es *siempre no llana* si $f|_A: A \rightarrow \mathbb{C}^n$ es *no llana* para todo subconjunto abierto $\emptyset \neq A \subset Q$.

Por ejemplo, si U es una subvariedad compleja cerrada y cónica no contenida en ningún hiperplano de \mathbb{C}^n , una curva continua $f: [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbb{C}^n$ es no llana si, y solo si,

$$\text{span}\{T_{f(t)}U : t \in [0, 1]\} = \mathbb{C}^n.$$

En otras palabras, si la expansión lineal de la unión de los espacios tangentes a U en los puntos de la curva definida por f tiene dimensión máxima.

2.1.2. Propiedades de las superficies de Riemann

Sea M una superficie de Riemann sin borde. Para un subconjunto $W \subset M$, denotamos por $\mathfrak{Div}(W)$ el grupo libre conmutativo de divisores *numerales* sobre W con notación multiplicativa, es decir,

$$\mathfrak{Div}(W) = \left\{ \prod_{j \in \mathbb{N}} q_j^{n_j} : q_j \in W, n_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Si $D = \prod_{j \in \mathbb{N}} q_j^{n_j} \in \mathfrak{Div}(W)$, llamamos al conjunto $\text{supp}(D) := \{q_j : n_j \neq 0\}$ ¹ el *soporte* de D (por convención, $q^0 = 1$ para todo $q \in W$). Un divisor $\prod_{j \in \mathbb{N}} q_j^{n_j} \in \mathfrak{Div}(W)$ se dice *entero* si $n_j \geq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Dados dos divisores $D_1, D_2 \in \mathfrak{Div}(W)$, se dice que D_1 es múltiplo de D_2 si $D_1 D_2^{-1}$ es un divisor entero.

Una función continua $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es holomorfa si al escribirla en coordenadas locales sobre el dominio de un abierto coordenado ho-

¹No confundir con el soporte de una función.

lomorfo obtenemos una función holomorfa entre abiertos del plano complejo. Del mismo modo, se dice que una función es meromorfa cuando al escribirla en coordenadas locales obtenemos una función meromorfa entre abiertos del plano complejo. Una aplicación $f: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ se dice holomorfa si sus funciones coordenadas son holomorfas en el sentido anterior. Denotamos por $\mathcal{O}(M)$ el espacio de las funciones holomorfas definidas sobre M y con valores en \mathbb{C} . Para el espacio de las funciones meromorfas utilizamos la notación $\mathfrak{M}(M)$. Si $f \in \mathfrak{M}(M)$ no es la función 0, denotamos por $(f)_0$ y $(f)_\infty$ los divisores enteros de ceros y polos de f en M respectivamente, y por $(f) := \frac{(f)_0}{(f)_\infty}$ al divisor de f en M .

Introducimos a continuación el concepto de 1-forma, los objetos naturales que pueden ser integrados a lo largo de curvas en una superficie de Riemann. En general, una 1-forma w en M es una correspondencia que asigna a cada abierto coordenado $(U, z = x + iy)$ dos funciones continuas f y g definidas sobre U , utilizándose la escritura

$$w = f dx + g dy \quad \text{sobre } U,$$

sometida a la condición de que estas expresiones sean globales o no dependan de la parametrización elegida al realizar el cambio de carta. Haciendo uso de la notación compleja, una 1-forma w en M puede escribirse también como

$$w = u(z) dz + v(z) d\bar{z} \tag{2.1}$$

para dos funciones continuas u y v definidas sobre M , donde como antes la expresión no depende de la parametrización elegida. Ambas notaciones se relacionan según las fórmulas

$$dz = dx + idy \quad \text{y} \quad d\bar{z} = dx - idy,$$

de forma que los coeficientes verifican las ecuaciones

$$f = u + v \quad \text{y} \quad g = i(u - v).$$

Una 1-forma se dice diferenciable cuando sus coeficientes f y g (o u y v), en cualquier carta, son funciones diferenciables.

Haciendo uso de la estructura diferenciable de la superficie de Riemann M podemos introducir, para una función diferenciable f definida sobre M ,

el operador d (diferencial exterior) que asigna a la función f la 1-forma dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Hasta ahora, solo hemos utilizado la estructura diferenciable de la superficie de Riemann M , excepto por la notación compleja dada en (2.1). Aprovechando las coordenadas complejas vamos a introducir dos nuevos operadores diferenciales ∂ y $\bar{\partial}$, que sobre una función diferenciable f actúan de la siguiente forma:

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad \text{y} \quad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \quad (2.2)$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

para un parámetro complejo z sobre M .

Estos operadores satisfacen

$$d = \partial + \bar{\partial}. \quad (2.3)$$

Para una función diferenciable $f: M \rightarrow \mathbb{C}$, la ecuación $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ es equivalente a las ecuaciones de Cauchy–Riemann para las funciones coordenadas $\Re(f)$ e $\Im(f)$, por lo que f es holomorfa si, y solo si, $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ para cualquier parámetro holomorfo z en M .

Una 1-forma diferenciable ω en M se dice que es *exacta* si es la diferencial de una función diferenciable, es decir, si existe una función diferenciable $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\omega = df$. Una función diferenciable $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ es armónica si para cualquier parámetro conforme $z = x + iy$ en M se cumple la ecuación

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (2.4)$$

Una 1-forma compleja ω definida sobre una superficie de Riemann M se dice que es holomorfa si se escribe *localmente* como $\omega = df$, donde f es una función holomorfa sobre \mathbb{C} ; denotamos por $\Omega(M)$ el espacio de las 1-formas holomorfas en M . Análogamente se define el concepto de 1-forma meromorfa.

Proposición 2.8. *Sea M una superficie de Riemann. Se cumplen las siguientes propiedades:*

- Si $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ es una función armónica entonces la 1-forma ∂f definida en (2.2) es una 1-forma holomorfa.
- Una 1-forma $\omega = u dz + v d\bar{z}$ es holomorfa si, y solo si, $v = 0$ y la función $u: M \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa.

Los divisores de una 1-forma meromorfa en M diferente de la 1-forma nula se definen igual que en el caso de funciones. Si M es compacta, estos divisores tienen soporte finito y les llamamos *divisores canónicos*.

Sea M una superficie de Riemann abierta, esto es, no compacta y sin borde. Dado un subconjunto $A \subseteq M$ denotamos por $\mathcal{O}(A)$ el espacio de funciones $A \rightarrow \mathbb{C}$ que son holomorfas en un entorno abierto de A en M , que no se especifica. Del mismo modo, denotamos por $\mathfrak{M}(A)$ el espacio de funciones meromorfas en A . Si A es un dominio compacto con borde diferenciable, o una unión finita de dominios disjuntos de este tipo, y $r \in \mathbb{Z}_+$, denotamos por $\mathcal{A}^r(A)$ el espacio de las funciones $A \rightarrow \mathbb{C}$ de clase \mathcal{C}^r que son holomorfas en el interior topológico \mathring{A} ; por sencillez escribimos $\mathcal{A}(A)$ para $\mathcal{A}^0(A)$. Del mismo modo, definimos los espacios $\mathcal{O}(A, Z)$ y $\mathcal{A}^r(A, Z)$ de aplicaciones $A \rightarrow Z$ con valores en una variedad compleja Z .

Gunning y Narasimhan (54) demostraron que en toda superficie de Riemann abierta existe una 1-forma holomorfa sin ceros y exacta; equivalentemente, que existe una función holomorfa sin puntos críticos. Kusunoki y Sainouchi generalizaron este resultado, probando que se pueden prescribir los periodos y los divisores de una 1-forma holomorfa en M , véase (62, Theorem 1). Por periodos entendemos las integrales de la 1-forma sobre las curvas del primer grupo de homología $\mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z})$, entraremos en detalle en esta cuestión al estudiar la representación de Weierstrass de las superficies mínimas en la Sección 2.4. Para los intereses de esta memoria es suficiente con el siguiente resultado, que se deduce del Teorema de Gunning y Narasimhan.

Teorema 2.9. *Toda superficie de Riemann abierta admite una 1-forma holomorfa θ en M que no se anula en ningún punto.*

Así, fijada una 1-forma holomorfa θ como en el Teorema 2.9 tenemos que toda 1-forma holomorfa ω sobre M puede escribirse como $\omega = f\theta$ donde $f \in \mathcal{O}(M)$ es una función holomorfa. Definimos las 1-formas meromorfas en M como aquellas que se escriben de la forma $f\theta$ para una función meromorfa $f \in \mathfrak{M}(M)$ y denotamos por $\Omega_m(M)$ el espacio formado por las mismas.

2.1.3. 1-formas espinoriales

En el Capítulo 4 utilizaremos un tipo concreto de 1-formas, llamadas espinoriales, que describimos a continuación.

Definición 2.10. Sea M una superficie de Riemann. Una 1-forma holomorfa ω en M se dice que es *espinorial* si su divisor asociado satisface $(\omega) = D^2$ para algún divisor entero $D \in \mathcal{D}\text{iv}(M)$; equivalentemente, si los ceros de ω tienen orden par. Denotamos por $\mathfrak{H}(M)$ el conjunto de las 1-formas espinoriales holomorfas en M .

Dos 1-formas ω_1 y ω_2 en $\mathfrak{H}(M)$ se dice que son *espinorialmente equivalentes*, y escribimos $\omega_1 \sim \omega_2$, si existe una función $f \in \mathfrak{M}(M)$ tal que $\omega_2 = f^2\omega_1$. Una clase de equivalencia $\Theta \in \mathfrak{H}(M)/\sim$ es llamada una *estructura espinorial* de M .

Si la superficie de Riemann M tiene topología finita y denotamos por $k := \dim_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z})$ la dimensión del primer grupo de homología de M , entonces existen 2^k estructuras espinoriales diferentes en M . De hecho, las estructuras espinoriales pueden introducirse desde un punto de vista topológico. Para ello, tomamos una clase Θ en el conjunto de las estructuras espinoriales y una 1-forma $\theta \in \Theta$. Sea $\gamma \subset M$ una curva cerrada y embebida y sea A un anillo que sea un entorno tubular de γ en M . Elegimos un parámetro conforme $z: A \rightarrow \{z \in \mathbb{C}: 1 < |z| < R\}$, $R > 1$. A continuación definimos

$$\xi_{\Theta}(\gamma) := \begin{cases} 0 & \text{si } \sqrt{\theta(z)/dz} \text{ tiene una rama bien definida en } A. \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En esta situación, la aplicación inducida $\xi_{\Theta}: \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ no depende de la elección del representante $\theta \in \Theta$ y define un homomorfismo de grupos. Además, se cumple que $\xi_{\Theta_1} = \xi_{\Theta_2}$ si, y solo si, $\Theta_1 = \Theta_2$, y por tanto, el conjunto de las estructuras espinoriales puede identificarse con el conjunto de homomorfismos de grupos $\text{Hom}(\mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2)$. En otras palabras, la aplicación

$$\xi: \frac{\mathfrak{H}(M)}{\sim} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2), \quad \xi(\Theta) = \xi_{\Theta}$$

es inyectiva. También es posible demostrar que es sobreyectiva, luego es una biyección. Para nuestros intereses será suficiente con el siguiente resul-

tado, cuya prueba detallada puede encontrarse en (69).

Lema 2.11. *Si $M = \Sigma \setminus E$, donde Σ es una superficie de Riemann compacta y $E \subset \Sigma$ es finito y no vacío, entonces toda clase espinorial $\Theta \in \mathfrak{S}(M)/\sim$ contiene 1-formas meromorfas en Σ , es decir, existe una 1-forma $\omega \in \Theta$ que se extiende de forma meromorfa a Σ .*

2.1.4. Ejemplos

Los ejemplos más sencillos de superficies de Riemann son el plano complejo \mathbb{C} , el disco unidad abierto $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y la esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Además, el Teorema de uniformización de Koebe afirma que toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a una de las tres anteriores. Las superficies de Riemann se clasifican según su tipo conforme atendiendo a la siguiente definición, véase Farkas y Kra (35, §IV.3).

Definición 2.12. Sea M una superficie de Riemann sin borde.

- M se dice de tipo conforme elíptico si es compacta.
- M se dice de tipo conforme parabólico si no es compacta y no existen funciones subarmónicas negativas y no constantes definidas sobre M .
- M se dice de tipo conforme hiperbólico si no es compacta y existe una función subarmónica negativa no constante definida sobre M ; es decir, si no es ni elíptica ni parabólica.

Las superficies de Riemann citadas anteriormente representan los tipos conformes en que se clasifican las superficies de Riemann: $\bar{\mathbb{C}}$ es de tipo conforme elíptico por ser compacta, \mathbb{D} es de tipo conforme hiperbólico pues no es compacta y admite una función subarmónica negativa no constante (a saber, $\Re(z)$), y \mathbb{C} es de tipo conforme parabólico por ser no compacta y no admitir funciones subarmónicas no constantes como consecuencia del Teorema de Liouville.

La parabolicidad o hiperbolicidad se definen también para superficies de Riemann con borde no vacío. Si M es una superficie de Riemann con borde no vacío, se dice que M es de tipo conforme parabólico si toda

función acotada que sea continua en M y armónica en $\overset{\circ}{M}$ está determinada por sus valores en el borde. En caso contrario M es de tipo conforme hiperbólico.

Toda superficie mínima en \mathbb{R}^n está parametrizada por una aplicación armónica no constante definida sobre una superficie de Riemann (véase el Lema 2.34), esto implica que esta superficie de Riemann no puede ser de tipo conforme elíptico (compacta y sin borde) por el principio del máximo para funciones armónicas. De aquí en adelante estudiaremos superficies de Riemann abiertas o compactas con borde. Serán de especial interés para nosotros un tipo de superficies de Riemann abiertas, que llamaremos superficies de Riemann bordeadas.

Definición 2.13. Por una *superficie de Riemann compacta bordeada* nos referimos a una superficie de Riemann compacta M cuyo borde, bM , es no vacío y consiste en un número finito de curvas de Jordan diferenciables disjuntas dos a dos. El interior de una tal superficie $\overset{\circ}{M} = M \setminus bM$ de M se llama *superficie de Riemann (abierta) bordeada*.

Toda superficie de Riemann bordeada (en particular, abierta) es de tipo conforme hiperbólico. Muchos de los resultados de esta tesis hacen referencia a este tipo de superficies. Además, es bien conocido que toda superficie de Riemann compacta bordeada M es biholomorfa a un dominio compacto con borde diferenciable en una superficie de Riemann abierta \widetilde{M} . Los espacios de aplicaciones $\mathcal{A}^r(M)$ y $\mathcal{A}^r(M, Z)$, para un entero $r \in \mathbb{Z}_+$ y una variedad compleja Z , se definen como se hizo anteriormente.

Otro tipo de superficies de Riemann con el que trataremos en esta memoria es el de las de tipo conforme finito.

Definición 2.14. Si Σ es una superficie de Riemann compacta, posiblemente con borde $b\Sigma$ no vacío, y $E \subset \Sigma \setminus b\Sigma$ es un subconjunto finito, la superficie $M := \Sigma \setminus E$ se dice de *tipo conforme finito*. A los puntos en E se les llama finales topológicos de M .

Una superficie de Riemann abierta de tipo conforme finito y sin borde (es decir, una elíptica menos una cantidad finita de puntos) es de tipo conforme parabólico. Estudiaremos en profundidad este tipo de superficies en la Sección 2.5 y daremos resultados sobre las mismas en el Capítulo 4.

2.2. Aproximación e interpolación para funciones holomorfas

Vamos a comenzar esta sección con un repaso histórico sobre algunos temas de interés para el Análisis Complejo, concretamente los teoremas que originaron toda la teoría de aproximación e interpolación por funciones holomorfas. Para un repaso detallado del tema véase (37).

Los resultados que vamos a presentar a continuación no son los más generales que se conocen ni que aparecerán en esta tesis, trataremos con generalizaciones de los mismos para funciones holomorfas en la Sección 2.3. Demostrar generalizaciones de estos resultados para el ambiente de las Superficies Mínimas es el objetivo principal de esta tesis.

La teoría de aproximación por funciones holomorfas tiene su origen en dos resultados clásicos de 1885, el primero debido a K. Weierstrass (88) que nos dice que podemos aproximar funciones continuas definidas en compactos de \mathbb{R} por polinomios holomorfos definidos sobre \mathbb{C} , y el segundo debido a C. Runge (85) y que es mucho más interesante para los objetivos de esta tesis que enunciamos a continuación.

Teorema 2.15. (Teorema de Runge, (85)). *Para un subconjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$, son equivalentes que toda función holomorfa definida en un entorno abierto de K pueda ser uniformemente aproximada en K por polinomios holomorfos y que $\mathbb{C} \setminus K$ sea conexo.*

Mergelyan, en 1951, demostró la siguiente generalización de los teoremas de aproximación anteriores.

Teorema 2.16. (Mergelyan (72)). *Si K es un compacto de \mathbb{C} tal que $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo, entonces toda función en $\mathcal{A}(K)$ puede ser uniformemente aproximada en K por polinomios holomorfos.*

Poco tiempo después, E. Bishop en 1958 generalizó este resultado al ambiente de las superficies de Riemann. Esa generalización, que enunciamos a continuación, será una de nuestras herramientas fundamentales.

Teorema 2.17. (Teorema de Runge–Mergelyan; Bishop (27)). *Sea K un compacto en una superficie de Riemann abierta M tal que $M \setminus K$ no tiene*

componentes conexas relativamente compactas. Toda función en $\mathcal{A}(K)$ puede ser uniformemente aproximada en K por funciones en $\mathcal{O}(M)$.

Cobra pleno sentido aquí la Definición 2.2.

Otras generalizaciones del Teorema de Runge van en la dirección de la aproximación polinómica. Más concretamente, Royden demostró en 1967 el siguiente resultado (ver (83, Theorem 10)), que involucra no solo aproximación polinómica sino también interpolación.

Teorema 2.18. (Royden (83)). Sean Σ una superficie de Riemann compacta, K un subconjunto compacto de Σ y E un subconjunto finito conteniendo un punto en cada componente conexa de $\Sigma \setminus K$ (en particular, K es Runge en $\Sigma \setminus E$). Sea f una función definida en un entorno de K , holomorfa en ese entorno excepto por un número finito de polos en K (esto es, f es meromorfa en K), y sea D un divisor finito con soporte en K .

Existe una función meromorfa $F: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ que aproxima a f uniformemente en K , es holomorfa en $\Sigma \setminus E$ excepto en sus polos (que coinciden con los de f en K), y tal que el divisor de $F - f$ es un múltiplo de D en un entorno de K .

En la práctica, utilizar los resultados de aproximación por funciones holomorfas como herramienta es muy útil en multitud de campos de las matemáticas, en nuestro caso los utilizaremos para la construcción de superficies mínimas. Para la mayoría de construcciones geométricas, incluidas las que aparecerán en esta tesis, es suficiente considerar conjuntos compactos del siguiente tipo.

Definición 2.19. Un subconjunto compacto no vacío S de una superficie de Riemann abierta M se dice *admisibles* si es Runge en M y es de la forma $S = K \cup \Gamma$, donde K es una unión finita de dominios compactos disjuntos con borde diferenciable en M y $\Gamma := \overline{S} \setminus \overline{K}$ es una unión finita de arcos de Jordan disjuntos que de intersectar a K lo hacen en sus puntos finales y tal que dichas intersecciones con la frontera ∂K son transversas. Véase la Figura 2.3.

Claramente, el Teorema 2.17 puede aplicarse a funciones continuas definidas sobre conjuntos admisibles $S = K \cup \Gamma$ que sean holomorfas en el interior $\overset{\circ}{K}$ de K .

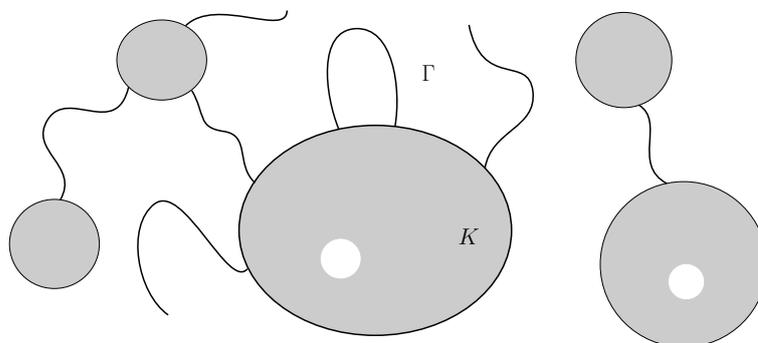


Figura 2.3: Un conjunto admisible.

Por otro lado, toda superficie de Riemann abierta M admite un CW-complejo 1-dimensional embebido $C \subset M$, esto es, una unión de curvas embebidas o 1-celdas y puntos o 0-celdas, que es un retracto fuerte de deformación. Esto significa que existe una deformación continua $\rho_t: M \rightarrow M$ ($t \in [0, 1]$) con $\rho_0 = \text{Id}_M$, $\rho_t|_C = \text{Id}|_C$ para todo $t \in [0, 1]$, y $\rho_1(M) = C$. Además, el complemento $M \setminus C$ no tiene componentes conexas relativamente compactas en M y por tanto C es un subconjunto Runge de M . Tal CW-complejo $C \subset M$ representa la topología de M y puede ser obtenido, por ejemplo, como el complejo Morse de una función exhaustiva fuertemente subarmónica en M . Recordemos que el primer grupo de homología $\mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^l$ para algún $l \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. No es difícil de comprobar que si M es finitamente-conexa (por ejemplo, si es una superficie de Riemann bordeada, véase la Definición 2.13), es decir, si $l \in \mathbb{Z}_+$, entonces, dado un punto $p_0 \in M$ existe un CW-complejo $C \subset M$ como hemos descrito anteriormente que es una unión de l lazos con punto base p_0 , es decir, $\{p_0\}$ es la única 0-celda de C y C tiene l 1-celdas C_1, \dots, C_l que son curvas cerradas de Jordan en M que solo se cortan en p_0 .

Un CW-complejo $C \subset M$ como el anterior es un conjunto admisible, por lo que puede aplicarse el Teorema 2.17 sobre cualquier función continua $f: C \rightarrow \mathbb{C}$.

Al igual que ocurre con la Teoría de Aproximación, la Teoría de Interpolación ha sido un tema central de estudio en el Análisis Complejo. Sus inicios se remontan a los resultados de Weierstrass en 1876, que demostró en (87) que pueden prescribirse los ceros de una función entera sobre una sucesión de números complejos divergente, y a los resultados de Mittag-Leffler, que

demostró en 1884 en (74) que pueden prescribirse los polos de una función meromorfa e incluso las partes principales de la misma sobre una sucesión divergente de puntos del plano complejo.

Para los resultados que vamos a estudiar más adelante nos interesa resaltar el resultado que se conoce como Teorema de Weierstrass. Este afirma que se pueden prescribir los valores sobre un subconjunto discreto y cerrado del plano complejo de una función entera.

Teorema 2.20. (Teorema de Weierstrass). *Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ es una sucesión divergente de números complejos, entonces toda aplicación $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{C}$ puede extenderse a una función entera.*

La condición sobre la sucesión de puntos en \mathbb{C} es necesaria pues la sucesión no puede tener ningún punto de acumulación por el Principio de Identidad para funciones holomorfas.

Mucho después, en 1948, H. Florack (36) generalizó los resultados de Weierstrass y Mittag-Leffler al ambiente más general de las superficies de Riemann.

Teorema 2.21. (Florack (36)). *Sea M una superficie de Riemann abierta. Sea $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ un subconjunto discreto y cerrado y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $m_n \in \mathbb{Z}$. Existe una función meromorfa $M \rightarrow \mathbb{C}$ con un cero o un polo de multiplicidad m_n en cada punto $p_n \in M$ según sea m_n positivo o negativo respectivamente.*

Al igual que ocurre en el Teorema 2.20, la condición sobre cómo se toman los puntos en M es necesaria, pues el conjunto sobre el que se interpola no puede tener ningún punto de acumulación en M .

En el estudio de las superficies mínimas se ha desarrollado toda una teoría de aproximación similar a la existente para funciones holomorfas, cuyos resultados centrales son el Teorema 1.1 y el Teorema 1.3, ambos enunciados en la Introducción. Estos teoremas trasladan los resultados de aproximación uniforme por funciones holomorfas al ambiente de las superficies mínimas y de las superficies mínimas con curvatura total finita. Uno de nuestros objetivos será demostrar un análogo al Teorema de Weierstrass 2.20 en el que aseguraremos interpolación por superficies mínimas, ver el Capítulo 3, y un resultado de interpolación por superficies mínimas con curvatura total finita en el Capítulo 4.

Para finalizar esta sección vamos a hablar de la noción de “jet” de una función en un punto, será un concepto clave para entender el tipo de interpolación con el que vamos a tratar.

Definición 2.22. Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} dos variedades diferenciables sin borde, sea $x_0 \in \mathcal{M}$ un punto y sean $f, g: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ aplicaciones diferenciables. Se dice que las aplicaciones f y g tienen un *punto de contacto de orden* $k \in \mathbb{Z}_+$ en el punto x_0 si sus series de Taylor en ese punto coinciden hasta el término de orden k . Una clase de equivalencia de aplicaciones $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ teniendo el mismo punto de contacto de orden k en el punto x_0 se llama un *k-jet*, que denotamos por $j_{x_0}^k(f)$; véase por ejemplo (73, §1) para una explicación detallada.

La condición implícita en la definición de jet, relativa a la serie de Taylor hasta orden k en x_0 para una aplicación diferenciable $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, no depende de la elección de parámetros en \mathcal{M} o en \mathcal{N} centrados en x_0 y $f(x_0)$ respectivamente. Por tanto, si fijamos tales parametrizaciones en \mathcal{M} y \mathcal{N} alrededor de los puntos x_0 y $f(x_0)$ respectivamente, podemos identificar el *k-jet* de f en x_0 , $j_{x_0}^k(f)$, con el conjunto de derivadas de f en x_0 de orden menor o igual que k . Bajo esta identificación de jets se tiene que

$$j_{x_0}^0(f) = f(x_0), \quad j_{x_0}^1(f) = (f(x_0), \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0}), \quad j_{x_0}^2(f) = (f(x_0), \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{x_0}), \quad \dots$$

De igual modo, si \mathcal{M} y \mathcal{N} son variedades complejas entonces definimos el *k-jet* de una aplicación holomorfa $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ considerando las derivadas holomorfas complejas respecto a coordenadas holomorfas locales. Es claro que la definición de *k-jet* de una aplicación en un punto es una propiedad local y puede ser formulada en términos de gérmenes de aplicaciones en ese punto. Así, es evidente que si una pareja de aplicaciones tiene el mismo *k-jet* en un punto, entonces tiene el mismo *k'-jet* en ese punto para todo $k' \in \mathbb{Z}_+$, $k' \leq k$.

En el caso usual en que vamos a trabajar, si Ω es un entorno de un punto p en una superficie de Riemann abierta M y $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ son funciones holomorfas, entonces f y g tienen un punto de contacto de orden $k \in \mathbb{Z}_+$, o el mismo *k-jet*, en el punto p si, y solo si, $f - g$ tiene un cero de multiplicidad (al menos) $k+1$ en p ; en cuyo caso, para toda función distancia $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ en M (no necesariamente conforme) tenemos que

$$|f - g|(q) = O(d(q, p)^{k+1}) \quad \text{si } q \rightarrow p. \tag{2.5}$$

Si $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ son aplicaciones armónicas, como lo son las inmersiones mínimas conformes, entonces decimos que tienen un punto de contacto de orden $k \in \mathbb{Z}_+$, o el mismo k -jet, en el punto p si, suponiendo que Ω es simplemente conexo, existen conjugadas armónicas \bar{f} de f y \bar{g} de g tales que las funciones holomorfas $f + i\bar{f}, g + i\bar{g}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ tienen un punto de contacto de orden k en p . Esto es equivalente a que $f(p) = g(p)$ y a que, si $k > 0$, la 1-forma holomorfa $\partial(f - g)$ tenga un cero de multiplicidad (al menos) k en p . De nuevo, si tal pareja de aplicaciones f y g tienen el mismo k -jet en el punto $p \in \Omega$ entonces se cumple formalmente la ecuación (2.5).

2.3. Variedades complejas

Vamos a presentar a continuación algunos conceptos relativos a subvariedades del espacio euclídeo complejo y a aplicaciones con valores en ellas.

2.3.1. Inmersiones holomorfas dirigidas

Sea M una superficie de Riemann abierta y sea θ una 1-forma holomorfa en M que no se anula en ningún punto, véase el Teorema 2.9. Vamos a estudiar a continuación una clase especial de inmersiones holomorfas definidas sobre M y con valores en el espacio euclídeo complejo \mathbb{C}^n .

Definición 2.23. Sea M una superficie de Riemann abierta y sea \mathfrak{G} una subvariedad compleja de \mathbb{C}^n , $n \geq 3$, irreducible, cerrada y cónica; por cónica entendemos que $t\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ para todo $t \in \mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Una \mathfrak{G} -inmersión o una *inmersión dirigida por \mathfrak{G}* es una aplicación holomorfa $F: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que dF/θ toma valores en $\mathfrak{G} \setminus \{0\}$.

En general, si $F: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una aplicación holomorfa, se cumple que su diferencial puede escribirse de la forma $dF = f\theta$, donde $f: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una aplicación holomorfa. Es equivalente que F sea una \mathfrak{G} -inmersión a que f tome valores en $\mathfrak{G} \setminus \{0\}$.

Si A es un dominio compacto con borde diferenciable en una superficie de Riemann, o una unión de varios disjuntos dos a dos, por una \mathfrak{G} -inmersión $A \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^m(A)$ ($m \in \mathbb{Z}_+$) entendemos una inmersión $A \rightarrow \mathbb{C}^n$ de

clase $\mathcal{C}^m(A)$ cuya restricción al interior $\overset{\circ}{A}$ de A es una \mathfrak{G} -inmersión holomorfa.

Las inmersiones mínimas están relacionadas con un tipo especial de estas aplicaciones, como veremos con detalle en la Sección 2.4, son las conocidas como curvas nulas.

Definición 2.24. Una *curva nula* es una inmersión holomorfa dirigida por la subvariedad compleja $\mathfrak{A} \subset \mathbb{C}^n$ que está determinada por

$$\mathfrak{A} := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0\}. \quad (2.6)$$

Se conoce a esta subvariedad como *cuádrica nula*.

Las curvas nulas guardan una estrecha relación con las superficies mínimas. Dejando los detalles para más adelante, si $F: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una curva nula entonces tanto su parte real como su parte imaginaria, $\Re(F)$ e $\Im(F)$, son inmersiones mínimas conformes $M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Recíprocamente, toda inmersión mínima conforme definida sobre una superficie de Riemann M que tenga flujo nulo (lo que siempre ocurre si M es simplemente conexa) es la parte real de una curva nula. Justificaremos esta afirmación en la Sección 2.4.

Ejemplo 2.25. La inmersión holomorfa $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ dada por

$$F(\zeta) = (\cos \zeta, \sin \zeta, -i\zeta), \quad \zeta = x + iy \in \mathbb{C}$$

es una curva nula. Además, su parte real, $\Re(F)$, es una catenoide y su parte imaginaria, $\Im(F)$, es un helicoide. Véanse los Ejemplos 2.40 y 2.41.

2.3.2. Variedades de Stein y de Oka

Continuamos con algunos de los conceptos y resultados más importantes en la teoría de variedades de Stein y variedades de Oka, íntimamente relacionadas con la aproximación e interpolación holomorfa. Para más información véanse las notas de Lárusson (64), Forstnerič y Lárusson (45), Forstnerič (41) o Kutzschebauch (63) para una introducción a la teoría, o el libro de Forstnerič (42) para un tratamiento específico. Para ver el papel que juegan este tipo de variedades en el estudio de las superficies mínimas véanse por ejemplo Alarcón y Forstnerič (11, 13) o Alarcón, Forstnerič y López (17).

Comenzamos esta sección presentando el concepto de *variedad de Stein*.

Definición 2.26. Una variedad compleja \mathcal{M} se dice que es una *variedad de Stein* (en honor al matemático Karl Stein) si cumple que:

- Las funciones holomorfas en \mathcal{M} separan cualquier pareja de puntos distintos, es decir, si $p, q \in \mathcal{M}$, $p \neq q$, entonces existe una función $f \in \mathcal{O}(\mathcal{M})$ tal que $f(p) \neq f(q)$.
- Si K es un subconjunto compacto de \mathcal{M} , entonces también lo es su envolvente $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ -convexa, definida por

$$\widehat{K} := \{p \in \mathcal{M} : |f(p)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)| \forall f \in \mathcal{O}(\mathcal{M})\}.$$

Un subconjunto compacto $K \subset \mathcal{M}$ se dice que es $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ -convexo u holomorficamente convexo si $K = \widehat{K}$. Si $\mathcal{M} = \mathbb{C}^n$, que es una variedad de Stein, entonces \widehat{K} coincide con la envolvente polinómica de K y un subconjunto compacto de \mathbb{C}^n holomorficamente convexo se dice que es polinomialmente convexo.

El análogo al Teorema de Runge para variedades de Stein es el siguiente resultado debido a K. Oka (78) y A. Weil (89).

Teorema 2.27. Sean \mathcal{M} una variedad de Stein y K un subconjunto compacto $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ -convexo de \mathcal{M} . Toda función holomorfa definida sobre un entorno abierto de K y con valores en \mathbb{C} puede ser aproximada uniformemente en K por funciones de $\mathcal{O}(\mathcal{M})$.

Una de variedad compleja de dimensión 1 (esto es, una superficie de Riemann) es Stein si, y solo si, es abierta (no compacta y sin borde). Este hecho fue demostrado por Behnke y Stein (26) en 1949, este trabajo supuso el inicio del estudio de la teoría de aproximación sobre superficies de Riemann. Si \mathcal{M} es una superficie de Riemann abierta entonces la envolvente \widehat{K} de cualquier compacto $K \subset \mathcal{M}$ coincide con la unión de K y todas las componentes conexas relativamente compactas de su complemento $\mathcal{M} \setminus K$, es decir, los conceptos de compacto Runge y $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ -convexo son equivalentes en el ambiente de las superficies de Riemann.

Hemos visto que el concepto de aplicación holomorfa tiene sentido en ambientes más generales que el plano complejo, extendiéndolo a varie-

dades de Stein y pasando por las superficies de Riemann. Paralelamente, también se han estudiado las variedades complejas que, usadas como codominio, hay una buena teoría de aproximación para aplicaciones holomorfas de \mathbb{C}^n . Es aquí donde surge de forma natural el concepto de variedad de Oka. Estas variedades complejas van a ser fundamentales para el desarrollo de la teoría de aproximación e interpolación en el contexto de las superficies mínimas y las inmersiones holomorfas dirigidas, por lo que presentamos aquí algunas de sus propiedades básicas.

Definición 2.28. Una variedad compleja Z se dice que es una *variedad de Oka* si toda aplicación holomorfa definida sobre un entorno de un subconjunto compacto y afínmente convexo $K \subset \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, con valores en Z puede ser uniformemente aproximada en K por funciones enteras $\mathbb{C}^n \rightarrow Z$.

El concepto de variedad de Oka está fuertemente relacionado con el de variedad de Stein. De hecho, es equivalente que Z sea una variedad de Oka y que dados una variedad de Stein \mathcal{M} , un subconjunto compacto K que sea $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ -convexo y una aplicación holomorfa $f: \mathcal{M} \rightarrow Z$ que sea holomorfa en un entorno de K entonces f pueda ser aproximada uniformemente en K por aplicaciones holomorfas $F: \mathcal{M} \rightarrow Z$.

El resultado central de la teoría de Oka afirma que toda aplicación de la forma $\mathcal{M} \rightarrow Z$ definida sobre una variedad de Stein (como por ejemplo una superficie de Riemann abierta) con valores en una variedad de Oka cumple todas las formas del *principio de Oka* (véase Forstnerič (40)). En particular y para demostrar los resultados que vienen a continuación haremos uso de la siguiente versión del *Teorema de Mergelyan con interpolación jet* que es consecuencia directa de los resultados (42, Theorems 3.8.1 y 5.4.4); véase también (39, Theorem 3.2) y (58, Theorem 4.1).

Teorema 2.29. Sea Z una variedad de Oka, sea M una superficie de Riemann abierta y sea $S = K \cup \Gamma \subset M$ un subconjunto admisible en el sentido de la Definición 2.19. Dado un subconjunto finito $\Lambda \subset \overset{\circ}{K}$ y un entero $k \in \mathbb{Z}_+$. Toda aplicación continua $f: S \rightarrow Z$ que además sea holomorfa en $\overset{\circ}{K}$ puede ser uniformemente aproximada en S por aplicaciones holomorfas $M \rightarrow Z$ con el mismo k -jet que f en todo punto de Λ .

Obviamente, \mathbb{C}^n es Oka para todo $n \in \mathbb{N}$. Las únicas variedades de Oka de dimensión uno son \mathbb{C} y $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Una condición suficiente para demostrar que una variedad Z es Oka, véase Gromov (53), es la existencia de un número finito de campos de vectores holomorfos \mathbb{C} -completos V_1, \dots, V_N en Z que generen el espacio tangente a Z en todo punto, es decir,

$$\text{Span}\{V_1(z), \dots, V_N(z)\} = T_z Z, \quad \text{para todo } z \in Z.$$

La composición de sus flujos ϕ_t^j para valores complejos de t determinan una aplicación $\sigma: \mathbb{C}^N \times Z \rightarrow Z$ definida por

$$\sigma(t_1, \dots, t_n; z) = \phi_{t_1}^1 \circ \phi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \phi_{t_m}^m(z), \quad z \in Z, (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n, \quad (2.7)$$

que cumple la condición de ser dominante, consistente en que

$$\frac{\partial \sigma(t, z)}{\partial t} \Big|_{t=0}: \mathbb{C}^N \rightarrow T_z Z \quad \text{es sobreyectiva para todo } z \in Z. \quad (2.8)$$

Una aplicación holomorfa $\sigma: \mathbb{C}^N \times Z \rightarrow Z$ cumpliendo $\sigma(0, z) = z$ para todo $z \in Z$ y siendo dominante, es decir, cumpliendo (2.8), se dice que es un *spray dominante* en Z . Gromov demostró en (53) que toda variedad compleja que admita un spray dominante es una variedad de Oka.

A lo largo de esta memoria vamos a trabajar con *sprays holomorfos de aplicaciones*, es decir, con aplicaciones holomorfas $\Psi: U \times M \rightarrow Z$, donde $U \subset \mathbb{C}^N$ es un entorno abierto del origen en un espacio euclídeo, tales que

$$\frac{\partial \Psi(t, p)}{\partial t} \Big|_{t=0}: \mathbb{C}^N \rightarrow T_{\Psi(0, p)} Z \quad \text{es sobreyectiva para todo } p \in M.$$

La aplicación $\Psi(0, \cdot)$ es conocida como la *aplicación inicial* o *núcleo* de Ψ . Si Z admite un spray dominante $\sigma: \mathbb{C}^N \times Z \rightarrow Z$, entonces para toda aplicación holomorfa $f: M \rightarrow Z$, la aplicación $\Psi: \mathbb{C}^N \times M \rightarrow Z$ dada por

$$\Psi(t, s) = \sigma(t, f(p)) \in Z, \quad t \in \mathbb{C}^N, p \in M,$$

es un spray dominante holomorfo de aplicaciones con núcleo f .

Concluimos este repaso de las variedades de Oka haciendo uso del resultado de Gromov para probar que la variedad compleja que dirige las curvas nulas es efectivamente una variedad de Oka. El siguiente razonamiento puede verse en (11, §4).

Lema 2.30. *La cuádriga nula punteada $\mathfrak{A}_* = \mathfrak{A} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^n$ que dirige las curvas nulas, véase la Definición 2.24, es una variedad de Oka.*

Demostración. Puesto que $P(z) = P(z_1, \dots, z_n) = z_1^2 + \dots + z_n^2$ es un polinomio en \mathbb{C}^n homogéneo y cuadrático tal que la hipersuperficie $\mathfrak{A} = \{P(z) = 0\}$ es cónica y diferenciable cuando le quitamos el origen, entonces la variedad \mathfrak{A}_* admite un spray dominante de la forma descrita en la ecuación (2.7), y por tanto es una variedad de Oka. En efecto, los campos de vectores dados por

$$V_{j,k} = z_j \frac{\partial}{\partial z_k} - z_k \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad 1 \leq j \neq k \leq n, \quad (2.9)$$

expanden $T_z \mathfrak{A}$ en cada punto y son tangentes a \mathfrak{A} a lo largo de $\mathfrak{A} \setminus \{0\}$. Además son lineales y por tanto son \mathbb{C} -completos y su flujo fija $\mathfrak{A} \setminus \{0\}$. \square

Por otro lado, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ la variedad compleja $\mathfrak{A} \cap \{z_j = 1\}$ es una copia embebida de la esfera compleja de dimensión $(n - 2)$ dada por

$$\mathbb{C}S^{n-2} = \{w = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} : w_1^2 + \dots + w_{n-1}^2 = 1\}.$$

Obsérvese que $\mathbb{C}S^{n-2}$ es homogénea con respecto al grupo de Lie complejo $SO(n - 1, \mathbb{C})$, y por tanto es una variedad de Oka (véase (50) o (42, Proposition 5.6.1)); para una discusión detallada consúltense (42, Example 6.15.7) y (11, Example 7.8). Además, eligiendo $k \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq j$, la aplicación $h = (h_1, \dots, h_n) : \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{A}$ definida por

$$h_j(\zeta) = \zeta, \quad h_k(\zeta) = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{y} \quad h_l(\zeta) = \frac{i}{\sqrt{n-2}} \quad \text{para todo } l \neq j, k, \zeta \in \mathbb{C},$$

es una sección local holomorfa alrededor de $\zeta = 0 \in \mathbb{C}$ de la proyección $\pi_j : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$, $\pi_j(z_1, \dots, z_n) = z_j$, que cumple que $h(0) \neq 0$. De este modo, la cuádrlica nula $\mathfrak{A} \subset \mathbb{C}^n$ verificará las hipótesis de los resultados que aparecen en el Capítulo 3 relativos a inmersiones dirigidas.

2.4. Superficies mínimas

Una vez presentadas las superficies de Riemann, objeto analítico que dará soporte a las superficies mínimas y sus generalizaciones, procedemos a introducir la teoría de *Superficies Mínimas* en el espacio euclídeo. En primer lugar trataremos con algunas definiciones y conceptos locales, que culminarán con la Representación de Weierstrass (véase la Subsec. 2.4.1). Para una exposición detallada véase el libro de R. Osserman (79, §1 y §4).

Vamos a considerar en principio superficies parametrizadas inmersas en el espacio euclídeo de dimensión n (o parametrizaciones locales de superficies inmersas). Sea entonces $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio del plano con coordenadas $(u, v) \in D$ y sea $X: D \rightarrow S = X(D) \subset \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. Si escribimos $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$ y $X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$, recordemos que X es una inmersión si, y solo si, los vectores X_u y X_v son linealmente independientes, es decir, cuando el rango de la diferencial de X es máximo, en este caso igual a 2. En esta situación denotamos por

$$E := \langle X_u, X_u \rangle, \quad F := \langle X_u, X_v \rangle = \langle X_v, X_u \rangle \quad \text{y} \quad G := \langle X_v, X_v \rangle \quad (2.10)$$

los coeficientes de la primera forma fundamental de X (o de $S = X(D)$ en la parametrización dada por X).

Con objeto de estudiar la curvatura de la inmersión, consideramos una curva \mathcal{C}^2 parametrizada por el arco contenida en la superficie S pasando por un punto $x \in S$, es decir, $\gamma: I \rightarrow S$, donde I es un intervalo de \mathbb{R} con $\gamma(s_0) = x$ y $s_0 \in I$. Consideramos también un vector normal N contenido en el espacio ortogonal al plano tangente a S en el punto x . Escribiendo $\gamma(s) = X(u(s), v(s))$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{du}{ds} X_u + \frac{dv}{ds} X_v \quad \text{y} \\ \frac{d^2\gamma}{ds^2} &= \frac{d^2u}{ds^2} X_u + \frac{d^2v}{ds^2} X_v + \left(\frac{du}{ds}\right)^2 X_{uu} + 2\frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} X_{uv} + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 X_{vv}. \end{aligned}$$

Se deduce entonces que

$$\left\langle \frac{d^2\gamma}{ds^2}, N \right\rangle = \left(\frac{du}{ds}\right)^2 e(N) + 2\frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} f(N) + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 g(N),$$

donde hemos utilizado la notación clásica para los coeficientes de la segunda forma fundamental

$$e(N) = \langle X_{uu}, N \rangle, \quad f(N) = \langle X_{uv}, N \rangle \quad \text{y} \quad g(N) = \langle X_{vv}, N \rangle, \quad (2.11)$$

para un vector normal N cualquiera en el punto $x \in S$. Observamos que esta expresión no depende de la curva elegida sino de la dirección de la misma y por tanto la igualdad anterior se puede escribir en términos de una función $\kappa(N, T)$ donde N es un vector normal y T un vector tangente unitario en el punto x , esto es,

$$\left\langle \frac{d^2\gamma}{ds^2}, N \right\rangle = \kappa(N, T).$$

La función $\kappa(N, T)$ se conoce como la *curvatura normal a S en el punto $x \in S$ en la dirección tangente unitaria T respecto del normal N* . Si fijamos N y hacemos variar T entre los vectores tangentes unitarios en $x \in S$ obtenemos las curvaturas principales de S en el punto x :

$$\kappa_1(N) = \max_T \kappa(N, T) \quad \text{y} \quad \kappa_2(N) = \min_T \kappa(N, T).$$

La curvatura media respecto al normal N de la inmersión viene entonces dada por el valor

$$H(N) := \frac{\kappa_1(N) + \kappa_2(N)}{2},$$

que puede expresarse en términos de los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental como sigue

$$H(N) = \frac{G e(N) - 2F f(N) + E g(N)}{2(EG - F^2)}. \quad (2.12)$$

De la ecuación (2.11) se deduce que los coeficientes de la segunda forma fundamental son lineales en N , y junto a (2.12), que también $H(N)$ es lineal en N , siendo N cualquier vector normal a S en el punto x . Esto implica que existe un único vector \mathbf{H} normal a S en $x \in S$ que verifica:

$$H(N) = \langle \mathbf{H}, N \rangle \quad \text{para todo vector normal } N. \quad (2.13)$$

Decimos que el vector normal \mathbf{H} es el *vector curvatura media* de S en el punto $x \in S$. Podemos entonces definir formalmente el concepto de superficie mínima en función de su vector curvatura media.

