8. SPECIÁLNÍ DETERMINANTY.

V matematice i ve vědách užitých se často setkáváme s determinanty, jejichž struktura jeví (obyčejně na prvý pohled) zřejmé zákonitosti. Hodnoty takových determinantů lze pak vhodnými obraty vyjádřiti zpravidla ve velmi jednoduchém tvaru. V tomto paragrafu si uvedeme nejznámější z těchto speciálních determinantů; cesty, jichž tu bude při výpočtech užito, nejsou ovšem jediné, jimiž lze dospěti k cíli. V mnoha z uvedených případů existují ještě jiné, často jednodušší obraty — zvolil jsem zde ty, které pokládám z vlastních zkušeností za přístupné také počítajícím technikům, v jejichž řadách by bylo dostatečné zvládnutí theorie i praxe determinantů svrchovaně žádoucí.

a) *Determinant Vandermondeův*

má tvar

$$V_n = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & x_1^2, & \ldots, & x_1^{n-1} \\ 1, & x_2, & x_2^2, & \ldots, & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & x_n, & x_n^2, & \ldots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad (23)$$

a jeho hodnota se počítá podle vzorce

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1) \ldots$$
$$\ldots (x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1}). \qquad (23')$$

Důkaz. Od každého sloupce determinantu V_n odečteme sloupec předchozí násobený x_1; tím se hodnota V_n, jak víme, nezmění, determinant však bude míti prvou řádku 1, 0, 0, 0, ..., 0, ostatní řádky pak budou $1, x_\nu - x_1, x_\nu^2 - x_1 x_\nu, x_\nu^3 - x_1 x_\nu^2, \ldots, x_\nu^{n-1} - x_1 x_\nu^{n-2}$ ($\nu = 2, 3, \ldots, n$). Rozvedeme-li nyní determinant podle elementů prvního řádku a vytkneme pak z jednotlivých řádek společné faktory, dostaneme

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \dots (x_n - x_1) \,.$$

$$. \begin{vmatrix} 1, & x_2, & x_2^2, & \dots, & x_2^{n-2} \\ 1, & x_3, & x_3^2, & \dots, & x_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & x_n, & x_n^2, & \dots, & x_n^{n-2} \end{vmatrix} .$$

Determinant zde vystupující je zcela obdobný původnímu, pouze jeho stupeň je $n - 1$ a základní prvky $x_2, x_3, \dots, x_n$. Naložíme s ním stejně jako dříve s V_n a dostaneme

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \dots$$
$$\dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \dots (x_n - x_2) \,.$$

$$. \begin{vmatrix} 1, & x_3, & x_3^2, & \dots, & x_3^{n-3} \\ 1, & x_4, & x_4^2, & \dots, & x_4^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & x_n, & x_n^2, & \dots, & x_n^{n-3} \end{vmatrix} .$$

Další aplikací postupu už dvakrát užitého dospějeme nakonec k vyjádření:

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \dots$$
$$\dots (x_n - x_2)(x_4 - x_3) \dots (x_n - x_3) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

To však je pouze jiný tvar vzorce (23′), jehož platnost je tím dokázána.

Poznámky. 1. Pokládáme-li Vandermondeův determinant za funkci proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$, tedy $V_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, pak tato funkce mění při libovolné permutaci svých proměnných očividně nejvýše své znaménko. Funkcím této vlastnosti se říká alternující.

2. Vandermondeův determinant má stěžejní roli v pojmu diskriminantu algebraické rovnice.

3. Pro $n = 3$ byl determinant (23) po prvé studován Vandermondem (Résolution dès équations, 1770) a pro obecné n Cauchym.

b) *Determinant persymetrický* (také orthosymetrický).

Je to determinant n-tého stupně, zbudovaný z elementů $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{2n-2}$ tak, že jeho obecný prvek $a_{ik} = c_{i+k-2}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$. Označíme jej znakem P_n, takže

$$P_n = \begin{vmatrix} c_0, & c_1, & c_2, & c_3, & \ldots, c_{n-1} \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4, & \ldots, c_n \\ c_2, & c_3, & c_4, & c_5, & \ldots, c_{n+1} \\ c_3, & c_4, & c_5, & c_6, & \ldots, c_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1}, & c_n, & c_{n+1}, & c_{n+2}, & \ldots, c_{2n-2} \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Zavedeme-li si postupné diference veličin c_ν podle schematu

$$\begin{array}{l} \Delta_0^{(0)} = c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots, c_{2n-6}, c_{2n-5}, c_{2n-4}, c_{2n-3}, c_{2n-2} \\ \Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}, \Delta_3^{(1)}, \Delta_4^{(1)}, \ldots, \Delta_{2n-5}^{(1)}, \Delta_{2n-4}^{(1)}, \Delta_{2n-3}^{(1)}, \Delta_{2n-2}^{(1)} \\ \Delta_2^{(2)}, \Delta_3^{(2)}, \Delta_4^{(2)}, \ldots, \Delta_{2n-4}^{(2)}, \Delta_{2n-3}^{(2)}, \Delta_{2n-2}^{(2)} \\ \Delta_3^{(3)}, \Delta_4^{(3)}, \ldots, \Delta_{2n-3}^{(3)}, \Delta_{2n-2}^{(3)} \\ \Delta_4^{(4)}, \ldots, \Delta_{2n-2}^{(4)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \tag{25}$$

kde každá z diferencí je rovna rozdílu veličiny stojící nad ní vpravo minus veličina stojící nad ní vlevo, lze dokázati tuto skutečnost:

Persymetrický determinant veličin $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{2n-2}$ *je roven persymetrickému determinantu jejich diferencí* $\Delta_0^{(0)}, \Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(2)}, \ldots, \Delta_{2n-2}^{(2n-2)}$.

Důkaz. Na determinant (24) aplikujeme serii úprav, z nichž každá mění pouze jeho tvar (nikoli hodnotu, v. věty 4. a 5., jakož i poznámky k nim) a skládá se vždy ze dvou kroků. Prvá úprava spočívá v tom, že od každého sloupce P_n mimo první odečteme sloupec předchozí a v determinantu tak vzniklém pak od každé řádky vyjma prvou odečteme řádku předchozí. Dostaneme determinant $P_n^{(1)}$, který podrobíme druhé úpravě: Ode všech sloupců mimo prvé dva odečteme vždy sloupec předchozí a potom ode všech řádků třetím počínaje odečítáme vždy řádek předchozí. Na determinant $P_n^{(2)}$ takto vzniklý aplikujeme úpravu třetí: Každý sloupec čtvrtým počínaje zmenšíme o elementy sloupce předchozího a pak naložíme obdobně s každým řádkem až na prvé tři. Vyjde nám determinant

$$P_n^{(3)} = \begin{vmatrix} \Delta_0^{(0)}, & \Delta_1^{(1)}, & \Delta_2^{(2)}, & \Delta_3^{(3)}, & \dots, & \Delta_{n-1}^{(3)} \\ \Delta_1^{(1)}, & \Delta_2^{(2)}, & \Delta_3^{(3)}, & \Delta_4^{(4)}, & \dots, & \Delta_n^{(4)} \\ \Delta_2^{(2)}, & \Delta_3^{(3)}, & \Delta_4^{(4)}, & \Delta_5^{(5)}, & \dots, & \Delta_{n+1}^{(5)} \\ \Delta_3^{(3)}, & \Delta_4^{(4)}, & \Delta_5^{(5)}, & \Delta_6^{(6)}, & \dots, & \Delta_{n+2}^{(6)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{n-1}^{(3)}, & \Delta_n^{(4)}, & \Delta_{n+1}^{(5)}, & \Delta_{n+2}^{(6)}, & \dots, & \Delta_{2n-2}^{(6)} \end{vmatrix}.$$

Takto postupujíce dostaneme po $n - 1$ krocích původní determinant P_n ve tvaru $P_n^{(n-1)}$, t. j. právě v tom tvaru, o němž mluví svrchu uvedená věta.

Doporučuji čtenáři provésti tuto úpravu obecně užitím obecné indukce podle vzoru důkazu věty 1.

Poznámky. 1. Tvoří-li veličiny $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n-2}$ aritmetickou řadu stupně $(n - 1)$-ho (takže je řada n-tých diferencí nulová), má jejich persymetrický determinant hodnotu

$$P_n = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} [\Delta_{n-1}^{(n-1)}]^n; \tag{26}$$

tvoří-li řadu stupně nižšího, než $(n - 1)$-ho, je $P_n = 0$. Tyto skutečnosti jsou přímým důsledkem vyjádření P_n pomocí diferencí veličin $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n-2}$.

2. Persymetrické determinanty jsou důležité v theorii invariantů a rovnic algebraických (Sturmův theorém, diskriminant). Zvláště podrobně se jimi zabývali *Sylvester* (Philos. Trans. 1853) a *Hankel*.

c) *Cyklický determinant.*

Je zvláštním případem determinantu persymetrického, z něhož jej dostaneme, platí-li $c_{n+\nu} = c_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n - 2$). Má tedy tvar

$$C_n = \begin{vmatrix} c_0, & c_1, & c_2, \ldots, c_{n-3}, & c_{n-2}, & c_{n-1} \\ c_1, & c_2, & c_3, \ldots, c_{n-2}, & c_{n-1}, & c_0 \\ c_2, & c_3, & c_4, \ldots, c_{n-1}, & c_0, & c_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-2}, & c_{n-1}, & c_0, \ldots, c_{n-5}, & c_{n-4}, & c_{n-3} \\ c_{n-1}, & c_0, & c_1, \ldots, c_{n-4}, & c_{n-3}, & c_{n-2} \end{vmatrix}. \tag{27}$$

O determinantu C_n platí *věta:*

Buď polynom $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-1} x^{n-1}$; *determinant* C_n *lze vyjádřiti ve tvaru*

$$C_n = (-1)^{\frac{1}{2}[(n-1)(n-2)]} \,.\, f(x_1)\, f(x_2) \ldots f(x_n), \tag{28}$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *značí kořeny rovnice* $x^n - 1 = 0$.

Důkaz. Ukážeme napřed, že determinant C_n je dělitelný výrazem $f(x)$, je-li jen $x^n - 1 = 0$. Používajíce nějakého kořene x této rovnice upravme C_n tak, že k jeho prvému sloupci přičteme x-násobný druhý, x^2-násobný třetí, ..., až x^{n-1}-násobný poslední. Ostatní sloupce necháme beze změny, takže $(\nu + 1)$-vý řádek bude míti na prvém místě výraz

$$c_\nu + c_{\nu+1}x + c_{\nu+2}x^2 + \ldots + c_{n-2}x^{n-\nu-2} + c_{n-1}x^{n-\nu-1} +$$
$$+ c_0 x^{n-\nu} + c_1 x^{n-\nu+1} + \ldots + c_{\nu-1}x^{n-1} =$$
$$= \frac{1}{x^\nu}(c_\nu x^\nu + c_{\nu+1}x^{\nu+1} + c_{\nu+2}x^{\nu+2} + \ldots +$$
$$+ c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1} + c_0 x^n + c_1 x^{n+1} + \ldots + c_{\nu-1}x^{n+\nu-1}) =$$
$$= \frac{1}{x^\nu}(c_\nu x^\nu + c_{\nu+1}x^{\nu+1} + c_{\nu+2}x^{\nu+2} + \ldots +$$
$$+ c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1} + c_0 + c_1 x + \ldots + c_{\nu-1}x^{\nu-1}) =$$
$$= \frac{1}{x^\nu} f(x),$$

na ostatních místech pak stojí prvky $c_{\nu+1}, c_{\nu+2}, \ldots, c_{n-1}, c_0, c_1, \ldots, c_{\nu-1}$.

Obsahují tedy všechny elementy prvého sloupce v takto tvarově pozměněném determinantu C_n výraz $f(x)$, který lze proto vytknouti jako činitel před determinant (v. větu 4.), takže je C_n skutečně dělitelno hodnotou $f(x)$, je-li jenom x kořenem rovnice $x^n - 1 = 0$. Protože pak má tato rovnice n kořenů $x_1, x_2, \ldots, x_n$, je C_n dělitelno každým z výrazů $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ a dá se tedy psáti ve tvaru

$$C_n = C \, . \, f(x_1) \, f(x_2) \ldots f(x_n).$$

Abychom získali určitý názor o veličině C, představme si, že všechny veličiny $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ jsou fysikální s touže dimensí t (na př. cm, sec a pod.); je tedy $c_\varrho = t\gamma_\varrho$, $\varrho = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, kde γ_ϱ je číslo bez rozměru. Determinant C_n nabude tvaru $t^n \Gamma_n$, výrazy $f(x_\nu)$ tvaru $t\varphi(x_\nu)$, kde Γ_n a $\varphi(x_\nu)$ jsou čísla snadno představitelného tvaru (proveď podrobně!); veličina C má neznámý rozměr t^ξ, takže přejde v novou $t^\xi \Gamma$. Posléze psané vyjádření C_n tedy nabude tvaru

$$t^n \Gamma_n = t^\xi \Gamma \, . \, t^n \varphi(x_1) \, \varphi(x_2) \ldots \varphi(x_n),$$

z čehož vyplývá pro ξ hodnota 0, takže C je bez rozměru; je to tedy konstanta neobsahující žádný z prvků $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$.

