REAL OPTIONS
CAPITOLO 2: IL PRICING

Chiara D'Alpaos, Michele Moretto e Sergio Vergalli
Dipartimento di Scienze Economiche
Università di Brescia

Questa versione Novembre 2007

Indice

1 I TITOLI DERIVATI

I contratti finanziari sono contratti finalizzati al trasferimento di moneta o di merci a diverse date di esigibilità (o scadenze) subordinate alla realizzazione di diversi stati del mondo. Un titolo è un contratto stipulato tra due controparti, rispettivamente il venditore e l'acquirente, che stabilisce, per ciascuna data futura e stato del mondo, la quantità di moneta, merce, o contratto finanziario che il venditore deve trasferire al compratore.

Si definiscono **titoli primari** i contratti che stabiliscono direttamente i trasferimenti di merce o di moneta. Si definiscono **titoli derivati** i contratti in cui il trasferimento è regolato in maniera indiretta, ovvero attraverso il trasferimento di altri contratti. Il valore dei titoli derivati dipende dal valore di un altro titolo, detto titolo *sottostante* (es. azioni, merci, valute, tassi di interesse, indici di mercato).

1.1 Le opzioni

Una opzione finanziaria è il diritto, ma non l'obbligo, di investire in futuro. In ambito finanziario, il termine **opzione** indica un contratto attraverso il quale una parte si garantisce, previa corresponsione di un certo premio, la facoltà, ma non l'obbligo, di acquistare (o vendere) dalla (o alla) controparte un certo bene ad una data futura (scadenza o *expiration date*) e ad un certo prezzo predeterminato (prezzo di esercizio o *strike price*). Una volta esercitata, l'opzione è definitivamente perduta. Un'opzione *call* conferisce il diritto al suo possessore di acquistare un titolo ad un prezzo stabilito in un istante futuro; viceversa, un'opzione *put* dà il diritto al suo possessore di vendere un titolo ad un prezzo stabilito in un istante futuro.

Le opzioni sono funzioni di un certo *asset* o titolo rischioso ed il loro *payoff* dipende esplicitamente dal valore del titolo cui fanno riferimento. Il titolo rischioso su cui è costruita l'opzione è detto *stock* o *underlying asset.* Esistono due tipologie di opzioni: le **opzioni americane** e le **opzioni europee**. Un'opzione è detta americana se consente di vendere o di acquistare entro la data di scadenza (o maturità) dell'opzione stessa; un'opzione è detta europea se permette l'esercizio unicamente alla scadenza.

1.2 Altri titoli derivati.

- *Forwards e futures.* Un contratto *forward* è un contratto che stabilisce che, alla scadenza del contratto stesso, uno dei due contraenti consegni l'attività e l'altro contrente effettui il pagamento del prezzo prefissato nel contratto. In tal caso l'acquirente detiene una *long position* mentre il venditore ne detiene una *short*. Il prezzo, inoltre, è stabilito in modo tale che il valore del contratto risulti essere nullo per entrambe le parti. Un contratto *future* è simile ad un contratto *forward*, ma le variazioni dei prezzi sono stabilite su base giornaliera. Le specifiche contrattuali dei contratti *futures* sono standardizzate, al contrario dei contratti *forwards* che vengono scambiati *over-the-counter*, ovvero non nei mercati regolamentati, essendo accordi privati tra due istituzioni finanziarie.

- *Swaps.* Gli *swaps* sono accordi siglati tra due controparti relativi allo scambio di flussi di cassa futuri secondo modalità prestabilite. Lo swap sul tasso di interesse è il più comune (Interest Rate Swap, IRS). È un contratto bilaterale in base al quale i contraenti si scambiano, in relazione ad un capitale nominale, un flusso di interesse a tasso fisso con un flusso di interesse a tasso variabile per un determinato periodo di tempo. Esistono anche opzioni su swap e vengono indicate con il termine *swaption.*

- *Warrants* e convertibili. I *warrants* e i *covered warrants* rappresentano una particolare tipologia di opzioni e vengono emessi da una società o da una istituzione finanziaria sotto forma di titoli negoziabili, quotati in una o più Borse internazionali. Si distinguono dalle opzioni principlamente per la cartolarizzazione del diritto, il taglio minimo di negoziazione (nel loro caso più ridotto) e le scadenze (generalmente più lunghe). Spesso le società emettono dei *call warrants* sulle proprie azioni. Quando questi vengono esercitati la società emette nuove azioni per i detentori dei *warrants* in cambio del prezzo di esercizio stabilito nel contratto. I *covered warrants* conferiscono la facoltà di acquistare o vendere alla data o entro la data di scadenza un certo quantitativo di strumenti finanziari (es. tassi di interesse, valute, indici, azioni) ad un prezzo prefissato.

- *Derivati su crediti.* I derivati sui crediti consentono di separare il rischio di credito dalla proprietà dell'*asset* sottostante. Un soggetto si assume il rischio di deprezzamento di un'attività per mancato rimborso o deterioramento della qualità creditizia del debitore, mentre la controparte acquista una copertura per il rischio pagando una commissione. Alcuni esempi sono rappresentati dal *total rate of return swaps*, i derivati sul *credit spreads*, i *credit default swaps*.

2 LE OPZIONI FINANZIARIE

Supponendo di possedere un'opzione *call* europea c_t su un titolo il cui prezzo di esercizio sia pari a K e ipotizzando che alla scadenza T il prezzo del titolo sottostante sia pari a S_T, il valore dell'opzione all'istante T è il seguente:

$$c_T = \begin{cases} S_T - K & \text{se} \quad S_T > K \\ \\ 0 & \text{se} \quad S_T \leq K \end{cases}$$

Infatti non è conveniente esercitare l'opzione qualora il valore del titolo sia inferiore al prezzo di esercizio. Viceversa avviene nel caso di una *put* europea p_t che assume a T valore pari a:

$$p_T = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad S_T > K \\ \\ K - S_T & \text{se} \quad S_T \leq K \end{cases}$$

in quanto non risulta conveniente esercitare l'opzione per vendere il titolo ad un prezzo inferiore a quello di mercato.

Il valore di un'opzione è dato dalla somma di due componenti: il **valore intrinseco** e il **valore del tempo** (*time value*). Si definisce valore intrinseco di un'opzione il massimo tra zero ed il valore che l'opzione avrebbe se fosse esercitata: il valore intrinseco di una *call* è $S_T - K$, il valore intrinseco di una *put* è $K - S_T$.

Un'opzione *call* è detta *at-the-money* quando il valore d'opzione è pressoché pari al valore dell'*underlying asset* $S_T = K$, è detta *in-the-money* in un generico istante quando il prezzo di esercizio è minore del valore dello stock $S_T > K$ e, quindi, quando il valore intrinseco è positivo. Infine è detta *out-of-the-money* nel caso in cui il prezzo di esercizio sia superiore a quello dell'asset sottostante $S_T < K$. In tal caso l'opzione non viene esercitata. Viceversa, un'opzione *put* è detta *at-the-money* se $S_T = K$, *in-the-money* se $S_T < K$ e *out-of-the-money* se $S_T > K$.

Un'opzione americana ha un valore maggiore rispetto ad un'opzione europea, essendo caratterizzata dalla maggiore flessibilità derivante dalla possibilità di scegliere il momento ottimale in cui esercitare l'opzione stessa.

