Elementární funkce

Eduard Čech (author): Elementární funkce. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků v Praze, 1944.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402500

PROF. Dr EDUARD ČECH:

ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

SE 7 OBRAZCI

VYŠLO JAKO 13. SVAZEK SBÍRKY KRUH
VYDÁVANÉ JEDNOTOU ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
ZA REDAKCE DR F. VYČICHLA

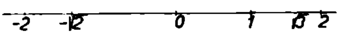
Předmluva.

Funkce logaritmická a funkce goniometrické, které jsou hlavním předmětem této knížky, probírají se na střední škole dosti podrobně, ale tak, že v popředí zájmu je „praktický“ význam těch funkcí, kdežto zde jde především o jejich přesnou aritmetickou definici a o přesné odvození jejich základních vlastností ze zvolené definice. Doufám, že pečlivý čtenář může z četby této knížky získati mnohem více nežli pouhou hlubší znalost několika speciálních funkcí. Při spisování knížky mi tanul na mysli cíl vyšší; bude ho dosaženo, přesvědčím-li čtenáře, že logický rozbor základních pojmů není ani méně zajímavý ani obtížnější než počítání „příkladů“. Zvykne-li si čtenář četbou knížky na to, že se v matematice nemá zajímati jen o vzorce a o početní zručnost, nýbrž že si má všímati také logické stavby matematických dedukcí, pak má za sebou hlavní potíže, které se začátečníkovi staví v cestu při studiu kterékoli partie tak zvané vyšší matematiky.

Při rozboru studovaných funkcí vycházím od jejich elementární definice. Vyšší matematika umožňuje mnohem rychlejší odvození základních vlastností našich funkcí, vyjde-li se místo toho na př. od definice nekonečnými řadami nebo pomocí diferenciálních rovnic. Ale nehledě na to, že takové definice se začátečníkovi zdají umělé, je postup na jejich základě opravdu rychlejší pouze tehdy, nepočítají-li se obtíže, které existence iracionálních čísel staví v cestu jakémukoli přesnému výkladu o vyšší matematice. Postup, pro který jsem se rozhodl v této knížce, se těmto potížím nevyhýbá, nýbrž překonává je, a to takovým způsobem, který spojuje logickou přesnost s geometrickou názorností.

I. Úvod.

1. **Číselná osa.** Úvahy, které budeme prováděti v této knížce, jsou sice většinou aritmetické, ale často se dají dobře objasniti geometricky. Proto začneme známým geometrickým znázorňováním čísel na přímce. Přímka, na které si znázorňujeme čísla, jmenuje se **číselná osa**. Volíme ji obyčejně ve vodorovné poloze. Abychom si na ní mohli znázorňovat čísla, musíme si zvolit určitou **jednotku délky** a určitý bod přímky, kterému se často říká **počátek**. Počátek nám znázorňuje číslo 0. Čísla větší než nula neboli **čísla kladná** jsou znázorněna body ležícími napravo od počátku, čísla menší než nula neboli **čísla záporná** jsou znázorněna body ležícími nalevo od počátku. Kladné číslo $+c$ je znázorněno bodem, který leží napravo od počátku ve



Obr. 1.

vzdálenosti c jednotek délky od počátku; záporné číslo $-c$ je znázorněno bodem, který leží nalevo od počátku ve vzdálenosti c jednotek délky od počátku. V obr. 1 jsou znázorněna čísla 0, 1, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, 2, -2. Protože vlastním předmětem našich úvah nejsou body, nýbrž čísla, a protože body na číselné ose jsou pro nás pouze obrazy čísel, není třeba příliš ostře rozlišovati mezi číslem a bodem, který je obrazem čísla. Proto mluvíme krátce na př. o bodu $\sqrt{3}$ nebo o bodu $-\sqrt{2}$ místo o bodu, který je obrazem čísla $\sqrt{3}$ nebo čísla $-\sqrt{2}$. Tedy místo „počátek“ můžeme také říkat „bod 0“.

Pro čísla, která zde máme na mysli, tedy pro nulu, čísla kladná a čísla záporná, užíváme souhrnného názvu **čísla reálná**. Nulu nepočítáme ani mezi čísla kladná ani mezi čísla záporná.