Definición 2.31. Una superficie S en \mathbb{R}^n decimos que es una *superficie mínima* si su vector curvatura media \mathbf{H} se anula en todo punto.

2.4.1. Representación de Weierstrass

Vamos a presentar la *Representación de Weierstrass* clásica de las superficies mínimas. Esta nos permitirá representar a estas superficies mediante datos analíticos, estableciendo una fuerte conexión entre la teoría de superficies mínimas y el análisis complejo que será fuertemente explotada en este trabajo.

Sea S una superficie inmersa en \mathbb{R}^n y $X: D \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ una parametrización conforme local de S . Recordamos que X se dice conforme si los coeficientes de la primera forma fundamental definidos en (2.10) cumplen

$$E := \langle X_u, X_u \rangle = G := \langle X_v, X_v \rangle = \lambda^2 \quad \text{y} \quad F := \langle X_u, X_v \rangle = 0, \quad (2.14)$$

donde $\lambda^2: D \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función positiva. Las parametrizaciones conformes definen un atlas global sobre la superficie como consecuencia del siguiente resultado, que puede encontrarse en (79, Lemma 4.4).

Lema 2.32. *Dada una superficie S inmersa en \mathbb{R}^n y un punto $p \in S$, existe una parametrización conforme $X: D \rightarrow S$ de S con $p \in D$.*

Los cambios de carta entre dos parametrizaciones conformes son isomorfismos conformes, por tanto holomorfos o antiholomorfos. Aquí estamos identificando los dominios de las cartas conformes en el (x, y) -plano \mathbb{R}^2 con los dominios del ζ -plano complejo \mathbb{C} mediante la escritura estándar $\zeta = x + iy$. Si adicionalmente S es orientable, lo que se supondrá a lo largo de toda la tesis, obtenemos un atlas $\mathcal{U} = (D_j, \varphi_j)$ formado por un recubrimiento por abiertos D_j de S y por las cartas conformes, $\varphi_j: D_j \rightarrow \varphi_j(D_j) \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, que preservan la orientación. Así, los cambios de cartas $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ son biholomorfismos; es decir, \mathcal{U} es un atlas complejo determinando una estructura compleja de superficie de Riemann para S , véase la Definición 2.1. Por tanto, podemos restringirnos a partir de este momento a considerar inmersiones conformes $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de una superficie de Riemann abierta M .

Definición 2.33. Sea M una superficie de Riemann abierta. Una inmersión conforme $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que el vector curvatura media de la inmersión, definido en (2.12), se anula en todo punto se dice que es una *inmersión mínima conforme*.

Si A es un dominio compacto con borde diferenciable en una superficie de Riemann abierta, por una *inmersión mínima conforme* $A \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^m(A)$, $m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, entendemos una inmersión $A \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^m(A)$ cuya restricción al interior $\mathring{A} = A \setminus \partial A$ es una inmersión mínima conforme.

No es difícil identificar a aquellas inmersiones conformes $X = (X_1, \dots, X_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ que son mínimas. En efecto, es fácil ver que

$$\Delta X = 2\lambda^2 \mathbf{H}, \quad (2.15)$$

dónde $\Delta X = (\Delta X_1, \dots, \Delta X_n)$ denota el operador de Laplace definido en (2.4), λ^2 es el parámetro conforme de X de acuerdo a la ecuación (2.10), y \mathbf{H} es el vector curvatura media de X definido en (2.13) (véase Osserman (79, Lemma 4.1)). En consecuencia:

Lema 2.34. *Sea M una superficie de Riemann abierta. Consideramos una inmersión conforme $X = (X_1, \dots, X_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces son equivalentes:*

- *Las funciones coordenadas $X_k: M \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones armónicas, es decir, $\Delta X_k = 0$, para $k = 1, \dots, n$.*
- *X es una inmersión mínima conforme.*

Dada una inmersión $X = (X_1, \dots, X_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ no necesariamente conforme definida sobre una superficie de Riemann M , definimos para cada $k = 1, \dots, n$ la 1-forma

$$\phi_k := \partial X_k. \quad (2.16)$$

Recordamos que si $z = u + iv \in M$ es un parámetro conforme en M entonces se tiene que

$$\phi_k := \partial X_k = \frac{\partial X_k}{\partial z} dz \quad \text{donde} \quad \frac{\partial X_k}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_k}{\partial u} - i \frac{\partial X_k}{\partial v} \right).$$

Utilizando la notación para la primera forma fundamental dada en (2.10), se deducen las siguientes igualdades:

$$4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial X_k}{\partial z}(z) \right)^2 = E - G - 2iF. \quad (2.17)$$

$$4 \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial X_k}{\partial z}(z) \right|^2 = E + G. \quad (2.18)$$

Ambas como consecuencia de los siguientes cálculos. (2.17) se sigue de:

$$\begin{aligned} 4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial X_k}{\partial z}(z) \right)^2 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial X_k}{\partial u} \right)^2 - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial X_k}{\partial v} \right)^2 - 2i \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_k}{\partial u} \frac{\partial X_k}{\partial v} \\ &= \left| \frac{\partial X_k}{\partial u} \right|^2 - \left| \frac{\partial X_k}{\partial v} \right|^2 - 2i \left\langle \frac{\partial X_k}{\partial u}, \frac{\partial X_k}{\partial v} \right\rangle \\ &\stackrel{(2.14)}{=} E - G - 2iF, \end{aligned}$$

mientras que (2.17) se deduce de:

$$4 \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial X_k}{\partial z}(z) \right|^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial X_k}{\partial u} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial X_k}{\partial v} \right)^2$$

$$\stackrel{(2.14)}{=} E + G.$$

Estas fórmulas, como demuestra el siguiente lema, expresan que las propiedades de ser conforme y mínima para X están encerradas en la naturaleza de las 1-formas complejas ϕ_k , $k = 1, \dots, n$.

Lema 2.35. *Sea M una superficie de Riemann abierta. Dadas una aplicación diferenciable $X = (X_1, \dots, X_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ y las 1-formas ϕ_k definidas formalmente en (2.16) tenemos que se cumple:*

(a) X es conforme (esto es, conserva ángulos) si, y solo si,

$$\sum_{k=1}^n \phi_k^2 = 0. \quad (2.19)$$

(b) Si X es conforme, X es una inmersión si, y solo si,

$$\sum_{k=1}^n |\phi_k|^2 \neq 0. \quad (2.20)$$

(c) Si X es una inmersión conforme, entonces X es mínima si, y solo si, la 1-forma ϕ_k es holomorfa (ó X_k es armónica) para todo k .

Presentamos a continuación la Representación de Weierstrass de las superficies mínimas.

Teorema 2.36. (Representación de Weierstrass). *Sea M una superficie de Riemann abierta. Si $X = (X_1, \dots, X_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una inmersión mínima conforme, entonces la 1-forma $\partial X = (\partial X_1, \dots, \partial X_n)$ es holomorfa y cumple las ecuaciones (2.19) y (2.20) para $\phi_j = \partial X_j$, $j = 1, \dots, n$. Obviamente, $\Re(\partial X)$ es una 1-forma real exacta y $X(p) = X(p_0) + 2 \int_{p_0}^p \Re(\partial X)$, $p_0, p \in M$.*

Recíprocamente, si $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ es una 1-forma holomorfa que cumple las ecuaciones (2.19) y (2.20) y no tiene periodos reales, esto es,

$$\int_{\gamma} \Re(\Phi) = 0, \quad \text{para toda curva cerrada } \gamma \subset M, \quad (2.21)$$

entonces la aplicación $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$X(p) := x_0 + \int_{p_0}^p \Re(\Phi), \quad p \in M, \quad (2.22)$$

está bien definida y es una inmersión mínima conforme, para cualquier punto base $p_0 \in M$ y condición inicial $X(p_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, en cuyo caso $2\partial X = \Phi$.

La primera parte del teorema se corresponde con el Lema 2.35. Para construir una inmersión mínima conforme X es esencial la condición (2.21) relativa a los periodos de la inmersión. Esta garantiza que la inmersión dada en (2.22) está bien definida; obsérvese que el valor de la integral no puede depender de la curva elegida uniendo el punto base p_0 con el punto p , y de ahí la necesidad de que $\Re(\Phi)$ sea exacta. Esta es la mayor dificultad con la que hay que tratar para la construcción de superficies mínimas vía la representación de Weierstrass, y es referida en la literatura como el *Problema de periodos*.

En el caso de dimensión $n = 3$, el Teorema 2.36 se puede reescribir de una forma más operativa.

Proposición 2.37. *Sea M una superficie de Riemann abierta.*

Si $X = (X_1, X_2, X_3): M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión mínima conforme, con $\phi_k := \partial X_k$, $k = 1, 2, 3$, tal que ϕ_3 no es idénticamente cero, entonces ϕ y g definidas por

$$\phi := \phi_3 \quad \text{y} \quad g := \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\phi_3} \quad (2.23)$$

son, respectivamente, una 1-forma holomorfa y una función meromorfa.

Recíprocamente, si ϕ es una 1-forma no nula y g es una función meromorfa sobre M tales que las 1-formas $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ dadas por

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \left(g - \frac{1}{g} \right) \phi, \quad \phi_2 = \frac{i}{2} \left(g + \frac{1}{g} \right) \phi \quad \text{y} \quad \phi_3 = \phi \quad (2.24)$$

son holomorfas y cumplen las condiciones (2.21), (2.20), entonces ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 verifican las ecuaciones (2.19) y definen según (2.22) una inmersión mínima conforme.

La pareja (g, ϕ) se dice que son los *datos de Weierstrass* asociados a la inmersión mínima conforme X .

Es pertinente comentar que la condición de que ϕ_3 sea no nula se introduce por consistencia y no es restrictiva; salvo un movimiento rígido cualquier inmersión mínima la satisface.

Nota 2.38. Si $\Im(\Phi)$ tiene periodos nulos y cambiamos $\Re(\Phi)$ por $\Im(\Phi)$ en (2.22) obtenemos también una inmersión mínima conforme bien definida. Las inmersiones obtenidas vía (2.22) a partir de $\Re(\Phi)$ e $\Im(\Phi)$ se dice que son *conjugadas*.

Con objeto de estudiar los periodos de la 1-forma $\Im(\Phi)$ de la nota anterior introducimos la siguiente definición.

Definición 2.39. Sea M una superficie de Riemann abierta y denotemos por $\mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z})$ su primer grupo de homología con coeficientes enteros. Dada una inmersión mínima conforme $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, la *aplicación flujo* (o simplemente *flujo*) asociada a X se define como el homomorfismo de grupos $\text{Flux}_X: \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$\text{Flux}_X(\gamma) = \int_{\gamma} \Im(\partial X) = -i \int_{\gamma} \partial X$$

para toda curva cerrada $\gamma \subset M$.

La relación entre las curvas nulas, inmersiones holomorfas dirigidas por la cuádriga nula (véase la Definición 2.24), y las superficies mínimas queda ahora más clara. En efecto, sea M una superficie de Riemann abierta M y sea $F: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ una curva nula. La 1-forma holomorfa dF cumple la ecuación (2.19) y es exacta, por lo que $\Re(dF)$ define una inmersión mínima conforme según la expresión (2.22) que coincide con $\Re(F)$. Análogamente $\Im(F)$ es una inmersión mínima conforme ya que $\Im(dF)$ es igualmente exacta y puede integrarse según la ecuación (2.22). En resumen, la parte real y la parte imaginaria de una curva nula son inmersiones mínimas conformes.

A la inversa, si tenemos una inmersión mínima conforme $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, sabemos que ∂X es una 1-forma holomorfa cuya parte real es una 1-forma exacta real. Si además la parte imaginaria $\Im(\partial X)$ no tiene periodos (es exacta también), lo que ocurre cuando el flujo de la inmersión X , véase la Definición 2.39, cumple $\text{Flux}_X = 0$, entonces la 1-forma compleja ∂X es

exacta y puede ser integrada para definir una curva nula por la expresión

$$F(p) = F(p_0) + \int_{p_0}^p \partial X, \quad p \in M$$

para un valor inicial $F(p_0) \in \mathbb{C}^n$.

El ejemplo más simple de superficie mínima es un plano afín en \mathbb{R}^n . La mayoría de los ejemplos clásicos corresponden a superficies mínimas en \mathbb{R}^3 . Presentamos algunos de ellos.

Ejemplo 2.40. (La Catenoide, Euler 1744). Fue la primera en descubrirse después del plano, junto a este es la única superficie mínima de revolución en \mathbb{R}^3 (salvo movimientos rígidos). La parametrización como superficie de revolución es

$$X(r, \varphi) = \left(c \cosh\left(\frac{r}{c}\right) \cos \varphi, c \cosh\left(\frac{r}{c}\right) \sin \varphi, r \right), \quad r \in \mathbb{R}, \varphi \in [-\pi, \pi),$$

donde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es una constante. Su representación de Weierstrass viene dada por $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(z) = -z$ y $\phi(z) = \frac{1}{z} dz$, es decir:

$$X(z) = \left(1 - \frac{\Re(z)}{2} \left(1 + \frac{1}{|z|^2}\right), -\frac{\Im(z)}{2} \left(1 + \frac{1}{|z|^2}\right), \frac{1}{2} \log(|z|^2) \right).$$

La catenoide tiene curvatura total -4π .

Ejemplo 2.41. (El Helicoide, Meusnier 1776). Es la única superficie mínima reglada de \mathbb{R}^3 junto a los planos (salvo movimientos rígidos). Una parametrización puede ser:

$$X(r, \varphi) = (r \cos(c\varphi), r \sin(c\varphi), \varphi), \quad (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es una constante. Por otro lado, la representación de Weierstrass es $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(z) = -z$ y $\phi(z) = \frac{1}{z} dz$, y la parametrización asociada a la misma se escribe

$$X(z) = \left(\frac{\Im(z)}{2} \left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right), -\frac{\Re(z)}{2} \left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right), -\arg(z) \right).$$

Ejemplo 2.42. (La Superficie de Enneper, 1864). La superficie de Enneper es, junto a la catenoide, la única superficie mínima completa con curvatura total finita -4π . Su representación de Weierstrass viene dada por $M = \mathbb{C}$, $g(z) = z$ y $\phi(z) = z dz$, es decir:

$$X(z) = \left(\Re(z) \left(1 - \frac{\Re(z)^2}{3} + \Im(z)^2\right), -\Im(z) \left(1 - \frac{\Im(z)^2}{3} + \Re(z)^2\right), \Re(z)^2 - \Im(z)^2 \right).$$

2.4.2. Representación espinorial

Presentamos a continuación otra representación analítica de las superficies mínimas para el caso de dimensión $n = 3$. Utilizaremos esta representación para el estudio de las superficies mínimas con curvatura total finita en la Sección 2.5 y los resultados del Capítulo 4.

Sean M una superficie de Riemann abierta y $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión mínima conforme. Consideramos (g, ϕ) los datos de Weierstrass asociados a X definidos en (2.23). Como las 1-formas de la representación de Weierstrass de X son holomorfas (véase 2.24) y no tienen ceros comunes, tenemos que las 1-formas

$$\eta_1 := \frac{\phi}{g} \quad \text{y} \quad \eta_2 := \phi g \quad (2.25)$$

son holomorfas en M , espinoriales (véase la Definición 2.10), espinorialmente equivalentes y no tienen ceros comunes en M . Decimos que la pareja (η_1, η_2) definida en (2.25) es la *representación espinorial* de X o que (η_1, η_2) son los *datos espinoriales* asociados a la inmersión mínima conforme X . Definida de este modo, la pareja (η_1, η_2) determina una única estructura espinorial $\Theta_X \in \frac{\mathfrak{H}(M)}{\sim}$ asociada a la inmersión mínima conforme X .

A la inversa, si η_1 y η_2 son dos 1-formas holomorfas espinoriales en M tales que η_1 y η_2 son espinorialmente equivalentes, $|\eta_1| + |\eta_2|$ no se anula en ningún punto de M y las 1-formas holomorfas ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 definidas por

$$\Psi(\eta_1, \eta_2) := (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \left(\frac{1}{2}(\eta_1 - \eta_2), \frac{i}{2}(\eta_1 + \eta_2), \sqrt{\eta_1 \eta_2} \right) \quad (2.26)$$

no tienen periodos reales en M , entonces para una condición inicial $X(p_0) \in \mathbb{R}^3$, la aplicación $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(p) = X(p_0) + \int_{p_0}^p \Re(\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad p \in M, \quad (2.27)$$

está bien definida y es una inmersión mínima conforme con Θ_X la clase espinorial de $\eta_j, j \in \{1, 2\}$. Notemos que ϕ_3 está bien definida salvo el signo, por lo que X está bien definida salvo una simetría respecto a un plano horizontal.

2.4.3. Inmersiones mínimas conformes generalizadas

Para afrontar la prueba de algunos de los resultados que aparecerán a lo largo de esta tesis, necesitaremos algunas generalizaciones del concepto de inmersión mínima conforme. Las definiciones y resultados que vamos a enunciar a continuación pueden verse con más detalle en (17).

En los procedimientos constructivos de superficies mínimas es interesante disponer de una noción flexible de inmersión mínima conforme sobre algunos subconjuntos más generales que los dominios compactos de una superficie de Riemann abierta. La idea básica consiste en añadir curvas a un dominio compacto, generando lo que llamamos un subconjunto admisible (véase la Definición 2.19), por lo que necesitamos precisar qué entendemos por una inmersión mínima conforme definida sobre el mismo.

Definición 2.43. Sea M una superficie de Riemann abierta, sea θ una 1-forma holomorfa sin ceros en M y sea $S := K \cup \Gamma$ un subconjunto admisible. Una *inmersión mínima conforme generalizada* en S es una pareja $(X, f\theta)$, dónde $f \in \mathcal{C}^\infty(S, \mathfrak{A}_*) \cap \mathcal{O}(K, \mathfrak{A}_*)$ y $X: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable que es una inmersión mínima conforme en K , tal que se cumple:

- $f\theta = 2\partial X$ en un entorno abierto de K en M .
- Para todo camino diferenciable α en M que parametrice una componente conexa de Γ se cumple que $\Re(f\theta(\alpha')) = dX(\alpha') = d(X \circ \alpha)$, donde α' representa vector tangente relativo a cualquier parametrización de α .

Los resultados de aproximación que vamos a utilizar serán válidos para inmersiones mínimas conformes generalizadas sobre conjuntos admisibles. Enunciamos a continuación el siguiente teorema de tipo Runge-Mergelyan, que puede encontrarse en (17).

Teorema 2.44. Sea M una superficie de Riemann abierta y sea $S = K \cup \Gamma$ un subconjunto admisible de M . Toda inmersión mínima conforme generalizada $(X, f\theta)$ puede ser aproximada en la topología $\mathcal{C}^1(S)$ por inmersiones mínimas conformes no llanas $\tilde{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ (esto es, $(\tilde{X}, 2d\tilde{X})$ aproxima en la topología $\mathcal{C}^1(S)$ a $(X, f\theta)$).

Además, si $\mathfrak{p}: \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ cumple que $\mathfrak{p}(\gamma) = \text{Flux}_X(\gamma)$ para toda curva cerrada $\gamma \subset S$ entonces las inmersiones aproximantes \tilde{X} se pueden elegir con $\text{Flux}_{\tilde{X}} = \mathfrak{p}$.

El siguiente teorema, relativo a la posición general de las inmersiones mínimas conformes en el espacio euclídeo de dimensión n , puede encontrarse también en (17).

Teorema 2.45. *Sea M una superficie de Riemann abierta. Si $n \geq 5$ entonces toda inmersión mínima conforme $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ puede ser uniformemente aproximada en compactos de M por embebimientos mínimos conformes. Igualmente ocurre si M es una superficie de Riemann compacta bordeada y X es de clase $\mathcal{C}^r(M)$ para algún $r \in \mathbb{N}$; en cuyo caso, la aproximación tiene lugar en la topología $\mathcal{C}^r(M)$.*

2.5. Superficies mínimas con curvatura total finita

Uno de los capítulos de esta tesis está dedicado a la interpolación por superficies con curvatura total finita. Vamos a repasar algunas de las propiedades básicas de estas superficies.

Definición 2.46. Sea M una superficie de Riemann abierta. Una inmersión mínima conforme $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dirá con *curvatura total finita* (o con el acrónimo inglés FTC) si

$$\text{TC}(X) := \int_M K \, ds^2 = - \int_M |K| \, ds^2 > -\infty,$$

donde $K: M \rightarrow \mathbb{R}$ denota la curvatura de Gauss de la inmersión mínima conforme X .

Uno de los primeros resultados globales conocido para este tipo de superficies lo obtuvo Huber en 1957, quien demostró en (59) que toda superficie riemanniana completa (M, ds^2) con borde compacto (posiblemente vacío) cumpliendo

$$\int_M \min\{K, 0\} ds^2 > -\infty$$

es una superficie de Riemann de tipo conforme finito, véase la Definición 2.14. Este resultado es aplicable a las superficies mínimas orientables completas con borde compacto en \mathbb{R}^3 con curvatura total finita, ya que estas tienen curvatura de Gauss no positiva.

Si $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión mínima conforme completa con curvatura total finita de una superficie de Riemann M con borde compacto, Osserman demostró en (79) que los datos de Weierstrass (g, ϕ_3) de X , y por tanto las 1-formas ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 se extienden de forma meromorfa a la compactificación de Huber Σ de M ; lo mismo ocurre por tanto para la representación espinorial de X , es decir, para las 1-formas (η_1, η_2) definidas en (2.25).

A la inversa, para una superficie de Riemann de tipo conforme finito $M = \Sigma \setminus E$, si $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión mínima conforme y los datos de Weierstrass de X se extienden de forma meromorfa a la compactificación Σ de M teniendo polos efectivos en cada final de M (es decir, polos de orden positivo en todos los puntos de E), entonces X es completa y tiene curvatura total finita. En cualquier caso, la aplicación de Gauss $N: M \rightarrow \mathbb{S}^2$ de X se extiende conformemente a Σ y, cuando $bM = \emptyset$, se verifica que

$$\text{TC}(X) = -4\pi \text{Deg}(N),$$

donde $\text{Deg}(N)$ representa el grado topológico de la aplicación de Gauss $N: \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$.

El comportamiento asintótico de las superficies mínimas completas con curvatura total finita fue estudiado por Jorge y Meeks en (60). Entre otras propiedades, probaron que toda inmersión mínima conforme completa $X: M = \Sigma \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura total finita es una inmersión propia. Además, si $E = \{q_1, \dots, q_s\} \subset \Sigma$ denota el conjunto de finales de la superficie entonces existe una bola euclídea $B(R) = \{p \in \mathbb{R}^3: |p| < R\}$ de radio R suficientemente grande de forma que se cumple que:

- $X^{-1}(\mathbb{R}^3 \setminus B(R)) = \bigcup_{j=1}^s (U_j \setminus \{q_j\})$, donde U_1, \dots, U_s son discos cerrados disjuntos dos a dos en Σ y cada U_j contiene a q_j como un punto interior para todo $j = 1, \dots, s$.
- Si denotamos por $a_j = N(q_j) \in \mathbb{S}^2$ al vector normal límite en el final $q_j \in E$, $\Pi_j := \{p \in \mathbb{R}^3: \langle p, a_j \rangle = 0\}$ al plano tangente límite en q_j y $\pi_j: \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi_j$ a la proyección ortogonal sobre ese plano, entonces

$$(\pi_j \circ X)|_{U_j \setminus \{q_j\}}: U_j \setminus \{q_j\} \rightarrow \Pi_j \setminus B(R)$$

es un *multigrafo sublineal (recubrimiento)* propio con I_j hojas, donde $I_j + 1 \geq 2$ es el máximo de los órdenes de los polos de las 1-formas ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 en q_j , $j = 1, \dots, s$.

Además se satisface la siguiente fórmula, conocida en la literatura como fórmula de Jorde-Meeks:

$$2\text{Deg}(N) = -\chi(M) + \sum_{j=1}^s I_j = -\chi(\Sigma) + \sum_{j=1}^s (I_j + 1). \quad (2.28)$$

Capítulo 3

Interpolación por Superficies Mínimas

El objetivo principal de este capítulo será demostrar el Teorema 1.2 como consecuencia del siguiente resultado mucho más general que asegura interpolación jet de orden finito dado, aproximación uniforme en compactos Runge, control sobre el flujo y propiedades globales de las inmersiones interpolantes.

Teorema 3.1. (Aproximación Runge con Interpolación jet para inmersiones mínimas conformes). *Sea M una superficie de Riemann abierta, sea $\Lambda \subset M$ un subconjunto discreto y cerrado, y sea $K \subset M$ un dominio compacto Runge. Para cada $p \in \Lambda$ sea $\Omega_p \subset M$ un entorno compacto de p en M , de modo que $\Omega_p \cap \Omega_q = \emptyset$ para todo $p \neq q \in \Lambda$ y definamos $\Omega := \bigcup_{p \in \Lambda} \Omega_p$. Sea también $X: K \cup \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, una inmersión mínima conforme de clase $\mathcal{C}^1(K \cup \Omega)$ y sea $\mathfrak{p}: \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ un homomorfismo de grupos cumpliendo*

$$\text{Flux}_X(\gamma) = \mathfrak{p}(\gamma) \text{ para toda curva cerrada } \gamma \subset K.$$

Entonces, dado $k \in \mathbb{Z}_+$, X puede ser uniformemente aproximada en K por inmersiones mínimas conformes completas $\tilde{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ verificando las siguientes propiedades:

- (I) \tilde{X} y X tienen un punto de contacto de orden k en todos los puntos de Λ .
- (II) $\text{Flux}_{\tilde{X}} = \mathfrak{p}$.

- (III) Si la aplicación $X|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ es propia, entonces podemos elegir $\tilde{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ siendo propia.
- (IV) Si $n \geq 5$ y la aplicación $X|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva, entonces podemos elegir $\tilde{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ siendo inyectiva.

La condición (I) en el teorema anterior es equivalente a que $\tilde{X}|_{\Lambda} = X|_{\Lambda}$ y, si $k > 0$, la 1-forma holomorfa $\partial(\tilde{X} - X)$, definida en Ω y con valores en \mathbb{C}^n , tenga un cero de multiplicidad (al menos) k en todos los puntos de Λ ; en otras palabras, las inmersiones \tilde{X} y X tienen el mismo k -jet en todo punto de Λ (véase la Sección 2.2). El Teorema 3.1 recuerda a la generalización del Teorema de Interpolación de Weierstrass demostrada por Behnke y Stein en 1949 que afirma que en los puntos de un subconjunto discreto y cerrado de toda superficie de Riemann abierta se pueden prescribir los valores hasta orden finito de una función holomorfa (véase (26) o (77, Theorem 2.15.1)). En particular, eligiendo $k = 1$ en el Teorema 3.1 se obtiene: *en un subconjunto discreto y cerrado de una superficie de Riemann abierta M podemos prescribir los valores de una inmersión mínima conforme $M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, y de su aplicación de Gauss generalizada $M \rightarrow Q_{n-2} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ (véase el Corolario 3.21). El caso en que $\Lambda = \emptyset$, es decir, sin tener en cuenta el problema de la interpolación, fue demostrado por Alarcón, Forstnerič y López (véase (17, Theorem 1.2)).*

Merece la pena señalar que las hipótesis sobre $X|_{\Lambda}$ en las afirmaciones (III) y (IV) del Teorema 3.1 son necesarias. Resaltamos también que si Λ es infinito entonces hay aplicaciones inyectivas $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ que no pueden extenderse a un embebimiento $M \rightarrow \mathbb{R}^n$; y por tanto, en general, no podemos elegir \tilde{X} en (IV) siendo un embebimiento. Por otro lado, como las inmersiones $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ propias e inyectivas son embebidas, podemos elegir \tilde{X} en el Teorema 3.1 siendo un embebimiento mínimo conforme propio supuesto que $n \geq 5$ y que $X|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ es a la vez propia e inyectiva.

Recordamos que por el Teorema 2.9, existe una 1-forma holomorfa sin ceros en M . Esto implica que toda 1-forma holomorfa $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ en M con valores en \mathbb{C}^n y cumpliendo la ecuación (2.19) puede ser escrita de la forma $\Phi = f\theta$ donde $f: M \rightarrow \mathfrak{A}_* \subset \mathbb{C}^n$ es una función holomorfa con valores en la cuádrica nula, véase la Definición (2.6).

En primer lugar, para demostrar el Teorema 1.2 necesitamos encontrar

una nueva aplicación holomorfa

$$f: M \rightarrow \mathfrak{A} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^n$$

tal que $\Re(f\theta)$ sea una 1-forma real exacta en M y

$$2 \int_{p_0}^p \Re(f\theta) = X(p) \quad \text{para todo } p \in \Lambda,$$

donde $p_0 \in M \setminus \Lambda$ es un punto base fijo. Para una aplicación f con estas propiedades la fórmula (2.22) con $x_0 = 0$ y $\Phi = f\theta$ proporciona una inmersión mínima conforme que cumple la conclusión del teorema. La clave en este razonamiento es que la cuádrica nula punteada, $\mathfrak{A}_* := \mathfrak{A} \setminus \{0\}$, es una variedad compleja homogénea y por tanto una variedad de Oka (véase el Lema 2.30).

No obstante, la demostración del Teorema 3.1 es mucho más compleja. Requiere, además de lo anterior, del uso del teorema de Runge-Mergelyan con interpolación jet para aplicaciones holomorfas definidas sobre superficies de Riemann y con valores en variedades de Oka, véase el Teorema 2.29, para conseguir la condición (I); de una nueva versión intrínseca-extrínseca de la técnica de Jorge y Xavier (61) para asegurar la completitud, véanse el Lema 3.19 y la Subsec. 3.4.2; para garantizar la condición (III) extenderemos los métodos desarrollados recientemente en (19, 11, 17) para construir superficies mínimas propias en \mathbb{R}^n con estructura conforme arbitraria, véanse el Lema 3.20 y la Subsec. 3.4.3; finalmente, para asegurar la condición (IV) adaptaremos las ideas sobre transversalidad de Abraham (1) (véanse (11, 7, 17) para su aplicación a la teoría de superficies mínimas), véase el Teorema 3.17.

Esta forma de construir superficies mínimas en \mathbb{R}^n , basada en la teoría Oka, fue introducida por Alarcón y Forstnerič en (11) y también da resultado en el ambiente más general de las inmersiones holomorfas dirigidas, véase la Definición 2.23. Las inmersiones dirigidas han sido un tema de interés para algunas geometrías clásicas tales como la simpléctica, de contacto, lagrangiana, totalmente real, etc; citamos por ejemplo el libro de Gromov (52) o el de Eliashberg y Mishachev (34, Chapter 19) y la introducción de (11) para una motivación del tema.

Algunos resultados de posición general, aproximación y desingularización fueron demostrados en (11) para ciertas familias de inmersiones dirigidas holomorfas que incluyen a las curvas nulas. Recordemos que las curvas

nulas son aquellas inmersiones holomorfas dirigidas por la cuádrica nula, véanse la Definición 2.24 y, para su conexión con las superficies mínimas, la Sección 2.4.

En este capítulo también demostramos un resultado análogo al Teorema 3.1 para una familia más general de inmersiones holomorfas dirigidas en \mathbb{C}^n que incluye a las curvas nulas. Dados enteros $1 \leq j \leq n$ denotamos por $\pi_j: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ la proyección $\pi_j(z_1, \dots, z_n) = z_j$ sobre la coordenada j -ésima.

Teorema 3.2. (Aproximación Runge con Interpolación jet para inmersiones holomorfas dirigidas). *Sea \mathfrak{S} una subvariedad compleja irreducible cerrada y cónica de \mathbb{C}^n , $n \geq 3$, que no está contenida en ningún hiperplano y tal que $\mathfrak{S}_* = \mathfrak{S} \setminus \{0\}$ es diferenciable y una variedad de Oka. Sean M, Λ, K y Ω como en el Teorema 3.1 y sea $F: K \cup \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ una \mathfrak{S} -inmersión de clase $\mathcal{A}^1(K \cup \Omega)$. Entonces, dado $k \in \mathbb{N}$, F puede ser uniformemente aproximada en K por \mathfrak{S} -inmersiones $\tilde{F}: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ tales que $\tilde{F} - F$ tiene un cero de multiplicidad (al menos) k en cada punto de Λ . Además, si la aplicación $F|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^n$ es inyectiva, entonces podemos elegir $\tilde{F}: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ siendo inyectiva.*

Además:

- (I) *Si $\mathfrak{S} \cap \{z_1 = 1\}$ es una variedad de Oka y $\pi_1: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{C}$ admite una sección local holomorfa h alrededor de $\zeta = 0 \in \mathbb{C}$ con $h(0) \neq 0$, entonces podemos elegir \tilde{F} siendo completa.*
- (II) *Si $\mathfrak{S} \cap \{z_j = 1\}$ es una variedad de Oka y $\pi_j: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{C}$ admite una sección local holomorfa h_j alrededor de $\zeta = 0 \in \mathbb{C}$ con $h_j(0) \neq 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, y si la aplicación $F|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^n$ es propia, entonces podemos elegir $\tilde{F}: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ siendo propia.*

En particular, si \mathfrak{S}, M y Λ vienen dados como en el Teorema 3.2 entonces toda aplicación $\Lambda \rightarrow \mathbb{C}^n$ se extiende a una \mathfrak{S} -inmersión $M \rightarrow \mathbb{C}^n$. Cuando el subconjunto $\Lambda \subset M$ es vacío, el teorema anterior es consecuencia directa, excepto por (I) de los resultados (11, Theorems 7.2 and 8.1). También merece la pena mencionar que si \mathfrak{S} cumple las hipótesis de la afirmación (I) y la aplicación $F|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^n$ no es propia, el Teorema 3.2 proporciona \mathfrak{S} -inmersiones completas $M \rightarrow \mathbb{C}^n$ que no son propias; estos son los primeros ejemplos de tales curvas excepto en el caso en que \mathfrak{S} sea la cuádrica nula \mathfrak{A} . La geometría particular de \mathfrak{A} ha permitido construir curvas nulas en \mathbb{C}^n y

superficies mínimas en \mathbb{R}^n con un comportamiento asintótico muy variado, véanse (20, 12, 6, 7, 3).

La mayoría de los resultados técnicos en la demostración de los Teoremas 3.1 y 3.2 se obtendrán de un resultado general sobre los periodos de una 1-forma holomorfa con valores en una subvariedad compleja cerrada y cónica de \mathbb{C}^n , véase el Teorema 3.12 para un enunciado preciso. Una vez demostrado, las pruebas de los Teoremas 3.1 y 3.2 son muy parecidas una a la otra. Por esa razón demostraremos con todo detalle el Teorema 3.2, que es, en cierto sentido, más general, mientras que solo esbozaremos la demostración del Teorema 3.1 mencionando las diferencias con el anterior.

Los resultados de este capítulo pueden encontrarse en (4):

A. Alarcón and I. Castro-Infantes. Interpolation by conformal minimal surfaces and directed holomorphic curves. *Analysis & PDE* 12-2 (2019), 561–604. DOI 10.2140/apde.2019.12.561.

Organización del capítulo

La Sección 3.1 está dedicada a resultados previos sobre la existencia de sprays dominantes de funciones holomorfas sobre subvariedades complejas cónicas \mathfrak{G}_* de \mathbb{C}^n ; serán utilizados en la Sección 3.2 para demostrar el caso no crítico del teorema de Mergelyan con interpolación jet y control sobre los periodos para aplicaciones holomorfas con valores en una variedad de Oka \mathfrak{G}_* , véanse el Lema 3.10 y el Teorema 3.12. En la Sección 3.3 demostramos un teorema de posición general y los lemas necesarios para poder asegurar que las \mathfrak{G} -inmersiones sean completas y propias. Con ellos demostraremos el Teorema 3.2 en la Sección 3.4. Finalmente, la Sección 3.5 está dedicada a explicar cómo adaptar los métodos utilizados en la demostración del Teorema 3.2 para demostrar el Teorema 3.1.

3.1. Sprays de funciones holomorfas definidos sobre curvas

Empezamos presentando algunos conceptos y resultados específicos que aparecerán en el desarrollo de este capítulo y nos permitirán resolver el problema de periodos.

3.1.1. Jets a través de flujos de campos de vectores

En primer lugar, presentamos un resultado que será fundamental para asegurar la interpolación jet en los resultados de este capítulo.

Lema 3.3. *Sea V un campo de vectores holomorfo en \mathbb{C}^n , $n \in \mathbb{N}$, que se anula en $0 \in \mathbb{C}^n$ y sea ϕ_s el flujo asociado a V para pequeños valores del parámetro temporal $s \in \mathbb{C}$. Entonces, para una superficie de Riemann abierta M , un punto $p \in M$ y unas funciones holomorfas $f: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ y $h: M \rightarrow \mathbb{C}$ tales que h tiene un cero de multiplicidad $k+1$ en p para algún $k \in \mathbb{Z}_+$ dado, la aplicación holomorfa*

$$q \mapsto \tilde{f}(q) = \phi_{h(q)}(f(q)), \quad (3.1)$$

definida en un entorno de p en M , tiene un punto de contacto de orden k con f en el punto p ; esto es, f y \tilde{f} tienen el mismo k -jet en p .

Demostración. La serie de Taylor del flujo ϕ_s asociado al campo de vectores V en un punto $z \in \mathbb{C}^n$ es

$$\phi_s(z) = z + \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{j!} s^j V^j(z) = z + sV(z) + O(|s|^2),$$

donde $V^j = V \circ \dots \circ V$ para todo $j \in \mathbb{N}$ (véase (2, §4.1) para más detalles). Sustituyendo $z = f(p)$ y $s = h(p)$ en la expresión anterior obtenemos que

$$\phi_{h(p)}(f(p)) - f(p) = h(p)V(f(p)) + O(|h(p)|^2).$$

Así, la aplicación (3.1) tiene un cero en p de la misma multiplicidad que el que tiene h en p , es decir, tiene un cero de multiplicidad $k+1$ en p y por tanto un punto de contacto de orden k . \square

La siguiente notación será recurrente a lo largo de este capítulo.

Notación 3.4. Sea $n \geq 3$ un entero y sea \mathfrak{S} una subvariedad compleja cerrada y cónica de \mathbb{C}^n . Supongamos también que \mathfrak{S} no está contenida en un hiperplano de \mathbb{C}^n y que $\mathfrak{S}_* := \mathfrak{S} \setminus \{0\}$ es diferenciable y conexa, luego irreducible. Fijamos un entero $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y campos de vectores V_1, \dots, V_N de \mathbb{C}^n tangentes a \mathfrak{S} a lo largo de \mathfrak{S} , que se anulan en $0 \in \mathbb{C}^n$ y verifican

$$\text{span}\{V_1(z), \dots, V_N(z)\} = T_z \mathfrak{S} \quad \text{para todo } z \in \mathfrak{S}_*. \quad (3.2)$$

(Tales campos de vectores existen por el Teorema A de Cartan (28).)

$$\text{Sea } \phi_s^j \text{ el flujo asociado al campo de vectores } V_j \quad (3.3)$$

para $j = 1, \dots, N$ y pequeños valores del parámetro temporal $s \in \mathbb{C}$.

Recordemos que en el caso de que \mathfrak{S} sea la cuádriga nula \mathfrak{A} , podemos tomar, por ejemplo, los campos de vectores que aparecen en (2.9).

Nota 3.5. Decimos que una función holomorfa tiene un cero de multiplicidad $k \in \mathbb{N}$ en un punto significando que tiene un cero de multiplicidad *al menos* k en el punto. Cuando la multiplicidad del cero en el punto sea relevante o exactamente k será explícitamente mencionado. Seguiremos el mismo criterio al decir que dos funciones tienen el mismo k -jet o un punto de contacto de orden k .

3.1.2. Curvas definidas en $I := [0, 1]$

Sea M una superficie de Riemann abierta. Si C y C' son arcos orientados en M y el punto inicial de C' coincide con el punto final de C , denotamos por $C * C'$ el producto de C y C' , esto es, $C * C'$ denota el arco orientado $C \cup C' \subset M$ con punto inicial el punto inicial de C y punto final el punto final de C' .

A lo largo de esta sección seguiremos la Notación 3.4, en particular, consideramos $\mathfrak{S} \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, una subvariedad cerrada cónica compleja de \mathbb{C}^n que no esté contenida en ningún hiperplano de \mathbb{C}^n y tal que $\mathfrak{S}_* = \mathfrak{S} \setminus \{0\}$ sea diferenciable y conexa.

Para poder demostrar los resultados centrales de este capítulo vamos a empezar estudiando el comportamiento de curvas $I = [0, 1] \rightarrow \mathfrak{S}_*$, pues va a ser clave a la hora de construir sprays dominantes que nos permitan resolver el problema de los periodos e interpolar.

Comenzamos con los siguientes resultados.

Lema 3.6. Sean $f: I \rightarrow \mathfrak{S}_*$ y $\vartheta: I \rightarrow \mathbb{C}_*$ aplicaciones continuas. Sea $\emptyset \neq I' \subset I = [0, 1]$ un subintervalo cerrado y supongamos que f es siempre no llana en I' . Entonces existen funciones continuas $h_1, \dots, h_N: I \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, con

soporte en I' , y un entorno U de $0 \in \mathbb{C}^N$ tales que la aplicación $\mathcal{P}: U \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida por

$$\mathcal{P}(\zeta) = \int_0^1 \phi_{\zeta_1 h_1(t)}^1 \circ \cdots \circ \phi_{\zeta_N h_N(t)}^N(f(t)) \vartheta(t) dt, \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N) \in U$$

está bien definida y tiene rango máximo igual a n en $\zeta = 0$.

Demostración. Elegimos funciones continuas $h_1, \dots, h_N: I \rightarrow \mathbb{C}$, con soporte en I' , que especificaremos más adelante. Para un entorno U de $0 \in \mathbb{C}^N$ consideramos la aplicación

$$\Phi: U \times I \rightarrow \mathfrak{G}$$

dada por

$$\Phi(\zeta, t) := \phi_{\zeta_1 h_1(t)}^1 \circ \cdots \circ \phi_{\zeta_N h_N(t)}^N(f(t)), \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N) \in U, t \in I.$$

Véase la Notación 3.4. Es claro que $\Phi(0, t) = f(t)$ para todo $t \in I$, recordemos que cada campo de vectores V_j se anula en 0 para todo $j \in \{1, \dots, N\}$. Así, como $f(I) \subset \mathfrak{G}_*$ es un compacto, podemos asumir que U es suficientemente pequeño como para que Φ esté bien definida y tome valores en \mathfrak{G}_* , recordemos que el flujo ϕ^j asociado a cada campo V_j está definido para valores pequeños del parámetro temporal. Además, Φ es holomorfa en la variable ζ y su derivada respecto ζ_j es

$$\left. \frac{\partial \Phi(\zeta, t)}{\partial \zeta_j} \right|_{\zeta=0} = h_j(t) V_j(f(t)), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.4)$$

Véanse (3.2) y (3.3). Así, la aplicación $\mathcal{P}: U \rightarrow \mathbb{C}^n$ del enunciado del lema puede expresarse como

$$\mathcal{P}(\zeta) = \int_0^1 \Phi(\zeta, t) \vartheta(t) dt, \quad \zeta \in U.$$

Observamos que \mathcal{P} es holomorfa y, en vista de la ecuación (3.4), se tiene que

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}(\zeta)}{\partial \zeta_j} \right|_{\zeta=0} = \int_0^1 h_j(t) V_j(f(t)) \vartheta(t) dt, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.5)$$

Como f es siempre no llana en I' (véase la Definición 2.7), la ecuación (3.2) asegura la existencia de puntos diferentes $t_1, \dots, t_N \in I'$ tales que

$$\text{span}\{V_1(f(t_1)), \dots, V_N(f(t_N))\} = \mathbb{C}^n. \quad (3.6)$$

Ahora especificaremos los valores de las funciones h_j en I' ($j = 1, \dots, N$); recordamos que el soporte de cada función h_j está contenido en I' y por tanto cada h_j se anula en $I \setminus I'$. Elegimos cada función h_j con soporte en un entorno $[t_j - \epsilon, t_j + \epsilon]$ de t_j en I' donde $\epsilon > 0$ es tal que se verifica que

$$\int_0^1 h_j(t) dt = \int_{t_j - \epsilon}^{t_j + \epsilon} h_j(t) dt = 1.$$

Así, para tal $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tenemos que, para cada $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\int_0^1 h_j(t) V_j(f(t)) \vartheta(t) dt \tag{3.7}$$

es tan próximo a

$$V_j(f(t_j)) \vartheta(t_j)$$

como queramos. Puesto que $\vartheta(t) \neq 0$, por la ecuación (3.6) tenemos que los vectores $V_j(f(t_j)) \vartheta(t_j)$, $j = 1, \dots, N$, generan todo \mathbb{C}^n , y por tanto lo mismo es cierto para la familia de vectores en (3.7) supuesto que el número $\epsilon > 0$ sea elegido suficientemente pequeño. Esto prueba el lema en vista de la ecuación (3.5). \square

Lema 3.7. *Sea $\vartheta: I \rightarrow \mathbb{C}_*$ una función continua. Dados puntos $u_0, u_1 \in \mathfrak{G}_*$ y $x \in \mathbb{C}^n$ y un dominio Ω de \mathbb{C}^n que contenga a 0 y a x , existe una aplicación continua $g: I \rightarrow \mathfrak{G}_*$ que es siempre no llana en un entorno de 0 en I y cumple las siguientes propiedades:*

i) $g(0) = u_0$ y $g(1) = u_1$.

ii) $\int_0^s g(t) \vartheta(t) dt \in \Omega$ para todo $s \in I$.

iii) $\int_0^1 g(t) \vartheta(t) dt = x$.