Abychom tuto konstantu určili, uvažujme o speciálním případě determinantu C_n, kdy $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-2} = 0$, $c_{n-1} = 1$. Pak je $f(x_\nu) = c_{n-1} x_\nu^{n-1} = x_\nu^{n-1}$ a determinant C_n má všechny prvky nulové, až na elementy vedlejší diagonály, které jsou vesměs rovny 1. Je tedy v tomto zvláštním případě

$$C_n = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n+3)]},$$

takže máme pro hodnotu C vztah

$$(-1)^{\frac{1}{2}[n(n+3)]} = C(x_1 x_2 \ldots x_n)^{n-1}.$$

Z theorie rovnic však je známo, že v našem případě jest

$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \,.\, (-1) = (-1)^{n+1}$ a proto vychází (provésti podrobně!)

$$C = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n+3)]-(n-1)(n+1)} = (-1)^{\frac{1}{2}[(n-1)(n-2)]},$$

jak bylo dokázati.

Poznámka. Pěkným způsobem lze determinant C_n vypočísti, násobíme-li jej determinantem Vandermondeovým ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ značí stále kořeny rovnice $x^n - 1 = 0$)

$$I = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & x_1^2, & \ldots, & x_1^{n-1} \\ 1, & x_2, & x_2^2, & \ldots, & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & x_n, & x_n^2, & \ldots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Doporučuji provésti podrobně!

d) *Kontinuant*

je determinant tvaru:

$$K_n = \begin{vmatrix} b_1, & a_2, & 0, & 0, & 0, \ldots, 0, & 0 \\ -1, & b_2, & a_3, & 0, & 0, \ldots, 0, & 0 \\ 0, & -1, & b_3, & a_4, & 0, \ldots, 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & b_4, & a_5, \ldots, 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1, & b_5, \ldots, 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \ldots, b_{n-1}, & a_n \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \ldots, -1, & b_n \end{vmatrix}. \qquad (29)$$

Vedle označení K_n užijeme pro tento determinant také názorného symbolu $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ a rozvedeme jej (užitím Laplaceovy věty) podle prvých ν sloupců. Z těchto ν sloupců je možno vybrati celkem tyto nenulové ν-řadové determinanty:

Determinant obsahující elementy řádků $1, 2, \ldots, \nu$-tého; je to zřejmě $(b_1, b_2, \ldots, b_\nu)$ a patří k němu v K_n doplněk $(b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \ldots, b_n)$.

Determinant ze řádků o pořadových číslech $1, 2, \ldots,$

$\nu - 1, \nu + 1$. Má hodnotu $-(b_1, b_2, \ldots, b_{\nu-1})$ a patří k němu doplněk $-a_{\nu+1}(b_{\nu+2}, b_{\nu+3}, \ldots, b_n)$.

Determinant ze řádků $2, 3, \ldots, \nu + 1$; není třeba jej bráti v úvahu, protože k němu patří nulový doplněk.

Máme tedy pro daný kontinuant redukční vztah

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_\nu) \cdot (b_{\nu+1}, \ldots, b_n) + \\ + a_{\nu+1}(b_1, b_2, \ldots, b_{\nu-1})(b_{\nu+2}, \ldots, b_n); \\ \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{30}$$

Pro $\nu = n - 1$ dostáváme odtud přímo rekurentní relaci pro K_n ve tvaru

$$K_n = b_n K_{n-1} + a_n K_{n-2}; \; K_0 = 1. \tag{31}$$

Poznámky. 1. Pro $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 1$ máme t. zv. jednoduchý kontinuant (*Sylvester*, Philos. Magazine, 1853). Je-li mimoto také ještě $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$, máme případ zvláště jednoduchý. Vzorec (31) zní pak

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2}, \tag{31'}$$

takže pro řadu $K_1, K_2, K_3, \ldots$ dostáváme

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots \tag{31''}$$

Je to známá řada *Fibonacciova* (Lionardo Pisanus, naroz. 1175).

2. Budiž $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$ a $n = 2\nu$. Tu nabude vzorec (30) tvaru

$$K_{2\nu} = K_\nu^2 + K_{\nu-1}^2. \tag{30'}$$

Srovnej s tím vnitřní strukturu řady (31″).

3. *Sblížené hodnoty řetězového zlomku*

$$b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \ldots + \cfrac{a_n}{b_n}}}}$$

jsou zlomky, jejichž čitatele i jmenovatele lze vyjádřiti ve tvaru (29). Ověřte na př. pro $n = 5$.

e) *Determinant reciproký*

k danému determinantu $A = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ je determinant a, jehož obecný prvek α_{ik} je roven doplňku A_{ik} elementu a_{ik} v determinantu A. Je to tedy determinant

$$a = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, & \ldots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23}, & \ldots, & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & A_{n3}, & \ldots, & A_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (32)$$

Jeho hodnotu najdeme nejsnáze tak, že jej násobíme původním determinantem A. Výsledkem bude determinant $|c_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ takový, že

$$c_{ik} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn};$$
$$i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Podle vzorců (12) jest však $c_{ik} = 0$ pro všechna $i \neq k$ a pouze elementy hlavní $c_{ii} = A$, takže má $|c_{ik}|$ všechny prvky nulové, až na elementy hlavní úhlopříčky. Ty jsou navzájem stejné a rovny A, takže máme $|c_{ik}| = a \,.\, A = A^n$ a odtud v případě $A \neq 0$

$$a = A^{n-1}. \qquad (33)$$

Tento vzorec zůstává v platnosti i pro $A = 0$, jak ukážeme později.

Také pro výpočet minorů determinantu a reciprokého k A lze udati poměrně jednoduché pravidlo. Libovolný minor m determinantu a budiž sestaven z elementů řádků s pořadovými čísly $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqq n$ a sloupců $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leqq n$ a m_1 budiž jeho minor přidružený v a. Násobme si po řádcích determinant A s tím, který vznikne z a, když hlavní elementy subdeterminantu m_1 nahradíme vesměs číslem 1, ostatní pak prvky determinantu a stojící v řádcích, z nichž je vzat m_1, nulami. Výsledkem bude (v. věta Laplaceova) součin $(-1)^{S(i)+S(k)} mA$ ve tvaru determinantu $|c_{\varrho\sigma}|$; $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$, pro jehož obecný element máme

$$c_{\varrho\sigma} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\varrho\nu} \alpha_{\sigma\nu}; \tag{a}$$

zde je $\alpha_{\sigma\nu}$ obecný prvek determinantu, jímž A násobíme a jehož konstrukci jsme právě popsali. Pokud je σ rovno některému z čísel $i_1, i_2, \ldots i_r$, jest $\alpha_{\sigma\nu} = A_{\sigma\nu}$, takže máme vzorec $c_{\varrho\sigma} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\varrho\nu} A_{\sigma\nu}$ pro $\sigma = i_1, i_2, \ldots, i_r$ a ve smyslu vztahů (12) lze psáti:

$$\begin{gathered} c_{\sigma\sigma} = A, \; c_{\varrho\sigma} = 0 \text{ pro } \varrho \neq \sigma; \\ \varrho = 1, 2, \ldots, n, \; \sigma = i_1, i_2, \ldots, i_r. \end{gathered} \tag{b}$$

Jestliže je σ rovno některému z čísel $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_{n-r}$ zůstavších v řadě $1, 2, \ldots, n$ po vyškrtání čísel $i_1, i_2, \ldots, i_r$, tedy na př. $\sigma = \iota_\lambda$, je pouze $\alpha_{\iota_\lambda \varkappa_\lambda} = 1$, jinak $\alpha_{\iota_\lambda \nu} = 0$; $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-r}$ jsou čísla zbyvší v řadě $1, 2, \ldots, n$ po vyškrtání $k_1, k_2, \ldots, k_r$. Máme tedy

$$c_{\varrho\iota_\lambda} = a_{\varrho\varkappa_\lambda}; \; \varrho = 1, 2, \ldots, n, \; \lambda = 1, 2, \ldots, n - r. \tag{c}$$

Je tudíž dotčený součin vyjádřen determinantem n-řadovým této vnitřní struktury: Ve sloupcích s pořadovými čísly $i_1, i_2, \ldots, i_r$ jsou všechny elementy rovny nule, až na hlavní, mající vesměs hodnotu A. V ostatních sloupcích stojí elementy původního determinantu A v pořadí udaném vzorci (c). Rozvedením podle sloupců $i_1, i_2, \ldots, i_r$ pak nacházíme výsledek

$$m = A^{r-1} \cdot (-1)^{S(i)+S(k)} \begin{vmatrix} a_{\iota_1\varkappa_1}, & a_{\iota_1\varkappa_2}, & \ldots, a_{\iota_1\varkappa_{n-r}} \\ a_{\iota_2\varkappa_1}, & a_{\iota_2\varkappa_2}, & \ldots, a_{\iota_2\varkappa_{n-r}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\iota_{n-r}\varkappa_1}, & a_{\iota_{n-r}\varkappa_2}, & \ldots, a_{\iota_{n-r}\varkappa_{n-r}} \end{vmatrix}, \tag{34}$$

který lze zřejmě vysloviti takto: A^{1-r}-násobná hodnota r-řadového minoru m determinantu a reciprokého k A je rovna doplňku v determinantu A onoho minoru, který je v A s m stejnolehlý.

Poznámka. Determinanty tohoto druhu se zabýval už Cauchy. S jejich aplikacemi se setkáváme na př. v analytické geometrii.

f) *Determinant orthogonální.*

Determinant

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

nazýváme orthogonálním, platí-li mezi jeho elementy vztahy

$$\begin{gathered} a_{r1}a_{s1} + a_{r2}a_{s2} + \ldots + a_{rn}a_{sn} = 0 \\ \text{pro } r \neq s;\ r, s = 1, 2, \ldots, n \\ a_{r1}^2 + a_{r2}^2 + \ldots + a_{rn}^2 = A_r^2 \\ \text{pro } r = 1, 2, \ldots, n; \end{gathered} \tag{35}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou při tom určitá čísla (ve zvláštním případě rovna 1).

Hodnotu takového determinantu určíme snadno tím, že jej umocníme dvěma. Všechny elementy čtverce A^2 budou podle vzorců (35) nulové, až na prvky hlavní. Ty mají hodnoty $c_{ii} = A_i^2$, takže dostaneme

$$A^2 = A_1^2 A_2^2 \ldots A_n^2$$

a tedy dále

$$A = \pm A_1 A_2 \ldots A_n. \tag{36}$$

S orthogonálními determinanty se zhusta setkáváme v analytické geometrii a v theorii kvadratických forem. Jejich podrobnějšími vlastnostmi se budeme zabývati později.

g) *Determinant Hermiteův.*

Jsou-li hlavní prvky a_{ii} čísla reálná, každé dva sdružené prvky (t. j. a_{ki}, a_{ik}) pak čísla komplexně sdružená, nazýváme determinant $|a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ Hermiteovým. Označíme-li, jak jest obvyklé, znakem $\bar{a}_{ik}$ číslo komplexně sdružené s a_{ik}, je tedy $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$ a Hermiteův determinant se objeví ve tvaru

$$H_n = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, & a_{1n} \\ \bar{a}_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots, & a_{2n} \\ \bar{a}_{13}, & \bar{a}_{23}, & a_{33}, & \ldots, & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{a}_{1n}, & \bar{a}_{2n}, & \bar{a}_{3n}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{37}$$

Hermiteův determinant má vždy reálnou hodnotu.

Důkaz. Nahraďme v H_n všechny elementy jejich hodnotami komplexně sdruženými. Tím přejde, jak známo z nauky o komplexních číslech, veličina H_n (t. j. hodnota Hermiteova determinantu) ve svou komplexně sdruženou $\bar{H}_n$. Na druhé straně vznikne však uvedeným nahrazením determinant nový, jehož ν-tý sloupec je tentýž, jako byl dříve ν-tý řádek původního determinantu. Lze si tedy představiti, že nový determinant $\bar{H}_n$ vznikl z daného H_n tím, že jsme v něm zaměnili řádky za sloupce a naopak. Takové dva determinanty mají však stejnou hodnotu (v. pozn. k definici 4.), takže dvě komplexně sdružená čísla H_n, $\bar{H}_n$ jsou si rovna. To je však možno jenom tenkráte, jsou-li obě reálná, čímž je věta dokázána.