Zvolme si dvě reálná čísla r a s; budiž třeba r menší než s, což píšeme $r < s$ nebo $s > r$. Na číselné ose leží bod r nalevo od bodu s. Body r a s omezí na číselné ose jakousi úsečku U. V aritmetických úvahách, při kterých body zastupují čísla, užívá se obyčejně místo slova úsečka slova interval. Interval U označujeme obyčejně symbolem

$$\langle r, s \rangle,$$

t. j. napíšeme obě čísla r a s za sebou (menší napřed), oddělíme je čárkou a celek dáme do úhlové závorky. Do intervalu $\langle r, s \rangle$ počítáme také oba body r a s samy; o ostatních bodech intervalu $\langle r, s \rangle$ pravíme, že leží uvnitř intervalu $\langle r, s \rangle$. Tedy x leží v intervalu $\langle r, s \rangle$, když

$$r \leqq x \leqq s$$

a x leží uvnitř intervalu $\langle r, s \rangle$, když

$$r < x < s.$$

Délka intervalu $\langle r, s \rangle$ neboli vzdálenost bodu r od bodu s se rovná $(s - r)$ jednotkám délky; ale poněvadž jednotku délky si myslíme jednou pro vždy pevně zvolenu, můžeme krátce říkat, že délka intervalu $\langle r, s \rangle$ je číslo $s - r$.

Cvičení 1. Jakou vzájemnou polohu mají intervaly $\langle r_1, s_1 \rangle$ a $\langle r_2, s_2 \rangle$, když

1) $s_1 = r_2$; 2) $s_1 < r_2$; 3) $s_2 = r_1$; 4) $s_2 < r_1$; 5) $r_1 < r_2$, $s_1 = s_2$;
6) $r_1 < r_2 < s_1 < s_2$; 7) $r_1 < r_2 < s_2 < s_1$?

2. Nerovnosti. Početní pravidla pro čtyři základní početní výkony, na př.

$$a + b = b + a,\ ab = ba,\ a(b + c) = ab + ac,$$

$$a \,.\, 0 = 0,\ a \,.\, 1 = 1,\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},\ a - (b - c) = a - b + c,$$

jsou vám asi dobře známa ze střední školy. Méně dobře jsou vám asi známa početní pravidla, jimiž se řídí počítání s nerovnostmi. Základní pravidla o nerovnostech jsou přesně vyslovena a dokázána v odst. 14 mé knížky *Co je a nač je vyšší matematika?* (Cesta k vědění, svazek 20). Odkazy na tuto knížku budu zde činiti několikrát; proto ji budu citovati zkratkou VM.

Protože pravidla o nerovnostech jsou zde pro nás důležitá, buďtež zde raději znovu uvedena. Běží v podstatě o čtyři pravidla; nebudeme je zde aritmeticky dokazovat — to bylo provedeno ve VM — ale znázorníme si je na ose číselné. Že číslo r je menší než číslo s, to se jeví na číselné ose tím, že bod r je nalevo od bodu s.

Zvolme si nějaké číslo c, třeba kladné. Přiřadíme-li každému číslu x číslo $f(x) = x + c$, pošine se každý bod z polohy x do polohy $f(x)$, která leží o délku c napravo od polohy x. Je-li bod a nalevo od bodu b, je zřejmé, že také pošinutý bod $f(a)$ je nalevo od pošinutého bodu $f(b)$. Aritmeticky řečeno, je-li $a < b$, je také $a + c < b + c$. Je-li číslo c záporné, pak leží bod $f(x) = x + c$ o délku $|c|$ nalevo od bodu x. Je-li zase a nalevo od b, leží opět pošinutý bod $f(a)$ nalevo od pošinutého bodu $f(b)$, t. j. i při záporném c můžeme z nerovnosti $a < b$ soudit na nerovnost $a + c < b + c$. Že tak můžeme činiti i pro $c = 0$, je úplně samozřejmé. Nevíme-li, že $a < b$, nýbrž jen poněkud méně, totiž že $a \leqq b$, pak můžeme souditi, že $a + c \leqq b + c$, při čemž zase je c úplně libovolné číslo.

Poznali jsme názorný obsah prvního pravidla o nerovnostech: v nerovnosti smíme na obou stranách přičísti stejné číslo.

