

Funkce komplexní proměnné

Zobrazování polygonálních oblastí

In: B. A. Fuks (author); B. V. Šabat (author); Oldřich Koníček (translator): Funkce komplexní proměnné. (Czech). Praha: Přírodovědecké nakladatelství, 1953. pp. 298–339.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402745>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fysiků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ZOBRAZOVÁNÍ POLYGONÁLNÍCH OBLASTÍ

§ 82. Princip symetrie. V této kapitole si odvodíme pro praxi velmi důležitý způsob analytického pokračování funkcí zprostředkujících konformní zobrazení. Nejprve si dokážeme obecnou větu o analytickém pokračování regulárních funkcí, kterou budeme nazývat *principem spojitého pokračování*,

Nechť D_1 a D_2 jsou dvě oblasti mající společnou část svých hraničních bodů a necht je tato společná část tvořena křivkou C . Necht dále $f_1(z)$ resp. $f_2(z)$ jsou funkce regulární v oblasti D_1 resp. D_2 a spojitě v uzavřené oblasti $\overline{D_1}$ resp. $\overline{D_2}$ (obr. 127). Jsou-li hodnoty funkcí $f_1(z)$ a $f_2(z)$ na společné hranici shodné, je jedna z funkcí analytickým pokračováním druhé.

Označme si C_1 a C_2 onu část hranic, která není společná, a definujme si funkci spojitou na $C_1 + C_2 + C$:

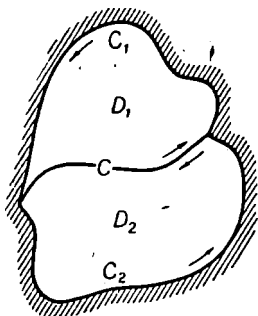
$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} f_1(\zeta) & \text{na } C_1, \\ f_2(\zeta) & \text{na } C_2, \\ f_1(\zeta) = f_2(\zeta) & \text{na } C. \end{cases}$$

Pomocí takto definované funkce $\varphi(\zeta)$ sestrojíme integrál typu Cauchyho,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1+C_2} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (1)$$

a podle § 52 je funkce $f(z)$ regulární v oblasti $D_1 + D_2$. Přidáme-li na levé straně rovnice (1) integrály podél C , které se navzájem ruší, protože je bereme v opačných směrech, dostaneme

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1+C} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2+C} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1+C} \frac{f_1(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2+C} \frac{f_2(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \end{aligned} \quad (2)$$



Obr. 127.

neboť na $C_1 + C$ $\varphi(\zeta) = f_1(\zeta)$ a na $C_2 + C$ $\varphi(\zeta) = f_2(\zeta)$. Leží-li bod z uvnitř oblasti D_1 , pak podle Cauchyho věty § 47 je v rovnici (2) druhý z integrálů napravo roven nule, neboť $\frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z}$ je všude v oblasti D_2 regulární funkcí ζ a

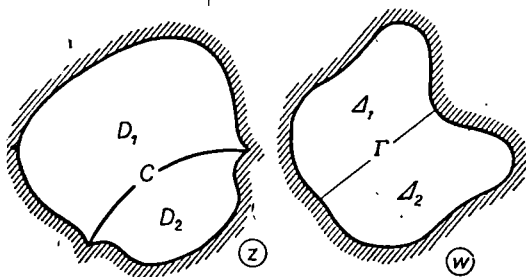
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1+C} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Podle integrální věty Cauchyho*) je tedy všude v D_1 $f(z) = f_1(z)$. Zcela stejně odvodíme, že všude v D_2 je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2+C} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f_2(z),$$

a věta je dokázána.

Poznámka. Jsou-li funkce $f_1(z)$ a $f_2(z)$ regulární nejen v oblastech D_1 a D_2 , nýbrž i na hranici C , je věta zřejmá. Důkaz: V tomto případě jsou $f_1(z)$ a $f_2(z)$ regulární v jisté oblasti D_0 obklopující C a podle věty o jednoznačnosti (§ 62) jsou



Obr. 128.

shodné v této oblasti, protože jsou shodné na C , což značí, že $f_1(z)$ a $f_2(z)$ jsou analytickým pokračováním jedna druhé.

Důležitým důsledkem této věty je tento princip:

Princip symetrie. Necht hranice oblasti D_1 obsahuje oblouk kružnice nebo úsečku a necht funkce $w = f_1(z)$ zobrazí oblast D_1 konformně na oblast Δ_1 tak, že C přejde na část hranice Γ oblasti Δ_1 a necht je Γ též tvořena obloukem kružnice nebo úsečkou. Pak existuje analytické pō-

*) Použili jsme Cauchyho vzorce za předpokladu, že funkce $f_1(z)$ je regulární pouze v oblasti D_1 a spojitá v $\overline{D_1}$. V § 52 bylo dokázáno, že Cauchyho vzorec platí i za těchto předpokladů (poznámka 2).

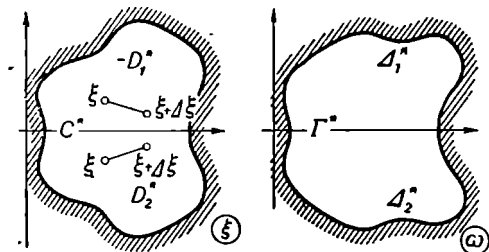
kračování funkce $w = f_1(z)$ do oblasti D_2 , která je symetrická s oblastí D_1 podle C . Analytické pokračování $w = f_2(z)$ zprostředkuje konformní zobrazení oblasti D_2 na oblast Δ_2 , která je symetrická s oblastí Δ_1 podle Γ , a funkce

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{na } D_1 \\ f_2(z) & \text{na } D_2 \end{cases}$$

zprostředkuje konformní zobrazení oblasti $D_1 + D_2$ na oblast $\Delta_1 + \Delta_2$.

Abychom dokázali naše tvrzení, sestrojíme lineární lomené zobrazení

$$\zeta = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \omega = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}, \quad (3)$$



Obr. 129.

D_1^* na Δ_1^* . Budiž D_2^* oblast symetrická s oblastí D_1^* podle C^* ; sestrojme v D_2^* funkci

$$\omega = f_2^*(\zeta) = \overline{f_1^*(\zeta)}$$

a dokážeme, že je analytickým pokračováním funkce $f_1^*(\zeta)$. Na úsečce C^* je $f_1^*(\zeta) = f_2^*(\zeta)$, neboť pro reálná ζ a $f_1^*(\zeta)$ je $\zeta = \bar{\zeta}$ a $\overline{f_1^*(\zeta)} = f_1^*(\zeta)$. Abychom mohli použít právě dokázané věty, stačí dokázat, že funkce $f_2^*(\zeta)$ je regulární v D_2^* . Budtež ζ a $\zeta + \Delta\zeta$ dva body v D_2^* ; je

$$\frac{f_2^*(\zeta + \Delta\zeta) - f_2^*(\zeta)}{\Delta\zeta} = \frac{\overline{f_1^*(\bar{\zeta} + \Delta\bar{\zeta})} - \overline{f_1^*(\bar{\zeta})}}{\Delta\zeta} = \overline{\left(\frac{f_1^*(\bar{\zeta} + \Delta\bar{\zeta}) - f_1^*(\bar{\zeta})}{\Delta\bar{\zeta}} \right)},$$

které zobrazí křivku C resp. Γ na úsek C^* resp. Γ^* reálné osy v rovině ζ resp. ω rak, že se oblasti D_1 a Δ_1 zobrazí na oblasti D_1^* a Δ_1^* . Funkce $w = f_1(z)$ přejde při tom na funkci

$$\omega = f^*(\zeta),$$

která zprostředkuje konformní zobrazení oblasti

kde $\bar{\zeta}$ a $\bar{\zeta} + \Delta\bar{\zeta}$ jsou body v D_1^* a limita

$$f_2^{*\prime}(\bar{\zeta}) = \lim_{\Delta\bar{\zeta} \rightarrow 0} \left(\frac{f_1^*(\bar{\zeta} + \Delta\bar{\zeta}) - f_1^*(\bar{\zeta})}{\Delta\bar{\zeta}} \right) = \overline{f_1^{*\prime}(\zeta)}$$

existuje, protože $f_1^*(\zeta)$ je regulární v bodě $\bar{\zeta}$. Můžeme tedy použít naši větu a vidíme, že funkce $f_2^*(\bar{\zeta})$ je analytickým pokračováním funkce $f_1^*(\zeta)$.

Z konstrukce naší funkce okamžitě plyne, že $\omega = f_2^*(\bar{\zeta})$ zprostředkuje konformní zobrazení oblasti D_2^* na oblast Δ_2^* , která je symetrická s oblastí Δ_1^* , podle Γ_1^* , a funkce

$$\omega = f^*(\bar{\zeta}) = \begin{cases} f_1^*(\zeta) & \text{na } D_1^* \\ f_2^*(\bar{\zeta}) & \text{na } D_2^* \end{cases}$$

Zprostředkuje konformní zobrazení oblasti $D_1^* + D_2^*$ na oblast $\Delta_1^* + \Delta_2^*$.

Posléze se vrátíme pomocí substitucí inverzních k substitucím (3) k původním proměnným z a w . V oblasti D_2 symetrické s oblastí D_1 podle C dostaneme funkci $w = f_2(z)$ (§ 20), která je analytickým pokračováním funkce $f_1(z)$ v oblasti D_2 a zprostředkuje konformní zobrazení oblasti D_2 na oblast Δ_2 symetrickou s Δ_1 podle Γ . Při tom funkce (2) zprostředkuje zobrazení oblasti $D_1 + D_2$ na oblast $\Delta_1 + \Delta_2$. Tím jsme dokázali naše tvrzení.

V příštím paragrafu ukážeme na konkrétních příkladech použití principu symetrie.

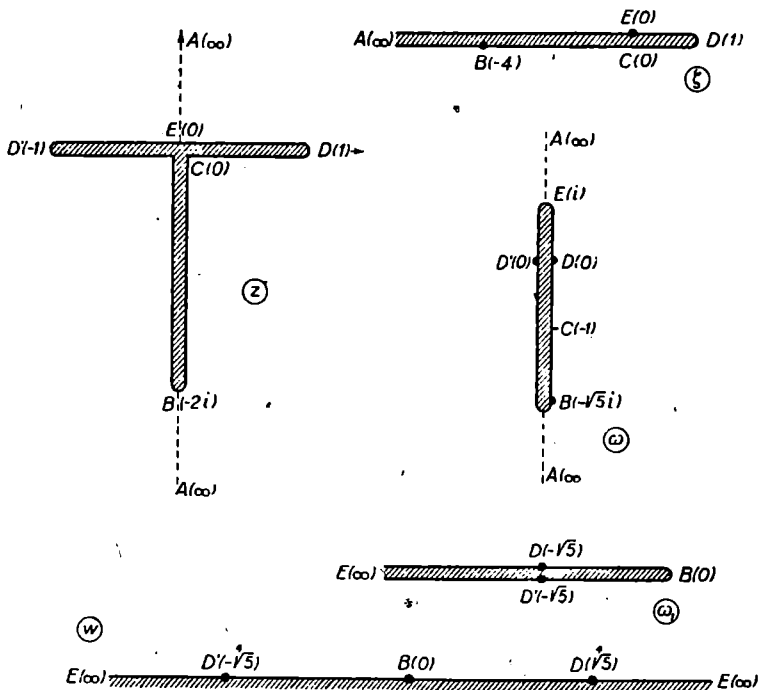
Poznámka. Princip symetrie připouští jisté zevšeobecnění:

Nechť hranice C oblasti D je analytická a nechť funkce $w = f(z)$ zprostředkuje konformní zobrazení oblasti D na oblast Δ tak, že hranice C přejde v analytickou hranici Γ . Pak funkce $f(z)$ připouští analytické pokračování přes tuto hranici a je tedy regulární na této hranici.

O hranici C říkáme, že je analytická, je-li křivka tvořící hranici dána funkcí reálného argumentu $z = z(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, která je v okolí každého bodu t intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ rozvinutelná v potenční řadu.

Jsou-li celé hranice oblastí D a Δ analytickými křivkami, je funkce $f(z)$ regulární v uzavřené oblasti \bar{D} .

