Vojtěch Jarník

Několik poznámek o Hausdorffově míře

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., XL (1930), No. 9, 8 p

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500458

ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK XL. ČÍSLO 9.

Několik poznámek o Hausdorffově míře.

Napsal
Vojtěch Jarník.

Předloženo dne 7. února 1930.

Tato práce obsahuje několik drobností, týkajících se Hausdorffova pojmu míry.[1]) Při tom omezuji se na množství reálných čísel, čili na množství bodová v jednorozměrném Cartézském prostoru; pod „množstvím bodovým" budu tedy vždy rozuměti množství bodů na reálné ose číselné. Za základ bude mi sloužiti definice 2. v citované práci Hausdorffově (str. 166):

Budiž A množství bodové; budiž $\lambda(x)$ funkce, jež je pro $x > 0$ definována, rostoucí a spojitá; budiž

$$\lim_{x=0} \lambda(x) = 0^{2)}$$

(každou funkci těchto vlastností budu nazývati „přípustnou funkcí"). Budiž $\rho > 0$. Pokryjme množství A nejvýše spočetným množstvím intervalů, jejichž délky označím $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$; při tom budiž $l_n < \rho$. Sestrojme součet $\Sigma \lambda(l_n)$ (sčítá se podle n). Dolní hranici těchto součtů, sestrojených pro všechna taková pokrytí, pro něž $l_n < \rho$, označme

$$L_\rho[A; \lambda(x)].$$

Potom existuje limita

$$\lim_{\rho=0} L_\rho[A; \lambda(x)] = L[A; \lambda(x)].$$

Tato limita jest vnější měrou ve smyslu Carathéodoryově;[3]) všechna Borelova množství jsou podle této definice vnější míry měřitelna.

[1]) F. Hausdorff, Dimension und äußeres Maß, Math. Annalen 79 (1919), str. 157—179.

[2]) Zde a v analogických případech rozumím pod limitou limitu zprava. Specialisuji ihned pro jednorozměrný Cartézský prostor.

[3]) C. Carathéodory, Über das lineare Maß von Punktmengen, Göttinger Nachrichten 1914, str. 404—426.

Ve dvou pojednáních [4])[5]) zabýval jsem se významem Hausdorffovy míry pro otázky z teorie diofantických aproximací. Mimo jiné odvodil jsem tuto větu:[6])

Budiž $\alpha > 2$; budiž M_α množství oněch čísel θ intervalu $< 0, 1 >$, pro něž nerovnost

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \leqq \frac{1}{q^\alpha}$$

má nekonečně mnoho řešení v celistvých číslech p, q $(q > 0)$. Potom jest

$$L\,(M_\alpha;\, x^s) = 0 \text{ pro } s > \frac{2}{\alpha},$$

$$L\,(M_\alpha;\, x^s) = +\infty \text{ pro } 0 < s < \frac{2}{\alpha}.$$

Místo množství M_α uvažujme množství N_α, jež je definováno takto: Budiž $\alpha > 2$; N_α je množství všech čísel θ, jež mají tyto vlastnosti:

1. $0 \leqq \theta \leqq 1$,
2. existuje posloupnost párů celistvých čísel

$$p_1, q_1;\ p_2, q_2;\ \ldots;\ p_n, q_n;\ \ldots,$$

taková, že

$$\lim_{n=\infty} q_n = +\infty,\quad \theta - \frac{p_n}{q_n} = O\left(\frac{1}{q_n^\alpha}\right).$$

Zřejmě jest $M_\alpha \subset N_\alpha \subset M_{\alpha'}$ pro $2 < \alpha' < \alpha$; tedy podle citované věty

$$\left\{ \begin{aligned} &L\,(N_\alpha;\, x^s) = 0 \text{ pro } s > \frac{2}{\alpha}, \\ &L\,(N_\alpha;\, x^s) = +\infty \text{ pro } 0 < s < \frac{2}{\alpha}. \end{aligned} \right. \tag{1}$$

Vzniká tedy přirozeně otázka, existuje-li přípustná funkce $\lambda\,(x)$ taková, že

$$0 < L\,[N_\alpha;\, \lambda\,(x)] < +\infty.$$

Tuto otázku zodpovíme negativně větou:

Věta 1. *Je-li* $\alpha > 2$, $\lambda\,(x)$ *přípustná funkce, jest buď*

$$L\,[N_\alpha;\, \lambda\,(x)] = 0 \textit{ nebo } L\,[N_\alpha;\, \lambda\,(x)] = +\infty.$$

Množství N_α jest množství Borelovo (totiž $G_{\delta\sigma}$) a tedy měřitelné, vezmu-li za vnější míru $L\,[A;\, \lambda\,(x)]$.

