Časopis pro pěstování matematiky

Josef Kolomý

O konvergenci a užití iteračních metod

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 86 (1961), No. 2, 148--177

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108204`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

O KONVERGENCI A UŽITÍ ITERAČNÍCH METOD

JOSEF KOLOMÝ, Praha

Došlo 17. listopadu 1959

V práci je zobecněna metoda složené iterace s proměnným parametrem a metoda podobné iterace. Jsou nalezeny podmínky pro konvergenci obou metod a odvozeny vztahy pro odhad přesného a přibližného řešení funkcionálních rovnic v Hilbertově prostoru. Dále jsou odvozeny některé nové metody jejich přibližného řešení obdobné metodě *Neumannově*, *Wiardově* [1], *Bücknerově* [2], *Samuelsonově* [3]. Uvedených metod je užito k nalezení přibližného řešení systému lineárních algebraických rovnic a k řešení integrálních rovnic Fredholmova typu. Výhody nových metod jsou ilustrovány na numerických příkladech.

I. A. BIRGER [4] podal nové metody přibližného řešení funkcionálních rovnic: metodu složené iterace s proměnným parametrem a metodu podobné iterace, avšak bez podmínek a důkazů konvergence a udání příslušných odhadů obou metod. O těchto otázkách, o zobecnění, užití I. A. Birgerem navržených a některých dalších nových metodách je pojednáno v této práci.

I. METODA SLOŽENÉ ITERACE S PROMĚNNÝM PARAMETREM

1.1. Nechť H značí Hilbertův prostor. Nechť je dána rovnice

$$Ay = f, \tag{1.1}$$

kde A je lineární ohraničený symetrický operátor v H, f je daná, y je hledaná funkce z prostoru H.

Proces složené iterace s proměnným parametrem je dán vztahy:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \beta_n h_n\,, \\ h_n &= f - Ay_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1.2}$$

kde koeficienty β_n, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ určíme z podmínek, aby funkcionál

$$F(y) = \|f - Ay\|^2$$

nabýval pro prvky y_{n+1} $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ minimální hodnoty.

Vyjádříme koeficienty β_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$\begin{aligned} F(y_{n+1}) &= F(y_n + \beta_n h_n) = (A(y_n + \beta_n h_n), A(y_n + \beta_n h_n)) - \\ &\quad - 2(f, A(y_n + \beta_n h_n)) + (f, f) = \\ &= \|Ay_n\|^2 - 2\beta_n(h_n, Ah_n) + \beta_n^2 \|Ah_n\|^2 - 2(f, Ay_n) + \|f\|^2 . \end{aligned}$$

Předpokládejme, že $\|Ah_n\| > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Z podmínek

$$\frac{\partial F(y_{n+1})}{\partial \beta_n} = 0 , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

nalezneme

$$\beta_n = \frac{(h_n, Ah_n)}{\|Ah_n\|^2} . \tag{1.4}$$

Jelikož

$$\frac{\partial^2 F(y_{n+1})}{\partial \beta_n^2} = 2\|Ah_n\|^2 > 0 ,$$

podmínka (1.3) dává minimum funkcionálu $F(y)$.

Iterační proces (1.2) má tedy tvar

$$y_{n+1} = y_n + \frac{(Ah_n, h_n)}{\|Ah_n\|^2} h_n . \tag{1.5}$$

Věta 1. *Nechť A je lineární samoadjungovaný operátor v Hilbertově prostoru H a nechť*

$$m\|y\|^2 \leqq (Ay, y) \leqq M\|y\|^2 , \tag{1.6}$$

kde

$$m = \inf_{\substack{y \in H \\ \|y\| = 1}} (Ay, y) , \quad M = \sup_{\substack{y \in H \\ \|y\| = 1}} (Ay, y) , \quad 0 < m \leqq M < +\infty .$$

Potom posloupnost $\{y_n\}$ definovaná vztahem (1.5) konverguje v normě prostoru H k řešení rovnice (1.1) a platí odhady:

$$\|y - y_n\| \leqq k\gamma^n \|f - Ay_0\| , \tag{1.7}$$

$$\|y - y_n\| \leqq k\gamma \|f - Ay_{n-1}\| , \tag{1.8}$$

$$\|y - y_n\| \leqq k \left\{ \|f - Ay_{n-1}\|^2 - \frac{(Ah_{n-1}, h_{n-1})^2}{\|Ah_{n-1}\|^2} \right\}^{\frac{1}{2}} , \tag{1.9}$$

kde

$$k = \|A^{-1}\| , \quad \gamma = \frac{(M^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}}{M} .$$

Důkaz. Především

$$F(y_n) - F(y_{n-1}) = -2\beta_{n-1}(Ah_{n-1}, h_{n-1}) + \beta_{n-1}^2 \|Ah_{n-1}\|^2 = \tag{1.10}$$
$$= -2\frac{(Ah_{n-1}, h_{n-1})^2}{\|Ah_{n-1}\|^2} + \frac{(Ah_{n-1}, h_{n-1})^2}{\|Ah_{n-1}\|^2} =$$
$$= -\frac{(h_{n-1}, Ah_{n-1})^2}{\|Ah_{n-1}\|^2} \leqq 0 .$$

Dokážeme, že $\lim_{n\to\infty} F(y_n) = 0$. Podle našeho značení $F(y_n) = \|h_n\|^2$. Protože A je samoadjungovaný, je $\|A\| = \max(|m|, |M|)$. Avšak $0 < m \leqq M$, tedy $\|A\| = M$. Odtud, podle (1.6) a (1.10)

$$F(y_{n-1}) - F(y_n) = F(y_{n-1}) \frac{(Ah_{n-1}, h_{n-1})^2}{\|Ah_{n-1}\|^2 \|h_{n-1}\|^2} \geqq$$
$$\geqq F(y_{n-1}) \frac{m^2 \|h_{n-1}\|^4}{\|A\|^2 \|h_{n-1}\|^2} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 F(y_{n-1}) .$$

Z této nerovnosti dostaneme, že

$$0 \leqq F(y_n) \leqq \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right) F(y_{n-1}) , \tag{1.11}$$

$$0 \leqq F(y_n) \leqq \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2}\right)^n F(y_0) . \tag{1.12}$$

Odtud plyne, že $\lim_{n\to\infty} F(y_n) = 0$. Podle předpokladu věty existuje A^{-1} a je ohraničený. Existuje tedy konstanta $k > 0$ tak, že

$$\|y - y_n\|^2 \leqq k^2 \|A(y - y_n)\|^2 = k^2 \|f - Ay_n\|^2 = k^2 F(y_n) \to 0 . \tag{1.13}$$

Odtud, z (1.12) a (1.11) obdržíme první dva odhady. Ze vztahu (1.13) a (1.10) dostaneme nerovnost (1.9). Tím je věta dokázána.

Poznámka 1. Ve vztazích (1.7), (1.8), (1.9) lze volit $k = \|A^{-1}\|$ nebo $k = \dfrac{1}{m}$. Skutečně

$$\|Ay\| \geqq \frac{(Ay, y)}{\|y\|} \geqq \frac{m\|y\|^2}{\|y\|} = m\|y\| .$$

Položme

$$m(A) = \inf \|Ay\| , \quad y \in H, \quad \|y\| = 1 .$$

Pak $m(A) \|A^{-1}\| = 1$. Z definice čísel $m(A)$, m plyne, že $\dfrac{1}{m(A)} \leqq \dfrac{1}{m}$. Nemusíme tedy provádět výpočet $\|A^{-1}\|$, ale stačí volit $k = \dfrac{1}{m}$. Číslo $m(A)$ se v některých případech určí snadněji než $\|A^{-1}\|$. Odhady pro $k = \dfrac{1}{m(A)}$ jsou lepší nebo tak dobré jako pro $k = \dfrac{1}{m}$.

Poznámka 2. Posloupnost β_n je ohraničená:

$$\frac{m}{M^2} \leqq \beta_n \leqq \frac{H}{m^2}\,; \quad \frac{M}{m^2} \leqq \beta_n \leqq \frac{1}{m}\,.$$

Důkaz tvrzení plyne okamžitě z nerovnosti (1.6) a z poznámky 1.

Ukážeme, že tvrzení věty 1 zůstane v platnosti, lze-li operátor A symetrisovat lineárním ohraničeným a kladným operátorem B.

Definice 1. *Řekneme, že operátor A je kladný, jestliže pro $y \not\equiv 0$, $y \in H$ $(Ay, y) > 0$; $(Ay, y) = 0 \Rightarrow y = 0$.*

Definice 2. *Řekneme, že lineární ohraničený operátor A je symetrisovatelný lineárním ohraničeným kladným operátorem B, jestliže pro libovolné $x, y \in H$*

$$(BAx, y) = (x, BAy)\,. \tag{1.14}$$

Nechť H je reálný Hilbertův prostor (úplný a separabilní). Definujme v H skalární součin

$$[x, y] = (Bx, y)\,. \tag{1.15}$$

Skalární součin (1.15) definuje na množině všech $x, y \in H$ nový Hilbertův prostor $\mathfrak{H}$, který však obecně nemusí být úplný. Doplněním o jeho limitní prvky získáme již úplný prostor, který v dalším budeme značit symbolem $\mathfrak{H}_0$. Norma v $\mathfrak{H}_0$ je dána rovností

$$\|y\|_{\mathfrak{H}_0} = (By, y)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Jako dosud normu prvku y v H budeme značit znakem $\|y\|$. Protože B je ohraničený

$$\|y\|_{\mathfrak{H}_0} \leqq \|B\|^{\frac{1}{2}}\,\|y\|\,, \quad y \in H\,. \tag{1.16}$$

Ze separabilnosti prostoru H plyne podle (1.16) separabilnost prostoru $\mathfrak{H}_0$. Podle (1.14) operátor A je symetrický v $\mathfrak{H}$.

Lemma 1. ([10], [11]). *Nechť A je lineární ohraničený operátor v H. Pak A je ohraničený v $\mathfrak{H}$ a $\|A\|_{\mathfrak{H}} \leqq \|A\|$.*

Operátor A je ohraničený a symetrický v $\mathfrak{H}$, lze jej tedy rozšířit na samoadjungovaný operátor v $\mathfrak{H}_0$. Označme rozšíření operátoru symbolem $\tilde{A}$.