§ 83. Příklady. Příklad 1. Hledejme konformní zobrazení vnějšku písmene „T“ (obr. 130) na horní polorovinu. Úlohu si nejprve doplníme pomocnými výřezy EA a AB podél imaginární osy (tečkování na obr. 130) a na horní polorovinu zobrazíme pomocnou oblast $ABCDEA$,



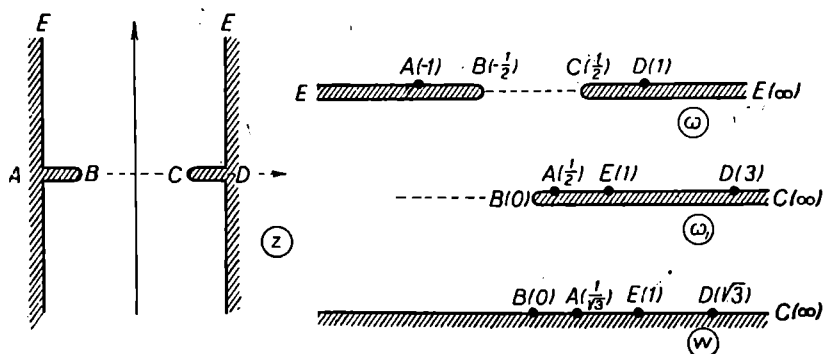
Obr. 130.

t. j. pravou polorovinu s výřezem podél intervalu $(0, 1)$ reálné kladné poloosy. Tato pomocná úloha je řešena tímto sledem zobrazení:

$$\zeta = z^2, \quad \omega = \sqrt{\zeta - 1} = \sqrt{z^2 - 1}.$$

Funkce $\omega = \sqrt{z^2 - 1}$, jež vznikla superposicí těchto zobrazení, zobrazí oblast $ABCDEA$ roviny (z) na pravou polorovinu (ω) . Přitom úsečka EAB hranice na kouli (z) (od bodu $E = 0$ po imaginární ose přes bod $z = \infty$ do bodu $z = B = -2i$) přejde v úsečku EAB hranice

na kouli (ω) (od bodu $\omega = E = i$ po imaginární ose přes bod $\omega = \infty$ do bodu $B = -i\sqrt{5}$). Nyní aplikujeme na funkci $\omega = \sqrt{z^2 - 1}$ princip symetrie a podle tohoto principu zobrazí analytické pokračování funkce $\omega = \sqrt{z^2 - 1}$ přes úsečku EAB levou polorovinu (z) s výřezem podél intervalu $(-1; 0)$ záporné reálné poloosy na levou polorovinu (ω). Při tom body rovin (z) a (ω) označené čárkováním budou vnitřními body oblastí a společnými body obou oblastí budou jen body písmene „ T “ v rovině (z) a body úsečky BE na imaginární ose v rovině (ζ). Funkce $\omega = \sqrt{z^2 - 1}$ bude spolu se svým analytickým pokračováním (které označíme stejným symbolem) prostředkovat zob-



Obr. 131.

razení vnějšku písmene „ T “ na celou rovinu ω s výřezem podél úsečky BE imaginární osy.

Nyní už zbývá jen zobrazit vnější úsečky BE imaginární osy v rovině (ω) na horní polorovinu. Tuto úlohu řeší lineární lomená funkce

$$\omega_1 = \frac{\omega + i\sqrt{5}}{\omega - i}$$

která zobrazí uvažovanou oblast na vnějšek úsečky $B = 0, E \neq \infty$ roviny ω_1 . Protože se bod $D = 0$ zobrazí do bodu $\omega_1 = -\sqrt{5}$, je tato úsečka shodná se zápornou poloosou. Na konec ještě zobrazíme tuto oblast pomocí funkce $w = \sqrt{-\omega_1}$ na horní polorovinu (w). Funkce vzniklá superposicí těchto zobrazení

$$w = \sqrt{\frac{\omega + i\sqrt{5}}{i - \omega}} = \sqrt{\frac{\sqrt{z^2 - 1} + i\sqrt{5}}{i - \sqrt{z^2 - 1}}} \quad (4)$$

je hledaným řešením naší úlohy.

Příklad 2. Hledejme konformní zobrazení pásu $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ s výřezy podél intervalů $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{6}\pi)$ a $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ reálné osy na horní polorovinu. Nejprve opět provedeme doplňující výřez podél intervalu $(-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ reálné osy (čárkováno na obr. 131) a budeme nejprve konstruovat zobrazení polopásu $EABCDE$ (obr. 131) na polorovinu (ω) . Podle př. 2 § 33 řeší tuto úlohu funkce

$$\omega = \sin z.$$

Aplikujeme-li princip symetrie na úsečku BC , dostaneme, že naše funkce zprostředkuje zobrazení dolního polopásu na dolní polorovinu a danou oblast zobrazí na rovinu (ω) s výřezem podél polopřímek EB a CE reálné osy, (čárkovaný úsek na obr. 131 se při analytickém pokračování „setře“ a ostatní body reálné osy zůstanou hraničními body).

Zbývá už jen zobrazit takto získanou oblast na horní polorovinu. Zobrazíme nejprve úsečku CEB na kouli (ω) na kladnou reálnou poloosu roviny (ω_1) pomocí lineární lomené funkce

$$\omega_1 = \frac{\omega + \frac{1}{2}}{\omega - \frac{1}{2}}$$

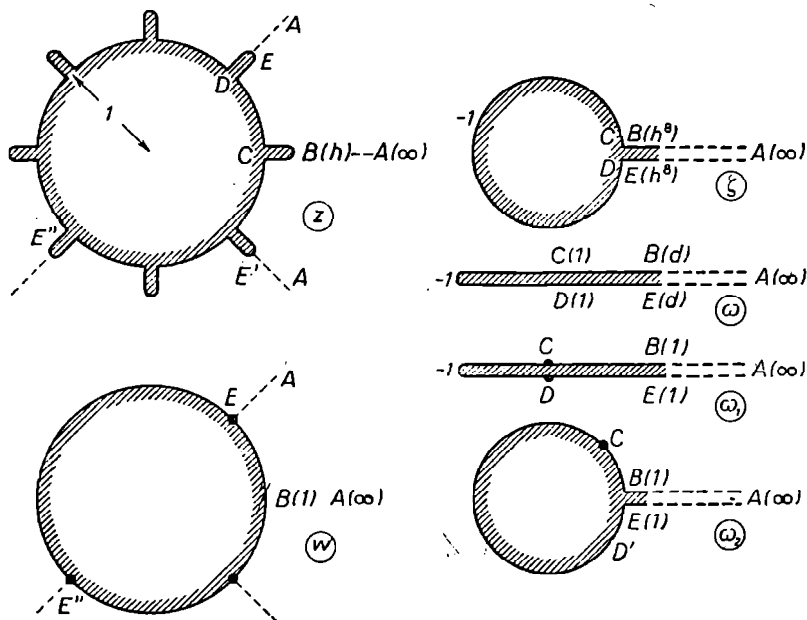
a pak takto získanou oblast zobrazíme na horní polorovinu (w) pomocí funkce $w = \sqrt{\omega_1}$. Superposicí našich zobrazení dostáváme hledané řešení naší úlohy:

$$w = \sqrt{\omega_1} = \sqrt{\frac{2 \sin z + 1}{2 \sin z - 1}}. \quad (5)$$

Příklad 3. Hledejme zobrazení vnějšku „mlýnského kola“ na vnějšek jednotkové kružnice (obr. 132). Nejprve provedeme pomocné výřezy podél polopřímek AB a EA a zkonstruujeme zobrazení výseče $ABCDEA$ na podobnou výseč tak, aby body B a E byly „nárožní“ (t. j. aby úsečky BC a DE se „smrštily“ v oblouk kružnice). Nejprve sestrojíme zobrazení $\zeta = z^8$. Zobrazením

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

zobrazíme výseč na vnějšík polopřímky $-1 < \omega < \infty$, při čemž bodům B a E odpovídá bod $\omega = d = \frac{1}{2} \left(h^2 + \frac{1}{h^2} \right)$. Lineárním zobrazením $\omega_1 = \alpha\omega + \beta$ zobrazíme úsečku $-1 < \omega < d$ na úsečku



Obr. 132.

$-1 < \omega_1 < 1$. Z přiřazení bodů $-1 = -\alpha + \beta$ a $1 = \alpha d + \beta$ dostaneme $\alpha = \frac{2}{1+d}$ a $\beta = \frac{1-d}{1+d}$, po dosazení

$$\varphi_1 = \frac{2\omega + 1 - d}{1 + d}.$$

Pak zobrazíme vnějšík úsečky $-1 < \omega_1 < 1$ na vnějšík jednotkové kružnice zobrazením

$$\omega_2 = \omega_1 + \sqrt{\omega_1^2 - 1}$$

[viz § 26 (12)]. Při tom čárkované výřezy přejdou v polopřímku $1 < \omega_2 < \infty$ a zobrazením

$$w = \sqrt[n]{\omega_2}$$

dostaneme výseč $|w| > 1$, $0 < \arg w < \frac{1}{4}\pi$, při čemž čárkované výřezy přejdou v polopřímky $\arg w = 0$, $|w| > 1$ a $\arg w = \frac{1}{4}\pi$, $|w| > 1$.

Na funkci vzniklou superposicí všech těchto zobrazení

$$w = \frac{\sqrt[n]{z^8 + \frac{1}{z^8} + 1 - d} + \sqrt[n]{\left(z^8 + \frac{1}{z^8} + 2\right)\left(z^8 + \frac{1}{z^8} - 2d\right)}}{\sqrt[n]{1 + d}} \quad (6)$$

aplikujeme princip symetrie. Podle tohoto principu připouští (6) analytické pokračování přes úsečku AB , které zobrazí výseč $AE'EA$ roviny (z) na výseč $AE'EA$ roviny (w) (body úsečky BA jsou při tom vnitřními body oblasti). Takto konstruované analytické pokračování můžeme opět dále pokračovat přes úsečku AE' a dostaneme zobrazení výseče $AE''EA$ roviny (z) na výseč $AE''EA$ roviny (w) (body úsečky $E'A$ jsou vnitřními body oblasti). Pokračujeme-li naši funkci ještě přes úsečku AE'' , dostaneme zobrazení vnějšku „mlýnského kola“ s výřezem podél polopřímky AE na vnějšek jednotkové kružnice s výřezem podél polopřímky AE . Aplikujeme-li na polopřímku princip symetrie znova a pokračujeme-li funkci (6) přes tuto polopřímku, dostáváme konečně hledané konformní zobrazení.

Poznámka. Je vidět, že (6) pro $\alpha = 1$ přejde (6) ve $w = z$, což je výsledek zcela pochopitelný, všimneme-li si toho, že pro $d = 1$ jsou „lopaty“ kola rovny nule ($h = 1$). Pro lopaty o malé délce ($h \approx 1$) je

veličina $d = \frac{1}{2} \left(h^8 + \frac{1}{h^8} \right)$ blízká 1. Položme $d = 1 + \eta$, kde η je tečně malé číslo a dosadíme do (6). Použijeme-li přibližných vzorců pro odmocninu, kde výraz pod odmocninou je blízký 1, $\sqrt[n]{1 + \delta} \approx 1 + \frac{\delta}{n}$ (δ malé), dostaneme

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{\sqrt[8]{z^8 + \frac{1}{z^8} + \sqrt{\left(z^8 - \frac{1}{z^8}\right)^2 - 2\eta\left(z^8 + \frac{1}{z^8} + 2\right)}}{\sqrt[8]{2 + \eta}} \approx \\
 &\approx \frac{1}{\sqrt[8]{2 + \eta}} \sqrt[8]{2z^8 - \eta \frac{z^8 + 1}{z^8 - 1}} \approx \\
 &\approx \left(1 - \frac{\eta}{16}\right) \left(z - \frac{\eta}{16\sqrt[8]{2z^8}} \frac{z^8 + 1}{z^8 - 1}\right).
 \end{aligned}$$

Roznásobíme-li závorky a zanedbáme-li veličiny nekonečně malé druhého řádu, dostaneme přibližnou hodnotu

$$w \approx z - \frac{1}{16} \eta \left(z + \frac{1}{z^8 \sqrt[8]{2}} \frac{z^8 + 1}{z^8 - 1} \right). \quad (7)$$

Pro dostatečně velké $|z|$ je druhý člen v závorce zanedbatelně malý v porovnání s prvním členem a dostáváme konečně velmi jednoduchý vzorec

$$w \approx \left(1 - \frac{1}{16} \eta\right) z. \quad (8)$$

Vzorce (7) a (8) dávají hlavní část zobrazení (6), lineární vzhledem k parametru η .