Demostración. Consideramos $I_0 := [0, \frac{1}{2}]$ y elegimos cualquier aplicación continua $g_0: I_0 \rightarrow \mathfrak{G}_*$ que sea siempre no llana y verifique que

$$g_0(0) = u_0 \quad \text{y} \quad \int_0^s g_0(t) \vartheta(t) dt \in \Omega \quad \text{para todo } s \in I_0. \tag{3.8}$$

Tal aplicación puede ser construida como sigue. Para todo número δ con $0 < \delta < \frac{1}{2}$ consideramos la función continua $f_\delta: I_0 \rightarrow [\delta, 1]$ dada por

$$f_\delta(s) = \begin{cases} 1 - \frac{1-\delta}{\delta}s, & s \in [0, \delta]. \\ \delta, & s \in [\delta, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

Elegimos otra aplicación continua siempre no llana $\tilde{g}_0: I_0 \rightarrow \mathfrak{S}_*$ con $\tilde{g}_0(0) = u_0$. Entonces $g_0 := f_\delta \tilde{g}_0: I_0 \rightarrow \mathfrak{S}_*$ satisface las condiciones requeridas para cualquier valor de $\delta > 0$ suficientemente pequeño.

Sea $\emptyset \neq I' \subset \overset{\circ}{I}_0$ un subintervalo cerrado. El Lema 3.6 aplicado a g_0 proporciona funciones continuas $h_1, \dots, h_N: I \rightarrow \mathbb{C}$, con soporte en I' , y un entorno U del origen en \mathbb{C}^N tales que la aplicación $\mathcal{P}: U \rightarrow \mathbb{C}^N$ dada por

$$\mathcal{P}(\zeta) = \int_0^{\frac{1}{2}} \phi_{\zeta_1 h_1(t)}^1 \circ \dots \circ \phi_{\zeta_N h_N(t)}^N (g_0(t)) \vartheta(t) dt, \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N) \in \mathbb{C}^N,$$

tiene rango máximo igual a n en $\zeta = 0$, (véase (3.3)). Definimos

$$\Phi(\zeta, t) := \phi_{\zeta_1 h_1(t)}^1 \circ \dots \circ \phi_{\zeta_N h_N(t)}^N (g_0(t)) \in \mathfrak{S}, \quad \zeta \in U, t \in I_0,$$

y observamos que $\Phi(0, t) = g_0(t) \in \mathfrak{S}_*$ para todo $t \in I_0$. Entonces, salvo reducir U si fuera necesario, tenemos que

- (a) Tanto $\Phi(U \times I_0) \subset \mathfrak{S}_*$ como $\mathcal{P}(U)$ contienen una bola en \mathbb{C}^n con radio $\epsilon > 0$ centrada en $\mathcal{P}(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} g_0(t) \vartheta(t) dt \in \Omega$, véase (3.8).
- (b) $\Phi(\zeta, t) = g_0(t)$ para todo $(\zeta, t) \in U \times \{0, \frac{1}{2}\}$; recordemos que $h_j(0) = h_j(\frac{1}{2}) = 0$ para todo $j = 1, \dots, N$.
- (c) $\int_0^s \Phi(\zeta, t) \vartheta(t) dt \in \Omega$ para todo $\zeta \in U$ y $s \in I_0$; véase (3.8).

Puesto que la envolvente convexa de \mathfrak{S} es \mathbb{C}^n (véase (11, Lemma 3.1)) podemos construir un camino poligonal $\Gamma \subset \Omega$ uniendo $\mathcal{P}(0)$ con x ; concretamente, tomamos $\Gamma = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j$ donde cada Γ_j es un segmento de la forma $\Gamma_j = w_j + [0, 1]z_j$ para algún $w_j \in \mathbb{C}^n$ y $z_j \in \mathfrak{S}_*$. De este modo, el punto inicial w_1 de Γ_1 es $\mathcal{P}(0)$, el punto final $w_m + z_m$ de Γ_m es x y en cada segmento intermedio, Γ_j , el punto inicial w_j de Γ_j coincide con el punto final $w_{j-1} + z_{j-1}$ de Γ_{j-1} para todo $j = 2, \dots, m$. Consideramos

$$I_j := \left[\frac{1}{2} + \frac{j-1}{2m}, \frac{1}{2} + \frac{j}{2m} \right], \quad j = 1, \dots, m,$$

y observamos que $\bigcup_{j=1}^m I_j = [\frac{1}{2}, 1]$. Para un número positivo $0 < \lambda < \frac{1}{4m}$, definimos

$$I_j^\lambda := \left[\frac{1}{2} + \frac{j-1}{2m} + \lambda, \frac{1}{2} + \frac{j}{2m} - \lambda \right] \subset I_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $m \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande para que se cumpla que

$$b_j(\lambda) := \int_{I_j^\lambda} \vartheta(t) dt \neq 0 \quad \text{para todo } 0 < \lambda < \frac{1}{4m}, \quad j = 1, \dots, m; \quad (3.9)$$

recordemos que ϑ era una función continua sin ceros.

Fijamos un número $0 < \lambda < \frac{1}{4m}$ y definimos $b_j := b_j(\lambda)$. También fijamos $\kappa > \max\{|u_0|, |u_1|, |z_1/b_1|, \dots, |z_m/b_m|\}$ y elegimos números $0 < \tau < \mu < \lambda$, que serán especificados a continuación. Consideramos una aplicación continua $g_1: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathfrak{S}_*$ cumpliendo las siguientes propiedades:

- (d) $g_1(\frac{1}{2}) = g_0(\frac{1}{2})$ y $g_1(1) = u_1$.
- (e) $g_1(t) = z_j/b_j$ para todo $t \in I_j^\lambda$.
- (f) $|g_1(t)| \leq \kappa$ para todo $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.
- (g) $|g_1(t)| \leq \tau$ para todo $t \in I_j^\tau \setminus I_j^\mu$.

Si $\tau > 0$ es elegido suficiente pequeño y si μ es suficientemente próximo a τ , entonces las propiedades (e), (f) y (g) y la ecuación (3.9) implican que

- (h) La imagen por la aplicación $[\frac{1}{2}, 1] \ni s \mapsto \mathcal{P}(0) + \int_{\frac{1}{2}}^s g_1(t)\vartheta(t) dt$ está tan cerca de Γ en la distancia de Hausdorff que toma valores en Ω .
- (i) $|\mathcal{P}(0) + \int_{\frac{1}{2}}^1 g_1(t)\vartheta(t) dt - x| < \epsilon$, donde $\epsilon > 0$ es el número que aparece en la propiedad (a).

Para $\zeta \in U$, definimos la aplicación $g^\zeta: I \rightarrow \mathfrak{S}_*$ dada por

$$g^\zeta(t) = \begin{cases} \Phi(\zeta, t), & t \in [0, \frac{1}{2}]. \\ g_1(t), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Las propiedades (a) y (i) aseguran la existencia de $\zeta_0 \in U$ tal que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g^{\zeta_0}(t) \vartheta(t) dt = x - \int_{\frac{1}{2}}^1 g_1(t) \vartheta(t) dt,$$

y por tanto

$$\int_0^1 g^{\zeta_0}(t) \vartheta(t) dt = x.$$

Así, $g := g^{\zeta_0}$ verifica la condición *iii)* del enunciado del lema. Además, la ecuación (3.8) y las propiedades (b) y (d) aseguran que g es continua y satisface la condición *i)*. Finalmente las propiedades (c) y (h) aseguran *ii)*. Esto concluye la demostración. \square

3.1.3. Curvas contenidas en superficies de Riemann abiertas

Procedemos a demostrar el resultado central de esta sección, recordemos que en todo momento seguimos utilizando la Notación 3.4.

Lema 3.8. *Sea M una superficie de Riemann abierta y sea θ una 1-forma holomorfa en M que no se anula en ningún punto. Sea $p_0 \in M$ un punto y sean C_1, \dots, C_l ($l \in \mathbb{N}$) curvas en M orientadas o bien cerradas o bien de Jordan que solo coinciden en p_0 (esto es, $C_i \cap C_j = \{p_0\}$ para todo $i \neq j \in \{1, \dots, l\}$) tales que $C := \bigcup_{i=1}^l C_i$ es Runge en M . Sea también $f: C \rightarrow \mathfrak{S}_*$ una aplicación continua y supongamos que para cada $i \in \{1, \dots, l\}$ existe un subarco $\tilde{C}_i \subset C_i$ tal que f es siempre no llana en \tilde{C}_i .*

Entonces existen funciones continuas $h_{i,1}, \dots, h_{i,N}: C \rightarrow \mathbb{C}$, para algún entero $N \in \mathbb{N}$, con soporte en \tilde{C}_i , $i = 1, \dots, l$, y un entorno U de $0 \in (\mathbb{C}^N)^l$ tal que la aplicación de periodos $U \rightarrow (\mathbb{C}^n)^l$ cuya i -ésima componente $U \rightarrow \mathbb{C}^n$ está dada por

$$U \ni \zeta \mapsto \int_{C_i} \phi_{\zeta_1^1 h_{1,1}(p)}^1 \circ \dots \circ \phi_{\zeta_N^1 h_{1,N}(p)}^N \circ \dots \circ \phi_{\zeta_1^l h_{l,1}(p)}^1 \circ \dots \circ \phi_{\zeta_N^l h_{l,N}(p)}^N (f(p)) \theta$$

(véanse (3.2) y (3.3)), donde

$$\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^l) \in (\mathbb{C}^N)^l, \quad \zeta^i = (\zeta_1^i, \dots, \zeta_N^i) \in \mathbb{C}^N,$$

son coordenadas holomorfas, está bien definida y tiene rango máximo igual a nl en $\zeta = 0$.

Demostración. Consideramos la aplicación de periodos

$$\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_l): \mathcal{C}(C, \mathbb{C}^n) \rightarrow (\mathbb{C}^n)^l$$

cuya i -ésima componente está definida según

$$\mathcal{C}(C, \mathbb{C}^n) \ni g \mapsto \mathcal{P}_i(g) = \int_{C_i} g \theta, \quad i = 1, \dots, l. \quad (3.10)$$

Para cada $i = 1, \dots, l$ sea $\gamma_i: I = [0, 1] \rightarrow C_i$ una parametrización diferenciable de C_i tal que $\gamma_i(0) = p_0$. Además, si C_i es cerrada entonces elegimos γ_i con $\gamma_i(1) = p_0$; también suponemos, cambiando la orientación de C_i si fuera necesario, que la parametrización γ_i es compatible con la orientación en C_i . De este modo se tiene que

$$\mathcal{P}_i(g) = \int_0^1 g(\gamma_i(t)) \theta(\gamma_i(t), \dot{\gamma}_i(t)) dt, \quad g \in \mathcal{C}(C, \mathbb{C}^n). \quad (3.11)$$

Sea $\emptyset \neq I_i \subset I$ un intervalo cerrado tal que $\gamma_i(I_i) \subset \tilde{C}_i$. El Lema 3.6 aplicado a I_i , $f \circ \gamma_i$ y $\theta(\gamma_i(\cdot), \dot{\gamma}_i(\cdot))$ asegura la existencia de funciones continuas $h_1^i, \dots, h_N^i: I \rightarrow \mathbb{C}$, con soporte en I_i , y de un entorno U_i de $0 \in \mathbb{C}^N$ para algún entero $N \in \mathbb{N}$, tales que la aplicación de periodos $\mathcal{P}_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada, para cada $\zeta^i = (\zeta_1^i, \dots, \zeta_N^i) \in U_i$, por

$$\mathcal{P}_i(\zeta^i) = \int_0^1 \phi_{\zeta_1^i h_1^i}^1 \circ \dots \circ \phi_{\zeta_N^i h_N^i}^N (f(\gamma_i(t))) \theta(\gamma_i(t), \dot{\gamma}_i(t)) dt \quad (3.12)$$

(véanse (3.2) y (3.3)), está bien definida y tiene rango máximo igual a n en $\zeta^i = 0$. Sea U una bola centrada en el origen de $(\mathbb{C}^N)^l$ y contenida en $U_1 \times \dots \times U_l$.

Para cada $i \in \{1, \dots, l\}$ y $j = 1, \dots, N$ definimos $h_{i,j}: C \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$h_{i,j}(\gamma_i(t)) = h_j^i(t), \quad t \in I, \quad \text{y} \quad h_{i,j}(p) = 0, \quad p \in C \setminus C_i.$$

Definimos también $\Phi: U \times C \rightarrow \mathfrak{S}$ según la expresión

$$\Phi(\zeta, p) = \phi_{\zeta_1^1 h_{1,1}(p)}^1 \circ \dots \circ \phi_{\zeta_N^1 h_{1,N}(p)}^N \circ \dots \circ \phi_{\zeta_1^l h_{l,1}(p)}^1 \circ \dots \circ \phi_{\zeta_N^l h_{l,N}(p)}^N (f(p)),$$

y, salvo reducir U si fuera necesario, asumimos que $\Phi(U \times C) \subset \mathfrak{S}_*$.

Sea $\mathcal{P}: U \rightarrow (\mathbb{C}^n)^l$ la aplicación de periodos cuya i -ésima componente $U \rightarrow \mathbb{C}^n$, $i = 1, \dots, l$, está dada por

$$U \ni \zeta \mapsto \int_{C_i} \Phi(\zeta, \cdot) \theta = \mathcal{P}_i(\zeta^i), \quad \zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^l) \in U;$$

véase la ecuación (3.12) y recuérdese que $h_{i,j}$ se anula en todo punto de $C \setminus C_i$. Se sigue que esta aplicación de periodos P tiene rango máximo igual a nl en $\zeta = 0$. En efecto, como las funciones $h_{i,j}$ se anulan en todo punto de $C \setminus C_i$, entonces cada coordenada de P solo depende de la coordenada compleja ζ^i en $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^l) \in U$ y, por tanto, si escribimos $P(\zeta) = (P_1(\zeta), \dots, P_l(\zeta))$ entonces $P_i(\zeta)$ coincide con el valor dado en (3.12). Así, la diferencial $dP(\zeta)|_{\zeta=0}$ puede identificarse con una matriz diagonal por bloques, donde cada bloque viene representado por la diferencial $dP_i(\zeta^i)|_{\zeta=0}$, $i = 1, \dots, l$. Claramente, la aplicación P tiene rango máximo igual a nl en el punto $\zeta = 0$. \square

3.2. Interpolación jet con aproximación

Comenzamos esta sección definiendo un tipo particular de subconjunto admisible sobre el que podremos plantear de manera sencilla el problema de aproximación e interpolación y, finalmente, resolverlo.

Definición 3.9. Sea M una superficie de Riemann abierta. De un subconjunto admisible $S = K \cup \Gamma \subset M$ (véase la Definición 2.19) decimos que es *simple* si $K \neq \emptyset$, toda componente conexa de Γ toca a K , Γ no contiene curvas cerradas de Jordan y toda curva cerrada de Jordan en S toca solamente una componente conexa de K .

Decimos que S es *muy simple* si es simple y K tiene como mucho una componente conexa que no sea simplemente conexa, K_0 , que llamamos la *componente principal* de K , y toda componente de Γ tiene al menos un extremo en K_0 . En esta situación denotamos por S_0 la componente conexa de S que contiene a K_0 y la llamamos la *componente principal* de S .

Un subconjunto conexo admisible $S = K \cup \Gamma$ en una superficie de Riemann abierta M es muy simple si, y solo si, K tiene $m \in \mathbb{N}$ componentes conexas K_0, \dots, K_{m-1} , donde cada K_i es simplemente conexa para $i > 0$, y $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma'' \cup (\bigcup_{i=1}^{m-1} \gamma_i)$ donde Γ' está formada por aquellas componentes de Γ con ambos extremos en K_0 , Γ'' está formada por aquellas componentes de Γ con un solo extremo en K_0 y el otro en $M \setminus K$, y cada γ_i es una componente de Γ uniendo K_0 con K_i para $i = 1, \dots, m-1$. Obsérvese que en este caso $K_0 \cup \Gamma'$ es un retracto fuerte de deformación de S .

En general, un subconjunto admisible y muy simple (no necesariamente conexo) $S \subset M$ es de la forma $S = (K \cup \Gamma) \cup K'$ donde $S_0 = K \cup \Gamma$ es un subconjunto admisible, muy simple y conexo y $K' \subset M \setminus (K \cup \Gamma)$ es una unión finita de discos compactos con borde diferenciable disjuntos dos a dos (posiblemente vacía). Véase la Figura 3.1.

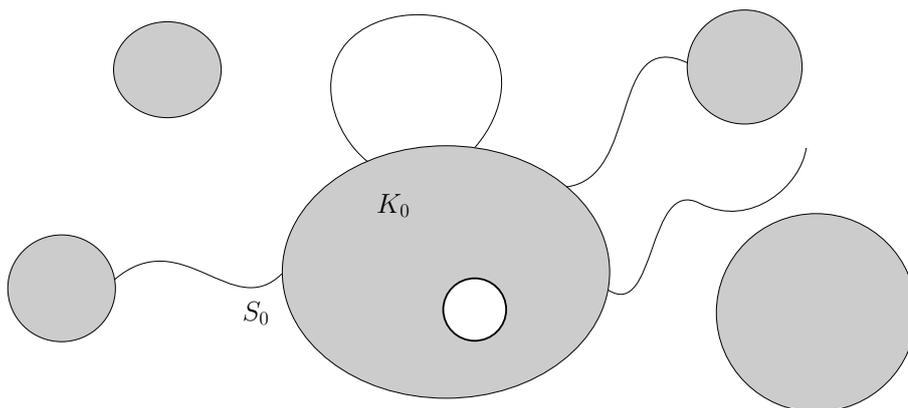


Figura 3.1: Un subconjunto admisible y muy simple.

Si $S = K \cup \Gamma \subset M$ es admisible denotamos por $\mathcal{A}(S)$ el espacio de funciones continuas $S \rightarrow \mathbb{C}$ que son de clase $\mathcal{A}(K)$. Del mismo modo, definimos el espacio $\mathcal{A}(S, Z)$ de aplicaciones con valores en una variedad compleja Z .

En el resto de la sección utilizaremos la Notación 3.4. Demostramos el siguiente resultado como paso previo a la prueba del Teorema 3.12.

Lema 3.10. *Sea M una superficie de Riemann abierta y sea θ una 1-forma holomorfa en M que no se anula en ningún punto. Sea $S = K \cup \Gamma \subset M$ un subconjunto admisible y muy simple y sea $L \subset M$ un dominio compacto con borde diferenciable tal que $S \subset \overset{\circ}{L}$ y la componente principal S_0 de S es un retracto fuerte de deformación fuerte de L . Denotemos por $l' \in \mathbb{Z}_+$ la dimensión del primer grupo de homología $\mathcal{H}_1(S; \mathbb{Z}) = \mathcal{H}_1(S_0; \mathbb{Z}) \cong \mathcal{H}_1(L; \mathbb{Z})$. Sean $K_0, \dots, K_m, m \in \mathbb{Z}_+$ las componentes conexas de K contenidas en S_0 , donde K_0 es la componente principal de K .*

Sea $m' \in \mathbb{Z}_+$, $m' \geq m$, y sean $p_0, \dots, p_{m'}$ puntos distintos en S tales que $p_i \in \overset{\circ}{K}_i$ para cada $i = 0, \dots, m$ y $p_i \in \overset{\circ}{K}_0$ para cada $i = m + 1, \dots, m'$. Sean $C_i, i = 1, \dots, m'$, arcos de Jordan orientados en S con punto inicial p_0 y punto final p_i y disjuntos dos a dos salvo por el punto p_0 que es común a

todos. Definamos $l := l' + m'$. Sean también C_i , $i = m' + 1, \dots, l$, curvas de Jordan cerradas en S determinando una base de homología de S y tales que $C_i \cap C_j = \{p_0\}$ para todo $i \neq j \in \{1, \dots, l\}$ y $C := \bigcup_{i=1}^l C_i$ es Runge en M . (Véase la Figura 3.2.)

Dados $k \in \mathbb{N}$ y una aplicación $f: S \rightarrow \mathfrak{S}_* \subset \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}(S)$ que sea no llana en \mathring{K}_0 (véase la Definición 2.7), se cumple que:

i) Existen funciones $h_{i,1}, \dots, h_{i,N}: L \rightarrow \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, para cada $i = 1, \dots, l$, de clase $\mathcal{A}(L)$ y un entorno U de $0 \in (\mathbb{C}^N)^l$ tales que:

i.1) $h_{i,j}$ tiene un cero de multiplicidad k en p_r para todo $j = 1, \dots, N$ y $r = 1, \dots, m'$.

i.2) Si denotamos por $\Phi_f: U \times S \rightarrow \mathfrak{S}$ la aplicación

$$\Phi_f(\zeta, p) = \phi_{\zeta_1^1 h_{1,1}(p)}^1 \circ \dots \circ \phi_{\zeta_N^1 h_{1,N}(p)}^N \circ \dots \circ \phi_{\zeta_1^1 h_{l,1}(p)}^1 \circ \dots \circ \phi_{\zeta_N^1 h_{l,N}(p)}^N(f(p)),$$

(véanse (3.2) y (3.3) en la Notación 3.4), donde $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^l) \in (\mathbb{C}^N)^l$ y $\zeta^i = (\zeta_1^i, \dots, \zeta_N^i) \in \mathbb{C}^N$, son coordenadas holomorfas, entonces la aplicación de periodos $U \rightarrow (\mathbb{C}^n)^l$ cuya i -ésima componente $U \rightarrow \mathbb{C}^n$ está dada por

$$U \ni \zeta \mapsto \int_{C_i} \Phi_f(\zeta, \cdot) \theta$$

tiene rango máximo igual a nl en $\zeta = 0$.

Además, existe un entorno V de $g \in \mathcal{A}(S, \mathfrak{S}_*)$ tal que la aplicación $V \ni g \mapsto \Phi_g$ puede ser elegida para depender holomorficamente de g .

ii) Si \mathfrak{S}_* es una variedad de Oka, entonces f puede ser aproximada uniformemente en S por aplicaciones $\tilde{f}: L \rightarrow \mathfrak{S}_*$ de clase $\mathcal{A}(L)$ tales que

ii.1) $(\tilde{f} - f)\theta$ es exacta en S , o equivalentemente, $\int_{C_r} (\tilde{f} - f)\theta = 0$ para todo $r = m' + 1, \dots, l$.

ii.2) $\int_{C_r} (\tilde{f} - f)\theta = 0$ para todo $r = 1, \dots, m'$.

ii.3) $\tilde{f} - f$ tiene un cero de multiplicidad k en p_r para todo $r = 1, \dots, m'$.

ii.4) Ninguna componente de \tilde{f} se anula en todo punto de L .

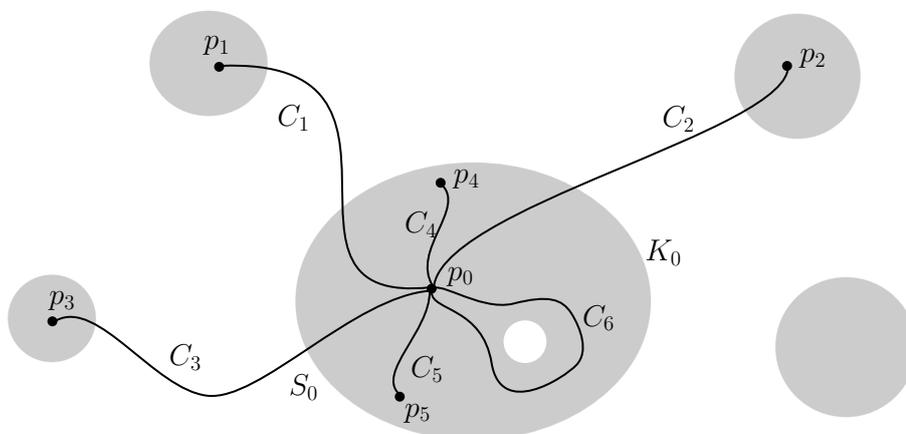


Figura 3.2: Los conjuntos que aparecen en el Lema 3.10

Obsérvese que las condiciones *ii.1)* y *ii.2)* del enunciado del lema pueden escribirse juntas de la forma

$$\int_{C_r} (\tilde{f} - f)\theta = 0 \quad \text{para todo } r = 1, \dots, l.$$

Sin embargo, las escribimos conscientemente separadas con el objetivo de enfatizar que tienen diferentes propósitos; en efecto, la condición *ii.1)* es relativa al problema de periodos mientras que la condición *ii.2)* trata con el problema de interpolación.

Demostración. Elegimos un entero $k \in \mathbb{N}$ y una aplicación $f: S \rightarrow \mathfrak{G}_*$ de clase $\mathcal{A}(S)$ no llana en K_0 como en el enunciado del lema. Consideramos la aplicación de periodos $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_l): \mathcal{C}(C, \mathbb{C}^n) \rightarrow (\mathbb{C}^n)^l$ cuya i -ésima componente $\mathcal{P}_i: \mathcal{C}(C, \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$ está definida según

$$\mathcal{C}(C, \mathbb{C}^n) \ni g \mapsto \mathcal{P}_i(g) = \int_{C_i} g\theta, \quad i = 1, \dots, l. \quad (3.13)$$

Como S es un subconjunto admisible y muy simple y f es holomorfa y no llana en \dot{K}_0 , cada $C_i, i = 1, \dots, l$, contiene un subarco $\tilde{C}_i \subset \dot{K}_0 \setminus \{p_0\}$ tal que f es siempre no llana en \tilde{C}_i ; si además $i \in \{m+1, \dots, m'\}$ entonces podemos elegir $\tilde{C}_i \subset C_i \setminus \{p_0, p_i\}$. En estas condiciones, el Lema 3.8 aplicado a la aplicación $f|_C: C \rightarrow \mathfrak{G}_*$, el punto base p_0 y las curvas C_1, \dots, C_l proporciona funciones continuas $g_{i,1}, \dots, g_{i,N}: C \rightarrow \mathbb{C}$ para algún $N \in \mathbb{N}$, con soporte en

$\tilde{C}_i, i = 1, \dots, l$ y un entorno U de $0 \in (\mathbb{C}^N)^l$ tal que la aplicación de periodos $P: U \rightarrow (\mathbb{C}^n)^l$, cuya i -ésima componente $P_i: U \rightarrow \mathbb{C}^n$ viene dada por

$$P_i(\zeta) := \int_{C_i} \phi_{\zeta_1^1 g_{1,1}(p)}^1 \circ \dots \circ \phi_{\zeta_N^1 g_{1,N}(p)}^N \circ \dots \circ \phi_{\zeta_1^l g_{l,1}(p)}^1 \circ \dots \circ \phi_{\zeta_N^l g_{l,N}(p)}^N (f(p)) \theta,$$

está bien definida y tiene rango máximo igual a nl en $\zeta = 0$. Por otro lado, como $C \subset M$ es Runge, el Teorema 2.29 nos permite aproximar cada función $g_{i,j}$ por una función $h_{i,j} \in \mathcal{O}(M) \subset \mathcal{A}(L) \subset \mathcal{A}(S)$ cumpliendo la condición *i.1*); recordemos que toda función $g_{i,j}$ se anula en un entorno de p_r para todo $r = 1, \dots, m'$. Además, si la aproximación de cada $g_{i,j}$ por $h_{i,j}$ es suficientemente buena entonces la aplicación de periodos definida en *i.2*) también tiene rango máximo en $\zeta = 0$. Finalmente, variando f localmente (dejando las funciones $h_{i,j}$ fijas) obtenemos una familia holomorfa de aplicaciones holomorfas $f \mapsto \Phi_f$ con las propiedades requeridas. Esto prueba la condición *i*).

Para demostrar la condición *ii*) supongamos que \mathfrak{S}_* es una variedad de Oka. Salvo añadir a S un disco compacto con borde diferenciable $D \subset M \setminus S$ y extender f a D como una función de clase $\mathcal{A}(S)$ tal que todas sus componentes son distintas de cero en D , podemos suponer que ninguna componente de f se anula en todo punto de S . Consideramos la aplicación $\Phi: U \times S \rightarrow \mathfrak{S}$ dada por *i.2*) y, salvo reducir U si fuera necesario, asumimos que $\Phi(U \times S) \subset \mathfrak{S}_*$.

Nótese que las funciones $h_{i,j}$ están definidas en todo L pero f solo en S . Según lo probado en *i*), la aplicación de periodos $Q: U \rightarrow (\mathbb{C}^n)^l$ cuya i -ésima componente es

$$Q_i(\zeta) = \int_{C_i} \Phi(\zeta, \cdot) \theta = P_i(\Phi(\zeta, \cdot)), \quad \zeta \in U$$

(véase (3.13)), tiene rango máximo igual a nl en $\zeta = 0$. Por tanto, la imagen por Q de cualquier entorno abierto de $0 \in U \subset (\mathbb{C}^N)^l$ contiene una bola abierta de $(\mathbb{C}^n)^l$ centrada en $Q(0) = P(f)$; véase (3.13). Como $S \subset M$ es Runge y \mathfrak{S}_* es Oka, el Teorema 2.29 nos permite aproximar f por aplicaciones holomorfas $\hat{f}: M \rightarrow \mathfrak{S}_*$ tales que

$$\hat{f} - f \text{ tiene un cero de multiplicidad } k \text{ en } p_r \text{ para todo } r = 1, \dots, m'. \quad (3.14)$$

Definimos $\hat{\Phi}: U \times L \rightarrow \mathfrak{S}$ según la expresión

$$\hat{\Phi}(\zeta, p) = \phi_{\zeta_1^1 h_{1,1}(p)}^1 \circ \dots \circ \phi_{\zeta_N^1 h_{1,N}(p)}^N \circ \dots \circ \phi_{\zeta_1^l h_{l,1}(p)}^1 \circ \dots \circ \phi_{\zeta_N^l h_{l,N}(p)}^N (\hat{f}(p)) \quad (3.15)$$

y, salvo reducir U una vez más si fuera necesario, suponemos que $\widehat{\Phi}(U \times L) \subset \mathfrak{S}_*$. Consideramos ahora la aplicación de periodos $\widehat{\mathcal{Q}}: U \rightarrow (\mathbb{C}^n)^l$ cuya i -ésima componente $U \rightarrow \mathbb{C}^n$ está dada por

$$U \ni \zeta \mapsto \int_{C_i} \widehat{\Phi}(\zeta, \cdot) \theta, \quad i = 1, \dots, l.$$

Así, para toda bola abierta $W \subset U$ centrada en 0, si la aproximación de f por \widehat{f} es suficientemente buena, el conjunto imagen $\widehat{\mathcal{Q}}(W)$ también contiene al punto $\mathcal{P}(f)$. De esta forma, existe un valor $\zeta_0 \in W \subset U$ próximo a $0 \in (\mathbb{C}^n)^l$ tal que

$$\widetilde{f} := \widehat{\Phi}(\zeta_0, \cdot): L \rightarrow \mathfrak{S}_* \quad (3.16)$$

es una aplicación de clase $\mathcal{A}(L)$ y cumple las condiciones *ii.1)* y *ii.2)*; recordemos que S_0 es un retracto fuerte de deformación de L y por tanto las curvas $C_i, i = m' + 1, \dots, l$, determinan una base de $\mathcal{H}_1(L; \mathbb{Z})$. Para finalizar, el Lema 3.3, la condición ya probada *i.1)* y las ecuaciones (3.15) y (3.16) garantizan que $\widetilde{f} - \widehat{f}$ tiene un cero de multiplicidad (al menos) k en p_r para todo $r = 1, \dots, m'$, que junto a (3.14) demuestran la condición *ii.3)*. Por último, si la aproximación de f por \widehat{f} en S es suficientemente buena, como ninguna componente de f se anula en todo punto de L , entonces tampoco se anula ninguna componente de \widetilde{f} en todos los puntos de L , lo que prueba la condición *ii.4)* y concluye la demostración del lema. \square

Antes de presentar el resultado principal de esta sección procedemos a demostrar que podemos asumir sin pérdida de generalidad que la inmersión dirigida de la que partimos en el razonamiento es no llana. Para ello probaremos un resultado de aproximación con interpolación para inmersiones holomorfas dirigidas.

Proposición 3.11. *Sean $n \geq 3$ un entero y \mathfrak{S} una subvariedad compleja irreducible cónica y cerrada de \mathbb{C}^n que no esté contenida en un hiperplano. Sea $M = \mathring{M} \cup bM$ una superficie de Riemann compacta bordeada, sea θ una 1-forma holomorfa en M que no se anula y sea $\Lambda \subset \mathring{M}$ un subconjunto finito. Elegimos un punto $p_0 \in M \setminus \Lambda$ y para cada $p \in \Lambda$ sea $C_p \subset \mathring{M}$ un arco de Jordan diferenciable con punto inicial p_0 y punto final p tal que $C_p \cap C_q = \{p_0\}$ para todo $p \neq q \in \Lambda$.*

Sea $f: M \rightarrow \mathfrak{S}_$ una aplicación de clase $\mathcal{A}(M, \mathfrak{S}_*)$ llana (véase la Definición 2.7) y sea $k \in \mathbb{N}$ un entero. Entonces, f puede ser uniformemente*

aproximada en M por aplicaciones no llanas $\tilde{f}: M \rightarrow \mathfrak{S}_*$ de clase $\mathcal{A}(M)$ que verifican las siguientes condiciones:

- (i) $(\tilde{f} - f)\theta$ es exacta en M .
- (ii) $\int_{C_p} (\tilde{f} - f)\theta = 0$ para todo $p \in \Lambda$.
- (iii) $\tilde{f} - f$ tiene un cero de multiplicidad k en todos los puntos $p \in \Lambda$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad asumimos que $\Lambda \neq \emptyset$, escribimos $\Lambda = \{p_1, \dots, p_{l'}\}$ y denotamos por $C_i := C_{p_i}$, $i = 1, \dots, l'$. Sean $C_{l'+1}, \dots, C_l$ curvas cerradas de Jordan en \dot{M} formando una base de $\mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{l-l'}$ tales que $C_i \cap C_j = \{p_0\}$ para todo $i \neq j \in \{1, \dots, l\}$ y $C := \bigcup_{j=1}^l C_j$ es un subconjunto Runge de M ; dichas curvas existen de manera trivial. Consideramos también parametrizaciones diferenciables $\gamma_j: [0, 1] \rightarrow C_j$ de las respectivas curvas tales que $\gamma_j(0) = p_0$ y $\gamma_j(1) = p_j$ para $j = 1, \dots, l'$ y $\gamma_j(0) = \gamma_j(1) = p_0$ para $j = l' + 1, \dots, l$.

Como f es llana existe $z_0 \in \mathfrak{S}_*$ tal que $f(M) \subset \mathbb{C}_* z_0$. Nótese que $\mathbb{C}_* z_0$ es una subvariedad compleja propia de \mathfrak{S} . Consideramos la aplicación de periodos $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_l) : \mathcal{A}(M) \rightarrow (\mathbb{C}^n)^l$ definida por

$$g \mapsto \mathcal{P}_j(g) := \int_{C_j} g\theta = \int_0^1 g(\gamma_j(t)) \theta(\gamma_j(t), \dot{\gamma}_j(t)) dt, \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.17)$$

Nótese que una aplicación $g \in \mathcal{A}(M)$ verifica las condiciones (i) y (ii) si, y solo si, $\mathcal{P}(g) = \mathcal{P}(f)$. Por lo tanto, para finalizar la demostración es suficiente aproximar f uniformemente en M por aplicaciones no llanas $\tilde{f} \in \mathcal{A}(M)$ que verifiquen la condición anterior y también la condición (iii).

Elegimos un campo de vectores holomorfo V en \mathbb{C}^n que sea tangente a \mathfrak{S} a lo largo de \mathfrak{S} , que se anule en 0 y que no sea tangente en todo punto a $\mathbb{C}_* z_0$ a lo largo de $f(M)$. Sea $\phi_s(z)$ el flujo asociado a V para pequeños valores del parámetro temporal $s \in \mathbb{C}$. Elegimos una función no constante $h_1: M \rightarrow \mathbb{C}$ de clase $\mathcal{A}(M)$ tal que $h_1(p_0) = 0$. Denotamos por \mathcal{U} el espacio de todas las funciones $h: M \rightarrow \mathbb{C}$ de clase $\mathcal{A}(M)$ que tienen un cero de multiplicidad $k \in \mathbb{N}$ en todo punto $p \in \Lambda$. La siguiente aplicación está entonces bien definida y es holomorfa en un entorno abierto U de la función cero del espacio \mathcal{U} :

$$U \ni h \mapsto \mathcal{P}(\phi_{h_1(\cdot)h(\cdot)}(f(\cdot))) \in (\mathbb{C}^n)^l.$$

Cada componente \mathcal{P}_j , $j = 1, \dots, l$, de esta aplicación en el punto $h = 0$ puede escribirse como

$$\mathcal{P}_j(\phi_0(f)) = \mathcal{P}_j(f),$$

recordemos que V se anula en $0 \in \mathbb{C}^n$. Como \mathcal{U} es un espacio de dimensión infinita, existe una función $h \in \mathcal{U}$ arbitrariamente cerca de la función 0 de \mathcal{U} (en particular, tomamos $h \in U$) y no constante en M tal que

$$\mathcal{P}(\phi_{h_1(\cdot)h(\cdot)}(f(\cdot))) = \mathcal{P}(f).$$

Entonces, definimos \tilde{f} como

$$\tilde{f}(p) = \phi_{h_1(p)h(p)}(f(p)), \quad p \in M.$$

Elegimos la función h para que la norma $\|h\|_{0,M}$ sea suficientemente pequeña para que se cumpla que \tilde{f} esté bien definida y sea de clase $\mathcal{A}(M)$, que \tilde{f} aproxime a f en M y que $\tilde{f}(p) \in \mathfrak{G}_*$ para todo $p \in M$. Es claro que $\mathcal{P}(\tilde{f}) = \mathcal{P}(f)$ y, por tanto, \tilde{f} cumple (i) y (ii). Por otro lado, como h tiene un cero de multiplicidad k en cada punto de Λ y h_1 es no constante, se deduce que hh_1 también tiene un cero de multiplicidad (al menos) k en todo punto k de Λ . De este modo, el Lema 3.3 nos asegura que $\tilde{f} - f$ cumple la condición (iii). Finalmente, como $h_1(p_0) = 0$ y V se anula en 0 , tenemos que $\tilde{f}(p_0) = f(p_0) \in \mathbb{C}_*z_0$, mientras que como hh_1 no es constante en M y V no es tangente en todo punto a \mathbb{C}_*z_0 a lo largo de $f(M)$, existe un punto $q \in M$ tal que $\tilde{f}(q) \notin \mathbb{C}_*z_0$. Esto prueba que \tilde{f} es no llana y concluye la demostración. \square

A continuación vamos a demostrar el resultado técnico más importante del capítulo.

Teorema 3.12. *Sea $n \geq 3$ un entero y sea \mathfrak{G} una subvariedad compleja irreducible cónica y cerrada de \mathbb{C}^n que no esté contenida en un hiperplano y tal que $\mathfrak{G}_* = \mathfrak{G} \setminus \{0\}$ es diferenciable y una variedad de Oka. Sean M una superficie de Riemann abierta, θ una 1-forma holomorfa en M sin ceros, $\mathcal{K} \subset M$ un dominio compacto Runge con borde diferenciable y $\Lambda \subset M$ un subconjunto discreto cerrado. Fijemos $p_0 \in \mathring{\mathcal{K}} \setminus \Lambda$ y para cada $p \in \Lambda$, sea $C_p \subset M$ un arco de Jordan orientado con punto inicial p_0 y punto final p tal que $C_p \cap C_q = \{p_0\}$ para todo $q \neq p \in \Lambda$ y $C_p \subset \mathcal{K}$ para todo*

$p \in \Lambda \cap \mathcal{K}$. También, para cada $p \in \Lambda$, sea $\Omega_p \subset M$ un entorno compacto de p en M tal que $\Omega_p \cap (\Omega_q \cup C_q) = \emptyset$ para todo $q \neq p \in \Lambda$. Definamos $\Omega := \bigcup_{p \in \Lambda} \Omega_p$.

Sean $f: \mathcal{K} \cup \Omega \rightarrow \mathfrak{S}_*$ una aplicación de clase $\mathcal{A}(\mathcal{K} \cup \Omega)$, $\mathfrak{q}: \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^n$ un homomorfismo de grupos y $\mathfrak{z}: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^n$ una aplicación tales que

$$(a) \int_{\gamma} f\theta = \mathfrak{q}(\gamma) \text{ para toda curva cerrada } \gamma \subset \mathcal{K}.$$

$$(b) \int_{C_p} f\theta = \mathfrak{z}(p) \text{ para todo } p \in \Lambda \cap \mathcal{K}.$$

Entonces, para cualquier entero $k \in \mathbb{N}$, f puede ser uniformemente aproximada en \mathcal{K} por aplicaciones holomorfas $\tilde{f}: M \rightarrow \mathfrak{S}_*$ que cumplen las siguientes condiciones:

$$(A) \int_{\gamma} \tilde{f}\theta = \mathfrak{q}(\gamma) \text{ para toda curva cerrada } \gamma \subset M.$$

(B) $\tilde{f} - f$ tiene un cero de multiplicidad k en p para todo $p \in \Lambda$; o equivalentemente, \tilde{f} y f tienen el mismo $(k-1)$ -jet en cada punto $p \in \Lambda$.

$$(C) \int_{C_p} \tilde{f}\theta = \mathfrak{z}(p) \text{ para todo } p \in \Lambda.$$

(D) Ninguna componente de \tilde{f} se anula en todo punto de M .

Demostración. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\Lambda \cap b\mathcal{K} = \emptyset$. Además, salvo reducir los subconjuntos Ω_p también podemos suponer que para cada $p \in \Lambda$, o bien $\Omega_p \subset \overset{\circ}{\mathcal{K}}$ o bien $\Omega_p \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Por último, la Proposición 3.11 nos permite suponer que $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathfrak{S}_*$ es no llana.

Denotamos por $M_0 := \mathcal{K}$. El Lema 2.3 nos asegura la existencia de una sucesión de dominios compactos Runge con borde diferenciable $\{M_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ en M tales que

$$M_0 \Subset M_1 \Subset M_2 \Subset \cdots \Subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j = M$$

y que para cada $j \in \mathbb{N}$ la característica de Euler $\chi(M_j \setminus \overset{\circ}{M}_{j-1})$ de $M_j \setminus \overset{\circ}{M}_{j-1}$ es 0 o 1 o -1 . Salvo modificar levemente los compactos podemos asumir además que $\Lambda \cap bM_j = \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como Λ es cerrado y discreto, M_j es compacto y $\Lambda \cap bM_j = \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{Z}_+$, tenemos que $\Lambda_j := \Lambda \cap M_j =$

$\Lambda \cap \overset{\circ}{M}_j$ es vacío o finito. Sin pérdida de generalidad suponemos que $\Lambda_0 \neq \emptyset$ y que $\Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1} = \Lambda \cap (\overset{\circ}{M}_j \setminus M_{j-1}) \neq \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Así, Λ es infinito.

Denotamos por $f_0 := f$ y para cada $p \in \Lambda_0 \neq \emptyset$ elegimos un arco de Jordan orientado $C^p \subset \overset{\circ}{M}_0$ con punto inicial p y punto final p_0 tal que

$$C^p \cap C^q = \{p_0\} \quad \text{para todo } p \neq q \in \Lambda_0. \quad (3.18)$$

Para probar el teorema, fijamos una sucesión de números positivos $\epsilon_j > 0$ que serán especificados más adelante y vamos a construir de forma recursiva una sucesión de aplicaciones $f_j: M_j \rightarrow \mathfrak{S}_* \subset \mathbb{C}^n$ y una familia de arcos de Jordan orientados $C^p \subset \overset{\circ}{M}_j$, $p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1} \neq \emptyset$, $j \in \mathbb{N}$, con punto inicial p y punto final p_0 , que verifiquen las siguientes propiedades:

- (i_j) $\|f_j - f_{j-1}\|_{0, M_{j-1}} < \epsilon_j$.
- (ii_j) $\int_\gamma f_j \theta = q(\gamma)$ para toda curva cerrada $\gamma \subset M_j$.
- (iii_j) $\int_{C^p} f_j \theta = q(C^p * C^q) - \mathfrak{Z}(p)$ para todo $p \in \Lambda_j$.
- (iv_j) $f_j - f$ tiene un cero de multiplicidad k en p para todo $p \in \Lambda_j$.
- (v_j) $C^p \cap C^q = \{p_0\}$ para todo $p \neq q \in \Lambda_j$.
- (vi_j) Ninguna componente de f_j se anula en todo punto de M_j .

Recordemos que $*$ denota el producto de arcos orientados, véase la Sección 3.1. La Figura 3.3 muestra con un ejemplo la disposición de los elementos de la sucesión.

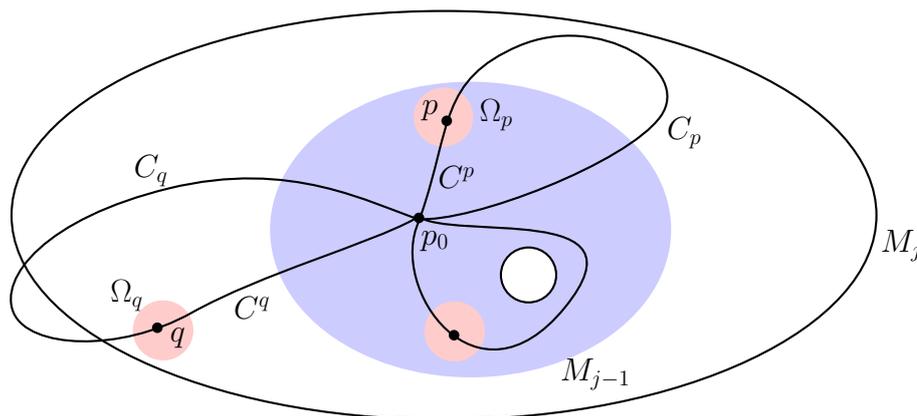


Figura 3.3: Situación de los subconjuntos $M_{j-1} \in M_j \in M$, los arcos C_p y C^p y los dominios Ω_p que aparecen en la demostración del Teorema 3.12.

