Řetězové zlomky

II. část. Iracionální čísla

In: Pavel Vít (author): Řetězové zlomky. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 67–118.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404020

II. ČÁST

IRACIONÁLNÍ ČÍSLA

9. NEKONEČNÉ ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

V této kapitole zavedeme *nekonečné řetězové zlomky*, které zapisujeme $(q_1, q_2, \ldots)$. Striktní postup, vyložený v Perronově knize [4], je tento: Rozšíříme definici pravidelného řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ na nekonečný počet prvků $q_1, q_2, \ldots$ a prokážeme, že nekonečný řetězový zlomek $(q_1, q_2, \ldots)$ konverguje, a to k nějakému *iracionálnímu* číslu, které nazýváme *hodnotou* nekonečného řetězového zlomku.

Ponecháme si však tyto úvahy až do následující kapitoly. V této kapitole budeme postupovat obráceně: vyjdeme od iracionálního čísla α a dokážeme, že je lze vyjádřit řetězovým zlomkem, který však musí mít nekonečný počet prvků. Odtud také vyplyne způsob, jak takový řetězový zlomek vypočítat, což předvedeme na numerických příkladech. Tak asi postupuje student, který se na vysoké škole seznamuje s nekonečnými řadami: z dřívějška, totiž ze střední školy, už předem ví, že nekonečné řady mají někdy součet, a zná příklady nekonečných geometrických řad s kvocientem q, pro nějž je $|q| < 1$.

(K analogii s nekonečnými řadami se ještě vrátíme v příští kapitole.)

Budiž tedy $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathrm{I}$. Zopakujeme postup vyložený v 1. kapitole:

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{\alpha_1};$$

zde je

$$q_1 = [\alpha], \ \alpha_1 > 1, \ \alpha_1 \in \mathrm{I}$$

(kdyby totiž bylo $\alpha_1 \in \mathrm{Q}$, bylo by i $\alpha \in \mathrm{Q}$),

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - q_1},$$

$$q_2 = [\alpha_1],$$

$$\alpha_1 = q_2 + \frac{1}{\alpha_2}, \quad \alpha_2 > 1, \quad \alpha_2 \in \mathrm{I},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - q_2},$$

$$q_3 = [\alpha_2],$$

$$\alpha_2 = q_3 + \frac{1}{\alpha_3}, \quad \alpha_3 > 1, \quad \alpha_3 \in \mathrm{I},$$

Všechna čísla α, α_1, α_2, α_3, ... jsou iracionální, a proto postup nemůže skončit, jako v 1. kapitole, nalezením nějakého celého α_{n-1}. Dostáváme tedy skutečně nekonečný řetězový zlomek $(q_1, q_2, \ldots)$, ve kterém je $q_1 \in \mathrm{N}_0$, $q_2, q_3, \ldots \in \mathrm{N}$. Pro $\alpha < 0$, $\alpha \in \mathrm{I}$ bude zřejmě q_1 záporné celé číslo, ostatní $q_i \in \mathrm{N}$, $i = 2, 3, \ldots$.

Nyní si ukážeme na příkladech, jak skutečně probíhá výpočet čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ a $q_1, q_2, \ldots$ Výpočet se bude podobat výpočtu příkladu 2 v 1. kapitole. Hledání celé části je ovšem komplikováno tím, že jde o iracionální čísla.

Příklad 1. Najděme řetězový zlomek čísla $\sqrt{2}$.

Řešení.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad q_1 = 1,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1, \quad q_2 = 2,$$

$$\sqrt{2}+1 = 2 + \frac{1}{\alpha_2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1, \quad q_3 = 2,$$

$$\vdots$$

Je $\alpha_1 = \alpha_2$, a tedy ovšem $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \sqrt{2}+1$, a $q_2 = q_3 = q_4 = \ldots = 2$.

Dostáváme $\sqrt{2} = (1, 2, 2, 2, \ldots)$.

Dostali jsme nekonečný řetězový zlomek, a to *periodický,* jak jsme předpověděli ve 2. příkladu 6. kapitoly. *Perioda* je jednoprvková (neříkáme jednomístná nebo jednociferná, neboť víme, že prvky řetězového zlomku mohou být několikaciferná čísla) a začíná prvkem q_2.

Příklad 2. Zkusme totéž pro nějaké „složitější“ α, třeba $\alpha = \frac{24-\sqrt{15}}{17}$.

Řešení. Při výpočtech se nám budou hodit nerovnosti $3 < \sqrt{15} < 4$.

$$\frac{24-\sqrt{15}}{17} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad q_1 = 1,$$

$$\alpha_1 = \frac{7+\sqrt{15}}{2}, \quad q_2 = 5,$$

$$\frac{7+\sqrt{15}}{2} = 5 + \frac{1}{\alpha_2},$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{15}+3}{3}, \quad q_3 = 2,$$

$$\frac{\sqrt{15}+3}{3} = 2 + \frac{1}{\alpha_3},$$

$$\alpha_3 = \frac{\sqrt{15}+3}{2}, \quad q_4 = 3,$$

$$\frac{\sqrt{15}+3}{2} = 3 + \frac{1}{\alpha_4},$$

$$\alpha_4 = \frac{\sqrt{15}+3}{3}, \quad q_5 = 2,$$

$$\frac{\sqrt{15}+3}{3}=2+\frac{1}{\alpha_5},$$

$$\alpha_5=\frac{\sqrt{15}+3}{2}, \quad q_6=3,$$

....

Je $\alpha_2=\alpha_4$, $\alpha_3=\alpha_5$, tedy $\alpha_2=\alpha_4=\alpha_6=\ldots=\dfrac{\sqrt{15}+3}{3}$ a $q_3=$ $=q_5=q_7=\ldots=2$; dále je $\alpha_3=\alpha_5=\ldots=\dfrac{\sqrt{15}+3}{2}$, tedy $q_4=q_6=q_8=\ldots=3$. Dostáváme opět nekonečný periodický řetězový zlomek, tentokráte však s dvouprvkovou periodou (2, 3), začínající prvkem q_3, a s dvouprvkovou *předperiodou* (1, 5):

$$\frac{24-\sqrt{15}}{17}=(1, 5, 2, 3, 2, 3, \ldots).$$

Další příklady si čtenář vypočítá sám:

(a) $\sqrt{3}=(1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots)$;

(b) $\sqrt{5}=(2, 4, 4, 4, 4, \ldots)$;

(c) $\sqrt{6}=(2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \ldots)$;

(d) $2-\sqrt{2}=(0, 1, 1, 2, 2, 2, \ldots)$.

Pro periodické řetězové zlomky

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n, q_{k+1}, \ldots) \qquad (1)$$

budeme používat podobného zápisu, jakým se označují periodické desetinné rozvoje racionálních čísel. Místo (1) budeme psát

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, \overline{q_{k+1}, \ldots, q_n}). \qquad (2)$$

Periodické nekonečné řetězové zlomky z této kapitoly tedy píšeme

$$\sqrt{2} = (1, \overline{2}),$$

$$\frac{24 - \sqrt{15}}{17} = (1, 5, \overline{2, 3}),$$

$$\sqrt{3} = (1, \overline{1, 2}),$$

$$\sqrt{5} = (2, \overline{4}),$$

$$\sqrt{6} = (2, \overline{2, 4}),$$

$$2 - \sqrt{2} = (0, 1, 1, \overline{2}).$$

Nyní by se snad mohlo čtenáři zdát, že buď všecky nekonečné řetězové zlomky jsou periodické, nebo že jiné nás zásadně nezajímají. Pravda je ta, že periodické řetězové zlomky hrají v teorii řetězových zlomků zvláštní úlohu, jak ukážeme za chvíli a podrobně dokážeme v 13. kapitole;

ale tvoří jen nepatrnou menšinu mezi všemi nekonečnými řetězovými zlomky. Tak např. platí

$$\pi = (3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \ldots.)$$

(pro π zaokrouhlené na deset desetinných míst jsme to spočítali v 1. příkladu 6. kapitoly).

Pro číslo $\sqrt[3]{2}$ uvádí Davenport v [1] nekonečný řetězový zlomek $(1, 3, 1, 5, 1, 1, 4, \ldots)$.

Žádný z těchto dvou řetězových zlomků není periodický; přitom nejsou známy žádné zákonitosti pro jejich prvky (tj. není znám žádný výtvarný zákon pro tyto řetězové zlomky).

Jiná je situace u čísel e, e^2, pro něž takové výtvarné zákony jsou známy. Platí

$$e = (2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, \ldots)$$

(po prvních dvou prvcích 2, 1 následují po sobě jdoucí sudá čísla 2, 4, 6, 8, ..., oddělená od sebe vždy dvěma jedničkami),

$$e^2 = (7, 2, 1, 1, 3, 18, 5, 1, 1, 6, 30, 8, 1, 1, \ldots);$$

výtvarný zákon pro prvky řetězového zlomku už není tak jasný. Perron v [4] dokazuje oba výtvarné zákony a zapisuje je užitím snadno pochopitelné symboliky takto:

$$e = (2, \overline{1, 2m, 1})_{m=1}^{\infty},$$

$$e^2 = (7, \overline{2 + 3m, 1, 1, 3 + 3m, 18 + 12m})_{m=0}^{\infty}.$$

Pokuste se podle těchto vzorců znovu rozepsat oba řetězové zlomky!