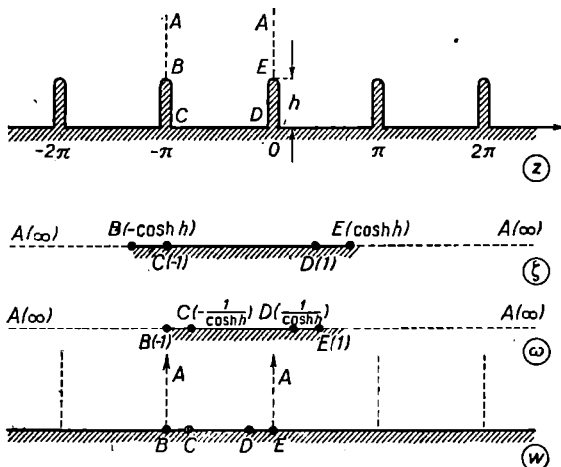
Vlastnosti konformních zobrazení při nekonečně malých změnách některých parametrů zobrazení (speciálně v případech nekonečně malých deformací oblastí) se studují pomocí *variačních method*. Důležité a hluboké výsledky z tohoto oboru jsou uloženy v pracích sovětského matematika *M. A. Lavrentěva*.*)

Příklad 4. Hledejme konformní zobrazení „mříže“ z obr. 133 na horní polovinu. Výřezy jsou podél úseček $x = k\pi$, $0 < y < h$, $k =$

*) Základy těchto method jsou vyloženy na př. v knize M. A. Lavrentěv: *Konformnyje otobraženija* (Konformní zobrazení), GOSTÉCHIZDAT, Moskva, 1946, Lavrentěv-Šabat: *Metody teorii funkcij kompleksnogo pereměnego*, GOSTÉCHIZDAT, Moskva, 1951, kap. IV (v této knize najde čtenář mnoho doplňující látky k látce vykládané v naší knize). (Pozn. překl.)

$= 0, \pm 1, \dots$ Nejprve sestrojíme pomocné výřezy podél polopřímek AB a EA (čárkované na obr. 133). a sestrojíme konformní zobrazení takto sestrojeného polopásu na podobný polopás tak, že body B a E budou nárožní. Funkce

$$\zeta = \cos z \quad (9)$$



Obr. 133.

zobrazí náš polopás na horní polorovinu, neboť pro $z = x$ probíhající úsečku CD probíhá ζ interval $(0, 1)$, pro $z = iy$ probíhající polopřímku DA , $\zeta = \cos iy = \cosh y$ probíhá polopřímku $(1, iy)$ a pro $z = -\pi + iy$ probíhající polopřímku AC , $\zeta = \cos(-\pi + iy) = -\cosh y$ probíhá polopřímku $(-\infty, -1)$ (viz princip zachování hranic § 23). Body B a E při tom přejdou v body $-\cosh h$ a $\cosh h$; pak provedeme kontrakci roviny ζ tak, aby tyto body přešly v body -1 a $+1$. Tuto úlohu řeší funkce:

$$\omega = \frac{1}{\cosh h} \zeta.$$

Nakonec pomocí zobrazení

$$w = \arccos \omega$$

inversního k zobrazení (9) zobrazíme horní polorovinu (ω) v polopás

— $\pi < \operatorname{Re} w < 0$, $\operatorname{Im} w > 0$ tak, že bodům $B(-1)$ a $E(-1)$ odpovídají body $B(-\pi)$ a $E(0)$. Při tom bereme tu větev $\arccos \omega$, která má v bodě $\omega = 1$ hodnotu 0. Superposice našich zobrazení

$$w = \arccos \frac{\cos z}{\cosh h} \quad (10)$$

zprostředkuje zobrazení polopásmu $-\pi < \operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ na polopás $-\pi < \operatorname{Re} w < 0$, $\operatorname{Im} w < 0$, při čemž polopřímky AB a AE přejdou v polopřímky $\operatorname{Re} w = -\pi$, $\operatorname{Im} w < 0$ a $\operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w = 0$. Pak aplikujeme na funkci (10) princip symetrie. Aplikujeme-li princip symetrie na naši funkci nekonečně mnohokrát za sebou na obě strany, vidíme, že naše funkce řeší danou úlohu.

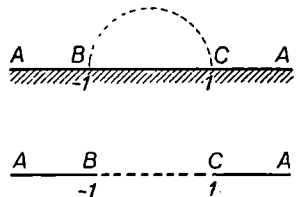
Nakonec uvedeme ještě jeden případ, kde se aplikuje princip symetrie na oblouk kružnice.

Příklad 5. Jak je známo (§ 26), funkce

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (11)$$

zprostředkuje konformní zobrazení vnějšku kruhu $|z| > 1$ na vnějšek úsečky $(-1, 1)$ reálné osy. Při tom horní část vnějšku kružnice $ABCA$ se zobrazí na horní polorovinu (w) (obr. 134). Oblouk \widehat{BC} kružnice $|z| = 1$ se zobrazí na interval $(-1, 1)$. Aplikujeme-li princip symetrie, vidíme, že analytické pokračování funkce (11) zprostředkuje konformní zobrazení oblasti symetrické s $ABCA$ podle oblouku \widehat{BC} , t. j. vnitřku horního jednotkového polokruhu $|z| < 1$ na dolní polorovinu. Tedy funkce (11) zároveň se svým analytickým pokračováním zprostředkuje zobrazení celé horní poloroviny (z) na rovinu (w) s výřezem podél polopřímek $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$.

§ 84. Integrál Christoffela-Schwarze nám poskytuje funkce zprostředkující konformní zobrazení horní poloroviny na polygonální oblasti, t. j. oblasti, jejichž hranice jsou tvořeny konečným počtem úseček. Takové oblasti se velmi často vyskytují v aplikacích a z toho plyne velký praktický význam Christoffelova-Schwarzova integrálu.

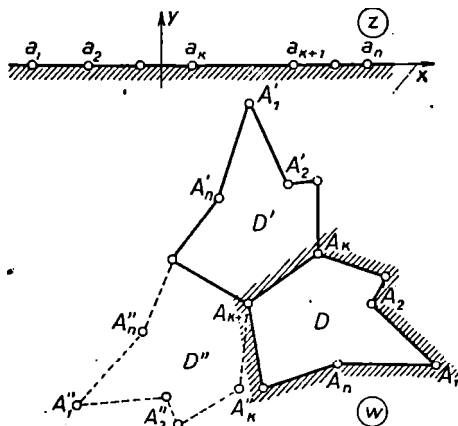


Obr. 134.

Budiž v rovině (w) dán libovolný uzavřený mnohoúhelník D obsahující jen konečné body.*) Podle věty o existenci konformního zobrazení § 23 existuje jen jediná funkce

$$w = f(z),$$

zprostředkující konformní zobrazení horní poloroviny na mnohoúhelník D tak, že se při tom tři libovolné pevné body reálné osy na příklad $(a_1, a_2$ a $a_3)$ zobrazí na tři libovolné body hranice D , na příklad na



Obr. 135.

vrcholy A_1, A_2 a A_3 . Předpokládejme nejprve, že už naši funkci známe, t. j. známe body $a_k, k = 4, 5, 6, \dots$ osy x , které v zobrazení odpovídají vrcholům mnohoúhelníka A_k a budeme se snažit najít analytické vyjádření této funkce.

Protože na libovolné úsečce (a_k, a_{k+1}) osy x nabývá funkce $w = f(z)$ hodnot ležících na přímce A_k, A_{k+1} , aplikujeme na ni princip symetrie a její analytické pokračování přes tuto úsečku do dolní poloroviny $\text{Im } z < 0$ zprostředkuje

zobrazení dolní poloroviny na mnohoúhelník D' , který bude symetrický s mnohoúhelníkem D podle strany $A_k A_{k+1}$. Pak můžeme znova pokračovat naši funkci přes libovolnou úsečku $(a_{k'}, a_{k'+1})$ do horní roviny a příslušné analytické pokračování bude zobrazovat horní polorovinu na mnohoúhelník D'' symetrický s mnohoúhelníkem D' podle strany $A_{k'} A_{k'+1}$.

Představme si nyní, že jsme provedli všechna možná taková analytická prodloužení [i přes úsečku (a_n, a_1) na kouli (z), která obsahuje bod $z = \infty$] v libovolném počtu. Jako výsledek dostaneme úplnou analytickou funkci $w = F(z)$ (§ 63), pro kterou bude funkce $w = f(z)$ jednou z jejích regulárních větví.

*) V příštím paragrafu upustíme od tohoto omezení.

Všimněme si ještě toho, že libovolné dvě regulární větve $w = f^*(z)$ a $w = f^{**}(z)$ této funkce jsou v horní polorovině svázány velmi jednoduchým vztahem. Podle naší úvahy vznikly tyto dvě větve jedna z druhé sudým počtem pokračování přes úsečky (a_k, a_{k+1}) a zprostředkují zobrazení vřehní poloroviny na dva mnohoúhelníky D^* a D^{**} . Mnohoúhelník D^{**} dostaneme z mnohoúhelníka D^* (resp. naopak) sudým počtem symetrií podle stran. Každý pár symetrií se však redukuje na otočení a posun. Tedy mnohoúhelník D^{**} dostaneme z mnohoúhelníka D^* otočením a posunem. Z toho plyne, že v horní polorovině

$$f^{**}(z) \equiv e^{i\alpha} f^*(z) + a, \quad (12)$$

kde α je reálná konstanta charakterisující otočení a a komplexní konstanta charakterisující posun. Podobné tvrzení platí zřejmě o libovolných dvou regulárních větvích funkce $F(z)$ v dolní polorovině.

Dále, funkce

$$\varphi(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

je regulární v horní polorovině, neboť funkce $f'(z)$ jako derivace funkce zprostředkující jedno-jednoznačné konformní zobrazení je všude v horní polorovině různá od nuly. Z našich úvah plyne, že funkce $\varphi(z)$ bude jednoznačnou pro všechna možná analytická pokračování funkce $f(z)$. Neboť ať vezmeme jakékoliv dvě regulární větve funkce $F(z)$, pak z (12) plyne

$$f^{**}(z) = e^{i\alpha} f^*(z), \quad f^{**\prime}(z) = e^{i\alpha} f^{*\prime}(z)$$

a

$$\frac{f^{**\prime\prime}(z)}{f^{**\prime}(z)} = \frac{f^{*\prime\prime}(z)}{f^{*\prime}(z)},$$

t. j. hodnota funkce $\varphi(z)$ v libovolném bodě je nezávislá na volbě větve funkce $F(z)$.

Můžeme tedy říci, že funkce $\varphi(z)$ spolu se všemi svými analytickými prodlouženími (která označíme tímtéž symbolem) je regulární ve všech bodech roviny z kromě bodů $z = a_k$.*) Objasníme si nyní chování funkce $\varphi(z)$

*) Regularita funkce $\varphi(z)$ v bodech $z \neq a_k$ reálné osy, v bodě $z = \infty$ a v bodech dolní poloroviny plyne z toho, že $f(z)$ je možno analyticky pokračovat do těchto bodů tak, že derivace analytického pokračování bude nenulová.

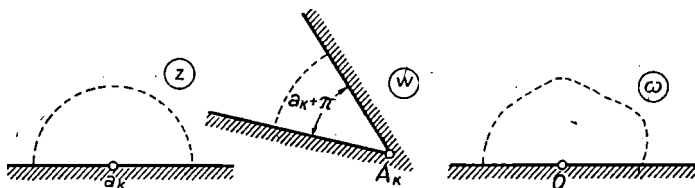
v těchto bodech. Označme $\alpha_k\pi$ úhel mnohoúhelníka ve vrcholu A_k a sestrojme si pomocnou rovinu proměnné

$$\omega = (w - w_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}.$$

Úhel mnohoúhelníka se při přechodu z roviny (w) do roviny (ω) zřejmě „napřímí“ (obr. 136) a na funkci

$$\omega = \omega(z) = [f(z) - w_k]^{\frac{1}{\alpha_k}}$$

která zprostředkuje zobrazení jistého půlkružnicového okolí bodu $z = a_k$ v horní polorovině na půlkružnicové okolí bodu $\omega = 0$ v horní



Obr. 136.

polorovině (ω) aplikujeme princip symetrie. Můžeme tedy sestavit analytické pokračování do celého okolí bodu a_k , v němž ji rozvineme v Taylorovu řadu:

$$\omega(z) = [f(z) - w_k]^{\frac{1}{\alpha_k}} = c_1(z - a_k) + c_2(z - a_k)^2 + \dots \quad (13)$$

V rozvoji (13) odpadne absolutní člen, neboť $\omega(a_k) = 0$, ale $c_1 = \omega'(a_k) \neq 0$, neboť $\omega(z)$ zprostředkuje jedno-jednoznačné konformní zobrazení (viz § 15, poznámka 3).

