Ilja Černý

Poznámka o zobrazení hranice otevřené množiny holomorfní funkcí

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 3, 318--322

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117509`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

POZNÁMKA O ZOBRAZENÍ HRANICE OTEVŘENÉ MNOŽINY HOLOMORFNÍ FUNKCÍ

ILJA ČERNÝ, Praha

(Došlo dne 27. února 1963)

V článku se vyšetřuje vztah mezi $F(H(\Omega) \cap G)$ [1] a $H(F(\Omega)) \cap F(G)$, kde Ω a G jsou otevřené množiny, $\Omega \subset G$, a F je holomorfní funkce, která není konstantní v žádné komponentě množiny G.

Budeme pracovat v uzavřené Gaussově rovině S; otevřenou Gaussovu rovinu označíme E. Funkce F nechť je holomorfní v (pevně dané) otevřené množině $G \subset S$, přičemž nechť F není konstantní v žádné komponentě této množiny. Nechť je dále dána otevřená množina $\Omega \subset G$.

Podle známých vět z teorie funkcí komplexní proměnné je za těchto předpokladů obrazem (při zobrazení F) každé otevřené množiny $M \subset G$ opět otevřená množina. Žádných hlubších vět nebudeme v dalším potřebovat. Naším cílem je dokázat několik tvrzení, užitečných v teorii konformního zobrazení.

Věta 1. *Je-li F prostá v Ω, je*

$$F(H(\Omega) \cap G) \subset H(F(\Omega)) \cap F(G) . \tag{1}$$

Důkaz. Buď $w_0 \in F(H(\Omega) \cap G)$; pak je $w_0 \in F(\bar{\Omega} \cap G)$, což je částí $\overline{F(\Omega)} \cap F(G)$ podle známé věty o spojitých zobrazeních. Vzhledem k tomu, že $F(\Omega)$ je otevřená množina, je $H(F(\Omega)) = \overline{F(\Omega)} - F(\Omega)$, takže stačí ještě dokázat, že $w_0 \notin F(\Omega)$.

Dokážeme, že z předpokladu $w_0 \in F(\Omega)$ plyne, že F není prostá v Ω; tím bude naše tvrzení dokázáno. Buď tedy $w_0 \in F(\Omega)$; protože je také $w_0 \in F(H(\Omega) \cap G)$, existují body $z_0 \in H(\Omega) \cap G$ a $z_1 \in \Omega$ tak, že $w_0 = F(z_0) = F(z_1)$. Protože w_0 je bodem otevřené množiny $F(\Omega)$, existuje okolí $U(w_0)$, obsažené v $F(\Omega)$. Body $z_0 \in H(\Omega)$ a $z_1 \in \Omega$ jsou různé; odtud a ze spojitosti funkce F v těchto bodech plyne existence disjunktních okolí $U(z_0) \subset G$ a $U(z_1) \subset \Omega$, pro něž je

$$F(U(z_0)) \cup F(U(z_1)) \subset U(w_0) . \tag{2}$$

[1]) $H(\Omega)$ je hranice množiny Ω.

Položme

(3) $$M = F(U(z_0)) \cap F(U(z_1))\,;$$

pak je M otevřená část $U(w_0)$, obsahující bod w_0, a otevřené množiny

(4) $$F_{-1}(M) \cap U(z_0)\,, \quad F_{-1}(M) \cap U(z_1)$$

jsou disjunktní a jejich obrazem je M. První z množin (4) obsahuje bod z_0, druhá bod z_1. Protože bod z_0 leží na hranici Ω, je množina

(5) $$N = F_{-1}(M) \cap U(z_0) \cap \Omega$$

neprázdná a otevřená (a disjunktní s $F_{-1}(M) \cap U(z_1)$); dále je $\emptyset \neq F(N) \subset M$.

Ke každému bodu $\zeta_0 \in N$ existuje tedy bod $\zeta_1 \in F_{-1}(M) \cap U(z_1)$ – tedy bod různý od ζ_0 – pro nějž je $F(\zeta_1) = F(\zeta_0)$. Protože však oba body ζ_0, ζ_1 leží v Ω, není F prostá v Ω.

Následující příklad ukazuje, že předpoklad o tom, že F je prostá v Ω, je podstatný.