Supongamos que hemos construido tal sucesión. Entonces eligiendo la sucesión de números positivos $\{\epsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ decreciendo hacia cero suficientemente rápido, la propiedad (i_j) asegura que existe una aplicación límite holomorfa

$$\tilde{f} := \lim_{j \rightarrow \infty} f_j: M \rightarrow \mathfrak{S}_*$$

que está tan próxima a f como se desee uniformemente en \mathcal{K} , mientras que las propiedades (ii_j), (iii_j), (iv_j), (v_j) y (vi_j) garantizan las condiciones (A), (B), (C) y (D). En efecto, es claro que (ii_j) implica (A) mientras que (B) se deduce de (iv_j). Por otro lado (C) es consecuencia de (iii_j) y, finalmente, por (vi_j) se cumple (D). Esto concluirá la demostración. Enfatizamos que la propiedad (v_j) será necesaria para llevar a cabo el proceso recursivo.

La base de la inducción está dada por la aplicación no llana $f_0 = f|_{\mathcal{K}}$ y los arcos de Jordan orientados C^p , $p \in \Lambda_0$, que hemos fijado previamente. En efecto, la condición (i₀) es vacía, (ii₀)=(a), (iii₀) es implicada por (a) y (b), (iv₀) es trivial y (v₀) coincide con (3.18).

Para el paso inductivo, supongamos que ya tenemos una aplicación $f_{j-1}: M_{j-1} \rightarrow \mathfrak{S}_*$ y arcos $C^p \subset \mathring{M}_{j-1}$, $p \in \Lambda_{j-1}$, cumpliendo las propiedades (i_{j-1})–(vi_{j-1}) para algún $j \in \mathbb{N}$, y construyamos una aplicación f_j y arcos de Jordan orientados C^p para $p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1} = \Lambda \cap (\mathring{M}_j \setminus M_{j-1})$, cumpliendo las condiciones (i_j)–(vi_j). Distinguiamos dos casos dependiendo del valor de la característica de Euler $\chi(M_j \setminus \mathring{M}_{j-1})$.

Caso no crítico: supuesto que $\chi(M_j \setminus \mathring{M}_{j-1}) = 0$.

En este caso M_{j-1} es un retracto fuerte de deformación de M_j . Recordamos que $\Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}$ es un subconjunto finito no vacío y elegimos para cada $p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}$ un arco de Jordan orientado $C^p \subset \mathring{M}_j$ con punto inicial p y punto final p_0 tal que se cumpla (v_j); arcos de este tipo existen trivialmente. Salvo reducir Ω_p si fuera necesario, suponemos sin pérdida de generalidad que $\Omega_p \subset \mathring{M}_j \setminus M_{j-1}$ para todo $p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}$ y $\Omega_p \cap C^q = \emptyset$ para todo $q \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}$, $q \neq p$.

Denotamos por

$$K := M_{j-1} \cup \left(\bigcup_{p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}} \Omega_p \right) \quad \text{y} \quad \Gamma := \left(\bigcup_{p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}} C^p \right) \setminus \mathring{K}.$$

Salvo modificar ligeramente los arcos C^p , $p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}$, suponemos que $S := K \cup \Gamma \subset \mathring{M}_j$ es un subconjunto admisible de M (véase la Definición

2.19). Se sigue que S es conexo y es un retracts fuerte de deformación de M_j . Además S , como subconjunto admisible, es muy simple y la componente principal de K es M_{j-1} (véase la Definición 3.9). Por tanto, el Lema 3.7 proporciona una aplicación $\varphi: S \rightarrow \mathfrak{S}_*$ de clase $\mathcal{A}(S)$ tal que:

$$(I) \quad \varphi = f_{j-1} \text{ en } M_{j-1}.$$

$$(II) \quad \varphi = f \text{ en } \bigcup_{p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}} \Omega_p.$$

$$(III) \quad \int_{C^p} \varphi \theta = q(C_p * C^p) - \mathfrak{Z}(p) \text{ para todo } p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}.$$

A continuación, dado $\epsilon_j > 0$, el Lema 3.10-ii) aplicado a S , M_j , los arcos C^p con $p \in \Lambda$, el entero $k \in \mathbb{N}$ y la aplicación φ proporciona una aplicación $f_j: M_j \rightarrow \mathfrak{S}_*$ de clase $\mathcal{A}(M_j)$ cumpliendo las siguientes condiciones:

$$(IV) \quad \|f_j - \varphi\|_{0,S} < \epsilon_j.$$

$$(V) \quad (f_j - \varphi) \theta \text{ es exacta en } S.$$

$$(VI) \quad \int_{C^p} (f_j - \varphi) \theta = 0 \text{ para todo } p \in \Lambda_j.$$

$$(VII) \quad f_j - \varphi \text{ tiene un cero de multiplicidad } k \text{ en } p \text{ para todo } p \in \Lambda_j.$$

$$(VIII) \quad \text{Ninguna componente de } f_j \text{ se anula en todo punto de } M_j.$$

Afirmamos que la aplicación f_j cumple las condiciones (i_j)–(vi_j). En efecto, en primer lugar recordemos que (v_j) ya está garantizada. (i_j) se deduce de (I) y (IV). (ii_j) es consecuencia de (ii_{j-1}), (I), (V) y del hecho de que M_{j-1} sea un retracts fuerte de deformación de M_j . (iii_j) se sigue de (iii_{j-1}), (I), (III) y (VI). (iv_j) se verifica por (iv_{j-1}), (I), (II) y (VII). Finalmente, (vi_j) coincide exactamente con (VIII).

Caso crítico: supuesto que $\chi(M_j \setminus \mathring{M}_{j-1}) = -1$.

En esta situación el cambio en la topología puede describirse por un arco diferenciable α añadido a M_{j-1} , contenido en $\mathring{M}_j \setminus \mathring{M}_{j-1}$ y que solo corta a M_{j-1} en sus extremos, véase la Nota 2.4. Así, $M_{j-1} \cup \alpha$ es un retracts fuerte de deformación de M_j . Además, podemos elegir α tal que $\alpha \cap \Lambda = \emptyset$ y $S := M_{j-1} \cup \alpha$ sea un subconjunto admisible de M , que además sea muy simple (véase la Definición 3.9). Como ambos extremos de α están en bM_{j-1} , existe un arco cerrado $\beta \subset S$ que contiene a α como subarco y que no está en la

homología de M_{j-1} . En este caso, el Lema 3.7 proporciona una aplicación $\varphi: S \rightarrow \mathfrak{S}_*$ de clase $\mathcal{A}(S)$ tal que $\varphi = f_{j-1}$ en M_{j-1} y

$$\int_{\beta} \varphi \theta = \mathfrak{q}(\beta).$$

Elegimos un dominio compacto con borde diferenciable $L \subset \overset{\circ}{M}_j$ tal que $S \subset \overset{\circ}{L}$, S sea un retracto fuerte de deformación de L y $L \cap (\Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}) = \emptyset$. Dado $\epsilon_j > 0$, el Lema 3.10-ii) aplicado a los conjuntos S y L , los arcos de Jordan C^p con $p \in \Lambda_{j-1}$, el entero $k \in \mathbb{N}$ y la aplicación φ asegura la existencia de una aplicación $\widehat{f}: L \rightarrow \mathfrak{S}_*$ de clase $\mathcal{A}(L)$ que satisface las siguientes condiciones:

- (i) $\|\widehat{f} - \varphi\|_{0,S} < \epsilon_j/2$.
- (ii) $(\widehat{f} - \varphi) \theta$ es exacta en S .
- (iii) $\int_{C^p} (\widehat{f} - \varphi) \theta = 0$ para todo $p \in \Lambda_{j-1}$.
- (iv) $\widehat{f} - \varphi$ tiene un cero de multiplicidad k en p para todo $p \in \Lambda_{j-1}$.

Como la característica de Euler $\chi(M_j \setminus \overset{\circ}{L}) = 0$, este razonamiento reduce la construcción de la nueva aplicación y sus correspondientes arcos de Jordan al caso no crítico. Esto finaliza el proceso recursivo y concluye la prueba del teorema. \square

Con estos resultados estamos en disposición de dar una demostración sencilla del Teorema 1.2. Posteriormente, daremos una demostración alternativa como consecuencia del Teorema 3.1.

Demostración del Teorema 1.2. La cuádrica nula $\mathfrak{A}_* := \mathfrak{A} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^n$ es una subvariedad compleja irreducible, cónica y cerrada y también una variedad de Oka como vimos en el Lema 2.30, por tanto podemos aplicar el Teorema 3.12.

Sean $\Lambda \subset M$ el subconjunto cerrado y discreto y $\mathfrak{J}: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación que aparecen en el enunciado del teorema. Fijamos una 1-forma holomorfa θ en M sin ceros y un punto $p_0 \in M \setminus \Lambda$. Para cada $p \in \Lambda$ elegimos un arco de Jordan diferenciable orientado C_p uniendo p_0 con p y un entorno compacto y simplemente conexo Ω_p de p que verifiquen las hipótesis del Teorema 3.12:

$$C_p \cap C_q = \{p_0\} \quad \text{y} \quad \Omega_p \cap (\Omega_q \cup C_q) = \emptyset \quad \text{para todo } q \neq p \in \Lambda.$$

Denotamos por $\Omega := \bigcup_{p \in \Lambda} \Omega_p$ y suponemos, sin pérdida de generalidad, que $p_0 \notin \Omega$. Elegimos también un entorno compacto y simplemente conexo \mathcal{K} de p_0 tal que $\mathcal{K} \cap \Omega = \emptyset$. Finalmente elegimos un homomorfismo de grupos $\mathfrak{q}: \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^n$ que cumpla

$$\Re(\mathfrak{q}(\gamma)) = 0 \text{ para toda curva cerrada } \gamma \subset M.$$

Como \mathcal{K} es simplemente conexo y $\mathcal{K} \cap \Omega = \emptyset$, el Teorema 3.12 puede aplicarse a cualquier aplicación holomorfa $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathfrak{A}_*$. Obtenemos así una aplicación holomorfa

$$\tilde{f}: M \rightarrow \mathfrak{A}_*$$

que cumple que

- (i) $\int_\gamma \tilde{f}\theta = \mathfrak{q}(\gamma)$ para toda curva cerrada $\gamma \subset M$. En particular, $\tilde{f}\theta$ no tiene periodos reales.
- (ii) $\int_{C_p} \Re(\tilde{f}\theta) = \mathfrak{Z}(p) \in \mathbb{R}^n$ para todo $p \in \Lambda$.

Por la propiedad (i), $\tilde{f}\theta$ determina mediante la representación de Weierstrass (véase el Teorema 2.36) una inmersión mínima conforme $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$X(p) = \int_{p_0}^p \Re(\tilde{f}\theta), \quad p \in M,$$

que, en vista de (ii), verifica que

$$X(p) = \mathfrak{Z}(p) \text{ para todo } p \in \Lambda.$$

Téngase en cuenta que $X(p_0) = 0$. Esto concluye la demostración. \square

Del mismo modo podemos obtener un resultado de interpolación para inmersiones holomorfas dirigidas por una subvariedad de Oka de \mathbb{C}^n análogo al Teorema 1.2. La demostración solo difiere en que utilizaremos un homomorfismo de grupos $\mathfrak{q}: \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^n$ que se anule sobre todo el grupo de homología de M , es decir, que cumpla que $\mathfrak{q}(\gamma) = 0$ para toda curva cerrada $\gamma \subset M$. De este modo la 1-forma $\tilde{f}\theta$ será exacta y podrá integrarse para obtener una inmersión holomorfa dirigida por \mathfrak{S} . Los detalles de la prueba son completamente triviales y no los hemos incluido en esta memoria.

Corolario 3.13. Sean M una superficie de Riemann abierta, $\Lambda \subset M$ un subconjunto discreto y cerrado y $\mathfrak{Z}: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^n, n \geq 3$, una aplicación. Si $\mathfrak{S} \subset \mathbb{C}^n$ es una subvariedad compleja irreducible, cónica y cerrada que no está contenida en un hiperplano de \mathbb{C}^n y tal que $\mathfrak{S}_* = \mathfrak{S} \setminus \{0\}$ es una variedad de Oka, entonces existe una \mathfrak{S} -inmersión $F: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $F|_{\Lambda} = \mathfrak{Z}$.

Finalizamos esta sección demostrando un resultado de aproximación (de tipo Runge-Mergelyan) con interpolación jet, para aplicaciones holomorfas con valores en subvariedades de Oka de \mathbb{C}^n , en el que una coordenada se mantiene fija supuesto que se extiende de forma holomorfa a toda la superficie de Riemann donde está definida. Este resultado será una herramienta fundamental para asegurar las condiciones globales de las inmersiones proporcionadas por los Teoremas 3.1 y 3.2; esto es, la completitud y la cualidad de ser propias.

Lema 3.14. Sea $n \geq 3$ un entero y sea \mathfrak{S} una subvariedad compleja de \mathbb{C}^n irreducible, cerrada y cónica que no esté contenida en ningún hiperplano de \mathbb{C}^n y tal que $\mathfrak{S}_* = \mathfrak{S} \setminus \{0\}$ sea diferenciable y una variedad de Oka. Supongamos que $\mathfrak{S} \cap \{z_1 = 1\}$ es también una variedad de Oka y que la proyección $\pi_1: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{C}$ sobre el eje z_1 admite una sección local holomorfa h alrededor de $z_1 = 0$ con $h(0) \neq 0$. Sea M una superficie de Riemann abierta con topología finita y sea θ una 1-forma holomorfa en M que no se anula. Sea $S = K \cup \Gamma \subset M$ un subconjunto Runge conexo, admisible y muy simple (véase la Definición 3.9), que sea un retracto fuerte de deformación de M , y sea $\Lambda \subset \mathring{K}_0$ un subconjunto finito donde K_0 es la componente principal de S . Elijamos $p_0 \in \mathring{K}_0 \setminus \Lambda$ y, para cada $p \in \Lambda$, sea $C_p \subset \mathring{K}_0$ un arco de Jordan orientado con punto inicial p_0 y punto final p de modo que $C_p \cap C_q = \{p_0\}$ para todo $q \neq p \in \Lambda$.

Sea $f = (f_1, \dots, f_n): S \rightarrow \mathfrak{S}_*$ una aplicación continua, holomorfa en K , tal que f_1 se extiende a una función holomorfa $M \rightarrow \mathbb{C}$ no constante. Supongamos también que $f|_K: K \rightarrow \mathfrak{S}_*$ es no llana. Entonces, para todo entero $k \in \mathbb{Z}_+$, f puede ser aproximada en la topología $\mathcal{C}^0(S)$ por aplicaciones holomorfas $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n): M \rightarrow \mathfrak{S}_*$ tales que

(i) $\tilde{f}_1 = f_1$ en todo punto de M .

(ii) $\tilde{f} - f$ tiene un cero de multiplicidad k en p para todo $p \in \Lambda$.

$$(iii) \int_{C_p} (\tilde{f} - f) \theta = 0 \text{ para todo } p \in \Lambda.$$

$$(iv) \int_{\gamma} (\tilde{f} - f) \theta = 0 \text{ para toda curva cerrada } \gamma \subset S.$$

Demostración. Para la demostración adaptamos las ideas que aparecen en la prueba de (11, Theorem 7.7). Denotamos por $\mathfrak{G}' := \mathfrak{G} \cap \{z_1 = 1\}$, que es una variedad de Oka por hipótesis. Usando homotecias podemos ver que $\mathfrak{G} \setminus \{z_1 = 0\}$ es biholomorfa a $\mathfrak{G}' \times \mathbb{C}_*$, por tanto es también una variedad de Oka, y la proyección $\pi_1: \mathfrak{G}' \rightarrow \mathbb{C}$ es un fibrado trivial con fibra Oka \mathfrak{G}' excepto sobre $0 \in \mathbb{C}$. Escribimos $(f_1, \hat{f}) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, es decir, $\hat{f} := (f_2, \dots, f_n): S \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$. Como f_1 es holomorfa y no constante en M , su conjunto de ceros $f_1^{-1}(0) = \{a_1, a_2, \dots\}$ es un subconjunto cerrado y discreto de M . El pullback $f_1^* \pi_1: E = f_1^* \mathfrak{G}' \rightarrow M$ de la proyección $\pi_1: \mathfrak{G}' \rightarrow \mathbb{C}$ es un fibrado holomorfo trivial con fibra \mathfrak{G}' sobre $M \setminus f_1^{-1}(0)$, que es singular sobre los puntos $a_j \in f_1^{-1}(0)$. Por otro lado, la aplicación $\hat{f}: S \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ cumple que $\hat{f}(x) \in \pi_1^{-1}(f_1(x))$ para todo $x \in S$, por lo que \hat{f} se corresponde con la sección $E \rightarrow M$ sobre el conjunto S .

A continuación procedemos a aproximar \hat{f} uniformemente por una sección $E \rightarrow M$ que resuelva el problema de periodos y de interpolación; una solución sin tener en cuenta los periodos y la interpolación puede obtenerse por el principio de Oka para secciones de aplicaciones holomorfas con ramificaciones cuyas fibras son Oka, véase (38) o (42, §6.13). Comenzamos eligiendo una solución holomorfa local en un entorno de cada punto $a_j \in M \setminus S$ que cumpla $\hat{f}(a_j) \neq 0$, y añadimos estos entornos al dominio de definición donde \hat{f} es holomorfa. Necesitamos aproximar una solución holomorfa \hat{f} en un conjunto compacto con borde diferenciable $K \subset M$ por una solución holomorfa en un dominio más grande $L \subset M$ que cumpla que K es un retracto fuerte de deformación de L y que $L \setminus K$ no contiene ninguno de los puntos a_j . Esto se puede hacer aplicando el principio de Oka para aplicaciones con valores en la fibra Oka G' de $\pi: G \rightarrow \mathbb{C}$ sobre \mathbb{C}_* . En el caso crítico añadimos un arco de Jordan diferenciable α al dominio $K \subset M$ que no pase por los puntos a_j y tal que $K \cup \alpha$ sea un retracto fuerte de deformación del siguiente dominio. Posteriormente extendemos \hat{f} de forma diferenciable a α para que la integral $\int_{\alpha} \hat{f} \theta$ tome el valor que se precisa; para ello usamos un resultado similar al Lema 3.7 pero manteniendo

una coordenada fija. Esto reduce el problema al caso no crítico y prueba el lema. \square

3.3. Comportamiento global de las inmersiones dirigidas

En esta sección vamos a demostrar algunos resultados que facilitan la exposición de la demostración del Teorema 3.2. Todos los resultados que aparecen a continuación están enunciados para inmersiones dirigidas definidas sobre una superficie de Riemann abierta y con valores en \mathbb{C}^n ; de un modo similar todos estos resultados pueden adaptarse fácilmente para obtener resultados análogos para inmersiones mínimas conformes en \mathbb{R}^n . Véase la Sección 3.5 para más detalles.

Necesitaremos ahora una noción de inmersión dirigida definida sobre un conjunto admisible. De un modo similar definimos en la Definición 2.43 el equivalente para inmersiones mínimas conformes.

Definición 3.15. Sea \mathfrak{G} una subvariedad compleja de \mathbb{C}^n , $n \geq 3$ irreducible, cerrada y cónica, sea M una superficie de Riemann abierta y sea $S = K \cup \Gamma \subset M$ un conjunto admisible en el sentido de la Definición 2.19. Decimos que una aplicación $F: S \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{C}^1(S)$ es una *inmersión dirigida por \mathfrak{G} generalizada*, o una *\mathfrak{G} -inmersión generalizada*, si su restricción a K es una \mathfrak{G} -inmersión de clase $\mathcal{A}^1(S)$ y la derivada $F'(t)$ respecto de cualquier parámetro local real, t , en Γ toma valores en \mathfrak{G}_* .

Comenzamos demostrando un teorema de tipo Mergelyan con interpolación para inmersiones generalizadas dirigidas por \mathfrak{G} ; lo obtendremos como consecuencia de los Lemas 3.10 y 3.14.

Proposición 3.16. Sea $\mathfrak{G} \subset \mathbb{C}^n$ como en el Teorema 3.12. Sea $M = \mathring{M} \cup bM$ una superficie de Riemann compacta bordeada y sea $S = K \cup \Gamma \subset \mathring{M}$ un subconjunto compacto Runge, admisible y muy simple tal que la componente principal S_0 de S (véase la Definición 3.9) es un retracto fuerte de deformación de M . Sea $\Lambda \subset \mathring{K}$ un subconjunto finito y supongamos que $\Lambda \cap K'$ contiene como mucho un único punto para cada componente conexa K' de K , $K' \neq K_0$, donde K_0 es la componente principal de K .

Entonces, para cualquier entero $k \in \mathbb{N}$, toda \mathfrak{S} -inmersión generalizada $F = (F_1, \dots, F_n): S \rightarrow \mathbb{C}^n$ que sea siempre no llana en $\overset{\circ}{K}_0$ puede ser aproximada en la topología $\mathcal{C}^1(S)$ por \mathfrak{S} -inmersiones $\tilde{F} = (\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_n): M \rightarrow \mathbb{C}^n$ tales que $\tilde{F} - F$ tiene un cero de multiplicidad $k \in \mathbb{N}$ en todo punto $p \in \Lambda$ y ninguna componente de \tilde{F} es constante.

Más aún, si $\mathfrak{S} \cap \{z_1 = 1\}$ es una variedad de Oka, si la proyección $\pi_1: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{C}$ sobre el eje z_1 admite una sección local holomorfa h alrededor de $z_1 = 0$ con $h(0) \neq 0$, si $\Lambda \subset \overset{\circ}{K}_0$ y si F_1 se extiende a una función holomorfa no constante $M \rightarrow \mathbb{C}$, entonces \tilde{F} puede elegirse verificando que $\tilde{F}_1 = F_1$.

Antes de explicar la demostración, señalamos que un resultado similar pero para subconjuntos admisibles arbitrarios sigue siendo cierto, sin embargo la notación y la demostración serían mucho más técnicas. De este modo, para facilitar la lectura, nos conformamos con enunciar y demostrar la Proposición 3.16, que, no obstante, es suficiente para los objetivos que nos proponemos en este capítulo.

Demostración. Sea θ una 1-forma holomorfa en M que no se anula. Sea $f: S \rightarrow \mathfrak{S}_*$ la única aplicación que cumple $dF = f\theta$. Observamos que f es siempre no llana en $\overset{\circ}{K}_0$ y de clase $\mathcal{A}(S)$ y que $f\theta$ es exacta en S . Fijamos un punto base $p_0 \in \overset{\circ}{K}_0 \setminus \Lambda$. Veamos que podemos asumir sin pérdida de generalidad que S es conexo. En efecto, supongamos que S no es conexo, luego $S \setminus S_0$ está formado por una cantidad finita de discos compactos con borde diferenciable y disjuntos dos a dos, K_1, \dots, K_m . Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ elegimos un arco de Jordan diferenciable $\gamma_i \subset \overset{\circ}{M}$ con un extremo en $(bK_0) \setminus \Gamma$, el otro extremo en bK_i y sin más puntos en S . Tomamos estos arcos de forma que $S' := S \cup (\bigcup_{i=1}^m \gamma_i)$ sea un subconjunto admisible de M conexo. Por el Lema 3.7 podemos extender f a una aplicación $f': S' \rightarrow \mathfrak{S}_*$ de clase $\mathcal{A}(S')$ tal que $F(p_0) + \int_{p_0}^p f'\theta = F(p)$ para todo $p \in S'$. Por simplicidad en la notación no mantenemos las primas. Esto reduce la prueba al caso en que S es conexo.

Suponemos por tanto que S es conexo. Para cada $p \in \Lambda$ elegimos un arco de Jordan diferenciable $C_p \subset S$ uniendo p_0 con p tal que $C_p \cap C_q = \{p_0\}$ para todo $p \neq q \in \Lambda$. El Lema 3.10-ii) aplicado al conjunto $S \subset M$, la aplicación f , el entero $k - 1 \geq 0$ y los arcos $C_p, p \in \Lambda$, nos permite aproximar f uniformemente en S por una aplicación holomorfa $\tilde{f}: M \rightarrow \mathfrak{S}_*$ tal que

(a) $\tilde{f}\theta$ es exacta; recordemos que $f\theta$ es exacta en $(S$ y por tanto en) S_0 y

que S_0 es un retracto fuerte de deformación de M .

$$(b) \quad F(p_0) + \int_{C_p} \tilde{f}\theta = F(p_0) + \int_{C_p} f\theta = F(p) \text{ para todo } p \in \Lambda.$$

(c) $\tilde{f} - f$ tiene un cero de multiplicidad $k - 1$ en todo punto $p \in \Lambda$.

(d) Ninguna componente de \tilde{f} se anula en todo punto de M .

Entonces, la propiedad (a) implica que la aplicación $\tilde{F}: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada por

$$\tilde{F}(p) := F(p_0) + \int_{p_0}^p \tilde{f}\theta, \quad p \in M,$$

está bien definida y es una \mathfrak{G} -inmersión que está tan próxima a F como se desee en la topología $\mathcal{C}^1(S)$. Además, las propiedades (b) y (c) garantizan que $\tilde{F} - F$ tiene un cero de multiplicidad k en todos los puntos de Λ , mientras que, finalmente, (d) asegura que \tilde{F} no tiene ninguna componente constante. Esto concluye la primera parte de la demostración.

Para la segunda parte de la Proposición aplicamos el mismo argumento pero utilizando el Lema 3.14 en lugar del Lema 3.10-ii). Sin embargo, para reducir la prueba al caso en el que S es conexo necesitamos extender f a una aplicación f' definida en un conjunto admisible conexo S' de forma que la primera componente de f' sea igual a dF_1/θ tal como hemos hecho en el razonamiento anterior. Esto se consigue con un resultado análogo al Lema 3.7, los detalles se omiten por ser sencillos y para evitar repeticiones. Esto completa la demostración. \square

3.3.1. Posición general

En esta subsección demostramos un resultado de posición general con jet interpolación para inmersiones dirigidas definidas en superficies de Riemann compactas bordeadas. Utilizamos la Notación 3.4.

Teorema 3.17. Sean M una superficie de Riemann compacta bordeada y $\Lambda \subset \overset{\circ}{M}$ un subconjunto finito. Sea $F: M \rightarrow \mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, una \mathfrak{G} -inmersión de clase $\mathcal{A}^1(M)$ tal que $F|_{\Lambda}$ es inyectiva. Fijado $k \in \mathbb{N}$, F puede ser uniformemente aproximada en M por un \mathfrak{G} -embebimiento $\tilde{F}: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(M)$ tal que $\tilde{F} - F$ tiene un cero de multiplicidad k en p para todo $p \in \Lambda$.

Demostración. La Proposición 3.11 permite suponer sin pérdida de generalidad que $F: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ es no llana. Suponemos también que M es un dominio compacto con borde diferenciable en una superficie de Riemann abierta R . Asociada a F definimos la aplicación diferencia

$$\delta F: M \times M \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \delta F(x, y) = F(y) - F(x).$$

Obviamente, F es inyectiva si, y solo si, $(\delta F)^{-1}(0)$ es la diagonal $D_M := \{(x, x) : x \in M\}$ de $M \times M$.

Puesto que F es una inmersión y $F|_\Lambda: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^n$ es inyectiva, existe un entorno abierto $U \subset M \times M$ de $D_M \cup (\Lambda \times \Lambda)$ tal que $\delta F \neq 0$ en todo punto de $\bar{U} \setminus D_M$. Para probar el teorema es suficiente encontrar una \mathfrak{G} -inmersión $\tilde{F}: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(M)$ arbitrariamente cerca de F en M tal que $\tilde{F} - F$ tenga un cero de multiplicidad k en todo punto de Λ y cuya aplicación diferencia $\delta \tilde{F}|_{M \times M \setminus U}$ sea transversa al origen. Para ello basta asegurar que los espacios tangentes a lo largo de los puntos de $\delta \tilde{F}^{-1}(\{0\})$ expanden todo \mathbb{C}^n . Como la dimensión compleja $\dim_{\mathbb{C}} M \times M = 2 < n$, esto implicará que $\delta \tilde{F}^{-1}(\{0\})$ es disjunto de la subvariedad de dimensión cero $\{0\}$, luego $\delta \tilde{F}$ no toma el valor cero en $M \times M \setminus U$, por lo que $\tilde{F}(y) \neq \tilde{F}(x)$ cuando $(x, y) \in M \times M \setminus U$. Por otro lado, si $(x, y) \in \bar{U} \setminus D_M$ entonces $\tilde{F}(y) \neq \tilde{F}(x)$ siempre que \tilde{F} sea suficientemente próxima a F .

Para construir tal \mathfrak{G} -inmersión utilizaremos el argumento estándar de transversalidad de Abraham (1). Necesitamos encontrar un entorno $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^N$ del origen en un espacio euclídeo complejo y una inmersión $H: \mathcal{V} \times M \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(\mathcal{V} \times M)$ tal que:

- (a) $H(0, \cdot) = F$.
- (b) $H(\zeta, \cdot) - F$ tenga un cero de multiplicidad k en p para todo $p \in \Lambda$.
- (c) La aplicación diferencia $\delta H: \mathcal{V} \times M \times M \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida por

$$\delta H(\zeta, x, y) = H(\zeta, y) - H(\zeta, x), \quad \zeta \in \mathcal{V}, \quad x, y \in M,$$

dependiendo del parámetro $\zeta \in \mathcal{V}$ sea una familia de sumersiones, es decir, que la diferencial parcial

$$d_\zeta \delta H(\zeta, x, y)|_{\zeta=0}: T_0 \mathbb{C}^N \cong \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^n$$

sea sobreyectiva para todo $(x, y) \in M \times M \setminus U$.

Del hecho de que la condición anterior es abierta y de la compacidad de $M \times M \setminus U$ podemos deducir que la diferencial parcial $d_\zeta \delta H$ es sobreyectiva para todo ζ en un entorno $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ del origen en \mathbb{C}^n . Por lo tanto, la aplicación diferencial $\delta H: M \times M \setminus U \rightarrow \mathbb{C}^n$ es transversa a cualquier subvariedad de \mathbb{C}^n , en particular, es transversa al origen de \mathbb{C}^n . Entonces, el argumento estándar citado anteriormente asegura que para una inmersión cualquiera de la familia, $H(\zeta, \cdot): M \rightarrow \mathbb{C}^n$, la aplicación diferencial $\delta H(\zeta, \cdot, \cdot)$ es también transversa a $0 \in \mathbb{C}^n$ en $M \times M \setminus U$. Eligiendo el parámetro ζ suficientemente cerca de 0 obtendremos un \mathfrak{S} -embebimiento con las propiedades requeridas.

Para construir la inmersión H que demuestra el teorema fijamos una 1-forma holomorfa θ en R que no se anule en ningún punto y escribimos $dF = f\theta$, donde $f: M \rightarrow \mathfrak{S}_*$ es una aplicación de clase $\mathcal{A}^1(M)$. Comenzamos nuestro razonamiento con el siguiente resultado.

Lema 3.18. *Para todo punto $(p, q) \in M \times M \setminus (D_M \cup (\Lambda \times \Lambda))$ existe una familia $H = H^{(p,q)}(\zeta, \cdot)$ dependiendo de $\zeta \in \mathbb{C}^n$ que cumple las condiciones (a) y (b) anteriores y tal que la diferencial $d_\zeta \delta H(\zeta, p, q)|_{\zeta=0}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un isomorfismo.*

Para demostrar el lema adaptamos los argumentos de Alarcón y Forstnerič en (11, Lemma 6.1) de forma que podamos garantizar también interpolación jet, es decir, de modo que la inmersión H también cumpla la condición (b).

Demostración. Tomamos $(p, q) \in M \times M \setminus (D_M \cup (\Lambda \times \Lambda))$ y distinguimos casos.

Caso 1: Supuesto que $\{p, q\} \cap \Lambda \neq \emptyset$.

Suponemos que $p \in \Lambda$ y por tanto $q \notin \Lambda$; en otro caso razonamos de forma simétrica. Escribimos $\Lambda = \{p = p_1, \dots, p_{l'}\}$. Fijamos un punto $p_0 \in M \setminus (\Lambda \cup \{q\})$ y elegimos curvas cerradas $C_j \subset M \setminus \Lambda$, $j = 1, \dots, l''$, que formen una base de $\mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{l''}$, y arcos de Jordan diferenciables $C_{l'+j}$ uniendo p_0 con p_j , $j = 1, \dots, l'$, tales que, si $l := l' + l''$, se tiene que $C_i \cap C_j = \{p_0\}$ para todo $i \neq j \in \{1, \dots, l\}$ y que $C := \bigcup_{j=1}^l C_j$ es un subconjunto Runge en M . También elegimos otro arco de Jordan diferenciable C_q uniendo p_0 con q tal que $C \cap C_q = \{p_0\}$. Finalmente, sean $\gamma_j: [0, 1] \rightarrow C_j$, $j = 1, \dots, l$, y $\gamma: [0, 1] \rightarrow C_q$ parametrizaciones diferenciables de las respectivas curvas cumpliendo $\gamma_j(0) = \gamma_j(1) = p_0$ para $j = 1, \dots, l''$, $\gamma_j(0) = p_0$ y $\gamma_j(1) = p_j$ para

$j = l'' + 1, \dots, l$ y $\gamma(0) = p_0$ y $\gamma(1) = q$.

Puesto que la inmersión F es no llana, existen campos de vectores tangentes V_1, \dots, V_n en \mathfrak{S} que se anulan en 0 y puntos $x_1, \dots, x_n \in C_q \setminus \{p_0, q\}$ tales que, llamando $z_i = f(x_i) \in \mathfrak{S}_*$, los vectores $V_1(z_1), \dots, V_n(z_n)$ generan \mathbb{C}^n . Sea $t_i \in (0, 1)$ tal que $\gamma(t_i) = x_i$ y sea ϕ_t^i el flujo del campo de vectores V_j para valores pequeños del parámetro $t \in \mathbb{C}$ en el sentido de la Notación 3.4. Consideramos para cada $i = 1, \dots, n$ una función diferenciable $h_i: C \cup C_q \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}$ que se anule en $C \cup \{q\}$, su valor en el interior relativo de C_q será especificado más adelante. Como en la prueba del Lema 3.10, sea $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ y consideramos la aplicación

$$\psi(\zeta, x) = \phi_{\zeta_1 h_1(x)}^1 \circ \dots \circ \phi_{\zeta_n h_n(x)}^n(f(x)) \in \mathfrak{S}, \quad x \in C \cup C_q,$$

que es holomorfa en $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Notemos que $\psi(0, \cdot) = f: M \rightarrow \mathfrak{S}_*$ (por tanto $\psi(\zeta, \cdot)$ no se anula para ζ perteneciente a un entorno pequeño del origen) y $\psi(\zeta, x) = f(x)$ para todo $x \in C \cup \{q\}$, ya que todas las h_i se anulan ahí. Se tiene que

$$\left. \frac{\partial \psi(\zeta, x)}{\partial \zeta_i} \right|_{\zeta=0} = h_i(x) V_i(f(x)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Elegimos h_i con soporte en un entorno compacto de $t_i \in (0, 1)$ suficientemente pequeño para que

$$\int_0^1 h_i(\gamma(t)) V_i(f(\gamma(t))) \theta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \approx V_i(z_i) \theta(\gamma(t_i), \dot{\gamma}(t_i)), \quad (3.19)$$

donde el símbolo \approx denota que ambas expresiones están tan próximas como queramos. Si suponemos que los entornos han sido elegidos suficientemente pequeños, entonces, asumiendo que la aproximación en (3.19) es suficientemente buena y teniendo en cuenta que los vectores en el lado derecho de la expresión forman una base de \mathbb{C}^n , tenemos que los que aparecen en el lado izquierdo también la forman.

Fijamos un número $\epsilon > 0$. El Teorema 2.29 proporciona funciones holomorfas $g_i: M \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$g_i \text{ tiene un cero de multiplicidad } k - 1 \text{ en todo punto de } \Lambda \quad (3.20)$$

y

$$\sup_{C \cup C_q} |g_i - h_i| < \epsilon, \quad i = 1, \dots, n.$$

Siguiendo los argumentos de la prueba del Lema 3.10, definimos las aplicaciones holomorfas

$$\begin{aligned}\Psi(\zeta, x, z) &= \phi_{\zeta_1 g_1(x)}^1 \circ \cdots \circ \phi_{\zeta_n g_n(x)}^n(z) \in \mathfrak{S}, \\ \Psi_f(\zeta, x) &= \Psi(\zeta, x, f(x)) \in \mathfrak{S}_*,\end{aligned}$$

donde $x \in M$, $z \in \mathfrak{S}$ y ζ pertenece a un entorno del origen en \mathbb{C}^n suficientemente pequeño. Observamos que $\Psi_f(0, \cdot) = f$.

En vista de la ecuación (3.19) y asumiendo que $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño, se tiene que para $i = 1, \dots, n$ los vectores

$$\left. \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \right|_{\zeta=0} \int_0^1 \Psi_f(\zeta, \gamma(t)) \theta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt = \int_0^1 g_i(\gamma(t)) V_i(f(\gamma(t))) \theta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt, \quad (3.21)$$

están suficientemente cerca de cada uno de los vectores $V_i(z_i) \theta(\gamma(t_i), \dot{\gamma}(t_i))$ para que también ellos formen una base de \mathbb{C}^n .

Para terminar con la prueba vamos a modificar Ψ_f ligeramente para resolver el problema de periodos y garantizar que se cumple la interpolación jet en los puntos de Λ . De la expansión de Taylor del flujo de un campo de vectores se deduce que

$$\Psi_f(\zeta, x) = f(x) + \sum_{i=1}^n \zeta_i g_i(x) V_i(f(x)) + O(|\zeta|^2).$$

Como $|g_i| < \epsilon$ en C (recordemos que $h_i = 0$ en C), la integral de Ψ_f sobre las curvas C_1, \dots, C_l se puede estimar por

$$\left| \int_{C_j} (\Psi_f(\zeta, \cdot) - f) \theta \right| = \left| \int_{C_j} \Psi_f(\zeta, \cdot) \theta \right| \leq \eta_0 \epsilon |\zeta|, \quad j = 1, \dots, l'' \quad (3.22)$$

(recuérdese que $\int_{C_j} f \theta = \int_{C_j} dF = 0$ para todo $j = 1, \dots, l''$, pues estas curvas son cerradas),

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_j} (\Psi_f(\zeta, \cdot) - f) \theta \right| &= \left| F(p_0) - \left(F(p_j) - \int_{C_j} \Psi_f(\zeta, \cdot) \theta \right) \right| \\ &\leq \eta_0 \epsilon |\zeta|, \quad j = l'' + 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (3.23)$$

para alguna constante $\eta_0 > 0$ y cualquier punto $\zeta \in \mathbb{C}^n$ suficientemente próximo al origen. Además, la ecuación (3.20) garantiza que

$$\Psi_f(\zeta, \cdot) - f \text{ tiene un cero de multiplicidad } k - 1 \text{ en todo } p \in \Lambda \quad (3.24)$$

para ζ en un entorno del origen suficientemente pequeño (véase el Lema 3.3).

A continuación, el Lema 3.10-i) proporciona dos aplicaciones holomorfas $\Phi(\tilde{\zeta}, x, z)$ y $\Phi_f(\tilde{\zeta}, x) = \Phi(\tilde{\zeta}, x, f(x))$, donde el parámetro $\tilde{\zeta}$ pertenece a un entorno pequeño de $0 \in \mathbb{C}^{\tilde{N}}$ para $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y donde $x \in M$, tales que $\Phi(0, x, z) = z \in \mathfrak{S}$ para todo $x \in M$,

$$\Phi_f(0, \cdot) = \Phi_{\Psi_f(0, \cdot)}(0, \cdot) = f, \quad (3.25)$$

y la diferencial de la aplicación de periodos dada por $\tilde{\zeta} \mapsto \mathcal{P}(\Phi_f(\tilde{\zeta}, \cdot)) \in \mathbb{C}^{ln}$ (véase (3.13)) en el punto $\tilde{\zeta} = 0$ tiene rango máximo igual a ln . Lo mismo es cierto si permitimos que f se mueva localmente alrededor de la aplicación inicial. Esto quiere decir que si reemplazamos f por $\Psi_f(\zeta, \cdot)$ y consideramos la aplicación

$$\mathbb{C}^{\tilde{N}} \times \mathbb{C}^n \times M \ni (\tilde{\zeta}, \zeta, x) \mapsto \Phi(\tilde{\zeta}, x, \Psi_f(\zeta, x)) \in \mathfrak{S}_*$$

definida para $x \in M$ y para $(\tilde{\zeta}, \zeta)$ en un entorno suficientemente pequeño de $0 \in \mathbb{C}^{\tilde{N}} \times \mathbb{C}^n$, el teorema de la función implícita proporciona una aplicación holomorfa $\tilde{\zeta} = \rho(\zeta)$ alrededor de $\zeta = 0 \in \mathbb{C}^n$ con $\rho(0) = 0 \in \mathbb{C}^{\tilde{N}}$ y tal que la aplicación definida por $\Phi(\rho(\zeta), x, \Psi_f(\zeta, x))$ cumple:

- (i) $\mathcal{P}(\Phi(\rho(\zeta), \cdot, \Psi_f(\zeta, \cdot))) = \mathcal{P}(\Phi(0, \cdot, \Psi_f(0, \cdot))) = \mathcal{P}(\Psi_f(0, \cdot)) = \mathcal{P}(f)$.
- (ii) $\Phi(\rho(\zeta), \cdot, \Psi_f(\zeta, \cdot)) - \Psi_f(\zeta, \cdot)$ tiene un cero de multiplicidad $k - 1$ en todo punto de Λ .

La condición (ii) junto con la ecuación (3.24) aseguran que

$$\Phi(\rho(\zeta), \cdot, \Psi_f(\zeta, \cdot)) - f \text{ tiene un cero de multiplicidad } k - 1 \text{ en } p \in \Lambda \quad (3.26)$$

para todo ζ en un entorno pequeño de $0 \in \mathbb{C}^n$. Obviamente, la aplicación $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ también depende de f . De este modo, se sigue que la integral

$$H_F(\zeta, x) = F(p_0) + \int_{p_0}^x \Phi(\rho(\zeta), \cdot, \Psi_f(\zeta, \cdot)) \theta \quad (3.27)$$

es independiente de la elección del arco que une p_0 con $x \in M$. Además,

$$H_F(0, \cdot) = F, \quad (3.28)$$

véase la ecuación (3.25), y $H_F(\zeta, \cdot)$ es una \mathfrak{S} -inmersión de clase $\mathcal{A}^1(M)$ para todo $\zeta \in \mathbb{C}^n$ suficientemente cerca de cero tal que

$$H_F(\zeta, \cdot) = F \quad \text{en } \Lambda, \quad (3.29)$$

véase (i). Por otro lado, de las ecuaciones (3.22) y (3.23) tenemos que

$$|\rho(\zeta)| < \eta_1 \epsilon |\zeta|$$

para algún $\eta_1 > 0$. Si llamamos \tilde{V}_j a los campos de vectores y \tilde{g}_j a las funciones que aparecen en la construcción de la aplicación Φ (véase el Lema 3.10), la desigualdad anterior implica que

$$\begin{aligned} |\Phi(\rho(\zeta), x, \Psi_f(\zeta, x)) - \Psi_f(\zeta, x)| &= \left| \sum \rho_j(\zeta) \tilde{g}_j(x) \tilde{V}_j(\Psi_f(\zeta, x)) + O(|\zeta|^2) \right| \\ &< \eta_2 \epsilon |\zeta| \end{aligned}$$

para alguna constante $\eta_2 > 0$, para todo punto $x \in M$ y para todo ζ cerca del origen en \mathbb{C}^n . Claramente, utilizando esta desigualdad en el arco C_q , tenemos que

$$\left| \int_0^1 \Phi(\rho(\zeta), \gamma(t), \Psi_f(\zeta, \gamma(t))) \theta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \int_0^1 \Psi_f(\zeta, \gamma(t)) \theta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right| < \eta_3 \epsilon |\zeta|$$

para algún $\eta_3 > 0$. Finalmente, eligiendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, las derivadas

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \Big|_{\zeta=0} \int_0^1 \Phi(\rho(\zeta), \gamma(t), \Psi_f(\zeta, \gamma(t))) \theta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \in \mathbb{C}^n, \quad i = 1, \dots, n,$$

están tan cerca como se desee de los vectores que aparecen en (3.21), de forma que también forman una base de \mathbb{C}^n . De la definición de H_F en (3.27), y de (3.29), tenemos que

$$\begin{aligned} \delta H_F(\zeta, p, q) &= H_F(\zeta, q) - H_F(\zeta, p) \\ &= H_F(\zeta, q) - F(p) \\ &= F(p_0) - F(p) + \int_0^1 \Phi(\rho(\zeta), \gamma(t), \Psi_f(\zeta, \gamma(t))) \theta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)), \end{aligned}$$

y, por tanto, la diferencial parcial

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \delta H(\zeta, p, q): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

es un isomorfismo. Esto, la condición (ii) y las ecuaciones (3.28) y (3.29) muestran que H satisface la conclusión del lema y finaliza la demostración del Caso 1.

Caso 2: Supuesto que $\{p, q\} \cap \Lambda = \emptyset$.