Vzniká otázka, existují-li ještě jednodušší množství, mající vlastnost, vyslovenou ve větě 1. Tuto otázku zodpovíme kladně:

[4]) Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Maß, Recueil mathém. de la Société math. de Moscou (v tisku).

[5]) Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Prace matematyczno-fizyczne (v tisku).

[6]) Loc. cit. [4]), § 2.

Věta 2. *Existuje ohraničené dokonalé množství M takové, že pro každou přípustnou funkci $\lambda(x)$ jest buď*

$$L[M;\lambda(x)] = 0 \text{ nebo } L[M;\lambda(x)] = +\infty.$$

Je-li Lebesgueova míra množství M [to jest číslo $L(M; x)$] kladná, jest ovšem $L[M;\lambda(x)] = +\infty$ pro každou přípustnou funkci $\lambda(x)$, pro kterou

$$\lim_{x=0} \frac{\lambda(x)}{x} = +\infty.$$

Naopak platí:

Věta 3. *Je-li $L(M; x) = 0$, existuje přípustná funkce $\lambda(x)$ taková, že*

$$\lim_{x=\infty} \frac{\lambda(x)}{x} = +\infty,\ L[M;\lambda(x)] < +\infty.$$

Je-li M množství nejvýše spočetné, jest samozřejmě $L[M:\lambda(x)] = 0$ pro každou přípustnou funkci $\lambda(x)$.

Naopak platí:

Věta 4. *Je li M nespočetné množství Borelovo, existuje přípustná funkce $\lambda(x)$ taková, že*

$$L[M;\lambda(x)] > 0.$$

Důkaz věty 1. Budiž $\alpha > 2$; budiž $\lambda(x)$ přípustná funkce. Patří-li bod θ k množství N_α, patří k množství N_α též bod $a+\theta$, je-li a racionální, $0 \leq a + \theta \leq 1$. Jestliže tedy k, k', l jsou celá čísla,

$$l > 0,\ 0 \leq k < k' < l,$$

potom průřez

$$< \frac{k'}{l}, \frac{k'+1}{l} > N_\alpha$$

vzniká z průřezu

$$< \frac{k}{l}, \frac{k+1}{l} > N_\alpha$$

translací. Tedy jest

$$L\left(< \frac{k'}{l}, \frac{k'+1}{l} > N_\alpha; \lambda(x)\right) = L\left(< \frac{k}{l}, \frac{k+1}{l} > N_\alpha; \lambda(x)\right)$$

a ježto

$$L[N_\alpha;\lambda(x)] = \sum_{k=0}^{l-1} L\left(< \frac{k}{l}, \frac{k+1}{l} > N_\alpha; \lambda(x)\right),$$

platí

$$L\left(< \frac{k}{l}, \frac{k+1}{l} > N_\alpha; \lambda(x)\right) = \frac{1}{l} L[N_\alpha;\lambda(x)]. \tag{2}$$

Ježto každý otevřený interval (a, b), kde $0 \leq a < b \leq 1$, lze vyjádřiti jako součet spočetného množství takových intervalů $< \frac{k}{l}, \frac{k+1}{l} >$, jež nemají vnitřních bodů společných, jest podle (2) a podle známých vlastností míry patrně

$$L\,[< a, b > N_\alpha\,;\,\lambda\,(x)] = L\,[(a, b)\,N_\alpha\,;\,\lambda\,(x)] = (b - a)\,L\,[N_\alpha\,;\,\lambda\,(x)]. \quad (3)$$

Množství N_α má podle (1) Lebesgueovu míru $L\,(N_\alpha\,;\,x)$ rovnou nule (což lze ostatně snadno nahlédnouti přímo). Lze tedy nalézti spočetné množství uzavřených intervalů $i_1, i_2, \ldots$, ležících v intervalu $< 0, 1 >$, jež pokrývají N_α a jejichž délky mají součet menší než $\frac{1}{2}$. Budiž l_n délka intervalu i_n. Předpokládejme, že

$$L\,[N_\alpha\,;\,\lambda\,(x)] = m < +\infty.$$

Potom jest podle (3)

$$0 \leqq m = L\,[N_\alpha\,;\,\lambda\,(x)] \leqq \sum_{n=1}^{\infty} L\,[i_n\,N_\alpha\,;\,\lambda\,(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} l_n\,L\,[N_\alpha\,;\,\lambda\,(x)] \leqq \frac{1}{2}\,m\,;$$

tedy $m = 0$, jak bylo dokázati.