Doplňky dvou sdružených prvků a_{ik}, a_{ki} v Hermiteově determinantu jsou determinanty o hodnotách komplexně sdružených.

Důkaz. Uvažujme napřed o subdeterminantech M_{ik} a M_{ki}; ν-tý řádek prvého jest: $a_{\nu 1}, a_{\nu 2}, \ldots, a_{\nu, k-1}, a_{\nu, k+1}, \ldots, a_{\nu n}$ a ϱ-tý jeho sloupec: $a_{1\varrho}, a_{2\varrho}, \ldots, a_{i-1,\varrho}, a_{i+1,\varrho}, \ldots, a_{n\varrho}$.

U determinantu M_{ki} je pak ϱ-tý řádek: $a_{\varrho 1}, a_{\varrho 2}, \ldots, a_{\varrho, i-1}, a_{\varrho, i+1}, \ldots, a_{\varrho n}$ a ν-tý sloupec: $a_{1\nu}, a_{2\nu}, \ldots, a_{k-1\nu}, a_{k+1,\nu}, \ldots, a_{n\nu}$. Tato fakta platí, pokud je $\nu \leqq i-1$, $\varrho \leqq k-1$. Pro $\nu \geqq i$, $\varrho \geqq k$ musíme indexy ν, ϱ nahraditi o 1 většími, takže na př. bude ϱ-tý řádek minoru M_{ki} pro $\varrho \geqq k$ míti tvar: $a_{\varrho+1,1}, a_{\varrho+1,2}, \ldots, a_{\varrho+1,i-1}, a_{\varrho+1,i+1}, \ldots, a_{\varrho+1,n}$. Vyměníme-li nyní v M_{ki} řádky a sloupce navzájem, zůstane M_{ki}, pokud jde o hodnotu, beze změny, jeho ν-tý sloupec se však stane ν-tým řádkem a ϱ-tý řádek ϱ-tým sloupcem. Bude tedy na př. pro $\nu \leqq i-1$ řádek ν-tý tvarově změněného minoru M_{ki}: $a_{1\nu}, a_{2\nu}, \ldots, a_{k-1,\nu}, a_{k+1,\nu}, \ldots, a_{n\nu}$. Protože pak byl původní determinant podle předpokladu Hermiteův, platí $a_{1\nu} = \bar{a}_{\nu 1}, a_{2\nu} = \bar{a}_{\nu 2}, \ldots$ a lze tedy ν-tý řádek subdeterminantu M_{ki} psáti ve tvaru: $\bar{a}_{\nu 1}, \bar{a}_{\nu 2}, \ldots, \bar{a}_{\nu, k-1}, \bar{a}_{\nu, k+1}, \ldots, \bar{a}_{\nu n}$, takže je „komplexně sdružen“ s ν-tým řádkem subdeterminantu M_{ik}. Stejně lze tuto skutečnost ukázati i o sloupcích, z čehož je patrno, že M_{ki} dostaneme z M_{ik} jednoduše tak, že všechny prvky minoru M_{ik} nahradíme komplexně sdruženými. Jsou tedy dva sdružené minory M_{ik}, M_{ki} čísla komplexně sdružená a proto i doplňky A_{ik}, A_{ki}, jež z nich vzniknou násobením touže hodnotou $(-1)^{i+k}$. Tím je tvrzení dokázáno a plyne z něho na př. skutečnost, že determinant reciproký k Hermiteovu je opět typu Hermiteova.

Poznámky. 1. Speciálními typy determinantu právě probraného jsou determinant souměrný a polosouměrný, o nichž se zmíníme blíže ve zvláštních odstavcích.

2. Podrobněji studoval determinant H_n po prvé *Hermite* (Journ. f. Math., 1854).

h) *Determinant souměrný (symetrický).*

Jsou-li v Hermiteově determinantu *každé dva sdružené elementy stejné*, t. j. $a_{ik} = a_{ki}$, tudíž reálné, jmenuje se tento determinant symetrický. Doplňky dvou sdružených prvků jsou tu stejné (dokaž podrobně pomocí vlastností obdobných doplňků v determinantu H_n), takže determinant reciproký k souměrnému je opět souměrný.

Čtverec každého determinantu je determinantem souměrným.

Důkaz. Podle věty 9. vzorce (14) je obecný element c_{ik} determinantu vzniklého zdvojmocněním $|a_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$:

$$c_{ik} = a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + \ldots + a_{in}a_{kn}; \tag{38}$$

je tedy roven elementu sdruženému c_{ki} a věta je tím dokázána.

Studiem souměrných determinantů se zabývali *Cayley* (Journ. f. Math., 1846) a *Frobenius* (Journ. f. Math., 1877). Jsou důležité na př. v analytické geometrii ploch a v nebeské mechanice.

k) *Determinant polosouměrný.*

Specialisujme Hermiteův determinant (37) tím způsobem, že hlavní elementy $a_{rr} = 0$, $r = 1, 2, \ldots, n$, kdežto ostatní a_{rs} budou ryze imaginární: $a_{rs} = \mathrm{i}\alpha_{rs}$, $a_{sr} = \bar{a}_{rs} = -\mathrm{i}\alpha_{rs}$; vznikne tak determinant I_n, z jehož všech elementů vytýkáme faktor i a dostaneme

$$I_n = \mathrm{i}^n Q_n, \tag{39}$$

kdež determinant

$$Q_n = \begin{vmatrix} 0, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & \ldots, \alpha_{1n} \\ -\alpha_{12}, & 0, & \alpha_{23}, & \ldots, \alpha_{2n} \\ -\alpha_{13}, & -\alpha_{23}, & 0, & \ldots, \alpha_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\alpha_{1n}, & -\alpha_{2n}, & -\alpha_{3n}, & \ldots, 0 \end{vmatrix} \tag{40}$$

se nazývá polosouměrným determinantem reálných prvků α_{rs}.

Z rovnice (39) plyne pro Q_n první zajímavý důsledek: I_n je číslo reálné jakožto hodnota Hermiteova determinantu, Q_n je reálné jakožto hodnota determinantu s reálnými prvky.

Je-li n liché, je však i^n ryze imaginární, takže vztah (39) nutně žádá, aby $Q_n = 0$. Je tedy *polosouměrný determinant lichého stupně roven nule.*

O polosouměrných determinantech sudého stupně si později ukážeme, že jsou kladné a že se dají vyjádřiti jako čtverce jistých celistvých racionálních funkcí svých prvků (t. zv. Pfaffiánů, čili polodeterminantů).

Označme si subdeterminanty dvou sdružených prvků a_{rs}, a_{sr} v determinantu I_n symboly M_{rs}, M_{sr} a korespondující minory polosouměrného determinantu Q_n znaky Q_{rs}, Q_{sr}. Z theorie Hermiteových determinantů víme, že čísla M_{rs} a M_{sr} jsou sdružená, t. j. $M_{sr} = \overline{M}_{rs}$; nyní však je patrně $M_{rs} = i^{n-1}Q_{rs}$, $M_{sr} = i^{n-1}Q_{sr}$ a právě uvedená rovnost se dá psáti ve tvaru $i^{n-1}Q_{sr} = (-i)^{n-1}Q_{rs} = (-1)^{n-1}i^{n-1}Q_{rs}$, čili

$$Q_{sr} = (-1)^{n-1}Q_{rs}. \tag{41}$$

Z tohoto vzorce vyplývá: *Determinant reciproký k polosouměrnému determinantu lichého stupně je souměrný, reciproký k polosouměrnému determinantu stupně sudého je opět polosouměrný.*

Polosouměrnými determinanty se zabývali na př. *Cayley*, *Mertens* a *Frobenius* (Journ. f. Math., 1849, 1877). Jejich nejznámější použití se týká řešení Pfaffova problému v theorii diferenciálních rovnic.

l) *Determinant vroubený.*

Připojíme-li k danému determinantu $A = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ na pravé straně r sloupců a dole r řádků tak, že připojené řady mají společné elementy nulové, dostaneme z něho determinant nový, který byl označen přiléhavým jménem „vroubený". Jde tedy o determinant

$$R_r = \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n}, & y_{11}, & y_{12}, & \ldots, y_{1r} \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{n1}, \ldots, a_{nn}, & y_{n1}, & y_{n2}, & \ldots, y_{nr} \\ x_{11}, \ldots, x_{1n}, & 0, & 0, & \ldots, 0 \\ x_{21}, \ldots, x_{2n}, & 0, & 0, & \ldots, 0 \\ \ldots\ldots & & & \\ x_{r1}, \ldots, x_{rn}, & 0, & 0, & \ldots, 0 \end{vmatrix}. \tag{42}$$

Při jeho výpočtu budeme rozeznávat tři případy:

α) $r = n$; rozvedeme-li R_r podle posledních r řádků (v. věta 8.), dostaneme ihned vzorec

$$R_n = (-1)^n . X . Y, \tag{43}$$

kde značí X, Y determinanty z prvků $x_{\varrho\sigma}$, $y_{\varrho\sigma}$.

β) $r > n$; věta 8. ukazuje ihned, provádíme-li opět rozvoj podle posledních r řádků, že jest

$$R_r = 0. \tag{44}$$

γ) $r < n$; rozvádíme opět podle posledních r řádků. Obecný člen tohoto rozvoje bude

$$(-1)^{nr+\frac{1}{2}[r(r+1)]+\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r} . \begin{vmatrix} x_{1\nu_1}, & x_{1\nu_2}, & \ldots, x_{1\nu_r} \\ x_{2\nu_1}, & x_{2\nu_2}, & \ldots, x_{2\nu_r} \\ \ldots\ldots & & \\ x_{r\nu_1}, & x_{r\nu_2}, & \ldots, x_{r\nu_r} \end{vmatrix} .$$

$$. \begin{vmatrix} a_{1\sigma_1}, & a_{1\sigma_2}, & \ldots, a_{1\sigma_{n-r}}, & y_{11}, & \ldots, y_{1r} \\ a_{2\sigma_1}, & a_{2\sigma_2}, & \ldots, a_{2\sigma_{n-r}}, & y_{21}, & \ldots, y_{2r} \\ \ldots\ldots & & & & \\ a_{n\sigma_1}, & a_{n\sigma_2}, & \ldots, a_{n\sigma_{n-r}}, & y_{n1}, & \ldots, y_{nr} \end{vmatrix},$$

kde $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_r$ jsou libovolná čísla vybraná z řady $1, 2, \ldots, n$ a $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_{n-r}$ čísla, která v ní po tomto vybrání zbudou. Je zřejmo, že celý rozvoj determinantu R_r bude míti $\binom{n}{r}$ sčítanců právě uvedeného tvaru.

Druhý determinant, vystupující jako faktor v obecném členu rozvoje, rozveďme dále podle posledních r sloupců. Obecný člen tohoto druhého rozvoje bude míti tvar

$$(-1)^{r(n-r)+\frac{1}{2}[r(r+1)]+\varrho_1+\varrho_2+\ldots+\varrho_r} \cdot \begin{vmatrix} y_{\varrho_1 1}, & y_{\varrho_1 2}, & \ldots, & y_{\varrho_1 r} \\ y_{\varrho_2 1}, & y_{\varrho_2 2}, & \ldots, & y_{\varrho_2 r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{\varrho_r 1}, & y_{\varrho_r 2}, & \ldots, & y_{\varrho_r r} \end{vmatrix} .$$

$$\cdot \begin{vmatrix} a_{\tau_1\sigma_1}, & a_{\tau_1\sigma_2}, & \ldots, & a_{\tau_1\sigma_{n-r}} \\ a_{\tau_2\sigma_1}, & a_{\tau_2\sigma_2}, & \ldots, & a_{\tau_2\sigma_{n-r}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\tau_{n-r}\sigma_1}, & a_{\tau_{n-r}\sigma_2}, & \ldots, & a_{\tau_{n-r}\sigma_{n-r}} \end{vmatrix},$$

kde $\varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_r$ a $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n-r}$ jsou čísla stejných vlastností, jako dříve systémy (ν) a (σ). Takových členů bude celkem $\binom{n}{r}$, takže se obecný člen původního rozvoje dá psáti ve tvaru

$$(-1)^{S(\nu)+S(\varrho)-r} \cdot \begin{vmatrix} x_{1\nu_1}, & x_{1\nu_2}, & \ldots, & x_{1\nu_r} \\ x_{2\nu_1}, & x_{2\nu_2}, & \ldots, & x_{2\nu_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{r\nu_1}, & x_{r\nu_2}, & \ldots, & x_{r\nu_r} \end{vmatrix} .$$

$$\cdot \begin{vmatrix} y_{\varrho_1 1}, & y_{\varrho_1 2}, & \ldots, & y_{\varrho_1 r} \\ y_{\varrho_2 1}, & y_{\varrho_2 2}, & \ldots, & y_{\varrho_2 r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{\varrho_r 1}, & y_{\varrho_r 2}, & \ldots, & y_{\varrho_r r} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{\tau_1\sigma_1}, & \ldots, & a_{\tau_1\sigma_{n-r}} \\ a_{\tau_2\sigma_1}, & \ldots, & a_{\tau_2\sigma_{n-r}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\tau_{n-r}\sigma_1}, & \ldots, & a_{\tau_{n-r}\sigma_{n-r}} \end{vmatrix}, \qquad \text{(a)}$$

kde $S(\nu) = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r$, $S(\varrho) = \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_r$.