Příklad 1. Buď $G = E$, $F = \exp$, $\Omega = (0, 1) \times (0, 4\pi)$; pak je $H(\Omega) \cap G = H(\Omega)$ sjednocením úseček $\overline{0, 1}$, $\overline{1, 1 + 4\pi i}$, $\overline{0, 4\pi i}$, $\overline{4\pi i, 1 + 4\pi i}$, jejichž obrazy jsou po řadě: úsečka $\overline{1, e}$, kružnice K_e o středu 0 a poloměru e, jednotková kružnice K_1 a úsečka $\overline{1, e}$. $F(\Omega)$ je mezikruží o středu 0 s vnitřním poloměrem 1, s vnějším poloměrem e. Je tedy $H(F(\Omega)) \cap F(G) = H(F(\Omega)) = K_1 \cup K_e$.

Odtud je patrné, že obecně (tj. když F není prostá v Ω) neplatí inkluse (1).

Věta 2. *Je-li* $\overline{\Omega} \subset G$, *je*

(6) $$H(F(\Omega)) \subset F(H(\Omega))\,.$$

Důkaz. Protože F je spojitá v G, je $F(\overline{\Omega}) \subset \overline{F(\Omega)}$. Vzhledem k tomu však, že $\overline{\Omega}$ je kompaktní, je $F(\overline{\Omega})$ také kompaktní, tedy uzavřená, a $\overline{F(\Omega)} \subset \overline{F(\overline{\Omega})} \subset F(\overline{\Omega})$. Z toho plyne, že platí rovnost $F(\overline{\Omega}) = \overline{F(\Omega)}$. Vzhledem k tomu, že Ω i $F(\Omega)$ jsou otevřené množiny, je tedy

$$H(F(\Omega)) = \overline{F(\Omega)} - F(\Omega) = F(\overline{\Omega}) - F(\Omega) \subset F(\overline{\Omega} - \Omega) = F(H(\Omega))\,,$$

čímž je tvrzení dokázáno.

Věta 3. *Je-li F prostá v Ω a je-li* $\overline{\Omega} \subset G$, *je*

(7) $$F(H(\Omega)) = H(F(\Omega))\,.$$

Důkaz. Protože $\overline{\Omega} \subset G$, je $H(\Omega) = H(\Omega) \cap G$; jak jsme již řekli v důkazu věty 2, je $F(\overline{\Omega}) = \overline{F(\Omega)}$, takže $H(F(\Omega)) \subset \overline{F(\Omega)} = F(\overline{\Omega}) \subset F(G)$ a $H(F(\Omega)) \cap F(G) = H(F(\Omega))$. Stačí nyní užít inklusí (1) a (6).

Další příklad ukazuje, že obecně inkluse

(8) $$H(F(\Omega)) \cap F(G) \subset F(H(\Omega) \cap G)$$

(kterou je třeba v obecném případě, tj. když nevíme, zda $\overline{\Omega} \subset G$, zřejmě nahradit inklusi (7)), neplatí.

Příklad 2. Nechť pro každé reálné číslo α znamená $R(\alpha)$ otevřenou polopřímku, vycházející z počátku, na níž leží body s argumentem α. Pro každou dvojici $\alpha_1 < \alpha_2$ označme

$$P(\alpha_1, \alpha_2) = E(z; \alpha_1 < \operatorname{Im} z < \alpha_2)\,, \tag{9}$$

$$V(\alpha_1, \alpha_2) = \bigcup_{\alpha_1 < \alpha < \alpha_2} R(\alpha)\,. \tag{10}$$

Při zobrazení exponenciální funkcí přechází jak známo $P(\alpha_1, \alpha_2)$ ve $V(\alpha_1, \alpha_2)$. Nechť $G = E$, $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} P((2n + 1/2^{n+1})\,\pi, (2n + 1/2^n)\,\pi)$, takže $H(\Omega) \cap G$ je sjednocení všech přímek $y = (2n + 1/2^{n+1})\,\pi$, $y = (2n + 1/2^n)\,\pi$. Je-li $F = \exp$, je $F(\Omega) = \bigcup_{n=0}^{\infty} V(\pi/2^{n+1}, \pi/2^n)$, $H(F(\Omega)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} R(\pi/2^n) \cup R(0)$.

Inkluse (8) neplatí, neboť $R(0) \subset H(F(\Omega)) \cap F(G) - F(H(\Omega) \cap G)$.