Nechť lineární ohraničený operátor A je takový, že pro libovolné $y \in H$

$$(BAy, y) \geqq m(By, y)\,, \quad m > 0\,.$$

Pak rovnice (1.1), kde $f \in H$ má právě jedno řešení v H a pro libovolné $y \in \mathfrak{H}_0$ je

$$m[y, y] \leqq [\tilde{A}y, y] \leqq M[y, y]\,,$$

kde

$$M = \|A\|_{\mathfrak{H}} \leqq \|A\| .$$

Odtud plyne, že rovnice

$$\tilde{A}y = f \tag{1.17}$$

má právě jedno řešení v $\mathfrak{H}_0$. Tedy úloha, určit y^* rovnice (1.1) v H je ekvivalentní úloze: nalézt jediné řešení rovnice (1.17) v prostoru $\mathfrak{H}_0$.

Užitím tvrzení věty 1 dostaneme:

Věta 2. *Nechť lineární ohraničený operátor A je symetrisovatelný lineárním ohraničeným a kladným operátorem B v reálném Hilbertově prostoru H. Nechť pro každé $y \in H$*

$$m(By, y) \leqq (BAy, y) \leqq M(By, y) , \quad 0 < m \leqq M .$$

Pak rovnice (1.1) *má právě jedno řešení y^* v H, posloupnost $\{y_n\}$ definovaná vztahy*

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_n h_n , \quad \alpha_n = \frac{(BAh_n, h_n)}{(BAh_n, Ah_n)} , \quad h_n = f - Ay_n \tag{1.18}$$

konverguje v normě $\mathfrak{H}_0$ k y^* rychlostí geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 1 - \left(\frac{m}{M}\right)^2$.

Poznámka 3. Ve větě 2 lze položit $M = \|A\|$. Jestliže operátor B je ohraničen zdola, pak posloupnost $\{y_n\}$ definovaná rovnostmi konverguje k y^* v normě H.

Lemma 2. (Viz [9].) *Jestliže A je kladný ohraničený symetrický operátor v H, pak*

$$\|Ay\|^2 \leqq \|A\|(Ay, y) . \tag{1.19}$$

Důkaz tvrzení plyne z identity

$$\|A\| \, \|Ay\|^2 = \|A\|^2(Ay, y) - \{(A(\|A\| \, y - Ay), \|A\| \, y - Ay) + \\ + \|A\| \, \|Ay\|^2 - (A^2y, Ay)\} .$$

Věta 3. *Nechť A je kladný symetrický ohraničený operátor v H. Nechť existuje operátor A^{-1} a je ohraničený v H. Pak posloupnost $\{y_n\}$ definovaná rovnicí* (1.5) *konverguje v normě H k řešení rovnice* (1.1).

Důkaz. Protože A^{-1} je ohraničený, existuje číslo $l > 0$ tak, že

$$\|Ay\| \geqq l\|y\| . \tag{1.20}$$

Podle (1.10)

$$\|h_{n-1}\|^2 - \|h_n\|^2 = \frac{(Ah_{n-1}, h_{n-1})^2}{\|Ah_{n-1}\|^2} .$$

Posloupnost $\{\|h_n\|\}$ je monotonní a ohraničená. Je tedy konvergentní. Tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(Ah_n, h_n)}{\|Ah_n\|^2} = 0 . \tag{1.21}$$

Podle (1.19)

$$\frac{(Ah_n, h_n)^2}{\|Ah_n\|^2} \geqq \frac{(Ah_n, h_n)^2}{\|A\|(Ah_n, h_n)} = \frac{(Ah_n, h_n)}{\|A\|} > 0\,.$$

Odtud a podle (1.21) $\lim_{n\to\infty}(Ah_n, h_n) = 0$. Tedy $\lim_{n\to\infty}\|Ah_n\| = 0$. Z nerovnosti (1.20) plyne, že $\lim_{n\to\infty}\|h_n\| = 0$. Odtud a podle (1.20) $\|y - y_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Tím je věta dokázána.

1.2. K tomu, abychom obdrželi lepší odhady než dává věta 1, můžeme definovat složitější iterace, ovšem na úkor obtížnějších početních výkonů.

Podle (1.5) je

$$y_1 = y_0 + \beta_0 h_0\,, \quad \beta_0 = \frac{(Ah_0, h_0)}{\|Ah_0\|^2}\,, \quad y_2 = y_1 + \beta_1 h_1\,, \quad \beta_1 = \frac{(Ah_1, h_1)}{\|Ah_1\|^2}\,.$$

Druhý iterační krok je

$$y_2 = y_0 + (\beta_0 + \beta_1)\, h_0 - \beta_1\beta_0 A h_0\,.$$

Položme

$$\tilde{y}_1 = y_0 + \alpha h_0 + \beta A h_0\,,$$

kde α, β určíme z podmínek

$$\frac{\partial F(\tilde{y}_1)}{\partial \alpha} = 0\,, \quad \frac{\partial F(\tilde{y}_1)}{\partial \beta} = 0\,.$$

Odtud dostanem soustavu lineárních algebraických rovnic:

$$\alpha\|u_0\|^2 + \beta(u_0, Au_0) = (A^{-1}u_0, u_0)\,, \quad \alpha(u_0, Au_0) + \beta\|Au_0\|^2 = \|u_0\|^2\,,$$

kde $u_0 = Ah_0$. Je-li

$$\|u_0\|^2\|Au_0\|^2 - (u_0, Au_0)^2 \neq 0\,,$$

lze určit α, β. Při tom $\tilde{y}_1$ dává funkcionálu $F(y)$ hodnotu menší než dva kroky iterace (1.5). Jsou-li splněny předpoklady věty 1, je zřejmé, že obecně platí

$$\|y - \tilde{y}_n\| \leqq k\delta^n\{F(y_0)\}^{\frac{1}{2}}\,, \quad \|y - \tilde{y}_n\| \leqq k\delta\{F(\tilde{y}_{n-1})\}^{\frac{1}{2}}\,,$$

kde

$$\delta = \frac{M^2 - m^2}{M^2}\,, \quad k = \|A^{-1}\|\,.$$

Když tento článek již byl připraven do tisku, seznámil jsem se s prací V. M. Fridman, *Nové metody řešení lineární operátorové rovnice* (DAN 1959, sv. 128, čís. 3).

Autor hledá řešení rovnice

$$Lx = Ax - y = 0\,, \tag{1.22}$$

kde A je lineární ohraničený operátor v Hilbertově prostoru H ve tvaru

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n z_n\,, \quad z_n = A^* L x_n\,.$$

Koeficienty ε_n určí z podmínky, aby

$$\frac{d}{d\varepsilon_n} \|x_{n+1} - x\|^2 = 0 .$$

Odtud

$$\varepsilon_n = - \frac{\|Lx_n\|^2}{\|A^*Lx_n\|^2} .$$

Nechť symbol N značí podprostor nulových prvků operátoru A. O konvergenci této metody platí tato věta (V. M. Fridman):

Věta. *Posloupnost $\{x_n\}$ definovaná rovností*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|Lx_n\|}{\|A^*Lx_n\|^2} A^*Lx_n$$

konverguje monotonně silně k řešení rovnice (1.22). *Jestliže m a M jsou hranice operátoru A^*A na prostoru $H \ominus N$, pak $\{x_n\}$ konverguje s rychlostí geometrické posloupnosti s kvocientem $q = (M - m)/(M + m)$.*

1.3. *Systémy lineárních algebraických rovnic.* Nechť E_n značí n rozměrný Eukleidův prostor (prostor všech vektorů $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ s normou $\|y\| = (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$. Budiž dána soustava lineárních algebraických rovnic

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k = f_i , \quad i = 1, 2, \ldots, n , \quad a_{ik} = a_{ki} . \tag{1.23}$$

V E_n zapíšeme systém (1.23) ve tvaru $Ay = f$, kde operátor A je dán kladně definitní symetrickou maticí $\|a_{ik}\|$, $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ je daný a $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ hledaný prvek E_n. Označme

$$m_1 = \min_{x, z \in E_n} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i z_k , \quad M_1 = \max_{x, z \in E_n} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i z_k$$

za podmínky, že

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 1 , \quad \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = 1 .$$

Potom iterační proces $\{y^{(m)}\}$ definovaný vztahy

$$y^{(m+1)} = y^{(m)} + \beta^{(m)} h^{(m)} , \quad h^{(m)} = \{h_1^{(m)}, h_2^{(m)}, \ldots, h_n^{(m)}\} ,$$

$$h_j^{(m)} = f_j - \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k^{(m)} , \quad \beta^{(m)} = \frac{c^{(m)}}{d^{(m)}} , \quad m = 0, 1, 2, \ldots ,$$

konverguje v E_n a platí tyto odhady:

$$\|y - y^{(m)}\| = (\sum_{k=1}^{n} |y_k - y_k^{(m)}|^2)^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{1}{m_1} \gamma^m \|f - Ay^{(0)}\| ,$$

$$\|y - y^{(m)}\| \leqq \frac{1}{m_1} \left\{ \|f - Ay^{(m-1)}\|^2 - \frac{(c^{m-1})^2}{d^{(m-1)}} \right\}^{\frac{1}{2}} ,$$

kde

$$c^{(m)} = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} h_j^{(m)} h_k^{(m)}, \quad d^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} \Big| \sum_{k=1}^{n} a_{jk} h_k^{(m)} \Big|^2,$$

$$y^{(0)} = \{y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\} \in E_n, \quad \gamma = \frac{(M_1^2 - m_1^2)^{\frac{1}{2}}}{M_1},$$

$$F(y) = \sum_{j=1}^{n} [\{ \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k \}^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k f_j + f_j^2].$$

Případ nesymetrické matice $\|a_{ik}\|_{i,k=1}^{i,k=n}$ se převede na výše uvedenou úlohu.

Rovnice (1.23) je ekvivalentní s rovnicí

$$\sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ji} a_{jk}) y_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} f_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

je-li tato řešitelná.