Sloupce o pořadových číslech $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ a řádky s pořadovými indexy $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_r$ určují svými společnými prvky v determinantu A minor, jehož jest poslední faktor členu (a) minorem přidruženým — označíme jej znakem $M_{(\nu)(\varrho)}$. Výraz $(-1)^{S(\nu)+S(\varrho)}M_{(\nu)(\varrho)}$ označme symbolem $A_{(\nu)(\varrho)}$; je to ve smyslu definice 5. doplněk minoru určeného společnými prvky řad, z nichž jsou vybrány subdeterminanty $X_{(\nu)}$, $Y_{(\varrho)}$ ve vztahu (a).

Máme tedy v případě $r < n$ výsledek

$$R_r = (-1)^r \Sigma X_{(\nu)} Y_{(\varrho)} \cdot A_{(\nu)(\varrho)}. \qquad (45)$$

Součet zde vystupující má podle předchozích úvah celkem $\binom{n}{r}^2$ sčítanců.

Pěkným příkladem aplikace poznatků o vroubených determinantech je skutečný výpočet součinu dvou matic, jehož výměr jsme podali v definici 6. Postupujeme při tom zcela obdobně, jako při důkazu věty 9. o násobení dvou determinantů, pouze místo determinantu tam užitého vezmeme v úvahu obecnější:

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 1, & 0, & \ldots, & 0, & b_{11}, & b_{21}, & \ldots, & b_{m1} \\ 0, & 1, & \ldots, & 0, & b_{12}, & b_{22}, & \ldots, & b_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & b_{1n}, & b_{2n}, & \ldots, & b_{mn} \end{vmatrix}.$$

Způsobem naprosto stejným, jaký byl volen ve větě 9., docházíme k výsledku, že řádkový součin obou matic $\|a_{ik}\|$, $\|b_{ik}\|$, t. j. determinant $|c_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, m$, jak byl definován výměrem 6., souvisí s hodnotou determinantu C_1 vztahem

$$|c_{ik}| = (-1)^{m(m+n)} C_1.$$

Upravme nyní determinant C_1 tak, že jeho $(m + \nu)$-tý řádek přemístíme na místo ν-té a to postupně pro $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Determinant C_2, který tím dostaneme, je pak vroubený typu (42) a má v našem případě tvar jednoduchý:

$$C_2 = (-1)^{mn} C_1 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots, & 0, & b_{11}, & b_{21}, & \ldots, & b_{m1} \\ 0, & 1, & \ldots, & 0, & b_{12}, & b_{22}, & \ldots, & b_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & b_{1n}, & b_{2n}, & \ldots, & b_{mn} \\ a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{vmatrix}.$$

Máme tedy řádkový součin $|c_{ik}|$ matic $\|a_{ik}\|$, $\|b_{ik}\|$ vyjádřen vroubeným determinantem C_2 takto:

$$|c_{ik}| = (-1)^{m^2} C_2. \qquad (46)$$

Podle výsledků o vroubených determinantech, vyjádřených vzorci (43) a (44), můžeme říci:

Součin dvou matic $\|a_{ik}\|$, $\|b_{ik}\|$ s počtem řádků stejným jako je počet sloupců ($m = n$) je roven součinu jejich determinantů. Mají-li obě matice více řádků než sloupců ($m > n$), je jejich součin roven nule.

Pro $m < n$ užijeme vzorce (45); z doplňků $A_{(\nu)(\varrho)}$ jsou ty, kde systémy (ν) a (ϱ) jsou navzájem různé, rovny nule, kdežto ty, v nichž $(\nu) = (\varrho)$, t. j. $\nu_1 = \varrho_1, \nu_2 = \varrho_2, \ldots, \nu_m = \varrho_m$, mají hodnotu 1. Píšeme-li místo $X_{(\nu)}$, $Y_{(\varrho)}$ do vzorce (45) přiměřeně k našemu případu znaky $A_{(\nu)}$, $B_{(\varrho)}$, máme pro C_2 hodnotu $C_2 = (-1)^m . \Sigma A_{(\nu)} B_{(\nu)}$ a tedy pro součin $|c_{ik}|$ obou matic $\|a_{ik}\|$, $\|b_{ik}\|$ vztah:

$$|c_{ik}| = \Sigma A_{(\nu)} B_{(\nu)}, \qquad (47)$$

kde se sčítání děje přese všech $\binom{n}{m}$ kombinací m-té třídy z prvků $1, 2, \ldots, n$. Rozvážíme-li si přesně význam vzorce (47), nahlédneme, že se dá vyjádřiti slovy takto:

Součin dvou matic o společném počtu řádků m a společném počtu n sloupců, kde $m < n$, určíme tak, že každý m-řadový determinant matice prvé násobíme stejnolehlým (t. j. vzatým ze stejně číslovaných sloupců) determinantem matice druhé a všech těchto $\binom{n}{m}$ součinů sečteme.

Poznámky. 1. Determinant

$$\bar{R}_1 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & y_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & y_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}, & y_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & t \end{vmatrix} \qquad (48)$$

rozepíšeme takto:

$$\overline{R}_1 = \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n}, & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}, \ldots, a_{nn}, & 0 \\ x_1, \ \ldots, x_n, & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n}, & y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}, \ldots, a_{nn}, & y_n \\ x_1, \ \ldots, x_n, & 0 \end{vmatrix} = At + R_1; \quad (49)$$

R_1 nalezneme snadno ze vzorce (45).

2. Jsou-li společné elementy vroubících řádků a sloupců nikoli nuly, nýbrž tvoří matici o řádcích $t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{1r}$; $t_{21}, t_{22}, \ldots, t_{2r}$; ...; $t_{r1}, t_{r2}, \ldots, t_{rr}$, máme případ determinantu ovroubeného obecně — označíme jej znakem $\overline{R}_r$. Takovýto determinant můžeme vždycky převésti na tvar, kde vroubící řádky tvoří prvých r řádků a vroubící sloupce prvých r sloupců, takže subdeterminant $T = |t_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \ldots, r$ stojí v tomto determinantu — označme jej Φ_r — vlevo nahoře. Na determinant Φ_r lze aplikovati větu Sylvesterovu a máme

$$\Phi_r \,.\, T^{n-1} = |S_{\lambda\nu}|; \ \lambda, \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

kde jest

$$S_{\lambda\nu} = \begin{vmatrix} t_{11}, \ \ldots, t_{1r}, & x_{1\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ t_{r1}, \ \ldots, t_{rr}, & x_{r\nu} \\ y_{\lambda 1}, \ldots, y_{\lambda r}, & a_{\lambda\nu} \end{vmatrix}. \quad (50)$$

Protože pak jest $\Phi_r = \overline{R}_r$ (dokáže se snadno pomocí věty 3.), dávají vztahy (50) přímo vzorec pro výpočet obecně vroubeného determinantu. Snadno lze tento výpočet provést ovšem jen pro malé hodnoty n, r.

Obecné pravidlo pro výpočet determinantu obecně vroubeného je značně složité. Najdeme je, používajíce pravidel o násobení determinantů a o determinantech reciprokých k daným, takto: Determinant obecně vroubený

$$\overline{R}_r = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & y_{11}, & y_{12}, & \ldots, & y_{1r} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & y_{21}, & y_{22}, & \ldots, & y_{2r} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}, & y_{n1}, & y_{n2}, & \ldots, & y_{nr} \\ x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n}, & t_{11}, & t_{12}, & \ldots, & t_{1r} \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2n}, & t_{21}, & t_{22}, & \ldots, & t_{2r} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ x_{r1}, & x_{r2}, & \ldots, & x_{rn}, & t_{r1}, & t_{r2}, & \ldots, & t_{rr} \end{vmatrix} \tag{51}$$

násobme novým

$$U = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots, & A_{nn}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & T_{11}, & T_{12}, & \ldots, & T_{1r} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & T_{21}, & T_{22}, & \ldots, & T_{2r} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & T_{r1}, & T_{r2}, & \ldots, & T_{rr} \end{vmatrix},$$

kde A_{ik}, $T_{\iota\varkappa}$ značí doplňky prvků a_{ik}, $t_{\iota\varkappa}$ v determinantech $A = |a_{ik}|$, $T = |t_{ik}|$. Dostaneme

$$U \,.\, \overline{R}_r =$$

$$= \begin{vmatrix} A, & 0, & \ldots, & 0, & (y_1T_1), & (y_1T_2), & \ldots, & (y_1T_r) \\ 0, & A, & \ldots, & 0, & (y_2T_1), & (y_2T_2), & \ldots, & (y_2T_r) \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & \ldots, & A, & (y_nT_1), & (y_nT_2), & \ldots, & (y_nT_r) \\ (x_1A_1), & (x_1A_2), & \ldots, & (x_1A_n), & T, & 0, & \ldots, & 0 \\ (x_2A_1), & (x_2A_2), & \ldots, & (x_2A_n), & 0, & T, & \ldots, & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ (x_rA_1), & (x_rA_2), & \ldots, & (x_rA_n), & 0, & 0, & \ldots, & T \end{vmatrix},$$

při čemž symbol $(x_\varrho A_\nu)$ je zkratka za výraz: $x_{\varrho1}A_{\nu1} + x_{\varrho2}A_{\nu2} + \ldots + x_{\varrho n}A_{\nu n}$ a analogicky $(y_\sigma T_\tau) = y_{\sigma1}T_{\tau1} + y_{\sigma2}T_{\tau2} + \ldots + y_{\sigma r}T_{\tau r}$.

Determinant $U \,.\, \overline{R}_r$ rozvedeme podle prvých n řádků. Z řady čísel $1, 2, \ldots, n, n + 1, \ldots, n + r$ vezmeme libovolných n: $1 \leqq \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_{n-\varkappa} \leqq n < n + 1 \leqq n + \varrho_1 <$ $< \ldots < n + \varrho_\varkappa \leqq n + r$ a zvolíme je za pořadová čísla sloupců minoru determinantu $U . \bar{R}_r$, jehož řádky jsou tvořeny z prvních n řádek determinantu $U . \bar{R}_r$. Rozvedeme-li tento minor podle prvých $n - \varkappa$ sloupců (rozmyslete si věc ve smyslu úvah paragrafu 3. podrobně), nahlédneme snadno, že jeho hodnota je vyjádřena číslem

$$(-1)^{S(\nu)+\frac{1}{2}(n-\varkappa)(n-\varkappa+1)} . \begin{vmatrix} (y_{\bar{\nu}_1}T_{\varrho_1}), \ldots, (y_{\bar{\nu}_1}T_{\varrho_\varkappa}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (y_{\bar{\nu}_\varkappa}T_{\varrho_1}), \ldots, (y_{\bar{\nu}_\varkappa}T_{\varrho_\varkappa}) \end{vmatrix} . A^{n-\varkappa};$$

$\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \ldots, \bar{\nu}_\varkappa$ jsou čísla, která zbudou v řadě $1, 2, \ldots, n$ po vyškrtání čísel $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{n-\varkappa}$.