Le opzioni call e put possono essere perfettamente correlate. Si supponga di acquistare rispettivamente un'azione di un titolo S_t e una put di valore p_t e di vendere allo scoperto una call di valore c_t. Si assuma, inoltre, che la *call* e la *put* abbiano la stessa scadenza T e il medesimo prezzo di esercizio K. Il valore del portafoglio così costruito al tempo t è:

$$\Phi_t = S_t + p_t - c_t$$

Il *payoff* del portafoglio alla scadenza risulta:

$$\begin{cases} S_T - (K - S_T) - 0 = K & \text{se} \quad S_T \leq K \\ \\ S_T + 0 - (S_T - K) = K & \text{se} \quad S_T \geq K \end{cases}$$

Alla scadenza, in entrambi i casi, il *payoff* è pari a K. Ne discende che il valore attuale del portafoglio Φ_t, assumendo sia noto e costante il tasso di rendimento privo di rischio r durante la vita dell'opzione, risulta all'istante t pari a:

$$\begin{cases} \Phi_t = K\ (1+r)^{-(T-t)} & \text{nel caso discreto} \\ \\ \Phi_t = K\ e^{-r(T-t)} & \text{nel caso continuo} \end{cases} \tag{1}$$

L'equazione (1) uguaglia il rendimento del portafoglio al rendimento di un'obbligazione non rischiosa nell'ipotesi di non arbitraggio. È, quindi possibile concludere che:

$$\begin{cases} S_t + p_t - c_t = K\ (1+r)^{-(T-t)} & \text{nel caso discreto} \\ \\ S_t + p_t - c_t = K\ e^{-r(T-t)} & \text{nel caso continuo} \end{cases} \tag{2}$$

La relazione (2) è detta *pull-call parity* e consente di derivare il valore di una *call* europea conoscendo una *put* e viceversa, ipotizzando che abbiano la stessa scadenza e lo stesso prezzo di esercizio. La parità *put-call* non vale nel caso di opzioni di tipo americano.

2.1 Il pricing delle opzioni finanziarie

Ipotesi:

1. In primo luogo è richiesto che le variazioni (stocastiche) dell'attività sottostante possano essere diversificate (*spanned*) da titoli trattati in Borsa. Questo equivale ad assumere che i mercati sono completi.

2. Il tasso di interesse privo di rischio (r) e la volatilità (σ) si suppongono funzioni deterministiche del tempo durante la vita dell'opzione.

3. In secondo luogo, se i mercati sono sufficientemente completi, il valore d'opzione sull'attività sottostante viene stabilito costruendo un portafoglio dinamico di titoli trattati in Borsa (noto come il portafoglio equivalente), che dà luogo agli stessi payoff dell'opzione (il portafoglio e l'opzione sono perfettamente correlati).

    - Per dinamico si intende che le sue componenti (*holdings*) sono aggiustate continuamente al variare dei prezzi dei titoli usati.
    - Non vi sono costi di transazione associati con la copertura del portafoglio equivalente (*hedging a portfolio*)

4. In terzo luogo, si assume che valga la legge del prezzo unico (*non arbitraggio*) per cui due attività che generano gli stessi payoff futuri devono avere lo stesso valore corrente. In particolare portafolgli che sono privi di rischio danno lo stesso rendimento.

5. In quarto luogo, si assume che la vendita alla scoperto (*short selling*) sia ammessa. Questo implica che ogni investitore è in grado di acquistare e vendere qualsiasi numero di "units" dell'attività sottostante e che può vendere tali unità anche se non possedute realmente.

2.2 Il modello binomiale (Cox, Ross e Rubinstein)

Si consideri un titolo sottostante S che non corrisponda dividendi, il cui valore sia descritto dal seguente albero binomiale moltiplicativo:

$$
\begin{array}{cccl}
 & \nearrow & S_1^+ = uS_0 & \text{con probabilità } q \\
S_0 & & & \\
 & \searrow & S_1^- = dS_0 & \text{con probabilità } 1-q
\end{array}
$$

Per eliminare la possibilità di arbitraggio assumiamo inoltre che $u > 1+r > d$, con $u > 1$, $d < 1$. Assumiamo infine che r sia il tasso di interesse privo di rischio.

Il valore di una opzione *call*, trascorso un periodo, risulta contingente al valore dell'*asset* sottostante S :

$$F_0 \quad \begin{array}{ll} \nearrow \;\; F_1^+ = \max(S_1^+ - K, 0) = S_1^+ - K, & \text{con probabilità } q \\ \searrow \;\; F_1^- = \max(S_1^- - K, 0) = 0 & \text{con probabilità } 1-q \end{array} \tag{3}$$

in cui F_1^+ and F_1^- sono i valori dell'opzione al tempo $t = 1$ nel caso in cui: 1) l'asset S abbia un incremento di valore oppure una diminuzione di valore, 2) $K \in [S_1^-, S_1^+]$ sia il prezzo di esercizio dell'opzione (*strike price*), cioè il costo dell'attività sottostante.

L'opzione può essere valutata considerando un portafoglio nel quale un investitore tiene una *long position* sulla *call* e vende allo scoperto (*short position*) N *units* dell'*asset* al valore corrente S_0, o equivalentemente di un *asset* o portafoglio di titoli perfettamente correlato con S. Inoltre, se si assume che l'asset S sia negoziato in Borsa un investitore è comunque in grado di mantenere la posizione *short* sia prendendo a prestito un certo ammontare al tasso privo di rischio r, sia vendendo allo scoperto nel mercato dei *futures*.

Il portafoglio è così formato:

$$\Phi_0 = F_0 - NS_0. \tag{4}$$

Alla fine del periodo il portafoglio vale

$$\Phi_0 = F_0 - NS_0 \quad \begin{array}{ll} \nearrow \;\; \Phi_1^+ = F_1^+ - NS_1^+ & \text{con probabilità } q \\ \searrow \;\; \Phi_1^- = F_1^- - NS_1^- & \text{con probabilità } 1-q \end{array} \tag{5}$$

Affinchè questo portafoglio assicuri al tempo $t = 1$ lo stesso rendimento quale che sia lo stato dell'asset S, è sufficiente scegliere N in modo tale che $\Phi_1^+ = \Phi_1^-$.

Inoltre poichè il titolo S non paga dividendi, il rendimendo del portafoglio tra i due periodi non è altro che il *capital gain* $\Phi_1 - \Phi_0$.

Infine, poichè la scelta di N rende il portafoglio al tempo uno non rischioso, per eliminare la possibilità di arbitraggio il suo rendimento deve essere uguale al rendimento che l'investitore avrebbe conseguito su un titolo privo di rischio. Cioè $\Phi_1 - \Phi_0 = r\Phi_0$.

Risolvendo rispetto a F_0, si ottiene

$$F_0 = \rho p F_1^+ = \rho p (S_1^+ - K) \tag{6}$$

dove $\rho = \frac{1}{1+r}$ e $p = \frac{(1+r)-d}{u-d} > 0$. Inoltre, p è la probabilità neutrale al rischio (*risk-neutralized probability*), che prevale in un mondo neutrale al rischio nel quale il vero tasso di rendimento atteso dell'attività $qu + (1 - q)d$ è sostituito dall'equivalente-certo o rendimento atteso neutrale-al-rischio $pu + (1-p)d$, (Cox e Ross, 1976). p è detta anche probabilità di copertura (*hedging probability*).

Ponendo $R^+ \equiv u - 1$ e $R^- \equiv d - 1$, è immediato mostrare che:

$$pR^+ + (1-p)R^- \equiv r \tag{7}$$

Oppure, se la (7) viene vista come un'uguaglianza, risolvendo per p si ottiene $p = \frac{(1+r)-d}{u-d}$.

IL VALORE OGGI DELL'OPZIONE AD INVESTIRE DOMANI NELL'*ASSET* S E' UGUALE AL VALORE ATTESO NETTO (NEUTRALE AL RISCHIO) DELL'*ASSET* NELLA SITUAZIONE FAVOREVOLE SCONTATO AL TASSO PRIVO DI RISCHIO r.