Věta 4. *Nechť existuje přirozené číslo p tak, že množina $F_{-1}(w)$ obsahuje pro každé w ($\in F(G)$) nejvýše p bodů. Je-li $w_0 \in H(F(\Omega)) \cap F(G)$ a obsahuje-li $F_{-1}(w_0)$ právě p bodů, je $w_0 \in F(H(\Omega) \cap G)$.*

Důkaz. Nechť se množina $F_{-1}(w_0)$ skládá z bodů $z_1, \ldots, z_p$. Protože $F(G)$ je otevřená množina, obsahující bod w_0, existuje okolí $U(w_0, \delta) \subset F(G)$, a k němu existují disjunktní okolí $U(z_j, \Delta)$, pro něž je $F(U(z_j, \Delta)) \subset U(w_0, \delta)$. (Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že poloměr Δ těchto okolí je menší než jakékoliv předem dané kladné číslo; této poznámky později využijeme.)

Množina

$$M = \bigcap_{j=1}^{p} F(U(z_j, \Delta)) \subset U(w_0, \delta) \tag{11}$$

je otevřená a obsahuje bod w_0. Tvrdíme, že

$$F_{-1}(M) \subset \bigcup_{j=1}^{p} U(z_j, \Delta)\,. \tag{12}$$

Je-li totiž $z \in F_{-1}(M)$, je $w = F(z) \in M$, takže pro každé $j = 1, \ldots, p$ existuje bod $\zeta_j \in U(z_j, \Delta)$ tak, že $F(\zeta_j) = w$. Protože množiny $U(z_j, \Delta)$ jsou disjunktní, jsou body ζ_j navzájem různé; protože podle předpokladu existuje nejvýše p různých bodů v G, v nichž F nabývá hodnoty w, je nutně $z = \zeta_j$ pro některé j, takže $z \in \bigcup_{j=1}^{p} U(z_j, \Delta)$. Tím je (12) dokázáno.

Protože $w_0 \in H(F(\Omega)) \cap M$, je i $F(\Omega) \cap M \neq \emptyset$, takže existuje bod $w \in M$ tvaru $w = F(\omega)$, kde $\omega \in \Omega$. Je pak $\omega \in F_{-1}(M)$, tedy $\omega \in \bigcup_{j=1}^{p} U(z_j, \Delta)$.

Proveďme nyní analogickou úvahu pro okolí $U(w_0, \delta/n)$ (místo pro $U(w_0, \delta)$). Tím dostaneme okolí $U(z_j, \Delta_n)$, kde bez újmy obecnosti lze předpokládat, že $\Delta_n < 1/n$, množiny

$$M_n = \bigcap_{j=1}^{p} (F(U(z_j, \Delta_n)) \subset U(w_0, \delta/n)$$

a body $w_n \in U(w_0, \delta/n) \cap M_n$ tvaru $w_n = F(\omega_n)$, kde $\omega_n \in \bigcup_{j=1}^{p} U(z_j, \Delta_n)$.

Protože bodů z_j je jen konečný počet, existuje jistě vybraná posloupnost $\{\omega_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a index j tak, že $\omega_{n_k} \in U(z_j, \Delta_{n_k})$ pro každé k, takže $\omega_{n_k} \to z_j$. Body ω_{n_k} leží v Ω, takže $z_j \in \overline{\Omega}$. Přitom je $z_j \notin \Omega$, neboť jinak by bod $w_0 = F(z_j)$ ležel v otevřené množině $F(\Omega)$ a ne na její hranici. Odtud plyne, že $z_j \in H(\Omega) \cap G$ a $F(z_j) = w_0 \in F(H(\Omega) \cap G)$. Tím je věta dokázána.

Věta 5. *Je-li F prostá v Ω a existuje-li přirozené číslo p tak, že každá z množin $F_{-1}(w)$, kde $w \in F(G)$, je složena právě z p bodů, je*

$$F(H(\Omega) \cap G) = H(F(\Omega)) \cap F(G)\,. \tag{13}$$

Důkaz. Podle věty 1 je levá strana (13) obsažena v pravé. Ve větě 4 lze nyní za w_0 zvolit libovolný bod z $H(F(\Omega)) \cap F(G)$, takže platí také obrácená inkluse. Tím je věta 5 dokázána.

Ukažme konečně, že vynecháme-li ve větě 4 předpoklad, že $F_{-1}(w_0)$ obsahuje právě p bodů, je tvrzení této věty obecně nesprávné.