Čeho jsme zatím dosáhli? Dokázali jsme sice, že iracionální číslo má nekonečný řetězový zlomek, přičemž jsme odvodili jakýsi algoritmus pro výpočet jeho prvků, ale tohoto algoritmu dovedeme ke skutečnému numerickému výpočtu použít jen pro iracionální čísla s druhou odmocninou, taková jako v našich příkladech 1 a 2. Důvod je v tom, že při výpočtech provádíme tzv. usměrňování zlomků. Už pro velmi jednoduché iracionální číslo $\sqrt[3]{2}$ tento algoritmus selhává: dovedeme sice určit $q_1 = 1$, pomocí vzorce $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ vypočítáme ještě $q_2 = 3$, ale pak dostáváme $\alpha_2 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2}$ a se znalostmi středoškolské matematiky už nevystačíme. Nekonečný řetězový zlomek čísla $\sqrt[3]{2}$, který jsme prve uvedli, byl získán metodou uvedenou v 6. kapitole (viz cvičení 5), stejně jako nekonečný řetězový zlomek čísla π. Výpočet řetězových zlomků čísel e, e^2 je pak mnohem složitější než náš algoritmus.

Víme tedy alespoň to, že každé iracionální číslo má nekonečný řetězový zlomek. Zbývá ještě dokázat obrácené tvrzení, že hodnotou každého (pravidelného) nekonečného řetězového zlomku je nějaké iracionální číslo. To dokážeme postupem naznačeným v prvním odstavci této kapitoly, ale až v příští kapitole, která se zabývá konvergencí nekonečných řetězových zlomků.

Nechť nyní

$$(q_1, q_2, \ldots) \tag{3}$$

je nekonečný řetězový zlomek. Sblížené zlomky jsou definovány stejně jako v 1. části. Můžeme tedy počítat $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots$ stejně jako dříve, nyní ovšem neexistuje žádný „poslední" sblížený zlomek. To se projevuje ve vzorci pro horní mez absolutní hodnoty chyby $\left(\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right)$, pro kterou jsme ve 4. kapitole odvodili vzorec (7) (píšeme nyní α místo $\frac{p}{q}$):

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{Q_k Q_{k-1}}; \tag{4}$$

pro konečné řetězové zlomky o n prvcích platí tento vzorec jen pro $k < n$, ale pro nekonečné řetězové zlomky ovšem toto omezení odpadá a vzorec platí pro všechna $k \in \mathrm{N}$. Při vyšetřování konvergence ho vydatně využijeme.

Nekonečný řetězový zlomek (3) můžeme vždy nahradit konečným řetězovým zlomkem

$$(q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_n), \tag{5}$$

kde ovšem α_n je iracionální číslo. Vypadá to, jako by byla porušena podmínka pravidelnosti, ale zrovna tak byla tato podmínka „porušena" na pravé straně rovnosti (4) ve 3. kapitole, kde jsme jako poslední prvek řetězového zlomku psali jeho zbytek, což bylo racionální (a nikoli přirozené) číslo. Také nyní není α_n nic jiného než zbytek řetězového zlomku (3):

$$\alpha_n = (q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots).$$

Znamená tedy (5) totéž co (3) a o žádné porušení nejde.

Je tedy

$$\alpha = (q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_n),$$

tedy podle vzorců (1) 3. kapitoly

$$\alpha = \frac{\alpha_n P_n + P_{n-1}}{\alpha_n Q_n + Q_{n-1}}. \tag{6}$$

Známe-li P_{n-1}, P_n, Q_{n-1}, Q_n, α_n, můžeme odtud počítat α.

Příklad 3. Vypočítejme podle (6) hodnotu řetězového zlomku $\alpha = (1, 2, \sqrt{2}+1)$. Zde je $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $\alpha_2 = \sqrt{2}+1$. Víme ovšem, že podle příkladu 1 musí vyjít $\alpha = \sqrt{2}$. Z hodnot q_1, q_2 určíme $P_1 = 1$, $P_2 = 3$, $Q_1 = 1$, $Q_2 = 2$ a dosadíme do (6):

$$\alpha = \frac{3(\sqrt{2}+1)+1}{2(\sqrt{2}+1)+1} = \frac{3\sqrt{2}+4}{2\sqrt{2}+3} =$$

$$= \frac{(3\sqrt{2}+4)(2\sqrt{2}-3)}{-1} = \sqrt{2}.$$

Na závěr si ještě řekneme něco o výrazech s druhou odmocninou, jejichž nekonečné řetězové zlomky dovedeme počítat podle algoritmu uvedeného na začátku kapitoly. Obecný tvar toho, čemu jsme zatím říkali „výraz s druhou odmocninou", je

$$\frac{P \pm \sqrt{N}}{Q}, \tag{7}$$

kde P, Q jsou celá čísla a N je přirozené číslo, které není druhou mocninou celého čísla: $N \neq a^2$, kde $a \in \mathbb{Z}$. Jinak řečeno N je takové přirozené číslo, že $\sqrt{N} \in \mathrm{I}$. Velké N bude od nynějška značit jen takováto přirozená čísla, na rozdíl od malého n, které bude nadále označovat jakékoli přirozené číslo. (Zavedení písmene N je užitečné také proto, že se nám v několika případech přihodí, že budeme mít oba „druhy" přirozených čísel v těsné souvislosti, např. budeme mluvit o n-tém prvku řetězového zlomku čísla $\sqrt{N}$.) Pokud jde o to, že celá čísla P, Q zapisujeme velkými písmeny, k tomu nás vede jednak to, že máme-li jedno velké písmeno N, vypadá snad lépe, jsou-li i ostatní písmena velká, jednak také skutečnost, že malým písmenem p budeme vždycky označovat prvočíslo. Uvědomme si však, že P, Q v (7) nemají nic společného s P_k, Q_k, kterými označujeme čitatele a jmenovatele sblížených zlomků.

Každý takový výraz (7) je kořenem nějaké kvadratické rovnice; budeme pro něj používat názvu *kvadratická iracionalita* (někdy se říká iracionála, např. v dodatcích, které k Chinčinově knížce [3] napsal její překladatel K. Rychlík).

Je-li $\alpha=\frac{P+\sqrt{N}}{Q}$ iracionálním kořenem nějaké kvadratické rovnice, je $\alpha'=\frac{P-\sqrt{N}}{Q}$ jejím druhým iracionálním kořenem, a rovnice má tvar

$$(x-\alpha)(x-\alpha')=0.$$

Pro výrazy $\alpha=\sqrt{N}$, kterých jsme několik vypočítali, je $\alpha'=-\sqrt{N}$ a příslušná kvadratická rovnice je obzvlášť jednoduchá: $x^2-N=0$. Pro $\alpha=\frac{24-\sqrt{15}}{17}$, jehož řetězový zlomek jsme počítali v příkladu 2, zní kvadratická rovnice: $17x^2-48x+33=0$ (přesvědčte se o tom).

Druhými odmocninami čísel N (kde N má uvedený význam, tj. $N\neq a^2$, kde $a\in\mathbb{Z}$, N je přirozené číslo) se budeme soustavně zabývat až ve 12. kapitole. Protože je však budeme potřebovat k některým výpočtům už dříve a protože jejich řetězové zlomky dovedeme počítat už nyní, uvádíme tabulku řetězových zlomků všech $\sqrt{N}$, $N\leqq 50$. Tabulka je převzata z Davenportovy knížky [1]*) a potřebuje několik vysvětlivek. Především pro zjednodušení sazby jsou vynechány vodorovné pruhy, vyznačující periodu. Jak bude dokázáno ve 12. kapitole, pro každé N

*) Podobná tabulka je pro $N\leqq 99$ také v Perronovi [4]

N	Řetězový zlomek čísla $\sqrt{N}$	x	y	$x^2 - Ny^2$
2	(1, 2)	1	1	−1
3	(1, 1, 2)	2	1	+1
5	(2, 4)	2	1	−1
6	(2, 2, 4)	5	2	+1
7	(2, 1, 1, 1, 4)	8	3	+1
8	(2, 1, 4)	3	1	+1
10	(3, 6)	3	1	−1
11	(3, 3, 6)	10	3	+1
12	(3, 2, 6)	7	2	+1
13	(3, 1, 1, 1, 1, 6)	18	5	−1
14	(3, 1, 2, 1, 6)	15	4	+1
15	(3, 1, 6)	4	1	+1
17	(4, 8)	4	1	−1
18	(4, 4, 8)	17	4	+1
19	(4, 2, 1, 3, 1, 2, 8)	170	39	+1
20	(4, 2, 8)	9	2	+1
21	(4, 1, 1, 2, 1, 1, 8)	55	12	+1
22	(4, 1, 2, 4, 2, 1, 8)	197	42	+1
23	(4, 1, 3, 1, 8)	24	5	+1
24	(4, 1, 8)	5	1	+1
26	(5, 10)	5	1	−1
27	(5, 5, 10)	26	5	+1