En este caso, definiendo $\Lambda' := \Lambda \cup \{p\}$ se reduce la prueba al Caso 1, lo que completa la demostración del lema. \square

La familia de inmersiones, H_F , dependiendo de la inmersión F dada en (3.27) depende de forma holomorfa del parámetro F en un entorno de la \mathfrak{S} -inmersión inicial F_0 . En particular, si $F(\xi, \cdot): M \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una familia de \mathfrak{S} -inmersiones holomorfas que dependen de forma holomorfa de $\xi \in \mathbb{C}$ y tal que verifica que $F(\xi, \cdot) - F$ tiene un cero de multiplicidad k en todos los puntos $p \in \Lambda$ para todo ξ , entonces $H_{F(\xi, \cdot)}(\zeta, \cdot)$ depende de forma holomorfa de (ζ, ξ) . Esto nos permite componer, en número finito, tantas inmersiones de este tipo como sea necesario para demostrar el resultado mediante un proceso recursivo. Para el caso de dos familias suponemos que $H = H_F(\zeta, \cdot)$ y $G = G_F(\xi, \cdot)$ son dos familias de deformaciones con $H_F(0, \cdot) = G_F(0, \cdot) = F$ y tales que $H_F(\zeta, \cdot) - F$ y $G_F(\xi, \cdot) - F$ tienen un cero de multiplicidad $k \in \mathbb{N}$ en todo punto de Λ para todo ζ y ξ respectivamente. En esta situación, definimos la familia de deformaciones compuesta mediante

$$(H\#G)_F(\zeta, \xi, x) := G_{H_F(\zeta, \cdot)}(\xi, x), \quad x \in M.$$

Trivialmente se tiene que $(H\#G)_F(0, \xi, \cdot) = G_F(\xi, \cdot)$ y $(H\#G)_F(\zeta, 0, \cdot) = H_F(\zeta, \cdot)$, y que $H\#G - F$ tiene un cero de multiplicidad k en p para todo $p \in \Lambda$. Nótese que la aplicación $\#$ es asociativa pero no conmutativa, de hecho es similar a la composición de sprays que fue introducida por Gromov en (53).

Para finalizar la demostración del Teorema 3.17, el Lema 3.18 proporciona un recubrimiento finito por abiertos $\{U_i\}_{i=1}^m$ del conjunto compacto $M \times M \setminus U$ y familias de deformaciones $H^i = H^i(\zeta^i, \cdot): M \rightarrow \mathbb{C}^n$, con $H^i(0, \cdot) = F$, donde $\zeta^i = (\zeta_1^i, \dots, \zeta_{\eta_i}^i) \in \Omega_i \subset \mathbb{C}^{\eta_i}$ para números enteros positivos $\eta_i \in \mathbb{N}$ e $i = 1, \dots, m$ y un entorno Ω_i de $0 \in \mathbb{C}^{\eta_i}$. Se sigue entonces que la aplicación diferencial $\delta H^i(\zeta^i, p, q)$ es una sumersión en $\zeta^i = 0$ para todo $p, q \in U_i$. Tomando $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^m) \in \mathbb{C}^N$, donde $N = \sum_{i=1}^m \eta_i$, y definiendo

$$H(\zeta, x) := (H^1\#H^2\#\dots\#H^m)(\zeta^1, \dots, \zeta^m, x)$$

obtenemos una familia de deformaciones que cumple que $H(0, \cdot) = F$, $H(\zeta, \cdot) - F$ tiene un cero de multiplicidad k en p para todo $p \in \Lambda$ y δH es

una sumersión, es decir, su diferencial parcial respecto ζ es sobreyectiva, en todo punto de $M \times M \setminus U$ y para todo $\zeta \in \mathbb{C}^N$ suficientemente cerca del origen. \square

3.3.2. Completitud

En esta subsección desarrollaremos una versión de la técnica de Jorge y Xavier (61), en la que usamos tanto argumentos intrínsecos como extrínsecos, con el objetivo de demostrar el siguiente resultado. Recordemos que el método de Jorge y Xavier permitió demostrar, usando únicamente la geometría intrínseca de la superficie, la existencia de un disco mínimo completo en \mathbb{R}^3 , no plano y contenido entre dos planos paralelos.

Lema 3.19. *Sea $\mathfrak{G} \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, como en el Lema 3.14. Sea M una superficie de Riemann compacta bordeada y sea $K \subset \overset{\circ}{M}$ un dominio compacto con borde diferenciable que sea Runge y un retracto fuerte de deformación de M . Sean también $\Lambda \subset \overset{\circ}{K}$ un subconjunto finito y $p_0 \in \overset{\circ}{K} \setminus \Lambda$ un punto. Entonces, dados un entero $k \in \mathbb{N}$ y un número positivo $\tau > 0$, toda \mathfrak{G} -inmersión $F: K \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(K)$ puede ser aproximada en la topología $\mathcal{C}^1(K)$ por \mathfrak{G} -inmersiones $\tilde{F}: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}(M)$ que cumplan las siguientes condiciones:*

(I) $\tilde{F} - F$ tiene un cero de multiplicidad k en todo punto $p \in \Lambda$.

(II) La distancia intrínseca $\text{dist}_{\tilde{F}}(p_0, bM) > \tau$.

Demostración. Suponemos sin pérdida de generalidad que M es un dominio compacto con borde diferenciable contenido en una superficie de Riemann abierta \tilde{M} . Usando la Proposición 3.16 suponemos también que $F = (F_1, \dots, F_n)$ es holomorfa en M y que F_1 no es constante en M . Fijamos una 1-forma holomorfa θ en \tilde{M} que no se anula en ningún punto y escribimos $dF = f\theta$ donde $f = (f_1, \dots, f_n): M \rightarrow \mathfrak{G}_*$ es una aplicación holomorfa. Nótese que f_1 no es constantemente cero en M .

Puesto que K es un retracto fuerte de deformación de M , tenemos que $\overset{\circ}{M} \setminus K$ consiste en una familia finita de anillos abiertos disjuntos dos a dos. Afirmamos que existe una familia finita de discos compactos L_1, \dots, L_m en $\overset{\circ}{M} \setminus K$ con borde diferenciable y disjuntos dos a dos cumpliendo la siguiente

propiedad: si $\alpha \subset M \setminus \bigcup_{j=1}^m L_j$ es un camino uniendo p_0 con bM entonces

$$\int_{\alpha} |f_1 \theta| > \tau. \quad (3.30)$$

Recordamos que $f_1 \neq 0$. En efecto, tales discos pueden ser obtenidos como piezas de un laberinto similar al empleado por Jorge y Xavier en (61) que están contenidas en los anillos formados por $\mathring{M} \setminus K$. Véase la Figura 3.4.

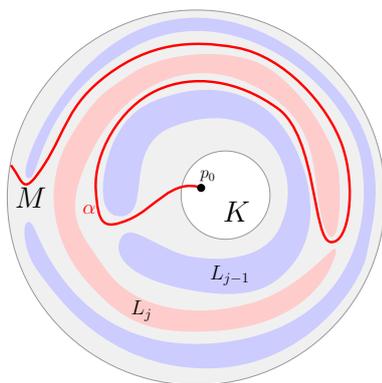


Figura 3.4: Curva α y laberinto de compactos en $\mathring{M} \setminus K$.

Para una explicación más detallada referimos a la demostración de (8, Lemma 4.1), donde aparece una descripción precisa de los conjuntos L_1, \dots, L_m que se ajusta exactamente a nuestras necesidades. Definimos $L := \bigcup_{j=1}^m L_j$.

Para cada $j = 1, \dots, m$, elegimos un camino de Jordan $\gamma_j \subset \mathring{M}$ con un extremo en K , el otro en L_j y el resto de puntos de γ_j fuera de $K \cup L$ que verifique que $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ para todo $i \neq j \in \{1, \dots, m\}$ y que el conjunto

$$S := K \cup L \cup \Gamma,$$

donde $\Gamma := \bigcup_{j=1}^m \gamma_j$, sea un subconjunto admisible contenido en M . Se sigue claramente que S es un subconjunto admisible, muy simple y conexo de M cuya componente principal es K (véase la Definición 3.9) y que K es un retracto fuerte de deformación de S , y por tanto de M . Consideramos una aplicación $h = (h_1, \dots, h_n): S \rightarrow \mathfrak{S}_*$ de clase $\mathcal{A}(S)$ que cumpla que:

(a) $h_1 = f_1|_S$.

(b) $h|_K = f|_K$.

- (c) $|\int_{\alpha} h\theta| > \tau$ para todas las curvas $\alpha \subset S$ con punto inicial en p_0 y punto final en L .

Es claro que una aplicación con esas características existe, basta elegir h con valor cerca de $0 \in \mathbb{C}^n$ en cada componente de L y tal que $|\int_{\gamma_j} h\theta|$ tenga un valor muy grande, en particular mayor que τ , para cada componente γ_j de Γ . También elegimos para cada $p \in \Lambda$ un arco de Jordan $C_p \subset \mathring{K}$ con punto inicial p_0 y punto final p de forma que $C_p \cap C_q = \{p_0\}$ para todo $p \neq q \in \Lambda$. El Lema 3.14 proporciona una aplicación holomorfa $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n): M \rightarrow \mathfrak{S}_*$ que satisface:

- i) \tilde{f} aproxima a h en S .
- ii) $\tilde{f}_1 = f_1$ en todo punto de M .
- iii) $\tilde{f} - h$ tiene un cero de multiplicidad $k - 1$ en p para todo $p \in \Lambda$.
- iv) $\int_{C_p} (\tilde{f} - h)\theta = 0$ para todo $p \in \Lambda$.
- v) $\int_{\gamma} (\tilde{f} - h)\theta = 0$ para toda curva cerrada $\gamma \subset S$.

Puesto que $f\theta = dF$ es una 1-forma exacta, las propiedades (b) y v) y el hecho de que K sea un retracts fuerte de deformación de M garantizan que $\tilde{f}\theta$ es también exacta en M . De este modo, la aplicación $\tilde{F} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_n): M \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada por la expresión

$$\tilde{F}(p) := F(p_0) + \int_{p_0}^p \tilde{f}\theta, \quad p \in M,$$

está bien definida y es una \mathfrak{S} -inmersión de clase $\mathcal{A}^1(M)$. Afirmamos que si la aproximación que aparece en i) es suficientemente buena entonces \tilde{F} cumple la conclusión del lema. En efecto, las propiedades i) y (b) garantizan que \tilde{F} aproxima a F tanto como se desee en la topología $\mathcal{C}^1(K)$. Por otro lado, las propiedades iii), iv) y (b) aseguran que $\tilde{F} - F$ tiene un cero de multiplicidad k en todos los puntos $p \in \Lambda$, lo que prueba la condición (I). Finalmente, para comprobar la condición (II) tomamos un arco $\alpha \subset M$ con punto inicial p_0 y punto final en bM . Suponemos primero que $\alpha \cap L \neq \emptyset$ y sea $\tilde{\alpha} \subset \alpha$ un subarco con punto inicial p_0 y punto final q para algún $q \in L$. Entonces tenemos que la longitud

$$\text{length}(\tilde{F}(\alpha)) > \text{length}(\tilde{F}(\tilde{\alpha})) \geq |\tilde{F}(q) - \tilde{F}(p_0)| = \left| \int_{p_0}^q \tilde{f}\theta \right| \stackrel{\text{i)}}{\approx} \left| \int_{p_0}^q h\theta \right| \stackrel{\text{(c)}}{>} \tau.$$

Recordamos que el símbolo \approx significa que ambas expresiones están tan próximas como queramos. Supongamos por el contrario que $\alpha \cap L = \emptyset$. En este caso se cumple que

$$\text{length}(\tilde{F}(\alpha)) = \int_{\alpha} |\tilde{f}\theta| \geq \int_{\alpha} |\tilde{f}_1\theta| \stackrel{\text{ii)}}{=} \int_{\alpha} |f_1\theta| \stackrel{(3.30)}{>} \tau.$$

Esto demuestra (II) y completa la demostración. \square

3.3.3. La cualidad de ser propia

Recordemos que dado un vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ en \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n denotamos por $|x|_{\infty} = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$; véase el inicio del Capítulo 2. En esta subsección demostramos el siguiente resultado.

Lema 3.20. *Sea $n \geq 3$ un entero y sea \mathfrak{S} una subvariedad compleja irreducible, cerrada y cónica de \mathbb{C}^n que no esté contenida en ningún hiperplano. Supongamos que $\mathfrak{S}_* = \mathfrak{S} \setminus \{0\}$ es diferenciable y una variedad de Oka, que $\mathfrak{S} \cap \{z_j = 1\}$ es también una variedad de Oka y que la proyección $\pi_j: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{C}$ sobre el eje z_j admite una sección local holomorfa h_j alrededor de $z_j = 0$ con $h_j(0) \neq 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Sea M una superficie de Riemann compacta bordeada y sean $K \subset \overset{\circ}{M}$ un dominio compacto con borde diferenciable que sea Runge y un retracto fuerte de deformación de M y $\Lambda \subset \overset{\circ}{K}$ un subconjunto finito. Sea $F: K \rightarrow \mathbb{C}^n$ una \mathfrak{S} -inmersión de clase $\mathcal{A}^1(K)$, sean $\tau > \rho > 0$ números positivos y supongamos que*

$$|F(p)|_{\infty} > \rho \quad \text{para todo } p \in bK. \quad (3.31)$$

Entonces, dado un entero $k \in \mathbb{N}$, F puede ser aproximada en la topología $\mathcal{C}^1(K)$ por \mathfrak{S} -inmersiones $\tilde{F}: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(M)$ cumpliendo las siguientes condiciones:

- (I) $\tilde{F} - F$ tiene un cero de multiplicidad k en todo punto $p \in \Lambda$.
- (II) $|\tilde{F}(p)|_{\infty} > \rho$ para todo $p \in M \setminus \overset{\circ}{K}$.
- (III) $|\tilde{F}(p)|_{\infty} > \tau$ para todo $p \in bM$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos que M es un dominio compacto con borde diferenciable contenido en una superficie de

Riemann abierta \widetilde{M} . En vista del Teorema 3.16, suponemos sin pérdida de generalidad que $F = (F_1, \dots, F_n)$ es holomorfa en \widetilde{M} . Puesto que K es un retracto fuerte de deformación de M , tenemos que $M \setminus \overset{\circ}{K}$ está formado por una cantidad finita de anillos compactos disjuntos dos a dos. Por simplicidad en la exposición asumimos que $\mathcal{A} := M \setminus \overset{\circ}{K}$ es conexo, es decir, es un único anillo; el mismo argumento funciona en general aplicando en cada anillo de $M \setminus \overset{\circ}{K}$ los mismos razonamientos que expondremos a continuación.

Denotamos por α la componente conexa del borde de \mathcal{A} que está contenida en bK y por β la que está contenida en bM ; en ambos casos α y β son curvas de Jordan diferenciables. Por la desigualdad (3.31) existen un entero $l \geq 3$, subconjuntos I_1, \dots, I_n de \mathbb{Z}_l (donde $\mathbb{Z}_l = \{0, 1, \dots, l-1\}$ denota el grupo cíclico aditivo de enteros modulo l) y una familia de subarcs compactos conexos $\{\alpha_j : j \in \mathbb{Z}_l\}$ de $\alpha = bK$ que cumplen las siguientes propiedades:

$$(a1) \quad \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_l} \alpha_j = \alpha.$$

(a2) α_j y α_{j+1} tienen un extremo común, p_j , y no tienen más puntos en común.

$$(a3) \quad \bigcup_{a=1}^n I_a = \mathbb{Z}_l \text{ y } I_a \cap I_b = \emptyset \text{ para todo } a \neq b \in \{1, \dots, n\}.$$

(a4) Si $j \in I_a$ entonces $|F_a(p)| > \rho$ para todo $p \in \alpha_j$, $a = 1, \dots, n$.

Puede ocurrir que I_a sea vacío para algún $a \in \{1, \dots, n\}$.

Consideramos para cada $j \in \mathbb{Z}_l$ un arco embebido $\gamma_j \subset \mathcal{A}$ con las siguientes propiedades:

- γ_j une $\alpha = bK$ con $\beta = bM$ y los interseca de forma transversa.
- $\gamma_j \cap \alpha = \{p_j\}$.
- $\gamma_j \cap \beta$ consiste de un único punto que llamaremos q_j .
- Los arcos γ_j , $j \in \mathbb{Z}_l$, son disjuntos dos a dos.

Definimos el conjunto admisible

$$S := K \cup \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}_l} \gamma_j \right) \subset M$$

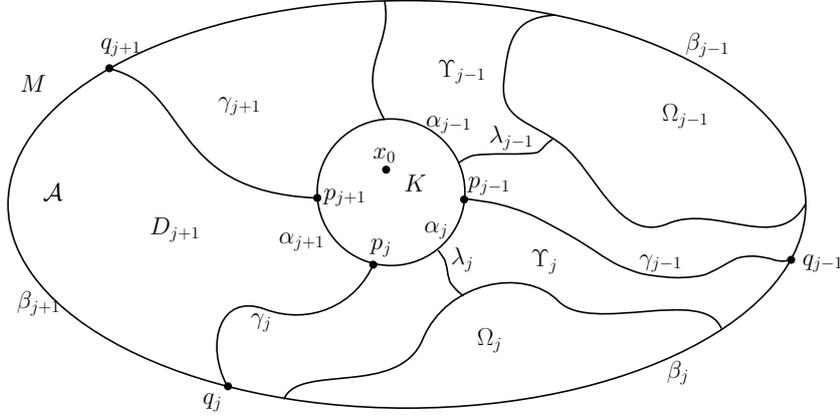


Figura 3.5: El anillo \mathcal{A} y los objetos que aparecen en él.

y fijamos un punto $x_0 \in \mathring{K} \setminus \Lambda$. Sean $z = (z_1, \dots, z_n)$ coordenadas en \mathbb{C}^n y recordemos que $\pi_a: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ denota la a -ésima proyección $\pi_a(z) = z_a$ para todo $a = 1, \dots, n$. Sea θ una 1-forma holomorfa en \widetilde{M} que no se anula. Tomamos una aplicación $f: S \rightarrow \mathfrak{S}_*$ de clase $\mathcal{A}(S)$ tal que $f = dF/\theta$ en K y la inmersión $\widetilde{G}: S \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada por

$$\widetilde{G}(p) = F(p_0) + \int_{x_0}^p f\theta,$$

que está bien definida puesto que K es un retracto fuerte de deformación de S , verifica las siguientes condiciones:

- (b1) $\widetilde{G} = F$ en K y en un entorno de p_j para todo $j \in \mathbb{Z}_l$.
- (b2) Si $j \in I_a$ entonces $|\pi_a(\widetilde{G}(z))| > \rho$ para todo $z \in \gamma_{j-1} \cup \gamma_j$, $a = 1, \dots, n$.
- (b3) Si $j \in I_a$ entonces $|\pi_a(\widetilde{G}(q_{j-1}))| > \tau$ y $|\pi_a(\widetilde{G}(q_j))| > \tau$, $a = 1, \dots, n$.

La existencia de una tal aplicación f viene garantizada por la propiedad (a4). El Teorema 3.12 nos proporciona una aplicación $g: M \rightarrow \mathfrak{S}_*$ de clase $\mathcal{A}(M)$ tal que $g\theta$ es una 1-forma exacta en M y la \mathfrak{S} -inmersión $G = (G_1, \dots, G_n): M \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(M)$ dada por

$$G(p) = F(x_0) + \int_{x_0}^p g\theta$$

verifica las siguientes propiedades:

- (c1) G aproxima a \widetilde{G} en la topología $\mathcal{C}^1(K)$.

(c2) $G - \tilde{G}$ tiene un cero de multiplicidad k en todos los puntos de Λ .

(c3) Si $j \in I_a$ entonces $|G_a(p)| > \rho$ para todo $p \in \gamma_{j-1} \cup \alpha_j \cup \gamma_j$, $a = 1, \dots, n$.

(c4) Si $j \in I_a$ entonces $|G_a(p)| > \tau$ para $p \in \{q_{j-1}, q_j\}$, $a = 1, \dots, n$.

La propiedad (c3) se sigue de (a4) y de (b2) mientras que (c4) se deduce de (b3), supuesto que la aproximación de f por g es suficientemente buena.

Para cada $j \in \mathbb{Z}_l$ denotamos por $\beta_j \subset \beta$ el subarco de β con extremos q_{j-1} y q_j que no contiene a q_i para ningún $i \in \mathbb{Z}_l \setminus \{j-1, j\}$. Es claro que

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}_l} \beta_j = \beta. \quad (3.32)$$

También denotamos por $D_j \subset \mathcal{A}$ el disco cerrado acotado por los arcos γ_{j-1} , α_j , γ_j y β_j ; véase la Figura 3.5. Se tiene que

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_l} D_j. \quad (3.33)$$

Llamamos $H_0 := G = (H_{0,1}, \dots, H_{0,n})$ e $I_0 := \emptyset$. Para demostrar el lema construiremos una sucesión de \mathfrak{S} -inmersiones

$$H_b = (H_{b,1}, \dots, H_{b,n}): M \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad b = 1, \dots, n,$$

de clase $\mathcal{A}^1(M)$ que cumplan para todo $b \in \{1, \dots, n\}$ las siguientes propiedades:

(d1_b) H_b aproxima a H_{b-1} en la topología \mathcal{C}^1 en $M \setminus (\bigcup_{j \in I_b} \mathring{D}_j)$.

(d2_b) $H_b - H_{b-1}$ tiene un cero de multiplicidad k en todos los puntos de Λ .

(d3_b) Si $j \in \bigcup_{i=1}^b I_i$ entonces $|H_b(p)|_\infty > \rho$ para todo $p \in D_j$.

(d4_b) Si $j \in \bigcup_{i=1}^b I_i$ entonces $|H_b(p)|_\infty > \tau$ para todo $p \in \beta_j$.

(d5_b) Si $j \in I_a$ entonces $|H_{b,a}(p)| > \rho$ para todo $p \in \gamma_{j-1} \cup \alpha_j \cup \gamma_j$, $a = 1, \dots, n$.

(d6_b) Si $j \in I_a$ entonces $|H_{b,a}(p)| > \tau$ para $p \in \{q_{j-1}, q_j\}$, $a = 1, \dots, n$.

Afirmamos que la \mathfrak{S} -inmersión $\tilde{F} := H_n: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ cumple la conclusión del lema. En efecto, \tilde{F} aproxima a F en la topología $\mathcal{C}^1(K)$ por las propiedades (b1), (c1) y (d1₁)–(d1_n), la condición (I) se deduce de (d2), (c2) y (b1), la condición (II) se sigue de (d3_n), (a3) y la ecuación (3.33). Finalmente, la

condición (III) es implicada por las propiedades (d4_n) y (a3) y la ecuación (3.32).

De este modo, para finalizar la demostración es suficiente construir una tal sucesión H_1, \dots, H_n cumpliendo las propiedades anteriores. Razonamos por inducción, para ello supongamos que ya hemos construido H_0, \dots, H_{b-1} para algún $b \in \{1, \dots, n\}$ con las propiedades requeridas y veamos cómo construir H_b . Notamos que se cumplen (d5₀)=(c3) y (d6₀)=(c4). Por continuidad de la inmersión H_{b-1} y las condiciones (d5_{b-1}) y (d6_{b-1}), para cada $j \in I_b$ podemos encontrar un disco cerrado $\Omega_j \subset D_j \setminus (\gamma_{j-1} \cup \alpha_j \cup \gamma_j)$ de forma que se tiene que:

- (i) $\Omega_j \cap \beta_j$ es un arco de Jordan conexo y compacto.
- (ii) $|H_{b-1,b}(p)| > \rho$ para todo $p \in \Upsilon_j := \overline{D_j} \setminus \overline{\Omega_j}$.
- (iii) $|H_{b-1,b}(p)| > \tau$ para todo $p \in \overline{\beta_j} \setminus \overline{\Omega_j}$.

A continuación, para cada $j \in I_b$ elegimos un arco embebido de Jordan $\lambda_j \subset \Upsilon_j \setminus (\gamma_{j-1} \cup \gamma_j)$ con un extremo en α_j , el otro en Ω_j y sin más puntos en $b\Upsilon_j$, véase la Figura 3.5. Además, elegimos cada arco λ_j para que el conjunto

$$S_b := \left(M \setminus \bigcup_{j \in I_b} \mathring{\Upsilon}_j \right) \cup \left(\bigcup_{j \in I_b} \lambda_j \right)$$

sea admisible. Se sigue que S_b es conexo y muy simple en el sentido de la Definición 3.9.

Denotamos por $h = (h_1, \dots, h_n) = dH_{b-1}/\theta$ y sea $\tilde{h} = (\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n): S_b \rightarrow \mathfrak{S}_*$ una aplicación de clase $\mathcal{A}(S_b)$ tal que:

- (iv) $\tilde{h} = h$ en $M \setminus (\bigcup_{j \in I_b} \mathring{D}_j)$.
- (v) $\tilde{h}_b = h_b$ en S_b .
- (vi) La \mathfrak{S} -inmersión generalizada $\tilde{H}: S_b \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada por

$$\tilde{H}(p) = H_{b-1}(x_0) + \int_{x_0}^p \tilde{h}\theta, \quad p \in S_b,$$

satisface $|\tilde{H}(p)|_\infty > \tau$ para todo $p \in \bigcup_{j \in I_b} \Omega_j$.

Para construir una aplicación \tilde{h} con estas propiedades elegimos, por ejemplo, $\tilde{h} = h$ en $M \setminus \bigcup_{j \in I_b} \mathring{\Upsilon}_j$ y valores adecuados en cada arco de $\bigcup_{j \in I_b} \lambda_j$. En

esta situación, aplicando el Lema 3.14 obtenemos una aplicación $\phi: M \rightarrow \mathfrak{S}_*$ de clase $\mathcal{A}(M)$ tal que la 1-forma $\phi\theta$ es exacta en M , recordemos que $\tilde{h}\theta = h\theta = dH_{b-1}$ en K y que K es un retracto fuerte de deformación de M , y tal que la aplicación $H_b: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida por

$$H_b(p) = H_{b-1}(x_0) + \int_{x_0}^p \phi\theta, \quad p \in M,$$

es una \mathfrak{S} -inmersión de clase $\mathcal{A}^1(M)$ que cumple las siguientes propiedades:

- (vii) H_b aproxima tanto como se desee a \tilde{H} en la topología \mathcal{C}^1 en $M \setminus (\bigcup_{j \in I_b} \mathring{D}_j)$.
- (viii) $H_{b,b} = H_{b-1,b}$ (téngase en cuenta (v)).
- (ix) $H_b - \tilde{H}$ tiene un cero de multiplicidad k en todos los puntos de Λ .

Puesto que se cumple

$$\tilde{H} = H_{b-1} \quad \text{en} \quad M \setminus \left(\bigcup_{j \in I_b} \mathring{D}_j \right) \supset \Lambda \cup \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}_l} \gamma_{j-1} \cup \alpha_j \cup \gamma_j \right),$$

se tiene que (d1_b)=(vii) y (d2_b)=(ix). Además, si la aproximación que aparece en (vii) es suficientemente buena, entonces las condiciones (d5_b) y (d6_b) se deducen, respectivamente, de (d5_{b-1}) y de (d6_{b-1}), recordemos que estas últimas están garantizadas incluso para $b = 1$.

Sean $j \in \bigcup_{i=1}^b I_i$ y $p \in D_j$. Si $j \notin I_b$ entonces las propiedades (d3_{b-1}) y (vii) aseguran que $|H_b(p)|_\infty > \rho$. Por otro lado, si $j \in I_b$ entonces las propiedades (ii) y (viii) implican que $|H_b(p)| \geq |H_{b,b}(p)| > \rho$ supuesto que $p \in \Upsilon_j$, mientras que (vi) y (vii) garantizan que $|H_b(p)| > \tau > \rho$ supuesto que $p \in \Omega_j$. Esto demuestra (d3_b).

Finalmente, elegimos $j \in \bigcup_{i=1}^b I_i$ y $p \in \beta_j$. Como hicimos anteriormente, si $j \notin I_b$ entonces (d4_{b-1}) y (vii) se traducen en que $|H_b(p)|_\infty > \tau$. Del mismo modo, si $j \in I_b$ entonces (iii) y (viii) aseguran que $|H_b(p)| \geq |H_{b,b}(p)| > \tau$ supuesto que $p \in \beta_j \setminus \Omega_j$, mientras que (vi) y (vii) implican que $|H_b(p)| > \tau$ supuesto que $p \in \beta_j \cap \Omega_j$. Esto demuestra (d4_b) y concluye con la demostración del lema. \square

3.4. Demostración del Teorema 3.2

Como ya hicimos en la demostración del Teorema 3.12, asumimos que $\Lambda \cap bK = \emptyset$ y que para cada $p \in \Lambda$ se tiene que $\Omega_p \subset \overset{\circ}{K}$ o $\Omega_p \cap K = \emptyset$.

Definimos $M_0 := K$ y tomamos $\{M_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión exhaustiva de M por dominios compactos Runge con borde diferenciable, de modo que se cumplan las siguientes condiciones:

- $M_0 \Subset M_1 \Subset \dots \Subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j = M$.
- $\chi(M_j \setminus \overset{\circ}{M}_{j-1}) \in \{-1, 0\}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.
- $bM_j \cap \Lambda = \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y, por tanto, salvo reducir los conjuntos Ω_p si fuera necesario, podemos asumir que o bien $\Omega_p \subset \overset{\circ}{M}_j$ o bien $\Omega_p \cap M_j = \emptyset$ para todo $p \in \Lambda$.

La existencia de una sucesión así se deduce del Lema 2.3. Se sigue que el conjunto $\Lambda_j := \Lambda \cap M_j = \Lambda \cap \overset{\circ}{M}_j$ es vacío o finito para cada $j \in \mathbb{Z}_+$. Asumimos, sin pérdida de generalidad, que $\Lambda_0 \neq \emptyset$ y $\Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$, lo que implica que Λ es infinito. Nótese que $\Lambda_{j-1} \subsetneq \Lambda_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Fijamos una sucesión $\{\epsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}} \searrow 0$, que especificaremos más adelante, denotamos por

$$F_0 := F: M_0 \rightarrow \mathbb{C}^n$$

y, usando la Proposición 3.11 y el Teorema 3.17, suponemos sin pérdida de generalidad que F_0 es no llana y que, si $F|_{\Lambda}$ es inyectiva, F_0 es además un embebimiento.

3.4.1. Demostración de la primera afirmación del teorema

Para demostrar la primera parte del teorema, en la que no perseguimos propiedades globales, vamos a construir una sucesión $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{G} -inmersiones no llanas $F_j: M_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(M_j)$ que cumplan:

- (i_j) $\|F_j - F_{j-1}\|_{1, M_{j-1}} < \epsilon_j$.
- (ii_j) $F_j - F$ tiene un cero de multiplicidad $k \in \mathbb{N}$ en todo punto $p \in \Lambda_j$.
- (iii_j) Si $F|_{\Lambda}$ es inyectiva entonces F_j es un embebimiento.

Razonamos por inducción. La etapa base de la misma está dada por la \mathfrak{S} -inmersión F_0 que, claramente, satisface las condiciones (ii₀) y (iii₀) mientras que la condición (i₀) es vacía. Para el paso inductivo suponemos que tenemos una \mathfrak{S} -inmersión $F_{j-1}: M_{j-1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(M_{j-1})$ cumpliendo (i_{j-1}), (ii_{j-1}) y (iii_{j-1}) para algún $j \in \mathbb{N}$ y construyamos una nueva \mathfrak{S} -inmersión $F_j: M_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ con las propiedades correspondientes. Distinguimos casos según la característica de Euler de $M_j \setminus \mathring{M}_{j-1}$.

Caso no crítico: Supuesto que $\chi(M_j \setminus \mathring{M}_{j-1}) = 0$.

En este caso se tiene que M_{j-1} es un retracto fuerte de deformación de M_j , luego, la Proposición 3.16 aplicada a los datos

$$S = M_{j-1} \cup \left(\bigcup_{p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}} \Omega_p \right), \quad S_0 = M_{j-1}, \quad \Lambda = \Lambda_j, \quad k,$$

y la \mathfrak{S} -inmersión generalizada definida según

$$S \ni p \mapsto \begin{cases} F_{j-1}(p) & \text{si } p \in M_{j-1} \\ F(p) & \text{si } p \in \bigcup_{p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}} \Omega_p, \end{cases}$$

proporciona una \mathfrak{S} -inmersión $F_j: M_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(M_j)$ que verifica las condiciones (i_j) y (ii_j). Finalmente, si $F|_{\Lambda}$ es inyectiva entonces por el Teorema 3.17 podemos asumir por posición general que F_j es un embebimiento, esto prueba la condición (iii_j) y finaliza la prueba en este primer supuesto.

Caso crítico: Supuesto que $\chi(M_j \setminus \mathring{M}_{j-1}) = -1$.

En este caso el cambio en la topología se realiza añadiendo a M_{j-1} un arco diferenciable α en $\mathring{M}_j \setminus \mathring{M}_{j-1}$ que interseque a M_{j-1} solo en sus extremos, de modo que $M_{j-1} \cup \alpha$ sea un retracto fuerte de deformación de M_j . Además, podemos elegir α de forma que $\alpha \cap \Lambda = \emptyset$ y tal que $S := M_{j-1} \cup \alpha$ sea un subconjunto admisible de M , que claramente será muy simple (véase la Definición 3.9).

El Lema 3.7 nos permite extender F_{j-1} a S como una \mathfrak{S} -inmersión generalizada. Además, por la Proposición 3.16 podemos aproximar F_{j-1} en la topología $\mathcal{C}^1(M_{j-1} \cup \alpha)$ por \mathfrak{S} -inmersiones no llanas en un entorno tubular compacto $M'_j \Subset M_j$ de $M_{j-1} \cup \alpha$ tal que la diferencia con F tenga un cero de multiplicidad k en todos los puntos de Λ_j . Puesto que $\chi(M_j \setminus \mathring{M}'_j) = 0$, esto reduce la prueba al caso no crítico y cierra la inducción.

Finalmente, si el número $\epsilon_j > 0$ es elegido suficientemente pequeño en cada paso de la inducción, las propiedades (i_j), (ii_j) y (iii_j) aseguran que la sucesión $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos de M hacia una \mathfrak{G} -inmersión

$$\tilde{F} := \lim_{j \rightarrow \infty} F_j: M \rightarrow \mathbb{C}^n,$$

que aproxima a F tanto como se desee en K , es inyectiva si $F|_{\Lambda}$ es inyectiva y tal que $\tilde{F} - F$ tiene un cero de multiplicidad k en todos los puntos de Λ .

3.4.2. Demostración de la afirmación (I)

Suponemos que se verifican las hipótesis en la afirmación (I) del enunciado del teorema y fijamos un punto $p_0 \in \overset{\circ}{K} \setminus \Lambda$. Construiremos de nuevo una sucesión de \mathfrak{G} -inmersiones $F_j: M_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(M_j)$, $j \in \mathbb{N}$, cumpliendo las condiciones anteriores (i_j)–(iii_j) y además la siguiente condición relativa a la completitud:

(iv_j) $\text{dist}_{F_j}(p_0, bM_j) > j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

En primer lugar, observamos que $F_0 = F$ también cumple (iv₀) puesto que es una inmersión y $p_0 \in \overset{\circ}{K}$. Para el paso inductivo supongamos que hemos construido F_{j-1} cumpliendo las propiedades (i_j)–(iv_j) para algún $j \in \mathbb{N}$ y veamos cómo construir $F_j: M_j \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Siguiendo la demostración de la Subsección 3.4.1 obtenemos una \mathfrak{G} -inmersión $F'_j: M_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ cumpliendo (i_j), (ii_j) y (iii_j). Sea $M'_j \subset \overset{\circ}{M}_j$ un dominio compacto con borde diferenciable que sea Runge y un retracto fuerte de deformación de M_j que contiene a $M_{j-1} \cup \Lambda_j$ en su interior relativo. Entonces el Lema 3.19 aplicado a los datos

$$M = M_j, \quad K = M'_j, \quad \Lambda = \Lambda_j, \quad k, \quad \tau = j \quad \text{y} \quad F = F'_j|_{M'_j}$$

proporciona una \mathfrak{G} -inmersión $F_j: M_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(M_j)$ cumpliendo las propiedades (ii_j), (iv_j) y, si la aproximación de F'_j por F_j en M'_j es suficientemente buena, también (i_j). Finalmente el Teorema 3.17 nos permite afirmar que F_j también verifica (iii_j). Esto concluye la inducción y demuestra la existencia de la sucesión $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ con las propiedades requeridas.

De nuevo, si elegimos el número $\epsilon_j > 0$ suficientemente pequeño en cada paso del proceso recursivo, entonces las propiedades (i_j)–(iii_j) garantizan que la sucesión $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos en

M hacia una \mathfrak{S} -inmersión

$$\tilde{F} := \lim_{j \rightarrow \infty} F_j: M \rightarrow \mathbb{C}^n$$

que aproxima a F uniformemente en K , es inyectiva supuesto que $F|_{\Lambda}$ lo sea y tal que $\tilde{F} - F$ tiene un cero de multiplicidad k en todos los puntos de Λ . La propiedad añadida (iv _{j}) implica que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{dist}_{\tilde{F}}(p_0, bM_j) = +\infty$$

siempre que hayamos elegido $\epsilon_j > 0$ suficientemente pequeño en cada paso. Esto implica que la inmersión \tilde{F} es completa y concluye la demostración de la afirmación (I) del teorema.

3.4.3. Demostración de la afirmación (II)

Suponemos ahora que se cumplen las hipótesis de la afirmación (II). Recordamos que $F|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una aplicación propia si, y solo si, $(F|_{\Lambda})^{-1}(C)$ es finito para todo subconjunto compacto $C \subset \mathbb{C}^n$, o equivalentemente, si el conjunto Λ es finito o para algún (y, por tanto, para cualquier) orden $\Lambda = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ de Λ , la sucesión

$$\{F(p_1), F(p_2), F(p_3), \dots\}$$

es divergente en \mathbb{C}^n . Como estamos suponiendo que Λ es infinito, entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(p) \neq 0 \quad \text{para todo } p \in \Lambda \setminus \Lambda_{j_0}. \quad (3.34)$$

En primer lugar construimos para cada $j \in \{0, \dots, j_0\}$ una \mathfrak{S} -inmersión $F_j: M_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(M_j)$ que cumpla las condiciones (i _{j})–(iii _{j}) anteriores; esto ya lo hicimos en la Subsec.3.4.1. A continuación, salvo una pequeña deformación de M_{j_0} si fuera necesario, asumimos sin pérdida de generalidad que F_{j_0} no se anula en ningún punto de bM_{j_0} y, por tanto, existe un número $\rho_{j_0} > 0$ tal que

$$|F_{j_0}(p)|_{\infty} > \rho_{j_0} > 0 \quad \text{para todo } p \in bM_{j_0}. \quad (3.35)$$

Denotamos por

$$\rho_j := \min\{|F(p)|_{\infty} : p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}\} \quad \text{para todo } j \geq j_0 + 1. \quad (3.36)$$

Recordamos que $\Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Las ecuaciones (3.34), (3.35) y (3.36) implican que $\rho_j > 0$ para todo $j \geq j_0$. Además, como $F|_\Lambda$ es una aplicación propia, tenemos que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \rho_j = +\infty. \quad (3.37)$$

En un segundo paso, vamos a construir una sucesión de \mathfrak{S} -inmersiones $F_j: M_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(M_j)$, para $j \geq j_0 + 1$, que cumpla las propiedades (i_j)–(iii_j) y además las siguientes relativas a la cualidad de ser propia:

$$(v_j.1) \quad |F_j(p)|_\infty > \frac{1}{2} \min\{\rho_{j-1}, \rho_j\} \text{ para todo } p \in M_j \setminus \mathring{M}_{j-1}.$$

$$(v_j.2) \quad |F_j(p)|_\infty > \rho_j \text{ para todo } p \in bM_j.$$

Razonamos por inducción. La base de la inducción en este caso viene dada por la \mathfrak{S} -inmersión F_{j_0} ya construida; recordemos que verifica (i_{j₀})–(iii_{j₀}) por construcción mientras que la propiedad (v_{j₀}.1) es vacía y la propiedad (v_{j₀}.2) se deduce de la ecuación (3.35). Para el paso inductivo, supongamos que tenemos una \mathfrak{S} -inmersión $F_{j-1}: M_{j-1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ para algún $j \geq j_0 + 1$ verificando las propiedades (i_{j-1})–(iii_{j-1}), (v_{j-1}.1) y (v_{j-1}.2) y veamos cómo construir una \mathfrak{S} -inmersión $F_j: M_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(M_j)$ con las propiedades requeridas.

Por la ecuación (3.36) y salvo reducir los conjuntos Ω_p si fuera necesario, podemos asumir que

$$|F(q)|_\infty > \frac{\rho_j}{2} \text{ para todo punto } q \in \Omega^j := \bigcup_{p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}} \Omega_p \neq \emptyset. \quad (3.38)$$

A continuación, elegimos un arco de Jordan C_p para cada punto $p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}$ con punto inicial en bM_{j-1} , punto final en $b\Omega_p$ y en otro caso fuera de $M_{j-1} \cup \Omega^j$, de forma que el conjunto

$$S' := M_{j-1} \cup \Omega^j \cup \left(\bigcup_{p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}} C_p \right)$$

sea un subconjunto admisible y muy simple de M_j ; en particular tiene que verificarse que $C_p \cap C_q = \emptyset$ si $p \neq q$. Si estamos en el caso en que $\chi(M_j \setminus \mathring{M}_{j-1}) = -1$, entonces añadimos otro arco de Jordan $\alpha \subset \mathring{M}_j$, con ambos extremos en bM_{j-1} y los demás puntos fuera de S' , de forma que $S' \cup \alpha$ sea admisible y un retracto fuerte de deformación de M_j , véase la Nota 2.4.

Para el caso en que $\chi(M_j \setminus \mathring{M}_{j-1}) = 0$, tenemos que $\alpha := \emptyset$. En cualquier caso, el conjunto

$$S := S' \cup \alpha \subset \mathring{M}_j$$

es admisible en M y es un retracto fuerte de deformación de M_j . Denotamos por

$$C := \alpha \cup \left(\bigcup_{p \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}} C_p \right),$$

y observamos que $S = (M_{j-1} \cup \Omega^j) \cup C$. Para continuar, consideramos una \mathfrak{S} -inmersión generalizada $\tilde{F}_j: S \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(S)$ que cumpla las siguientes propiedades:

$$(A.1) \quad \tilde{F}_j|_{M_{j-1}} = F_{j-1}.$$

$$(A.2) \quad \tilde{F}_j|_{\Omega^j} = F|_{\Omega^j}.$$

$$(A.3) \quad |\tilde{F}_j(q)|_\infty > \frac{1}{2} \min\{\rho_{j-1}, \rho_j\} \text{ para todo } q \in C.$$

Para asegurar (A.3) utilizamos el Lema 3.7; ténganse en cuenta la propiedad (v_{j-1}.2) y las ecuaciones (3.35) y (3.38). De este modo, (v_{j-1}.2), (3.38) y (A.3) implican que:

$$(A.4) \quad |\tilde{F}_j(p)|_\infty > \frac{1}{2} \min\{\rho_{j-1}, \rho_j\} > 0 \text{ para } p \in S \setminus \mathring{M}_{j-1} = (bM_{j-1}) \cup \Omega^j \cup C.$$

Como $S \subset \mathring{M}_j$ es un conjunto Runge y un retracto fuerte de deformación de M_j podemos aplicar la Proposición 3.16 a los datos

$$M = M_j, \quad S, \quad \Lambda = \Lambda_j, \quad k \quad \text{y} \quad F = \tilde{F}_j$$

para obtener una \mathfrak{S} -inmersión no llana $\hat{F}_j: M_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(M_j)$ con las siguientes propiedades:

$$(B.1) \quad \hat{F}_j \text{ es tan próxima como se desee a } \tilde{F}_j \text{ en la topología } \mathcal{C}^1(S).$$

$$(B.2) \quad \hat{F}_j - \tilde{F}_j \text{ tiene un cero de multiplicidad } k \in \mathbb{N} \text{ en todo punto } p \in \Lambda_j.$$

Además, si la aproximación de (B.1) es suficientemente buena, entonces, en vista de (A.4), existe un entorno compacto N de S en \mathring{M}_j , que puede verse como un dominio con borde diferenciable en M_j , que es un retracto fuerte de deformación de M_j y en el que se verifica que

$$(B.3) \quad |\hat{F}_j(p)|_\infty > \frac{1}{2} \min\{\rho_{j-1}, \rho_j\} > 0 \text{ para todo } p \in N \setminus \mathring{M}_{j-1}.$$

Recordamos que $\Lambda \cap (M_j \setminus \mathring{N}) = \emptyset$ y, por tanto, podemos aplicar el Lema 3.20 a los datos

$$M = M_j, \quad K = N, \quad \Lambda = \Lambda_j, \quad F = \widehat{F}_j, \quad \rho = \frac{1}{2} \min\{\rho_{j-1}, \rho_j\}, \quad \tau = \rho_j \quad \text{y} \quad k$$

para obtener una \mathfrak{S} -inmersión $F_j: M_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ de clase $\mathcal{A}^1(M_j)$ tal que:

(C.1) F_j es tan próxima como se desee a \widehat{F}_j en la topología $\mathcal{C}^1(N)$.

(C.2) $F_j - \widehat{F}_j$ tiene un cero de multiplicidad k en todo punto de $\Lambda_j \subset \mathring{N}$.

(C.3) $|F_j(p)|_\infty > \frac{1}{2} \min\{\rho_{j-1}, \rho_j\}$ para todo $p \in M_j \setminus \mathring{N}$.

(C.4) $|F_j(p)|_\infty > \rho_j$ para todo $p \in bM_j$.

Afirmamos que, si las aproximaciones que aparecen descritas en (B.1) y (C.1) son lo suficientemente buenas, entonces la \mathfrak{S} -inmersión $F_j: M_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ verifica las propiedades (i_j)–(iii_j), (v_j.1) y (v_j.2). En efecto, la propiedad (A.1) implica (i_j); las propiedades (A.2), (B.2) y (C.2) garantizan que se cumple (ii_j); la condición (v_j.1) se deduce de (A.4), (B.3) y (C.3); y, por último, la condición (v_j.2) está asegurada por (C.4). Para finalizar, si además $F|_\Lambda$ es inyectiva, entonces el Teorema 3.17 nos permite elegir F_j siendo además un embebimiento. Esto cierra la inducción en el proceso recursivo para la construcción de la sucesión $\{F_j\}_{j \geq j_0+1}$.