2.2.1 Il prezzo di un'opzione come un VAN

Se indichiamo con $I = K$ il costo dell'investimento, possiamo riscrivere (6) nella forma:

$$F_0 = \frac{pF_1^+ + (1-p)F_1^-}{1+r} = \frac{E^Q(\max(F_1, 0))}{1+r} = \frac{E^Q(\max(S_1 - I, 0))}{1+r} \tag{8}$$

dove $E^Q()$ è il valore atteso fatto rispetto alla distribuzione di probabilità neutrale al rischio p e $1-p$.

Come si nota F_0 corrisponde ad un VAN calcolato al tempo zero usando come valore atteso dei flussi di cassa futuri gli equivalenti certi, cioè i flussi di cassa futuri pesati per la distribuzione di probabilità neutrale al rischio p e $1-p$, e quindi scontati al tasso privo di rischio r. Inoltre poichè l'investimento avviene al tempo uno anche il costo del progetto è scontato ad oggi.

E' facile mostrare, quindi, che vale l'equivalenza:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{E^Q(\max(S_1 - I, 0))}{1+r} \\ &= \frac{E(S_1)}{1+\hat{\alpha}} - \frac{I}{1+r} \end{aligned}$$

dove $\hat{\alpha}$ è il costo opportunità del capitale calcolato con il CAPM e $E()$ è il valore atteso fatto con la distribuzione di probabilità vera q e $1-q$.

2.2.2 Il modello binomiale multiperiodale

Ipotizzando un modello a periodi multipli, il valore di un'opzione *call* la cui scadenza è tra n periodi è:

$$c = \frac{\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \max(u^j d^{n-j} S - K, 0)}{(1+r)^n}$$

in cui j è il numero di rialzi dei prezzi azionari ognuno dei quali ha luogo con probabilità p. La forma generale della probabilità di ogni *payoff* è data dalla distribuzione binomiale

$$B(j \mid n, p) = \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}$$

Analoghe considerazioni possono essere svolte nel caso di una *put*:

$$p = \frac{\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \max(K - S u^j d^{n-j}, 0)}{(1+r)^n}$$

2.2.3 Un portafoglio replicante

Un modo alternativo di vedere il portafoglio (4) è quello di scriverlo nella forma seguente:

$$F_0 = NS_0 + \Phi_0 \equiv NS_0 - B. \tag{9}$$

Un investitore acquista N *units* dell'asset al valore corrente S_0 (o equivalentemente di un *asset* o portafoglio di titoli perfettamente correlato con S), e prende a prestito un ammontare pari a B al tasso privo di rischio r.

Il valore del portafoglio così costruito deve eguagliare il valore della *call.*

Trascorso un periodo l'investitore deve ripagare l'ammonatare preso a prestito e i relativi interessi. In questo caso il valore del portafoglio diventa:

$$\Phi_0 = NS_0 - B \quad \begin{array}{ll} \nearrow \quad NS_1^+ - (1+r)B & \text{con probabilità } q \\ \searrow \quad NS_1^- - (1+r)B & \text{con probabilità } 1-q \end{array} \tag{10}$$

Nell'ipotesi che il portafoglio così costruito debba offrire all'investitore lo stesso rendimento dell'opzione, qualunque sia lo stato dell'attività sottostante S, si ha

$$NS_1^+ - (1+r)B = F_1^+$$
$$NS_1^- - (1+r)B = F_1^-$$

Risolvendo il sistema rispetto a N e B si ottiene:

$$N = \frac{F_1^+ - F_1^-}{S_1^+ - S_1^-} \tag{11}$$

$$B = \frac{S_1^- F_1^+ - S_1^+ F_1^-}{(1+r)(S_1^+ - S_1^-)} \tag{12}$$

Nei modelli d'opzione la variazione di valore dell'opzione dovuta a una piccola variazione di valore dell'attività sottostante viene chiamata **delta** o **tasso di copertura**, $\Delta = \frac{dF}{dS}$. Dalla (11) risulta immediato che $\Delta = N$, cioè il rapporto tra lo *spread* del valore dell'opzione e lo *spread* del valore del titolo.

L'INVESTITORE E' IN GRADO DI REPLICARE IL RENDIMENTO DELL'OPZIONE ACQUISTANDO N "UNITS" DELL'ASSET AL VALORE CORRENTE S_0, O EQUIVALENTEMENTE DI UN ASSET O PORTAFOGLIO DI TITOLI PERFETTAMENTE CORRELATO CON S, E PRENDERE A PRESTITO UN AMMONTARE PARI A B AL TASSO PRIVO DI RISCHIO r.

2.2.4 Aggiustamento per titoli che corrispondono dividendi

Si assuma ora che il titolo corrisponda ai propri detentori dei dividendi D in percentuale costante rispetto al valore dell'attività sottostante. Il rendimento del portafoglio risulta quindi:

$$\Phi_1 - \Phi_0 - DNS_0 = r\Phi_0$$

L'equazione (6) diventa

$$\tilde{F}_0 = \rho\tilde{p}F_1^+ \quad \text{con} \quad \rho = \frac{1}{1+r} \quad \text{e} \quad \tilde{p} = \frac{(1+r-D)-d}{u-d} > 0 \tag{13}$$

o in alternativa

$$\tilde{F}_0 = \rho p F_1^+ - \rho\frac{D}{u-d}F_1^+ = F_0 - \rho\frac{D}{u-d}F_1^+ \leq F_0 \tag{14}$$

Nel caso in cui siano corrisposti dei dividendi, il modello multiperiodale si complica in quanto vengono generati dei nuovi rami rispetto alla situazione in assenza di dividendi e non tutti i nodi si ricongiungono (il numero dei nodi aumenta in maniera esponenziale)[1].

Nel caso di un'opzione di tipo europeo l'aggiustamento da apportare qualora sia previsto il pagamento in un'unica soluzione, consiste nel detrarre alla fine del periodo l'intero ammontare relativo al pagamento stesso[2]. Ipotizzando un numero finito di dividendi D di tipo discreto e di valore noto[3], espresso in percentuale costante sul corso del titolo, il processo risulta ancora essere di tipo moltiplicativo e geometrico e il valore dell'opzione *call* alla scadenza è pari a [4]:

$$c = \frac{\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \max(u^j d^{n-j} S(1-D) - K, 0)}{(1+r)^n}$$

[1] In assenza di dividendi, un albero binomiale, a n fasi temporali, dà luogo nell'n-esimo periodo a n+1 nodi; in presenza di dividendi l'albero è caratterizzato da punti di discontinuità nei rami e genera 2n nodi.

[2] Viene introdotta una segmentazione del reticolo dell'albero binomiale, in quanto il tasso di rendimento dopo la data del pagamento dipende dal valore dell'attività sottostante. Il rendimento relativo ad un rialzo (esito positivo) è pari ad u prima del pagamento D, mentre successivamente i rendimenti sono rispettivamente pari a: $(Suu-D)/Su, (Aud-D)/Au, (Adu-D)/ad$ e $(Add-D)/Ad$.

[3] In tal caso il valore dell'asset sottostante diminuisce per la corresponsione dell'ammontare D.

[4] Nel modello di valutazione di tipo binomiale, infatti, in ogni periodo deve valere la

La probabilità neutrale rispetto al rischio viene ridotta per compensare il minore rendimento derivante da guadagni in conto capitale.