Iterační proces je dán těmito vztahy:

$$y^{(m+1)} = y^{(m)} + \beta^{(m)} h^{(m)},$$

$$h^{(m)} = \{\eta_1^{(m)}, \eta_2^{(m)}, \ldots, \eta_n^{(m)}\}, \quad y^{(m)} = \{y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \ldots, y_n^{(m)}\},$$

kde

$$\eta_j^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} f_j - \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ji} a_{jk}) y_k^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \{ f_j - \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k^{(m)} \} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} h_j^{(m)},$$

$$\beta^{(m)} = \frac{k^{(m)}}{l^{(m)}}, \quad k^{(m)} = \sum_{i,k}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} a_{jk} \eta_i^{(m)} \eta_k^{(m)}, \quad l^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ji} a_{jk}) y_k^{(m)} \Big|^2.$$

Platí tyto odhady:

$$\|y - y^{(m)}\| \leqq \frac{1}{m_2} \gamma_1^m \|f - Ay^{(0)}\|,$$

$$\|y - y^{(m)}\| \leqq \frac{1}{m_2} \left\{ \|f - Ay^{(m-1)}\|^2 - \frac{(k^{(m-1)})^2}{l^{(m-1)}} \right\}^2,$$

kde $m_2 > 0$ a M_2 jsou hranice operátoru A^*A (A^* značí matici $\|a_{ik}^*\|$, kde $a_{ik}^* = a_{ki}$), $y^{(0)} \in E_n$, $\gamma_1 = \dfrac{(M_2^2 - m_2^2)^{\frac{1}{2}}}{M_2}$,

$$F(y) = \|f - Ay\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \{ [\sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ji} a_{jk}) y_k]^2 -$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ji} a_{jk}) y_k f_i + (\sum_{k=1}^{n} a_{ki} f_k)^2 \}.$$

1.4. *Fredholmovy integrální rovnice.* Budiž dána integrální rovnice

(1.24) $$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, y(s)\, ds = f(x),$$

kde

$$f(x) \in L_2(a, b), \quad K(x, s) = K(s, x),$$
$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, s)\, dx\, ds < +\infty .$$

Předpokládejme, že $\frac{\lambda}{\lambda_k} < 1$, $k = 1, 2, \ldots$, kde λ_k jsou charakteristická čísla rovnice (1.24). Položme $A = I - \lambda K$, kde

$$Ky = \int_a^b K(x, s)\, y(s)\, ds .$$

Označíme-li

$$\vartheta_1 = \inf_k \frac{\lambda}{\lambda_k}, \quad \vartheta_2 = \max_k \frac{\lambda}{\lambda_k},$$

pak

$$(1 - \vartheta_2)\, \|y\|^2 \leqq (Ay, y) \leqq (1 - \vartheta_1)\, \|y\|^2 .$$

Iterační proces

$$y_{n+1} = y_n + \beta_n h_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde

$$h_n(x) = f(x) - y_n(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, y_n(s)\, ds, \quad \beta_n = \frac{F_1(h_n)}{F_2(h_n)},$$
$$F_1(h_n) = \int_a^b h_n^2\, dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, h_n(x)\, h_n(t)\, dx\, dt,$$
$$F_2(h_n) = F_1(h_n) - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, h_n(x)\, h_n(t)\, dx\, dt +$$
$$+ \lambda^2 \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, K(t, s)\, h_n(x)\, h_n(s)\, dx\, ds\, dt$$

konverguje k přesnému řešení rovnice (1.24) a platí tyto odhady:

$$\|y - y_n\| \leqq \frac{1}{c_1}\, \Theta^n \{F(y_0)\}^{\frac{1}{2}},$$
$$\|y - y_n\| \leqq \frac{1}{c_1} \left\{F(y_{n-1}) - \frac{F_1^2(h_{n-1})}{F_2(h_{n-1})}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

kde

$$c_1 = 1 - \vartheta_2, \quad c_2 = 1 - \vartheta_1, \quad \Theta = \frac{(c_2^2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}}}{c_2},$$

(1.25) $$F(y) = \lambda \int_a^b \int_a^b H(x, s)\, y(x)\, y(s)\, dx\, ds + 2\lambda \int_a^b \int_a^b K(x, s)\, y(s) f(x)\, dx\, ds +$$
$$+ \int_a^b y(x)[y(x) - 2f(x)]\, dx + \int_a^b f^2(x)\, dx,$$
$$H(x, s) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, K(t, s)\, dt - 2K(x, s) .$$

Jestliže $\frac{\lambda}{\lambda_k} > 1$ a jádro $K(x, s)$ není symetrické, pak nelze bezprostředně užít věty 1.

Rovnice (1.24) je ekvivalentní rovnici

(1.26) $$A^* A y = A^* f,$$

kde

$$A^*y = y - \lambda \int_a^b K(s, x)\, y(x)\, dx .$$

Jádro $\tilde{H}(x, s)$ rovnice (1.26) má tvar

$$\tilde{H}(x, s) = K(x, s) + K(s, x) - \lambda \int_b^a K(x, t)\, K(t, s)\, dt .$$

Jádro $\tilde{H}(x, s)$ je symetrické, značí-li $\tilde{\lambda}_k$ jeho charakteristická čísla, pak $\lambda/\lambda_k < 1$.

1.5. Numerický příklad. Řešme rovnici

$$y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s)\, y(s)\, ds = x^2 , \tag{1.27}$$

kde

$$K(x, s) = \begin{cases} x(1 - s), & 0 \leqq x \leqq s \leqq 1 , \\ s(1 - x), & 0 \leqq s \leqq x \leqq 1 . \end{cases} \tag{1.28}$$

metodou složené iterace s proměnným parametrem. Charakteristická čísla rovnice (1.27) s jádrem (1.28) jsou $\lambda_k = k^2\pi^2$, $(k = 1, 2, \ldots)$.

1. Položme $\lambda = 1$, $y_0 = x^2$, pak $m = 1 - 1/\pi^2$, $M = 1$,

$$Ah_0 = \tfrac{1}{12}(\tfrac{13}{15}x + \tfrac{1}{6}x^3 - x^4 - \tfrac{1}{30}x^6)\,, \quad (Ah_0, h_0) = 0{,}000\,6935\,7093\,,$$
$$\|Ah_0\|^2 = 0{,}000\,6284\,.$$

Odtud $\beta_0 = 1{,}10372$. Prvním iteračním krokem dostaneme

$$y_1 = x^2 + 0{,}09198x(1 - x^3)\,.$$

Odhadneme $\|y - y_1\|$. Předně $k \leqq 1/m = 1{,}11274$,

$$\frac{(Ah_0, h_0)^2}{\|Ah_0\|^2} = 0{,}000\,7654\,, \quad \|h_0\|^2 = 0{,}000\,7716\,.$$

Podle (1.9) $\|y - y_1\| \leqq 0{,}0028$.

2. Položme $\lambda = -1$, $y_0 = x^2$. Pak $m = 1$, $M = 1 + 1/\pi^2$,

$$(Ah_0, h_0) = 0{,}0010048401\,, \quad \|Ah_0\|^2 = 0{,}00135\,.$$

Odtud $\beta_0 = 0{,}74433$ a tedy $y_1 = x^2 - 0{,}06203x(1 - x^3)$, přičemž $\|y - y_1\| \leqq 0{,}0048$.

3. Položme $\lambda = -10$, $y_0 = x^2$. Pak $m = 1$, $M = 1 + 10/\pi^2$,

$$(Ah_0, h_0) = 0{,}1525673398\,, \quad \|Ah_0\|^2 = 0{,}30372\,.$$

Odtud $\beta_0 = 0{,}50233$. Prvním iteračním krokem dostaneme

$$y_1 = x^2 - 0{,}41861x(1 - x^3)\,.$$

Odhadneme podle (1.9) $\|y - y_1\|$. Především $\|h_0\|^2 = 0{,}077716$,

$$\frac{(Ah_0, h_0)^2}{\|Ah_0\|^2} = 0{,}076634\,.$$

Odtud $\|y - y_1\| \leqq 0{,}073$.

2.1. Nechť H značí reálný Hilbertův prostor, který nesplňuje nutně axiom úplnosti. Budiž dána rovnice

$$Ay = f, \tag{2.1}$$

kde A je ohraničený lineární operátor v H, f je daná a y hledaná funkce z H.

Rovnici (2.1) řešíme iteracemi

$$y_{n+1} = Pf + \beta_n(I - PA)\, y_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.2}$$

kde P je lineární ohraničený operátor v H a koeficienty β_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) určíme z podmínek, aby funkcionál $F(y) = \|f - Ay\|^2$ byl pro prvky $\beta_n y_n$, ($n = 0, 1, 2, \ldots$) minimálním. Předpokládejme, že $\|Ay_n\| > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Z podmínky

$$\frac{\partial F(\beta_n y_n)}{\partial \beta_n} = 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

dostaneme, že

$$\beta_n = \frac{(f, Ay_n)}{\|Ay_n\|^2}\,. \tag{2.4}$$

Nechť symbol $\mathfrak{R}$ značí množinu všech reálných čísel. Protože

$$\frac{\partial^2 F(\beta_n y_n)}{\partial \beta_n^2} = 2\|Ay_n\|^2 > 0\,,$$

je

$$F(\beta_n y_n) = \min_{r \in \mathfrak{R}} F(r y_n)\,. \tag{2.5}$$

Iterační proces (2.2) má tvar

$$y_{n+1} = Pf + \frac{(f, Ay_n)}{\|Ay_n\|^2}(I - PA)\, y_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

V dalším užijeme následujícího lemmatu.

Lemma 3. *Nechť A je lineární ohraničený operátor v úplném Hilbertově prostoru H. Pak rovnice* (2.1) *má právě jedno řešení $y \in H$ pro každé $f \in H$ tehdy a jen tehdy, existuje-li lineární ohraničený operátor P v H takový, že má v H inversní a*

$$\|I - PA\| = q < 1\,. \tag{2.7}$$

Při tom řešení y rovnice (2.1) *lze vyjádřit ve tvaru*

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} (I - PA)^j\, Pf\,.$$

Poznámka 4. Jsou-li splněny předpoklady u lemmatu, pak A^{-1} je lineární ohraničený operátor:

$$\|A^{-1}\| = \|\sum_{j=0}^{\infty}(I - PA)^j P\| \leqq \sum_{j=0}^{\infty}\|(I - PA)^j\| \, \|P\| \leqq$$
$$\leqq \|P\| \sum_{j=0}^{\infty}\|I - PA\|^j \leqq \|P\| \frac{1}{1 - q}.$$

Jsou-li splněny předpoklady lemmatu až na úplnost prostoru H, pak A^{-1} existuje a je ohraničený, předpokládáme-li, že operátor $I - PA$ je totálně spojitý.