Como anteriormente, si elegimos cada número $\epsilon_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, suficientemente pequeño en cada paso del proceso, las propiedades (i_j)–(iii_j) se traducen otra vez en que la sucesión $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos de M hacia una \mathfrak{S} -inmersión $\widetilde{F} := \lim_{j \rightarrow \infty} F_j: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ que es tan próxima a F como se desee uniformemente en K , es inyectiva siempre y cuando $F|_\Lambda$ lo sea y cumple que $\widetilde{F} - F$ tiene un cero de multiplicidad k en todos los puntos de Λ . Pero además, por la propiedad añadida (v_j.1) y la ecuación (3.37) se tiene que \widetilde{F} es una inmersión propia. Para demostrar esta afirmación, basta con tomar un número $R > 0$ y una sucesión $\{q_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ que diverja en M y comprobar que existe un número entero $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\widetilde{F}(q_m)|_\infty > R$ para todo $m \geq m_0$. En efecto, definimos

$$\varepsilon := \sum_{j \geq 1} \epsilon_j < +\infty$$

y observamos que por las propiedades (i_j), $j \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\|\widetilde{F} - F_j\|_{1, M_j} < \varepsilon \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.39)$$

Por otro lado, en vista de la ecuación (3.37) existe un entero $j_1 \geq j_0 + 1$ tal que

$$\rho_{j-1} > 2(R + \varepsilon) \quad \text{para todo } j \geq j_1. \quad (3.40)$$

Ahora bien, como la sucesión $\{q_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ diverge en M y $\{M_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión exhaustiva de M , tiene que existir un entero $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$q_m \in M \setminus M_{j_1} \quad \text{para todo } m \geq m_0.$$

Así, para todo $m \geq m_0$ existe un entero $j_m \geq j_1$ tal que $q_m \in M_{j_m} \setminus \overset{\circ}{M}_{j_m-1}$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} |\tilde{F}(q_m)|_\infty &\geq |F_{j_m}(q_m)|_\infty - |F_{j_m}(q_m) - \tilde{F}(q_m)|_\infty \\ &\stackrel{(v_{j_m \cdot 1}), (3.39)}{>} \frac{1}{2} \min\{\rho_{j_m-1}, \rho_{j_m}\} - \varepsilon \stackrel{(3.40)}{>} R. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\tilde{F}: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una inmersión propia y concluye la demostración del Teorema 3.2.

3.5. Demostración del Teorema 3.1

En esta sección explicaremos brevemente cómo los razonamientos que hemos desarrollado a lo largo de las secciones 3.3 y 3.4 se adaptan para demostrar el Teorema 3.1. Una vez demostrado, lo utilizaremos para demostrar el Teorema 1.2.

En primer lugar recordemos que, como vimos en la Subsec. 2.3.2, la cuádrica nula $\mathfrak{A}_* \subset \mathbb{C}^n$ que dirige las superficies mínimas en \mathbb{R}^n es una variedad de Oka y cumple las hipótesis (I) y (II) que aparecen en el Teorema 3.2 para todo entero $n \geq 3$. Por tanto, el Teorema 3.12 y el Lema 3.14 se aplican para $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}$.

El primer paso para demostrar el Teorema 3.1 consiste en probar un resultado análogo a la Proposición 3.16 para inmersiones mínimas conformes generalizadas en el sentido de la Definición 2.43 que aparece en la Subsec. 2.4.3. Concretamente, necesitamos demostrar que si M , S y Λ vienen dados como en la Proposición 3.16, entonces, para todo entero $k \in \mathbb{Z}_+$, toda inmersión mínima conforme generalizada $X: S \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, puede ser aproximada en la topología $\mathcal{C}^1(S)$ por inmersiones mínimas conformes $\tilde{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1(M)$ tales que \tilde{X} y X tienen un punto de contacto

de orden k en todo punto de Λ y el flujo $\text{Flux}_{\tilde{X}}$ de \tilde{X} es igual al de X , Flux_X , para toda curva del primer grupo de homología $\mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z})$.

Para hacer esto, razonamos como en la prueba de la Proposición 3.16 pero trabajando con la aplicación $f := \partial X/\theta: S \rightarrow \mathfrak{A}_*$. Puesto que $f\theta$ no tiene por qué ser exacta, solo su parte real lo es necesariamente, hemos de sustituir las condiciones (a) y (b) en la demostración de la proposición por las siguientes:

- $(\tilde{f} - f)\theta$ es exacta en S .
- $X(p_0) + 2 \int_{C_p} \Re(\tilde{f}\theta) = X(p_0) + 2 \int_{C_p} \Re(f\theta) = X(p)$ para todo $p \in \Lambda$.

Es claro entonces que la inmersión mínima conforme $\tilde{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1(M)$ definida por

$$\tilde{X}(p) := X(p) + 2 \int_{C_p} \Re(\tilde{f}\theta), \quad p \in M,$$

está bien definida y cumple las propiedades requeridas.

En un segundo paso y siguiendo el mismo espíritu, necesitamos demostrar un resultado de posición general, un lema para la completitud y un lema para la cualidad de ser propia para inmersiones mínimas conformes de clase \mathcal{C}^1 en una superficie de Riemann compacta bordeada, es decir, resultados análogos al Teorema 3.17, al Lema 3.19 y al Lema 3.20, respectivamente. En la situación actual, aseguraremos que la posición general para superficies mínimas conformes es embebida en \mathbb{R}^n siempre y cuando la dimensión n del espacio Euclideo sea al menos cinco. Para adaptar el razonamiento de la prueba del Teorema 3.17 al ambiente de superficies mínimas combinamos las ideas que aparecen en la demostración de (17, Theorem 1.1)¹ con las nuevas ideas que aparecen en la Subsec. 3.3.1 que son las que permitirán asegurar la condición de interpolación. Del mismo modo, los análogos al Lema 3.19 y al Lema 3.20 para inmersiones mínimas conformes se pueden demostrar adaptando las pruebas de los mismos de las subsecciones 3.3.2 y 3.3.3 respectivamente; las modificaciones requeridas en este caso siguen la filosofía de las realizadas en el párrafo anterior: en cada paso de la demostración hay que asegurar que la parte real de

¹El enunciado del resultado puede encontrarse en los preliminares de esta tesis, concretamente es el Teorema 2.45

las 1-formas es exacta y que los periodos de la parte imaginaria coinciden con los de la aplicación flujo de la inmersión mínima conforme inicial. Obviamente, en este caso es necesario que sea la parte real la que asegure el incremento del diámetro intrínseco de la superficie para asegurar la completitud (es decir, la condición (II) del Lema 3.19) y el incremento de la norma $|\cdot|_\infty$ para garantizar el ser propia (es decir, las condiciones (II) y (III) del Lema 3.20). Para conseguir esto sustituimos la condición (c) en la demostración del Lema 3.19, relativa a la cota extrínseca, por la siguiente:

- $|2 \int_\alpha \Re(h\theta)| > \tau$ para todos los arcos $\alpha \subset S$ con punto inicial p_0 y punto final contenido en L .

Para esta última, la adaptación se sigue directamente puesto que todas las cotas son de la misma naturaleza, es decir, extrínseca.

Finalmente, una vez probados los resultados análogos a la Proposición 3.16, el Teorema 3.17, el Lema 3.19 y el Lema 3.20 para inmersiones mínimas conformes en \mathbb{R}^n , la demostración del Teorema 3.1 consiste en adaptar los razonamientos, paso a paso y salvo pequeñas modificaciones triviales similares a las ya comentadas, que aparecen en la demostración del Teorema 3.2 en la Sección 3.4. Quizás merece la pena mencionar que a la hora de lidiar con el caso no crítico en el paso recursivo (véase la Subsec. 3.4.1) tenemos ahora que extender una inmersión mínima conforme de clase $\mathcal{C}^1(M_{j-1})$ a una inmersión mínima conforme generalizada definida en el conjunto admisible $S = M_{j-1} \cup \alpha \subset \mathring{M}_j$ cuya aplicación de flujo sea \mathfrak{p} para toda curva cerrada en S , (aquí $\mathfrak{p}: \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ denota el homomorfismo de grupos dado en el enunciado del Teorema 3.1 mientras que M_{j-1} , α y M_j son aquellos que aparecen en la Subsec. 3.4.1). Esto puede ser fácilmente logrado como se hace en la demostración de (17, Theorem 1.2). Así concluimos las indicaciones sobre la demostración del Teorema 3.1 y damos con esto el teorema por demostrado, ya que es posible completar los detalles de la prueba sin dificultad.

Una vez presentada la demostración del Teorema 3.1 veamos como deducir el Teorema 1.2 a partir del mismo. Comenzamos con algunos comentarios previos. Sea M una superficie de Riemann abierta y sea $X = (X_1, \dots, X_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión mínima conforme. Entonces, ∂X determina la aplicación holomorfa de Kodaira

$$G_X: M \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}, \quad M \ni p \mapsto G_X(p) = [\partial X_1(p): \dots : \partial X_n(p)],$$

que toma valores en la cuádrica compleja

$$Q_{n-2} = \{[z_1: \cdots: z_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} : z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$$

del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ y es conocida como la *aplicación de Gauss generalizada de X* . Recíprocamente, toda aplicación holomorfa $M \rightarrow Q_{n-2} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ es la aplicación de Gauss generalizada de una inmersión mínima conforme $M \rightarrow \mathbb{R}^n$, véase Alarcón, Forstnerič y López (15). El estudio de la aplicación de Gauss generalizada es un tema clásico en la literatura, referimos al estudio de Hoffman y Osserman (56) y, entre muchos otros, los artículos (48, 84, 80).

Concluimos este capítulo mostrando cómo el Teorema 3.1 puede ser utilizado para deducir la siguiente extensión del Teorema 1.2 enunciado en la introducción.

Corolario 3.21. *Sea M una superficie de Riemann abierta y sea $\Lambda \subset M$ un subconjunto discreto y cerrado. Para un entero $n \geq 3$, sean $\mathfrak{J}: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $G: \Lambda \rightarrow Q_{n-2} = \{[z_1: \cdots: z_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} : z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ dos aplicaciones. Entonces existe una inmersión mínima conforme $\tilde{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ cumpliendo que $\tilde{X}|_\Lambda = \mathfrak{J}$ y cuya aplicación de Gauss generalizada $G_{\tilde{X}}: M \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ coincide con G en Λ .*

Demostración. Para cada $p \in \Lambda$ tomamos Ω_p un entorno compacto simplemente conexo de p en M de modo que $\Omega_p \cap \Omega_q = \emptyset$ para cualesquiera $p \neq q \in \Lambda$. Denotamos por $\Omega := \bigcup_{p \in \Lambda} \Omega_p$ y sea $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ cualquier inmersión mínima conforme de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$ tal que $Y|_\Lambda = \mathfrak{J}$ y cuya aplicación de Gauss generalizada sea $G_Y|_\Lambda = G$. (Tal inmersión siempre existe, por ejemplo, basta elegir $Y|_{\Omega_p}$ siendo un disco llano con el correspondiente normal para cada $p \in \Lambda$). Consideramos también un dominio compacto simplemente conexo $K \subset M \setminus \Lambda$ que suponemos cumple, salvo reducir los entornos Ω_p si fuese necesario, que $K \subset M \setminus \Omega$. Finalmente, extendemos Y a una inmersión mínima conforme $Y: K \cup \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1(K \cup \Omega)$.

Aplicando el Teorema 3.1 a los objetos que acabamos de definir, cualquier homomorfismo de grupos $\mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ y el entero $k = 1$ obtenemos una inmersión mínima conforme $\tilde{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ que tiene un punto de contacto de orden 1 con Y en todos los puntos de Λ . De este modo,

$$\tilde{X}|_\Lambda = Y|_\Lambda = \mathfrak{J}$$

y la aplicación de Gauss generalizada verifica que

$$G_{\tilde{X}}|_{\Lambda} = [\partial\tilde{X}]|_{\Lambda} = [\partial Y]|_{\Lambda} = G_Y|_{\Lambda} = G.$$

Esto demuestra que \tilde{X} es una inmersión mínima conforme con las propiedades que se requieren en el enunciado del corolario. \square

Capítulo 4

Interpolación por Superficies Mínimas con Curvatura Total Finita

La Aproximación Polinómica es un tema fundamental de estudio en el Análisis Complejo, conectado fuertemente y de forma natural con la Interpolación Polinómica. Recordemos que el teorema clásico de Runge afirma que toda función holomorfa f en un entorno de un compacto $K \subset \mathbb{C}$ puede ser aproximada uniformemente en K por funciones racionales $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (véase la Sec. 2.2) con polos en las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus K$. Además las funciones racionales aproximantes pueden elegirse preservando los valores de f en los puntos de un subconjunto finito $\Lambda \subset K$ (véase Walsh (86)). Si $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo la aproximación puede realizarse por polinomios.

Behnke y Stein extendieron el teorema de Runge al ambiente más general de las funciones meromorfas definidas sobre superficies de Riemann compactas, véase (26). Este resultado de aproximación fue generalizado con posterioridad, añadiéndole interpolación de orden finito sobre subconjuntos finitos. Así Royden (83) (véase el Teorema 2.18) demostró que si Σ , E y Λ son como en el Teorema 1.4, entonces dados un entero $k \geq 1$ y un subconjunto compacto $K \subset \Sigma \setminus E$ tal que $\Lambda \subset K$ y E interseca todas las componentes conexas de $\Sigma \setminus K$, se tiene que toda función holomorfa f en un entorno de K puede ser aproximada, uniformemente en K , por funciones meromorfas F en Σ y holomorfas en $\Sigma \setminus E$, tales que la función holomorfa $F - f: K \rightarrow \mathbb{C}$ tiene un cero de orden al menos k en todos los puntos de Λ .

En este capítulo deduciremos el Teorema 1.4 enunciado en la Introducción como consecuencia del siguiente resultado más general, que proporciona aproximación uniforme sobre compactos y control del flujo además de interpolación de orden finito. Este resultado puede ser visto como un análogo al Teorema de Royden mencionado anteriormente para inmersiones mínimas conformes con curvatura total finita en \mathbb{R}^3 .

Teorema 4.1. *Sean Σ una superficie de Riemann compacta sin borde, $E \subset \Sigma$ un subconjunto finito no vacío, $K \subset \Sigma \setminus E$ un subconjunto compacto tal que toda componente conexa de $\Sigma \setminus K$ contiene puntos de E y $\Lambda \subset K$ un subconjunto finito. Sean $X : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión mínima conforme y $\mathfrak{p} : \mathcal{H}_1(\Sigma \setminus E; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ un homomorfismo de grupos tal que $\mathfrak{p}(\gamma) = \text{Flux}_X(\gamma)$ para toda curva cerrada $\gamma \subset K$. Para todo entero $k \geq 0$ y para cualquier $\epsilon > 0$, existe una inmersión mínima conforme completa $\tilde{X} : \Sigma \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^3$ cumpliendo las siguientes propiedades:*

- (i) \tilde{X} tiene curvatura total finita.
- (ii) $|\tilde{X}(\zeta) - X(\zeta)| < \epsilon$ para todo $\zeta \in K$.
- (iii) \tilde{X} y X tienen un punto de contacto de orden k en todo punto de Λ , esto es, $\tilde{X} = X$ en todo Λ y, si $k \geq 1$, $\partial\tilde{X} - \partial X$ tiene un cero de multiplicidad al menos $k - 1$ en todos los puntos de Λ .
- (iv) $\text{Flux}_{\tilde{X}}(\gamma) = \mathfrak{p}(\gamma)$ para toda curva cerrada $\gamma \subset \Sigma \setminus E$.

En el caso $\Lambda = \emptyset$, es decir, sin tener en cuenta las propiedades de interpolación, el resultado anterior fue demostrado por López en (69). La única nueva propiedad del Teorema 4.1 es la condición (i); excepto por ella, el resultado coincide con el Teorema 3.1 ya demostrado en el Capítulo 3.

Los resultados de este capítulo pueden encontrarse en (5):

A. Alarcón; I. Castro-Infantes and F. J. López, Interpolation and optimal hitting for complete minimal surfaces with finite total curvature. *Preprint arXiv1712.04727*.

Organización del capítulo

El capítulo se centra en demostrar el Teorema 4.1. En la Sección 4.1 demostramos algunos resultados previos, entre ellos el Lema 4.4 relativo a la

existencia de sprays de 1-formas espinoriales holomorfas. Estos resultados agilizarán la escritura de la demostración del Teorema 4.1, que aparecerá en la Sección 4.2.

4.1. Sprays de 1-formas espinoriales

Como en el Capítulo 3, la construcción de sprays de 1-formas requiere de una 1-forma holomorfa destacada sobre la superficie de Riemann que facilite el planteamiento analítico del problema. En la Sección 2.5 comentamos que una superficie con curvatura total finita es de tipo conforme finito, es decir, conforme a una superficie de Riemann compacta sin borde menos un número finito de puntos. El Teorema 2.9 establecía la existencia 1-formas holomorfas sin ceros sobre superficies de Riemann abiertas, pero no proporcionaba información sobre su comportamiento asintótico. El siguiente lema ayuda a solucionar este problema en el contexto de las superficies de Riemann de tipo conforme finito.

Lema 4.2. *Sean Σ una superficie de Riemann compacta sin borde, $E \subset \Sigma$ un subconjunto finito no vacío, K un subconjunto compacto Runge en $\Sigma \setminus E$ y $\Lambda \subset K$ un subconjunto finito. Sea $X: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión mínima conforme y denotemos por (η_1, η_2) la representación espinorial asociada a X . Existe una 1-forma meromorfa θ_0 en Σ cumpliendo los siguientes requisitos:*

- a) θ_0 es una 1-forma espinorial holomorfa en $\Sigma \setminus E$.
- b) θ_0 no se anula en ningún punto de K .
- c) θ_0 es espinorialmente equivalente a η_1 , y por tanto a η_2 , en K .

Demostración. Del Lema 2.11 es fácil deducir que existe una 1-forma meromorfa ω en Σ verificando a) y c). Si ω no verifica b) entonces fijamos $q_0 \in E$, escribimos el divisor $(\omega|_{\Sigma \setminus E}) = D_0^2$ y tomamos un disco abierto $W \subset \Sigma \setminus (K \cup E)$. Por (69, Claim 4.1), existe una función meromorfa $h_1: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $(h_1) = D_1 D_0^{-1} q_0^{-a}$ para algún divisor entero $D_1 \in \mathcal{D}\text{iv}(W)$ y para algún $a \in \mathbb{Z}$. La 1-forma $\theta_0 := h_1^2 \omega$ resuelve el lema (obsérvese que $(\theta_0) = D_1^2 D_E$, donde $D_E \in \mathcal{D}\text{iv}(E)$). \square

Fijamos para lo que sigue θ_0 como en el Lema 4.2.

Para la comprensión de la Nota siguiente, téngase en cuenta que todo compacto Runge en una superficie abierta de topología finita es parte de un compacto Runge conexo que es un retracts fuerte de deformación de la misma.

Nota 4.3. Si tomamos Σ, E, K, Λ y $X: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ como en el Teorema 4.1, el Teorema 3.1 y la Proposición 3.11 nos permiten sin pérdida de generalidad suponer por un lado que K es conexo y es un retracts fuerte de deformación de $\Sigma \setminus E$, y por otro que X es una inmersión mínima conforme no llana (véase la Definición 2.7) con flujo $\mathfrak{p}: \mathcal{H}_1(\Sigma \setminus E; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ globalmente definido sobre $\mathcal{H}_1(\Sigma \setminus E; \mathbb{Z})$. Llamamos $u_j \in \mathcal{O}(K)$ a la función verificando

$$u_j^2 = \frac{\eta_j}{\theta_0}, \quad j = 1, 2. \quad (4.1)$$

donde (η_1, η_2) es la representación espinorial asociada a la inmersión mínima conforme X . Como X es no llana (gracias a la Proposición 3.11), $u_j: K \rightarrow \mathbb{C}$ no es idénticamente cero y su divisor en K satisface

$$(u_j^2) = (\eta_j), \quad j = 1, 2. \quad (4.2)$$

Fijamos $p_0 \in \overset{\circ}{K} \setminus \Lambda$ tal que $u_j(p_0) \neq 0$ para $j = 1, 2$, y escribimos $\Lambda = \{p_1, \dots, p_m\}$. Para $l \geq m$, consideramos curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ contenidas en K (tales curvas siempre existen ya que K es un retracts fuerte de deformación de $\Sigma \setminus E$) cumpliendo:

- u_1 y u_2 no se anulan en los puntos de γ_j para todo $j = 1, \dots, l$.
- γ_j es un arco de Jordan uniendo p_0 con p_j para $j = 1, \dots, m$.
- $\{\gamma_{m+1}, \dots, \gamma_l\}$ son curvas cerradas en K determinando una base de $\mathcal{H}_1(K; \mathbb{Z})$, y por tanto de $\mathcal{H}_1(\Sigma \setminus E; \mathbb{Z})$.
- $\gamma_i \cap \gamma_j = \{p_0\}$ para todo $i \neq j \in \{1, \dots, l\}$.

En este caso, $C := \bigcup_{j=1}^l \gamma_j \subset K$ es un compacto Runge en $\Sigma \setminus E$ que es un retracts fuerte de deformación de $\Sigma \setminus E$.

En lo que sigue suponemos que estamos en las condiciones, y con la notación, de la Nota 4.3.

Definimos

$$\text{Spin}(K) := \{(f_1, f_2) \in \mathcal{O}(K)^2 : (|f_1| + |f_2|)(p) \neq 0, \forall p \in K\} \quad (4.3)$$

y la aplicación continua $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_l) : \text{Spin}(K) \rightarrow \mathbb{C}^{3l}$ dada por

$$\mathcal{P}_j(f_1, f_2) = \int_{\gamma_j} (\Phi(f_1, f_2) - \Phi(u_1, u_2)) \in \mathbb{C}^3 \quad \text{para todo } j = 1, \dots, l \quad (4.4)$$

donde $\Phi(\cdot, \cdot)$ está formalmente definido según

$$\Phi(f_1, f_2) := \left(\frac{1}{2}(f_1^2 - f_2^2), \frac{i}{2}(f_1^2 + f_2^2), f_1 f_2 \right) \theta_0. \quad (4.5)$$

Es importante resaltar que $\Phi(u_1, u_2) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ son los datos de Weierstrass de X . Ahora podemos enunciar nuestro resultado de existencia de sprays de 1-formas espinoriales holomorfas.

Lema 4.4. *Bajo las hipótesis del Teorema 4.1 para Σ, E, Λ, K y $X : K \rightarrow \mathbb{R}^3$, y en el marco de la Nota 4.3 para las funciones u_j definidas en (4.1), si $k \in \mathbb{N}$ es un número entero entonces existen funciones $h_1^i, \dots, h_l^i \in \mathcal{O}(K)$, $i = 1, 2, 3$, con un cero de multiplicidad $2k \in \mathbb{N}$ en cada punto de Λ y verificando los siguientes requisitos:*

- La aplicación holomorfa $\psi : \mathbb{C}^{3l} \rightarrow \mathcal{O}(K)^2$ definida por

$$\psi(\zeta) = \left(\left(1 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^l \zeta_j^i h_j^i\right) u_1, \left(1 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^l \zeta_j^i h_j^i\right) u_2 \right), \quad (4.6)$$

donde $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) \in (\mathbb{C}^3)^l$ y $\zeta^i = (\zeta_1^i, \dots, \zeta_l^i) \in \mathbb{C}^l$, toma valores en $\text{Spin}(K)$.

- ψ es un spray dominante de periodos con valor inicial (u_1, u_2) ; es decir, $\psi(0) = (u_1, u_2)$ y la aplicación

$$\mathcal{P} \circ \psi : \mathbb{C}^{3l} \rightarrow \mathbb{C}^{3l}$$

es una sumersión en $\zeta = 0$, véase la ecuación (4.4). En particular, existe una bola euclídea $V_0 \subset \mathbb{C}^{3l}$ centrada en el origen tal que $(\mathcal{P} \circ \psi)(V_0) \subset \mathbb{C}^{3l}$ es un dominio y $\mathcal{P} \circ \psi : V_0 \rightarrow (\mathcal{P} \circ \psi)(V_0)$ es una aplicación holomorfa biyectiva.

Demostración. Puesto que X es una inmersión conforme no llana podemos elegir para cada $j = 1, \dots, l$ tres puntos distintos $p_j^i \in \gamma_j$, $i = 1, 2, 3$, diferentes de los extremos, tales que los vectores

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2), \frac{i}{2}(u_1^2 + u_2^2), u_1 u_2 \right) (p_j^i) \right\}_{i=1,2,3} \quad (4.7)$$

son una base de \mathbb{C}^3 . A continuación, para cada $i = 1, 2, 3$, consideramos una función continua $h_j^i: C \rightarrow \mathbb{C}$ tal que h_j^i se anule en $C \setminus \gamma_j$ cuyos valores en γ_j serán especificados después. Aunque las funciones h_j^i solo las hemos definido por el momento sobre C , la aplicación $\mathcal{P} \circ \psi$ tiene perfecto sentido de forma natural, véase la ecuación (4.4).

La diferencial de $\mathcal{P} \circ \psi = (\mathcal{P}_1 \circ \psi, \dots, \mathcal{P}_l \circ \psi)$ respecto de ζ_j^i viene dada, para cada $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, \dots, l$, por la expresión

$$\frac{\partial \mathcal{P}_m \circ \psi}{\partial \zeta_j^i} \Big|_{\zeta=0} (\zeta) = \begin{cases} (0, 0, 0) & \text{si } j \neq m \\ \int_{\gamma_j} h_j^i(u_1^2 - 2u_2^2, i(u_1^2 + 2u_2^2), 3u_1 u_2) \theta_0 & \text{si } j = m \end{cases}$$

para cada $m = 1, \dots, l$.

Afirmamos que para cada $j = 1, \dots, l$, podemos elegir las funciones h_j^i de forma que los vectores $\frac{\partial \mathcal{P}_j \circ \psi}{\partial \zeta_j^i} \Big|_{\zeta=0}$, para $i = 1, 2, 3$, generen \mathbb{C}^3 , y por lo tanto la diferencial de ψ en $\zeta = 0$ es sobreyectiva. En efecto, parametrizamos cada curva por $\gamma_j: [0, 1] \rightarrow \gamma_j \subset K$ (donde identificamos la imagen $\gamma_j([0, 1]) \equiv \gamma_j$) y llamamos $t_j^i \in (0, 1)$ al punto que cumple $\gamma_j(t_j^i) = p_j^i$ para $i = 1, 2, 3$. Tomamos un número positivo $\tau > 0$ suficientemente pequeño para que

$$[t_j^i - \tau, t_j^i + \tau] \subset [0, 1] \quad \text{y} \quad [t_j^{i_1} - \tau, t_j^{i_1} + \tau] \cap [t_j^{i_2} - \tau, t_j^{i_2} + \tau] = \emptyset$$

para cada $i, i_1 \neq i_2 \in \{1, 2, 3\}$ y definimos la función h_j^i en γ_j de forma que

$$\int_0^1 h_j^i(t) dt = \int_{t_j^i - \tau}^{t_j^i + \tau} h_j^i(t) dt = 1.$$

Si $\tau > 0$ es suficientemente pequeño la integral

$$\int_{\gamma_j} h_j^i(u_1^2 - 2u_2^2, i(u_1^2 + 2u_2^2), 3u_1 u_2) \theta_0$$

toma aproximadamente el valor

$$\left((u_1^2 - 2u_2^2), i(u_1^2 + 2u_2^2), 3u_1u_2 \right) (\gamma_j(t_j^i)) \theta_0(\gamma_j(t_j^i), \dot{\gamma}_j(t_j^i)).$$

Como θ_0 no se anula en ningún punto de $C \subset K$ y los vectores de la ecuación (4.7) son una base de \mathbb{C}^3 , inferimos que los vectores

$$\left\{ (u_1^2 - 2u_2^2, i(u_1^2 + 2u_2^2), 3u_1u_2) (p_j^i) \right\}_{i=1,2,3}$$

generan \mathbb{C}^3 para todo $j = 1, \dots, l$, como se deduce de la expresión

$$\left(\frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2), \frac{i}{2}(u_1^2 + u_2^2), u_1u_2 \right) \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \left(u_1^2 - 2u_2^2, i(u_1^2 + 2u_2^2), 3u_1u_2 \right).$$

Esto demuestra que $\mathcal{P} \circ \psi$ es una sumersión en $\zeta = 0$ con las h_j^i así construidas. Para finalizar la demostración observemos que, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que h_j^i está definida y es holomorfa sobre K , se anula en los ceros del producto u_1u_2 y tiene un cero de multiplicidad al menos $2k$ en cada punto de Λ . En efecto, por el Teorema de Mergelyan con interpolación jet (véase el Teorema 2.29) podemos aproximar cada h_j^i continua original por una función holomorfa $K \rightarrow \mathbb{C}$ (que será llamada con el mismo nombre). Puesto que cada h_j^i se anula en un entorno de Λ en C , entonces las funciones que la aproximan pueden ser elegidas de forma que se anulen en todos los ceros de u_1u_2 y de forma que tengan un cero de cualquier orden en cualquier punto de Λ (en particular de orden $2k$). Esta última afirmación implica que la aplicación ψ definida en (4.6) toma valores en $\text{Spin}(K)$. Además, si la aproximación es suficientemente buena entonces el correspondiente spray es también dominante respecto a los periodos. \square

El último de los resultados previos que enunciamos y demostramos en esta sección es la siguiente generalización del teorema de Royden.

Lema 4.5. *Sea $A \subset \Sigma \setminus E$ un subconjunto compacto Runge, sea $f \in \mathfrak{M}(A)$ una función meromorfa, elegimos $m \in \mathbb{N}$, tomamos un divisor entero $D \in \mathfrak{Div}(A)$ y fijamos $\delta > 0$. Existe $\tilde{f} \in \mathfrak{M}(\Sigma) \cap \mathcal{O}(\Sigma \setminus (A \cup E))$ tal que \tilde{f} tiene un polo de orden mayor o igual que m en todos los puntos de E , $(\tilde{f}|_A - f) \geq D$ y $|\tilde{f} - f| < \delta$ en A .*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $\delta < 1$ y denotamos por r el número de puntos en E . Por el Teorema 2.18, para cada $q \in E$ podemos encontrar una función $f_q \in \mathfrak{M}(\Sigma) \cap \mathcal{O}(\Sigma \setminus \{q\})$ tal que su norma cumpla $|f_q| < \delta/2r$ en A , su divisor verifique $(f_q) \geq D$ y tenga un polo de orden positivo en q . Denotamos por $f_0 = \sum_{q \in E} f_q$. Se tiene que $|f_0| < \delta/2$ en A , que $(f_0|_A) \geq D$ y que f_0 tiene un polo de orden positivo en todos los puntos de E . Por otro lado, el Teorema 2.18 proporciona otra función $f_1 \in \mathfrak{M}(\Sigma) \cap \mathcal{O}(\Sigma \setminus (A \cup E))$ tal que $|f - f_1| < \delta/2$ y tal que $(f_1|_A - f) \geq D$. Sea $m_0 \in \mathbb{N}$ el máximo de los ordenes de los polos de f_1 en los puntos de E , entonces es suficiente elegir $\tilde{f} := f_1 + f_0^n$ donde $n = m_0 + m$. \square

4.2. Demostración del Teorema 4.1

En vista del Teorema 3.1 y la Proposición 3.11, podemos suponer sin pérdida de generalidad que K es conexo y un retracto fuerte de deformación de $\Sigma \setminus E$ y que X es una inmersión mínima conforme no llana (véase la Definición 2.7) con flujo $\mathfrak{p}: \mathcal{H}_1(\Sigma \setminus E; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Véase la Nota 4.3.

Fijamos θ_0 una 1-forma dada por el Lema 4.2 y supongamos lo enunciado en la Nota 4.3 para las funciones $u_j \in \mathcal{O}(K)$, el punto p_0 y las curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_l, l \in \mathbb{N}$. Recordamos que la pareja (η_1, η_2) denota la representación espinorial asociada a X y denotamos por (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) sus datos de Weierstrass.

Sea $k \in \mathbb{N}$ el número entero que aparece en el enunciado del teorema y fijemos un número $\rho > 0$ que será especificado más adelante.

Elegimos discos compactos disjuntos dos a dos $U_q \subset \Sigma \setminus (K \cup E)$, $q \in \text{supp}(\theta_0|_{\Sigma \setminus E}) = \text{supp}(\theta_0)_0$, con $q \in \mathring{U}_q$; recordamos que θ_0 no se anula en K , véase el Lema 4.2. Denotamos por $K_0 = \bigcup_{q \in \text{supp}(\theta_0)_0} U_q$ y extendemos u_1 de forma que sea una función meromorfa $u_1: K \cup K_0 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $u_1^2 \theta_0$ sea holomorfa y no se anule en K_0 (recordamos que θ_0 es espinorial en $\Sigma \setminus E$). Fijamos otro número $\rho' > 0$ que especificaremos después. Si $\rho' > 0$ es suficientemente pequeño, entonces el Lema 4.5 aplicado al conjunto Runge $K \cup K_0$, la función u_1 , un entero suficientemente grande $m \in \mathbb{N}$, el divisor $D = (u_1)^2 D_\Lambda^{2k}$ y el número $\rho' > 0$, donde $D_\Lambda = \prod_{q \in \Lambda} q \in \mathfrak{Div}(K)$, proporciona una función meromorfa $\tilde{u}_1: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$, que es además holomorfa en $\Sigma \setminus (E \cup \text{supp}(\theta_0)_0)$, cumpliendo las siguientes propiedades:

$$(A.1) \quad (\tilde{u}_1|_K) = (u_1|_K).$$

(A.2) $\tilde{u}_1 - u_1$ tiene un cero de multiplicidad $2k$ en todo punto de Λ .

(A.3) $|\tilde{u}_1(p) - u_1(p)| < \rho'$ para todo $p \in K \cup K_0$.

(A.4) $\tilde{u}_1^2 \theta_0$ es holomorfa en $\Sigma \setminus E$, no se anula en K_0 y tiene un polo efectivo en cada punto de E .

Para asegurar (A.1) y (A.2) estamos utilizando que el número $\rho' > 0$ es suficientemente pequeño y teniendo en cuenta el teorema clásico de Hurwitz. Para garantizar (A.4) necesitamos utilizar (A.3), la definición de u_1 en K_0 , y suponer que m es un entero suficientemente grande.

Consideramos el conjunto finito $K_1 := \{p \in \Sigma \setminus K : \tilde{u}_1(p) = 0\} \subset \Sigma \setminus (K \cup K_0 \cup E)$ y extendemos u_2 de forma que sea una función meromorfa $u_2: K \cup K_0 \cup K_1 \rightarrow \mathbb{C}$ cumpliendo que $u_2 = u_1$ en K_0 y $u_2 = 1$ en K_1 . Razonando de un modo similar, el Lema 4.5 proporciona una función meromorfa $\tilde{u}_2: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$, holomorfa en $\Sigma \setminus (E \cup \text{supp}(\theta_0)_0)$, que verifica las siguientes propiedades:

$$(B.1) \quad (\tilde{u}_2|_K) = (u_2|_K).$$

(B.2) $\tilde{u}_2 - u_2$ tiene un cero de multiplicidad $2k$ en todo punto de Λ .

(B.3) $|\tilde{u}_2(p) - u_2(p)| < \rho'$ para todo $p \in K \cup K_0 \cup K_1$.

(B.4) $\tilde{u}_2^2 \theta_0$ es holomorfa en $\Sigma \setminus E$, no se anula en $K_0 \cup K_1$ y tiene un polo efectivo en cada punto de E .

Por las propiedades (A.1), (A.4), (B.1), (B.3) y (B.4) tenemos que

$$(\tilde{u}_1^2, \tilde{u}_2^2) \theta_0 \text{ es holomorfa en } \Sigma \setminus E \text{ y no toma el valor } (0, 0), \quad (4.8)$$

supuesto que $\rho' > 0$ es elegido suficientemente pequeño. En esta situación, definimos las 1-formas

$$\tilde{\eta}_j := \tilde{u}_j^2 \theta_0, \quad j = 1, 2. \quad (4.9)$$

Hemos demostrado que:

(a) $\tilde{\eta}_j$ es holomorfa y espinorial en $\Sigma \setminus E$ para $j = 1, 2$.

(b) La pareja $(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)$ es espinorialmente equivalente en $\Sigma \setminus E$; de hecho, $\tilde{\eta}_j$ es espinorialmente equivalente a η_1 (y por tanto a η_2) en K para $j = 1, 2$ (recordamos que K es un retracto fuerte de deformación de $\Sigma \setminus E$).

- (c) $\tilde{\eta}_j - \eta_j$ tiene un cero de multiplicidad (al menos) $2k$ en todos los puntos de Λ para $j = 1, 2$.
- (d) $\tilde{\eta}_j$ tiene un polo efectivo en cada punto de E para $j = 1, 2$ por las propiedades (A.4) y (B.4).
- (e) $|(\tilde{\eta}_j - \eta_j)/\theta_0(p)| < \rho$ en todo $p \in K$. Esto es así por (A.3) y (B.3) suponiendo que $\rho' > 0$ es elegido suficientemente pequeño.
- (f) $(\tilde{\eta}_j|_K) = (\tilde{u}_j^2|_K) = (u_j^2|_K) = (\eta_j)$ para $j = 1, 2$, y $\tilde{\eta}_1$ y $\tilde{\eta}_2$ no tienen ceros comunes en $\Sigma \setminus E$.

Sean $h_j^i: K \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, l$, $i = 1, 2, 3$, las funciones que proporciona el Lema 4.4. Aplicando el Lema 4.5 una vez más, existen funciones $g_j^i \in \mathfrak{M}(\Sigma) \cap \mathcal{O}(\Sigma \setminus E)$, $j = 1, \dots, l$, $i = 1, 2, 3$, con las siguientes propiedades:

- (I) $|g_j^i(p) - h_j^i(p)| < \rho$ para todo $p \in K$.
- (II) $g_j^i - h_j^i$ tiene un cero de multiplicidad al menos $2k \in \mathbb{N}$ en cada punto $p \in \Lambda \subset K$. Esto es equivalente a que g_j^i tenga un cero de multiplicidad al menos $2k \in \mathbb{N}$ en cada punto $p \in \Lambda \subset K$ (véase el Lema 4.4).
- (III) g_j^i tiene un cero en cada punto de $(\Sigma \setminus E) \cap (\text{supp}(\tilde{\eta}_1) \cup \text{supp}(\tilde{\eta}_2))$.

Sustituyendo en (4.6) las funciones h_j^i , u_1 y u_2 por sus correspondientes aproximaciones, es decir, por g_j^i , \tilde{u}_1 y \tilde{u}_2 respectivamente, obtenemos el siguiente spray de funciones en K

$$\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2): \mathbb{C}^{3l} \rightarrow (\mathfrak{M}(\Sigma) \cap \mathcal{O}(\Sigma \setminus E))^2 \cap \text{Spin}(K),$$

definido por la expresión

$$\tilde{\psi}(\zeta) = \left(\left(1 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^l \zeta_j^i g_j^i\right) \tilde{u}_1, \left(1 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^l \zeta_j^i g_j^i\right) \tilde{u}_2 \right), \quad \zeta \in \mathbb{C}^{3l},$$

con valor inicial $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$. A partir de este podemos definir el siguiente spray de 1-formas espinoriales

$$(\tilde{\eta}_{\zeta,1}, \tilde{\eta}_{\zeta,2}) := \left(\left(1 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^l \zeta_j^i g_j^i\right)^2 \tilde{\eta}_1, \left(1 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^l \zeta_j^i g_j^i\right)^2 \tilde{\eta}_2 \right). \quad (4.10)$$

Notamos que se cumple $\tilde{\eta}_{\zeta,j} = \tilde{\psi}_j(\zeta)^2 \theta_0$ para $j = 1, 2$ gracias a la ecuación (4.9). Además se verifican las siguientes propiedades:

- (A) $\tilde{\eta}_{\zeta,j}$ es una 1-forma espinorial holomorfa en $\Sigma \setminus E$, es decir, $\tilde{\eta}_{\zeta,j} \in \mathfrak{Y}(\Sigma \setminus E)$, para $j = 1, 2$. Además, $\tilde{\eta}_{\zeta,1}$ y $\tilde{\eta}_{\zeta,2}$ son meromorfas en Σ , espinorialmente equivalentes en $\Sigma \setminus E$, no tienen ceros comunes y $\tilde{\eta}_{\zeta,1}$ o $\tilde{\eta}_{\zeta,2}$ tiene un polo efectivo en cada punto de E ; todo se deduce de las propiedades (a), (b), (d), (f) y (III) y la ecuación (4.10) teniendo en cuenta que, obviamente, las funciones $M \rightarrow \mathbb{C}$

$$1 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^l \zeta_j^i g_j^i(\cdot) \quad \text{y} \quad 1 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^l \zeta_j^i g_j^i(\cdot)$$

no tienen ceros comunes.

- (B) Si el número $\rho > 0$ es elegido suficientemente pequeño, entonces la aplicación de periodos $\tilde{P}: \mathbb{C}^{3l} \rightarrow \mathbb{C}^{3l}$, $\tilde{P}(\zeta) = \mathcal{P}(\tilde{\psi}(\zeta))$, véase la ecuación (4.4), es una sumersión en $\zeta = 0$ por el Lema 4.4. Por tanto, existe una bola euclídea $V \subset \mathbb{C}^{3l}$ centrada en el origen, dependiendo de ρ , tal que $\tilde{P}: V \rightarrow \tilde{P}(V)$ es una aplicación holomorfa biyectiva; en este caso utilizamos (e), (4.9) y (I).
- (C) Como \tilde{P} aproxima a $\mathcal{P} \circ \psi$ uniformemente en compactos de \mathbb{C}^{3l} cuando ρ tiende a 0 y además se cumple que $\mathcal{P}(\psi(0)) = 0$, entonces existe $\zeta_\rho \in V$, tendiendo a 0 cuando $\rho \rightarrow 0$, tal que $\tilde{P}(\zeta_\rho) = 0$; esto es implicado por la propiedad (B) y la definición de \tilde{P} .
- (D) $\tilde{\eta}_{\zeta_\rho,j}/\theta_0$ aproxima a η_j/θ_0 uniformemente en K cuando ρ tiende a 0; tenemos en cuenta ahora (e) y el hecho de que $\lim_{\rho \rightarrow 0} \zeta_\rho = 0$ (véase (C)).
- (E) $\tilde{\eta}_{\zeta,j} - \eta_j$ tiene un cero de multiplicidad $2k$ en cada punto de Λ para todo $\zeta \in \mathbb{C}^{3l}$; deducido en este caso de (c) y (II).

Por las propiedades (A) y (C), los datos de Weierstrass $\tilde{\Phi}_{\zeta_\rho} := \Phi(\tilde{\psi}(\zeta_\rho))$ definidos en la ecuación (4.5) proporcionan una inmersión mínima conforme completa según la expresión

$$X_\rho(p) = X(p_0) + \int_{p_0}^p \Re(\tilde{\Phi}_{\zeta_\rho}).$$

La inmersión X_ρ está bien definida pues los periodos de $\tilde{\Phi}_{\zeta_\rho}$ en K son aquellos que tenían los datos de Weierstrass de X y K es un retracto fuerte de deformación de $\Sigma \setminus E$, mientras que la completitud está garantizada por el

hecho de que una de las 1-formas, o $\tilde{\eta}_{\zeta,1}$ o $\tilde{\eta}_{\zeta,2}$, tiene un polo efectivo en cada punto de E .

Afirmamos que la inmersión mínima conforme $\tilde{X} := X_\rho$ soluciona el teorema supuesto que $\rho > 0$ es elegido suficientemente pequeño. En efecto, por los recientemente mencionados argumentos, X_ρ tiene la misma aplicación flujo que X , lo que implica la condición (iv) del enunciado del Teorema 4.1. Por la propiedad (A), la inmersión X_ρ es de curvatura total finita, lo que demuestra la condición (i). La condición (ii) se deduce de (D) para un número $\rho > 0$ suficientemente pequeño. Finalmente, si $p_j \in \Lambda$ y γ_j es el arco en C que une p_0 con p_j , entonces

$$\begin{aligned} X_\rho(p_j) &= X(p_0) + \int_{p_0}^{p_j} \Re(\tilde{\Phi}_{\zeta_\rho}) = X(p_0) + \int_{\gamma_j} \Re(\tilde{\Phi}_{\zeta_\rho}) \\ &\stackrel{(C)}{=} X(p_0) + \int_{\gamma_j} \Re(\Phi(u_1, u_2)) = X(p_0) + \int_{p_0}^{p_j} \Re(\Phi(u_1, u_2)) = X(p_j). \end{aligned}$$

Esta igualdad y la propiedad (E) implican que se cumple (iii).

Esto completa la demostración del Teorema 4.1 y por tanto la del Teorema 1.4 enunciado en la Introducción.

Capítulo 5

Optimización para Superficies Mínimas con Curvatura Total Finita

En este capítulo estudiamos un problema de optimización para superficies mínimas completas con curvatura total finita en \mathbb{R}^3 . Recordamos la Definición 1.6 donde introducíamos los espacios \mathcal{L}_r y $\mathcal{L}_{r;m}$. Concretamente, \mathcal{L}_r denota el espacio de todas las inmersiones mínimas orientables $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ que son completas, sin borde, no llanas y tienen curvatura total $|\text{TC}(X)| \leq 4\pi r$. Por otro lado, para todo entero $m \leq 1$, $\mathcal{L}_{r;m}$ denota el subconjunto de \mathcal{L}_r formado por aquellas inmersiones $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que M tiene característica de Euler $\chi(M) = m$.