Doplněk tohoto subdeterminantu v determinantu $U . \bar{R}_r$ je minor přidružený k němu v $U . \bar{R}_r$ a násobený výrazem $(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)+S(\nu)+\varkappa n+S(\varrho)}$. Tento minor je obsažen v posledních r řádcích a ve sloupcích s pořadovými čísly $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \ldots,$ $\bar{\nu}_\varkappa, n + \bar{\varrho}_1, n + \bar{\varrho}_2, \ldots, n + \bar{\varrho}_{r-\varkappa}$, kde $\bar{\varrho}_1, \varrho_2, \ldots, \bar{\varrho}_{r-\varkappa}$ jsou čísla zůstavší v řadě $1, 2, \ldots, r$ po vyškrtání čísel $\varrho_1, \varrho_2, \ldots,$ $\varrho_\varkappa$. Rozvedeme-li tento minor podle posledních $r - \varkappa$ sloupců, poznáme, že má hodnotu (proveď podrobně)

$$(-1)^{S(\varrho)+\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa+1)} . \begin{vmatrix} (x_{\varrho_1}A_{\bar{\nu}_1}), \ldots, (x_{\varrho_1}A_{\bar{\nu}_\varkappa}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_{\varrho_\varkappa}A_{\bar{\nu}_1}), \ldots, (x_{\varrho_\varkappa}A_{\bar{\nu}_\varkappa}) \end{vmatrix} . T^{r-\varkappa};$$

$$S(\nu) = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{n-\varkappa}, \quad S(\varrho) = \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_\varkappa .$$

Po jednoduchém výpočtu dostaneme podle Laplaceovy věty vyjádření

$$U . \bar{R}_r = \Sigma(-1)^\varkappa A^{n-\varkappa} T^{r-\varkappa} .$$

$$\begin{vmatrix} (x_{\varrho_1}A_{\bar{\nu}_1}), \ldots, (x_{\varrho_1}A_{\bar{\nu}_\varkappa}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_{\varrho_\varkappa}A_{\bar{\nu}_1}), \ldots, (x_{\varrho_\varkappa}A_{\bar{\nu}_\varkappa}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (y_{\bar{\nu}_1}T_{\varrho_1}), \ldots, (y_{\bar{\nu}_1}T_{\varrho_\varkappa}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (y_{\bar{\nu}_\varkappa}T_{\varrho_1}), \ldots, (y_{\bar{\nu}_\varkappa}T_{\varrho_\varkappa}) \end{vmatrix} . \qquad \text{(b)}$$

Determinanty, které se v tomto součinu vyskytují, jsou však podle definice 6. a vzhledem ke stavbě svých prvků každý součinem dvou matic: prvý vzniká násobením matic

$$\left\| \begin{matrix} x_{\varrho_1 1}, & x_{\varrho_1 2}, & \ldots, & x_{\varrho_1 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{\varrho_\varkappa 1}, & x_{\varrho_\varkappa 2}, & \ldots, & x_{\varrho_\varkappa n} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} A_{\bar\nu_1 1}, & A_{\bar\nu_1 2}, & \ldots, & A_{\bar\nu_1 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{\bar\nu_\varkappa 1}, & A_{\bar\nu_\varkappa 2}, & \ldots, & A_{\bar\nu_\varkappa n} \end{matrix} \right\|$$

a má tedy podle vzorce (47) hodnotu

$$\Sigma \begin{vmatrix} x_{\varrho_1\sigma_1}, & \ldots, & x_{\varrho_1\sigma_\varkappa} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{\varrho_\varkappa\sigma_1}, & \ldots, & x_{\varrho_\varkappa\sigma_\varkappa} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{\bar\nu_1\sigma_1}, & \ldots, & A_{\bar\nu_1\sigma_\varkappa} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{\bar\nu_\varkappa\sigma_1}, & \ldots, & A_{\bar\nu_\varkappa\sigma_\varkappa} \end{vmatrix}, \tag{c}$$

kde se sčítá přese všech $\binom{n}{\varkappa}$ kombinací $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\varkappa$ čísel $1, 2, \ldots, n$.

Podobně najdeme pro druhý z determinantů vztahu (b) výraz

$$\Sigma \begin{vmatrix} y_{\bar\nu_1\lambda_1}, & \ldots, & y_{\bar\nu_1\lambda_\varkappa} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{\bar\nu_\varkappa\lambda_1}, & \ldots, & y_{\bar\nu_\varkappa\lambda_\varkappa} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} T_{\varrho_1\lambda_1}, & \ldots, & T_{\varrho_1\lambda_\varkappa} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{\varrho_\varkappa\lambda_1}, & \ldots, & T_{\varrho_\varkappa\lambda_\varkappa} \end{vmatrix}, \tag{d}$$

při čemž se sčítání vztahuje na všechny $\binom{r}{\varkappa}$ kombinace $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varkappa$ $\varkappa$-té třídy z elementů $1, 2, \ldots, r$.

Uvažme ještě, že jsou determinanty, vystupující jako druhé faktory ve výrazech (c) a (d), reciproké k jistým minorům determinantů A, T a že se proto dají vyjádřiti ve tvaru

$$A^{\varkappa-1} . C_{\binom{\bar\nu_1, \ldots, \bar\nu_\varkappa}{\sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa}} \text{ resp. } T^{\varkappa-1} . D_{\binom{\varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa}{\lambda_1, \ldots, \lambda_\varkappa}};$$

při tom je $C_{\binom{\bar\nu_1, \ldots, \bar\nu_\varkappa}{\sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa}}$ doplňkem onoho subdeterminantu z A, jehož prvky jsou vzaty z řádků s pořadovými čísly $\bar\nu_1, \bar\nu_2, \ldots, \bar\nu_\varkappa$ a ze sloupců o pořadových číslech $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\varkappa$. Podobný význam má determinant $D_{\binom{\varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa}{\lambda_1, \ldots, \lambda_\varkappa}}$ vůči determinantu z T.

Dosadíme-li tyto všechny hodnoty a výsledky do relace (b), vychází nám tento vzorec pro výpočet $U \,.\, \overline{R}_r$:

$$U \,.\, \overline{R}_r = \Sigma(-1)^{\varkappa} A^{n-1} T^{r-1} . \left[\Sigma C_{\binom{\bar{\nu}_1, \ldots, \bar{\nu}_{\varkappa}}{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa}}} . \begin{vmatrix} x_{\varrho_1\sigma_1}, \ldots, x_{\varrho_1\sigma_{\varkappa}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{\varrho_{\varkappa}\sigma_1}, \ldots, x_{\varrho_{\varkappa}\sigma_{\varkappa}} \end{vmatrix} .\right.$$

$$\left. . \Sigma D_{\binom{\varrho_1, \ldots, \varrho_{\varkappa}}{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\varkappa}}} . \begin{vmatrix} y_{\bar{\nu}_1\lambda_1}, \ldots, y_{\bar{\nu}_1\lambda_{\varkappa}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{\bar{\nu}_{\varkappa}\lambda_1}, \ldots, y_{\bar{\nu}_{\varkappa}\lambda_{\varkappa}} \end{vmatrix} \right].$$

Protože však je podle theorie determinantů reciprokých $U = A^{n-1} T^{r-1}$, dostáváme pro výpočet obecně vroubeného determinantu $\overline{R}_r$ tento definitivní vzorec:

$$\overline{R}_r = \Sigma(-1)^{\varkappa} . \left[\Sigma C_{\binom{\bar{\nu}_1, \ldots, \bar{\nu}_{\varkappa}}{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa}}} \begin{vmatrix} x_{\varrho_1\sigma_1}, \ldots, x_{\varrho_1\sigma_{\varkappa}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{\varrho_{\varkappa}\sigma_1}, \ldots, x_{\varrho_{\varkappa}\sigma_{\varkappa}} \end{vmatrix} .\right.$$

$$\left. . \Sigma D_{\binom{\varrho_1, \ldots, \varrho_{\varkappa}}{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\varkappa}}} \begin{vmatrix} y_{\bar{\nu}_1\lambda_1}, \ldots, y_{\bar{\nu}_1\lambda_{\varkappa}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{\bar{\nu}_{\varkappa}\lambda_1}, \ldots, y_{\bar{\nu}_{\varkappa}\lambda_{\varkappa}} \end{vmatrix} \right]. \qquad (52)$$

Rozuměti jest mu takto: Poslední součet se provádí přes všechny kombinace $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\varkappa}$ z elementů $1, 2, \ldots, r$, takže má celkem $\binom{r}{\varkappa}$ sčítanců; prostřední součet jde přes všech $\binom{n}{\varkappa}$ kombinací $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\varkappa}$ čísel $1, 2, \ldots, n$. Má tedy výraz v lomené závorce celkem $\binom{r}{\varkappa}\binom{n}{\varkappa}$ sčítanců, z nichž každý má ještě volné indexy (t. j. takové, přes něž dosud nebylo sčítáno) $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \ldots, \bar{\nu}_{\varkappa}$ a $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\varkappa}$, jež jsou resp. libovolná kombinace $\varkappa$-té třídy z prvků $1, 2,, \ldots, n$ a z prvků $1, 2, \ldots, r$. Přes všechny tyto kombinace jest pak nutno prováděti prvý součet, který tedy má při daném $\varkappa$ celkem $\left[\binom{n}{\varkappa}\binom{r}{\varkappa}\right]^2$ členů. Na konec pak všechny tyto výsledky sečteme pro $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$

Obšírně se zabýval theorií vroubených determinantů *Arnaldi* (Giorn. di Battaglini, 1896).

m) *Determinant*

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11}, & a_{12} + \lambda b_{12}, & \ldots, & a_{1n} + \lambda b_{1n} \\ a_{21} + \lambda b_{21}, & a_{22} + \lambda b_{22}, & \ldots, & a_{2n} + \lambda b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + \lambda b_{n1}, & a_{n2} + \lambda b_{n2}, & \ldots, & a_{nn} + \lambda b_{nn} \end{vmatrix} \qquad (53)$$

je polynomem n-tého stupně v λ a píšeme jej tedy ve tvaru

$$D(\lambda) = I_0 + I_1\lambda + I_2\lambda^2 + \ldots + I_{n-1}\lambda^{n-1} + I_n\lambda^n. \quad (54)$$

Koeficient I_ν dostaneme zřejmě tak, že v ν sloupcích determinantu $D(\lambda)$ ponecháme jen druhé sčítance, kdežto ve zbývajících $n - \nu$ sloupcích jen sčítance první. To je možno provésti celkem $\binom{n}{\nu}$ způsoby a dospíváme tím tedy k $\binom{n}{\nu}$ determinantům, které sečteny dají právě člen $I_\nu\lambda^\nu$. Tak je na př. $I_0 = A$, $I_1 = \sum_{\varrho=1}^{n} A_\varrho$, $I_2 = \Sigma A_{\varrho\sigma}, \ldots, I_n = B$, při čemž A_ϱ je determinant vzniklý z A tak, že v něm nahradíme ϱ-tý sloupec čísly $b_{1\varrho}, b_{2\varrho}, \ldots, b_{n\varrho}$; $A_{\varrho\sigma}$ je determinant vzniklý z A nahrazením elementů sloupců ϱ-tého a σ-tého těmi, jež má v těchto sloupcích determinant B atd. Ve vzorci (54) se tedy vyskytuje celkem

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

n-řadových determinantů, odvozených z prvků determinantů A, B.

n) *Determinant*

$$D(t) = \begin{vmatrix} a_{11} + t, & a_{12} + t, & \ldots, & a_{1n} + t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + t, & a_{n2} + t, & \ldots, & a_{nn} + t \end{vmatrix} \qquad (55)$$

je lineární funkcí t, jak se snadno přesvědčíme odečtením prvého sloupce ode všech následujících. Je tedy

$$D(t) = \alpha + \beta t.$$

Pro $t = 0$ máme ihned $\alpha = D(0) = A$; konstanta β je pak zřejmě $\beta = \frac{\mathrm{d}D(t)}{\mathrm{d}t}$. Podle věty 12., vzorce (15) však máme

$$\frac{\mathrm{d}D(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} + t, & a_{12} + t, \ldots, & a_{1n} + t \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{i-1,1} + t, & a_{i-1,2} + t, \ldots, & a_{i-1,n} + t \\ 1, & 1, & \ldots, 1 \\ a_{i+1,1} + t, & a_{i+1,2} + t, \ldots, & a_{i+1,n} + t \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} + t, & a_{n2} + t, \ldots, & a_{nn} + t \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \ldots, & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{i-1,1}, & a_{i-1,2}, \ldots, & a_{i-1,n} \\ 1, & 1, & \ldots, 1 \\ a_{i+1,1}, & a_{i+1,2}, \ldots, & a_{i+1,n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\right) = \sum_{i,k} A_{ik}.$$

Máme tudíž výsledek

$$D(t) = A + t\sum_{i,k} A_{ik}. \tag{55,1}$$

Poznámky. 1. Determinant (55) můžeme pokládati za speciální případ $D(\lambda)$ — t. j. determinantu (53) — a napsati pak jeho hodnotu ihned podle vzorce (54). Učiňte tak!