N	Řetězový zlomek čísla $\sqrt{N}$	x	y	$x^2 - Ny^2$
28	(5, 3, 2, 3, 10)	127	24	+1
29	(5, 2, 1, 1, 2, 10)	70	13	−1
30	(5, 2, 10)	11	2	+1
31	(5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10)	1520	273	+1
32	(5, 1, 1, 1, 10)	17	3	+1
33	(5, 1, 2, 1, 10)	23	4	+1
34	(5, 1, 4, 1, 10)	35	6	+1
35	(5, 1, 10)	6	1	+1
37	(6, 12)	6	1	−1
38	(6, 6, 12)	37	6	+1
39	(6, 4, 12)	25	4	+1
40	(6, 3, 12)	19	3	+1
41	(6, 2, 2, 12)	32	5	−1
42	(6, 2, 12)	13	2	+1
43	(6, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12)	3482	531	+1
44	(6, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12)	199	30	+1
45	(6, 1, 2, 2, 2, 1, 12)	161	24	+1
46	(6, 1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12)	24335	3588	+1
47	(6, 1, 5, 1, 12)	48	7	+1
48	(6, 1, 12)	7	1	+1
50	(7, 14)	7	1	−1

je totiž $\sqrt{N}=(q_1, \overline{q_2, \ldots, q_n})$: jestliže je tedy pro $N=3$ uvedeno (1, 1, 2), znamená to $\sqrt{3}=(1, \overline{1, 2})$; nebo pro $N=13$ znamená (3, 1, 1, 1, 1, 6), jak je uvedeno v tabulce, že $\sqrt{13}=(3, \overline{1, 1, 1, 1, 6})$. Za druhé v tabulce nejsou uvedeny jen hodnoty N a $\sqrt{N}$, nýbrž v dalších sloupcích také jakási x, y a x^2-Ny^2. Těchto sloupců si prozatím nevšímejte; použijeme jich teprve ve třetí části v kapitole 18 při řešení tzv. Pellovy rovnice.

Cvičení

1. Vypočítejte šestý sblížený zlomek řetězových zlomků čísel (a) $\sqrt{2}$; (b) $\sqrt{3}$; (c) $\sqrt{5}$ a určete horní mez absolutní hodnoty chyby podle vzorce (4).
2. Vypočítejte řetězové zlomky čísel (a) $\sqrt{41}$; (b) $\sqrt{59}$; (c) $\sqrt{61}$.
3. Vypočítejte řetězový zlomek kladného kořene kvadratické rovnice (a) $x^2-2x-7=0$; (b) $3x^2-7x-3=0$.
4. Kvadratická rovnice $x^2-4x+2=0$ má oba kořeny kladné. Vypočítejte jejich řetězové zlomky.
5. Vypočítejte prvních sedm prvků řetězového zlomku čísla $\sqrt[3]{2}$ ze zaokrouhlené hodnoty $\sqrt[3]{2}=1{,}25992$.
6. Sledujte výpočet prvních několika prvků řetězového zlomku čísla $\log 5$:

$$0<\log 5<1, \quad q_1=0,$$

$$\log 5=\frac{1}{\alpha_1}, \quad 5^{\alpha_1}=10, \quad q_2=1,$$

$$5^{1+1/\alpha_2}=5.5^{1/\alpha_2}=10, \quad 2^{\alpha_2}=5, \quad q_3=2,$$

$$2^{2+1/\alpha_3}=5, \quad \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha_3}=2,$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{125}{64}<2, \quad \left(\frac{5}{4}\right)^4=\frac{625}{256}>2,$$

tedy

$$3<\alpha_3<4, \quad q_4=3,$$

$$\alpha_3=3+\frac{1}{\alpha_4},$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{3+1/\alpha_4}=2,$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{1/\alpha_4}=\frac{128}{125},$$

$$1{,}024^{\alpha_4}=1{,}25.$$

Platí

$$1{,}024^9<1{,}25<1{,}024^{10};$$

tyto nerovnosti však zjistíme nejspíše logaritmicky, takže pro výpočet pátého prvku řetězového zlomku čísla log 5 nemají velkou hodnotu. Vyšlo by nám takto $q_5=9$ a měli bychom tento nekonečný řetězový zlomek

$$\log 5=(0,1,2,3,9,\ldots).$$

7. Podle předchozího cvičení vypočítejte prvních několik prvků řetězových zlomků čísel (a) log 2; (b) log 3; (c) log 25.

10. KONVERGENCE

V předešlé kapitole jsme sice zavedli nekonečný řetězový zlomek $(q_1, q_2, \ldots)$ jako vyjádření iracionálního čísla, ale přesto tento zápis má dvě vady.

1. Zatímco zápis konečného řetězového zlomku má souvislost s Euklidovým algoritmem a tím i s racionálním číslem $\frac{p}{q}$, které je hodnotou tohoto řetězového zlomku, u nekonečných řetězových zlomků nám taková souvislost chybí. Zápis $(q_1, q_2, \ldots)$ je formální. Potřebujeme zavést jeho konvergenci pomocí známého zápisu $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

2. Celý náš postup se stále ubírá jedním směrem. Až budeme mít definovánu konvergenci nekonečného řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots)$, budeme oprávněni tvrdit, že nějaké iracionální číslo α je hodnotou řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots)$, ale stále ještě nám bude scházet důkaz, že také obráceně každý nekonečný řetězový zlomek $(q_1, q_2, \ldots)$ má za svou hodnotu nějaké iracionální číslo α.

Tyto dvě věci tedy probereme v této kapitole; úkol je to dosti snadný.

Nejprve ke konvergenci nekonečného řetězového zlomku. Připomeňme si, jak se definuje konvergence nekonečné řady $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

Sestavíme posloupnost částečných součtů

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\ldots\ldots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$\ldots\ldots$$

a definujeme: Jestliže existuje $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ této posloupnosti, pak číslo s prohlásíme za součet nekonečné řady $a_1 + a_2 + + a_3 + \ldots$

Podtrhli jsme prve slovo posloupnost. To proto, že při definici konvergence nekonečného řetězového zlomku používáme také posloupnosti, tentokráte posloupnosti sblížených zlomků. Sblížené zlomky jsou definovány stejně jako v případě konečných řetězových zlomků a počítají se týmž způsobem. Budiž tedy $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots$ posloupnost sblížených zlomků nekonečného řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots)$. Definujeme:

Jestliže platí $\lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \alpha$, říkáme, že číslo α je hodnotou řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots)$. Pro důkaz konvergence řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots)$ stačí dokázat, že výraz $\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right|$ konverguje k nule pro $n \to \infty$. Právě k tomu používáme vzorce

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}},$$

který jsme připomněli v předešlé kapitole.

Platí totiž, že posloupnost $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ je rostoucí (až snad na první dva členy; pro $q_2 = 1$ je totiž $Q_1 = Q_2 = 1$); pro $k \geqq 3$ to plyne ze vzorce

$$Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}.$$

Tedy Q_n a také Q_{n+1} konverguje k $+\infty$ pro $n \to +\infty$, ke každému $\varepsilon > 0$ existuje tedy n takové, že

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \varepsilon; \tag{1}$$

tedy $\left| a - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$.

Všimněme si, že provedené úvahy platí pro každý pravidelný nekonečný řetězový zlomek, neboť posloupnost Q_1, Q_2, Q_3, ... je ve všech případech rostoucí (až snad na první dva členy). Dospíváme tak k tomuto výsledku: Každý pravidelný nekonečný řetězový zlomek konverguje. Zde končí analogie s nekonečnými řadami, neboť ne všechny řady jsou konvergentní.

Příklad 1. Dokažme, že $(2, \overline{4}) = \sqrt{5}$. Posloupnost Q_1, Q_2, Q_3, ... je v našem případě (vypočítejme to) $Q_1 = 1$, $Q_2 = 4$, $Q_3 = 17$, $Q_4 = 72$, $Q_5 = 305$, $Q_6 = 1\,292$, $Q_7 = 5\,437$, $Q_8 = 23\,184$, $Q_9 = 98\,209$, $Q_{10} = 416\,020$ ... (Jak vidíme, čísla Q_k rostou pro $k \geqq 3$ velmi rychle.)

Zvolme $\varepsilon = 10^{-3}$; pak postačí vzít $n = 3$, neboť $\frac{1}{17.72}$ je menší než $\frac{1}{1000}$, a tedy $\left| \sqrt{5} - \frac{P_3}{Q_3} \right| < 10^{-3}$.

Budiž tedy $\varepsilon = 10^{-6}$, pak musíme vzít $n = 6$; $\frac{1}{1292.5437} < \frac{1}{10^6}$; je tedy $\left| \sqrt{5} - \frac{P_6}{Q_6} \right| < 10^{-6}$.

Do třetice zvolme $\varepsilon = 10^{-10}$; pak musíme vzít $n = 9$, a je

$$\frac{1}{98209 \,.\, 416020} < \frac{1}{10^{10}} \text{ a } \left|\sqrt{5} - \frac{P_{10}}{Q_{10}}\right| < 10^{-10}.$$

Vidíme názorně, že ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít n takové, že je

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \varepsilon .$$

V příkladu jsme se zmínili o tom, že čísla Q_k rostou velmi rychle. O tom hovoří následující věta.