Věta 4. *Nechť A, P jsou lineární ohraničené komutativní operátory v reálném Hilbertově prostoru H a nechť P je takový, že P^{-1} existuje v H a platí (2.7). Dále nechť je splněna jedna z těchto podmínek:*

1. *H je úplný.*
2. *$I - PA$ je totálně spojitý v H.*

Pak rovnice (2.1) má pro každé $f \in H$ právě jedno řešení $y \in H$, posloupnost $\{y_n\}$ definovaná rovností (2.6) konverguje v normě H k řešení y rovnice (2.1) a platí tyto odhady:

$$\|y - y_n\| \leqq kq^n\|f - Ay_0\|, \tag{2.8}$$

$$\|y - y_n\| \leqq kq\|f - Ay_{n-1}\|, \tag{2.9}$$

$$\|y - y_n\| \leqq kq\left\{\|f\|^2 - \frac{(f, Ay_{n-1})^2}{\|Ay_{n-1}\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{2.10}$$

$$\|y - y_n\| \leqq kq\{\|f\|^2 + \|Ay_{n-1}\|^2 - 2(f, Ay_{n-1})\}^{\frac{1}{2}}, \tag{2.11}$$

kde $y_0 \in H$ a $k = \|A^{-1}\| \leqq \|P\|/(1 - q)$.

Důkaz. Ze vztahu (2.5) plyne, že

$$F(\beta_n y_n) \leqq F(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.12}$$

Dokážeme, že $\{F(y_n)\}_{n=1}^{n=\infty}$ tvoří monotonní zdola omezenou posloupnost:

$$\begin{aligned} F(y_{n-1}) - F(y_n) &= \|f - Ay_{n-1}\|^2 - \|f - Ay_n\|^2 = \\ &= \|f - Ay_{n-1}\|^2 - \|f - APf - \beta_{n-1}A(I - PA)\,y_{n-1}\|^2 = \\ &= \|f - Ay_{n-1}\|^2 - \|(I - PA)[f - \beta_{n-1}Ay_{n-1}]\|^2 \geqq \\ &\geqq \|f - Ay_{n-1}\|^2 - \|I - PA\|^2\,\|f - \beta_{n-1}Ay_{n-1}\|^2 \geqq \\ &\geqq (1 - q^2)\,\|f - Ay_{n-1}\|^2 \geqq 0\,. \end{aligned}$$

Odtud

$$F(y_0) \geqq F(y_1) \geqq \ldots \geqq F(y_n) \geqq \ldots \geqq 0\,.$$

Existuje tudíž

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = p \quad \text{a} \quad 0 \leqq p \leqq F(y_0)\,.$$

Dokážeme, že $p = 0$:

$$F(y_n) = \|f - Ay_n\|^2 = \|(I - PA)[f - \beta_{n-1}Ay_{n-1}]\|^2 \leqq q^2\,F(\beta_{n-1}y_{n-1})\,. \tag{2.13}$$

Z poslední nerovnosti a podle (2.5) platí

$$F(y_n) \leqq q^2 F(y_{n-1}) . \tag{2.14}$$

Odtud

$$0 < F(y_n) \leqq q^{2n} F(y_0) \to 0 , \quad n \to \infty . \tag{2.15}$$

Tedy $p = 0$. Z lemmatu a poznámky 4 plyne, že operátor A^{-1} existuje a je ohraničený. Existuje tudíž konstanta $k > 0$ tak, že

$$\|y - y_n\|^2 \leqq k^2\|A(y - y_n)\|^2 = k^2\|f - Ay_n\|^2 = k^2 F(y_n) \to 0 . \tag{2.16}$$

Odtud $\|y - y_n\| \to 0$, $n \to \infty$. Z (2.16), (2.15) a (2.14) dostaneme ihned nerovnost (2.8) a (2.9). Dosadíme do výrazu

$$F(\beta_{n-1}y_{n-1}) = \beta_{n-1}^2\|Ay_{n-1}\|^2 - 2\beta_{n-1}(f, Ay_{n-1}) + \|f\|^2$$

za β_{n-1} podle (2.4), pak

$$F(\beta_{n-1}y_{n-1}) = \|f\|^2 - \frac{(f, Ay_{n-1})^2}{\|Ay_{n-1}\|^2} .$$

Odtud, z (2.13) a (2.16) ihned dostaneme odhad (2.10).

Z nerovnosti

$$\left[\|Ay_{n-1}\| - \frac{(f, Ay_{n-1})}{\|Ay_{n-1}\|}\right]^2 \geqq 0$$

plyne, že

$$2(f, Ay_{n-1}) \leqq \|Ay_{n-1}\|^2 + \frac{(f, Ay_{n-1})^2}{\|Ay_{n-1}\|^2} .$$

Nahradíme-li v odhadu (2.10) výraz $-(f, Ay_{n-1})^2/\|Ay_{n-1}\|^2$ výrazem $\|Ay_{n-1}\|^2 - 2(f, Ay_{n-1})$, obdržíme ihned odhad (2.11). Tím je věta dokázána.

Poznámka 5. Platí $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 1$.

Důkaz. $y_n \to y$ podle věty 2. Operátor A je ohraničený, tedy spojitý. Tudíž platí $Ay_n \to Ay = f$. Odtud plyne, že $\|Ay_n\| \to \|f\|$. Pak

$$(f, Ay_n) \to \|f\|^2 .$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \frac{\|f\|^2}{\|f\|^2} = 1 .$$

Z nerovnosti (2.12) a (2.13) plyne, že

$$F(\beta_0 y_0) \geqq F(\beta_1 y_1) \geqq \ldots \geqq F(\beta_n y_n) \geqq \ldots > 0 .$$

Protože platí (2.12), tím spíše $F(\beta_n y_n) \to 0$, $n \to \infty$.

2.2. Nechť H je reálný Hilbertův prostor. Pak $\boldsymbol{H} = \underbrace{H \times H \times \ldots \times H}_{n\text{-kráte}}$ se skládá ze všech vektorů $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, kde $f_i \in H_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definujme základní operace v $\boldsymbol{H}$ takto:

$$c\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} = \{cf_1, cf_2, \ldots, cf_n\},$$
$$\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} + \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} = \{f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots, f_n + g_n\},$$
$$[\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}, \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}] = \sum_{i=1}^{n} (f_i, g_i).$$

Potom $\boldsymbol{H}$ je Hilbertovým prostorem s normou

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2.$$

Nechť v $\boldsymbol{H}$ je dána rovnice

(2.17) $$Ay = f,$$

kde

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots, & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

operátory A_{ik}, $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ jsou lineární ohraničené v H $f \in \boldsymbol{H}$. Rovnici (2.17) řešíme iteracemi

(2.18) $$y^{(m+1)} = \boldsymbol{P}f + \beta^{(m)}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\, y^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} P_{11}, & P_{12}, & \ldots, & P_{1n} \\ P_{21}, & P_{22}, & \ldots, & P_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n1}, & P_{n2}, & \ldots, & P_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} I, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & I, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & I \end{pmatrix}.$$

P_{ik}, $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ jsou lineární ohraničené operátory v H. Koeficienty $\beta^{(m)}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ určíme z podmínky, aby funkcionál

$$F(y) = \sum_{j=1}^{n} \|f_j - \sum_{k=1}^{n} A_{jk} y_k\|^2$$

nabýval při daném m, $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ minimální hodnoty na množině prvků tvaru $\tilde{\beta} y^{(m)}$, kde $\tilde{\beta}$ probíhá množinu všech reálných čísel. Z podmínky

$$\frac{\partial F(\beta^{(m)} y^{(m)})}{\partial \beta^{)m)}} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

nalezneme, že

$$\beta^{(m)} = \frac{\sum_{j,k=1}^{n} (f_j, A_{jk} y_k^{(m)})}{\sum_{j=1}^{n} \| \sum_{k=1}^{n} A_{jk} y_k^{(m)} \|^2}.$$

Věta 5. *Nechť A_{ik}, P_{ik}, $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ jsou lineární ohraničené operátory v úplném reálném Hilbertově prostoru H. Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ jsou komutativní operátory a $\mathbf{P}$ je takový, že má inversní $\mathbf{P}^{-1}$ v $\mathbf{H}$ a $\|\mathbf{I} - \mathbf{PA}\| = q < 1$. Pak posloupnost $\{\mathbf{y}^{(m)}\}$ definovaná rovností (2.18) konverguje v normě $\mathbf{H}$ k řešení rovnice (2.17) a platí tyto odhady:*

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^{(m)}\| \leqq kq^m \|\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{y}^{(0)}\|, \tag{2.19}$$

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^{(m)}\| \leqq kq \|\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{y}^{(m-1)}\|, \tag{2.20}$$

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^{(m)}\| \leqq kq \left\{ \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|^2 - \frac{[\sum_{j,k=1}^{n} (f_j, A_{jk} y_k^{(m-1)})]^2}{\sum_{j=1}^{n} \| \sum_{k=1}^{n} A_{jk} y_k^{(m-1)} \|^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{2.21}$$

kde $\mathbf{y}^{(0)} \in \mathbf{H}$, $k = \|\mathbf{A}^{-1}\| \leqq \|\mathbf{P}\|/(1 - q)$.

Poznámka 6. Položme v odhadu (2.8) resp. v (2.19) $y_0 = f$, kde v prvém případě $f \in H$, v druhém $\mathbf{f} \in \mathbf{H}$. Pak

$$\|y - y_m\| \leqq kq^m \|f\| \, \|I - A\| \tag{2.22}$$

resp.

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^{(m)}\| \leqq kq^m \|\mathbf{f}\| \, \|\mathbf{I} - \mathbf{A}\|. \tag{2.23}$$

Vztahu (2.22) resp. (2.23) lze užít k určení počtu kroků iteračního procesu nutných k dosažení žádané přesnosti.

Poznámka 7. Věty 4, 5 zůstanou v platnosti, nahradíme-li v odhadech (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) a v nerovnostech (2.19), (2.20), (2.21) číslo q číslen q' tak, že $q \leqq q' < 1$.