Důkaz věty 2. Budiž P známé dokonalé množství Cantorovo, t. j. množství, jež vznikne takto: z intervalu $< 0, 1 >$ odstraňme uprostřed otevřený interval délky $\frac{1}{3}$, tedy interval $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Z každého ze zbývajících intervalů $< 0, \frac{1}{3} >$, $< \frac{2}{3}, 1 >$ odstraňme opět uprostřed otevřený interval délky $1 : 3^2$; z každého ze zbývajících intervalů $< 0, \frac{1}{9} >$, $< \frac{2}{9}, \frac{3}{9} >$, $< \frac{6}{9}, \frac{7}{9} >$, $< \frac{8}{9}, 1 >$ odstraňme opět uprostřed otevřený interval délky $1 : 3^3$ atd. do nekonečna. To, co zbude, jest právě množství P. Označme znakem P_n onu část množství P, jež leží v intervalu $< 0, 1 : 3^n >$. Množství P skládá se patrně ze 2 částí, shodných s P_1, nebo ze 4 částí, shodných s P_2, obecně z 2^n částí, shodných s P_n. Je-li tedy $\lambda\,(x)$ přípustná funkce, je patrně

$$L\,[P_n\,;\,\lambda\,(x)] = \frac{1}{2^n}\,L\,[P\,;\,\lambda\,(x)]. \quad (4)$$

Je-li $n \geqq 1$ (n celé), jest mezi styčnými intervaly množství P právě 2^{n-1} intervalů, jež mají délku $1 : 3^n$; označme je $(a_{n,1}, b_{n,1})$, $(a_{n,2}, b_{n,2})$, ... Budiž $P_{n,i}$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}$) množství, jež vznikne z P_n translací velikosti $a_{n,i}$ na pravo. Položme

$$M = P + P_{1,1} + \sum_{i=1}^{2} P_{2,i} + \sum_{i=1}^{2^2} P_{3,i} + \ldots; \quad (5)$$

M je zřejmě množství ohraničené a dokonalé; je-li $L\,[P\,;\,\lambda\,(x)] = \alpha$, je patrně podle (4) a (5)

$$L\,[M\,;\,\lambda\,(x)] = \alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{2\,\alpha}{4} + \frac{4\,\alpha}{8} + \ldots;$$

je-li tedy $\alpha = 0$, je $L\,[M;\lambda(x)]_- = 0$; je-li

$$0 < \alpha \leqq +\infty, \text{ je } L\,[M;\lambda(x)]_- = +\infty,$$

čímž je důkaz proveden.

Důkaz věty 3. Budiž dáno množství M; budiž $L\,(M;\ x) = 0$. Definujme posloupnost kladných čísel $c_1, c_2,$ takto:

Zvolme určitým způsobem spočetné množství intervalů, pokrývající množství M tak, že součet jejich délek je menší než $1 : 1^3$; délky těch intervalů označme $l_{1,1}, l_{2,1}\ l_{3,1}, \ldots,$ takže

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_{k,1} < \frac{1}{1^3}$$

Zaveďme toto označení: je-li $\varepsilon > 0$, budiž $\sum\limits_{(\varepsilon)} l_{k,1}$ rovno součtu všech oněch čísel $l_{k,1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, jež jsou menší než ε; obdobný význam mají v dalším symboly

$$\sum_{(\varepsilon)} l_{k,2}, \sum_{(\varepsilon)} l_{k,3},$$

Zvolme číslo c_1 tak, že

$$0 < c_1 < 1, \sum_{(c_1)} l_{k,1} < \frac{1}{2^3}. \tag{6}$$

Budiž nyní $n > 1$ a buďtež kladná čísla

$$l_{k,i}, c_i \qquad (k = 1, 2, 3, \qquad i = 1, 2, \qquad , n-1)$$

již zvolena tak, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_{k,i} < \frac{1}{i^3}\ ;\ \sum_{(c_i)} l_{k,j} < \frac{1}{(i+1)^3}\,(1 \leqq j \leqq i);$$

$$l_{k,i} < \frac{c_{i-1}}{10}\ (i > 1)\,;\ c_i < \frac{c_{i-1}}{10}\ (i > 1).$$

Zvolme nyní spočetné množství intervalu — jejich délky označme $l_{1,n}, l_{2,n}, \ldots$ — jež pokrývá množství M a pro něž

$$l_{k,n} < \frac{c_{n-1}}{10}, \sum_{k=1}^{\infty} l_{k,n} < \frac{1}{n^3}; \tag{7}$$

zvolme číslo c_n tak, že

$$0 < c_n < \frac{c_{n-1}}{10}, \sum_{(c_n)} l_{k,i} < \frac{1}{(n+1)^3}\ (1 \leqq i \leqq n). \tag{8}$$