Věta 1. *Pro $k \geqq 3$ platí*

$$Q_k \geqq 2^{(k-1)/2}. \tag{2}$$

Čísla $2^{(k-1)/2}$ tvoří pro $k, k+1, k+2, \ldots$ geometrickou posloupnost:

$$2^{(k-1)/2} = 2^{k/2} \,.\, 2^{-1/2},$$

$$2^{k/2} = 2^{k/2} \,.\, 2^{0},$$

$$2^{(k+1)/2} = 2^{k/2} \,.\, 2^{1/2},$$

$$\ldots\ldots$$

jejíž první člen je $2^{(k-1)/2}$ a kvocient $2^{1/2} = \sqrt{2}$. Rostou tedy čísla $Q_3, Q_4, \ldots$ alespoň stejně rychle jako členy geometrické posloupnosti s kvocientem $\sqrt{2}$.

Důkaz. Pro $k \geqq 3$ je

$$Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \geqq Q_{k-1} + Q_{k-2} \geqq 2Q_{k-2};$$

odtud postupně dostáváme

$$Q_{2k} \geqq 2^k \,.\, Q_2 \geqq 2^{k-2}, \; Q_{2k+1} \geqq 2^k \,.\, Q_1 = 2^k.$$

Tím je (2) dokázáno pro sudý index $2k$ i pro lichý index $2k+1$. Tedy (2) platí pro všechna $k \geqq 3$.

Iracionality nekonečného řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots)$ se týká tato věta:

Věta 2. *Hodnota nekonečného pravidelného řetězového zlomku je iracionální číslo.*

Důkaz. Označme

$$\alpha = (q_1, q_2, \ldots) = (q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_n);$$

je

$$\alpha = \frac{\alpha_n P_n + P_{n-1}}{\alpha_n Q_n + Q_{n-1}}.$$

Odtud dostaneme po snadném výpočtu

$$\alpha Q_n - P_n = \frac{Q_n P_{n-1} - Q_{n-1} P_n}{\alpha_n Q_n + Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha_n Q_n + Q_{n-1}}.$$

Z toho plyne, že výraz $|\alpha Q_n - P_n|$ s rostoucím n stále klesá, ale nikdy není roven nule, což je možné jen pro iracionální α. Skutečně pro racionální $\alpha = \frac{p}{q}$ je

$$\left|\frac{p}{q} Q_n - P_n\right| = \frac{|pQ_n - qP_n|}{|q|},$$

což nemůže být menší než $\frac{1}{|q|}$, a tedy nemůže s rostoucím n stále klesat. Je tedy hodnota α nekonečného pravidelného řetězového zlomku iracionální číslo.

Poznámka. Chybí nám ještě protějšek věty 1 z kapitoly 2 o jednoznačnosti řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots)$. Tato věc vyplývá ze srovnání dvou nekonečných řetězových zlomků podle velikosti; zmíníme se proto o ní až v kapitole 14, která je zobecněním kapitoly 5 z první části.

Cvičení

Dokažte, že nekonečný řetězový zlomek $(q_1, q_2, \ldots)$ konverguje právě tehdy, když nekonečná řada $q_2 + q_3 + q_4 + \ldots$ diverguje k $+\infty$.

Mohlo by se zdát, že je toto cvičení zbytečné, když přece všechny pravidelné řetězové zlomky konvergují. Ve cvičení 7 v následující kapitole však budeme mít co dělat s nekonečným řetězovým zlomkem, který bude obsahovat nuly i na místech jiných prvků než prvního. Takové řetězové zlomky jsme v definici pravidelného řetězového zlomku nepřipouštěli. Ukáže se však, že tento řetězový zlomek konverguje podle právě uvedeného kritéria.

11. RYZE PERIODICKÉ ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

Tak nazýváme řetězové zlomky tvaru

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, q_1, q_2, \ldots, q_k, q_1, \ldots). \tag{1}$$

Jejich perioda je k-prvková a místo (1) píšeme pro $k > 1$

$$\overline{(q_1, q_2, \ldots, q_k)}. \tag{2}$$

Pro $k=1$ je příslušný zápis tento:

$$\overline{(q_1)}.$$

Především je třeba říci, že ryze periodické řetězové zlomky existují, tj. existují iracionální čísla mající rozvoj v periodické řetězové zlomky. Příklad 3 v kapitole 6, v němž nám vyšlo $q_1 = q_2 = \ldots = q_{18} = 1$, vedl k podezření, že patrně platí

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \overline{(1)};$$

v kapitole 6 jsme to ovšem nemohli dokázat, dokážeme to teď.

Příklad 1. Dokažme $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \overline{(1)}$.

Řešení. Protože je

$$2 < \sqrt{5} < 3,$$

je

$$\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right] = q_1 = 1,$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \alpha;$$

je tedy $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ a odtud

$$q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = 1.$$

Příklad 2. Perioda ovšem nemusí být jen jednoprvková. Např. s tříprvkovou periodou ryze periodického řetězového zlomku už se čtenář setkal, jestliže vyřešil cvičení 3(b) kapitoly 9, v němž měl najít kladný kořen rovnice $3x^2 - 7x - 3 = 0$. Tam vychází $\alpha = (\overline{2, 1, 2})$ (což je totéž jako $(2, 1, 2, \alpha)$).

Pišme $\alpha = (2, 1, 2, \alpha)$ a použijme vzorce (6) kapitoly 9:

$$\alpha = \frac{\alpha_n P_n + P_{n-1}}{\alpha_n Q_n + Q_{n-1}}.$$

Z daných prvků $q_1 = 2$, $q_2 = 1$, $q_3 = 2$ můžeme vypočítat čísla P_2, P_3, Q_2, Q_3 a psát

$$\alpha = \frac{\alpha P_3 + P_2}{\alpha Q_3 + Q_2},$$

tj.

$$\alpha = \frac{8\alpha + 3}{3\alpha + 1},$$

což dává kvadratickou rovnici pro α:

$$3\alpha^2 - 7\alpha - 3 = 0,$$

tedy rovnici, z níž jsme vyšli (až na to, že místo x je zde α).

Dříve než vyložíme vlastnosti ryze periodických řetězových zlomků, vypočítáme podobným způsobem ještě dva příklady.

Příklad 3. Budiž $\alpha=(\overline{2, 1, 3})$. Píšeme opět $\alpha=$ $=(2, 1, 3, \alpha)$. Především si zapamatujme, že je $\alpha>1$. Sestrojme kvadratickou rovnici pro α za použití vzorce

$$\alpha=\frac{\alpha P_3+P_2}{\alpha Q_3+Q_2}=\frac{11\alpha+3}{4\alpha+1},$$

tj.

$$4\alpha^2-10\alpha-3=0, \tag{3}$$

a nahradíme-li písmeno α písmenem x, abychom rozlišili neznámou a kořeny, máme

$$4x^2-10x-3=0. \tag{4}$$

Jedním kořenem rovnice (4) je číslo α, o kterém víme, že je to kvadratická iracionalita typu $\frac{P+\sqrt{N}}{Q}$, kde $P, Q\in \mathrm{Z}$, $N\in \mathrm{N}$ a $\sqrt{N}\in \mathrm{I}$. (Znamení $+$, protože α je kladné.) O druhém kořeni α' víme, že je $\alpha'=\frac{P-\sqrt{N}}{Q}$ s týmiž P, Q, N.

Taková dvě čísla $\alpha, \alpha'\in \mathrm{I}$ se nazývají *sdružená* a každá dvě iracionální čísla, jež jsou kořeny nějaké kvadratické rovnice, jsou sdružená. Tak např. sdružené kořeny rovnice $x^2-N=0$ ($N\neq a^2$, kde $a\in \mathrm{Z}$) jsou čísla $\alpha=\sqrt{N}$, $\alpha'=$ $=-\sqrt{N}$.

Příklad 4. Proveďme totéž pro $\beta=(\overline{3, 1, 2})$. Perioda čísla β vznikla — v tom je podstata věci — z periody čísla α tím, že jsme prvky psali v obráceném pořádku. Je opět $\beta>1$ a platí

$$\beta=\frac{11\beta+4}{3\beta+1},$$

tj.

$$3\beta^2-10\beta-4=0, \tag{5}$$

$$3x^2-10x-4=0. \tag{6}$$

Rovnice (4) a (6) budeme nazývat *konjugovanými.* Povšimněme si jejich tvaru. Je-li

$$ax^2+bx+c=0$$

nějaká kvadratická rovnice, pak kvadratická rovnice s ní konjugovaná má tvar

$$cx^2-bx+a=0.$$

Podívejme se ještě na rovnice (3) a (5). Jestliže do (3) dosadíme $\alpha=-\frac{1}{\beta}$, dostaneme (5), jak se snadno přesvědčíme. Je tedy číslo $-\frac{1}{\beta}$ jedním z kořenů rovnice (3). Nemůže však být $\alpha=-\frac{1}{\beta}$, protože čísla α, β jsou kladná. Je tedy $-\frac{1}{\beta}$ druhý kořen rovnice (3), sdružený s α, tedy

$$\alpha' = -\frac{1}{\beta}.$$

Protože $\beta > 1$, je $-1 < \alpha' < 0$.