2.3. Užití metody podobné iterace. V dalším nám bude užitečné toto tvrzení: Jestliže operátor B je symetrický, $(By, y) > 0$ pro všechna $y \in H$, $y \not\equiv 0$ a $\|B\| < 1$, pak $\|I - B\| < 1$. Nechť platí jeden z předpokladů 1, 2 věty 4. Položme $A = I - \lambda K$ a rozeznávejme tyto případy:

A. $P = I$, pak $\|I - PA\| = \|\lambda K\|$. I. A. Birgerem [4] navržený iterační proces

$$y_{n+1} = f + \beta_n \lambda K y_n, \quad \beta_n = \frac{(f, Ay_n)}{\|Ay_n\|^2} \tag{2.24}$$

je speciálním případem vzorce (2.2). K tomu, aby metoda podobné iterace konvergovala, stačí, aby $\|\lambda K\| < 1$.

B. $P = \vartheta I$, kde

$$0 < \vartheta < \frac{1}{1 + \|\lambda K\|} \tag{2.25}$$

a operátor K je symetrický a takový, že $-(\lambda Ky, y) \geqq 0$ pro každé $y \in H$. Odtud $(PAy, y) > 0$ pro všechna $y \neq 0$, $y \in H$. Podle (2.25) je $\|PA\| < 1$. Tedy $\|I - PA\| = q < 1$. Podmínka věty 4 je splněna, tudíž proces podobné iterace definovaný rovností (2.2), kde $P = \vartheta I$, konverguje v H k řešení rovnice (2.1).

V tomto případě iterační proces je dán vztahem

$$y_{n+1} = \vartheta f + \frac{(f, Ay_n)}{\|Ay_n\|^2} [(I - \vartheta) y_n + \vartheta \lambda K y_n]$$

a podmínkou konvergence $q = \|I - \vartheta(I - \lambda K)\| < 1$. Odhadneme číslo q shora. Jsou-li splněny uvedené předpoklady, operátory $-(\lambda K)$, $I - \vartheta(I - \lambda K)$ jsou samoadjungované v H a platí

$$\|I - \vartheta(I - \lambda K)\| = \sup_{\|y\|=1} |(y - \vartheta(y - \lambda Ky), y)| = \sup_{\|y\|=1} |1 - \vartheta + \vartheta(\lambda Ky, y)| .$$

Protože

$$-(\lambda Ky, y) \leqq \sup_{\|y\|=1} -(\lambda Ky, y) = \|\lambda K\| < \frac{1 - \vartheta}{\vartheta},$$

je $1 - \vartheta + \vartheta(\lambda Ky, y) > 0$. Tedy

$$\|I - \vartheta(I - \lambda K)\| = \sup_{\|y\|=1} \{1 - \vartheta + \vartheta(\lambda Ky, y)\} \leqq 1 - \vartheta < 1 .$$

Položme $q' = 1 - \vartheta$. Pak $q \leqq q' < 1$.

Jelikož

$$k = \|A^{-1}\| \leqq \frac{\|P\|}{1 - q}, \quad \|P\| = \vartheta, \quad 1 - q' = \vartheta,$$

je $k \leqq 1$ a dostaneme tyto odhady:

$$\|y - y_n\| \leqq (1 - \vartheta)^n \|f - Ay_0\| , \tag{2.26}$$

$$\|y - y_n\| \leqq (1 - \vartheta) \|f - Ay_{n-1}\| , \tag{2.27}$$

$$\|y - y_n\| \leqq (1 - \vartheta) \left\{ \|f\|^2 - \frac{(f, Ay_{n-1})^2}{\|Ay_{n-1}\|^2} \right\}^{\frac{1}{2}} . \tag{2.28}$$

C. Položme $P = \vartheta^2(I - \lambda K)$, $0 < \vartheta < 1$. Dostaneme pak iterační vzorec

$$y_{n+1} = \vartheta^2(I - \lambda K) f + \frac{(Ay_n, f)}{\|Ay_n\|^2} [I - \vartheta^2(I - \lambda K)^2] y_n \tag{2.29}$$

s podmínkou konvergence

$$q = \|I - \vartheta^2(I - \lambda K)^2\| < 1 . \tag{2.30}$$

Nechť platí:

a) Operátor K je symetrický.
b) λ není charakteristickým číslem operátoru K.
c) Číslo ϑ splňuje nerovnost (2.25).

Pak je splněna nerovnost (2.30). Skutečně

$$((I - \lambda K)^2 y, y) = ((I - \lambda K) y, (I - \lambda K) y) > 0$$

pro všechna $y \neq 0$, $y \in H$ a uvažovaná λ. Pak $(PAy, y) = (\vartheta^2(I - \lambda K)^2 y, y) > 0$ pro všechna $y \neq 0$, $y \in H$ a $\|PA\| < 1$. Tedy $\|I - PA\| = q < 1$. Předpoklady věty 4 jsou splněny a tedy posloupnost $\{y_n\}$ definovaná rovností (2.29) konverguje v normě H k řešení rovnice (2.1).

Vzorce pro odhad můžeme zjednodušit za dodatečných předpokladů na K a ϑ. Budeme rozlišovat tři případy:

1. Nechť $(\lambda Ky, y) \leqq 0$ pro všechna $y \in H$. V nerovnosti (2.30) odhadneme číslo q shora.

Protože K je symetrický a platí (2.25), je

$$1 - \vartheta^2(A^2y, y) = 1 - \vartheta^2\|Ay\|^2 \geqq 1 - \vartheta^2\|A\|^2 \geqq 1 - \vartheta^2((1 + \|\lambda K\|^2)^2 > \\ > 1 - \vartheta^2 \frac{1}{\vartheta^2} = 0 \tag{2.31}$$

pro všechna $y \in H$, pro něž $\|y\| = 1$.

Tedy

$$\|I - \vartheta^2 A^2\| = \sup_{\|y\|=1} \{1 - \vartheta(I - \lambda K) y, (I - \lambda K) y)\} = \\ = \sup_{\|y\|=1} \{1 - \vartheta^2 + 2\vartheta^2(\lambda Ky, y) - \vartheta^2\|\lambda Ky\|^2\} < 1 - \vartheta^2 .$$

V odhadech (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) můžeme tedy číslo q nahradit číslem $q' = 1 - \vartheta^2$. Protože

$$\|P\| = \vartheta^2\|I - \lambda K\| \leqq \vartheta^2(1 + \|\lambda K\|) < \vartheta$$

a

$$1 - q \geqq 1 - q' = \vartheta^2 , \quad k = \|A^{-1}\| \leqq \frac{1}{\vartheta} ,$$

dostaneme tyto odhady:

$$\|y - y_n\| \leqq \frac{1}{\vartheta}(1 - \vartheta^2)^n \|f - Ay_0\| , \tag{2.32}$$

$$\|y - y_n\| \leqq \frac{1}{\vartheta}(1 - \vartheta^2) \|f - Ay_{n-1}\| ,$$

$$\|y - y_n\| \leqq \frac{1}{\vartheta}(1 - \vartheta^2) \left\{\|f\|^2 - \frac{(f, Ay_{n-1})^2}{\|Ay_{n-1}\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Jestliže operátor K je takový, že navíc platí nerovnost

$$(\lambda^2 K^2 y, y) \geqq m\|y\|^2 , \quad m > 0 , \tag{2.33}$$

dostaneme, že

$$(1 + m)\,\vartheta^2 \leqq \vartheta^2(1 + \|\lambda K\|^2) < \vartheta^2(1 + \|\lambda K\|)^2 < 1 .$$

Tedy

$$q \leqq q'' = 1 - \vartheta^2(1 + m) < 1 .$$

Značí-li λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ charakteristická čísla operátoru K, pak množina charakteristických čísel operátoru K^2 je totožná s množinou čtverců charakteristických čísel K. Podmínka (2.33) je tedy ekvivalentní s podmínkou, aby $\lambda_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Protože $q'' < q'$ dostáváme v tomto případě lepší odhady než odhady dané nerovnostmi (2.32).

2. Nechť $(\lambda Ky, y) < \|y\|^2$. Pak $\dfrac{\lambda}{\lambda_k} < 1$, $k = 1, 2, \ldots$ Položme $\mu = \max\limits_k \dfrac{\lambda}{\lambda_k}$. Potom

$$(Ay, y) = (y - \lambda Ky, y) \geqq \|y\|^2 - \sup_{\|y\|=1} (\lambda Ky, y)\,\|y\|^2 = \|y\|^2(1 - M(\lambda K)) ,$$

kde $M(\lambda K)$ je horní hranice samoadjungovaného operátoru λK. Protože $M(\lambda K) = \mu$, je A kladně definitní. Tedy

$$A^2 \geqq (1 - \mu)^2\, I . \tag{2.34}$$

Odhadneme $\|I - \vartheta^2 A^2\|$. Podle (2.34)

$$\|I - \vartheta^2 A^2\| = \sup_{\|y\|=1} |(y - \vartheta^2 A^2 y, y)| = \sup_{\|y\|=1} \{1 - \vartheta^2(A^2 y, y)\} \leqq 1 - \vartheta^2(1 - \mu)^2 .$$

Protože

$$0 < \vartheta^2(1 - \mu)^2 \leqq \vartheta^2\|A\|^2 < \vartheta^2(1 + \|\lambda K\|)^2 < 1 ,$$

lze ve vzorcích pro odhad nahradit číslo q číslem

$$q' = 1 - \vartheta^2\left(1 - \max_k \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2 < 1 .$$

3. Nechť $(\lambda Ky, y) \geqq l\|y\|^2$, $l > 0$ a číslo ϑ kromě (2.25) splňuje ostřejší nerovnost

$$\frac{2}{3 + l^2} < \vartheta . \tag{2.35}$$

Pak

$$\|I - \vartheta^2 A^2\| \leqq \sup_{\|y\|=1} \{1 - \vartheta^2 + 2\vartheta^2\|\lambda K\| - \vartheta^2(\lambda^2 K^2 y, y)\} \leqq$$

$$\leqq 1 - \vartheta^2 + 2\vartheta^2\,\frac{1 - \vartheta}{\vartheta} - l^2\vartheta^2 = 1 + 2\vartheta - (3 + l^2)\,\vartheta^2 .$$

Z nerovnosti (2.35) plyne, že

$$2\vartheta - (3 + l^2)\,\vartheta^2 < 0 .$$

Tedy $1 + 2\vartheta - (3 + l^2)\,\vartheta^2 < 1$. Můžeme tedy v odhadech věty 4 čísla q a k nahradit čísly

$$q' = 1 + 2\vartheta - \vartheta^2(3 + l^2)\,, \quad k' = \frac{1}{(3 + l^2)\,\vartheta - 2}\,.$$

Pro dosti velká l je číslo q' velmi malé. V tomto případě uvedená metoda konverguje velmi rychle.