Fijados $r \geq 1$ y $m \leq 1$ con la condición necesaria $2r + m \geq 2$ para que el espacio $\mathcal{L}_{r;m}$ sea no vacío (véase la formula de Jorge-Meeks (2.28)), el planteamiento preciso del problema de optimización que vamos a abordar sería el siguiente: *determinar subconjuntos finitos $A \subset \mathbb{R}^3$ que estén en oposición a la familia de inmersiones $\mathcal{L}_{r;m}$ o a la familia más grande \mathcal{L}_r para cualquier $r \geq 1$* . Recordemos que A está en oposición a la familia $\mathcal{L}_{r;m}$ si A no está contenido en la imagen de ninguna inmersión $X \in \mathcal{L}_{r;m}$. Otra formulación dual de este problema sería determinar la superficie mínima completa con curvatura total (en valor absoluto) más baja que contenga a un conjunto finito de puntos dado. El Teorema 4.2 garantiza que esta cuestión siempre tiene solución.

La aportación fundamental a este problema de optimización viene da-

da por el Teorema 1.8, que proporciona una cota para el número de cortes de una superficie mínima completa sin borde con curvatura total finita y una recta que no esté contenida en ella. Posteriormente, como consecuencia de este, deduciremos Teorema 1.7.

Los resultados de este capítulo pueden encontrarse en (5):

A. Alarcón; I. Castro-Infantes and F. J. López, Interpolation and optimal hitting for complete minimal surfaces with finite total curvature. *Preprint arXiv1712.04727*.

Organización del capítulo

Dedicaremos la Sección 5.1 a demostrar algunos resultados técnicos sobre curvas planas. Los utilizaremos posteriormente en la Sección 5.2 para demostrar el Teorema 1.8 y deducir el Teorema 1.7. Al final del Capítulo probaremos algunos corolarios relacionados con este problema de optimización.

5.1. Notas sobre curvas planas

Antes de proceder con la prueba de los teoremas principales de este capítulo presentamos algunos resultados preliminares sobre curvas planas.

Dadas una curva cerrada orientada $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ y un punto $p \notin \gamma$, definimos el *winding number* $w_\gamma(p) \in \mathbb{Z}$ de γ respecto de p como el número de vueltas que la curva γ da alrededor de p . Si denotamos por $\gamma_p := \frac{\gamma-p}{\|\gamma-p\|} \subset \mathbb{S}^1$ entonces el *winding number* se expresa $w_\gamma(p) = w_{\gamma_p}(0, 0)$, y este número coincide, salvo identificar $\mathcal{H}_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ mediante la aplicación grado topológico, con la clase de homología dada por $[\gamma_p] \in \mathcal{H}_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})$. Si γ es suficientemente regular, es conocido que $w_\gamma(p)$ coincide con el número de *cruces positivos* menos el número de *cruces negativos* de cualquier semirecta (orientada) saliendo de p con γ .

Una curva $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ diremos que es *regular a trozos* si es diferenciable y el vector tangente $\gamma'(t)$ se anula solo en una cantidad finita de puntos, que llamamos *puntos singulares*.

Decimos que una curva regular a trozos $\gamma(t): I \rightarrow \mathbb{R}^2$ admite un *campo*

normal regular si existe una aplicación regular diferenciable, es decir, un difeomorfismo local, $n: \gamma \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que

$$\gamma'(t) \perp n(t) := n(\gamma(t)) \text{ para todo } t \in I.$$

En este caso definimos el *turning number* o *rotation number* de la curva como el número positivo de rotaciones hechas por el vector normal $n(t)$ a lo largo del recorrido de la curva γ , es decir, el valor absoluto del grado de n , que coincide con la curvatura total de γ dividida por 2π cuando γ es regular. Resaltamos que el *turning number* no depende de la elección del campo normal regular n .

Si γ es una curva regular a trozos que admite un campo normal regular n , un punto singular de γ , $\gamma(t_0)$, decimos que es un *punto cúspide* si localmente alrededor de t_0 se cumple que

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = (t - t_0)^{2m} \beta(t), \quad (5.1)$$

donde $m \in \mathbb{N}$ y $\beta(t)$ es una curva diferenciable que cumple $\beta(t_0) \neq 0$. En este caso, la curva $\gamma(t)$ vuelve en el punto $t = t_0$ y cualquier línea recta que sea ortogonal a $n(t_0)$ y no contenga a $\gamma(t_0)$ localmente interseca a γ alrededor de $\gamma(t_0)$ en 0 o en 2 puntos, véase la ecuación (5.1).

Procedemos a demostrar el siguiente resultado.

Proposición 5.1. *Sea $\gamma(t)$ una curva diferenciable cerrada y regular a trozos en \mathbb{R}^2 que admita un campo normal regular, y sea t_γ el turning number de γ . Para cada punto $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ se tiene que*

$$|w_\gamma(p)| \leq 2t_\gamma.$$

donde $w_\gamma(p)$ denota el winding number de γ respecto de p .

Nótese que la cota de la proposición es óptima, véase la Figura 5.1.

Demostración. Sea $n(t): \gamma \rightarrow \mathbb{S}^1$ un campo normal regular a lo largo de $\gamma(t)$, por tanto un difeomorfismo local. Llamamos $\pi_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a la proyección ortogonal $(x, y) \mapsto x$. Salvo un movimiento rígido de \mathbb{R}^2 podemos asumir sin pérdida de generalidad que:

- El rayo $\ell := \{p + (0, y): y \geq 0\}$ interseca a γ solo en puntos regulares (no en puntos singulares) y lo hace de forma transversa.

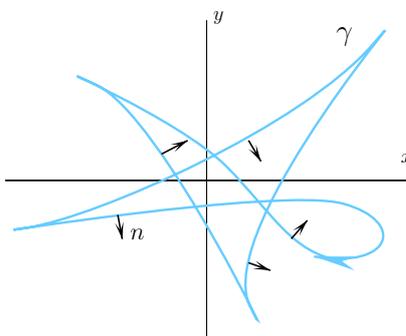


Figura 5.1: Una curva orientada γ con cuatro puntos cúspides, *turning number* $t_\gamma = 1$ y *winding number* respecto del origen $w_\gamma = 2$.

- $n^{-1}(\{(1, 0), (-1, 0)\})$ no contiene puntos singulares de γ .

Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_{2t_\gamma}$ la familia de componentes conexas de $n^{-1}(\mathbb{S}_+^1)$ y $n^{-1}(\mathbb{S}_-^1)$ ordenadas de forma que conectan extremo con extremo, donde $\mathbb{S}_+^1 := \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y \geq 0\}$ y $\mathbb{S}_-^1 := \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y \leq 0\}$. Como cada componente γ_j es regular a trozos, podemos dividirla a su vez en arcos de Jordan $\gamma_{j,1} \dots, \gamma_{j,m_j}$ ordenados de forma continua extremo con extremo y cumpliendo que:

- Los extremos de $\gamma_{j,i}$ son o bien puntos cúspides o bien puntos en el conjunto $n^{-1}(\{(1, 0), (-1, 0)\})$.
- El interior de $\gamma_{j,i}$ no contiene puntos cúspides para $i = 1, \dots, m_j$.

Una curva $\gamma_{j,i}$ decimos que es *positiva* si para cualquier punto interior $\gamma_{j,i}(t)$ de $\gamma_{j,i}$, la base ordenada $\{(0, 1), \gamma'_{j,i}(t)\}$ de \mathbb{R}^2 es positiva, o equivalentemente, si la primera función coordenada $(\pi_0 \circ \gamma_{j,i})(t)$ de $\gamma_{j,i}$ es decreciente. En otro caso, $\gamma_{j,i}$ decimos que es *negativa*. Obviamente, dos subarcos consecutivos $\gamma_{j,i}$ y $\gamma_{j,i+1}$ de γ_j tendrán diferente carácter, véase la ecuación (5.1).

Puesto que $\pi_0|_{\gamma_{j,i}}$ es inyectiva, entonces o $\ell \cap \gamma_{j,i}$ es vacío o consiste en un único punto; además en el segundo caso el cruce de $\gamma_{j,i}$ con ℓ es positivo si, y solo si, $\gamma_{j,i}$ es positiva, y negativo en otro caso. Por la conexión de la curva γ , si se cumple que $i_1 < i_2$, que $\ell \cap \gamma_{j,i_1} \neq \emptyset$, que $\ell \cap \gamma_{j,i_2} \neq \emptyset$ y que $\ell \cap \gamma_{j,i} = \emptyset$ para todo $i_1 < i < i_2$, entonces γ_{j,i_1} y γ_{j,i_2} tienen diferente carácter. Por lo tanto, el número de cruces positivos menos el número de cruces negativos

de ℓ con γ_j es 0 o 1 o -1 . Esto demuestra que $|w_\gamma(p)|$ es como mucho $2t_\gamma$, lo que concluye la demostración. \square

5.2. Resultados de optimización y aplicaciones

Volvemos al contexto de las superficies mínimas. Sea $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión mínima completa con curvatura total finita, donde M es una superficie de Riemann abierta. Sabemos que $M = \Sigma \setminus E$ para Σ una superficie de Riemann compacta y $E \subset \Sigma$ un subconjunto finito no vacío. Denotamos por $N: M \rightarrow \mathbb{S}^2$ la aplicación de Gauss de X que es compatible con la orientación de M y recordamos que N se extiende de forma meromorfa a Σ . Véase la Sección 2.5 para más detalles.

5.2.1. Optimización en casos sencillos

El problema de optimización más básico es el que presenta a los planos como las superficies mínimas completas con curvatura total más baja en valor absoluto pasando por 3 puntos. La siguiente proposición da una respuesta satisfactoria a la misma cuestión para el caso de 4 puntos.

Proposición 5.2. *Sea $A \subset \mathbb{R}^3$ un subconjunto formado por 4 puntos no contenidos en un plano. Existe una superficie de Enneper (véase el Ejemplo 2.42) que contiene a A .*

Además cualquier superficie mínima orientable y completa pasando por A tiene curvatura total en valor absoluto mayor o igual que 4π .

Recuérdese que la superficie de Enneper, junto con la catenoide, es la única superficie mínima completa con curvatura total -4π .

Demostración. La superficie de Enneper puede parametrizarse mediante la expresión $X: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$X(z) \equiv X(u + iv) := \left(\frac{u}{3} \left(1 - \frac{u^2}{3} + v^2 \right), -\frac{v}{3} \left(1 - \frac{v^2}{3} + u^2 \right), \frac{u^2 - v^2}{3} \right)$$

para todo $z = u + iv \in \mathbb{C}$. Es claro que $X(\mathbb{C})$ contiene las rectas

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

Salvo un movimiento rígido, supongamos que 3 de los puntos de A están contenidos en las rectas descritas en las ecuaciones (5.2) y el cuarto no está contenido en el plano que generan. Obviamente, cualquier homotecia de la superficie de Enneper sigue conteniendo esas rectas y es de nuevo una nueva superficie de Enneper. Teniendo en cuenta que cualquier recta no contenida en el plano $x_3 = 0$ corta a la superficie de Enneper en al menos un punto, es fácil encontrar una homotecia adecuada para que la superficie de Enneper resultante contenga a los 4 puntos de A . \square

En relación al problema de optimización que nos ocupa, la Proposición 5.2 afirma que para 4 puntos arbitrarios en \mathbb{R}^3 la cota óptima para la curvatura total es 4π . Es de esperar que al añadir más puntos al conjunto A las soluciones de nuestro problema de optimización tengan curvatura total mayor, incluso dejando libertad para el género y el número de finales. El Teorema 1.7 aclara estas cuestiones. Para su demostración necesitamos algunos resultados previos que abordamos a continuación.

Por definición, una simetría de $X: M = \Sigma \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un movimiento rígido $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(X(M)) = X(M)$. Toda simetría f de X induce una transformación conforme $\Psi: M \rightarrow M$ cumpliendo $f \circ X = X \circ \Psi$. Una tal aplicación Ψ puede preservar o no la orientación de la superficie, y se extiende a un automorfismo conforme $\Psi_f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ dejando a E invariante. Por analiticidad, toda recta afín $L \subset \mathbb{R}^3$ tal que $X(M) \cap L$ contiene infinitos puntos está contenida en $X(M)$. Además, si L es una recta afín con $L \subset X(M)$, entonces el principio de reflexión de Schwartz implica que $X(M)$ es invariante bajo la simetría $f_L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con eje la recta L . Por lo tanto, la transformación conforme Ψ_L asociada a f_L tiene infinitos puntos fijos en Σ y tiene que ser antiholomorfa. Con relación al grupo de simetrías será de utilidad la siguiente proposición.

Proposición 5.3. *Las únicas superficies mínimas completas orientables con curvatura total finita que tienen un grupo de simetrías infinito son los planos y las catenoides.*

En particular, toda superficie mínima completa no llana con curvatura total finita contiene a lo sumo una cantidad finita de rectas.

Demostración. Sea $X: M = \Sigma \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión mínima conforme completa no llana con curvatura total finita, donde Σ es una superficie de

Riemann compacta y $E \subset \Sigma$ un subconjunto finito no vacío. Puesto que la curvatura de Gauss $K: M \rightarrow \mathbb{R}$ es no positiva y $K(p) \rightarrow 0$ cuando $p \rightarrow E$, entonces el conjunto $C = \{p \in M: K(p) = \min_{\Sigma} K < 0\}$ es no vacío y compacto; recordamos que K no se anula constantemente en M ya que X es no llana. Denotamos por G el grupo de simetrías de X y notamos que G deja C invariante. Además, G es un subgrupo cerrado del grupo de Lie que forman los movimientos rígidos de \mathbb{R}^3 .

Si suponemos que G no es discreto, entonces G tiene que contener un subgrupo 1-paramétrico, G_0 , que deja invariante el conjunto compacto $X(C)$. Por lo tanto, G_0 está formado por rotaciones y esto implica que $X(M)$ es una catenoide.

Para concluir la demostración bastará con comprobar que G no es discreto. Suponemos que G es discreto, y recordamos que G es infinito por hipótesis. Fijamos un punto $q \in E$ y denotamos por G_q al subgrupo de G consistente en aquellas simetrías cuya transformación conforme en Σ inducida fija $q \in E$. Claramente $G_q \neq \emptyset$ es discreto e infinito; recordemos que E es finito y toda simetría de G deja a E invariante. Como anteriormente, G_q deja invariante $X(C)$ y por tanto su grupo de isometrías lineales asociado, que denotamos por \vec{G}_q , es también discreto. Llamamos $N: \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ a la extensión de la aplicación de Gauss de X a la superficie Σ , y observamos que toda isometría en \vec{G}_q deja invariante la dirección vectorial L_q generada por $N(q)$. Inferimos que \vec{G}_q tiene que ser un grupo finito de isometrías lineales que dejan invariante L_p , y por tanto, G_q tiene que contener un movimiento helicoidal o una simetría deslizante. Esto contradice que C sea invariante bajo G_q y concluye la demostración. \square

5.2.2. Demostración del Teorema 1.8

La clave para la prueba del Teorema 1.7, el resultado fundamental de este capítulo, está implícita en el el Teorema 1.8 cuya demostración abordamos aquí.

Sea $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión mínima conforme completa, sin borde y con curvatura total finita y sea $L \subset \mathbb{R}^3$ una recta no contenida en $X(M)$. En el caso de que X sea llana entonces la cota del enunciado en el Teorema 1.8 se cumple trivialmente.

Suponemos que X es no llana. Escribimos $M = \Sigma \setminus E$, donde Σ es una superficie de Riemann compacta y $E \subset \Sigma$ un subconjunto finito no vacío, y llamamos $N: \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ a la aplicación de Gauss extendida de X compatible con la orientación en M . Como $L \notin X(M)$ deducimos que $X^{-1}(L) \subset M$ es finito; si fuera infinito entonces L estaría contenida en $X(M)$ por analiticidad.

Denotamos por \mathcal{G} a la variedad Grassmanniana de todas las rectas afines en \mathbb{R}^3 . Por la Proposición 5.3, $X(M)$ contiene como mucho un número finito de rectas de \mathcal{G} . Denotamos por \mathcal{G}_0 al subconjunto de \mathcal{G} formado por las rectas T contenidas en \mathbb{R}^3 que cumplen las siguientes propiedades:

- a) $Q_T := \{p \in M: N(p) \perp T\}$ es un compacto y por tanto $T \notin X(M)$.
- b) La curvatura de Gauss $K: M \rightarrow \mathbb{R}$ de X no se anula en ningún punto de Q_T , es decir, N es un difeomorfismo local alrededor de los puntos de Q_T .
- c) $X^{-1}(T) \cap Q_T = \emptyset$.

Claramente, \mathcal{G}_0 es un subconjunto abierto y denso de \mathcal{G} . Resaltamos que en la propiedad c), el conjunto Q_T solo depende de la dirección de la recta T .

Reduzcamos la demostración a un caso más sencillo.

Lema 5.4. *Es suficiente con demostrar el teorema bajo la suposición extra de que $L \in \mathcal{G}_0$.*

Demostración. Suponemos que la conclusión del teorema se cumple bajo las propiedades a), b) y c), es decir,

$$\#(X^{-1}(T)) \leq 6\text{Deg}(N) + \chi(M) \text{ para toda recta } T \in \mathcal{G}_0. \quad (5.3)$$

Veamos que lo mismo ocurre para una recta arbitraria $L \in \mathcal{G}$ con $L \notin X(M)$. En efecto, elegimos una familia $\{U_p \subset M : p \in X^{-1}(L)\}$ de compactos disjuntos dos a dos, de forma que U_p sea entorno de p en M para todo $p \in X^{-1}(L)$. Observamos que

$$\mathcal{G}_1 = \{T \in \mathcal{G}_0: T \cap X(U_p) \neq \emptyset \text{ para todo } p \in X^{-1}(L)\}$$

es un subconjunto no vacío de \mathcal{G} cuyo cierre contiene a L . La definición de \mathcal{G}_1 garantiza que toda recta $T \in \mathcal{G}_1$ corta a $X(M)$ en al menos un punto

cerca de cada $p \in X^{-1}(L)$, por lo que $\#(X^{-1}(L)) \leq \#(X^{-1}(T))$. Finalmente, la ecuación (5.3) implica que $\#(X^{-1}(L)) \leq 6\text{Deg}(N) + \chi(M)$. \square

Para completar la demostración es suficiente con probar el teorema cuando $L \in \mathcal{G}_0$. Salvo un movimiento rígido podemos suponer que L es el eje x_3 . Escribimos $X = (X_1, X_2, X_3)$ y $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. De las propiedades a), b) y c) se deduce que $\langle N, \vec{e}_3 \rangle \neq 0$ en todo punto de $X^{-1}(L)$, 0 es un valor regular de $\langle N, \vec{e}_3 \rangle: M \rightarrow \mathbb{R}$ y $Q := Q_L = \langle N, \vec{e}_3 \rangle^{-1}(0)$ es un subconjunto compacto en $M = \Sigma \setminus E$ formado por un número finito de curvas de Jordan analíticas disjuntas dos a dos; para esta última afirmación hemos utilizado que el grado de la aplicación de Gauss N es finito.

Nota 5.5. Podría ocurrir que el vector tangente a alguna de las curvas en $X(Q)$ sea paralelo al vector \vec{e}_3 en algún punto, y por tanto que las proyecciones de estas curvas sobre un plano horizontal contengan puntos cúspide (véase la Subsec. 5.1).

Ejemplos concretos de esta situación se pueden materializar resolviendo problemas de Björling adecuados. Este método proporciona fácilmente superficies mínimas en \mathbb{R}^3 conteniendo curvas regulares cerradas con aplicación de Gauss horizontal y vector tangente vertical en algún punto. Véase la Figura 5.2.

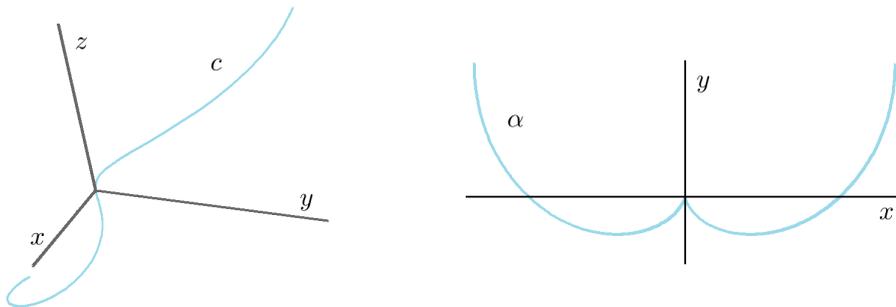


Figura 5.2: Una curva regular c contenida en $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ cuya proyección $\alpha \subset \mathbb{R}^2$ produce un punto cúspide en el origen.

Sin embargo, el vector tangente en $X(Q)$ solo puede ser paralelo a \vec{e}_3 en un número finito de puntos; de otra manera por analiticidad la curva tendría que contener a toda la recta vertical, lo que contradice que sea compacta.

Sea Ω una componente conexa de $\Sigma \setminus Q$. Por las propiedades a) y c) tenemos que $b\Omega := \bar{\Omega} \setminus \Omega \subset Q$ no contiene ningún punto de $X^{-1}(L) \cup E$. Escribimos $X^{-1}(L) \cap \bar{\Omega} = \{p_1, \dots, p_s\} \subset \Omega \setminus E = \bar{\Omega} \setminus (Q \cup E)$ y elegimos discos compactos disjuntos dos a dos, D_1, \dots, D_s , en $\Omega \setminus E$ tales que

- D_j contiene a p_j como un punto interior.
- $(X_1, X_2)|_{D_j}$ es inyectiva; recordemos que la aplicación de Gauss de $X|_{D_j}$ nunca es horizontal, por lo que basta con elegir entonces D_j suficientemente pequeño.

De igual manera escribimos $E \cap \bar{\Omega} = \{q_1, \dots, q_r\} \subset \Omega$ (podría ser que $E \cap \bar{\Omega} = \emptyset$ y $r = 0$), y como antes tomamos discos compactos disjuntos dos a dos, U_1, \dots, U_r , en Ω tales que

- U_j contiene a q_j como punto interior y $U_j \setminus \{q_j\} \subset \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^s D_j$.
- $(X_1, X_2)|_{U_j}$ es un multigrafo de I_{q_j} hojas sobre $\mathbb{R}^2 \setminus B$, donde $I_{q_j} \geq 1$ y B es una bola euclídea abierta que no depende de j .

Tales discos existen como consecuencia del comportamiento asintótico de los finales de las superficies mínimas completas con curvatura total finita en \mathbb{R}^3 ; véase la Sección 2.5.

Sean c_1, \dots, c_m las curvas de Jordan disjuntas dos a dos que conforman $Q \cap \bar{\Omega} = b\Omega$. Denotamos por $d_j = bD_j := D_j \setminus \dot{D}_j$, $j = 1, \dots, s$, y por $u_j = bU_j := U_j \setminus \dot{U}_j$, $j = 1, \dots, r$. Consideramos el subconjunto compacto de Σ dado por

$$\Omega_0 := \bar{\Omega} \setminus \left(\left(\bigcup_{j=1}^s \dot{D}_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^r \dot{U}_j \right) \right),$$

y observamos que $\Omega_0 \subset M$. Definimos la aplicación continua

$$f: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad f(p) := \frac{(X_1, X_2)}{\|(X_1, X_2)\|},$$

bien definida por nuestras consideraciones previas, y consideramos el morfismo de grupos inducido entre los primeros grupos de homología de Ω_0 y \mathbb{S}^1

$$f_*: \mathcal{H}_1(\Omega_0; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{H}_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

En esta situación se cumple que

$$b\Omega_0 = \left(\bigcup_{j=1}^m c_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^s d_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^r u_j \right)$$

Si dotamos a las curvas $c_1, \dots, c_m, d_1, \dots, d_s$ y u_1, \dots, u_r de la orientación inducida por el compacto $\Omega_0 \subset M$,

$$\sum_{j=1}^m c_j + \sum_{j=1}^s d_j + \sum_{j=1}^r u_j = 0$$

en $\mathcal{H}_1(\Omega_0; \mathbb{Z})$, y por tanto

$$\sum_{j=1}^s f_*(d_j) = - \sum_{j=1}^r f_*(u_j) - \sum_{j=1}^m f_*(c_j) \in \mathbb{Z} \quad (5.4)$$

en $\mathcal{H}_1(\Omega_0; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Para concluir la prueba comprobaremos que el número de la izquierda en la ecuación (5.4) está relacionado con $\#(X^{-1}(L))$, y estableceremos algunas cotas naturales para la expresión que aparece a la derecha de la ecuación.

En primer lugar, como $(X_1, X_2)|_{D_j}$ es inyectiva, el *winding number* de $f(d_j)$ respecto al origen es igual a ± 1 . Además, como $\bigcup_{j=1}^s D_j \subset \Omega$ y la aplicación de Gauss de $X|_{\Omega}$ toma valores solo en un hemisferio, el signo depende de la orientación fijada en Ω_0 pero no de $j \in \{1, \dots, s\}$. En otras palabras,

$$f_*(d_1) = \dots = f_*(d_s) = \pm 1$$

y por tanto

$$\left| \sum_{j=1}^s f_*(d_j) \right| = s = \#(X^{-1}(L) \cap \bar{\Omega}). \quad (5.5)$$

De la misma forma, $f_*(u_j) = \pm I_{q_j}$ para todo $j \in \{1, \dots, r\}$, en este caso el signo tampoco depende de j , luego

$$\left| \sum_{j=1}^r f_*(u_j) \right| = \sum_{j=1}^r I_{q_j}. \quad (5.6)$$

Finalmente acotemos $\left| \sum_{j=1}^m f_*(c_j) \right|$. Con este objetivo, consideramos para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ la curva plana cerrada $\alpha_j := (X_1, X_2)(c_j)$ con su orientación natural.

De la Nota 5.5 deducimos que la curva α_j es regular a trozos. Además, α_j admite un campo normal regular que, salvo la identificación $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^2 \cap \{x_3 = 0\}$, coincide con $\pm N|_{c_j}$. Por lo tanto, si llamamos w_j al *winding number*

respecto al origen y t_j al *turning number* de α_j , la Proposición 5.1 nos dice que $2t_j \geq |w_j|$. Como α_j y $f(c_j) = \alpha_j/\|\alpha_j\|$ tienen el mismo *winding number* respecto al origen, deducimos que $w_j = f_*(c_j)$, y por tanto

$$\left| \sum_{j=1}^m f_*(c_j) \right| \leq \sum_{j=1}^m |w_j| \leq \sum_{j=1}^m 2t_j. \quad (5.7)$$

Por otro lado, se tiene que $N(\bar{\Omega})$ es o el hemisferio norte o el sur. Además, $N|_{\bar{\Omega}}: \bar{\Omega} \rightarrow N(\bar{\Omega})$ es un recubrimiento finito ramificado de grado $\text{Deg}(N|_{\bar{\Omega}}) \leq \text{Deg}(N)$. Como el vector normal a la curva plana α_j es una aplicación regular que coincide, salvo el signo, con $N|_{c_j}$, t_j coincide con el grado topológico de $N|_{c_j}: c_j \rightarrow \mathbb{S}^1$, $j = 1, \dots, m$, y $\sum_{j=1}^m t_j = \text{Deg}(N|_{\bar{\Omega}})$. En vista de la ecuación (5.7), se tiene que

$$\left| \sum_{j=1}^m f_*(c_j) \right| \leq 2\text{Deg}(N|_{\bar{\Omega}}). \quad (5.8)$$

Usando las ecuaciones (5.4), (5.5), (5.6) y (5.8), obtenemos que

$$\#(X^{-1}(L) \cap \bar{\Omega}) \leq \sum_{j=1}^r I_{q_j} + 2\text{Deg}(N|_{\bar{\Omega}}).$$

Finalmente, uniendo todas estas cotas para las distintas componentes Ω de $\Sigma \setminus Q$ y teniendo en cuenta que cada curva de Jordan en Q pertenece a la frontera de exactamente dos de las componentes conexas de Q , obtenemos que

$$\#(X^{-1}(L)) \leq \sum_{q \in E} I_q + 4\text{Deg}(N). \quad (5.9)$$

La fórmula de Jorge-Meeks (2.28) dice que $\sum_{q \in E} I_q = 2\text{Deg}(N) + \chi(M)$, por lo que de la ecuación (5.9) se deduce que

$$\#(X^{-1}(L)) \leq 6\text{Deg}(N) + \chi(M).$$

Esto concluye la prueba.

5.2.3. Demostración del Teorema 1.7

Sean $r \geq 1$ y $2 - 2r \leq m \leq 1$ dos enteros.

Elegimos dos rectas no paralelas afines contenidas en el mismo plano, L_1 y L_2 , formando un ángulo de $2\pi a$, para un número irracional $a \notin \mathbb{Q}$, en el punto $x_0 := L_1 \cap L_2$. Sea $C_j \subset L_j$ un subconjunto de puntos tal que $x_0 \in C_j$ y

$$\#C_j = 6r + m + 1, \quad j = 1, 2. \quad (5.10)$$

Veamos que el conjunto $A_{r;m} := C_1 \cup C_2$ resuelve el teorema. En efecto, en primer lugar es claro que

$$\#A_{r;m} = 12r + 2m + 1.$$

Por otro lado, razonando por reducción al absurdo, asumamos que existe una inmersión mínima, conforme y no llana $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ en el espacio $\bigcup_{k \leq m} \mathcal{X}_{r;k}$ con $A_{r;m} \subset X(M)$ (véase la Definición 1.6). Por la ecuación (5.10), el Teorema 1.8 implica que $L_1 \cup L_2 \subset X(M)$. Esto descarta la posibilidad de que X sea una catenoide, pues esta superficie no contiene ninguna recta. Por el principio de reflexión de Schwarz $X(M)$ es invariante por la simetría $f_{L_j}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ respecto de L_j , $j = 1, 2$. Como $a \notin \mathbb{Q}$, $X(M)$ es invariante por el grupo infinito de simetrías generado por f_{L_1} y f_{L_2} , lo que contradice la Proposición 5.3.

5.2.4. Aplicaciones

Para concluir el capítulo que hemos dedicado a los problemas de optimización presentamos algunos corolarios sencillos de lo probado.

Corolario 5.6. *Sean r y m enteros como en el Teorema 1.7, es decir, $r \geq 1$ y $2 - 2r \leq m \leq 1$. Existe un conjunto $A_{r;m}^* \subset \mathbb{R}^3$ formado por $12r + 2m + 2$ puntos, tal que si $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión mínima conforme completa orientable sin borde con curvatura total finita y tal que $\chi(M) \leq m$ y $A_{r;m}^* \subset X(M)$, entonces el valor absoluto de la curvatura total de X cumple $|\text{TC}(X)| > 4\pi r$.*

Demostración. Para construir $A_{r;m}^*$ es suficiente añadir al conjunto $A_{r;m}$ de la demostración del Teorema 1.7 un punto no contenido en el plano afín determinado por $A_{r;m}$. \square

Corolario 5.7. *Sea \mathcal{F} una familia de rectas afines en \mathbb{R}^3 tal que las reflexiones sobre las rectas en \mathcal{F} generan un grupo infinito de movimientos*

rígidos. Para cada $L \in \mathcal{F}$ sea $A_L \subset L$ un subconjunto infinito y denotemos $A := \bigcup_{L \in \mathcal{F}} A_L$. Entonces, el conjunto A está en contra de la familia global de todas las superficies mínimas completas no llanas con curvatura total finita en \mathbb{R}^3 , es decir, no existe una tal superficie que contenga a A .

En particular, \mathbb{Z}^3 o $\mathbb{Z}^2 \times \{0\}$ están en contra de la familia de todas las superficies mínimas completas no llanas con curvatura total finita de \mathbb{R}^3 .

Demostración. Razonamos por contradicción. Suponemos que existe una superficie mínima completa $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura total finita tal que $A \subset X(M)$. Por el Teorema 1.8, se tiene que $\bigcup_{L \in \mathcal{F}} L \subset X(M)$ y por tanto, $X(M)$ es invariante por el grupo de movimientos rígidos generado por las reflexiones alrededor de esas rectas. Puesto que las catenoides no contienen rectas, la Proposición 5.3 implica que X es llana, lo cual no es posible. \square

Merece la pena mencionar que por el Teorema 3.1 existen superficies mínimas completas en \mathbb{R}^3 conteniendo a un conjunto A como el del corolario anterior. Por el Corolario 5.7, esas superficies tienen curvatura total infinita.

Capítulo 6

Superficies Mínimas Completas y Densas en Dominios del Espacio Euclídeo

En este capítulo demostramos versiones más generales de los Teoremas 1.9 y 1.10, que fueron presentados en la Introducción, sobre la existencia de superficies mínimas completas que están contenidas de forma densa en un dominio Euclídeo dado. En particular, obtendremos una versión del Teorema 1.10 en la que, adicionalmente, aseguramos control sobre el flujo de los ejemplos. Por otro lado, deduciremos el Teorema 1.9 como consecuencia del siguiente resultado, más preciso, que garantiza aproximación sobre compactos y control sobre el flujo de las inmersiones que se construyen.

Teorema 6.1. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, un dominio, M una superficie de Riemann abierta, $\mathfrak{p}: \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ un homomorfismo de grupos, $K \subset M$ un compacto Runge con borde diferenciable y $X: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión mínima conforme de clase $\mathcal{C}^1(K)$. Supongamos que $X(K) \subset D$ y que la aplicación flujo $\text{Flux}_X: \mathcal{H}_1(K; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de X , véase la Definición 2.39, satisface $\text{Flux}_X(\gamma) = \mathfrak{p}(\gamma)$ para toda curva cerrada $\gamma \subset K$.

Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existen un dominio $\Omega \subset M$ y una inmersión mínima conforme y completa $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ que verifica las siguientes propiedades:

- (I) $K \subset \Omega$ y Ω es un retracto fuerte de deformación de M que es, además, homeomorfo a M .

(II) $\|Y - X\|_{1,K} < \epsilon$.

(III) $\text{Flux}_Y(\gamma) = \mathfrak{p}(\gamma)$ para toda curva cerrada $\gamma \subset \Omega$.

(IV) $Y(\Omega) \subset D$ y la clausura $\overline{Y(\Omega)} = \overline{D}$.

(V) Y es inyectiva si $n \geq 5$.

Además, si $D = \mathbb{R}^n$ podemos elegir $\Omega = M$.

La prueba utiliza de manera fuerte un resultado de aproximación de tipo Runge-Mergelyan para inmersiones mínimas conformes definidas sobre superficies de Riemann abiertas en \mathbb{R}^n , véase el Teorema 2.44 o el Teorema 3.1, un teorema de posición general para inmersiones mínimas conformes en \mathbb{R}^n para $n \geq 5$, véase el Teorema 2.45, y la existencia de soluciones a un problema de valores en el borde de tipo Riemann-Hilbert para inmersiones mínimas conformes en \mathbb{R}^n donde la estructura compleja de la superficie central es la de una superficie de Riemann compacta bordeada, véase Alarcón y Forstnerič (12) para $n = 3$ y Alarcón, Drinovec Drnovšek, Forstnerič y López (7) para $n \geq 3$. Aunque el método de Riemann-Hilbert no es usado explícitamente en la demostración, juega un rol fundamental en la prueba del resultado (7, Lemma 4.1), que sí utilizaremos en los razonamientos. Además, en la demostración explotaremos la técnica de Forstnerič y Wold (47) para exponer puntos del borde de una superficie de Riemann compacta bordeada, véase la Definición 2.13.

Todas las herramientas mencionadas en el párrafo anterior están disponibles no solo para la familia de las superficies mínimas, sino también para otras familias de variedades que son foco de interés en la investigación en geometría:

- *Superficies mínimas no orientables* en \mathbb{R}^n para $n \geq 3$.
- *Curvas complejas* en el espacio complejo \mathbb{C}^n con $n \geq 2$.
- *Curvas nulas holomorfas* en \mathbb{C}^n para $n \geq 3$.
- *Curvas legendrianas holomorfas* en \mathbb{C}^{2n+1} para $n \in \mathbb{N}$.

Enfatizamos que nuestros métodos de demostración pueden adaptarse fácilmente para obtener teoremas análogos a los Teoremas 6.1 y 1.10 en

todos los anteriores contextos geométricos. Motivaremos, enunciaremos y discutiremos algunos de estos resultados en la Sección 6.2.

Los resultados de este capítulo pueden encontrarse en (3):

A. Alarcón and I. Castro-Infantes. Complete minimal surfaces densely lying in arbitrary domains of \mathbb{R}^n , *Geom. Topol.* 22 (2018), no. 1, 571–590.

No obstante, destacamos que mientras que los argumentos en (3) usan de manera crucial el Teorema 2.44, en este capítulo utilizaremos en su lugar el Teorema 3.1, demostrado en el Capítulo 3, lo que permite simplificar la demostración.

Organización del capítulo

En la Sección 6.1 demostraremos los Teoremas 6.1 y 1.10; después, en la Sección 6.2, enunciaremos y discutiremos algunos resultados análogos para otras familias de superficies.

6.1. Superficies mínimas completas y densas

En esta sección probamos los Teoremas 6.1 y 1.10. Ambos se obtienen mediante una aplicación recursiva del siguiente resultado de aproximación por superficies mínimas.

Lema 6.2. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, un dominio, $\overline{M} = M \cup bM$ una superficie de Riemann compacta bordeada y $X: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión mínima conforme de clase $\mathcal{C}^1(\overline{M})$ tal que

$$X(\overline{M}) \subset D.$$

Dado un dominio compacto $K \subset M$, puntos $p_0 \in \overset{\circ}{K}$ y $x_1, \dots, x_k \in D$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y números $\epsilon > 0$ y $\lambda > 0$, existe una inmersión mínima conforme $Y: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1(\overline{M})$ cumpliendo las siguientes condiciones:

- (i) $Y(\overline{M}) \subset D$.
- (ii) $\|Y - X\|_{1,K} < \epsilon$.
- (iii) $\text{dist}(x_j, Y(\overline{M})) < \epsilon$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, donde dist denota la distancia Euclídea en \mathbb{R}^n .

(iv) $\text{Flux}_Y = \text{Flux}_X$.

(v) La distancia intrínseca $\text{dist}_Y(p_0, bM) > \lambda$.

Demostración. Afirmamos que, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $k = 1$. En efecto, el caso general se deduce de una aplicación recursiva estándar de este caso particular. Asumimos por tanto que $k = 1$ y llamamos $x := x_1$.

Asumimos, también sin pérdida de generalidad, que \overline{M} es un dominio compacto con borde diferenciable en una superficie de Riemann abierta \mathcal{R} . Tomamos un punto $p \in bM = \overline{M} \setminus M$ y un arco diferenciable embebido $\gamma \subset \mathcal{R} \setminus M$ tal que p sea un extremo del mismo, ningún otro punto del arco esté contenido en \overline{M} y el conjunto

$$S := \overline{M} \cup \gamma$$

es Runge y *admisibile* en \mathcal{R} , véase la Definición 2.19. Denotamos por $q \in \mathcal{R} \setminus \overline{M}$ el otro extremo de γ .

Fijamos una 1-forma holomorfa θ en \mathcal{R} que no se anula en ningún punto, recordemos que la existencia de tal 1-forma viene garantizada por el Teorema 2.9. Consideramos una inmersión mínima conforme generalizada $(\tilde{X}, f\theta)$ en S siguiendo la Definición 2.43 tal que la inmersión $\tilde{X}: S \rightarrow \mathbb{R}^n$, que, recordemos, es de clase $\mathcal{C}^1(S)$, cumpla las siguientes propiedades:

(A) $\tilde{X}|_{\overline{M}} = X$.

(B) $\tilde{X}|_{\gamma} \subset D$.

(C) $\tilde{X}(q) = x$.

La existencia de tal inmersión es trivial pues $X(\overline{M}) \subset D$ y D es arco-conexo, véase el Lema 3.7.

Fijamos un número positivo $\delta > 0$ cuyo valor especificaremos más adelante. En estas circunstancias, el Teorema 3.1 proporciona una inmersión mínima conforme $\tilde{Y}: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

(D) $\|\tilde{Y} - \tilde{X}\|_{1,S} < \delta$.

(E) $\text{Flux}_{\tilde{Y}}(\alpha) = \text{Flux}_{\tilde{X}}(\alpha)$ para toda curva cerrada $\alpha \subset M$.

$$(F) \quad \tilde{Y}(q) = \tilde{X}(q) = x.$$

Puesto que X toma valores en D , las propiedades (A) y (B) aseguran que $\tilde{X}(S) \subset D$ y, por tanto, la propiedad (D) garantiza que $\tilde{Y}(S) \subset D$ siempre que elijamos el número $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Así, fijado δ en estas condiciones, como S es compacto, D es abierto y \tilde{Y} es continua, existe un entorno U de S en \mathcal{R} tal que

$$\tilde{Y}(U) \subset D. \quad (6.1)$$

A continuación utilizaremos el método de exponer puntos del borde en superficies de Riemann compactas bordeadas de Forstnerič y Wold. Para nuestro caso, elegimos entornos abiertos $W' \Subset W \Subset U \setminus K$ y $V \Subset U$ de p y γ en U , respectivamente. Por (47, Theorem 2.3) (véase también Forstnerič (42, Theorem 9.9.1)), existe un difeomorfismo

$$\phi: \overline{M} \rightarrow \phi(\overline{M}) \subset U \quad (6.2)$$

cumpliendo las siguientes propiedades, véase la Figura 6.1:

- (G) $\phi: M \rightarrow \phi(M)$ es un biholomorfismo.
- (H) El biholomorfismo ϕ es δ -próximo a la aplicación identidad en la norma \mathcal{C}^1 en $\overline{M} \setminus W'$.
- (I) $\phi(p) = q \in b\phi(\overline{M})$ y $\phi(\overline{M} \cap W') \subset W \cup V$.

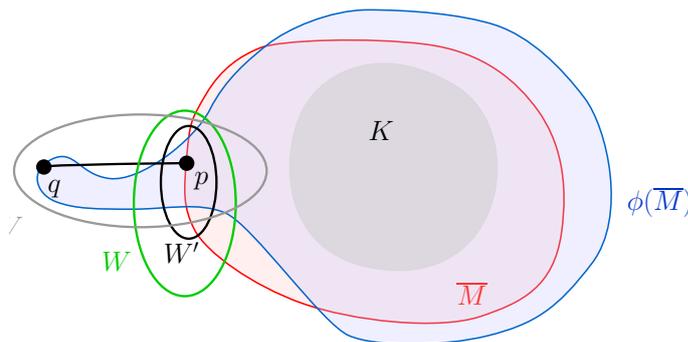


Figura 6.1: El difeomorfismo $\phi: \overline{M} \rightarrow \phi(\overline{M}) \subset U$

Afirmamos que la inmersión mínima conforme $\tilde{Y} \circ \phi: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase $\mathcal{C}^1(\overline{M})$ y satisface formalmente las condiciones (i)–(iv) del enunciado del lema supuesto que el número $\delta > 0$ sea suficientemente pequeño. En efecto,

en primer lugar es trivial que $Y \circ \phi$ es de clase $\mathcal{C}^1(\overline{M})$. Por las ecuaciones (6.1) y (6.2) tenemos que $\tilde{Y}(\phi(\overline{M})) \subset D$, lo que demuestra (i). Por otro lado, como $K \subset \overline{M} \setminus W'$, las propiedades (H), (D) y (A) implican que $\|\tilde{Y} \circ \phi - X\|_{1,K} < \epsilon$, siempre que $\delta > 0$ sea suficientemente pequeño, lo que asegura la condición (ii). Se tiene también que

$$(\tilde{Y} \circ \phi)(p) \stackrel{(I)}{=} \tilde{Y}(q) \stackrel{(F)}{=} x,$$

lo que implica que se cumple (iii), mientras que las propiedades (G), (E) y (A) implican la condición (iv).

Finalmente, (7, Lemma 4.1) nos permite aproximar la inmersión $\tilde{Y} \circ \phi: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ en la topología $\mathcal{C}^0(\overline{M})$, y por tanto también en la topología $\mathcal{C}^1(K)$, por inmersiones mínimas conformes $Y: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1(\overline{M})$ cumpliendo la condición (v) y con $\text{Flux}_Y = \text{Flux}_{\tilde{Y} \circ \phi}$, esto prueba la condición (iv). Notamos que en este punto de la demostración hemos usado de manera fuerte, aunque implícita, la existencia de soluciones aproximadas a problemas de tipo Riemann-Hilbert para superficies mínimas en \mathbb{R}^n , ya que esta herramienta es fundamental en la prueba de (7, Lemma 4.1). Finalmente, es obvio que si Y y $\tilde{Y} \circ \phi$ son suficientemente próximas en la topología $\mathcal{C}^0(\overline{M})$, entonces Y también cumple las condiciones (i), (ii) y (iii). \square

6.1.1. Demostración del Teorema 6.1

Sean $D \subset \mathbb{R}^n$, M , $\mathfrak{p}: \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $K \subset M$, $X: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$ como en el enunciado del Teorema 6.1.

Llamamos $M_0 := K$ y consideramos una sucesión exhaustiva de M por dominios conexos, compactos y Runge $\{M_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tales que la característica de Euler $\chi(M_j \setminus \overset{\circ}{M}_{j-1}) \in \{-1, 0\}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y

$$M_0 \Subset M_1 \Subset \dots \Subset \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_+} M_j = M. \tag{6.3}$$

Tal sucesión existe por el Lema 2.3.

Consideramos un subconjunto numerable $C = \{z_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset D$ que sea denso en D , es decir, verificando que

$$\overline{C} = \overline{D}. \tag{6.4}$$

Sean $N_0 := M_0 = K$ y $Y_0 := X$. Si $n \geq 5$ suponemos, sin pérdida de generalidad, que Y_0 es un embebimiento, como nos permite el Teorema 2.45. Fijamos también un punto base $p_0 \in \overset{\circ}{N}_0$.

Fijamos una sucesión de números positivos $\{\epsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}} \searrow 0$ cuyos valores serán especificados a más adelante.