Úvahy, které jsme prováděli nad příklady 3 a 4, platí obecně. Dokážeme větu:

Věta 1. *Buďte* $\alpha = (\overline{q_1, \ldots, q_k})$, $\beta = (\overline{q_k, \ldots, q_1})$ *dva ryze periodické řetězové zlomky, přičemž perioda řetězového zlomku* β *vznikne obrácením periody řetězového zlomku* α. *Pak kvadratické rovnice pro* α *a* β *(přesněji rovnice, které z nich vzniknou, píšeme-li místo* α, β *neznámou* x*) jsou vzájemně konjugované. Má-li první kvadratická rovnice kladný kořen* $\alpha > 1$, *druhá kladný kořen* $\beta > 1$, *platí pro sdružený kořen* α' *první rovnice rovnost*

$$\alpha' = -\frac{1}{\beta}$$

a je $-1 < \alpha' < 0$.

Důkaz je v podstatě opakováním výpočtů z příkladů 3 a 4. Řetězové zlomky pro α, β pišme ve tvaru

$$\alpha = (q_1, \ldots, q_k, \alpha),$$

$$\beta = (q_k, \ldots, q_1, \beta).$$

Odtud

$$\alpha = \frac{\alpha P_k + P_{k-1}}{\alpha Q_k + Q_{k-1}},$$

$$\beta = \frac{\beta P'_k + P'_{k-1}}{\beta Q'_k + Q'_{k-1}},$$

kde hodnoty P'_{k-1}, P'_k, Q'_{k-1}, Q'_k odpovídají samozřejmě periodě čísla β, skládající se z prvků q_k, $q_{k-1}, \ldots, q_1$. Chceme-li ve vztahu pro β dostat tytéž hodnoty P_{k-1}, P_k, Q_{k-1}, Q_k jako ve vztahu pro α, musíme použít vzorců z kapitoly 7 (resp. jejich zobecnění pro nekonečné řetězové zlomky).

Řetězové zlomky

$$(q_k, q_{k-1}, \ldots, q_1),$$

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k)$$

jsou inverzní. Podle věty 1 z kapitoly 7 platí

$$\frac{P'_k}{P'_{k-1}} = (q_1, q_2, \ldots, q_k) = \frac{P_k}{Q_k}.$$

Podobně jako ve zmíněné větě se dokáže, že pro inverzní řetězové zlomky

$$(q_{k-1}, q_{k-2}, \ldots, q_1),$$

$$(q_1, q_2, \ldots, q_{k-1})$$

platí (důkaz nalezne čtenář v [3])

$$\frac{Q'_k}{Q'_{k-1}} = (q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}) = \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}.$$

Odtud dostáváme

$$P'_k = P_k, \; P'_{k-1} = Q_k, \;\; Q'_k = P_{k-1}, \;\; Q'_{k-1} = Q_{k-1};$$

rovnice pro β je tedy

$$\beta = \frac{\beta P_k + Q_k}{\beta P_{k-1} + Q_{k-1}}.$$

Kvadratické rovnice pro α, β pak jsou

$$Q_k \alpha^2 + (Q_{k-1} - P_k)\alpha - P_{k-1} = 0,$$

$$P_{k-1}\beta^2 + (Q_{k-1} - P_k)\beta - Q_k = 0,$$

které jsou zřejmě konjugované: Má-li tedy první z nich kladný kořen $\alpha > 1$, je její sdružený kořen $\alpha' = -\frac{1}{\beta}$, kde $\beta > 1$ je kladný kořen druhé rovnice; z $\beta > 1$ ovšem plyne $-1 < \alpha' < 0$.

Platí také obrácené tvrzení: Jsou-li α, α' dva sdružené kořeny kvadratické rovnice takové, že $\alpha > 1$, $-1 < \alpha' < 0$, je nekonečný řetězový zlomek čísla α ryze periodický. Toto tvrzení nebudeme dokazovat.

Cvičení

1. Určete hodnoty ryze periodických řetězových zlomků: (a) $(\overline{2})$; (b) $(\overline{4})$; (c) $(\overline{8})$; (d) $(\overline{10})$. Využijte tabulky řetězových zlomků druhých odmocnin v kapitole 9.

2. Totéž pro řetězové zlomky (a) $(\overline{4, 2})$; (b) $(\overline{6, 2})$; (c) $(\overline{8, 1})$; (d) $(\overline{10, 5})$; (e) $(\overline{12, 6})$.

3. Totéž pro řetězové zlomky (a) $(\overline{1, 2, 3})$; (b) $(\overline{3, 4, 1})$; (c) $(\overline{1, 2, 3, 4})$.

4. Označte řetězové zlomky ze cvičení 1(a) — (d), 2(a) — (e), 3(a) — (c) po řadě písmeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{12}$. Sestavte kvadratické rovnice, jejichž kladnými kořeny jsou čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{12}$. Napište k těmto rovnicím konjugované rovnice a vypočítejte jejich kladné kořeny $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{12}$. Přesvědčte se, že platí $\alpha'_1 = -\frac{1}{\beta_1}$, $\alpha'_2 = -\frac{1}{\beta_2}, \ldots, \alpha'_{12} = -\frac{1}{\beta_{12}}$. Podle vyložené teorie napište bez jakéhokoli počítání ryze periodické řetězové zlomky čísel $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{12}$.

5. Napište konjugovanou rovnici ke kvadratické rovnici $4x^2 - 18x - 5 = 0$. Určete kladný kořen α dané rovnice a kladný kořen β konjugované rovnice a ověřte vztah $\alpha' = -\frac{1}{\beta}$.

6. Napište periodické řetězové zlomky kvadratických iracionalit $\frac{P+\sqrt{N}}{Q}$ pro (a) $P=Q=2$, $N=8$, (b) $P=1$, $Q=3$, $N=7$. Přesvědčte se, že vycházejí ryze periodické řetězové zlomky.

7. V nekonečném řetězovém zlomku lze připustit i některé nulové prvky, různé od prvního. Pak ovšem některé sblížené zlomky nejsou definovány, ale, jak si ukážeme, konvergence může zůstat zachována. Ukážeme to na ryze periodickém řetězovém zlomku $(\overline{1, 0, 2})$. Sestavíme tabulku:

q_k	1	0	2
P_k	1	1	3
Q_k	1	0	1

Píšeme-li $\alpha = (1, 0, 2, \alpha)$, máme

$$\alpha = \frac{3\alpha + 1}{\alpha},$$

$$\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0,$$

a kladný kořen je

$$\alpha=\frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

To by tedy měla být hodnota našeho nekonečného řetězového zlomku za předpokladu, že konverguje. Jak to vypadá se vztahem (1) z kapitoly 10? Je jasné, že posloupnost $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ není rostoucí; ve vztahu (1) ovšem hraje úlohu posloupnost $Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_4, \ldots$. Abychom si to ujasnili, rozšíříme tabulku:

q_k	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2
P_k	1	1	3	4	3	10	13	10	33	43	33	109
Q_k	1	0	1	1	1	3	4	3	10	13	10	33

Vidíme, že s nedefinovaností sblížených zlomků to není tak zlé: jediný, který není definován, je $\frac{P_2}{Q_2}$. Sestavme nyní posloupnost $Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_4, \ldots$: 0, 0, 1, 1, 3, 12, 12, 30, 130, 130, 330, ... Není to sice rostoucí posloupnost, ale je neklesající. To však stačí, aby výraz $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$ konvergoval pro $n\to\infty$ k nule. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=\alpha$, kde $\alpha=(\overline{1, 0, 2})$; smíme tedy psát

$$\frac{3+\sqrt{13}}{2}=(\overline{1, 0, 2}).$$

Čtenář, který vyřešil úlohu z kapitoly 10, měl ovšem lehčí práci, neboť zřejmě platí:

$$0+2+1+0+2+1+\ldots$$

diverguje spolu s řadou

$$2+1+2+1+\ldots$$

k $+\infty$.

12. ŘETĚZOVÉ ZLOMKY DRUHÝCH ODMOCNIN

Výrazem „druhá odmocnina“ budeme rozumět výhradně číslo $\sqrt{N} \in \mathrm{I}$ (tedy $N \neq a^2$, kde $a \in \mathrm{Z}$). Pro $N \leqq 50$ jsme tabulku řetězových zlomků takových odmocnin zařadili už do kapitoly 9. Snad si čtenář povšiml některých zákonitostí v této tabulce; o jedné z nich jsme se ostatně zmínili těsně před uvedením tabulky, že totiž jde o periodické řetězové zlomky, přičemž perioda začíná druhým prvkem q_2.

Především platí téměř samozřejmá věta:

Řetězové zlomky iracionálních čísel $\sqrt{N}$ nejsou ryze periodické. Neboť je-li $\alpha = \sqrt{N}$ kladným kořenem kvadratické rovnice $x^2 - N = 0$, je pro $N \neq 1$, což předpokládáme, $\alpha > 1$. Pro sdružený kořen α' je však $\alpha' < -1$, což odporuje podmínce $-1 < \alpha' < 0$. Tedy číslo $\sqrt{N}$ nevyhovuje větě 1 z předešlé kapitoly, a tedy nemá ryze periodický řetězový zlomek.