D. Položme $P = I + J$, kde J je lineární ohraničený operátor komutativní s K a takový, že

$$\|G - J\| \leqq \frac{1}{1 + \|\lambda K\|}\,, \tag{2.36}$$

kde G je resolventa operátoru λK. Ukážeme, že za těchto předpokladů posloupnost $\{y_n\}$ definovaná rovností

$$y_{n+1} = (I + J)f + \frac{(f, Ay_n)}{\|Ay_n\|^2}\,[\lambda K(I + J)\,y_n - Jy_n] \tag{2.37}$$

konverguje v normě H k řešení rovnice (2.1). Podle věty 4 stačí dokázat, že $q = \|I - (I + J)(I - \lambda K)\| < 1$.

Podle definice resolventy je

$$PA = [(I + G) - (G - J)](I - \lambda K) = I - (G - J)(I - \lambda K)\,.$$

Odtud a podle (2.36)

$$q = \|I - (I + J)(I - \lambda K)\| = \|(G - J)(I - \lambda K)\| \leqq \|G - J\|\;\|I - \lambda K\| < 1\,.$$

Zároveň dostáváme horní odhad pro číslo q. Můžeme tedy čísla q, k nahradit čísly

$$q' = \|G - J\|\;\|I - \lambda K\|\,, \quad k' = \frac{1 + \|J\|}{1 - q'}\,.$$

2.3.1. Systémy lineárních algebraických rovnic. Nechť l_2 značí prostor všech posloupností $y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ s normou

$$\|y\| = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty\,.$$

Budiž dán systém lineárních algebraických rovnic

$$y_i - \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} y_k = f_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots\,, \tag{2.38}$$

přičemž

$$f = \{f_1, f_2, \ldots\} \in l_2\,.$$

Položme

$$Ky = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} y_k\,,$$

pak systém (2.38) můžeme psát ve tvaru $(I - K) y = f$, přičemž operátor K je dán maticí $\|c_{ik}\|_{i,k=1}^{i,k=\infty}$.

Odhadneme $\|Ky\|$.

$$\|Ky\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} y_k\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} y_k|^2)^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq (\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2)^{\frac{1}{2}} = G_1 \|y\| ,$$

kde

$$G_1 = (\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}|^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Jestliže $G < 1$, systém (2.38) má právě jedno řešení $y \in l_2$, které lze určit iteračním procesem (operátor P je dán jednotkovou maticí)

(2.39) $$y^{(m+1)} = f + \beta^{(m)} K y^{(m)} , \quad y^{(m)} = \{y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \ldots\} ,$$

(2.40) $$\beta^{(m)} = \frac{a^{(m)}}{b^{(m)}} ,$$

(2.41) $$a^{(m)} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j y_j - \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} f_j y_k^{(m)} ,$$

(2.42) $$b^{(m)} = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j^{(m)} - \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} y_k^{(m)}|^2 , \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Nechť $G > 1$ a operátory P, K splňují podmínky jednoho z případů **A**, **B**, **C**, odst. 2.3. Pak systém (2.38) má právě jedno řešení $y \in l_2$, které lze určit iteračním procesem

$$y^{(m+1)} = Pf + \beta^{(m)}(I - PA)\, y^{(m)} ,$$

kde $\beta^{(m)}$ je definováno vztahy (2.40), (2.41), (2.42) a platí tyto odhady:

(2.43) $$\|y - y^{(m)}\| = (\sum_{j=1}^{\infty} |y_j - y_j^{(m)}|^2)^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{\|P\|}{1 - q'} q'^m \|f - Ay^{(0)}\| ,$$

(2.44) $$\|y - y^{(m)}\| \leqq \frac{\|P\|}{1 - q'} q' \|f - Ay^{(m-1)}\| ,$$

(2.45) $$\|y - y^{(m)}\| \leqq \frac{\|P\|}{1 - q'} q' \left\{\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 - \frac{(a^{(m-1)})^2}{(b^{(m-1)})^2}\right\}^{\frac{1}{2}} ,$$

kde $y^{(0)} \in l_2$ a číslo q' má dříve stanovený význam a

$$F(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \{f_j^2 - 2(y_j f_j - \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} y_k f_j) + (y_j - \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} y_k)^2\} .$$

Podobně lze vyšetřovat soustavu lineárních algebraických rovnic

(2.46) $$y_i - \sum_{k=1}^{n} c_{ik} y_k = f_i , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

v n-rozměrném Euklidově prostoru E_n s normou

$$\|y\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}; \quad y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}.$$

Nechť matice $\|c_{jk}\|_{j,k=1}^{j,k=n}$ je symetrická. Pak $\|K\| = \lambda_1$, kde operátor K je dán maticí $\|c_{jk}\|_{j,k=1}^{j,k=n}$ a λ_1 je největší vlastní číslo matice $\|c_{jk}\|_{j,k=1}^{j,k=n}$. Je-li $\lambda_1 < 1$, lze užít iteračního procesu

$$y^{(m+1)} = f + \beta^{(m)} K y^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Je-li $\lambda_1 > 1$ a splňují-li operátory P, K podmínky jednoho z uvedených případů **A, B, C**, odst. 2.3, pak proces $y^{(m+1)} = Pf + \beta^{(m)}(I - PA)\, y^{(m)}$ konverguje k přesnému řešení soustavy (2.46) a platí analogické odhady k odhadům (2.43), (2.44), (2.45).

2.3.2. Integrální rovnice. Nechť je dána rovnice

(2.47) $$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, y(s)\, ds, \quad |\lambda| > 0,$$

kde

$$f(x) \in L_2(a, b), \quad \int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2\, dx\, ds < +\infty.$$

Označíme-li

$$Ky = \int_a^b K(x, s)\, y(s)\, ds,$$

pak (2.47) lze psát ve tvaru $(I - \lambda K)\, y = f$. Nechť lze volit operátor P tak, a operátor K nechť je takový, že operátory P, K splňují podmínky jednoho z uvedených případů **A, B, C, D**, odst. 2.3.

Pak iterace

(2.48) $$y_{n+1} = Pf + \beta_n(I - P(I - \lambda K))\, y_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

kde

$$\beta_n = \frac{\phi_n}{\psi_n},$$

$$\phi_n = \int_a^b f(x)\, y_n(x)\, dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, s)\, y_n(s) f(x)\, dx\, ds,$$

$$\psi_n = \int_a^b y_n^2(x)\, dx + \lambda \int_a^b \int_a^b H(x, s)\, y_n(x)\, y_n(s)\, dx\, ds,$$

(2.49) $$H(x, s) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, K(t, s)\, dt - 2K(x, s)$$

konvergují v $L_2(a, b)$ k řešení rovnice (2.47) a platí tyto odhady:

$$\|y - y_n\| \leqq \frac{\|P\|}{1 - q'} q'^n \|f - Ay_0\|,$$

$$\|y - y_n\| \leqq \frac{\|P\|}{1 - q'} q' \|f - Ay_{n-1}\|,$$

$$\|y - y_n\| \leqq \frac{\|P\|}{1 - q'} q' \left\{ \int_a^b |f(x)|^2\, dx - \frac{\phi_{n-1}^2}{\psi_{n-1}} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

přičemž $q \leqq q' < 1$ a funkcionál $F(y)$ je dán vzorcem (1.25), odst. I.

Je-li jádro $K(x, s)$ symetrické, pak $\|K\| = \lambda_1$, kde je největší vlastní hodnota $K(x, s)$. Jestliže $\varepsilon_1 = |\lambda\lambda_1| < 1$, pak posloupnost $\{y_n\}$ definovaná rovností

$$y_{n+1} = f + \beta_n \lambda K y_n$$

konverguje v $L_2(a, b)$ k řešení rovnice (2.47) a platí tyto odhady:

$$\|y - y_n\| \leqq \frac{1}{1 - \varepsilon_1} \varepsilon_1^n \|f - Ay_0\| ,$$

$$\|y - y_n\| \leqq \frac{1}{1 - \varepsilon_1} \varepsilon_1 \left\{ \int_a^b f^2(x) \, dx - \frac{\phi_{n-1}^2}{\psi_{n-1}} \right\}^{\frac{1}{2}} ,$$

přičemž funkcionál $F(y)$ je dán vztahem (1.25) odst. I.

Označíme-li

$$z_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \, y_n(s) \, ds ,$$

pak $z_n(x) \to y(x)$, stejnoměrně, když $n \to \infty$. Skutečně:

$$|z_n(x) - y(x)| = |\lambda| \, |\int_a^b K(x, s)[y(s) - y_n(s)] \, ds| \leqq$$
$$\leqq |\lambda| (\int_a^b K^2(x, s) \, ds)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b [y(s) - y_n(s)]^2 \, ds)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= C\|y - y_n\| \underset{n \to \infty}{\to} 0 ,$$

kde

$$C = |\lambda| (\int_a^b K^2(x, s) \, ds)^{\frac{1}{2}} .$$

Nechť je dána rovnice

$$y(x) - \lambda \int_a^s K(x, s) \, y(s) \, ds = f(x) , \tag{2.50}$$

kde

$$f(x) \in L_2(a, b) , \quad \int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 \, dx \, ds < +\infty .$$

Jsou-li splněny předpoklady věty 4, pak posloupnost $\{y_n\}$ definovaná vztahem (2.48), kde

$$K y_n(x) = \int_a^s K(x, s) \, y_n(s) \, ds ,$$

$$\beta_n = \frac{s_n}{r_n} ,$$

$$s_n = \int_a^b f(x) \, y_n(x) \, dx - \lambda \int_a^b \int_a^s K(x, s) \, y_n(s) f(x) \, dx \, ds ,$$

$$z_n = \int_a^b y_n^2(x) \, dx - \lambda \int_a^b \int_a^s H(x, s) \, y_n(x) \, y_n(s) \, dx \, ds$$

a $H(x, s)$ je dáno výrazem (2.49), konverguje k řešení rovnice (2.50).