Sestrojme nyní funkci $\lambda(x)$, definovanou pro $x > 0$, takto:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x) &= x \text{ pro } x \geqq c_1 \\ \lambda(x) &= n\,x \text{ pro } c_n \leqq x \leqq \frac{c_{n-1}}{10}\ (n \geqq 2) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\lambda(x) = (n+1)\frac{c_n}{10} + \left(x - \frac{c_n}{10}\right)\frac{n - \dfrac{n+1}{10}}{1 - \dfrac{1}{10}} =$$

$$= n\,c_n - (c_n - x)\frac{n - \dfrac{n+1}{10}}{1 - \dfrac{1}{10}} \quad \text{pro } \frac{c_n}{10} \leqq x \leqq c_n \ (n \geqq 1). \tag{10}$$

Ježto podle (8) jest $\lim\limits_{n=\infty} c_n = 0$, jest funkce $\lambda(x)$ definována pro $x > 0$; $\lambda(x)$ je spojitá pro $x > 0$; podle (9) je

$$\lambda\left(\frac{c_n}{10}\right) = \frac{n+1}{10}\,c_n < n\,c_n = \lambda(c_n);$$

tedy je $\lambda(x)$ rostoucí funkcí. Pro $c_n \leqq x \leqq \frac{c_{n-1}}{10}$ je $\frac{\lambda(x)}{x} = n$ podle (9); pro $\frac{c_n}{10} \leqq x \leqq c_n$ je podle (10) $n \leqq \frac{\lambda(x)}{x} \leqq n+1$; jest tedy $\lim\limits_{x=0} \frac{\lambda(x)}{x} = +\infty$. Dále jest

$$\frac{\lambda(x)}{x} \leqq n \ \text{pro } c_n \leqq x \leqq c_{n-1}. \tag{11}$$

Ježto podle (6), (8) jest $c_n < 1 : 10^{n-1}$, jest podle (11)

$$\lambda(x) \leqq 10^{-n+2}\, n \ \text{pro } c_n \leqq x \leqq c_{n-1},$$

tedy $\lim\limits_{x=0} \lambda(x) = 0$. Jest tedy $\lambda(x)$ přípustná funkce. Zbývá dokázati, že

$$L\,[M; \lambda(x)] = 0. \tag{12}$$

Budiž $n > 1$; množství M jest pokryto spočetným množstvím intervalů, jichž délky jsou $l_{1,n}, l_{2,n}, \ldots$. Jest podle (11), (7), (8)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(l_{k,n}) \leqq n \sum_{k=1}^{\infty} l_{k,n} + (n+1) \sum_{(c_n)} l_{k,n}$$

$$+ (n+2) \sum_{(c_{n+1})} l_{k,n} + (n+3) \sum_{(c_{n+2})} l_{k,n} + \ldots$$

$$< \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots.$$

Tedy jest

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(l_{k,n}) = 0;$$

ježto podle (6), (7), (8) je $l_{k,n} < 10^{-n+1}$, je tím rovnice (12) dokázána.

Důkaz věty 4. Ježto každé nespočetné množství Borelovo obsahuje množství ohraničené a dokonalé, stačí předpokládati, že množství M

jest dokonalé a ohraničené. Obsahuje-li množství M všechny body nějakého intervalu, jest $L(M; x) > 0$ a tedy tvrzení naší věty triviální. Omezíme se tedy na případ, že M jest dokonalé, ohraničené, nehusté množství; budiž a dolní, b horní hranice množství M. Sestrojme dokonalé, nehusté množství M', jehož dolní hranice jest 0, horní hranice 1 a jehož Lebesgueova míra jest $\frac{1}{2}$.[7])

Jak známo, lze nalézti funkci $f(x)$ spojitou a rostoucí v intervalu $< a, b >$, jež zobrazuje interval $< a, b >$ na interval $< 0, 1 >$ tak, že $f(x)$ leží v M' tehdy a jen tehdy, leží-li x v M.[8]) Definujeme funkci $\lambda(x)$ pro $x > 0$ takto:

$$\lambda(x) = \frac{x}{b-a} \quad \text{pro } x > b-a,$$

$$\lambda(x) = \max_{a \leqq x_1 \leqq b-x} [f(x_1 + x) - f(x_1)] \quad \text{pro } 0 < x \leqq b-a. \tag{13}$$