Jak vypadá perioda řetězového zlomku čísla $\sqrt{N}$, o tom mluví následující věta.

Věta 1. *Pro řetězový zlomek čísla $\sqrt{N}$, $N \in \mathrm{N}$, $\sqrt{N} \in \mathrm{I}$ platí*

$$\sqrt{N} = (q_1, \overline{q_2, q_3, \ldots, q_3, q_2, 2q_1}).$$

Slovy: Perioda řetězového zlomku čísla $\sqrt{N}$ se skládá ze dvou částí: ze symetrické části $(q_2, q_3, \ldots, q_3, q_2)$ a z posledního prvku $2q_1$, který je dvojnásobkem prvního prvku, jenž ovšem není součástí periody. Prohlédněte si tabulku řetězových zlomků druhých odmocnin v kapitole 9 a uvědomte si, že znění naší věty nikterak nevylučuje případy jako $(q_1, \overline{2q_1})$ (počet prvků v symetrické části periody je roven nule) nebo $(q_1, \overline{q_2, 2q_1})$ (počet prvků v symetrické části je roven jedné). Symetrická část může mít prostřední prvek (pak obsahuje lichý počet prvků) jako

$$\sqrt{54} = (7, \overline{2, 1, 6, 1, 2, 14})$$

nebo nemá prostřední prvek (a obsahuje sudý počet prvků) jako

$$\sqrt{53} = (7, \overline{3, 1, 1, 3, 14}).$$

(Doporučujeme čtenáři, aby si tyto dva příklady, které nejsou uvedeny v tabulce v kapitole 9, přepočítal.)

Důkaz. Budeme vyšetřovat číslo $q_1 + \sqrt{N}$, jehož řetězový zlomek je ryze periodický. Příklady takových čísel:

$$1 + \sqrt{2} = (\overline{2, 2}) = (\overline{2}),$$

$$1 + \sqrt{3} = (\overline{2, 1}),$$

$$2 + \sqrt{5} = (\overline{4, 4}) = (\overline{4}),$$

$$2+\sqrt{6}=(\overline{4, 2}),$$

$$2+\sqrt{7}=(\overline{4, 1, 1, 1}),$$

$$\ldots\ldots$$

$$7+\sqrt{50}=(\overline{14, 14})=(\overline{14}).$$

Dokažme toto tvrzení obecně. Označme $\alpha = q_1 + \sqrt{N}$. Je $q_1 = [\sqrt{N}]$ a víme, že $q_1 \in Z$ a platí

$$q_1 \leqq \sqrt{N} < q_1 + 1.$$

Je ovšem

$$\alpha = q_1 + \sqrt{N} > 1.$$

Pro číslo α' sdružené s α, tj. pro číslo $\alpha' = q_1 - \sqrt{N}$, je pak (stále předpokládáme $\sqrt{N} > 1$)

$$-1 < \alpha' < 0.$$

Nerovnosti pro čísla α, α' jsou však podmínkou, aby $\alpha = q_1 + \sqrt{N}$ mělo ryze periodický řetězový zlomek, jehož perioda zřejmě začíná prvkem $2q_1$:

$$\alpha = q_1 + \sqrt{N} = (\overline{2q_1, q_2, \ldots, q_k}).$$

Z věty 1 předešlé kapitoly víme, že ryze periodický řetězový zlomek

$$\overline{(q_k, q_{k-1}, \ldots, q_2, 2q_1)}$$

je vyjádřením čísla $-\frac{1}{\alpha'}$, kde α' je sdružené s α, tedy

$$\alpha' = q_1 - \sqrt{N}.$$

Je

$$-\frac{1}{\alpha'} = (q_k, q_{k-1}, \ldots, q_2, 2q_1, q_k, \ldots),$$

zároveň však také

$$-\frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{-q_1 + \sqrt{N}} = \frac{1}{\alpha - 2q_1} =$$

$$= \frac{1}{(0, q_2, \ldots, q_k, 2q_1, \ldots)}.$$

Výraz na pravé straně poslední rovnosti rozepíšeme:

$$\cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{2q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}}} = q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{2q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}}$$

Máme tedy $-\frac{1}{\alpha'} = (q_2, q_3, \ldots, q_k, 2q_1, q_2, \ldots)$. Srovnáme-li oba výrazy pro $-\frac{1}{\alpha'}$, dostáváme $q_k = q_2$, $q_{k-1} =$

$= q_3, \ldots, q_2 = q_k$. Tím jsme dostali symetrickou část periody. Zbytek periody je tvořen prvkem $2q_1$. Řetězový zlomek čísla $\sqrt{N}$ dostaneme z čísla $\alpha = q_1 + \sqrt{N}$ ihned odečtením q_1:

$$\sqrt{N} = (q_1, \overline{q_2, q_3, \ldots, q_3, q_2, 2q_1}).$$

Tím jsme větu dokázali.

Poslední věta této kapitoly se týká čísel $\sqrt{p}$, kde p je prvočíslo tvaru $4n + 1$, $n \in \mathrm{N}$, tedy jedno z čísel

$$5, 13, 17, 29, 37, 41, \ldots$$

Dříve než vyslovíme větu, povšimněme si těchto příkladů, na jejichž ověření stačí tabulka v kapitole 9:

$\sqrt{5} = (2, \overline{4})$: počet prvků v symetrické části periody $= 0$,

$\sqrt{13} = (3, \overline{1, 1, 1, 1, 6})$: počet prvků tamtéž $= 4$,

$\sqrt{17} = (4, \overline{8})$: počet prvků tamtéž $= 0$,

$\sqrt{29} = (5, \overline{2, 1, 1, 2, 10})$: počet prvků tamtéž $= 4$,

$\sqrt{37} = (6, \overline{12})$: počet prvků tamtéž $= 0$,

$\sqrt{41} = (6, \overline{2, 2, 12})$: počet prvků tamtéž $= 2$.

Zdá se tedy, že platí tvrzení: *Budiž p prvočíslo tvaru $4n + 1$ a označme n počet prvků v symetrické části periody řetězového zlomku čísla $\sqrt{p}$; potom je n sudé číslo a platí*

$$\sqrt{p}=(q_1, \overline{q_2, \ldots, q_m, q_m, \ldots, q_2, 2q_1}).$$

Důkaz tohoto tvrzení nebudeme uvádět.

Cvičení

1. Vypočítejte řetězové zlomky čísel (a) $\sqrt{58}$; (b) $\sqrt{85}$; (c) $\sqrt{101}$.
2. Co můžete vypozorovat z tabulky druhých odmocnin a také ze cvičení 1(c) pro řetězové zlomky čísel $\sqrt{n^2+1}$, kde $n \in \mathrm{N}$? Pokuste se svůj závěr dokázat.

13. LAGRANGEOVA VĚTA

Tato kapitola je věnována důkazu Lagrangeovy věty, která tvrdí, že řetězové zlomky kvadratických iracionalit jsou periodické, a obráceně, že hodnoty periodických řetězových zlomků jsou kvadratické iracionality. Vlastně jsme ji mohli dokázat už dříve, kdybychom například použili důkazu uvedeného v Chinčinovi [3]. Zde však dáváme přednost důkazu podle Davenporta [1] pro jeho stručnost; protože tento důkaz se opírá o pojem ryze periodického řetězového zlomku, je Lagrangeova věta zařazena až nyní.

Souvislost mezi periodickými a ryze periodickými řetězovými zlomky je v tom, že každý periodický řetězový zlomek

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, \dot{q}_{k+1}, \ldots, \dot{q}_n, q_{k+1}, \ldots), \qquad (1)$$

kde $n > k$, lze psát ve tvaru

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, r_{k+1}),$$

kde zbytek r_{k+1} je ryze periodický řetězový zlomek

$$r_{k+1}=(\overline{q_{k+1},\ldots,q_n}).$$

Věta (Lagrangeova). *Každou kvadratickou iracionalitu, tj. výraz tvaru* $\dfrac{P\pm\sqrt{N}}{Q}$ $(P, Q\in\mathrm{Z},\ N\in\mathrm{N}$ a $\sqrt{N}\in\mathrm{I})$, *lze vyjádřit periodickým řetězovým zlomkem. Každý periodický řetězový zlomek je hodnotou nějaké kvadratické iracionality.*

Důkaz. Buďte $\alpha=\dfrac{P+\sqrt{N}}{Q}$, $\alpha'=\dfrac{P-\sqrt{N}}{Q}$ sdružené kořeny nějaké kvadratické rovnice. Mezi α a kterýmkoli α_k platí vztah

$$\alpha=\frac{\alpha_k P_k+P_{k-1}}{\alpha_k Q_k+Q_{k-1}}.$$

Týž vztah platí mezi α', α'_k:

$$\alpha'=\frac{\alpha'_k P_k+P_{k-1}}{\alpha'_k Q_k+Q_{k-1}}$$

(rozumí se ovšem, že čísla P_{k-1}, P_k, Q_{k-1}, Q_k v obou vztazích jsou různá; nehodí se nám však ve druhém vztahu psát P'_{k-1}, P'_k, Q'_{k-1}, Q'_k).