2.3.3. Numerické příklady. a) Nechť je dána rovnice

$$y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s) \, y(s) \, ds = x^2 , \quad |\lambda| \neq 0 , \quad 0 \leqq x \leqq 1 , \tag{2.51}$$

kde

$$K(x, s) = \begin{cases} x(1 - s) , & 0 \leqq x \leqq s \leqq 1 , \\ s(1 - x) , & 0 \leqq s \leqq x \leqq 1 . \end{cases}$$

Řešme rovnici (2.51) metodou podobné iterace.

1. Položme $\lambda = -1$. Pak $\|\lambda K\| = \frac{1}{\pi^2} < 1$. Volíme tedy $P = I$. Podle věty 4 metoda podobné iterace konverguje v normě $L_2(0, 1)$ k řešení rovnice (2.51).

Položme $y_0 = x^2$. Výpočtem zjistíme, že

$$Kx^2 = \frac{x}{12}(1 - x^3),$$

kde

$$Ky = \int_0^1 K(x, s)\, y(s)\, ds.$$

Tedy

$$Ax^2 = x^2 + \frac{x}{12}(1 - x^3).$$

Určíme koeficient β_0:

$$(x^2, Ax^2) = \int_0^1 x^2 Ax^2 \, dx = 0{,}20898412,$$
$$\|Ax^2\|^2 = \int_0^1 (Ax^2)^2 \, dx = 0{,}21863.$$

Odtud $\beta_0 = 0{,}95588$. Prvním iteračním krokem dostáváme

$$y_1 = x^2 - 0{,}07966x(1 - x^3).$$

Stanovíme chybu prvního iteračního kroku: Předně $\|x^2\|^2 = 0{,}20000$,

$$\left\{\|x\|^2 - \frac{(x^2, Ax^2)^2}{\|Ax^2\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = 0{,}0153\,; \quad k' = \frac{\pi^2}{\pi^2 - 1},$$

$$q = \frac{1}{\pi^2}, \quad k'q = 0{,}11274.$$

Odtud dostaneme podle (2.10)

$$\|y - y_1\| \leqq 0{,}0017,$$

zatím co metodou postupných aproximací obdržíme

$$\|y - y_1\| \leqq 0{,}004.$$

2. Položme $\lambda = -10$. Pak $\|\lambda K\| = \frac{10}{\pi^2} > 1$. Protože $-(\lambda Ky, y) > 0$ pro všechna $y \not\equiv 0$, $y \in L_2(0, 1)$, volíme $P = \vartheta I$, kde

$$\vartheta = 0{,}49650 < \frac{1}{1 + \frac{10}{\pi^2}}.$$

Položme $y_0 = x^2$. Pak

$$Ax^2 = x^2 + \tfrac{5}{6}x(1 - x^3).$$

Určíme β_0. Výpočtem dostaneme, že

$$(f, Ay_0) = (x^2, Ax^2) = 0{,}28928571\,, \quad \|Ax^2\|^2 = 0{,}45573\,.$$

Odtud $\beta_0 = 0{,}63477$. První iterační krok v tomto případě dává

$$y_1 = 0{,}81611x^2 - 0{,}26263x + 0{,}26263x^4\,.$$

Odhadneme podle (2.28) $\|y - y_1\|$:

$$\left\{\|x^2\|^2 - \frac{(x^2, Ax^2)^2}{\|ax^2\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = 0{,}127\,, \quad 1 - \vartheta = 0{,}50350\,,$$

$$\|y - y_1\| \leqq 0{,}064\,.$$

Jestliže $\tilde{y}_1$ je přibližné řešení získané prvním krokem Rallova-Wiardova iteračního procesu, dává Rallova metoda odhad

$$\|y - \tilde{y}_1\| \leqq 0{,}14\,.$$

Odhadneme ještě $\|y - y_2\|$:

$$Ay_1 = 0{,}06728x + 0{,}81611x^2 + 0{,}43772x^3 - 0{,}41746x^4 - 0{,}08754x^6\,,$$

$$(x^2, Ay_1) = 0{,}18364\,; \quad \|Ay_1\|^2 = 0{,}16880\,; \quad \beta_1 = 1{,}08791\,;$$

$$\left\{\|x^2\|^2 - \frac{(x^2, Ay_1)^2}{\|Ay_1\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = 0{,}01479\,. \quad 1 - \vartheta = 0{,}50350\,.$$

Odtud

$$\|y - y_2\| \leqq 0{,}007\,,$$

přičemž Rallova metoda až při třetím iteračním kroku dává odhad

$$\|y - \tilde{y}_3\| \leqq 0{,}006\,.$$

b) Řešme metodou podobné iterace rovnici

$$y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s)\, y(s) = x\,,$$

kde

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2 - s)\,, & x \leqq s\,, \\ \frac{1}{2}s(2 - x)\,, & x \geqq s\,. \end{cases}$$

Operátor K je kladný a symetrický, tedy $\|K\| = \dfrac{1}{\lambda_1} < 1$, neboť $\lambda_1 > 1$.

1. Položme $\lambda = -1$. Jelikož $\|\lambda K\| < 1$, volíme $P = I$. Položme $y_0 = x$, pak

$$Ky_0 = \tfrac{1}{3}x(1 - \tfrac{1}{2}x^2)\,, \quad Ay_0 = \tfrac{4}{3}x - \tfrac{1}{6}x^3\,, \quad \beta_0 = 0{,}80980\,.$$

Prvním iteračním krokem obdržíme

$$y_1 = 1{,}26993x - 0{,}13497x^3\,.$$

Stanovíme chybu $\|y - y_1\|$.

$$\frac{(f, Ay_0)^2}{\|Ay_0\|^2} = 0{,}3329164490\,, \quad \left\{\|f\|^2 - \frac{(f, Ay_0)^2}{\|Ay_0\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = 0{,}01017\,, \quad k' = 1{,}32103\,.$$

Odtud a podle

$$\|y - y_1\| \leqq 0{,}013\,,$$

zatím co metoda postupných aproximací dá odhad

$$\|y - y_1\| \leqq 0{,}043\,.$$

2. Položme $\lambda = -6$. Pak $\|\lambda K\| > 1$, avšak $-(\lambda K y, y) > 0$ pro všechna $y \not\equiv 0$, $y \in H$. Volíme tedy $P = \vartheta I$, kde $\vartheta = 0{,}406821 < 1/(1 + \|\lambda K\|)$. Položme $y_0 = x$, pak

$$A y_0 = x(3 - x^2)\,, \quad (f, A y_0) = \tfrac{4}{5}\,, \quad \|A y_0\|^2 = \tfrac{68}{35}\,.$$

Odtud $\beta_0 = 0{,}411765$ a tedy

$$y_1 = 0{,}316041x + 0{,}167515x^3\,.$$

Odhadneme $\|y - y_1\|$. Předně

$$1 - \vartheta = 0{,}59318\,, \quad \left\{\|f\|^2 - \frac{(f, A y_0)^2}{\|A y_0\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = 0{,}06262\,.$$

Odtud a podle (2.28)

$$\|y - y_1\| \leqq 0{,}037\,.$$

Rall-Wiardova iterační metoda dává ($\tilde{y}_0 = x$)

$$\tilde{y}_1 = 0{,}18636x + 0{,}40682x^3\,,$$

$$\|y - \tilde{y}_1\| \leqq 0{,}488\,.$$

Určíme J_2. Především $A y_1 = 1{,}098898x - 0{,}148527x^3 - 0{,}050255x^5$,

$$(A y_1, f) = 0{,}329412\,, \quad \|A y_1\|^2 = 0{,}326495\,.$$

Odtud $\beta_1 = 1{,}00893$ a tudíž

$$y_2 = 0{,}27464x + 0{,}22996x^3 + 0{,}02063x^5\,.$$

Odhadneme podle (2.28) $\|y - y_2\|$.

$$\frac{(A y_1, f)^2}{\|A y_1\|^2} = 0{,}332355\,, \quad \left\{\|f\|^2 - \frac{(A y_1, f)^2}{\|A y_1\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = 0{,}03127\,,$$

$1 - \vartheta = 0{,}59318$. Odtud

$$\|y - y_2\| \leqq 0{,}018\,.$$

Zatím co Rall-Wiardovou metodou dostaneme

$$\tilde{y}_2 = 0{,}21679x + 0{,}31713x^3 + 0{,}04965x^5\,,$$

$$\|y - \tilde{y}_2\| \leqq 0{,}060\,.$$

Z obou příkladů je tedy vidět, že užití metody podobné iterace je výhodnější než užití starších metod.

Poznámka. Obdobný výsledek jako ve větě 1 ve speciálním případě získali М. А. Красносельский - С. Г. Крейн: Итерационный процесс с минимальными невязками. Мат. сб., *31*, 1952, 315-334. *(Doplněno při korektuře.)*

Literatura

[1] *G. Wiarda*: Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigen der Anwendungen, Leipzig 1930.

[2] *H. Bückner*: Die praktische Behandlung von Integralgleichungen. Berlin, Springer-Verlag, 1952.

[3] *P. A. Samuelson*: Rapidly converging solutions to integral equations. J. Math. Phys. 31 (1953), 276—286.

[4] *И. А. Биргер:* Некоторные математические методы решения инженерных задач. ОБОРОНГИЗ, Москва, 1956.

[5] *L. B. Rall*: Error bounds for iterative solutions of Fredholm integral equations. Pacific Journal of Mathematics, Vol. V (1955), 977—986.

[6] *H. D. Block*: Construction of solutions and propagation of errors in nonlinear problems. Proceedings of the American Mathematical Society, 4 (1953), 715—722.

[7] *Л. В. Канторович:* Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи математических наук, 6, (1948). 89—185.

[8] *Magnus R. Hestenes*: The conjugate-gradient method for solving linear systems. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. VI (1956), 83—102.

[9] *Д. Ф. Харазов:* О методе найскорейшего спуска. Труды Тбилисского математического института, Т. XXIV, (1957), 111—123.