2. Pro $a_{ik} = 0$, $i \neq k$, je $A = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$, $A_{ik} = 0$, $A_{ii} = \frac{A}{a_{ii}}$, takže v tomto speciálním případě jest

$$D(t) = ta_{11}a_{22} \ldots a_{nn}\left(\frac{1}{t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{ii}}\right). \tag{55,2}$$

Jsou-li zvláště všechna $a_{ii} = a$, máme

$$D(t) = a^{n-1}(a + nt). \tag{55,3}$$

p) *Determinant n-řadový*

$$D_n(x; a, b) = \begin{vmatrix} x, & a, & a, & \ldots, & a, & a \\ b, & x, & a, & \ldots, & a, & a \\ b, & b, & x, & \ldots, & a, & a \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ b, & b, & b, & \ldots, & x, & a \\ b, & b, & b, & \ldots, & b, & x \end{vmatrix} \tag{56}$$

upravíme odečtením každého sloupce od následujícího na tvar

$$D_n(x; a, b) = \begin{vmatrix} x, & a - x, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ b, & x - b, & a - x, & \ldots, 0, & 0 \\ b, & 0, & x - b, & \ldots, 0, & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ b, & 0, & 0, & \ldots, x - b, & a - x \\ b, & 0, & 0, & \ldots, 0, & x - b \end{vmatrix};$$

rozvedením podle prvků prvého řádku dostaneme

$$D_n(x; a, b) = x \,.\begin{vmatrix} x - b, & a - x, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ 0, & x - b, & a - x, & \ldots, 0, & 0 \\ 0, & 0, & x - b, & \ldots, 0, & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, x - b, & a - x \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, 0, & x - b \end{vmatrix} +$$

$$+ \, b(x - a) \begin{vmatrix} 1, & a - x, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ 1, & x - b, & a - x, & \ldots, 0, & 0 \\ 1, & 0, & x - b, & \ldots, 0, & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 1, & 0, & 0, & \ldots, x - b, & a - x \\ 1, & 0, & 0, & \ldots, 0, & x - b \end{vmatrix},$$

kde oba determinanty jsou $(n - 1)$-řadové. První má hodnotu $(x - b)^{n-1}$, druhý pak označíme znakem Δ_{n-1} a odvodíme pro něj rekurentní relaci. Rozvedením podle první řádky najdeme ihned

$$\Delta_m = (x - b)^{m-1} + (x - a) \,.\, \Delta_{m-1}, \tag{57}$$

z čehož vypočteme

$$\Delta_m = \sum_{\mu=0}^{m-1} (x - a)^\mu (x - b)^{m-\mu-1}. \tag{57,1}$$

Užitím těchto výsledků dostáváme pak definitivní výraz pro hodnotu determinantu (56):

$$D_n(x; a, b) = x(x - b)^{n-1} + b(x - a) \,.\, \sum_{\nu=0}^{n-2} (x - a)^\nu (x - b)^{n-\nu-2}. \tag{56,1}$$

Často bývají uváděny speciální případy právě řešeného úkolu. Tak na př. jest

$$D_n(x; a, a) = [x + (n - 1)\, a]\, (x - a)^{n-1},$$

$$D_n(0; a, b) = (-1)^{n-1}\, ab \sum_{\nu=0}^{n-2} a^\nu b^{n-\nu-2} \text{ a pod.}$$

Poznámky. 1. Jistým zobecněním případu (56) je determinant

$$D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b) = \begin{vmatrix} x_1, & a, & a, & \ldots, a, & a \\ b, & x_2 & a, & \ldots, a, & a \\ b, & b, & x_3, & \ldots, a, & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b, & b, & b, & \ldots, x_{n-1}, & a \\ b, & b, & b, & \ldots, b, & x_n \end{vmatrix}. \tag{58}$$

Zcela analogickým způsobem jako u (56) nacházíme vzorec

$$D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b) = x_1 B_2 + b \sum_{\varrho=1}^{n-1} A_\varrho B_{\varrho+2};\ A_\varrho = \prod_{\nu=1}^{\varrho} (x_\nu - a),$$

$$B_\sigma = \prod_{\tau=\sigma}^{n} (x_\tau - b),\ B_{n+1} = 1. \tag{58,1}$$

2. Determinant

$$E_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; a, b) = \begin{vmatrix} a, & a, & a, & a, \ldots, a, & a, & a \\ x_1, & a, & a, & a, \ldots, a, & a, & a \\ b, & x_2, & a, & a, \ldots, a, & a, & a \\ b, & b, & x_3, & a, \ldots, a, & a, & a \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ b, & b, & b, & b, \ldots, a, & a, & a \\ b, & b, & b, & b, \ldots, x_{n-2}, & a, & a \\ b, & b, & b, & b, \ldots, b, & x_{n-1}, & a \end{vmatrix} \tag{59}$$

rozvedeme podle elementů prvního sloupce a dostaneme

$$E_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; a, b) =$$
$$= (a - x_1)\, E_{n-1}(x_2, \ldots, x_{n-1}; a, b), \tag{59,1}$$

takže bude

$$E_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; a, b) =$$
$$= a(a - x_1)(a - x_2) \ldots (a - x_{n-1}). \tag{59,2}$$

3. Determinant

$$\overline{D}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b) = \begin{vmatrix} a, & a, & \ldots, a, & a, & x_1 \\ a, & a, & \ldots, a, & x_2, & b \\ a, & a, & \ldots, x_3, & b, & b \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a, & x_{n-1}, & \ldots, b, & b, & b \\ x_n, & b, & \ldots, b, & b, & b \end{vmatrix} \tag{60}$$

vznikne z determinantu (58) takto: Nejprve vyměníme v (58) poslední sloupec postupně se všemi předchozími, až se dostane na místo prvé, t. j. celkem $n - 1$ výměn. V determinantu tak vzniklém vyměníme opět poslední sloupec se všemi předchozími, až se stane sloupcem druhým; celkem je to $n - 2$ výměn. Tak pokračujeme, až po celkovém počtu

$$(n - 1) + (n - 2) + \ldots + 2 + 1 = \tfrac{1}{2}n(n - 1)$$

výměn dostaneme z $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b)$ právě determinant (60). Podle věty 3. tedy máme

$$\overline{D}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \,.$$
$$. \, D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b), \tag{60,1}$$

při čemž je $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b)$ dáno vzorcem (58,1).

4. Hodnotu determinantu

$$I = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 3, \ldots, n-1, & n \\ 2, & 3, & 4, \ldots, n & 1 \\ 3, & 4, & 5, \ldots, 1, & 2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ n-1, & n, & 1, \ldots, n-3, & n-2 \\ n, & 1, & 2, \ldots, n-2, & n-1 \end{vmatrix} \tag{61}$$

najdeme takto: přičteme všechny sloupce k prvnímu; všechny prvky tohoto prvního sloupce budou pak míti tutéž hodnotu $\frac{1}{2}n(n+1)$, kterou z nich vytkneme. V determinantu takto vzniklém odečteme od každého řádku druhým počínajíce řádek předchozí a dostaneme determinant $\overline{D}_{n-1}(1-n, 1-n, \ldots, 1-n; 1, 1)$, jehož hodnota je podle (60,1) rovna $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} D_{n-1}(1-n, 1-n, \ldots, 1-n; 1, 1)$. Ze vzorce (58,1) však nacházíme

$$D_{n-1}(1-n, 1-n, \ldots, 1-n; 1, 1) = (-1)^{n-1} \,.\, n^{n-2},$$

takže konečně bude

$$I = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \tfrac{1}{2}(n+1)\, n^{n-1}. \tag{61,1}$$

q) *Determinant Baltzerův*

$$B_n = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \ldots, & a_{1,2n-1}, & a_{1,2n} \\ -a_{12}, & a_{11}, & -a_{14}, & a_{13}, & \ldots, & -a_{1,2n}, & a_{1,2n-1} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & \ldots, & a_{2,2n-1}, & a_{2,2n} \\ -a_{22}, & a_{21}, & -a_{24}, & a_{23}, & \ldots, & -a_{2,2n}, & a_{2,2n-1} \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & a_{n4}, & \ldots, & a_{n,2n-1}, & a_{n,2n} \\ -a_{n2}, & a_{n1}, & -a_{n4}, & a_{n3}, & \ldots, & -a_{n,2n}, & a_{n,2n-1} \end{vmatrix}, \tag{62}$$

v němž jsou a_{ik} čísla reálná, upravíme tak, že sloupec 2ν-tý násobený imaginární jednotkou i přičteme k předchozímu a pak od řádku 2ν-tého odečteme i-násobný řádek $(2\nu - 1)$-vý. To učiníme postupně pro $\nu = 1, 2, \ldots, n$ a dostaneme

$$B_n = \begin{vmatrix} a_{11} + ia_{12}, & a_{12}, & a_{13} + ia_{14}, & a_{14}, & \ldots \\ 0, & a_{11} - ia_{12}, & 0, & a_{13} - ia_{14}, & \ldots \\ a_{21} + ia_{22}, & a_{22}, & a_{23} + ia_{24}, & a_{24}, & \ldots \\ 0, & a_{21} - ia_{22}, & 0, & a_{23} - ia_{24}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix};$$

rozvedením podle řádků 2-ho, 4-ho, ..., $2n$-ho vyjde

$$B_n = \begin{vmatrix} a_{11} + ia_{12}, & a_{13} + ia_{14}, & \ldots, & a_{1,2n-1} + ia_{1,2n} \\ a_{21} + ia_{22}, & a_{23} + ia_{24}, & \ldots, & a_{2,2n-1} + ia_{2,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} + ia_{n2}, & a_{n3} + ia_{n4}, & \ldots, & a_{n,2n-1} + ia_{n,2n} \end{vmatrix} .$$

$$\cdot \begin{vmatrix} a_{11} - ia_{12}, & a_{13} - ia_{14}, & \ldots \\ a_{21} - ia_{22}, & a_{23} - ia_{24}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} - ia_{n2}, & a_{n3} - ia_{n4}, & \ldots \end{vmatrix},$$

takže je B_n součinem dvou čísel komplexně sdružených $M_n + iN_n$ (tak značíme hodnotu prvého determinantu) a $M_n - iN_n$, tedy:

$$B_n = M_n^2 + N_n^2, \tag{62,1}$$

kde M_n a N_n jsou dána vztahem

$$M_n + iN_n = \begin{vmatrix} a_{11} + ia_{12}, & a_{13} + ia_{14}, & \ldots, & a_{1,2n-1} + ia_{1,2n} \\ a_{21} + ia_{22}, & a_{23} + ia_{24}, & \ldots, & a_{2,2n-1} + ia_{2,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} + ia_{n2}, & a_{n3} + ia_{n4}, & \ldots, & a_{n,2n-1} + ia_{n,2n} \end{vmatrix}. \tag{62,2}$$

Příklad. Provedeme zde výpočet velmi důležitý v technické praxi. Ze čtyř daných funkcí proměnné x (sinh$x$, cosh$x$ značí hyperbolické funkce)

$$y_1 = \cosh x \cos x, \quad y_2 = \cosh x \sin x,$$
$$y_3 = \sinh x \cos x, \quad y_4 = \sinh x \sin x$$

a z jejich derivací vytvořme determinant tak, že jeho prvá řádka obsahuje tyto funkce v pořadí právě napsaném, ve druhé řádce stojí první derivace oněch funkcí, třetí řádka obsahuje druhé derivace a poslední pak třetí derivace daných čtyř funkcí. Determinant takto sestavený se jmenuje Wronskiho determinantem funkcí y_1, y_2, y_3, y_4 a dostáváme pro něj

$$W = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ -y_2 + y_3, & y_1 + y_4, & y_1 - y_4, & y_2 + y_3 \\ -2y_4, & 2y_3, & -2y_2, & 2y_1 \\ -2(y_2 + y_3), & 2(y_1 - y_4), & -2(y_1 + y_4), & 2(-y_2 + y_3) \end{vmatrix},$$

t. j. po jednoduchých úpravách

$$W = 8 \,.\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ -y_2, & y_1, & -y_4, & y_3 \\ y_4, & -y_3, & y_2, & -y_1 \\ y_3, & y_4, & y_1, & y_2 \end{vmatrix}.$$

Determinant, který tu figuruje, je jednoduchým případem determinantu (62). Podle vzorců (62,1) a (62,2) dostaneme po malém a snadném výpočtu pro něj hodnotu 1, takže je $W = 8$.