Funkce $\lambda(x)$ je pro $x > 0$ patrně kladná, rostoucí, spojitá; dále jest $\lim_{x=0} \lambda(x) = 0$. Jest tedy $\lambda(x)$ přípustná funkce. Budiž nyní $< \alpha_1, \beta_1 >$, $< \alpha_2, \beta_2 >, \ldots$ konečné nebo spočetné množství intervalu, jež pokrývají množství M, $a \leqq \alpha_n < \beta_n \leqq b$. Intervaly

$$< f(\alpha_1), f(\beta_1) >, \; < f(\alpha_2), f(\beta_2) >, \ldots$$

pokrývají tedy množství M', a tedy jest

$$\sum_{n=1}^{\infty} [f(\beta_n) - f(\alpha_n)] \geqq \frac{1}{2}.$$

Podle (13) jest však

$$f(\beta_n) - f(\alpha_n) \leqq \lambda(\beta_n - \alpha_n)$$

[7]) Takové množství M' dá se sestrojiti na př. tímto způsobem: Z intervalu $< 0, 1 >$ odstraňme uprostřed otevřený interval délky $\frac{1}{4}$; z každého ze zbývajících intervalů $< 0, \frac{3}{8} >$, $< \frac{5}{8}, 1 >$ odstraňme uprostřed otevřený interval délky $1 : 4^2$; z každého ze zbývajících čtyř intervalů $< 0, \frac{5}{32} >$, $< \frac{7}{32}, \frac{3}{8} >$, $< \frac{5}{8}, \frac{25}{32} >$, $< \frac{27}{32}, 1 >$ odstraňme uprostřed otevřený interval délky $1 : 4^3$ atd. Body intervalu $< 0, 1 >$, jež nejsou obsaženy v žádném z odstraněných intervalů, tvoří dokonalé množství nehusté, jehož dolní hranice jest 0, horní 1 a jehož Lebesgueova míra jest $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{2^2}{4^3} + \ldots\right) = \frac{1}{2}$.

[8]) Konečné styčné intervaly množství M buďte $J_1, J_2, \ldots$; konečné styčné intervaly množství M' buďte $K_1, K_2, \ldots$. Při tom budiž označení tak voleno, že K_n leží na levo od K_m, leží-li J_n na levo od J_m (to lze učiniti). Je-li $J_n = (a_n, b_n)$, $K_n = (c_n, d_n)$, položme $f(x) = c_n + (x - a_n) \dfrac{d_n - c_n}{b_n - a_n}$ pro $a_n \leqq x \leqq b_n$ a doplňme tuto funkci v ostatních bodech intervalu $< a, b >$ tak, aby byla spojitá v $< a, b >$ (což lze učiniti). Funkce $f(x)$ má pak žádané vlastnosti, jak čtenář snadno nahlédne.

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\,(\beta_n - \alpha_n) \geqq \frac{1}{2};$$

tedy $L\,[M;\ \lambda\,(x)] \geqq \frac{1}{2}$, jak bylo dokázati.

Poznámka. Důkaz této věty spočívá zdánlivě podstatně na předpokladu, že M jest množství bodové *na přímce*. Snadno dá se však tato věta rozšířiti i na množství v prostorech vícerozměrných. Budiž na příklad v rovině, opatřené dvěma pravoúhlými osami u, v, dáno dokonalé ohraničené množství M; kolmé průměty množství M na osy u, v označme M_u, M_v; tyto průměty jsou uzavřená (tedy Borelova) množství, z nichž aspoň jedno, třeba M_u, jest nespočetné. Je-li $\lambda\,(x)$ přípustná funkce, pokryjme množství M nejvýše spočetným množstvím *kruhů*, jejichž průměry označíme l_1, l_2, ... a sestrojme součet $\Sigma\,\lambda\,(l_n)$. Hausdorffova míra množství M, kterou označíme též $L\,[M;\ \lambda\,(x)]$, jest pomocí součtů $\Sigma\,\lambda\,(l_n)$ definována obdobně jako pro množství bodová na přímce. Projekce kruhu o průměru l_n na osu u jest interval délky l_n; pokrývají-li nějaké kruhy množství M, pokrývají jejich projekce množství M_u; tedy jest $L\,[M;\ \lambda\,(x)] \geqq L\,[M_u;\ \lambda\,(x)]$. Podle 4. věty lze tedy nalézti přípustnou funkci $\lambda\,(x)$ tak, že $L\,[M;\ \lambda\,(x)] > 0$, jak bylo dokázati.