[10] *М. Г. Крейн:* О линейных вполне непрерывных операторах в функциональных пространствах с двуня нормами. Сб. тр. ин-та мат. АНСССР, № 9, (1948).

[11] *P. Lax*: Symmetrizable linear transformationes. Comm. on Pure and Appl. Math., Vol. VII, N. 4 (1954), 633—647.

[12] *F. Riesz, B. Sz. Nagy*: Leçons d'analyse fonctionnelle. Ruský překlad, Moskva 1954.

Резюме

О СХОДИМОСТИ И ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ ИТЕРАЦИЙ

ИОЗЕФ КОЛОМЫ (Josef Kolomý), Прага

И. А. Биргер [4] предложил новые методы для решений функциональных уравнений, но без доказательства сходимости и установления оценок.

В статье обобщается метод сложной итерации с переменным параметром и метод подобной итерации, даются условия сходимости и установления оценок для этих методов. Дальше предлагаются некоторые новые методы, аналогичные методам Неймана, Виарда, Бюкнера и Самуэлсона. Приведенные методы применяются к приближенному решению линейных алгебраических уравнений и к решению интегральных уравнений.

I. Метод сложной итерации с переменным параметром. Пусть дано уравнение

$$Ay = f, \tag{1}$$

где A — линейный ограниченный симметричный оператор в гильбертовом пространстве H. Процесс сложной итерации с переменным параметром запишем в виде

$$y_{n+1} = y_n + \beta_n h_n\,, \quad \beta_n = (Ah_n, h_n)/\|Ah_n\|^2\,, \quad h_n = f - Ay_n \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть A—линейный самосопряженный оператор в H и*

$$m\|y\|^2 \leqq (Ay, y) \leqq M\|y\|^2\,,$$

где

$$m = \inf_{\|y\|=1} (Ay, y)\,, \quad M = \sup_{\|y\|=1} (Ay, y)\,, \quad 0 < m \leqq M < +\infty\,.$$

Тогда последовательность $\{y_n\}$ сходится по норме H к решению уравнения (1) *и имеют место следующие оценки:*

$$\|y - y_n\| \leqq k\gamma^n\|f - Ay_0\|\,,$$
$$\|y - y_n\| \leqq k\gamma\|f - Ay_{n-1}\|\,,$$
$$\|y - y_n\| \leqq k\left\{\|h_{n-1}\|^2 - \frac{(Ah_{n-1}, h_{n-1})^2}{\|Ah_{n-1}\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\gamma = (M^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}/M$ *и* $k = \|A^{-1}\| \leqq 1/m$.

Теорема 3. *Пусть A—строго положительный симметричный ограниченный оператор в H и пусть существует ограниченный A^{-1}. Тогда последовательность $\{y_n\}$ определена по отношению* (2) *сходится по норме H к решению* (1).

II. Метод подобной итерации. Пусть дано уравнение (1), где A—линейный ограниченный оператор в вещественном гильбертовом пространстве H, которое не должно выполнять аксиомы полноты. Процесс подобной итерации запишем в виде

$$y_{n+1} = Pf + \beta_n(I - PA)\,y_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3}$$

где P—линейный ограниченный оператор в H, коэффициенты β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) определяются из условия

$$\frac{\partial F(\beta_n y_n)}{\partial \beta_n} = 0\,, \quad \text{где} \quad F(\beta_n y_n) = \|f - \beta_n A y_n\|^2\,.$$

Получим

$$y_{n+1} = Pf + \frac{(f, Ay_n)}{\|Ay_n\|^2}(I - PA)\,y_n\,. \tag{4}$$

Теорема 4. *Пусть A, P—линейные ограниченные коммутирующие операторы в вещественном гильбертовом пространстве H и P—такой, что P^{-1} существует в H и выполнено условие $\|I - PA\| = q < 1$. Пусть, далее, выполнено одно из следующих условий:*

1. *Пространство H полно.*
2. *Оператор $I - PA$ вполне непрерывен в H.*

Тогда уравнение (1) *имеет единственное решение* y. *Последовательность* $\{y_n\}$, *построенная по отношению* (4), *сходится к* y *по норме* H, *и имеют место оценки*:

$$\|y - y_n\| \leqq kq^n \|f - Ay_0\|, \quad \|y - y_n\| \leqq kq \|f - Ay_{n-1}\|,$$
$$\|y - y_n\| \leqq kq \left\{\|f\|^2 - \frac{(f, Ay_{n-1})^2}{\|Ay_{n-1}\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $y_0 \in H$, $k = \|A^{-1}\| \leqq \|P\|/(1 - q)$.

Пусть выполнено одно из условий 1., 2. теоремы 3. Положим $A = I - \lambda K$, где K—линейный ограниченный оператор, и будем различать случаи:

А. $P = I$ (в этом случае получим итерацию И. А. Биргера).

Б. $P = \vartheta I$, $0 < \vartheta < 1$.

В. $P = \vartheta^2(I - \lambda K)$, $0 < \vartheta < 1$.

Г. $P = I + J$, где J—линейный ограниченный оператор в H.

Метод подобной итерации (4) в этих отдельных случаях сходится, когда в случае

А. $\|\lambda K\| < 1$.

Б. а) K—симметричный оператор. б) $-(\lambda Ky, y) \leqq 0$ для всех $y \in H$. в) выполнено неравенство (2.25).

В. а) K—симметричный оператор. б) λ не является характеристическим числом k. в) выполнено неравенство (2.25).

Г. а) оператор J коммутирует с K. б) выполнено (2.36), где G—резольвентный оператор для оператора λK.

Summary

ON THE CONVERGENCE AND APPLICATION OF CERTAIN ITERATIVE METHODS

JOSEF KOLOMÝ, Praha

I. A. BIRGER [4] gives some new methods for solving some functional equations, but without any proofs of convergence or determination of error bounds.

In this paper Birger's composed iterative method with variable parameter and similar iterative method are generalized. There are given convergence conditions, error bounds for these methods and some methods analogous to those of Neumann, Wiarda, Bückner and Samuelson. These are then applied to the determination of approximate solutions of systems of linear algebraic equations and integral equations.

I. The composed iterative method with variable parameter. Let there be given the equation

(1) $$Ay = f,$$

where A is a linear bounded symmetric operator in a Hilbert space H. The composed iterative method may then be written in the form

(2) $$y_{n+1} = y_n + \beta_n h_n\,, \quad \beta_n = (Ah_n, h_n)/\|Ah_n\|^2\,, \quad h_n = f - Ay_n\,.$$

Theorem 1. *Let A be a linear self-adjoint operator in H and*

$$m\|y\|^2 \leqq (Ay, y) \leqq M\|y\|^2\,,$$

where

$$m = \inf_{\|y\|=1} (Ay, y)\,, \quad M = \sup_{\|y\|=1} (Ay, y)\,, \quad 0 < m \leqq M < +\infty\,.$$

Then the sequence $\{y_n\}$ defined by (2) is convergent in the norm of H to the solution y of (1), and its error is bounded by

$$\|y - y_n\| \leqq k\gamma^n\|f - Ay_0\|\,, \quad \|y - y_n\| \leqq k\gamma\|f - Ay_{n-1}\|\,,$$

$$\|y - y_n\| \leqq k\left\{\|h_{n-1}\|^2 - \frac{(Ah_{n-1}, h_{n-1})^2}{\|Ah_{n-1}\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

where

$$\gamma = (M^2 - m^2)^{\frac{1}{2}} / M\,, \quad k = \|A^{-1}\| \leqq 1/m\,.$$

Theorem 3. *Let A be a linear symmetric bounded positive operator $((Ay,y) > 0$ for $y \not\equiv 0)$ in H having bounded A^{-1}. Then the sequence $\{y_n\}$ defined by (2) is convergent in the norm of H to the solution y of (1).*

II. The similar iterative method. Let there be given the equation (1), where A is a linear bounded operator in a real Hilbert space H. The so-called similar iterative method may then be written in the form

(3) $$y_{n+1} = Pf + \beta_n(I - PA)\,y_n\,, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

where P is a linear bounded operator in H, the parameters β_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ are determined from the conditions $\partial F(\beta_n y_n)/\partial\beta_n = 0$, where $F(\beta_n y_n) = \|f - \beta_n Ay_n\|^2$. Then

(4) $$y_{n+1} = Pf + \frac{(f, Ay_n)}{\|Ay_n\|^2}(I - PA)\,y_n\,.$$

Theorem 4. *Let A, P be linear bounded commutative operators in a real Hilbert space H (not necessarily complete) such that P^{-1} exists and $\|I - PA\| = q < 1$. Let one of the following conditions be fulfilled:*

1. *The H is a complete space.*
2. *Operator $I - PA$ is completely continuous in H.*

Then the equation (1) has a unique solution y. The iterative process defined by (4) is convergent in the norm of H to the solution y of (1) and its error is bounded by

$$\|y - y_n\| \leqq kq^n\|f - Ay_0\|\,, \quad \|y - y_n\| \leqq kq\|f - Ay_{n-1}\|\,,$$

$$\|y - y_n\| \leqq kq\left\{\|f\|^2 - \frac{(f, Ay_{n-1})^2}{\|Ay_{n-1}\|^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

where $k = \|A^{-1}\| \leqq \|P\|/(1 - q)$.

Let one of the conditions 1, 2 of theorem 3 be fulfilled. We set $A = I - \lambda K$, where K is a linear bounded operator. The operator P will now be specified to obtain several iterative methods.

A. $P = I$ (in this case we obtain Birger's iterative method).

B. $P = \vartheta I$, $0 < \vartheta < 1$.

C. $P = \vartheta^2(I - \lambda K)$, $0 < \vartheta < 1$.

D. $P = I + J$, where J is a linear bounded operator in H.

The convergence conditions for these cases are the following:

A. $\|\lambda K\| < 1$.

B. a) K is a symmetric operator. b) $-(\lambda Ky, y) \geqq 0$ for every $y \in H$. c) ϑ satisfies (2.25).

C. a) K is a symmetric operator. b) λ is not a characteristic value of K. c) ϑ satisfies (2.25).

D. a) The operator J commutes with K. b) The inequalities (2.36) are fulfilled, where G is the resolvent operator for λK.