Z (13) dostaneme

$$f(z) = w_k + (z - a_k)^{\alpha_k} [c_1 + c_2(z - a_k) + \dots]^{\alpha_k}, \quad c_1 \neq 0,$$

kde výraz v závorce pod exponentem α_k je regulární funkce v okolí bodu a_k , takže ji můžeme rozvinout v Taylorovu řadu a dostaneme

$$\begin{aligned} f(z) &= w_k + (z - a_k)^{\alpha_k} [c_1' + c_2'(z - a_k) + \dots] = \\ &= w_k + c_1'(z - a_k)^{\alpha_k} + c_2'(z - a_k)^{\alpha_k + 1} + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Ze (14) snadno vypočteme

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{(\alpha_k - 1) \alpha_k c_1' (z - a_k)^{\alpha_k - 2} + \dots}{\alpha_k c_1' (z - a_k)^{\alpha_k - 1} + \dots} = \\ &= \frac{1}{z - a_k} \frac{(\alpha_k - 1) \alpha_k c_1' + \dots}{\alpha_k c_1' + \dots},\end{aligned}$$

kde jsme si vytkli v čitateli $(z - a_k)^{\alpha_k - 1}$ a ve jmenovateli $(z - a_k)^{\alpha_k - 1}$ a zkrátili. Druhý z činitelů je funkce regulární v bodě $z = a_k$ a můžeme ji tedy rozvinout v mocninový řadu

$$(\alpha_k - 1) + c_1''(z - a_k) + c_2''(z - a_k)^2 + \dots,$$

kde absolutní člen najdeme z hodnoty zlomku pro $z = a_k$. Z toho

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{1}{z - a_k} \{(\alpha_k - 1) + c_1''(z - a_k) + c_2''(z - a_k)^2 + \dots\} = \\ &= \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} + c_1'' + c_2''(z - a_k) + \dots\end{aligned}\quad (15)$$

Rovnice (15) nám dává Laurentův rozvoj funkce $\varphi(z)$ v okolí bodu $z = a_k$. Z něho plyne, že funkce $\varphi(z)$ má v bodě $z = a_k$ pól prvního řádu s residuem rovným $\alpha_k - 1$, kde $\alpha_k \pi$ je úhel mnohoúhelníka ve vrcholu A_k .

Funkce $\varphi(z)$ bude tedy mít v celé rovině (z) jen n singulárních bodů — pólů prvního řádu. Odečteme-li od funkce $\varphi(z)$ hlavní části jejich Laurentových rozvojů v okolí pólů

$$\psi(z) = \varphi(z) - \frac{\alpha_1 - 1}{z - a_1} - \frac{\alpha_2 - 1}{z - a_2} - \dots - \frac{\alpha_n - 1}{z - a_n}\quad (16)$$

dostaneme funkci regulární v celé rovině a tedy podle Liouvilleovy věty (§ 69, § 71) identicky rovnou konstantě. Abychom stanovili její hodnotu, uvážíme, že funkce $\varphi(z)$ je regulární v bodě $z = \infty$ (který je vnitřním bodem úsečky (a_n, a_1)) a má tedy v okolí bodu $z = \infty$ rozvoj

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-p}}{z^p} + \frac{c_{-p+1}}{z^{p+1}} + \dots,\quad (17)$$

kde c_p je první koeficient Laurentova rozvoje funkce $f(z)$ různý od nuly. Ze (17) plyne pro funkci $\varphi(z)$ v okolí bodu $z = \infty$

$$\varphi(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{p(p+1) \frac{c_{-p}}{z^{p+2}} + \dots}{-p \frac{c_{-p}}{z^{p+1}} + \dots} =$$

$$= \frac{1}{z} \frac{p(p+1) c_{-p} + \dots}{-p c_{-p}} = -\frac{p+1}{z} + \dots,$$

a z toho: $\varphi(\infty) = 0$. V (16) jsou však pro $z = \infty$ rovny nule i všechny ostatní členy napravo a tedy i $\psi(\infty)$, t. j. $\psi(\infty) = 0$, a z toho

$$\varphi(z) = \frac{d}{dz} \ln f'(z) = \frac{\alpha_1 - 1}{z - a_1} + \frac{\alpha_2 - 1}{z - a_2} + \dots + \frac{\alpha_n - 1}{z - a_n}$$

(kde \ln napravo je hlavní hodnota logaritmu a \ln nalevo jeho odpovídající hodnoty). Odlogaritmováním naší rovnice dostáváme výraz pro derivaci konformního zobrazení

$$f'(z) = C(z - \alpha_1)^{\alpha_1 - 1} (z - \alpha_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - \alpha_n)^{\alpha_n - 1}. \quad (18)$$

Integrováním rovnice (18) podél libovolné křivky v horní polovině dostaneme hledaný *Christoffelův-Schwarzův integrál*

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + \mathcal{C}_1. \quad (19)$$

Znovu si připomeňme, že body a_k jsou body reálné osy, odpovídající vrcholům A_k mnohoúhelníka, a α_k velikost příslušných vnitřních úhlů měřená v π (úhel při vrcholu A_k je $\alpha_k \pi$).

Integrál Christoffela-Schwarze jsme odvodili za předpokladu, že body a_1, a_2, \dots, a_n reálné osy, kterým odpovídají vrcholy A_1, A_2, \dots, A_n mnohoúhelníka, jsou nám známy. V praktických úlohách jsou však dány jen vrcholy mnohoúhelníka A_1, A_2, \dots a body a_1, a_2, \dots zůstanou neurčeny. Podle věty o existenci konformního zobrazení (§ 23) můžeme tři z nich (na př. a_1, a_2, a_3) volit libovolně a ostatní zároveň s konstantami C a C_1 se musí určit z podmínek zobrazení.

Způsoby výpočtu α_k , C a C_1 budou ukázány níže na konkrétních praktických výpočtech. Principiální možnost jejich výpočtu plyne z odvození vzorce (19). Budiž dán mnohoúhelník D v rovině (w); vybereme si obrazy tří libovolných jeho vrcholů, na př. a_1, a_2, a_3 . Pak

podle věty o existenci konformního zobrazení § 23 existuje jediné zobrazení $z = \varphi(w)$ mnohoúhelníku D na polorovinu $\text{Im } z > 0$. Označme si a_4, a_5, \dots, a_n obrazy ostatních vrcholů mnohoúhelníka D a bydiž $w = f(z)$ inverzní funkce k funkci $z = \varphi(w)$. Podle toho, co jsme si dokázali výše, je funkce $w = f(z)$ definována vztahem (19), kde a_1, a_2, \dots, a_n jsou výše uvedené body a C a C_1 dvě konstanty. Jsou tedy body a_k (při volbě tří z nich) určeny jednoznačně*) zároveň s konstantami C a C_1 pro libovolný mnohoúhelník.

§ 85. Singulární případ. Předpokládejme nyní, že jeden z bodů a_k na př. a_n je bodem nekonečna. Abychom transformovali náš případ na případ předešlý, použijeme lineárního zobrazení**)

$$\zeta = a'_n - \frac{1}{z}, \quad (20)$$

které zobrazí polorovinu $\text{Im } z > 0$ na polorovinu $\text{Im } \zeta < 0$, při čemž převádí body $a_1, a_2, \dots, a_n = \infty$ v konečné body a'_1, a'_2, \dots, a'_n . Pak funkce $w = g(\zeta)$ zobrazující $\text{Im } \zeta > 0$ na D je dána vztahem

$$w = C' \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - a'_1)^{\alpha_1-1} (\zeta - a'_2)^{\alpha_2-1} \dots (\zeta - a'_n)^{\alpha_n-1} d\zeta + c'_1.$$

Provedme v posledně uvedeném vztahu transformaci proměnných (20):

$$w = C' \int_{z_0}^z \left(a'_n - a'_1 - \frac{1}{z}\right)^{\alpha_1-1} \left(a'_n - a'_2 - \frac{1}{z}\right)^{\alpha_2-1} \dots \left(-\frac{1}{z}\right)^{\alpha_n-1} \frac{dz}{z^2} + C'_1.$$

Poslední výraz ještě upravíme pomocí vztahu pro součet úhlů n -úhelníka

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2$$

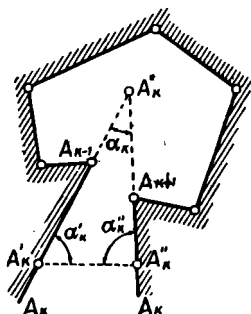
známého z elementární geometrie. Dostaneme

*) Změna konstant C a C_1 vede k lineárnímu zobrazení, jsou tedy obě konstanty určeny danými vztahy a mnohoúhelníkem jednoznačně.

***) Ve (20) je a'_n libovolná reálná konstanta a znaménko bereme tak, aby horní polorovina přešla opět v horní polorovinu. Je-li některý z bodů a_k roven 0, přejde (20) na tvar $\zeta = a'_n - \frac{1}{z-a}$, kde a je různé od všech a_k , jinak by jeden z bodů a'_k byl roven ∞ .

$$\begin{aligned}
 w &= C' \int_{z_0}^z \{(a'_n - a'_1)z - 1\}^{\alpha_1-1} \{(a'_n - a'_2)z - 1\}^{\alpha_2-1} \dots \\
 &\dots \{(a'_n - a'_{n-1})z - 1\}^{\alpha_{n-1}-1} (-1)^{\alpha_n-1} \frac{dz}{z^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - n + 2}} + C'_1 = \\
 &= C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1-1} (z - a_2)^{\alpha_2-1} \dots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1} dz + C_1. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Odovídá-li tedy některému vrcholu mnohoúhelníka nekonečně vzdálený bod, vypadne v Christoffelově-Schwarzově integrálu jemu odpovídající součinitel. Této vlastnosti se používá k zjednodušení Christoffelova-Schwarzova integrálu (viz § 86 a další).



Obr. 137.

Pro praktické výpočty je důležitý i případ vyloučený v předcházejícím paragrafu, je-li totiž jeden nebo i více vrcholů mnohoúhelníka v nekonečnu. Nechť na př. vrchol A_k mnohoúhelníka D leží v nekonečnu (obr. 137). Pak vybereme na polopřímkách $A_{k-1}A_k$ a $A_{k+1}A_k$ po jednom bodu, označíme je A'_k a A''_k . Spojíme pak body A'_k a A''_k úsečkou a budeme se zabývat takto sestrojeným $(n+1)$ -úhelníkem. Funkce zobrazující polovinu $\text{Im } z > 0$ na tento mnohoúhelník má podle (19) tvar

$$\begin{aligned}
 w &= C \int_0^z (z - a_1)^{\alpha_1-1} (z - a_2)^{\alpha_2-1} \dots (z - a'_k)^{\alpha'_k-1} (z - a''_k)^{\alpha''_k-1} \dots \\
 &\dots (z - a_n)^{\alpha_n-1} dz + C_1,
 \end{aligned}$$

kde α'_k, α''_k jsou vnitřní úhly při vrcholech A'_k a A''_k měřeny v π a body a'_k, a''_k jsou body osy x odpovídající těmto vrcholům. Pro $A'_k \rightarrow A_k$ a $A''_k \rightarrow A_k$ body a'_k, a''_k splynou v jediný bod a_k odpovídající bodu A_k a uvedený vzorec bude mít v limitě tvar

$$w = C \int_0^z (z - a_1)^{\alpha_1-1} \dots (z - a_k)^{\alpha'_k + \alpha''_k - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n-1} dz + C_1.$$

Označme $\pi\alpha_k$ úhel polopřímek $A_{k-1}A_k$ a A_kA_{k+1} v konečném průsečíku A_k^* vzatý se znaménkem minus. Pro úhly trojúhelníka $A'_k A''_k A_k^*$ (obr. 137) platí

$$\alpha'_k + \alpha''_k - \alpha_k = 1, \quad \alpha'_k + \alpha''_k - 2 \equiv \alpha_k - 1,$$

a vzorec nabývá konečného tvaru

$$w = C \int_0^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_k)^{\alpha_k - 1} \dots \\ \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1.$$

Podobnou úvahu bychom provedli, kdyby leželo v nekonečnu i více vrcholů mnohoúhelníka D . Tedy: *integrál Christoffelův-Schwarzův zůstává v platnosti i pro případ, kdy jeden nebo více vrcholů mnohoúhelníka leží v nekonečnu, bereme-li za úhel dvou přímek protínajících se v nekonečnu úhel v jejich konečném průsečíku s opačným znaménkem (viz § 18).*

§ 86. Příklady. Uvedeme z počátku dva příklady, které nám budou ilustrovat metodu výpočtu, ale nedají nové výsledky.