Poznámka. Determinanty typu (62) počítal *Baltzer* (Gött. Nachr., 1887).

r) *Determinant*

$$F(c, n) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ \binom{c+n-1}{1}, & \binom{c+n}{1}, & \ldots, & \binom{c+2n-2}{1} \\ \binom{c+n}{2}, & \binom{c+n+1}{2}, & \ldots, & \binom{c+2n-1}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{c+2n-4}{n-2}, & \binom{c+2n-3}{n-2}, & \ldots, & \binom{c+3n-5}{n-2} \\ \binom{c+2n-3}{n-1}, & \binom{c+2n-2}{n-1}, & \ldots, & \binom{c+3n-4}{n-1} \end{vmatrix} \tag{63}$$

upravíme — užívajíce vzorce $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ — tak, že od každého sloupce (vyjma první) odčítáme sloupec předcházející. Dostáváme

$$F(c, n) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \dots, 0 \\ \binom{c+n-1}{1}, & 1, & \dots, 1 \\ \binom{c+n}{2}, & \binom{c+n}{1}, & \dots, \binom{c+2n-2}{1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \binom{c+2n-4}{n-2}, & \binom{c+2n-4}{n-3}, & \dots, \binom{c+3n-6}{n-3} \\ \binom{c+2n-3}{n-1}, & \binom{c+2n-3}{n-2}, & \dots, \binom{c+3n-5}{n-2} \end{vmatrix}$$

Abychom se mohli dále pohodlně vyjadřovati, označíme znakem $\Phi_{\nu\nu}$ subdeterminant přidružený v determinantu $F(c, n)$ tomu jeho minoru, který je složen ze společných elementů posledních ν řádků a prvých ν sloupců determinantu $F(c, n)$. Poslední rovnici lze pak psáti ve tvaru

$$F(c, n) = \Phi_{11}.$$

S minorem Φ_{11} naložíme stejně jako prve s determinantem $F(c, n)$ a najdeme $\Phi_{11} = \Phi_{22}$, takže jest $F(c, n) = \Phi_{22}$. Na Φ_{22} aplikujeme tentýž postup a dostaneme $\Phi_{22} = \Phi_{33}$; nakonec pak nalezneme $F(c, n) = \Phi_{n-1,n-1}$, z čehož plyne konečný výsledek

$$F(c, n) = 1. \tag{63,1}$$

Doporučuji čtenáři provésti naznačený výpočet podrobně použitím úplné indukce.

Poznámka. Ve sbírkách různých matematických úloh se často vyskytuje speciální případ determinantu (63), totiž determinant $F(2 - n, n)$. Vznikne otočením Pascalova trojúhelníku z kombinačních čísel a má ovšem také hodnotu 1.

s) *Determinant*

$$U_r = \begin{vmatrix} \frac{1}{(m+r)!}, & \frac{1}{(m+r-1)!}, & \dots, & \frac{1}{m!} \\ \frac{1}{(m+r+1)!}, & \frac{1}{(m+r)!}, & \dots, & \frac{1}{(m+1)!} \\ \frac{1}{(m+r+2)!}, & \frac{1}{(m+r+1)!}, & \dots, & \frac{1}{(m+2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(m+2r-1)!}, & \frac{1}{(m+2r-2)!}, & \dots, & \frac{1}{(m+r-1)!} \\ \frac{1}{(m+2r)!}, & \frac{1}{(m+2r-1)!}, & \dots, & \frac{1}{(m+r)!} \end{vmatrix}, \tag{64}$$

kde m, r jsou čísla celá nezáporná, upravíme tím, že prvý řádek násobíme výrazem $(m + r)!$, druhý $(m + r + 1)!, \dots,$ až poslední hodnotou $(m + 2r)!$ Determinant A_r, který tím dostaneme, je tedy s U_r vázán vztahem

$$A_r = (m + r)!\,(m + r + 1)! \dots (m + 2r)!\,U_r$$

a má — píšeme-li místo $m + r$ symbol α — tvar

$$A_r = \begin{vmatrix} 1, & \alpha, & \alpha(\alpha-1), & \dots, & a_0 \\ 1, & \alpha+1, & (\alpha+1)\,\alpha, & \dots, & a_1 \\ 1, & \alpha+2, & (\alpha+2)(\alpha+1), & \dots, & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & \alpha+r-1, & (\alpha+r-1)(\alpha+r-2), & \dots, & a_{r-1} \\ 1, & \alpha+r, & (\alpha+r)(\alpha+r-1), & \dots, & a_r \end{vmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-r+1) \\ a_1 &= (\alpha+1)\,\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-r+2) \\ a_2 &= (\alpha+2)(\alpha+1)\,\alpha \dots (\alpha-r+3) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r-1} &= (\alpha+r-1)(\alpha+r-2) \dots \alpha \\ a_r &= (\alpha+r)(\alpha+r-1) \dots (\alpha+1). \end{aligned}$$

Odečteme-li od každé řádky, druhou počínajíce, vždy řádku předchozí, najdeme pro determinant A_r vztah $A_r = r!A_{r-1}$, takže lze psáti ihned

$$A_r = 1!2!3! \dots (r-1)!\, r!$$

a pro determinant U_r máme hodnotu

$$U_r = \frac{0! \qquad 1! \qquad \dots \qquad r!}{(m+r)!\,(m+r+1)! \dots (m+2r)!}. \tag{64,1}$$

Poznámka. Determinant Zeipelův

$$Z(n, p; r) = \begin{vmatrix} \binom{n}{p}, & \binom{n}{p+1}, & \dots, & \binom{n}{p+r} \\ \binom{n+1}{p}, & \binom{n+1}{p+1}, & \dots, & \binom{n+1}{p+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n+r}{p}, & \binom{n+r}{p+1}, & \dots, & \binom{n+r}{p+r} \end{vmatrix} \tag{65}$$

se redukuje vytčením $n!$ z prvé, $(n+1)!$ ze druhé, ..., až $(n+r)!$ z poslední řádky a pak $\frac{1}{p!}$ z prvého, $\frac{1}{(p+1)!}$ z druhého, ..., $\frac{1}{(p+r)!}$ z posledního sloupce na tvar

$$Z(n, p; r) = \frac{n!(n+1)! \dots (n+r)!}{p!(p+1)! \dots (p+r)!}\,.$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{(n-p)!}, & \frac{1}{(n-p-1)!}, & \dots, & \frac{1}{(n-p-r)!} \\ \frac{1}{(n-p+1)!}, & \frac{1}{(n-p)!}, & \dots, & \frac{1}{(n-p-r+1)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n-p+r)!}, & \frac{1}{(n-p+r-1)!}, & \dots, & \frac{1}{(n-p)!} \end{vmatrix}.$$

Determinant zde vystupující však dostaneme z determinantu (64), klademe-li v něm $n - p - r$ místo m. Podle vzorce (64,1) máme tedy

$$Z(n, p; r) = \frac{(n + r)!\,(n + r - 1)!\ldots n!}{(p + r)!\,(p + r - 1)!\ldots p!}\,.$$

$$\cdot\frac{r! \qquad (r - 1)! \qquad \ldots \qquad 0!}{(n - p + r)!\,(n - p + r - 1)!\ldots(n - p)!}\,. \qquad (65{,}1)$$

Tomuto výrazu pro hodnotu Zeipelova determinantu lze dáti ještě jiný, v jistém směru přehlednější, tvar. Násobíme-li jej součinem zlomků

$$\frac{(n - 1)!\,(n - 2)!\ldots(n - p + r + 1)!}{(p - 1)!\,(p - 2)!\ldots \qquad (r + 1)!}\,,$$

$$\frac{(p - 1)!\,(p - 2)!\ldots \qquad (r + 1)!}{(n - 1)!\,(n - 2)!\ldots(n - p + r + 1)!}\,,$$

který je zřejmě roven 1, dostaneme

$$Z(n, p; r) = \frac{(n + r)!\,(n + r - 1)!\ldots(n - p + r + 1)!}{(p + r)!\,(p + r - 1)!\ldots \qquad (r + 1)!}\,.$$

$$\cdot\frac{(p - 1)!\,(p - 2)!\ldots \qquad 1! \qquad 0!}{(n - 1)!\,(n - 2)!\ldots(n - p + 1)!\,(n - p)!}\,,$$

což lze psáti ve tvaru

$$Z(n, p; r) = \frac{\binom{n + r}{r + 1}\binom{n + r - 1}{r + 1}\ldots\binom{n + r - p + 1}{r + 1}}{\binom{p + r}{r + 1}\binom{p + r - 1}{r + 1}\ldots\binom{r + 1}{r + 1}}\,. \qquad (65{,}2)$$

t) *Determinant Sternův*

$$S_n = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, 1 \\ \binom{x_1}{1}, & \binom{x_2}{1}, & \ldots, \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2}, & \binom{x_2}{2}, & \ldots, \binom{x_n}{2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \binom{x_1}{n-2}, & \binom{x_2}{n-2}, & \ldots, \binom{x_n}{n-2} \\ \binom{x_1}{n-1}, & \binom{x_2}{n-1}, & \ldots, \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix} \qquad (66)$$

upravíme tak, že třetí řádek násobíme číslem 2!, čtvrtý číslem 3! ..., až poslední hodnotou $(n-1)!$ Dostáváme tím Sternův determinant (66) vázaný vztahem

$$1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!\,S_n =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, 1 \\ x_1, & x_2, & \ldots, x_n \\ x_1(x_1-1), & x_2(x_2-1), & \ldots, x_n(x_n-1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & \ldots, a_{n-1,n} \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, a_{nn} \end{vmatrix},$$

při čemž

$$\begin{aligned} a_{n-1,1} &= x_1(x_1-1)(x_1-2)\ldots(x_1-n+3), \\ a_{n-1,2} &= x_2(x_2-1)(x_2-2)\ldots(x_2-n+3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1,n} &= x_n(x_n-1)(x_n-2)\ldots(x_n-n+3), \\ a_{n1} &= x_1(x_1-1)(x_1-2)\ldots(x_1-n+2), \\ a_{n2} &= x_2(x_2-1)(x_2-2)\ldots(x_2-n+2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn} &= x_n(x_n-1)(x_n-2)\ldots(x_n-n+2). \end{aligned}$$

Protože však platí

$$\begin{aligned}(x - 1)(x - 2) \dots (x - m) &= \\ = x^m + a_1{}^{(m)}x^{m-1} + a_2{}^{(m)}x^{m-2} &+ \dots + \\ + a_{m-1}{}^{(m)}x + a_m{}^{(m)},\end{aligned} \tag{a}$$

kde $a_1{}^{(m)}, a_2{}^{(m)}, \dots, a_{m-1}{}^{(m)}, a_m{}^{(m)}$ jsou t. zv. základní symetrické funkce čísel 1, 2, ..., $m - 1$, m (na jejich přesném tvaru pro naše účely nezáleží), lze determinant pro $1!\,2!\,3! \dots (n - 1)!\,S_n$ psáti ve tvaru

$$x_1 x_2 \dots x_n \begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_1}, & \dfrac{1}{x_2}, & \dots, & \dfrac{1}{x_n} \\ 1, & 1, & \dots, & 1 \\ f_1(x_1), & f_1(x_2), & \dots, & f_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-3}(x_1), & f_{n-3}(x_2), & \dots, & f_{n-3}(x_n) \\ f_{n-2}(x_1), & f_{n-2}(x_2), & \dots, & f_{n-2}(x_n) \end{vmatrix}, \tag{b}$$

$$f_m(x) = x^m + a_1{}^{(m)}x^{m-1} + \dots + a_m{}^{(m)}.$$

Nyní však je možno vyjádřiti $f_m(x)$ jako součet z mocniny x^m a jisté lineární kombinace polynomů $f_{m-1}(x)$, $f_{m-2}(x)$, ..., $f_1(x)$, 1 (přesvědčte se o tom pro $m = 1, 2, 3, 4$ pomocí methody neurčitých součinitelů; obecně bude tato věc provedena ve druhé části tohoto spisu jako příklad na řešení soustavy lineárních rovnic)

$$\begin{aligned}f_m(x) = x^m + c_1 f_{m-1}(x) + c_2 f_{m-2}(x) &+ \dots + \\ + c_{m-1} f_1(x) + c_m.\end{aligned} \tag{c}$$

Odečteme-li tedy od posledního řádku determinantu posléze napsaného vhodnou lineární kombinaci všech řádků předchozích druhým počínajíce, nabude tento poslední řádek tvaru $x_1{}^{n-2}, x_2{}^{n-2}, \dots, x_n{}^{n-2}$. Podobným způsobem lze řádek předposlední změniti ve tvar $x_1{}^{n-3}, x_2{}^{n-3}, \dots, x_n{}^{n-3}$ atd., takže nakonec dostáváme

$$x_1 x_2 \dots x_n \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1}, & \frac{1}{x_2}, & \dots, \frac{1}{x_n} \\ 1, & 1, & \dots, 1 \\ x_1, & x_2, & \dots, x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-3}, & x_2^{n-3}, & \dots, x_n^{n-3} \\ x_1^{n-2}, & x_2^{n-2}, & \dots, x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, 1 \\ x_1, & x_2, & \dots, x_n \\ x_1^2, & x_2^2, & \dots, x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-2}, & x_2^{n-2}, & \dots, x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \dots, x_n^{n-1} \end{vmatrix} = V_n,$$

kde je V_n známý determinant Vandermondeův, jehož hodnota je stanovena vzorcem (23').