Para demostrar el resultado vamos a construir una sucesión de pares $\{N_j, Y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ formados por dominios compactos Runge con borde diferenciable $N_j \subset M$ e inmersiones mínimas conformes $Y_j: N_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1(N_j)$ cumpliendo las siguientes propiedades para cada término $j \in \mathbb{N}$:

- (a_j) $Y_j(N_j) \subset D$.
- (b_j) $N_j \subset M_j$ y N_j es un retracto fuerte de deformación de M_j .
- (c_j) $\|Y_j - Y_{j-1}\|_{1, N_{j-1}} < \epsilon_j$.
- (d_j) $\text{dist}(z_k, Y_j(N_j)) < \epsilon_j$ para todo $k \in \{1, \dots, j\}$.
- (e_j) $\text{dist}_{Y_j}(p_0, bN_j) > j$.
- (f_j) $\text{Flux}_{Y_j}(\gamma) = \mathfrak{p}(\gamma)$ para toda curva cerrada $\gamma \subset N_j$.
- (g_j) Si $D = \mathbb{R}^n$ entonces $N_j = M_j$.
- (h_j) Si $n \geq 5$ entonces Y_j es un embebimiento.

Observamos que la condición (a_j) siempre se cumple cuando $D = \mathbb{R}^n$.

Una vez hayamos demostrado la existencia de tal sucesión, si elegimos cada número $\epsilon_j > 0$ en el proceso recursivo suficientemente pequeño (dependiendo en particular de la geometría de la inmersión Y_{j-1}), entonces la sucesión de inmersiones $\{Y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos de

$$\Omega := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j \subset M \quad (6.5)$$

a una inmersión mínima conforme

$$Y := \lim_{j \rightarrow +\infty} Y_j: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (6.6)$$

satisfaciendo las condiciones exigidas en el enunciado del teorema. En efecto, en primer lugar, las propiedades (b_j) y (g_j) y las ecuaciones (6.3)

y (6.5) aseguran que se cumple la condición (I); también que $\Omega = M$ si $D = \mathbb{R}^n$. Así, eligiendo los números ϵ_j tales que

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \epsilon_j < \epsilon \tag{6.7}$$

se tiene, en vista de la propiedad (c_j), que la aplicación límite Y existe, es una inmersión mínima conforme y cumple la condición (II). Por otro lado, si la sucesión $\{\epsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ decrece hacia cero suficientemente rápido entonces el teorema de Harnack asegura que Y es una inmersión mínima conforme. Finalmente, de las propiedades (c_j), (e_j) y (f_j) deducimos que Y es completa y cumple la condición (III) siempre que los números $\epsilon_j > 0$ hayan sido elegidos suficientemente pequeños.

Comprobemos a continuación la condición (IV). Las propiedades (a_j) aseguran que la inmersión toma valores en \bar{D} . Veamos que además no toca el borde, es decir, que $Y(\Omega) \cap bD = \emptyset$. Para ello elegimos

$$\epsilon_j < \frac{1}{j^2} \text{dist}(Y_{j-1}(N_{j-1}), bD) \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{6.8}$$

La distancia que aparece en la desigualdad anterior es positiva debido a la propiedad (a_j), por tanto tales números positivos $\epsilon_j > 0$ existen. Consideremos $p \in \Omega$ y veamos que $\text{dist}(Y(p), bD) > 0$, lo que demostrará que $Y(\Omega) \subset D$. Sea $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p \in N_{j-1}$ para todo $j \geq j_0$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{dist}(Y_{j-1}(p), bD) &\leq |Y_{j-1}(p) - Y_j(p)| + \text{dist}(Y_j(p), bD) \\ &\stackrel{(c_j)}{<} \epsilon_j + \text{dist}(Y_j(p), bD) \\ &\stackrel{(6.8)}{<} \frac{1}{j^2} \text{dist}(Y_{j-1}(p), bD) + \text{dist}(Y_j(p), bD). \end{aligned}$$

De este modo, $\text{dist}(Y_j(p), bD) \geq (1 - 1/j^2) \text{dist}(Y_{j-1}(p), bD)$ para todo $j \geq j_0$, luego se tiene que

$$\text{dist}(Y_{j_0+i}(p), bD) \geq \text{dist}(Y_{j_0}(p), bD) \prod_{j=j_0+1}^{j_0+i} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Tomando límites en la desigualdad anterior cuando $i \rightarrow +\infty$ obtenemos que

$$\text{dist}(Y(p), bD) \geq \frac{1}{2} \text{dist}(Y_{j_0}(p), bD) > 0,$$

donde la desigualdad final se deduce de (a_{j_0}) teniendo en cuenta que $Y_{j_0}(N_{j_0})$ es un subconjunto compacto. Esto demuestra que $Y(\Omega) \subset D$.

Para comprobar la segunda parte de la afirmación (IV), fijamos un punto $z \in \overline{D}$ y un número positivo $\delta > 0$. Basta comprobar que $\text{dist}(z, Y(\Omega)) < \delta$, esto implicará que $\overline{Y(\Omega)} = \overline{D}$. En efecto, en vista de la ecuación (6.4) existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que el punto $z_{j_0} \in C \subset D$ verifica

$$|z_{j_0} - z| < \delta/3. \quad (6.9)$$

Además, como $\{\epsilon_j\} \searrow 0$ entonces existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon_{j_1} < \delta/3$ y, por tanto, la propiedad (d_j) garantiza que, para todo $j \geq j_1$,

$$\text{dist}(z_k, Y_j(N_j)) < \delta/3 \quad \text{para todo } k \leq j. \quad (6.10)$$

Por otro lado, la ecuación (6.7) asegura la existencia de un número $j_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=j_2}^{\infty} \epsilon_k < \delta/3.$$

De este modo, por las propiedades (c_j) , se tiene para todo $j > j_2$ que

$$\|Y - Y_j\|_{1, N_j} < \delta/3. \quad (6.11)$$

Combinando las ecuaciones (6.9), (6.10) y (6.11) obtenemos, para todo $j > \max\{j_0, j_1, j_2\}$, que

$$\begin{aligned} \text{dist}(z, Y(\Omega)) &\leq |z - z_{j_0}| + \text{dist}(z_{j_0}, Y(\Omega)) \\ &\stackrel{(6.5)}{\leq} |z - z_{j_0}| + \text{dist}(z_{j_0}, Y(N_j)) \\ &\leq |z - z_{j_0}| + \text{dist}(z_{j_0}, Y_j(N_j)) + \|Y_j - Y\|_{1, N_j} < \delta. \end{aligned}$$

Esto prueba que $Y(\Omega)$ es denso en \overline{D} , completando así la comprobación de la condición (IV).

Finalmente, supongamos que $n \geq 5$ y probemos que la inmersión mínima conforme límite $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada en (6.6) es inyectiva siempre que los números $\{\epsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sean elegidos suficientemente pequeños. De hecho, es suficiente elegir

$$\epsilon_j < \frac{1}{2j^2} \inf \{|Y_{j-1}(p) - Y_{j-1}(q)| : p, q \in N_{j-1}, d(p, q) > 1/j\} \quad (6.12)$$

donde $d(\cdot, \cdot)$ es cualquier distancia en M fija. En efecto, tomemos puntos $p, q \in \Omega$, $p \neq q$, y veamos que $Y(p) \neq Y(q)$. Sea $j_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $p, q \in N_{j-1}$ y $d(p, q) > 1/j$ para todo $j \geq j_0$; este número existe gracias a la propiedad (b_j) y la ecuación (6.5). Entonces

$$\begin{aligned} |Y_{j-1}(p) - Y_{j-1}(q)| &\leq |Y_{j-1}(p) - Y_j(p)| + |Y_j(p) - Y_{j-1}(q)| \\ &\stackrel{(c_j)}{\leq} \epsilon_j + |Y_j(p) - Y_j(q)| + |Y_j(q) - Y_{j-1}(q)| \\ &\stackrel{(c_j)}{<} 2\epsilon_j + |Y_j(p) - Y_j(q)| \\ &\stackrel{(6.12)}{<} \frac{1}{j^2} |Y_{j-1}(p) - Y_{j-1}(q)| + |Y_j(p) - Y_j(q)|. \end{aligned}$$

Como antes, se tiene que $|Y_j(p) - Y_j(q)| \geq (1 - 1/j^2) |Y_{j-1}(p) - Y_{j-1}(q)|$ para todo $j \geq j_0$ y, por tanto,

$$|Y_{j_0+i}(p) - Y_{j_0+i}(q)| \geq |Y_{j_0}(p) - Y_{j_0}(q)| \prod_{j=j_0+1}^{j_0+i} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Tomando límites cuando i va a infinito en la expresión anterior se obtiene que

$$|Y(p) - Y(q)| \geq \frac{1}{2} |Y_{j_0}(p) - Y_{j_0}(q)| > 0,$$

donde ahora la desigualdad final se deduce de (h_{j_0}) . Hemos probado por tanto que Y es inyectiva, es decir, la condición (V) del enunciado del teorema.

Para completar la prueba solo queda demostrar la existencia de la sucesión $\{N_j, Y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ con las propiedades anunciadas. Razonamos por inducción. El caso base viene dado por la pareja (N_0, Y_0) que claramente satisface las propiedades (a_0) , (b_0) , (e_0) , (f_0) , (g_0) y (h_0) ; mientras que las propiedades (c_0) y (d_0) son vacías.

Para el paso inductivo supongamos que existe una pareja (N_{j-1}, Y_{j-1}) cumpliendo (a_{j-1}) – (h_{j-1}) , para algún $j \in \mathbb{N}$, y construyamos (N_j, Y_j) cumpliendo las propiedades correspondientes. Para ello distinguiamos casos en función de la característica de Euler de $M_j \setminus \mathring{M}_{j-1}$.

Caso no crítico: supuesto que $\chi(M_j \setminus \mathring{M}_{j-1}) = 0$.

Por el Teorema 1.1 podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que Y_{j-1}

se extiende, con el mismo nombre, a una inmersión mínima conforme $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ con

$$\text{Flux}_{Y_{j-1}} = \mathfrak{p}. \quad (6.13)$$

Enfatizamos que, posiblemente, $X(M) \not\subset D$. Para solventar esta eventualidad elegimos un entorno compacto con borde diferenciable $N_j \subset M_j$ de N_{j-1} cumpliendo

$$Y_{j-1}(N_j) \subset D \quad (6.14)$$

y tal que N_{j-1} es un retracto fuerte de deformación de N_j ; tal entorno existe gracias a la propiedad (a_{j-1}) . Ya que $\chi(M_j \setminus \overset{\circ}{M}_{j-1}) = 0$, es claro que N_j también es un retracto fuerte de deformación de M_j . Esto prueba (b_j) . Además, si $D = \mathbb{R}^n$ entonces podemos elegir $N_j = M_j$, ya que la ecuación (6.14) se cumple formalmente con M_j jugando el papel de N_j . Esto prueba la condición (g_j) .

La ecuación (6.14) nos permite aplicar el Lema 6.2 al dominio D , la superficie de Riemann compacta bordeada N_j , la inmersión mínima conforme $Y_{j-1}: N_j \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1(N_j)$, el dominio compacto $N_{j-1} \subset \overset{\circ}{N}_j$, los puntos $p_0 \in \overset{\circ}{K} \subset \overset{\circ}{N}_{j-1}$ y $z_1, \dots, z_j \in D$ y los números positivos ϵ_j y j . Al hacerlo, obtenemos una inmersión mínima conforme $Y_j: N_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1(N_j)$ cumpliendo las siguientes propiedades:

- (i) $Y_j(N_j) \subset D$.
- (ii) $\|Y_j - Y_{j-1}\|_{1, N_{j-1}} < \epsilon_j$.
- (iii) $\text{dist}(z_k, Y_j(N_j)) < \epsilon_j$ para todo $k \in \{1, \dots, j\}$.
- (iv) $\text{Flux}_{Y_j}(\gamma) = \text{Flux}_{Y_{j-1}}(\gamma)$ para toda curva cerrada $\gamma \subset N_j$.
- (v) $\text{dist}_{Y_j}(p_0, bN_j) > j$.

Además, podemos asumir por el Teorema 2.45 que

- (vi) si $n \geq 5$ entonces Y_j es un embebimiento.

De este modo la pareja (N_j, Y_j) satisface las condiciones (a_j) – (h_j) . En efecto, ya hemos comprobado que (b_j) y (g_j) se satisfacen. Por otro lado, las condiciones (a_j) , (c_j) , (d_j) , (e_j) y (h_j) equivalen a las propiedades (i), (ii), (iii), (v) y (vi), respectivamente, mientras que la condición (f_j) se deduce de la propiedad (iv) y la ecuación (6.13).

Caso crítico: supuesto que $\chi(M_j \setminus \mathring{M}_{j-1}) = -1$.

En este caso existe una curva de Jordan diferenciable $\alpha \subset \mathring{M}_j \setminus \mathring{N}_{j-1}$ con sus dos extremos en bN_{j-1} y sin más puntos en N_{j-1} tal que

$$S := N_{j-1} \cup \alpha \subset \mathring{M}_j$$

es un subconjunto Runge y admisible de M , en el sentido de la Definición 2.19, y un retracto fuerte de deformación de M_j .

Fijamos θ una 1-forma holomorfa en M que no tenga ceros. A continuación, consideramos una inmersión mínima conforme generalizada $(\tilde{Y}, f\theta)$ en S , en el sentido de la Definición 2.43, tal que

$$\begin{aligned} \tilde{Y}|_{N_{j-1}} &= Y_{j-1}, \quad \tilde{Y}(\alpha) \subset D \quad \text{y} \\ \int_{\gamma} f\theta &= i\mathfrak{p}(\gamma) \quad \text{para toda curva cerrada } \gamma \text{ en } S. \end{aligned}$$

Tal inmersión siempre existe en vista de las propiedades (a_{j-1}) y (f_{j-1}) y del hecho de que D sea arco-conexo, véase el Lema 3.7. Por el Teorema 3.1 podemos aproximar \tilde{Y} en la topología $\mathcal{C}^1(S)$ ¹ por inmersiones mínimas conformes $\tilde{Y}_{j-1}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ con \mathfrak{p} como aplicación flujo que, si $n \geq 5$, son además embebimientos. Para cada una de esas aproximaciones \tilde{Y}_{j-1} de \tilde{Y} existe un entorno compacto N'_{j-1} de S en \mathring{M}_j tal que $N'_{j-1} \subset M$ es un dominio compacto Runge con borde diferenciable, S es un retracto fuerte de deformación de N'_{j-1} e \tilde{Y}_{j-1} cumple formalmente las condiciones (a_{j-1}) – (h_{j-1}) excepto (g_{j-1}) , siempre que la aproximación sea lo suficientemente buena. En esta situación, la característica de Euler $\chi(M_j \setminus \mathring{N}'_{j-1})$ es 0, lo que reduce la prueba al caso no crítico.

Esto concluye la prueba de la existencia de la sucesión $\{N_j, Y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ con las propiedades requeridas y por tanto la demostración del teorema.

6.1.2. Demostración del Teorema 1.10

Sea $\overline{M} = M \cup bM$ una superficie de Riemann compacta bordeada y sean $K_0 \subset M$ un subconjunto compacto con borde diferenciable y $\epsilon > 0$ un número positivo. Para probar el teorema construiremos una inmersión mínima conforme y completa $Y: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ que verifique las siguientes propiedades:

¹Este tipo de aproximación está explicada en el Teorema 2.44.

- (a) $\|Y - X\|_{1, K_0} < \epsilon$.
- (b) $\text{Flux}_Y = \text{Flux}_X$.
- (c) $Y(M) \subset D$ e $\overline{Y(M)} = \overline{D}$.
- (d) Si $n \geq 5$ entonces Y es inyectiva.

La condición (b) anterior nos da el control sobre el flujo de la inmersión que vamos a construir y que no aparece en el enunciado del Teorema 1.10.

Salvo por agrandar K_0 si fuera necesario, asumimos que es un retracto fuerte de deformación de \overline{M} . Consideramos también un subconjunto numerable $C = \{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de D tal que

$$\overline{C} = \overline{D}. \quad (6.15)$$

Fijamos un punto $p_0 \in \overset{\circ}{K}_0 \neq \emptyset$ y elegimos una sucesión de números positivos $\{\epsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}} \searrow 0$ cuyo valor especificaremos más adelante. Consideramos $Y_0 := X: \overline{M} \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ y, si $n \geq 5$, suponemos, sin pérdida de generalidad gracias al Teorema 2.45, que Y_0 es un embebimiento. Construiremos de forma recursiva una sucesión $\{K_j, Y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de dominios compactos con borde diferenciable

$$K_0 \Subset K_1 \Subset K_2 \Subset \dots \Subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = M \quad (6.16)$$

e inmersiones mínimas conformes $\{Y_j: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{j \in \mathbb{N}}$ de clase $\mathcal{C}^1(\overline{M})$ cumpliendo las siguientes propiedades para todo $j \in \mathbb{N}$:

- (I_j) $Y_j(\overline{M}) \subset D$.
- (II_j) $\|Y_j - Y_{j-1}\|_{1, K_{j-1}} < \epsilon_j$.
- (III_j) $\text{dist}(z_k, Y_j(K_j)) < \epsilon_j$ para todo $k \in \{1, \dots, j\}$.
- (IV_j) $\text{Flux}_{Y_j}(\gamma) = \text{Flux}_{Y_{j-1}}(\gamma)$ para toda curva cerrada $\gamma \subset M$.
- (V_j) La distancia intrínseca $\text{dist}_{Y_j}(p_0, bK_j) > j$.
- (VI_j) Si $n \geq 5$ entonces Y_j es un embebimiento.

Para construir la sucesión razonamos por inducción de un modo similar al de la demostración del Teorema 6.1. La base de la inducción la cumple la pareja (K_0, Y_0) que claramente satisface las condiciones (I₀), (V₀) y (VI₀)

mientras que las condiciones (II_0) , (III_0) y (IV_0) son vacías. Para la demostración del paso inductivo supongamos que hemos construido (K_{j-1}, Y_{j-1}) cumpliendo (I_{j-1}) – (V_{j-1}) . Por (I_{j-1}) podemos aplicar el Lema 6.2 a la inmersión mínima conforme Y_{j-1} , el dominio compacto K_{j-1} , el punto $p_0 \in \overset{\circ}{K}_0 \subset \overset{\circ}{K}_{j-1}$, los puntos $z_1, \dots, z_j \in D$ y los números positivos ϵ_j y j obteniendo una inmersión mínima conforme $Y_j: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1(\overline{M})$ que cumple las siguientes propiedades:

- (i) $Y_j(\overline{M}) \subset D$.
- (ii) $\|Y_j - Y_{j-1}\|_{1, K_{j-1}} < \epsilon_j$.
- (iii) $\text{dist}(z_k, Y(\overline{M})) < \epsilon_j$ para todo $k \in \{1, \dots, j\}$.
- (iv) $\text{Flux}_{Y_j} = \text{Flux}_{Y_{j-1}}$.
- (v) $\text{dist}_{Y_j}(p_0, bM) > j$.

Además, podemos asumir por el Teorema 2.45 que

- (vi) si $n \geq 5$ entonces Y_j es un embebimiento.

Las condiciones (I_j) , (II_j) , (IV_j) y (VI_j) del Lema 6.2 equivalen a las propiedades (i), (ii), (iv) y (vi). Además, puesto que las desigualdades que aparecen en (iii) y (v) son ambas estrictas, las condiciones (III_j) y (V_j) son válidas para cualquier dominio compacto con borde diferenciable y suficientemente grande $K_j \subset M$ que sea un retracto fuerte de deformación de \overline{M} . En cada paso del proceso recursivo, elegimos tal K_j conteniendo a K_{j-1} en su interior y siendo suficientemente grande para que la ecuación (6.16) se verifique. Esto concluye la inducción y finaliza la demostración de la existencia de la sucesión $\{K_j, Y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ verificando las condiciones (I_j) – (VI_j) .

Afirmamos entonces que eligiendo el número $\epsilon_j > 0$ suficientemente pequeño (dependiendo de la geometría de Y_{j-1}) en cada paso de la inducción, la sucesión $\{Y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos en M a una aplicación límite

$$Y := \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j: M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

que cumple las condiciones (a)–(d). En efecto, razonando de forma similar a como hicimos en la demostración del Teorema 6.1, la propiedad (II_j) asegura que la aplicación límite Y es una inmersión mínima conforme que satisface (a). Además, la propiedad (IV_j) implica (b). Mientras que (V_j) y (II_j)

garantizan la completitud de Y . La condición (c) se deduce de (I_j) , (II_j) y (III_j) y finalmente las propiedades (II_j) y (VI_j) aseguran la condición (d).

6.2. Otras familias de superficies completas y densas

Como ya se mencionó en la introducción del capítulo, todas las herramientas y técnicas utilizadas en la demostración de los Teoremas 6.1 y 1.10 están disponibles para otros objetos geométricos: superficies mínimas no orientables en \mathbb{R}^n , curvas complejas en \mathbb{C}^n , curvas nulas holomorfas en \mathbb{C}^n y curvas legendrianas holomorfas en \mathbb{C}^n . Por lo tanto, las demostraciones presentadas en la Sección 6.1 son fácilmente adaptables para obtener resultados análogos a los Teoremas 6.1 y 1.10 en estos otros ambientes.

Superficies mínimas no orientables en \mathbb{R}^n

Estas superficies son foco de interés desde los inicios del estudio de las superficies mínimas, como muestra el artículo de Lie (65) de 1878, y la literatura sobre ellas es extensa, véanse por ejemplo (71, 66, 67) y las referencias que allí aparecen. Las *superficies mínimas conformes no orientables* en \mathbb{R}^n para $n \geq 3$ están caracterizadas como la imagen de inmersiones mínimas conformes $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que $X \circ \mathfrak{J} = X$, donde $\mathfrak{J}: M \rightarrow M$ es una involución antiholomorfa sin puntos fijos definida sobre una superficie de Riemann abierta M . Para una tal inmersión se tiene que

$$\text{Flux}_X(\mathfrak{J}_*\gamma) = -\text{Flux}_X(\gamma) \quad \text{para todo } \gamma \in \mathcal{H}_1(M; \mathbb{Z}). \quad (6.17)$$

Recientemente, Alarcón, Forstnerič y López han desarrollado en (16) nuevas técnicas propias del análisis complejo para el estudio de las superficies mínimas no orientables en \mathbb{R}^n ; en particular, han obtenido todos los resultados requeridos en nuestro método de demostración. Al igual que se tiene en el caso orientable, el resultado de posición general para superficies mínimas no orientables necesita también que la dimensión cumpla $n \geq 5$. Por lo tanto, resultados análogos a los Teoremas 6.1 y 1.10 son ciertos para superficies mínimas no orientables bajo la suposición necesaria sobre el flujo dada por la ecuación (6.17).

Curvas complejas en \mathbb{C}^n

Todas las herramientas utilizadas en las demostraciones de la Sección 6.1 son clásicas para la familia de inmersiones holomorfas definidas sobre una superficie de Riemann abierta y con valores en \mathbb{C}^n para $n \geq 2$. En esta situación la posición general viene dada cuando $n \geq 3$. Referimos a Bishop (27) para el teorema de aproximación Runge–Mergelyan y a Drinovec Drnovšek y Forstnerič (31) para el método de Riemann–Hilbert (véase también la introducción de Drinovec Drnovšek y Forstnerič en (32) para un desarrollo ampliado sobre este tema).

A modo de ejemplo, siguiendo la demostración del Teorema 6.1 se puede probar el siguiente resultado:

Teorema 6.3. *Sea M una superficie de Riemann abierta. El conjunto de inmersiones holomorfas completas $M \rightarrow \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, con imagen densa forma un subconjunto denso en el conjunto $\mathcal{O}(M, \mathbb{C}^n)$ de todas las funciones holomorfas $M \rightarrow \mathbb{C}^n$ con la topología compacto-abierta.*

Además, si $n \geq 3$ entonces el conjunto de todas las inmersiones holomorfas completas e inyectivas $M \rightarrow \mathbb{C}^n$ con imagen densa es también denso en $\mathcal{O}(M, \mathbb{C}^n)$.

Queremos resaltar que la novedad del Teorema 6.3 es el hecho de que las inmersiones involucradas son *completas*; obviamente, el conjunto de todas las inmersiones holomorfas $M \rightarrow \mathbb{C}^n$ es mayor que el de las inmersiones completas. En efecto, sin tener en cuenta la completitud, existen numerosos resultados en la literatura relacionados con el tema. Por ejemplo, si consideramos el espacio $\mathcal{O}(S, Z)$ de las aplicaciones holomorfas definidas sobre una *variedad Stein* S (véase Gunning y Rossi (55) y Hörmander (57) para el estudio de las variedades Stein) y con valores en una *variedad Oka* Z dotado de la topología compacto-abierta, entonces la propiedad Oka con aproximación e interpolación (véase Forstnerič (42, Theorem 5.4.4)) implica trivialmente que las aplicaciones en $\mathcal{O}(S, Z)$ con imagen densa forman un subconjunto denso. Además, si $\dim Z \geq 2 \dim S$ ($\dim Z \geq 2 \dim S + 1$) entonces, por posición general (42, Theorem 8.9.1 y Corollary 8.9.3), el subconjunto de inmersiones (inyectivas) con imagen densa es también un subconjunto denso de $\mathcal{O}(S, Z)$. Por otro lado, si $\dim S \geq \dim Z$ entonces existen aplicaciones holomorfas fuertemente dominantes *sobreyectivas* $S \rightarrow Z$ (véase Forstnerič (43) y las referencias que allí aparecen).

En la misma línea, Forstnerič y Winkelmann demostraron en (46) que, para toda variedad compleja conexa Z (no necesariamente Oka), el conjunto de todas las aplicaciones holomorfas definidas en el disco unidad $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ y con valores en Z con imagen densa es un subconjunto denso en $\mathcal{O}(\mathbb{D}, Z)$; véase también Winkelmann (90) para algunos resultados parciales en esta dirección.

Recientemente, Alarcón y Forstnerič han demostrado en (14) que existen inmersiones holomorfas completas e inyectivas $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ cuya imagen es densa en \mathbb{C}^2 . El mismo resultado es cierto si sustituimos \mathbb{C} por cualquier superficie de Riemann abierta M que admita un embebimiento propio y holomorfo en \mathbb{C}^2 .

Curvas nulas holomorfas en \mathbb{C}^n

Recordamos que, dada una superficie de Riemann abierta M , una curva nula es una inmersión holomorfa $F = (F_1, \dots, F_n): M \rightarrow \mathbb{C}^n$ ($n \geq 3$) dirigida por la cuádrica nula \mathfrak{A} , véase la Definición 2.24.

Hemos visto que la cuádrica nula punteada $\mathfrak{A}_* = \mathfrak{A} \setminus \{0\}$ es una variedad de Oka, véase el Lema 2.30. Estas curvas están fuertemente relacionadas con las superficies mínimas inmersas en \mathbb{R}^n como se vio en el Capítulo 3. Las herramientas requeridas para adaptar la demostración de los Teoremas 6.1 y 1.10 para curvas nulas holomorfas han sido proporcionadas recientemente por Alarcón y López (19), Alarcón y Forstnerič (11, 12) y Alarcón, Drinovec Drnovšek y Forstnerič (7). En esta situación, el embebimiento como posición general se obtiene para $n \geq 3$.

Curvas legendrianas holomorfas en \mathbb{C}^{2n+1}

Estas curvas son inmersiones holomorfas

$$F = (X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n, Z): M \rightarrow \mathbb{C}^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

definidas sobre una superficie de Riemann abierta M y con valores en \mathbb{C}^{2n+1} que son tangentes a la estructura holomorfa estándar de contacto de \mathbb{C}^{2n+1} ; o equivalentemente que verifican la expresión

$$dZ + \sum_{j=1}^n X_j dY_j = 0 \quad \text{en todo punto de } M.$$

En este contexto, los resultados necesarios han sido proporcionados por Alarcón, Forstnerič y López en (18), siendo para este caso la posición general embebida válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Las curvas holomorfas legendrianas son curvas complejas análogas a las curvas legendrianas reales en \mathbb{R}^{2n+1} y tienen un papel importante en la geometría diferencial, en particular en la geometría de contacto.

Recordemos que una *variedad de contacto compleja* es una variedad compleja W de dimensión impar $2n+1 \geq 3$ con una *estructura holomorfa de contacto* \mathcal{L} , siendo esta un subfibrado vectorial holomorfo de codimensión compleja 1 del fibrado tangente TW tal que cada punto $p \in W$ admite un entorno abierto $U \subset W$ para el cual se cumple que $\mathcal{L}|_U = \ker \eta$ para alguna 1-forma holomorfa η en U cumpliendo $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ en todo punto de U . Una inmersión holomorfa $F: M \rightarrow W$ se dice que es *legendriana* si es tangente en todo punto a la estructura de contacto:

$$dF_p(T_p M) \subset \mathcal{L}_{F(p)} \quad \text{para todo } p \in M.$$

Por el teorema de Darboux (véase (18, Theorem A.2)), toda variedad de contacto compleja (W, \mathcal{L}) de dimensión $2n+1$ es localmente contactomórfica al espacio euclídeo complejo \mathbb{C}^{2n+1} con su estructura de contacto holomorfa estándar. Por tanto, de los resultados análogos a los Teoremas 6.1 y 1.10 para curvas legendrianas en \mathbb{C}^{2n+1} podemos deducir también el siguiente corolario.

Corolario 6.4. *Sea (W, \mathcal{L}) una variedad de contacto compleja. Entonces cada punto $p \in W$ admite un entorno abierto $U \subset W$ con la siguiente propiedad: Para cualquier dominio $V \Subset U$ existen inmersiones legendrianas holomorfas inyectivas $M \rightarrow V$ que son densas en V y que son completas respecto de toda métrica riemanniana en W , donde M es o una superficie de Riemann bordeada o alguna estructura compleja en cualquier superficie diferenciable, abierta, conexa y orientable.*

La demostración de este corolario se realiza siguiendo las ideas del resultado que aparece en (18, Corollary 1.3), véase la referencia para los detalles. Queda como problema abierto estudiar si una variedad de contacto compleja, con una métrica riemanniana asociada, admite curvas legendrianas complejas densas y completas.

Aún más recientemente, en (9), Alarcón y Forstnerič demostraron la existencia de una carta de Darboux holomorfa alrededor de cualquier curva

legendriana holomorfa abierta en una variedad de contacto compleja arbitraria. Como consecuencia, el Corolario 6.4 sigue siendo cierto si reemplazamos el punto p por cualquier curva de este tipo en W .

Bibliografía

- (1) R. Abraham. Transversality in manifolds of mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69:470–474, 1963.
- (2) R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*, volume 75 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1988.
- (3) A. Alarcón and I. Castro-Infantes. Complete minimal surfaces densely lying in arbitrary domains of \mathbb{R}^n . *Geom. Topol.*, 22(1):571–590, 2018.
- (4) A. Alarcón and I. Castro-Infantes. Interpolation by conformal minimal surfaces and directed holomorphic curves. *Analysis & PDE*, 12(2):561–604, 2019.
- (5) A. Alarcón, I. Castro-Infantes, and F. J. López. Interpolation and optimal hitting for complete minimal surfaces with finite total curvature. Preprint arXiv1712.04727.
- (6) A. Alarcón, B. Drinovec Drnovšek, F. Forstnerič, and F. J. López. Minimal surfaces in minimally convex domains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, in press.
- (7) A. Alarcón, B. Drinovec Drnovšek, F. Forstnerič, and F. J. López. Every bordered Riemann surface is a complete conformal minimal surface bounded by Jordan curves. *Proc. London Math. Soc.*, 111(4):851–886, 2015.
- (8) A. Alarcón, I. Fernández, and F. J. López. Harmonic mappings and conformal minimal immersions of Riemann surfaces into \mathbb{R}^N . *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 47(1-2):227–242, 2013.
- (9) A. Alarcón and F. Forstnerič. Darboux charts around holomorphic Legendrian curves and applications. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, in press.

-
- (10) A. Alarcón and F. Forstnerič. New complex analytic methods in the theory of minimal surfaces: a survey. *J. Aust. Math. Soc.*, in press.
- (11) A. Alarcón and F. Forstnerič. Null curves and directed immersions of open Riemann surfaces. *Invent. Math.*, 196(3):733–771, 2014.
- (12) A. Alarcón and F. Forstnerič. The Calabi-Yau problem, null curves, and Bryant surfaces. *Math. Ann.*, 363(3-4):913–951, 2015.
- (13) A. Alarcón and F. Forstnerič. Null holomorphic curves in \mathbb{C}^3 and the conformal Calabi-Yau problem. In *Complex Geometry and Dynamics: The Abel Symposium 2013*, volume 10 of *Abel Symposia*, pages 101–121. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2015.
- (14) A. Alarcón and F. Forstnerič. Complete densely embedded complex lines in \mathbb{C}^2 . *Proc. Amer. Math. Soc.*, 146(3):1059–1067, 2018.
- (15) A. Alarcón, F. Forstnerič, and F. J. López. Every meromorphic function is the Gauss map of a conformal minimal surface. *J. Geom. Anal.*, in press.
- (16) A. Alarcón, F. Forstnerič, and F. J. López. New complex analytic methods in the study of non-orientable minimal surfaces in \mathbb{R}^n . *Mem. Amer. Math. Soc.*, in press.
- (17) A. Alarcón, F. Forstnerič, and F. J. López. Embedded minimal surfaces in \mathbb{R}^n . *Math. Z.*, 283(1-2):1–24, 2016.
- (18) A. Alarcón, F. Forstnerič, and F. J. López. Holomorphic Legendrian curves. *Compos. Math.*, 153(9):1945–1986, 2017.
- (19) A. Alarcón and F. J. López. Minimal surfaces in \mathbb{R}^3 properly projecting into \mathbb{R}^2 . *J. Differential Geom.*, 90(3):351–381, 2012.
- (20) A. Alarcón and F. J. López. Null curves in \mathbb{C}^3 and Calabi-Yau conjectures. *Math. Ann.*, 355(2):429–455, 2013.
- (21) A. Alarcón and F. J. López. Proper holomorphic embeddings of Riemann surfaces with arbitrary topology into \mathbb{C}^2 . *J. Geom. Anal.*, 23(4):1794–1805, 2013.
- (22) A. Alarcón and F. J. López. Properness of associated minimal surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366(10):5139–5154, 2014.

- (23) A. Alarcón and F. J. López. Approximation theory for nonorientable minimal surfaces and applications. *Geom. Topol.*, 19(2):1015–1062, 2015.
- (24) P. Andrade. A wild minimal plane in \mathbf{R}^3 . *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(5):1451–1457, 2000.
- (25) J. L. M. Barbosa and A. G. Colares. *Minimal surfaces in \mathbf{R}^3* , volume 1195 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Translated from the Portuguese.
- (26) H. Behnke and K. Stein. Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. *Math. Ann.*, 120:430–461, 1949.
- (27) E. Bishop. Subalgebras of functions on a Riemann surface. *Pacific J. Math.*, 8:29–50, 1958.
- (28) H. Cartan. Variétés analytiques complexes et cohomologie. In *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, tenu à Bruxelles, 1953*, pages 41–55. Georges Thone, Liège; Masson & Cie, Paris, 1953.
- (29) I. Castro-Infantes. A geometric application of Runge’s Theorem. *Reports@SCM*, 2(1):21–32, 2016.
- (30) M. P. do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.
- (31) B. Drinovec Drnovšek and F. Forstnerič. Holomorphic curves in complex spaces. *Duke Math. J.*, 139(2):203–253, 2007.
- (32) B. Drinovec Drnovšek and F. Forstnerič. The Poletsky-Rosay theorem on singular complex spaces. *Indiana Univ. Math. J.*, 61(4):1407–1423, 2012.
- (33) B. Drinovec Drnovšek and F. Forstnerič. Minimal hulls of compact sets in \mathbb{R}^3 . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(10):7477–7506, 2016.
- (34) Y. Eliashberg and N. Mishachev. *Introduction to the h -principle*, volume 48 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- (35) H. M. Farkas and I. Kra. *Riemann surfaces*, volume 71 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992.

- (36) H. Florack. Reguläre und meromorphe Funktionen auf nicht geschlossenen Riemannschen Flächen. *Schr. Math. Inst. Univ. Münster.*, 1948(1):34, 1948.
- (37) J. E. Fornæss, F. Forstnerič, and E. F. Wold. Holomorphic approximation: the legacy of Weierstrass, Runge, Oka-Weil, and Mergelyan. *Advancements in Complex Analysis* by Springer-Verlag., in press.
- (38) F. Forstnerič. The Oka principle for multivalued sections of ramified mappings. *Forum Math.*, 15(2):309–328, 2003.
- (39) F. Forstnerič. Holomorphic submersions from Stein manifolds. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 54(6):1913–1942 (2005), 2004.
- (40) F. Forstnerič. Runge approximation on convex sets implies the Oka property. *Ann. of Math. (2)*, 163(2):689–707, 2006.
- (41) F. Forstnerič. Oka manifolds: from Oka to Stein and back. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 22(4):747–809, 2013. With an appendix by Finnur Lárusson.
- (42) F. Forstnerič. *Stein manifolds and holomorphic mappings. The homotopy principle in complex analysis (2nd edn)*, volume 56 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer, Berlin, 2017.
- (43) F. Forstnerič. Surjective holomorphic maps onto Oka manifolds. In *Complex and symplectic geometry*, volume 21 of *Springer INdAM Ser.*, pages 73–84. Springer, Cham, 2017.
- (44) F. Forstnerič and F. Lárusson. The parametric h-principle for minimal surfaces in \mathbb{R}^n and null curves in \mathbb{C}^n . *Comm. Anal. Geom.*, in press.
- (45) F. Forstnerič and F. Lárusson. Survey of Oka theory. *New York J. Math.*, 17A:11–38, 2011.
- (46) F. Forstnerič and J. Winkelmann. Holomorphic discs with dense images. *Math. Res. Lett.*, 12(2-3):265–268, 2005.
- (47) F. Forstnerič and E. F. Wold. Bordered Riemann surfaces in \mathbb{C}^2 . *J. Math. Pures Appl. (9)*, 91(1):100–114, 2009.

- (48) H. Fujimoto. On the Gauss map of a complete minimal surface in \mathbf{R}^m . *J. Math. Soc. Japan*, 35(2):279–288, 1983.
- (49) J. A. Gálvez and P. Mira. Dense solutions to the Cauchy problem for minimal surfaces. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 35(3):387–394, 2004.
- (50) H. Grauert. Approximationssätze für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Räumen. *Math. Ann.*, 133:139–159, 1957.
- (51) H. Grauert. Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. *Math. Ann.*, 135:263–273, 1958.
- (52) M. Gromov. *Partial differential relations*, volume 9 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) (Results in Mathematics and Related Areas (3))*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- (53) M. Gromov. Oka’s principle for holomorphic sections of elliptic bundles. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(4):851–897, 1989.
- (54) R. C. Gunning and R. Narasimhan. Immersion of open Riemann surfaces. *Math. Ann.*, 174:103–108, 1967.
- (55) R. C. Gunning and H. Rossi. *Analytic functions of several complex variables*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009. Reprint of the 1965 original.
- (56) D. A. Hoffman and R. Osserman. The geometry of the generalized Gauss map. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 28(236):iii+105, 1980.
- (57) L. Hörmander. *An introduction to complex analysis in several variables*, volume 7 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, third edition, 1990.
- (58) L. Hörmander and J. Wermer. Uniform approximation on compact sets in C^n . *Math. Scand.*, 23:5–21 (1969), 1968.
- (59) A. Huber. On subharmonic functions and differential geometry in the large. *Comment. Math. Helv.*, 32:13–72, 1957.
- (60) L. P. Jorge and W. H. Meeks, III. The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature. *Topology*, 22(2):203–221, 1983.

-
- (61) L. P. Jorge and F. Xavier. A complete minimal surface in \mathbb{R}^3 between two parallel planes. *Ann. of Math. (2)*, 112(1):203–206, 1980.
- (62) Y. Kusunoki and Y. Sainouchi. Holomorphic differentials on open Riemann surfaces. *J. Math. Kyoto Univ.*, 11:181–194, 1971.
- (63) F. Kutzschebauch. Flexibility properties in complex analysis and affine algebraic geometry. In *Automorphisms in birational and affine geometry*, volume 79 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 387–405. Springer, Cham, 2014.
- (64) F. Lárusson. What is ... an Oka manifold? *Notices Amer. Math. Soc.*, 57(1):50–52, 2010.
- (65) S. Lie. Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. *Math. Ann.*, 14(3):331–416, 1878.
- (66) F. J. López. A complete minimal Klein bottle in \mathbb{R}^3 . *Duke Math. J.*, 71(1):23–30, 1993.
- (67) F. J. López. On complete nonorientable minimal surfaces with low total curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(7):2737–2758, 1996.
- (68) F. J. López. Exotic minimal surfaces. *J. Geom. Anal.*, 24(2):988–1006, 2014.
- (69) F. J. López. Uniform approximation by complete minimal surfaces of finite total curvature in \mathbb{R}^3 . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366(12):6201–6227, 2014.
- (70) F. J. López and F. Martín. Complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 . *Publ. Mat.*, 43(2):341–449, 1999.
- (71) W. H. Meeks, III. The classification of complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 with total curvature greater than -8π . *Duke Math. J.*, 48(3):523–535, 1981.
- (72) S. N. Mergelyan. On the representation of functions by series of polynomials on closed sets. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 78:405–408, 1951.
- (73) P. W. Michor. *Manifolds of differentiable mappings*, volume 3 of *Shiva Mathematics Series*. Shiva Publishing Ltd., Nantwich, 1980.

- (74) G. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes. *Acta Math.*, 4(1):1–79, 1884. D'une variable indépendante.
- (75) S. Morales. On the existence of a proper minimal surface in \mathbb{R}^3 with a conformal type of disk. *Geom. Funct. Anal.*, 13(6):1281–1301, 2003.
- (76) N. Nadirashvili. Hadamard's and Calabi-Yau's conjectures on negatively curved and minimal surfaces. *Invent. Math.*, 126(3):457–465, 1996.
- (77) T. Napier and M. Ramachandran. *An introduction to Riemann surfaces*. Cornerstones. Birkhäuser/Springer, New York, 2011.
- (78) K. Oka. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. I. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles. *J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A*, 6:245–255, 1936.
- (79) R. Osserman. *A survey of minimal surfaces*. Dover Publications Inc., New York, second edition, 1986.
- (80) R. Osserman and M. Ru. An estimate for the Gauss curvature of minimal surfaces in \mathbf{R}^m whose Gauss map omits a set of hyperplanes. *J. Differential Geom.*, 46(3):578–593, 1997.
- (81) G. P. Pirola. Algebraic curves and non-rigid minimal surfaces in the Euclidean space. *Pacific J. Math.*, 183(2):333–357, 1998.
- (82) B. Riemann. Grundlagen für eine allgemeine theorie der functionen einer veränderlichen complexen grösse. *Inauguraldissertation, Göttingen*, 1851.
- (83) H. L. Royden. Function theory on compact Riemann surfaces. *J. Analyse Math.*, 18:295–327, 1967.
- (84) M. Ru. On the Gauss map of minimal surfaces immersed in \mathbf{R}^n . *J. Differential Geom.*, 34(2):411–423, 1991.
- (85) C. Runge. Zur Theorie der Analytischen Functionen. *Acta Math.*, 6(1):245–248, 1885.
- (86) J. L. Walsh. On the expansion of analytic functions in series of polynomials and in series of other analytic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 30(2):307–332, 1928.

-
- (87) K. Weierstrass. Zur theorie der eindeutigen analytischen functionen. *Abh. der Kön. Ak. der Wiss. zu Berlin*, pages 11–60, 1876.
- (88) K. Weierstrass. Über die analytische darstellbarkeit sogenannter willkürlicher functionen einer reellen veränderlichen. *Berl. Ber.*, (1885):663–640, 789–806, 1885.
- (89) A. Weil. L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. *Math. Ann.*, 111(1):178–182, 1935.
- (90) J. Winkelmann. Non-degenerate maps and sets. *Math. Z.*, 249(4):783–795, 2005.
- (91) K. Yang. *Complete minimal surfaces of finite total curvature*, volume 294 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994.

Índice de términos

- 1-forma, 24
 - diferenciable, 24
 - espinorial, 27
 - exacta, 25
 - holomorfa, 25
- aplicación
 - flujo, 47
 - llana, 23
 - siempre no llana, 23
- aplicación de Gauss
 - generalizada, 113
- característica de Euler, 17
- catenoide, 48
- cuádrlica nula, 36
- curva
 - divergente, 23
 - nula, 36
 - regular a trozos, 128
- divisor, 23
 - soporte de, 23
 - de una 1-forma, 26
 - de una función, 24
- estructura conforme, 17
- estructura espinorial, 27
- función
 - armónica, 25
 - holomorfa, 23
 - meromorfa, 24
- helicoides, 48
- holomorficamente
 - convexo, 37
- inmersión
 - completa, 22
- inmersión
 - completa, 22
 - dirigida, 35
 - dirigida generalizada, 84
 - mínima conforme, 43
 - generalizada, 50
 - propia, 22
- jet de aplicaciones, 34
- operadores d , ∂ y $\bar{\partial}$, 25
- punto
 - cúspide, 129
 - de contacto, 34
- representación espinorial, 49
- soporte
 - de una función, 16
- spray
 - de aplicaciones, 39
 - dominante, 39
- subconjunto
 - admisible, 31
 - muy simple, 68
 - simple, 68

- discreto, 15
- Runge, 18
- superficie
 - de Riemann, 17
 - bordeada, 29
 - tipo conforme finito, 29
 - mínima, 1, 42
 - con curvatura total finita, 51
- superficie de Enneper, 48
- superficies mínimas
 - conjugadas, 47
- tipo conforme, 28
- turning number, 129
- variedad
 - Oka, 38
 - Stein, 37
- vector curvatura media, 42
- winding number, 128

Esta tesis está parcialmente financiado por la Agencia Estatal de Investigación (SRA) y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (ERDF) vía el proyecto MTM2017-89677-P, MINECO, España; así como por la beca de investigación BES-2015-071993 del Plan Estatal de Investigación Científica y Técnica e Innovación; y el Fondo Social Europeo (FSE).