Příklad 1. Polopás $-\frac{1}{2}\pi < \operatorname{Re} w < \frac{1}{2}\pi$, $\operatorname{Im} w > 0$ představuje „trojúhelník“ s vrcholy $A_1 = -\frac{1}{2}\pi$, $A_2 = \frac{1}{2}\pi$, $A_3 = \infty$. Úhly při vrcholech v tomtéž pořádku jsou $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = 0$ ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, jako pro každý trojúhelník). Pro přehlednost si zapíšeme údaje do tabulky, do níž zaneseme také volbu bodů a_k :

A_k	α_k	a_k
$-\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}$	1
∞	0	∞

Integrál Christoffelův-Schwarzův má tvar

$$w = C \int_0^z (z + 1)^{-1} (z - 1)^{-1} dz + C_1 = \\ = C' \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} + C_1 = C' \arcsin z + C_1.$$

Pomocí odpovídajících si dvojic bodů a_1, a_2 a A_1, A_2 dostaneme

$$-\frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{2}\pi C' + C_1, \quad \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi C' + C_1,$$

z toho

$$C_1 = 0, \quad C' = 1$$

a funkce zobrazící polorovinu na polopás bude mít tvar

$$w = \arcsin z. \quad (22)$$

Inverzní funkci $z = \sin w$ jsme odvodili v § 31 elementárním způsobem.

Příklad 2. Polorovina $v > 0$ s výřezem podél úsečky imaginární osy $0 < v < h$, $u = 0$ ($w = u + iv$) představuje čtyřúhelník. Úhly ve vrcholech a body odpovídající vrcholům jsou zaneseny v tabulce. Tři z nich si volíme libovolně, čtvrtý označíme ξ , úhel v nekonečnu je roven $-\pi$, neboť polopřímky A_2A_1 a A_4A_1 jsou jednak pokračováním druhé, t. j. svírají spolu úhel 2π jako v každém čtyřúhelníku.

A_k	α_k	a_k
∞	$-\pi$	∞
0	$\frac{1}{2}\pi$	$-\pi$
hi	2π	0
0	$\frac{1}{2}\pi$	ξ

Abychom stanovili bod $a_4 = \xi$, použijeme principu symetrie. Hledané zobrazení bychom též obdrželi jako analytické pokračování zobrazení druhého kvadrantu roviny (z) na druhý kvadrant roviny (w), při čemž $\infty \longleftrightarrow \infty$, $ih \longleftrightarrow 0$. Z toho plyne, že bod a_4 musí být symetrický s bodem a_2 podle imaginární osy, t. j. $a_4 = \xi = 1$, a integrál Christoffela-Schwarze má tvar

$$w = C \int (z+1)^{-1} z(z-1)^{-1} dz =$$

$$-C \int \frac{z dz}{\sqrt{z^2-1}} = C' \sqrt{z^2-1} + C_1$$

(kde místo omezeného integrálu jsme vzali neurčitý integrál, což můžeme udělat, neboť konstanta C_1 je zcela libovolná). Pro určení konstant C' a C_1 použijeme toho, že si odpovídají body a_2, A_2 a a_3, A_3 .

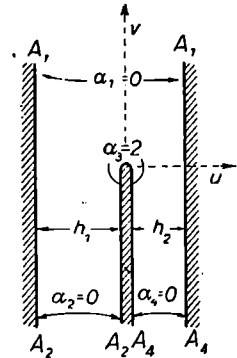
Odtud $0 = 0 + C_1$, $i\hbar = iC' + C_1$; $C_1 = 0$, $C' = \hbar$ a hledaná funkce má tvar (viz § 27):

$$w = \hbar \sqrt{z^2 - 1}. \quad (23)$$

Uvedeme nyní několik příkladů nikoliv elementárního charakteru, jejichž řešení bez pomoci Christoffelova-Schwarzova integrálu by bylo značně obtížné.

Příklad 3. Oblast zobrazená na obr. 138 je v podstatě čtyřúhelník s třemi vrcholy v nekonečnu. Jeho zadání a odpovídající si body jsou zaneseny v tabulce. Tři body a_k jsou voleny libovolně, čtvrtý označíme ξ , úhly v bodě $w = \infty$ jsou vesměs rovny nule, neboť odpovídající polopřímky jsou vesměs rovnoběžné. $\Sigma \alpha_k = 2$ jako v každém čtyřúhelníku:

A_k	α_k	a_k
∞	0	∞
∞	0	-1
0	2	ξ
∞	0	1



Obr. 138.

Christoffelův-Schwarzův integrál má tvar

$$w = C \int (z+1)^{-1} (z-\xi) (z-1)^{-1} dz = C \int \frac{z-\xi}{z^2-1} dz =$$

$$= C \left\{ \frac{1+\xi}{2} \ln(z+1) + \frac{1-\xi}{2} \ln(z-1) \right\} + C_1$$

a obsahuje tři neznámé konstanty C , C_1 a ξ . Abychom určili C_1 a ξ , provedeme tuto úvahu: když bod z oběhne bod $a_2 = -1$ po libovolně nekonečně malé půlkružnici C_r poloměru r (t. j. vektor $z+1 = re^{i\theta}$ se otáčí a mění argument od π do 0), musí odpovídající bod přejít z polopřímky A_1A_2 na polopřímku A_2A_3 , t. j. funkce w musí mít přírůstek

$$\Delta w = h_1 + o(r),$$

kde $o(r)$ je komplexní veličina nekonečně malého řádu pro $r \rightarrow 0$.

Tuto úvahu potvrzuje i fakt, že se obraz kružnice C_r pro dostatečně malá r málo liší od nejkratší úsečky spojující polopřímky A_1A_2 a A_2A_3 .*) Pro takový nekonečně malý přírůstek Δz člen s $\ln(z-1)$ v Christoffelově-Schwarzově integrálu bude mít nekonečně malý přírůstek v důsledku spojitosti této funkce a konečný je jen přírůstek funkce $\ln(z+1) = \ln r + i\varphi$, který je roven $-\pi i$. Odtud

$$\Delta w = -\frac{1}{2}C(1+\xi)\pi i + o(r),$$

kde $o(r)$ je nekonečně malá komplexní veličina pro $r \rightarrow 0$. Položíme-li oba výrazy pro Δw sobě rovny a přejdeme-li k limitě pro $r \rightarrow 0$, dostaneme

$$-\frac{1}{2}C(1+\xi)\pi i = h_1.$$

Analogicky, jestliže bod z oběhne bod $a_4 = 1$ po nekonečně malé půlkružnici poloměru r , odpovídající bod w musí přejíti z polopřímky A_2A_3 na polopřímku A_4A_1 , t. j. $\Delta w = h_2 + o(r)$. S druhé strany

$$\Delta w = C \frac{1-\xi}{2} (-\pi i) + o(r), \text{ odtud}$$

$$-\frac{1}{2}(1-\xi)\pi i = h_2.$$

Porovnáním obou rovnic dostáváme hledané hodnoty

$$C = \frac{i}{\pi} (h_1 + h_2), \quad \xi = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_2}$$

a funkce zprostředkující hledané zobrazení je

$$w = \frac{i}{\pi} \{h_1 \ln(z+1) + h_2 \ln(z-1)\} + C_1. \quad (24)$$

Konstantu C_1 určíme z přiřazení bodu $a_3 = \xi$ a $A_3 = 0$:

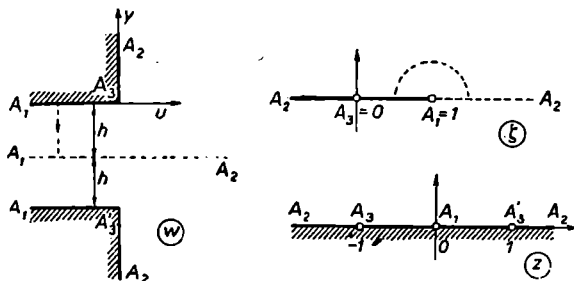
$$C_1 = -h_2\pi^2 + \pi i \ln h_1^{h_1} h_2^{h_2} \left(\frac{2}{H}\right)^H,$$

kde $H = h_1 + h_2$.

Příklad 4. Oblast z obr. 139 představuje v podstatě čtyřúhelník, jehož dva body leží v bodě $w = \infty$. Pomocí pomocného výřezu (čár-

*) Předpokládáme tento fakt jako zřejmý, ale bylo by možné ho též přesně dokázat.

kovaného na obr. 139) v ose horizontální části a aplikováním principu symetrie můžeme celou úlohu převést v úlohu zobrazení poloviny nakreslené oblasti, na př. horní na horní polorovinu. Uvažovaná



Obr. 139.,

polovina nakreslené oblasti je v podstatě trojúhelníkem s dvěma vrcholy v bodě $w = \infty$. Zadání a body a_k , odpovídající vrcholům trojúhelníka, jsou opět v tabulce:

A_k	α_k	a_k
∞	0	1
∞	$-\frac{1}{2}$	∞
0	$\frac{1}{2}$	0

Body a_k volím libovolně, úhly v nekonečnu určím v soulase s § 85 a $\sum \alpha_k = 1$. Funkce, která konformně zobrazuje polorovinu $\text{Im } \zeta > 0$ na tento trojúhelník je

$$w = C \int_0^{\zeta} (\zeta - 1)^{-1} \zeta^{\alpha} d\zeta + C_1 = C \int_0^{\zeta} \frac{\sqrt{\zeta}}{\zeta - 1} d\zeta, \quad (25)$$

kde $C_1 = 0$, protože si odpovídají body $\zeta = 0$ a $w = 0$. Abychom určili konstantu C , použijeme toho, že v blízkosti bodu $\zeta = 1$ můžeme ve funkci za integračním znaménkem ve výrazu (25) zaměnit funkci $\sqrt{\zeta}$ spojitou v bodě $\zeta = 1$ její hodnotou v tomto bodě. Odtud

$$w = C \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - 1} + o(\zeta - 1) = C\{\ln(\zeta - 1) - \pi i\} + o(\zeta - 1), \quad (26)$$

kde $o(\zeta - 1)$ konverguje k nule pro $\zeta \rightarrow 1$.*) Jelikož přechodu bodu ζ po půlkružnici $|z - 1| = r$ s úsečky A_3A_1 na polopřímku A_1A_2 odpovídá přechod bodu w s polopřímky A_3A_1 na polopřímku A_1A_2 , je $\Delta w = -hi + o(\zeta - 1)$, kde h je poloviční šířka horizontální části oblasti z obr. 139. Naopak podle (26) $\Delta w = Ci \Delta \arg(\zeta - 1) + o(\zeta - 1) = -\pi Ci + o(\zeta - 1)$. Porovnáme-li nyní oba výrazy pro Δw v limitě pro $\zeta \rightarrow 1$, dostaneme $-hi = -\pi Ci$, t. j. $C = \frac{h}{\pi}$. Tedy (25) má tvar

$$\begin{aligned} w &= \frac{h}{\pi} \int_0^{\zeta} \frac{\sqrt{\zeta} d\zeta}{\zeta - 1} = \frac{h}{\pi} \left(2\sqrt{\zeta} + \ln \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} \right) \Big|_0^{\zeta} = \\ &= \frac{2h}{\pi} \sqrt{\zeta} + \frac{h}{\pi} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} - hi. \end{aligned} \quad (27)$$