2.3 Il modello in tempo continuo (Black e Scholes)

Si consideri un *asset* finanziario il cui valore sia descritto dal seguente processo stocastico Browniano geometrico:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dz_t \qquad \text{con } \sigma > 0 \text{ and } S_{t_0} = S_0. \tag{15}$$

in cui S_0 è il valore corrente dell'*asset* al tempo zero e dz_t è l'incremento di un processo di Wiener standard che soddisfa le proprietà $E(dz_t) = 0$, and $E(dz_t^2) = dt$ (per cui $E(dS_t) = \alpha S_t dt$, and $E(dS_t^2) = \sigma^2 S_t^2 dt$).

Dalla (15), $E(S_t \mid S_0) = S_0 e^{\alpha t}$, per cui α è il rendimento istantaneo atteso dell'attività sottostante, mentre σ è lo scarto quadratico medio istantaneo (il rischio quotato di mercato) del valore dell'*asset*.

Indichiamo con $F(S_t, t, T) \equiv F(S_t, \tau = T - t)$ il valore dell'opzione al tempo t, che dipende dall'attività sottostante S_t e dal tempo che manca all'esercizio $\tau = T - t$ (*maturity time*).

Infine, sia $K \in [0, \infty)$ il prezzo di esercizio dell'opzione (*strike price*), che assumiamo non subisca variazioni nel tempo.

Si consideri il seguente portafoglio da parte di un investitore: l'investitore tiene (*long position*) l'opzione ad investire che vale $F(S_t, t)$ e vende allo scoperto (*short position*) N units dell'*asset* al prezzo corrente S_t, o equivalentemente di un *asset* o portafoglio di titoli perfettamente correlato con S.

Il portafoglio è così formato:

$$\Phi_t = F(S_t, t) - NS_t. \tag{16}$$

Il portafoglio (16) è dinamico in quanto al variare di S_t varia anche la composizione del portafoglio attraverso N. Tuttavia assumiamo che nell'intervallo dt la numerosità N rimanga fissa.

---

seguente espressione:

$$Se - (r - D) = pSu + (1 - p)Sd$$

da cui discende che:

$$p = \frac{e^{-(r-D)} - d}{u - d}$$

Per le ragioni dette sopra, si assume inoltre che la *short position* in questo portafoglio richieda un pagamento pari a DS_tN, che può essere assimilato ad un **flusso costante di dividendi per unità di tempo**. In altre parole, un investitore che tiene una *long position* nell'attività sottostante richiede da questa un rendimento aggiustato per il rischio che comprenda:

$$\textit{capital gain } \alpha S_t \ + \ \text{il flusso di dividendi } \ DS_t.$$

Poichè la *short position* nel portafoglio richiede la vendita di N *units* dell'attività per unità di tempo, implica anche il pagamento della quota DS_tN.

Il rendimento del portafoglio nell'intervallo di tempo dt risulta:

$$d\Phi_t = dF(S_t, t) - NdS_t - DS_tNdt \tag{17}$$

Applicando il Lemma di Ito a $F(S_t, t)$ si ha:

$$\begin{aligned} dF_t &= F_t(S_t, t)dt + F_S(S_t, t)dS_t + \frac{1}{2}F_{SS}(S_t, t)(dS_t)^2 \\ &= F_t(S_t, t)dt + F_S(S_t, t)dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 F_{SS}(S_t, t)dt \end{aligned}$$

Il rendimento totale del portafoglio diventa perciò:

$$\begin{aligned} d\Phi_t &= F_t(S_t, t)dt + F_S(S_t, t)dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 F_{SS}(S_t, t)dt - NdS_t - DS_tNdt \quad (18) \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 F_{SS}(S_t, t)dt + F_t(S_t, t)dt - DS_tF_S(S_t, t)dt + (F_S(S_t, t) - N)\, dS_t \end{aligned}$$

Dalla (18) si può eliminare la componente aleatoria ponendo:

$$N = F_S(S_t, t) \equiv \frac{\partial F}{\partial S}$$

Il rendimento del portafoglio così composto risulta privo di rischio. Quindi, per eliminare la possibilità di arbitraggio deve essere uguale a

$$\begin{aligned} r\Phi_t dt &= d\Phi_t \\ &\equiv r[F(S_t, t) - F_S(S_t, t)S_t]dt \\ &\equiv \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 F_{SS}(S_t, t)dt + F_t(S_t, t)dt - DS_tF_S(S_t, t)dt \end{aligned}$$

Dividendo per dt e ricordando che $\tau = T - t$ otteniamo:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{SS} + (r - D)SF_S - F_\tau - rF = 0 \tag{19}$$

L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE PARZIALE (19) E' L'EQUAZIONE TIPICA DELLA *CONTINGENT CLAIM ANALYSIS*. LA SUA SOLUZIONE RICHIEDE DI ESSERE "VINCOLATA" A QUALCHE PUNTO DI FRONTIERA CHE DIPENDE DAL TIPO DI OPZIONE.

- Il **Delta** $\Delta = N = F_S(S_t, t) \equiv \frac{\partial F}{\partial S}$, misura il grado di correlazione tra i movimenti del valore dell'opzione e quelli dell'attività sottostante.
- L'operatore differenziale lineare $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} + (r - D)S\frac{\partial}{\partial S} - r$ interpreta la differenza di rendimanto fra un portafoglio di copertura Φ_t e il rendimento di un deposito bancario.
- Infine, è importante far notare che l'equazione differenziale di Black-Merton-Scholes, (19), non dipende dal rendimento istantaneo atteso dell'attività sottostante α.
- **Il valore dell'opzione è indipendente da quanto rapidamente o lentamente una attività sottostante cresce. Questo significa che due investitori che differiscono fra loro per la stima di α, valutano allo stesso modo il valore dell'opportunità di investire nell'attività. L'unica variabile importante per la valutazione è la misura della volatilità σ.**

2.3.1 Call option

Balck e Scholes (1973) e Merton (1973) risolvono la (19) per il caso di una *European Call* imponendo le seguenti condizioni al contorno:

$$c(S_T, \tau = 0) = \max[S_T - K, 0],$$

$$c(0, \tau) = 0 \quad \text{per ogni } \tau$$

$$\lim_{S \to \infty} c(S, \tau) = Se^{-D(T-t)}$$

La Formula di Black, Merton e Scholes:

$$c(S_t, \tau = T - t) = S_t e^{-D(T-t)} N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{20}$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + [(r - D) + \frac{1}{2}\sigma^2](T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \text{ e } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

e $N(.)$ è la funzione di ripartizione delle Normale standardizzata.

L'interpretazione della formula di Black-Merton-Scholes risulta immediata anche alla luce della formula bionomiale ricavata in precedenza (vedi equazione (6)).

$$S_t e^{-D(T-t)} N(d_1) \text{ Valore atteso di } S, \text{quando } S > K \text{ alla scadenza}$$

$$K e^{-r(T-t)} N(d_2) \text{ Valore attuale del costo dell'investimento}$$

$$N(d_2) \text{ Probabilità neutrale al rischio di } S > K \text{ alla scadenza}$$

La figura mostra il valore di un Call Europea con data di esercizio sei mesi, $\sigma = 0.4, K = 1$ e $r = 0.1$. La curva superiore rappresenta il valore dell'opzione in assenza di dividendi dell'attività sottostante, mentre la curva inferiore considera dividendi costanti e proporzionali pari a $D = 0.07$.