Zvolme si nyní kladné číslo c a předpokládejme napřed, že c je větší než 1. Přiřaďme každému číslu x číslo $f(x) = x \cdot c$. Je-li x napravo od počátku, je také $f(x)$ napravo od počátku, je-li x nalevo od počátku, je také $f(x)$ nalevo od počátku. Ale v obou případech je vzdálenost bodu $f(x)$ od počátku větší, a to c-krát větší, nežli vzdálenost bodu x od počátku. Nahradíme-li každý bod x bodem $f(x)$, změní se vzhled číselné osy tak, jako bychom ji pozorovali zvětšovacím sklem, které zvětšuje v poměru $c : 1$. Je-li nyní bod a nalevo od bodu b, pak i pod zvětšovacím sklem se jeví a nalevo od b, t. j. z nerovnosti $a < b$ můžeme souditi na nerovnost $ac < bc$. Je-li kladné číslo c menší než 1 a je-li zase $f(x) = x \cdot c$, tu se nyní vzdálenosti od počátku zmenšují v poměru $c : 1$ a zase můžeme z nerovnosti $a < b$ souditi na nerovnost $ac < bc$. Že tak můžeme činiti i pro $c = 1$, je úplně samozřejmé. Poznali jsme názorný obsah druhého pravidla o nerovnostech: v nerovnosti $a < b$ smíme na obou stranách násobiti stejným kladným číslem. Je-li dána méně ostrá nerovnost $a \leqq b$, můžeme při kladném c souditi na méně ostrou nerovnost $ac \leqq bc$ a tentokráte je to soud správný i pro $c = 0$.

Přiřaďme každému číslu x číslo $f(x) = -x$. Je-li x napravo od počátku, je $f(x)$ nalevo od počátku; je-li x nalevo od počátku, je $f(x)$ napravo od počátku. V obou případech je $f(x)$ stejně daleko od počátku jako x. Tedy $f(x)$ vznikne z x překlopením kolem počátku. Je-li nyní bod a nalevo od bodu b, je překlopený bod $f(a)$ napravo od překlopeného bodu $f(b)$, t. j. z nerovnosti $a < b$ můžeme souditi na nerovnost $-a > -b$. Ze slabší nerovnosti $a \leqq b$ soudíme zase na slabší nerovnost $-a \geqq -b$. Tím jsme poznali třetí pravidlo o nerovnostech.

Když každému **kladnému** číslu x přiřadíme kladné číslo $f(x) = \frac{1}{x}$, pak součin $x \,.\, f(x)$ je stále roven jedné. Zvětšíme-li činitele x, musí se druhý činitel zmenšit, aby součin zůstal nezměněn. Proto z nerovnosti $0 < a < b$ můžeme souditi na nerovnost $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. To je čtvrté pravidlo o nerovnostech.

Podle našich pravidel o nerovnostech můžeme řešiti nerovnosti podobně, jako se na střední škole řeší rovnice. Mějme na př. nerovnost

$$x + 7 < 3x - 5. \tag{2·1}$$

Na obou stranách smíme přičísti 5; dostaneme

$$x + 12 < 3x; \tag{2·2}$$

na obou stranách smíme přičísti $-x$; dostaneme

$$12 < 2x; \tag{2·3}$$

na obou stranách smíme násobiti **kladným** číslem $\frac{1}{2}$; dostaneme

$$6 < x \tag{2·4}$$

neboli

$$x > 6. \tag{2·5}$$

Obráceně ze (2·5) můžeme souditi na (2·4); ve (2·4) můžeme na obou stranách násobiti **kladným** číslem 2 a dostaneme (2·3); ve (2·3) můžeme na obou stranách přičísti x a dostaneme (2·2); ve (2·2) můžeme na obou stranách přičísti -5 a dostaneme (2·1). Tedy (2·5) je řešení nerovnosti (2·1).

Cvičení 2. Řešte nerovnost

a) $2(3x - 4) + 4(x + 5) < 3(2x + 8)$;

b) $5(x - 7) + 10 > 2(x + 7)$;

c) $\frac{2x - 1}{5} - \frac{x + 3}{2} < \frac{3x - 5}{5}$;

d) $\frac{2(x - 4)}{5} - \frac{2x - 3}{10} > \frac{4x + 1}{2} + 1$.