Pro dostatečně velká k se hodnoty sblížených zlomků

$$\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}},\quad \frac{P_k}{Q_k}$$

příliš neliší a lze dokázat, že

$$\frac{\alpha' - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}}{\alpha' - \frac{P_k}{Q_k}}$$

konverguje k 1, přičemž poslední zlomek je střídavě menší a větší než 1. Dále je $Q_k > 0$, $Q_{k-1} > 0$, $\alpha'_k < 0$. Jestliže tedy volíme k tak, aby zlomek

$$\frac{\alpha' - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}}{\alpha' - \frac{P_k}{Q_k}}$$

byl menší než jedna, pak vzhledem k tomu, že $Q_{k-1} < Q_k$, bude $-1 < \alpha'_k < 0$. Pro toto k je ovšem α_k kvadratická iracionalita a platí $\alpha_k > 0$. Od prvku q_{k+1} bude tedy řetězový zlomek ryze periodický a dostáváme skutečně vyjádření (1).

Druhá část věty se dokazuje podobně. Budiž (1) periodický řetězový zlomek a pišme jej ve tvaru

$$\alpha = (q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha_k).$$

Číslo sdružené k číslu α označíme α' a píšeme

$$\alpha' = (q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha'_k).$$

Jako prve píšeme

$$\alpha = \frac{\alpha_k P_k + P_{k-1}}{\alpha_k Q_k + Q_{k-1}},$$

$$\alpha' = \frac{\alpha'_k P_k + P_{k-1}}{\alpha'_k Q_k + Q_{k-1}}$$

a dokážeme platnost nerovností

$$-1 < \alpha'_k < 0,$$

$$\alpha_k > 1.$$

Od prvku q_{k+1} je tedy řetězový zlomek pro α ryze periodický, tj. platí

$$\alpha = (q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha).$$

To však dává vyjádření pro α:

$$\alpha = \frac{\alpha P_k + P_{k-1}}{\alpha Q_k + Q_{k-1}},$$

jež vede ke kvadratické rovnici pro α:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0.$$

Je tedy α kvadratická iracionalita, tj. platí

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{N}}{Q},$$

kde P, $Q \in \mathrm{Z}$, $N \in \mathrm{N}$, $\sqrt{N} \in \mathrm{I}$. Věta je dokázána.

Dovedeme vyjádřit kvadratickou iracionalitu periodickým řetězovým zlomkem; takové příklady jsme počítali v kapitole 9. Nyní se budeme zabývat určováním kvadratické iracionality, která je podle Lagrangeovy věty hodnotou periodického řetězového zlomku.

Pro ryze periodické řetězové zlomky jsme tuto úlohu řešili v kapitole 11. Zbývá nám tedy hledat hodnotu neryze periodického řetězového zlomku (1). Poznamenejme, že skupina k prvků

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k)$$

se jmenuje *předperioda* a skupina $n-k$ prvků

$$(q_{k+1}, \ldots, q_n)$$

se jmenuje *perioda* neryze periodického řetězového zlomku (1).

Jsou dvě metody: neryze periodický řetězový zlomek převést na ryze periodický (to bude ukázáno v příkladu 1), přičemž používáme vzorce pro $\alpha=(q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha)$:

$$\alpha=\frac{\alpha P_k+P_{k-1}}{\alpha Q_k+Q_{k-1}}.$$

Někdy (při malých n, k) se obejdeme bez tohoto vzorce (příklad 2). Druhá metoda je obecnější a hodí se v každém případě. Při ní používáme vzorce $\alpha=(q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha_k)$, kde zbytek α_k je ryze periodický a dovedeme jej vypočítat metodou z kapitoly 11; pak užijeme vzorce

$$\alpha=\frac{\alpha_k P_k+P_{k-1}}{\alpha_k Q_k+Q_{k-1}}.$$

Tento postup ukážeme na příkladech 3 a 4.

Připomeňme si, že je $(\bar{2}) = 1 + \sqrt{2}$; v některých příkladech toho použijeme. (Čtenář to ví ze cvičení 1(a) kapitoly 11; pokud toto cvičení neřešil, ověří si tento vztah pohledem na řetězový zlomek čísla $\sqrt{2}$ v tabulce v kapitole 9.)

Příklad 1. Určeme hodnotu neryze periodického řetězového zlomku $\alpha = (1, \bar{2})$.

Řešení.

$$\alpha + 1 = (\overline{2, 2}) = (\bar{2}),$$

$$\alpha + 1 = 1 + \sqrt{2},$$

$$\alpha = \sqrt{2}.$$

Příklad 2. Totéž bez užití teorie řetězových zlomků (tj. bez znalosti hodnoty $(\bar{2}) = 1 + \sqrt{2}$).

Řešení.

$$\alpha + 1 = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}},$$

$$\alpha + 1 = 2 + \frac{1}{\alpha + 1},$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 2\alpha + 3,$$

$$\alpha^2 = 2,$$

$$\alpha = \sqrt{2}.$$

Poznámka. Modifikace tohoto postupu:

$$\alpha - 1 = (0, 2, 2, \ldots),$$

$$\alpha - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}} = \frac{1}{2 + \alpha - 1},$$

$$\alpha - 1 = \frac{1}{\alpha + 1},$$

$$\alpha^2 - 1 = 1,$$

$$\alpha^2 = 2,$$

$$\alpha = \sqrt{2}.$$

Příklad 3. Určeme hodnotu neryze periodického řetězového zlomku $\alpha = (0, 1, 1, \overline{2})$.

Řešení.

$$\alpha_3 = (2, 2, \ldots) = 1 + \sqrt{2},$$

$$\alpha = (0, 1, 1, \alpha_3),$$

q_k	0	1	1
P_k	0	1	1
Q_k	1	1	2

$$\alpha = \frac{\alpha_3 P_3 + P_2}{\alpha_3 Q_3 + Q_2},$$

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{2} + 1}{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2} + 3} = 2 - \sqrt{2}.$$

Příklad 4. Určeme hodnotu neryze periodického řetězového zlomku $\alpha=(1{,}5,\overline{2,3})$.

Řešení.

$$\alpha=(1,5,\alpha_2),$$

$$\alpha=\frac{\alpha_2P_2+P_1}{\alpha_2Q_2+Q_1},$$

q_k	1	5
P_k	1	6
Q_k	1	5

$$\alpha=\frac{6\alpha_2+1}{5\alpha_2+1},$$

$$\alpha_2=(2,3,\alpha_2):$$

q_k	2	3
P_k	2	7
Q_k	1	3

$$\alpha_2=\frac{7\alpha_2+2}{3\alpha_2+1},$$

$$3\alpha_2^2+\alpha_2=7\alpha_2+2,$$

$$3\alpha_2^2-6\alpha_2-2=0,$$

$$\alpha_2=\frac{6+\sqrt{60}}{6}=\frac{3+\sqrt{15}}{3},$$

$$\alpha=\frac{6\cdot\frac{3+\sqrt{15}}{3}+1}{5\cdot\frac{3+\sqrt{15}}{3}+1}=\frac{21+6\sqrt{15}}{18+5\sqrt{15}},$$

$$\alpha=\frac{24-\sqrt{15}}{17}.$$

Čtenáři jistě neušlo, že jsme počítali „obráceně“ příklady z kapitoly 9; tím je také zaručena kontrola správností výsledků.

Cvičení

1. Metodou příkladu 1 a 2 počítejte hodnotu řetězového zlomku $(1, \overline{1, 3})$.
2. Metodou příkladu 3 a 4 počítejte hodnotu řetězového zlomku $(2, 3, \overline{10, 1, 1, 1})$.

14. NEROVNOSTI

Pohled na tabulku druhých odmocnin nás přesvědčí, že se musíme zabývat také vztahem nerovnosti mezi nekonečnými řetězovými zlomky. Je např.

$$\sqrt{26}<\sqrt{27},$$

což znamená

$$(5, \overline{10})<(5, \overline{5, 10})$$

neboli

$$(5, 10, 10, 10, \ldots) < (5, 5, 10, 5, \ldots).$$

Dále např. z nerovností

$$\sqrt{38} < \sqrt{39} < \sqrt{40} < \sqrt{42}$$

plyne

$$(6, \overline{6, 12}) < (6, \overline{4, 12}) < (6, \overline{3, 12}) < (6, \overline{2, 12}).$$

Také musíme umět porovnat konečný řetězový zlomek s nekonečným, neboť je např.

$$(1, 2, 3, 4) > (\overline{1, 2, 3, 4}) = (1, 2, 3, 4, 1, 2, \ldots).$$

Naštěstí věty, které jsme odvodili v kapitole 5, platí i pro tyto případy. Poznámku, že ve větě 1 nezáleží na „počtu přidaných prvků", nyní chápeme jako „počet prvků může být nekonečný".