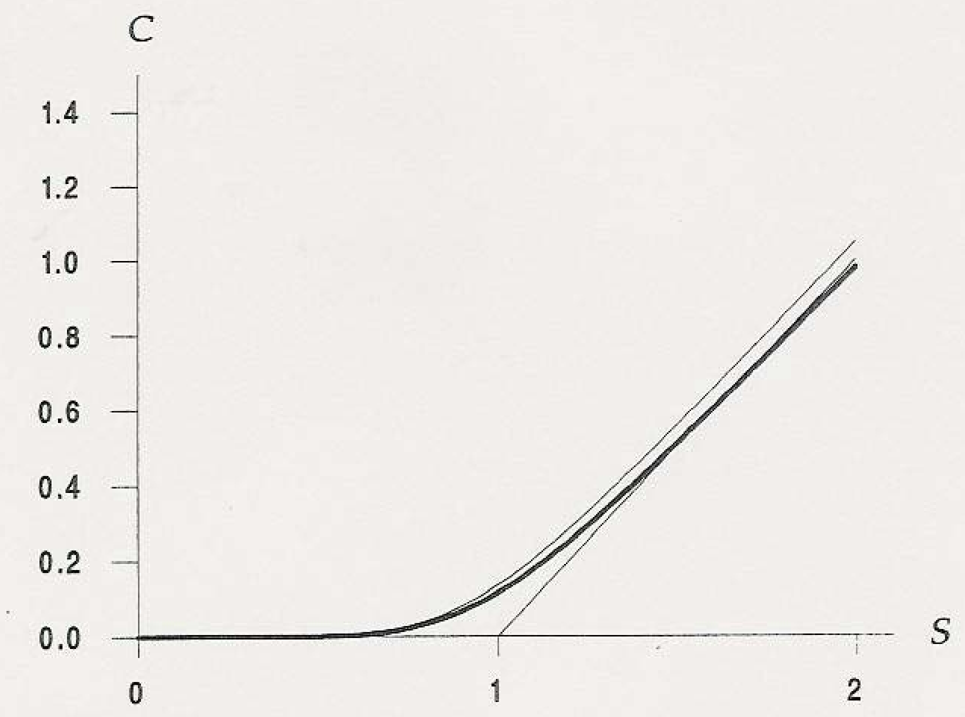

Figure 6.1 A comparison of European call option values with (lower curve) and without dividends (upper curve). There are six months to expiry, $E = 1$, $\sigma = 0.4$ and $r = 0.1$. The bold curve has $D_0 = 0.07$.

- Risulta evidente dal confronto fra le due curve che se $D > 0$, la Call Europea con dividendi finisce per andare sotto il valore del payoff $\max[S_T - K, 0]$ al crescre di S, anche prima della scadenza. La possibilità di arbitraggio mostra quindi che esiste un certo valore di $S < S_T$ per il quale **sarebbe** conveniente esercitare l'opzione prima della sua scadenza. Questa eventualità è il motivo per cui sui ricorre ad una *American Call* indicata con $C(S_t, \tau)$, per la quale vale:

$$C(S_t, \tau) \geq \max[S_t - K, 0]$$

- **Senza dividendi non è mai ottimale esercitare una Call Americana prematuramente. In questo caso il valore della Call Americana equivale a quella Europea ($c(S_t, \tau) = C(S_t, \tau)$). Nel caso in cui l'attività sottostante paghi dividendi, potrebbe essere ottimale esercitare la Call Americana prima della scadenza. Ne consegue che il suo valore è superiore a quello della Call Europea equivalente** ($c(S_t, \tau) \leq C(S_t, \tau)$), (Merton, 1973).

- **Tuttavia è sempre possibilie usare la (20), per valutare la Call Americana.**.

2.3.2 Put option

Per il caso di una *Europen Put*, le condizioni al contorno diventano

$$p(S_T, \tau = 0) = \max[K - S_T, 0],$$

$$p(0, \tau) = Ke^{-r(T-t)} \quad \text{per ogni } \tau$$

$$\lim_{S \to \infty} p(S, \tau) = 0$$

La formula per la Put Europea diventa

$$p(S_t, \tau = T - t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_t e^{-D(T-t)}N(-d_1) \qquad (21)$$

Merton (1973), mostra pure che può essere ottimale esercitare prematuramente una Put anche se questa non paga dividendi. A maggior ragione, quindi, questo vale se l'attività sottostante paga dividendi.

Poichè senza dividendi o con dividendi potrebbe essere ottimale esercitare la Put Europea prima della scadenza, ne consegue che il valore della Put Americana è sempre superiore a quella Europea ($p(S_t, \tau) \leq P(S_t, \tau)$ **quando** $r > 0$).

La figura mostra i valori di una Put Europea e di una Put Americana con data di esercizio sei mesi, $\sigma = 0.4, K = 1$, $r = 0.1$ e $D = 0$. La curva superiore rappresenta il valore dell'opzione americana tangente alla curva dei payoff $\max[K - S_t, 0]$, mentre la curva inferiore è il valore dell'opzione europea.

Inoltre, non esite una soluzione in forma chiusa per la Put Americana.

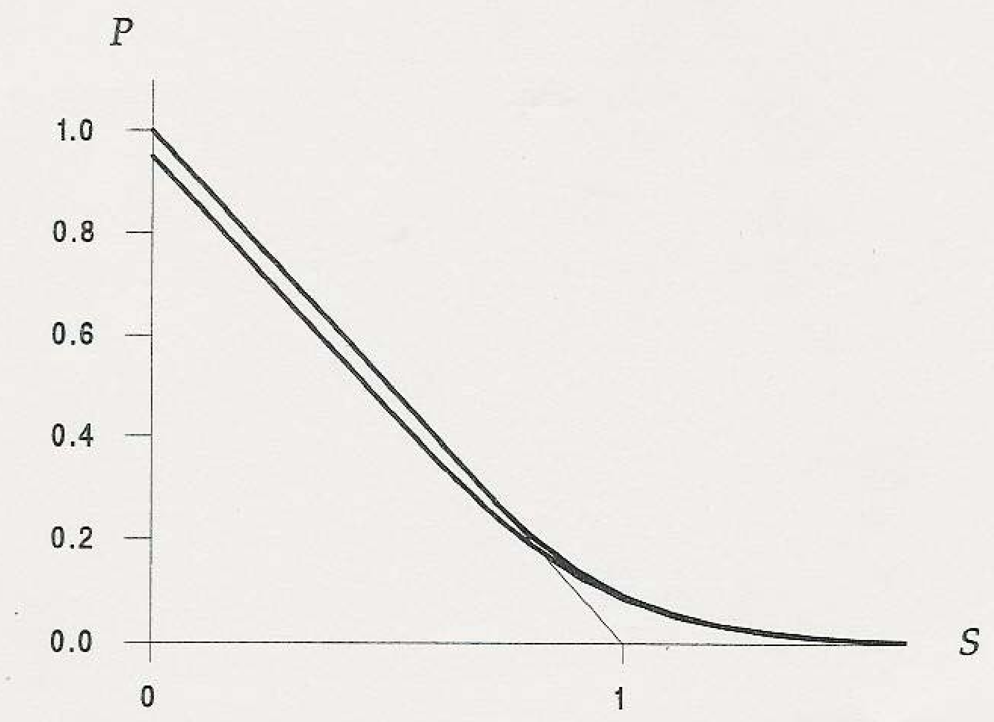

Figure 7.4 The values of European and American put options as functions of S; $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $E = 1$ and six months to expiry. The upper curve is the value of the American put, which joins smoothly onto the payoff function (also shown).