Pomocnému (čárkovanému) výřezu A_1A_2 v rovině ζ odpovídá výřez $(1, \infty)$ podél reálné osy. Tedy podle principu symetrie funkce (27) spolu se svým analytickým pokračováním zobrazí celou rovinu ζ s výřezem podél $(1, \infty)$ podél reálné osy na oblast obr. 139. Funkce $z = i\sqrt{\zeta - 1}$ zobrazí posledně zmíněnou oblast na horní polorovinu (z) a substitucí $\zeta = 1 - z^2$ do (27) dostaneme tedy zobrazení horní poloroviny (z) na oblast obr. 139:

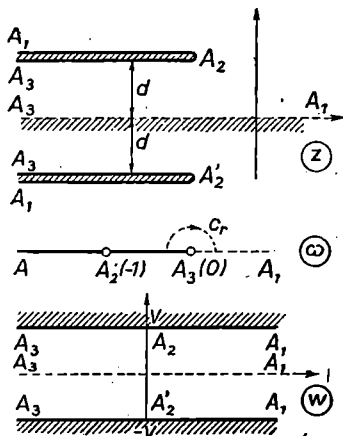
$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{\pi} 2h\sqrt{1 - z^2} + \frac{1}{\pi} h \ln \frac{\sqrt{1 - z^2} - 1}{\sqrt{1 - z^2} + 1} - hi = \\ &= \frac{1}{\pi} 2h \left\{ \sqrt{1 - z^2} + \ln \frac{z}{1 + \sqrt{1 - z^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

§ 87. Výpočet pole na okrajích kondensátoru. Kondensátor Rogovského. Při zkoumání elektrického pole mezi polepy deskového kondensátoru můžeme je prakticky pokládat za homogenní. Jen v blíž-

*) Což je možno též přesně dokázat.

kosti okrajů kondensátoru dojde k narušení homogennosti pole a musí být proveden speciální výpočet. Abychom zjednodušili výpočet, budeme zkoumat jen pole u jednoho okraje kondensátoru a zanedbáme vliv druhého okraje. Kondensátor si představíme jako dvě poloroviny navzájem rovnoběžné a položené nad sebou (stopa desek kondensátoru do roviny kolmé na desky je na obr. 140). Předpokládejme ještě, že desky kondensátoru nesou potenciál $\pm V$. Výpočet takového pole patří k typu I úloh § 40. Jde nám v podstatě o konstrukci konformního zobrazení oblasti z obr. 140 na pás $-V < \text{Im } \omega < V$.

Sestrojíme inverzní funkci $z = z(\omega)$. V rovině (z) sestrojíme pomocný výřez A_3A_1 podél osy naší oblasti (čárkováno na obr. 140) a najdeme zobrazení pomocné poloroviny $\text{Im } z > 0$ na „trojúhelník“ $A_1A_2A_3$. Zadání trojúhelníka a body odpovídající jeho vrcholům jsou v tabulce:



Obr. 140.

A_k	α_k	a_k
∞	-1	∞
A_2	2	-1
∞	0	0

Body a_k volíme libovolně, bod A_2 zatím neurčíme. Zobrazení poloroviny na „trojúhelník“ zprostředkuje funkce

$$z = C \int (\omega + 1) \omega^{-1} d\omega = C \int \frac{\omega + 1}{\omega} d\omega = C(\omega + \ln \omega) + C_1. \quad (29)$$

K určení konstanty C opět použijeme toho, že při přechodu bodu ω z polopřímky A_2A_3 na polopřímku A_3A_1 je přírůstek $\Delta z = -di +$

+ $o(\omega)$, kde d je poloviční vzdálenost desek kondensátoru a $o(\omega) \rightarrow 0$ pro $\omega \rightarrow 0$. Naopak pomocí (29) $\Delta z = C i \arg \omega + o(\omega) = -C\pi i + o(\omega)$, a z toho $-di = -\pi Ci$, $C = \frac{d}{\pi}$ a (29) má tvar

$$z = \frac{d}{\pi} (\omega + \ln \omega) + C_1.$$

Konstanta C_1 charakterizuje posun kondensátoru*) v rovině (z) . Umístíme si jej tak, aby $C_1 = 0$; pak

$$z = \frac{d}{\pi} (\omega + \ln \omega). \quad (30)$$

Protože na polopřímce A_3A_1 v rovině (ω) je $\omega > 0$, odpovídají podle (30) těmto bodům reálná z a výřez A_3A_1 v rovině (z) je tedy podél reálné osy. Polohu okraje kondensátoru dostaneme z (30) pro

$$\omega = -1 : A_2 = \frac{d}{\pi} \{-1 + \ln(-1)\} = -\frac{d}{\pi} + di.$$

Tím je poloha kondensátoru plně určena.

Zobrazením $\frac{V}{\pi} \ln \omega$ zobrazíme ještě polorovinu $\text{Im } \omega > 0$ na polopás $0 < \text{Im } w < V$. Přitom se zobrazí polopřímka A_3A_1 na reálnou poloosu. Odtud

$$\omega = e^{\frac{\pi}{V} w}$$

a dosazením tohoto výrazu do (30) dostáváme zobrazení polopásu $0 < \text{Im } w < V$ na horní polorovinu pole kondensátoru

$$z = \frac{d}{\pi} \left(e^{\frac{\pi w}{V}} + \frac{\pi w}{V} \right). \quad (31)$$

Aplikujeme princip symetrie a pak zobrazení (31) zprostředkuje zobrazení pásu $-V < \text{Im } w < V$ na celé pole kondensátoru. (31) je zřejmě inverzní funkce*) ke komplexnímu potenciálu pole.

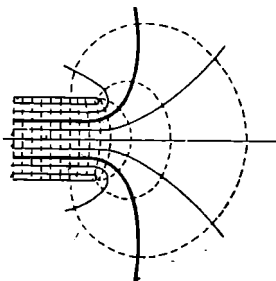
Na obr. 141 jsou nakresleny siločáry a ekvipotenciální křivky pole; jsou to obrazy polopřímek $\arg \omega = \text{const}$ a kružnic $|\omega| = \text{const}$

*) Nebo, což je totéž, posunutí souřadného systému v rovině.

*) Rovnice (31) vzhledem k w není řešitelná elementárními funkcemi.

při zobrazení (30). Je možno je též sestrojiti jako obrazy přímek $\text{Im } w = \text{const}$ a $\text{Re } w = \text{const}$ při zobrazení (31). Položme $z = x + iy$ a oddělme v (30) reálnou a imaginární část

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{\pi} (\varrho \cos \psi + \ln \varrho), \\ y &= \frac{d}{\pi} (\varrho \sin \psi + \psi). \end{aligned} \quad (32)$$



Obr. 141.

Rovnice (32) pro $\psi = \text{const}$ dávají parametrické rovnice ekvipotenciálních**) křivek a pro $\varrho = \text{const}$ parametrické rovnice siločar.

Vektor napětí pole je podle (39) § 38 roven

$$\mathbf{E} = -i \frac{\overline{dw}}{dz} = -i \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = -i \frac{V}{d} \frac{1}{1 + e^{\frac{\pi w}{d}}} = -i \frac{V}{d} \cdot \frac{1}{1 + \overline{w}}. \quad (33)$$

Uvnitř kondensátoru, t. j. pro body z blízké bodu A_3 , je w blízké bodu $w = 0$ a napětí pole kondensátoru

$$\mathbf{E} \approx -i \frac{V}{d}$$

se málo liší od napětí homogenního pole. Při přiblížení bodu z k okraji kondensátoru A_2 , bod $w \rightarrow -1$ a napětí \mathbf{E} vzrůstá nade všechny meze (neboť v tomto případě též $\overline{w} \rightarrow -1$).

Zkoumejme velikost změny modulu napětí $\mathbf{E} = \left| \frac{dw}{dz} \right|$ podél ekvipotencionálních křivek. Jelikož derivace regulární funkce nezávisí na tom, jakým způsobem se Δz blíží k nule, můžeme předpokládat, že se blížíme k danému bodu po silokřivce. Pak $|dw| = |dv|$, kde $v = \text{Im } w$ (neboť podél silokřivky $u = \text{const}$) a $|dz| = ds$ je diferenciál oblouku silokřivky. Přejdeme opět do pomocné roviny $w = \varrho e^{i\psi}$ a máme

**) Křivkám $\text{Im } w = \pm V$, t. j. $\psi = \pm \pi$, odpovídají desky kondensátoru $x = \frac{d}{\pi} (\ln \varrho - \varrho)$, $y = \pm d$.

$v = \frac{V}{\pi} \psi$ odkud $dv = \frac{V}{\pi} d\psi$ a z (32), kde položíme $\rho = \text{const}$, dostane-

neme $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{d}{\pi} \sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos\psi + 1} d\psi$. Odtud

$$E = \frac{dv}{ds} = \frac{V}{d} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos\psi + 1}}.$$

Abychom našli maximum hodnoty E podél ekvipotenciální křivky, stačí najít minimum funkce $\rho^2 + 2\rho \cos\psi + 1$ podél téže křivky pro různá ρ a konstantní ψ . Nutná podmínka pro minimum funkce, t. j. anulování první derivace

$$2\rho + 2 \cos\psi = 0,$$

není splněna pro ta ψ , pro která $\cos\psi$ je kladný (neboť je $\rho \geq 0$), t. j. pro $-\frac{1}{2}\pi < \psi < \frac{1}{2}\pi$. Pro taková ψ se modul napětí pole E mění podél ekvipotenciálních křivek monotonně, t. j. nemá ani maximum ani minimum.

Pro $\psi = \pm \frac{1}{2}\pi$ je maximum pro $\rho = 0$, t. j. na levém okraji kondensátoru. Sestrojíme-li takový kondensátor, jehož desky budou mít tvar ekvipotenciálních křivek pro $\psi = \pm \frac{1}{2}\pi^*$ (silně vytažené na obr. 141), bude modul napětí pole takového kondensátoru

$$E = \frac{V}{d} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 1}} \quad (34)$$

ubývat při přibližování k jeho okrajům. Takový kondensátor byl pro počten a konstruován *Rogovským*. Kondensátoru Rogovského se používá při zkoumání elektrické pevnosti isolačních hmot na probití.

§ 88. Pole deskových elektrod. Předpokládejme, že elektrody nesou potenciál $\pm V$. Budeme konstruovat konformní zobrazení mnohoúhelníka z obr. 142 na pás $-V < \text{Im } w < V$. Sestrojíme nejprve

*) Rovnice ekvipotenciálních křivek vypočteny z (32) jsou:

$$x = \frac{d}{\pi} \ln \rho; \quad y = \pm \frac{d}{\pi} \left(-\frac{1}{2}\pi + \rho\right),$$

odkud

$$y = \pm \left(\frac{d}{2} + \frac{d}{\pi} e^{\frac{\pi x}{d}}\right).$$

zobrazení horní poloroviny pole „trojúhelníka“ $A_1A_2A_3$ na pomocnou polorovinu $\text{Im } \zeta > 0$. Zadání trojúhelníka jakož i body odpovídající jeho vrcholům jsou v tabulce:

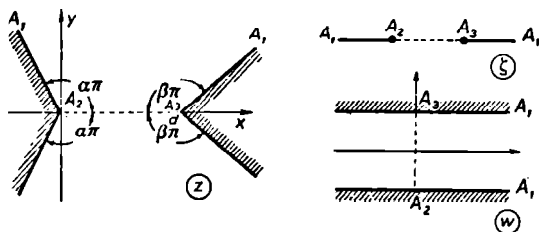
A_k	x_k	a_k
∞	$1 - \alpha - \beta$	∞
0	α	0
a	β	1

Christoffelův-Schwarzův integrál má tvar

$$z = C \int_0^{\zeta} \zeta^{\alpha-1} (\zeta - 1)^{\beta-1} d\zeta = C' \int_0^{\zeta} \zeta^{\alpha-1} (1 - \zeta)^{\beta-1} d\zeta \quad (35)$$

(kde konstanta $C_1 = 0$, protože si odpovídají navzájem body $\zeta = 0$ a $z = 0$). K určení konstanty C' použijeme toho, že bod $\zeta = 1$ přejde do bodu $z = d$, kde d je vzdálenost mezi vrcholy úhlů:

$$d = C' \int_0^1 \zeta^{\alpha-1} (1 - \zeta)^{\beta-1} d\zeta.$$



Obr. 142.