Jako v kapitole 5 rozlišíme dva případy. Nejprve budeme spolu porovnávat řetězový zlomek

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$

který je ovšem konečný, a řetězový zlomek

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots),$$

který vznikne z prvního přidáním nekonečně mnoha prvků q_{k+1}, $q_{k+2}, \ldots$ Jako příklad může posloužit už uvedená nerovnost

$$(1, 2, 3, 4) > (1, 2, 3, 4, 1, 2, \ldots)$$

nebo také

$$(3, 2, 5) < (3, 2, 5, 3, 2, \ldots).$$

Dáme-li poznámce z kapitoly 5, že nejsme schopni určit dostatečný počet prvků ve srovnávaném řetězovém zlomku, ten smysl, že toho nejsme schopni prostě proto, že prvků je nekonečně mnoho, vidíme, že věta 1 z kapitoly 5 řeší tento případ: pro sudé k je

$$(q_1, \ldots, q_k) > (q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots),$$

pro liché k je naopak

$$(q_1, \ldots, q_k) < (q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots).$$

Druhý případ se týká nerovností typu $(5, \overline{10}) < < (5, \overline{5, 10})$, ale také nerovností mezi dvěma řetězovými zlomky, z nichž jeden je konečný, např. $(3, 1, 2) < (3, \overline{2}) = = (3, 2, 2, \ldots)$.

V tomto případě poskytuje řešení věta 2 z kapitoly 5. Budiž $k \geqq 1$ počet identických prvních prvků řetězových zlomků

$$\alpha = (q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots),$$

$$\beta = (q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{k+1}, \ldots);$$

přitom nevylučujeme možnost, že některý z obou řetězových zlomků je konečný a má právě $k+1$ prvků.

Druhá věta kapitoly 5 pak říká: Nerovnost mezi čísly α, β závisí na čísle k a na nerovnosti mezi prvky q_{k+1}, q'_{k+1}.

Je-li k sudé, je pro $q_{k+1} > q'_{k+1}$ také $\alpha > \beta$; je-li k liché, je pro $q_{k+1} > q'_{k+1}$ obráceně $\alpha < \beta$. Pro $q_{k+1} < q'_{k+1}$ je smysl nerovnosti mezi α, β opačný.

To dokazuje uvedené příklady: $(5, \overline{10}) < (5, \overline{5, 10})$, $(6, \overline{6, 12}) < (6, \overline{4, 12}) < (6, \overline{3, 12}) < (6, \overline{2, 12})$, $(3, 1, 2) <$ $< (3, \bar{2})$.

Poznámka 1. V první části v kapitole 6 jsme měli nerovnost mezi řetězovými zlomky

$$(q_{k+2}, q_{k+1}, \ldots, q_2) > (q_{k+2}, q_{k+3}, \ldots).$$

Tam jsme ještě nemohli mluvit o tom, že řetězový zlomek na pravé straně je nekonečný; snažili jsme se celou věc odbýt poukazem na poznámku v kapitole 5, podle které nezáleželo na dalších prvcích řetězového zlomku čísla $\pi = (3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \ldots)$, abychom mohli tvrdit, že

$$(292, 1, 15, 7) > (292, 1, 1, \ldots).$$

Nyní je věc teprve v pořádku.

Poznámka 2. V kapitole 10 jsme postrádali tvrzení o jednoznačnosti nekonečného řetězového zlomku. Uvědomme si, že jediný případ, kdy nastává rovnost dvou řetězových zlomků s neidentickými prvky, je

$$(q_1, \ldots, q_n, 1) = (q_1, \ldots, q_n + 1),$$

což jsou dva konečné řetězové zlomky. Máme-li tedy dva řetězové zlomky s neidentickými prvky, z nichž aspoň jeden je nekonečný, platí mezi nimi vždy znak nerovnosti. Je tedy nekonečný řetězový zlomek

$$(q_1, q_2, \ldots)$$

jednoznačně určen svými prvky.

15. GEOMETRICKÉ ZNÁZORNĚNÍ SBLÍŽENÝCH ZLOMKŮ

V této kapitole se budeme zabývat geometrickým znázorněním, zachycujícím kladné reálné číslo α a sblížené zlomky jeho řetězového zlomku. Nejprve zavedeme pojem *mřížový bod.*

Mřížovým bodem souřadnicové roviny Oxy budeme nazývat takový bod, jehož obě souřadnice jsou celá čísla.

Budiž nyní α nějaké reálné (racionální nebo iracionální) číslo, které chceme geometricky znázornit. Použijeme k tomu přímky

$$y = \alpha x,$$

která pro $\alpha > 0$ probíhá 1. a 3. kvadrantem. Omezíme se na 1. kvadrant, neboť jen v něm budou znázorněny sblížené zlomky řetězového zlomku čísla α. Obrazy těchto sblížených zlomků však nebudou obrazy čísel $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}$ atd., nýbrž obrazy čísel $\frac{Q_1}{P_1}, \frac{Q_2}{P_2}$ atd. (jinak bychom číslo α musili znázorňovat přímkou $x = \alpha y$).

Přímka

$$y = \alpha x \tag{1}$$

prochází pro racionální α nekonečně mnoha mřížovými body. Budiž $\alpha = \frac{p}{q}$, tedy

$$qy = px;$$

mřížové body, kterými prochází přímka $y = \frac{p}{q} x$, jsou (q, p), $(2q, 2p)$, ...

Zajímavější je případ $\alpha \in \mathsf{I}$; pak přímka

$$y = \alpha x$$

prochází jediným mřížovým bodem $(0, 0)$.

Sestrojíme obrazy bodů $A_1 = (Q_1, P_1)$, $A_2 = (Q_2, P_2)$ atd. a doplníme je obrazy bodů $A_x = (1, 0)$, $A_y = (0, 1)$. Zřejmě je $A_y = (Q_0, P_0)$. Abychom také A_x mohli psát jako „sblížený zlomek", definujme ještě $P_{-1} = 0$, $Q_{-1} = 1$; pak je $A_x = (Q_{-1}, P_{-1})$.

Poznámka. Při $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$, $P_{-1} = 0$, $Q_{-1} = 1$ platí vztahy

$$P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}, \quad Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \tag{2}$$

pro každé $k \in \mathsf{N}$.

Zavedeme rovinný vektor $\overrightarrow{PQ}$ jako uspořádanou dvojici bodů (P, Q). Bod A můžeme vždy vyjádřit jako vektor $\overrightarrow{OA}$, kde $O = (0, 0)$ je počátek souřadnic.

Rovnice (2) můžeme napsat jako jedinou vektorovou rovnici

$$\overrightarrow{OA_k} = q_k \,.\, \overrightarrow{OA_{k-1}} + \overrightarrow{OA_{k-2}},$$

platnou pro všechna $k \in \mathrm{N}$. Protože je

$$\overrightarrow{A_{k-2}A_k} = \overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OA_{k-2}},$$

je

$$\overrightarrow{A_{k-2}A_k} = \overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OA_{k-2}} = q_k \,.\, \overrightarrow{OA_{k-1}},$$

tj. vektory $\overrightarrow{A_{k-2}A_k}$ a $\overrightarrow{OA_{k-1}}$ jsou rovnoběžné. Tedy platí

$$\overrightarrow{A_1A_3} \parallel \overrightarrow{OA_2},$$

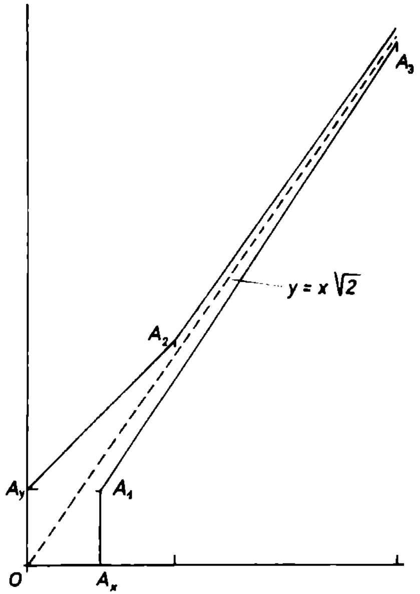
$$\overrightarrow{A_2A_4} \parallel \overrightarrow{OA_3},$$

atd.

Sestrojme alespoň pro jedno α grafické znázornění. Budiž $\alpha = \sqrt{2}$. Je $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{3}{2}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{7}{5}$, $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{17}{12}$, ..., a tedy

$$A_1 = (1, 1),\ A_2 = (2, 3),\ A_3 = (5, 7),\ A_4 = (12, 17) \ldots.$$

Body A_i s lichým indexem leží pod přímkou $y = \alpha x$, body se sudým indexem leží nad ní. To platí i o bodech $A_x = A_{-1}$, $A_y = A_0$. Přímka $y = \alpha x$ dělí první kvadrant na dvě části. V každé z nich vzniká lomená čára. Rohy obou těchto čar jsou body zobrazující sblížené zlomky. Kon-



strukce obou čar je patrná z obrázku. Mezi oběma čarami neleží žádné mřížové body. Je-li α iracionální, jsou obě lomené čáry nekonečné.

Cvičení

Sestrojte podobný obrázek pro $\alpha = \sqrt{3}$.