2.3.3 Parità Put-Call

Senza dividendi ($D = 0$) vale la relazione

$$c(S_t, \tau) + Ke^{-r(T-t)} = p(S_t, \tau) + S_t \qquad \text{per } 0 < t < T$$

Con dividendi ($D > 0$), la relazione diventa

$$c(S_t, \tau) + D + Ke^{-r(T-t)} = p(S_t, \tau) + S_t \qquad \text{per } 0 < t < T$$

dove D e' la differenza fra il valore dei dividendi che diminuisce il valore della *Call* e aumenta il valore della *Put*. La parità Put-Call non vale nel caso di opzioni di tipo americano

- Di seguito sono riportati alcuni tra i maggiori indici che vengono calcolati per studiare le *performance* delle *call* (analoghi indici sono calcolati per le *put*):
  - Il **Delta $\boldsymbol{\Delta}$** per la Call risulta (Senza dividendi $D = 0$) :

    $$\boldsymbol{\Delta} = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) > 0, \text{ e } < 1$$

  - Il **Gamma** Γ è:

    $$\Gamma = \frac{\partial \boldsymbol{\Delta}}{\partial S} = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{1}{S\sigma(T-t)} N'(d_1) > 0$$

  - Il **Vega è:**

    $$\text{Vega} = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t} N'(d_1) > 0,$$

  - Il **Theta** Θ è:

    $$\Theta = \frac{\partial c}{\partial T} = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}} N'(d_1) - rXe^{-r(T-t)} N(d_2)$$

  - Il **Rho è:**

    $$\begin{aligned} \textbf{Rho } (r) &= \frac{\partial c}{\partial r} = (T-t)Xe^{-r(T-t)} N(d_2) > 0 \\ \textbf{Rho } (D) &= \frac{\partial c}{\partial D} < 0 \end{aligned}$$

- In generale la Statica comparata su *Call* e *Put* è riassunto nella seguente tabella:

	c	**C**	**p**	**P**
S	$+$	$-$	$+$	$-$
X	$-$	$+$	$-$	$+$
T	?	?	$+$	$+$
$\boldsymbol{\sigma}$	$+$	$+$	$+$	$+$
r	$+$	$-$	$+$	$-$
D	$-$	$+$	$-$	$+$

3 IL TASSO DI RENDIMENTO DEGLI ASSET FINANZIARI

3.1 La *Contingent Claim Analysis*

Per determinare il tasso di rendimento degli asset finanziari possiamo anche utilizzare una procedura più generale che non fa riferimento a un particolare meccanismo di arbitraggio e/o di equilibrio. Introduciamo le seguenti assunzioni:

1. Assumiamo che esista un titolo (o portafoglio di titoli) commercializzato nel mercato che indichiamo con M.

2. Inoltre, nel mercato ogni rischio non correlato con M non può essere prezzato (E' un modo per dire che M può essere usato come titolo o portafoglio rappresentativo del mercato).

3. Assumiamo per il momento che M non corrisponda dividendi, e il processo generatore di M sia di tipo Browniano geometrico:

$$dM_t = \alpha_M M_t dt + \sigma_M M_t dz_t^M \qquad \text{con } \sigma_M > 0 \text{ e } M_{t_0} = M_0$$

4. Assumiamo infine, che il tasso di interesse privo di rischio r sia costante nel tempo.

L'assunzione fondamentale è la prima. La seconda e la terza potrebbero essere rimosse. La quarta assunzione viene mantenuta per semplificare gli aspetti computazionali.

Assumiamo ora che esita un asset X descritto dal processo:

$$dX_t = \alpha_X(X_t, t)dt + \sigma_X(X, t)dz_t^X \tag{22}$$

Definiamo il coefficiente β del titolo finanziario X attraverso la sua correlazione con il titolo M. Ricordando il significato di β da abbiamo:[5]

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{cov(\text{rend(M), rend(X)})}{var(\text{rend(M)})} \\
&\equiv \frac{cov(\text{rend(M), rend(X)})\sqrt{var(\text{rend(X)})}}{\sqrt{var(\text{rend(M)})}\sqrt{var(\text{rend(M)})}\sqrt{var(\text{rend(X)})}} \\
&\equiv \rho_{XM}\frac{\sqrt{var(\text{rend(X)})}}{\sqrt{var(\text{rend(M)})}} = \frac{\rho_{XM}\frac{\sigma_x(X,t)}{X}}{\sigma_M}
\end{aligned}$$

dove $E(dz^X dz^M) = \rho_{XM}dt$ e $\rho_{XM} = \frac{cov(\text{rend(M), rend(X)})}{\sqrt{var(\text{rend(M)})}\sqrt{var(\text{rend(M)})}}$. Probabilisticamente dz^X può essere espresso come una funzione della sua proiezione su dz^M più un residuo indipendente da dz^M :

$$dz^X = \rho_{XM}dz^M + \sqrt{(1-\rho_{XM}^2)}dz^e \quad \text{con} \quad E(dz^M dz^e) = 0 \tag{23}$$

Prendiamo ora in considerazione un generico *contingent claim* V, cioè un asset il cui valore dipenda dal processo stocastico X e dal tempo $t : V(X_t, \tau = T - t)$. Questo significa che l'asset X e l'asset V sono perfettamente correlati, cioè:

$$\rho_{XM} = \rho_{XV} \tag{24}$$

Dal Lemma di Ito:

$$\begin{aligned}
dV &= V_X dX + \frac{1}{2}V_{XX}dX^2 - V_\tau dt \qquad (25)\\
&= \left[V_X\alpha_X(X,t) + \frac{1}{2}V_{XX}\sigma_X^2(X,t) - V_\tau\right]dt + V_X\sigma_X(X,t)dz^X
\end{aligned}$$

[5]Nel caso del *CAPM* la formula β si riduce alla seguente forma: $\beta = \frac{\rho_{XM}\sigma_x\sigma_M}{\sigma_M^2}$.Nella quale il tiolo M può essere interpretato come il portafoglio di mercato.

Si consideri ora il portafoglio così costituito: il detentore mantiene una posizione lunga su V e n unità sul titolo indice M:

$$\Phi = V + nM \tag{26}$$

Il tasso di variazione di questo portafolgio risulta:

$$d\Phi = dV + ndM$$

Sostituendo dV e dM si ha:

$$\begin{aligned} d\Phi &= \left[V_X \alpha_X(X,t) + \frac{1}{2} V_{XX} \sigma_X^2(X,t) - V_\tau + n\alpha_M M \right] dt + \\ &\quad + V_X \sigma_X(X,t) dz^X + n\sigma_M M dz^M \end{aligned}$$

Sostituendo la decomposizione di dz^X definita da (23) e ricombinando i termini si ottiene:

$$\begin{aligned} d\Phi &= \left[V_X \alpha_X(X,t) + \frac{1}{2} V_{XX} \sigma_X^2(X,t) - V_\tau + n\alpha_M M \right] dt + \\ &\quad + \left[V_X \sigma_X(X,t) \rho_{XM} + n\sigma_M M \right] dz^M + V_X \sigma_X(X,t) \sqrt{(1-\rho_{XM}^2)} dz^e \end{aligned} \tag{27}$$

Scegliendo n in modo tale da eliminare in maniera dinamica il termine dz^M abbiamo:

$$n = -\frac{V_X \sigma_X(X,t) \rho_{XM}}{\sigma_N M}$$

o in altri termini:

$$nM = -V_X \beta X$$

Il rendimento atteso sul portafoglio di copertura Φ deve eguagliare il tasso di interesse privo di rischio, sebbene alcune componenti di rischio non siano state eliminate. Per costruzione il rischio residuo dz^e non è “prezzato”.