Pro výpočet Sternova determinantu tak dostáváme vztah

$$S_n = \frac{V_n}{1!\,2!\,3!\dots(n-1)!}, \tag{66'}$$

čili v jiném tvaru $S_n = \dfrac{V_n}{1^{n-1}\,.\,2^{n-2}\,.\,3^{n-3}\dots(n-1)}$. (66'')

Poznámka. Determinant Zeipelův (65) přechází pro $p = 0$ přímo v determinant (66), jehož hodnota je v tomto zvláštním případě 1. Totéž ovšem vychází ze vzorce (65,1), kdežto formule (65,2) se zde nedá bezprostředně aplikovati (nechceme-li se zvláště zmiňovati o jejím jmenovateli).

u) *Determinant E. Pascala*

$$R_n = \begin{vmatrix} a_{10}, & -t, & 0, & \dots, 0, & 0 \\ a_{20}, & a_{21}, & -t, & \dots, 0, & 0 \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & \dots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,0}, & a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & \dots, a_{n-1,n-2}, & -t \\ a_{n0}, & a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, a_{n,n-2}, & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \tag{67}$$

rozvedeme podle elementů posledního sloupce a najdeme

$$R_n = a_{n,n-1}R_{n-1} + t\Delta_{n-1}(a_{10}, a_{21}, \ldots, a_{n-2,n-3}, a_{n,n-2}),$$

při čemž je $\Delta_{n-1}(a_{10}, a_{21}, \ldots, a_{n-2,n-3}, a_{n,n-2})$ determinant analogického tvaru jako R_n, pouze je stavěn z jiných prvků (hlavní úhlopříčka je připsána v závorce). Rozvedeme jej opět podle elementů posledního sloupce, čímž nacházíme

$$\Delta_{n-1}(a_{10}, a_{21}, \ldots, a_{n-2,n-3}, a_{n,n-2}) =$$
$$= a_{n,n-2}R_{n-2} + t\Delta_{n-2}(a_{10}, a_{21}, \ldots, a_{n-3,n-4}, a_{n,n-3}).$$

Takto pokračujíce získáme pro determinant R_n konečně rekurentní relaci

$$R_n = a_{n,n-1}R_{n-1} + ta_{n,n-2}R_{n-2} + t^2a_{n,n-3}R_{n-3} + \\ + \ldots + t^{n-3}a_{n2}R_2 + t^{n-2}a_{n1}R_1 + t^{n-1}a_{n0}. \qquad (67')$$

Poznámky. Klademe-li ve vzorci (67′) $a_{r\varrho} = \binom{2r}{2\varrho}$, $r = 1, 2, \ldots, n$, $\varrho = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ a $t = -1$, dostaneme

$$0 = R_n - \binom{2n}{2}R_{n-1} + \binom{2n}{4}R_{n-2} - \binom{2n}{6}R_{n-3} + \ldots + \\ + (-1)^{n-2}\binom{2n}{2n-4}R_2 + (-1)^{n-1}\binom{2n}{2n-2}R_1 + \\ + (-1)^n R_0, \qquad (67'')$$

kde položíme $R_0 = 1$. To však je rekurentní formule pro výpočet *Eulerových* čísel $E_0, E_1, E_2, \ldots$, jež se vyskytují na př. při rozvoji funkce $\sec x$ v potenční řadu. Lze tedy *Eulerova* čísla vyjádřiti vzorcem

$$E_n = \begin{vmatrix} \binom{2}{0}, & 1, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ \binom{4}{0}, & \binom{4}{2}, & 1, & \ldots, 0, & 0 \\ \binom{6}{0}, & \binom{6}{2}, & \binom{6}{4}, & \ldots, 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{2n}{0}, & \binom{2n}{2}, & \binom{2n}{4}, & \ldots, \binom{2n}{2n-4}, & \binom{2n}{2n-2} \end{vmatrix}, \quad E_0 = 1. \qquad (67''')$$

Také ostatní známá čísla analysy (na př. *Bernoulliova)*, vystupující hlavně jako součinitelé při rozvojích funkcí goniometrických a hyperbolických v potenční řady, lze vyjádřiti analogicky jako *Eulerova* pomocí determinantů Pascalova typu.

Podrobně se těmito determinanty zabýval *E. Pascal* (Rend. Ist. Lomb., 1907).

v) *Determinant Smithův.*

Jako poslední příklad uvedeme determinant poněkud zvláštního charakteru, jehož elementy jsou konstruovány, smíme-li se tak vyjádřiti, číselně theoreticky. Je to symetrický determinant

$$S_n = \begin{vmatrix} (1, 1), & (1, 2), & \ldots, & (1, n) \\ (2, 1), & (2, 2), & \ldots, & (2, n) \\ (3, 1), & (3, 2), & \ldots, & (3, n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n, 1), & (n, 2), & \ldots, & (n, n) \end{vmatrix}, \tag{68}$$

kde (k, l) značí největší společný dělitel (míru) čísel k, l.

Abychom určili hodnotu determinantu S_n, musíme uvésti několik poznatků charakteru číselně theoretického.

Eulerovu číselně theoretickou funkci definujeme tak, že ke každému celému číslu $m \geqq 1$ přiřadíme jako funkční hodnotu $\varphi(m)$ počet čísel z řady $1, 2, 3, \ldots, m - 1, m$, jež jsou s číslem m nesoudělná. Je tedy na př. $\varphi(6) = 2$, $\varphi(p) = p - 1$, je-li p prvočíslem. Pro $m \leqq 0$, nebo m nikoli celá není Eulerova funkce definována. Hodnotu $\varphi(m)$ lze při daném m vypočísti; to jest ovšem úkol, který zde řešit nebudeme, už z toho důvodu, že toho v dalších výվodech nepotřebujeme (věc jest ostatně zcela jednoduchá).

Budiž nyní d libovolný dělitel čísla m; pak jsou v řadě $1, 2, 3, \ldots, m - 1, m$ čísla $d, 2d, 3d, \ldots, \frac{m}{d} . d$ v počtu $\frac{m}{d}$ vesměs dělitelna d, žádné z ostatních čísel oné řady pak už tuto vlastnost nemá. Jen mezi čísly $d, 2d, 3d, \ldots, \frac{m}{d} \cdot d$ tedy najdeme ta, jež mají s m největší společný dělitel právě d. Kolik jich jest? Protože dvě čísla $\alpha d, \beta d$ (α, β celá kladná) mají největšího společného dělitele d, když a jen když jsou α, β nesoudělná, bude hledaný počet roven číslu $\varphi\left(\frac{m}{d}\right)$. Můžeme tedy vysloviti *větu*:

Je-li $m \geqq 1$ celé číslo a d nějaký jeho dělitel, je v řadě $1, 2, 3, \ldots, m - 1, m$ celkem $\varphi\left(\frac{m}{d}\right)$ čísel, která mají s m největšího společného dělitele právě d.

Tak je na př. v řadě 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 celkem $\varphi(5) = 4$ čísla, která mají s číslem 15 největšího společného dělitele právě 3; jsou to čísla 3, 6, 9, 12.

Nechť jsou $d_1, d_2, \ldots, d_\mu$ všechny možné dělitele čísla m (počítáme v ně také čísla $1, m$). Vybereme-li z řady $1, 2, 3, \ldots, m - 1, m$ jakožto první skupinu všech těch $\varphi\left(\frac{m}{d_1}\right)$ čísel, která mají s m největší společnou míru d_1, jakožto druhou skupinu $\varphi\left(\frac{m}{d_2}\right)$ čísel, z nichž každé má s m největšího společného dělitele d_2 atd., dostaneme celkem μ skupin. Protože pak má každé z čísel $1, 2, 3, \ldots, m - 1, m$ s číslem m největší společnou míru buď d_1, nebo $d_2, \ldots$, jsou v těchto μ skupinách obsažena všechna čísla oné řady, takže jest

$$\varphi\left(\frac{m}{d_1}\right) + \varphi\left(\frac{m}{d_2}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{m}{d_\mu}\right) = m. \tag{69}$$

Číslo $m = 15$ má dělitele: $d_1 = 1, d_2 = 3, d_3 = 5, d_4 = 15$, takže je μ rovno 4 a dostaneme 4 skupiny:

α) $\varphi(\frac{15}{1}) = \varphi(15) = 8$ čísel s 15 nesoudělných: 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14;

β) $\varphi(\frac{15}{3}) = \varphi(5) = 4$ čísla mající s 15 nejv. spol. míru 3: 3, 6, 9, 12;

$\gamma)$ $\varphi(\frac{15}{5}) = \varphi(3)$ $=$ 2 čísla mající s 15 nejv. spol. míru 5: 5, 10;

$\delta)$ $\varphi(\frac{15}{15}) = \varphi(1)$ $=$ 1 číslo mající s 15 nejv. spol. míru 15: 15.

Vzorci (69) je možno dáti ještě jednodušší tvar. Je-li totiž d dělitelem čísla m, je také číslo $\frac{m}{d}$ jeho dělitelem, jak patrno ze vztahu $m = d \cdot \frac{m}{d}$. Jsou tedy veličiny $\frac{m}{d_1}, \frac{m}{d_2}, \ldots, \frac{m}{d_\mu}$ různí dělitelé čísla m a ježto je jich μ, jsou to právě všichni dělitelé čísla m, t. j. ony veličiny jsou jen jistou permutací dělitelů $d_1, d_2, \ldots, d_\mu$, takže lze vztah (69) psáti pohodlněji

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_\mu) = m. \tag{69'}$$

Nyní už můžeme přikročiti k určení hodnoty determinantu (68). Utvořme si determinant $|a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, v němž je $a_{ik} = 0$, když i není dělitelno číslem k; v opačném případě pak budiž $a_{ik} = 1$. Tento determinant má tedy tvar

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{32}, & \ldots, & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, 0 \\ a_{21}, & 1, & 0, & \ldots, 0 \\ a_{31}, & a_{32}, & 1, & \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & \ldots, 1 \end{vmatrix}$$

a hodnotu zřejmě rovnou 1. Násobme jej po řádcích determinantem

$$\Phi = \begin{vmatrix} a_{11}\varphi(1), & a_{12}\varphi(2), & \ldots, & a_{1n}\varphi(n) \\ a_{21}\varphi(1), & a_{22}\varphi(2), & \ldots, & a_{2n}\varphi(n) \\ a_{31}\varphi(1), & a_{32}\varphi(2), & \ldots, & a_{3n}\varphi(n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\varphi(1), & a_{n2}\varphi(2), & \ldots, & a_{nn}\varphi(n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi(1), & 0, & 0, & \ldots, 0 \\ a_{21}\varphi(1), & \varphi(2), & 0, & \ldots, 0 \\ a_{31}\varphi(1), & a_{32}\varphi(2), & \varphi(3), & \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\varphi(1), & a_{n2}\varphi(2), & a_{n3}\varphi(3), & \ldots, \varphi(n) \end{vmatrix}$$

o hodnotě $\Phi = \varphi(1) \, . \, \varphi(2) \, . \, \varphi(3) \, . \, . \, . \, . \, . \, \varphi(n)$. Dostaneme tak determinant $|c_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, jehož obecný prvek c_{ik} bude

$$c_{ik} = a_{i1}a_{k1}\varphi(1) + a_{i2}a_{k2}\varphi(2) + \ldots + a_{in}a_{kn}\varphi(n) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}a_{k\nu}\varphi(\nu).$$

Nyní však jest $a_{i\nu}a_{k\nu}$ rovno nule pro všechna ν, která nejsou současně obsažena jak v čísle i, tak i v čísle k. Je-li však ν společným dělitelem čísel i, k, je $a_{i\nu}a_{k\nu} = 1$, takže

$$c_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}a_{k\nu}\varphi(\nu) = \sum \varphi(\nu),$$

při čemž druhý součet jde jen přes ta ν, která jsou společným dělitelem čísel i, k, t. j. přes ta ν, která jsou děliteli největší společné míry (i, k) obou těch čísel. Je tedy podle vzorce (69′) $c_{ik} = (i, k)$ a součin obou determinantů A, Φ je právě determinant S_n. Vychází tedy pro hodnotu Smithova determinantu výraz

$$S_n = \varphi(1) \, . \, \varphi(2) \ldots \varphi(n). \qquad (68')$$

Poznámka. Výpočet, který jsme tu naznačili, provedl po prvé *J. St. Smith* (Coll. math. papers, 161).