Integrál napravo vyjádříme pomocí funkce **B**:

$$\int_0^1 \zeta^{\alpha-1} (1 - \zeta)^{\beta-1} d\zeta = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

(viz př. 11 kap. VII). Odtud $C^{II} = d \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}$ a (35) přejde na

$$z = d \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^{\zeta} \zeta^{\alpha-1} (1 - \zeta)^{\beta-1} d\zeta. \quad (36)$$

Čtenář si snadno sám ověří, že funkce

$$w = \frac{2Vi}{\pi} \arcsin(2\zeta - 1) \quad (37)$$

zobrazí konformně polovinu $\text{Im } \zeta > 0$ na polopás $-V < \text{Im } w < V$, $\text{Re } w < 0$, při čemž interval $(0, 1)$ reálné osy v rovině (ζ) přejde v interval $(-Vi, +Vi)$ imaginární osy v rovině (w) (zobrazení (37) si odvodíme pomocí (22) § 86 a pomocných lineárních zobrazení).

Vyloučením ζ z rovnic (36) a (37) dostaneme konformní zobrazení horní poloviny uvažovaného pole na levý polopás $-V < \text{Im } w < V$, $\text{Re } w < 0$. Při tom úsečka $(0, d)$ přejde v interval $(-Vi, Vi)$ imaginární osy. Podle principu symetrie tatáž funkce zobrazí konformně celé pole na pás $-V < \text{Im } w < V$ a je tedy komplexním potenciálem uvažovaného pole.

Stanovme si ještě velikost napětí pole v bodech blízkých vrcholu úhlu A_2 . Je

$$E = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{\left| \frac{dw}{d\zeta} \right|}{\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|} = \frac{2V}{\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)} B(\alpha, \beta) d \zeta^{\alpha-1} (1-\zeta)^{\beta-1}} \right| \approx$$

$$\approx = \frac{2V}{d\pi B(\alpha, \beta)} \cdot \frac{1}{|\zeta|^{\alpha-1}},$$

neboť v blízkosti bodu $\zeta = 0$ je $1 - \zeta \approx 1$ a podle (36) v blízkosti 0

je $z \approx B(\alpha, \beta) \int_0^{\zeta} \zeta^{\alpha-1} d\zeta = \frac{B(\alpha, \beta) d}{\alpha} \zeta$ a z toho

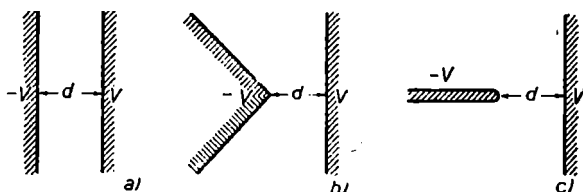
$$E = \frac{2V}{\pi B(\alpha, \beta)^{\frac{1}{2\alpha}} \alpha^{1-\frac{1}{2\alpha}}} \cdot \frac{1}{d^{\frac{1}{2\alpha}} |z|^{1-\frac{1}{2\alpha}}} = A \frac{V}{d^{\frac{1}{2\alpha}} |z|^{1-\frac{1}{2\alpha}}}, \quad (38)$$

kde A je konstanta.

Nechť je nyní v blízkosti vrcholu A_2 naší elektrody umístěno jisté dielektrikum, které chceme zkoumat na pevnost vůči probití. Budeme zvětšovat napětí $2V$ mezi elektrodami při konstantní vzdálenosti d . Pak podle (38) bude velikost E stoupat nade všechny meze a pro některé napětí dojde k probití dielektrika. Budeme-li považovat hodnotu $2V_0$, při které došlo k průboji, za konstantní (to můžeme, neboť poloha, v níž došlo k průboji, je určena bodem z), dostaneme z (38) závislost napětí, při němž došlo k průboji, na vzdálenosti elektrod:

$$2V_0 \approx cd^{\frac{1}{2\alpha}}, \quad (39)$$

kde C je konstanta.



Obr. 143.

Tak pro případ dvou rovnoběžných rovin (obr. 143a) je $\alpha = \frac{1}{2}$ a napětí

$$2V_0 \approx cd,$$

při němž dojde k probití, je úměrné vzdálenosti elektrod. Pro elektrodu ve tvaru pravého úhlu (obr. 143b) je $\alpha = \frac{3}{4}$ a

$$2V_0 \approx cd^{\frac{4}{3}}$$

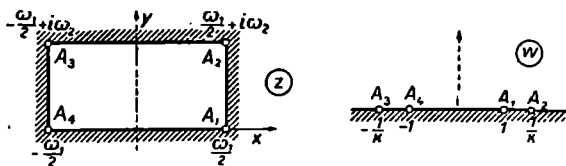
a pro dvě navzájem kolmé roviny (obr. 143c) $\alpha = 1$ a

$$2V_0 \approx c\sqrt{d}.$$

§ 89. Zobrazení rovnoběžníku. Pojem eliptického integrálu. Zkoumejme zobrazení poloroviny $\text{Im } w > 0$ na rovnoběžník se stranami ω_1 a ω_2 . Jeho zadání a body odpovídající jeho vrcholům jsou v tabulce:

A_k	$\frac{1}{2}\omega_1$	$\frac{1}{2}\omega_1 + i\omega_2$	$-\frac{1}{2}\omega_1 + i\omega_2$	$-\frac{1}{2}\omega_1$
α_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
a_k	1	∞	a_3	a_4

V ní jsou κ , a_3 a a_4 reálné konstanty vyhovující daným předpokladům (zřejmě $\kappa > 1$). Protože jsme si určili jen vzor jediného vrcholu rovnoběžníka, můžeme požadovat, aby se body $w = 0$ a $w = \infty$ zobrazily do bodu $z = 0$ a do bodu $z = i\omega_2$. Pak můžeme považovat naše zobrazení za symetrické pokračování zobrazení prvního kvadrantu



Obr. 144.

roviny z na pravou polovinu rovnoběžníka vzhledem k imaginární ose. Odtud plyne $a_3 = -\kappa$ a $a_4 = -1$, t. j. funkce zprostředkující naše zobrazení má tvar

$$z = C' \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(w^2 - 1)(w^2 - \kappa^2)}} + C_1 = \quad (40)$$

$$= C \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}},$$

kde $C_1 = 0$, neboť body $w = 0$ a $z = 0$ si odpovídají navzájem a $k = \frac{1}{\kappa}$ ($0 < k < 1$) je konstanta. Integrál (40) se nedá vyjádřit pomocí elementárních funkcí a nazývá se *eliptický integrál prvního druhu*.

K určení konstant C a k použijeme vzájemného přiřazení bodu A_1 a $a_1 = 1$:

$$\frac{1}{2}\omega_1 = C \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}} \quad (41)$$

a bodu A_2 a $a_2 = \frac{1}{k}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_1 + i\omega_2 &= C \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} + \\ &+ C \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} = \\ &= \frac{1}{2}\omega_1 + iC \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dw}{\sqrt{(w^2-1)(1-k^2w^2)}} \end{aligned}$$

(rozložili jsme integrál od 0 do $\frac{1}{k}$ na dva integrály od 0 do 1 a od 1 do $\frac{1}{k}$ a použili (41)). Odtud

$$\omega_2 = c \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dw}{\sqrt{(w^2-1)(1-k^2w^2)}} \quad (42)$$

Vydělíme-li (42) a (41), zkrátí se konstanta C a dostaneme rovnici jen mezi k a $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. Tedy k závisí jen od poměru stran rovnoběžníka.

Konstanta C závisí na rozměrech rovnoběžníka. Z rovnice (41) plyne, že je reálná a kladná. Eliptický integrál

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-t^2k^2)}}$$

přejde substitucí $t = \sin\varphi$ na integrál

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Pro posledně uvedený integrál ve tvaru

$$F(\alpha, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad (43)$$

kde $k = \sin \alpha$, jsou sestaveny podrobné tabulky.*) Úhel φ se nazývá amplitudou integrálu (43). Pro $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ nazývá integrál (43) úplným eliptickým integrálem prvního druhu a označujeme jej symbolem:

$$K = F(\alpha, \frac{1}{2}\pi) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}. \quad (44)$$

V připojené tabulce je několik hodnot úplného eliptického integrálu prvního druhu:**)

α	6°	7°	8°	9°	10°	11°
K	1,5751	1,5767	1,5785	1,5805	1,5828	1,5854

Veličina $k = \sin \alpha$ se nazývá modulem eliptického integrálu a veličina $k' = \sqrt{1 - k^2} = \cos \alpha$ se nazývá doplňkem modulu a integrál

$$K' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2 t^2)}} = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - 1)(1 - k^2 \tau^2)}} \quad (45)$$

(kde je $\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - k'^2 t^2}}$) doplňkem úplného eliptického integrálu prvního druhu.

Pomocí těchto označení můžeme určit konstanty integrálu (40) z rovnic (41) a (42):

$$\omega_1 = 2CK, \quad \omega_2 = CK'; \quad \frac{K'}{K} = 2 \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (46)$$

*) E. Jahnke-F. Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Teubner Leipzig 1909, a další vydání, str. 46—68 nebo ruský překlad posledního vydání z r. 1945 Janke i Emde: Tablicy funkcij, GOSTÉCHIZDAT, Moskva 1948, str. 162—167. (Pozn. překl.)

***) Tamtéž — němec. vydání str. 68, rus. vyd. str. 177.

Veličina $e^{-\pi \frac{K'}{K}}$ se obvykle označuje q , takže je

$$\ln q = -\pi \frac{K'}{K}.$$

Pro dekadický logaritmus $\log q$ jsou sestaveny tabulky této funkce v závislosti na α^*). V připojené tabulce jsou pro ilustraci některé hodnoty:

α	6°	7°	8°	9°	10°	11°
$\log q$	$\bar{4},8367$	$4,9709$	$\bar{3},0872$	$\bar{3},5899$	$3,2819$	$\bar{3},3611$

Známe-li strany rovnoběžníka, můžeme určit $\frac{K'}{K}$ a odtud i $\log q$.

Ze známé hodnoty $\log q$ určíme z tabulky α a podobně najdeme z tabulky i K . Známe-li K a ω_1 , pak pomocí prvního ze vzorců (46) najdeme konstantu C .

Jako příklad hledejme zobrazení poloroviny $\text{Im } \omega > 0$ na čtverec o straně 1 umístěný jako obdélník na obr. 144. Je $\omega_1 = \omega_2 = 1$ a odtud $\frac{K'}{K} = 2$ a $\ln q = -2\pi z = -6,283$. Přepočteme přirozené logaritmy na dekadické násobíce modulem $M \approx 0,4343$ a dostaneme $\log q \approx \approx -2,729 = \bar{3},271$. Odtud z druhé tabulky $\alpha \approx 10^\circ$ a z první $K \approx 1,583$. Dále: $C = \frac{\omega_1}{2K} \approx 0,316$, $k = \sin \alpha \approx 0,174$, $k^2 \approx 0,03$ a naše konformní zobrazení je zprostředkováno funkcí

$$z \approx 0,316 \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-0,03w^2)}}. \quad (47)$$

§ 90. Eliptické funkce Jacobiho. Funkce inverzní k eliptickému integrálu

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}. \quad (48)$$

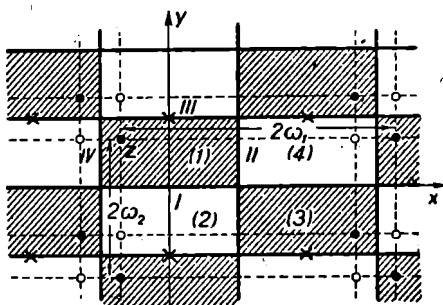
**) Na př. rus. vyd. str. 147—149. Význam symbolu je vyložen v textu naší knihy. (Pozn. překl.)

se označuje symbolem $w = \operatorname{sn}(z, k)$ nebo jednodušeji $w = \operatorname{sn} z$ a nazývá se *Jacobiho eliptickou funkcí* sn s modulem k .*) Z (40) plyne, že funkce

$$w = \operatorname{sn}\left(\frac{z}{C}, k\right) = \operatorname{sn} \frac{z}{C} \quad (49)$$

zobrazí konformně rovnoběžník obr. 144 na horní polorovinu. Při tom jsou konstanty C a k ($0 < k < 1$) určeny stranami rovnoběžníka ω_1 a ω_2 podle vzorců (46).