Al solito la condizione di non arbitraggio richiede che:

$$\begin{aligned} E\left[d\Phi\right] &= r\Phi dt \\ &\equiv r(V + nM)dt \end{aligned}$$

Sostituendo (26) e (27) abbiamo:

$$r(V - V_X \beta X) = V_X \alpha_X(X,t) + \frac{1}{2} V_{XX} \sigma_X^2(X,t) - V_\tau - V_X \alpha_M \beta X$$

cioè:

$$0 = \frac{1}{2} V_{XX} \sigma_X^2 (X,t) + V_X X \left(\frac{\alpha_X(X,t)}{X} - \beta(\alpha_M - r) \right) - rV - V_\tau \qquad (28)$$

Il termine tra parentesi può essere interpretato come l'equivalente certo del tasso di crescita (CEQ) del processo X. Il tasso di crescita corrente è α_X e il termine β riduce il tasso di crescita corrente fino a quando è possibile scontare al tasso privo di rischio rV.

Nel caso specifico in cui X segue un processo Browniano di tipo geometrico con $\alpha_X(X,t) = \alpha_X X$, il tasso di crescita CEQ si riduce ad un valore costante

$$\widehat{\alpha} \equiv \alpha_X - \beta(\alpha_M - r). \qquad (29)$$

e la (28) diventa:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} V_{XX} \sigma_X^2 (X,t) + V_X X \left(\alpha_X - \beta(\alpha_M - r) \right) - rV - V_\tau \qquad (30) \\ &= \frac{1}{2} V_{XX} \sigma_X^2 (X,t) + V_X X \widehat{\alpha} - rV - V_\tau \end{aligned}$$

Oppure, dopo alcuni passaggi la (29) può essere scritta come:

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha} &\equiv \alpha_X - \beta(\alpha_M - r). \qquad (31) \\ &= \alpha_X - \frac{\rho_{XM} \sigma_x}{\sigma_M} (\alpha_M - r) \\ &= \alpha_X - \lambda_M \rho_{XM} \sigma_X \end{aligned}$$

dove $\lambda_M \equiv \frac{(\alpha_M - r)}{\sigma_M}$ è il prezzo di mercato del rischio per unità di periodo, che indica il rendimento extra, oltre il tasso privo di rischio r, per unità di rischio del portafoglio di mercato.

Dal CAPM abbiamo $\lambda_X = \lambda_M \rho_{XM}$ e quindi:

$$\widehat{\alpha}_X = \alpha_X - \lambda_X \sigma_X$$

e la (30) può essere riscritta**:**

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} V_{XX} \sigma_X^2 (X,t) + V_X X \widehat{\alpha}_X - rV - V_\tau \qquad (32) \\ &= \frac{1}{2} V_{XX} \sigma_X^2 (X,t) + V_X X (\alpha_X - \lambda_X \sigma_X) - rV - V_\tau \end{aligned}$$

Nell'ottica dell'*asset pricing* si aggiusta il tasso di crescita del processo sottostante e si calcola il valore atteso come se le preferenze fossero neutrali al rischio. Per esempio, se X segue un processo Browniano geometrico è unicamente necessario sostituire $\widehat{\alpha}$ al posto di α_X ed ottenere un'equazione di *pricing* come la (28). Poichè le condizioni al contorno della (28) non cambiano dopo questa sostituzione, la soluzione che si ottiene per $V(X,t)$ è uguale sia in presenza di un investitore avverso al rischio che neutrale al rischio.

Se X fosse un titolo commercializzato, senza dividendi e descritto da un processo Browniano geometrico, allora il CEQ di X, cioeè $\widehat{\alpha}$, deve essere uguale al tasso di interesse privo di rischio r. Quindi dalla (29) si ha:

$$\alpha_X = r + \beta(\alpha_M - r) \tag{33}$$

che è infatti il tasso di rendimento atteso che si ottiene dal CAPM.

3.2 La condizione di equilibrio dell'*asset pricing model*

Partendo dall'equazione differenziale stocastica (25), dopo alcuni passaggi possiamo scrivere che per V vale il seguente processo di diffusione:

$$dV = \alpha_V V dt + \sigma_V V dz^X \tag{34}$$

dove:

$$\alpha_V = \frac{\left[V_X \alpha_X(X,t) + \frac{1}{2} V_{XX} \sigma_X^2(X,t) - V_\tau\right]}{V} \quad \text{e} \quad \sigma_V = \left(\frac{V_X}{V}\right) \sigma_X(X,t)$$

Applicando (34) alla (28) questa diventa:

$$\frac{V_X X \beta(\alpha_M - r)}{V} = \frac{\frac{1}{2} V_{XX} \sigma_X^2(X,t) + V_X \alpha_X(X,t) - V_\tau}{V} - r$$

cioè:

$$\begin{aligned}
\alpha_V - r &= \frac{V_X X\beta}{V}(\alpha_M - r) \qquad (35)\\
&= \frac{V_X X\beta}{V}\sigma_M \frac{(\alpha_M - r)}{\sigma_M}\\
&= \frac{V_X \rho_{XM}\sigma_X(X,t)}{V}\sigma_M \frac{(\alpha_M - r)}{\sigma_M}\\
&= \sigma_V \rho_{XM}\frac{(\alpha_M - r)}{\sigma_M}\\
\frac{\alpha_V - r}{\sigma_V} &= \lambda_M \rho_{XM}
\end{aligned}$$

Poichè il prezzo di rischio di mercato è definito come $\lambda_M \equiv \frac{(\alpha_M - r)}{\sigma_M}$, e dalla (24) abbiamo che $\lambda_M \rho_{XM} \equiv \lambda_M \rho_{XV}$, otteniamo che la (35) diventa:

$$\begin{aligned}
\alpha_V - r &= \lambda_M \rho_{XM}\sigma_V\\
&= \lambda_M \rho_{XV}\sigma_V
\end{aligned}$$

Infine, se vale il CAPM $\lambda_V = \lambda_M \rho_{XV}$, quindi:

$$\alpha_V - r = \lambda_V \sigma_V \qquad (36)$$

che rappresenta la condizione di equilibrio di mercato del titolo derivato.

3.3 Condizioni di equilibrio per titoli *non traded*

Se ora consideriamo che il titolo sottostante X generi un flusso costante di dividendi pari a D, il tasso di rendimento di mercato comprensivo di eventuali dividendi deve soddisare la condizione di equilibrio del tipo (36) nel seguente modo:

$$\alpha_X + D - r = \lambda_X \sigma_X \qquad (37)$$

Che può essere scritta come

$$\widehat{\alpha}_X \equiv \alpha_X - \lambda_X \sigma_X = r - D \qquad (38)$$

e la (32) può essere riscritta:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}V_{XX}\sigma_X^2(X,t) + V_X X(\alpha_X - \lambda_X \sigma_X) - rV - V_\tau \qquad (39)\\
&= \frac{1}{2}V_{XX}\sigma_X^2(X,t) + V_X X(r - D) - rV - V_\tau
\end{aligned}$$

Consideriamo ora il caso in cui il titolo sottostante X non sia commercializzato nel mercato. Poichè il progetto di investimento oggetto di analisi non ha un mercato di riferimento in cui possa essere scambiato e che ne determini il prezzo di equilibrio, il suo tasso di rendimento atteso α_X non può essere maggiore del tasso di rendimento atteso μ_X richiesto sul mercato da progetti appartenenti alla medesima classe di rischio per i quali, al contrario, esiste un mercato ben sviluppato. Pertanto è possibile definire la caduta (*shortfall*) di rendimento come la differenza $\delta \equiv \mu_X - \alpha_X > 0$, in analogia con la differenza di rendimento che si ha tra il tasso di rendimento di un titolo che corrisponde dividendi (costanti) e il tasso di rendimento di un titolo che non ne corrisponde. In altre parole, δ indica il costo opportunità annuale di detenere una posizione sul progetto X piuttosto che su un progetto di equivalente rischiosità che possa, però, essere venduto sul mercato.