Příklad 3. Buď $P_0 = P(-\frac{2}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi)$, $P_n = P((2n + 2/5^{n+1})\,\pi,\ (2n + 8/5^{n+1})\,\pi)$, $P_n^* = P((2n + 4/5^{n+1})\,\pi, (2n + 6/5^{n+1})\,\pi)$, $V_0 = V(-\frac{2}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi) = E - R(-\frac{2}{5}\pi)$, $V_n = V(2\pi/5^{n+1}, 8\pi/5^{n+1})$ pro $n \geqq 1$. Je-li $F = \exp$, je pak $F(P_n) = V_n$ pro všechna $n \geqq 0$.

Klademe-li $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n^*$, je $F(G) = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$. Kromě toho je $F(H(\Omega) \cap G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R(4\pi/5^{n+1}) \cup R(6\pi/5^{n+1}))$, zatím co $H(F(\Omega)) \cap F(G)$ obsahuje kromě této množiny ještě polopřímku $R(0)$, která není částí obrazu $H(\Omega) \cap G$.

Porovnejme situaci z příkladu 3 s větou 4: Protože úhly V_n, kde $n \geqq 1$, jsou disjunktní a protože F je prostá v každém P_n, je F prostá v $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Odtud dále plyne, že F a) nabývá každé hodnoty z $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ právě ve dvou různých bodech z G, b) každé hodnoty z $E - (\{0\} \cup R(-\frac{2}{5}\pi) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n)$ právě v jednom bodě z G, c) nenabývá žádné z hodnot z $R(-\frac{2}{5}\pi)$ v G. Speciálně, F nabývá každé hodnoty z $R(0)$ jen v jednom bodě z G a zároveň existují hodnoty $w \in F(G)$, kterých F nabývá ve více než jednom bodě z G.

Резюме

К ОТОБРАЖЕНИЮ ГРАНИЦЫ ОТКРЫТОГО МНОЖЕСТВА ПРИ ПОМОЩИ ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ

ИЛЬЯ ЧЕРНЫ (Ilja Černý), Прага

Доказывается несколько элементарных теорем, полезных в теории конформных отображений.

Дана функция F, голоморфная в открытом множестве G, которая не является постоянной ни в какой компоненте этого множества; во-вторых, дано открытое множество $\Omega \subset G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если F является простой в Ω, то (I): $F(H(\Omega) \cap G) \subset H(F(\Omega)) \cap F(G)$. Если, кроме этого, $\overline{\Omega} \subset G$, то имеет место равенство (II): $F(H(\Omega)) = H(F(\Omega))$.

2. Если $\overline{\Omega} \subset G$, то (III): $H(F(\Omega)) \subset F(H(\Omega))$.

3. Если каждое из множеств $F_{-1}(w)$, где $w \in F(G)$, состоит не больше чем из p точек (где p – некоторое натуральное число) и если $w_0 \in H(F(\Omega)) \cap F(G)$, причем $F_{-1}(w_0)$ содержит как раз p точек, то $w_0 \in F(H(\Omega) \cap G)$.

4. Если F является простой в Ω и если каждое множество $F_{-1}(w)$, где $w \in F(G)$, содержит как раз p точек (где p – некоторое натуральное число), то (IV): $F(H(\Omega) \cap G) = H(F(\Omega)) \cap F(G)$.

На примерах показано, что условия отдельных утверждений существенны.

Summary

A NOTE ON HOLOMORPHIC MAPPING OF BOUNDARIES OF OPEN SETS

ILJA ČERNÝ, Praha

Let there be given a function F, holomorphic in an open set G, nonconstant in each component of G, and an open set $\Omega \subset G$. Then:

1. If F is $1-1$ in Ω then $F(\mathrm{fr}(\Omega) \cap G) \subset \mathrm{fr}(F(\Omega)) \cap F(G)$; if, furthermore, $\overline{\Omega} \subset G$, then $F(\mathrm{fr}(\Omega)) = \mathrm{fr}(F(\Omega))$.

2. If $\overline{\Omega} \subset G$ then $\mathrm{fr}(F(\Omega)) \subset F(\mathrm{fr}(\Omega))$.

3. If, for every $w \in F(G)$, each set $F_{-1}(w)$ contains at most p points (p a given integer), and if $w_0 \in \mathrm{fr}(F(\Omega)) \cap F(G)$ and the set $F_{-1}(w_0)$ consists of p points precisely, then $w_0 \in F(\mathrm{fr}(\Omega) \cap G)$.

4. If F is $1-1$ in Ω, and if $F_{-1}(w)$ consists of p points (p given) for each $w \in F(G)$, then $F(\mathrm{fr}(\Omega) \cap G) = \mathrm{fr}(F(\Omega)) \cap F(G)$.

That these assumptions are essential is shown on examples.