Zvolíme rozměry rovnoběžníka tak, aby byla $C = 1$. Označíme I, II, III, IV strany tohoto rovnoběžníka. Podle principu symetrie můžeme symetricky pokračovat funkci $w = \operatorname{sn} z$ třeba přes stranu (I) a dostaneme zobrazení rovnoběžníka (2) na dolní polorovinu zprostředkované funkcí $w = \operatorname{sn} z$ (obr. 145). Prodloužíme-li toto zobrazení dále na př. přes stranu (II), vidíme, že $w = \operatorname{sn} z$ zobrazí rovnoběžník (3) znovu na horní polorovinu atd. (Šrafované rovnoběžníky obr. 145 se zobrazí na horní polorovinu, nešrafované na dolní polorovinu.)



Obr. 145.

Tak postupně prodloužíme funkci $w = \operatorname{sn} z$, definovanou ze začátku jen v rovnoběžníku (1), na celou rovinu (z). Přitom je naše funkce zřejmě jednoznačná, neboť oběhneme-li nějakou uzavřenou křivku a přijdeme-li znovu do rovnoběžníka na př. (1), bude nová hodnota $\operatorname{sn} z$ shodná se starou, neboť spolu souhlasí staré i nové zobrazení (1) na polorovinu (viz větu jednoznačnosti konformního zobrazení § 23).

*) Budeme-li psát integrál (48) ve tvaru $z = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$, pak podle

předcházejícího paragrafu bude φ amplitudou z a tedy $w = \operatorname{sn} z = \sin \varphi$. Proto se nazývá funkce $\operatorname{sn} z$ někdy též sinus amplituda a funkce $\operatorname{cn} z$, resp. $\operatorname{dn} z$ (viz dále), kosinus amplituda, resp. delta amplituda.

Dále je naše funkce všude regulární uvnitř všech rovnoběžníků i na jejich hranicích s výjimkou bodů $z = \omega_1$ a všech bodů, které z něho dostaneme podle principu symetrie (na obr. 145 jsou označeny x), kde má funkce póly, protože se tyto body zobrazí na $w = \infty$. Je tedy funkce snz *meromorfní*.

Dále jsou na obr. 145 označeny plnými kroužky body, kde funkce nabývá hodnoty snz, a bílými kroužky body, v nichž nabývá funkce hodnoty $\overline{\text{snz}}$. Z konstrukce těchto bodů plyne, že ve všech bodech $z + 2k_1\omega_1 + 2k_2i\omega_2$, kde k_1 a k_2 jsou libovolná celá čísla, má funkce snz tutéž hodnotu:

$$\text{sn}(z + 2k_1\omega_1 + 2k_2i\omega_2) = \text{sn}z. \quad (50)$$

Jinak řečeno, to znamená, že funkce snz má *dvě periody* $T_1 = 2\omega_1$, $T_2 = 2\omega_2$; nazýváme ji proto *biperiodickou funkcí*. Biperiodičnost funkce snz nám dovoluje zkoumat ji pouze v rovnoběžníku se stranami $2\omega_1$ a $2\omega_2$ rovnoběžnými se souřadnými osami. Výsledky se přenesou snadno pomocí biperiodičnosti na celou rovinu.

Z výše uvedených úvah plyne ještě, že funkce snz je lichá, t. j.

$$\text{sn}(-z) = -\text{sn}z, \quad (51)$$

a odtud $\text{sn}0 = 0$.

Uvedené vlastnosti připomínají jistou analogii s goniometrickými funkcemi. Z (48) pro $k = 0$ plyne $z = \arcsin w$ a tedy $\text{sn}(z, 0)$ je totožný s obyčejným sinem.

Definujme si ještě kromě snz dvě další *Jacobiho eliptické funkce* vztahy:

$$\text{cn}z = \sqrt{1 - \text{sn}^2z}, \quad \text{dn}z = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2z}. \quad (52)$$

Pro $k = 0$ je $\text{cn}z$ totožný s obyčejným kosinem a $\text{dn}z$ degeneruje v 1.

Uvedeme si některé vlastnosti Jacobiho eliptických funkcí. Ze vzorce (48) definujícího snz dostaneme podle pravidla o derivaci inverzní funkce

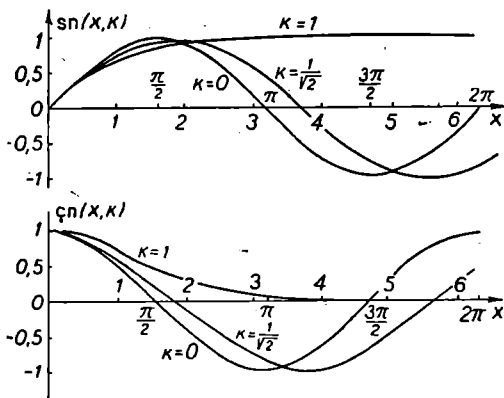
$$\frac{d \text{sn}z}{z} = \sqrt{(1 - \text{sn}^2z)(1 - k^2 \text{sn}^2z)} = \text{cn}z \cdot \text{dn}z. \quad (53)$$

Dále, derivací vztahů (52) dostaneme

$$\frac{d \operatorname{cn} z}{dz} = - \frac{\operatorname{sn} z \cdot \operatorname{cn} z \cdot \operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z} = - \operatorname{sn} z \cdot \operatorname{dn} z; \quad (54)$$

$$\frac{d \operatorname{sn} z}{dz} = - k^2 \operatorname{sn} z \cdot \operatorname{cn} z.$$

Pro $k = 0$ (53) a (54) dávají známé vzorce pro derivaci goniometrických funkcí.



Obr. 146.

Uvedeme zde ještě bez důkazu*) *adiční theorem* pro eliptické funkce analogické podobným vzorcům pro goniometrické funkce

$$\operatorname{sn}(z + w) = \frac{\operatorname{sn} z \cdot \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w + \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{cn} z \cdot \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \cdot \operatorname{sn}^2 w},$$

$$\operatorname{cn}(z + w) = \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{cn} w - \operatorname{sn} z \operatorname{sn} w \operatorname{dn} z \operatorname{dn} w}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 w}, \quad (55)$$

$$\operatorname{dn}(z + w) = \frac{\operatorname{dn} z \cdot \operatorname{dn} w - k^2 \operatorname{sn} z \cdot \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{cn} z \cdot \operatorname{cn} w}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \cdot \operatorname{sn}^2 w}.$$

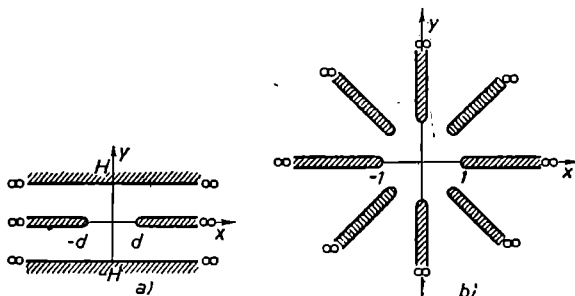
*) Odvození těchto vzorců najde čtenář v knihách: Privalov: Vveděniye v teoriju funkcij kompleksnogo peremennogo, GOSTÉCHIZDAT, Moskva, 1945, str. 305; N. J. Achizejev: Elementy teorii eliptičeskich funkcij, GOSTÉCHIZDAT, Moskva, 1948. [Nebo v polské knize: S. Saks i A. Zygmund: Funkcje analityczne, Czytelnik Warszawa 1948. Lavrentjev-Šabat: Metody funkcij kompleksnogo peremennogo, GOSTÉCHIZDAT, Moskva 1951, kap. VII. V této knize i výše uvedené knize polské nalezne čtenář podrobnější matematickou theorii, důkazy vět a doplnění látky k látce vyložené v naší knize. Pozn. překl.]

Pro $k = 0$ dávají první dva vzorce (55) známé vzorce pro goniometrické funkce.

Nakonec připojíme ještě na obr. 146 grafický průběh funkce $\operatorname{sn}(x, k)$ a $\operatorname{cn}(x, k)$ pro reálná x a $k = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1$.

ÚLOHY

1. Použijte principu symetrie a zobrazte na horní polorovinu oblasti z obr. 147.



Obr. 147.

2. Odvoďte vzorec pro zobrazení vnitřku jednotkové kružnice na mnohoúhelník:

$$w = C \int_0^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C',$$

kde α_k jsou úhly mnohoúhelníka měřené v π , a_k ($|a_k| = 1$) jsou body na jednotkové kružnici, odpovídající vrcholům mnohoúhelníka a C a C' konstanty.

3. Odvoďte vzorec pro zobrazení jednotkového kruhu na vnějšek mnohoúhelníka

$$w = C \int_0^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} \frac{dz}{z^2} + C',$$

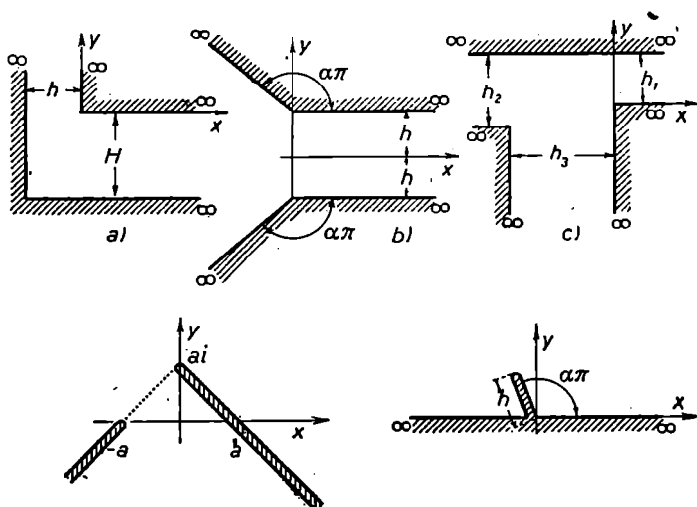
kde α_k jsou vnější úhly mnohoúhelníka měřené v π a a_k , C , C' mají tentýž význam jako v předcházejícím příkladě. Předpokládejte přitom, že střed kružnice $z = 0$ se zobrazí do bodu $w = \infty$.

4. Najděte konformní zobrazení a) vnitřku paraboly $y^2 = 2px$, b) vnitřků pravé větve hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, c) vnitřku elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, na horní polorovinu.

5. Najděte konformní zobrazení vnějšku

a) písmene „X“, t. j. bodů úseček $(-e^{i\pi}, e^{i\pi})$, $(-e^{-i\pi}, e^{-i\pi})$;

b) písmene „Y“, t. j. bodů intervalu $(0, -2i)$ na imaginární ose a na dolní půlkružnici $|z| = 1$;



Obr. 148.

c) písmene „H“, t. j. bodů na úsečkách

$$\left(-i, i\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i, -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i, \frac{1}{\sqrt{2}} - i\right)$$

na vnějšek jednotkové kružnice.

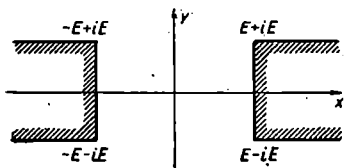
6. Najděte konformní zobrazení kruhu $|z| < 1$ s výřezem podél úseček $(-i, \frac{1}{2}i)$ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, na vnitřek jednotkového kruhu $|w| < 1$.

7. Najděte konformní zobrazení horní poloroviny na mnohoúhelníky z obr. 148

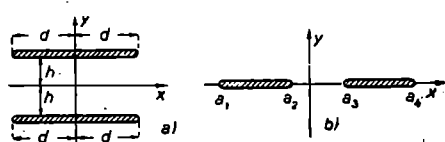
8. Dokažte, že eliptický integrál druhého druhu

$$E(z, k) = \int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz, \quad 0 < k < 1$$

zobrazí konformně rovinu (z) s výřezy podél polopřímek $y = 0, |x| > 1$ na oblast obr. 149.



Obr. 149.



Obr. 150.

9. Najděte konformní zobrazení dvojnásob souvislé oblasti obr. 150a na dvojnásob souvislou oblast obr. 150b. Konstanty a_k jsou dány.
10. Budiž oblast D rovina (z) s nekonečným počtem výřezů podél navzájem rovnoběžných úseček $-a \leq x \leq a, y = kh$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Najděte: a) jedno-jednoznačné zobrazení oblasti D na rovinu (w) s nekonečným počtem výřezů podél intervalů reálné osy; b) jednoznačné (ale ne jedno-jednoznačné) zobrazení oblasti D na vnějšek jednotkového kruhu.