Inoltre, poiché il titolo (finanziario) equivalente scambiato sul mercato soddisfa alla condizione di equilibrio del tipo (36), per la quale il tasso di rendimento può essere espresso come la somma del tasso di interesse privo di rischio r e di un premio per il rischio $\lambda_X\sigma_X$, è lecito esprimere il tasso di rendimento del progetto come:

$$\mu_X - r \equiv \alpha_X + \delta - r = \lambda_X\sigma_X$$

La (32) per i titoli *non traded* diventa:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}V_{XX}\sigma_X^2(X,t) + V_X X(\alpha_X - \lambda_X\sigma_X) - rV - V_\tau \qquad (40) \\ &= \frac{1}{2}V_{XX}\sigma_X^2(X,t) + V_X X(r-\delta) - rV - V_\tau \end{aligned}$$

che risulta uguale a quella di un titolo traded che fornisce un flusso di dividendi pari a D (39), sostituendo $r-\delta$ al posto di $r-D$.

4 LA FORMULA DI FEYNMAN-KAč E LA *RISK-NEUTRAL MEASURE*

4.1 Un problema di programmazione dinamica

Consideriamo il seguente problema di programmazione dinamica:

$$V(X,t) = E_t\left[\int_t^T e^{-\mu(s-t)}\pi(X_s,s)ds + e^{-\mu(T-t)}\Omega(X_T,T)\right] \qquad (41)$$

dove μ è un generico tasso di sconto costante nel tempo ed E è l'operatore di valore atteso in base alle informazioni possedute al tempo t. T è lo stopping time relativo alla decisione operativa da parte dell'operatore (Per esempio, T potrebbe indicare quando è ottimale per un'impresa uscire dal mercato, oppure quando acquistare valuta, oppure quando cambiare tecnologia, o quando esercitare un'opzione etc....). Inoltre il processo generatore di X è:

$$dX = \alpha_X X dt + \sigma_X X dz^X$$

Considerando un intervallo di tempo molto breve, dt ($< T$), possiamo trasformare il problema di programmazione dinamica nel seguente modo:

$$V(X,t) = \pi(X,t)dt + e^{-\mu dt} E[F(X + dX, t + dt)] \tag{42}$$

la (42) è chiamata anche Equazione di Bellman. Espandendo la parte destra attorno al punto (X,t) e tenendo conto del Lemma di Ito otteniamo (cioè eliminando i termini superiori al primo ordine):

$$\begin{aligned}
&= \pi(X,t)dt + e^{-\mu dt} E[F(X + dX, t + dt)] \\
&= \pi(X,t)dt + (1 - \mu dt)E \begin{bmatrix} V(X,t) + V_t(X,t)dt + V_X(X,t)dX \\ +\frac{1}{2}V_{XX}(X,t)dX^2 + ... \end{bmatrix} \\
&= \pi(X,t)dt + (1 - \mu dt) \begin{bmatrix} V(X,t) + V_t(X,t)dt + V_X(X,t)\alpha_X X dt \\ +\frac{1}{2}V_{XX}(X,t)\sigma_X^2 X^2 dt + ... \end{bmatrix} \\
&= V(X,t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}V_{XX}(X,t)\sigma_X^2 X^2 + V_X(X,t)\alpha_X X \\ +V_t(X,t) - \mu V(X,t) + \pi(X,t) \end{bmatrix} dt
\end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione all'interno dell'equazione di Bellman otteniamo la seguente EDP:

$$\frac{1}{2}V_{XX}(X,t)\sigma_X^2 X^2 + V_X(X,t)\alpha_X X + V_t(X,t) - \mu V(X,t) + \pi(X,t) = 0 \tag{43}$$

con la condizione terminale:

$$V(X_T, T) = \Omega(X_T, T) \text{ per ogni valore di } X_T \tag{44}$$

Ragioniamo al contrario. Il risultato per cui che la (41) è la soluzione della PDF (43) (condizionatamente alla condizione terminale (44)) è un caso speciale di un risultato molto più generale noto con il nome di formula di Feynman-Kač.

4.2 *Risk-neutral measure*

Con alcuni semplici passaggi possiamo riscrivere il processo generatore di X come una misura di martingala:

$$\begin{aligned} dX &= \alpha_X X dt + \sigma_X X dz^X \\ &= X \left[\alpha_X dt + \sigma_X dz^X\right] \\ &= X \left[(r-D)dt + \sigma_X \left(\frac{(D-r+\alpha_X)}{\sigma_X}dt + dz_t^X\right)\right] \\ &= X \left[(r-D)dt + \sigma_X dz_t^{Q,X},\right] \end{aligned}$$

dove $dz_t^{Q,X} \equiv \left(\frac{(D-r+\alpha_X)}{\sigma_X}dt + dz_t^X\right)$

Da questa equazione si riescono ad individuare i termini di drift e diffusion che possono essere sostituiti rispettivamente nella formula di Feynman-Kač. Sostituendo si ottiene:

$$\alpha_X X \equiv (r-D)X$$

$$\sigma_X X \equiv \sigma_X X$$

Inoltre poichè stiamo lavorando sotto la misura di martingala Q abbiamo che:

$$E(.) \equiv E^Q(.)$$

$$\mu \equiv r$$

Facendo queste sostituzioni in (43) e (44) otteniamo il sistema:

$$\frac{1}{2}V_{XX}(X,t)\sigma_X^2 X^2 + V_X(X,t)(r-D)X + V_t(X,t) - rV(X,t) + \pi(X,t) = 0$$

con la condizione terminale:

$$V(X_T,T) = \Omega(X_T,T) \text{ per ogni valore di } X_T$$

Rimane ancora il problema di esplicitare il payoff finale e intermedio (ossia definire Ω e π). Se facciamo riferimento ad un *Call*, per quanto riguarda i pagamenti intermedi, il generico flusso $\pi(X,t)$ è esprimibile come:

$$\pi(X,t) = 0$$

Mentre il payoff finale può essere scritto come la differenza:

$$\Omega(X_T) = X_T - K$$

Quindi il sistema diventa:

$$\frac{1}{2}V_{XX}(X,t)\sigma_X^2 X^2 + V_X(X,t)(r-D)X + V_t(X,t) - rV(X,t) = 0$$

con la condizione terminale:

$$V(X_T) = X_T - K \text{ per ogni valore di } X_T$$

Fermiamoci un attimo ad osservarla. Confrontiamo il risultato con la PDF di una CALL Europea, per esempio la (19). **Siamo quindi arrivati alla medesima conclusione ottenuta attraverso l'*asset pricing model*: i due approcci sono due modi diversi per affrontare lo stesso problema e portano a soluzioni comparabili.**

- **Riassumendo, le due procedure sotto riportate sono equivalenti:**

  - **Il problema di programmazione dinamica:**

    $$V(X,t) = E_t^Q\left[\int_t^T e^{-r(s-t)}\pi(X_s,s)ds + e^{-r(T-t)}\Omega(X_T,T)\right]$$

    dove r è il tasso risk-free e:

    $$dX = (r-D)Xdt + \sigma_X X dz_t^{Q,X},$$

  - **Il problema di *contingent claim*, con:**

    $$V(X,t) = E_t\left[\int_t^T e^{-\widehat{\alpha}_X(s-t)}\pi(X_s,s)ds + e^{-\widehat{\alpha}_X(T-t)}\Omega(X_T,T)\right]$$

    dove $\widehat{\alpha}_X \equiv \alpha_X - \lambda_X\sigma_X = r - D$ e:

    $$dX = \alpha_X X dt + \sigma_X X dz_t^X,$$