3. Posloupnosti. Posloupnost čísel dostaneme, když každému celému kladnému n přiřadíme podle nějakého zákona určité číslo a_n; jednotlivá čísla

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{3·1}$$

nazýváme **členy** posloupnosti (a_1 je první člen, a_2 druhý atd.). Na střední škole se místo slova posloupnost někdy užívá slova řada; ale ve vědecké literatuře převládá výraz posloupnost. Členy řady bývají dány obecným zákonem; je-li na př. $a_n = 1 - \frac{n^2}{8}$, pak prvních 5 členů posloupnosti (3·1) je

$$\tfrac{7}{8}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{8}, -1, -\tfrac{17}{8}.$$

Často bývá posloupnost dána rekurentně, to znamená, že je dán přímo první člen (nebo několik počátečních členů) a potom je dán předpis, jak počítati následující člen na základě předcházejících. Na př. rekurentním předpisem $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n + 1)\, a_n$ je určena známá posloupnost faktoriálů ($a_n = n!$).

Jsou-li dána dvě čísla a, d, pak posloupnost určená rekurentním předpisem $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$ je t. zv. aritmetická posloupnost s konstantní diferencí d. Jsou-li dána dvě čísla a, q, pak posloupnost určená rekurentním předpisem $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n q$ je t. zv. geometrická posloupnost s konstantním kvocientem q. Aritmetické a geometrické posloupnosti se podrobně probírají na střední škole. Znáte asi vzorce

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d, \quad a_n = a_1 q^{n-1}$$

pro obecný člen aritmetické a geometrické posloupnosti. Znáte také vzorce pro součet prvých n členů aritmetické a geometrické posloupnosti. Prvý z nich nebudeme potřebovat; druhý zní v případě $a_1 = 1$:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{3·2}$$

Vzorec (3·2) platí ovšem pouze pro $q \neq 1$. Dá se dokázati všelijak, na př. tak zvanou indukcí. Při důkaze indukcí se napřed přesvědčíme, že je vzorec správný pro $n = 1$ a potom z předpokladu, že vzorec platí pro určité n, odvodíme, že zůstane v platnosti, i když místo n máme $n + 1$. U vzorce (3·2) pro $n = 1$ smysl levé strany je číslo 1 a také pravá strana má hodnotu 1. Platí-li vzorec (3·2) pro určité n, jest

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) + q^n =$$
$$= \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{q^n (q - 1)}{q - 1} = \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

takže vzorec platí i pro $n + 1$.

Cvičení **3.** T. zv. Fibonacciova (čti Fibonačiova) posloupnost je dána rekurentním předpisem $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Napište prvých dvacet členů posloupnosti! Dále dokažte vzorec

$$a_m a_n + a_{m+1} a_{n+1} = a_{m+n} \tag{3·3}$$

a z něho odvoďte, že součet čtverců dvou sousedních členů Fibonacciovy posloupnosti je zase člen téže posloupnosti. Přesvědčte se o tom v prvých deseti případech!

4. Aritmetické a geometrické středy. Aritmetickým středem prvých n členů posloupnosti (3·1) rozumíme číslo

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}. \tag{4·1}$$

Cvičení 4. Dokažte, že b_n je nejvýš rovno největšímu a alespoň nejmenšímu z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Věta 1. Když $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$, pak je také $b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$

Důkaz. Jest $a_1 < a_{n+1}$, $a_2 < a_{n+1}, \ldots, a_n < a_{n+1}$, tedy

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) < na_{n+1}.$$

Přičteme-li na obou stranách $n\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, dostaneme

$$(n + 1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) < n\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}).$$

Násobíme-li na obou stranách kladným číslem $1 : n\,(n + 1)$, vyjde

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}}{n+1}.$$

Cvičení 5. Když $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$, pak je také $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$

Cvičení 6. Budiž $q > 1$. Ve větě 1 volte $a_n = q^{n-1}$ a dokažte, že

$$\frac{q-1}{1} < \frac{q^2-1}{2} < \frac{q^3-1}{3} < \ldots$$

Cvičení 7. Budiž $q > 1$. Ve cvičení 5 volte $a_n = q^{-(n-1)}$ a dokažte, že

$$\frac{q-1}{q} > \frac{q^2-1}{2q^2} > \frac{q^3-1}{3q^3} > \ldots$$

Budiž $a_n > 0$ pro všecka n. Geometrickým středem prvých n členů posloupnosti (3·1) rozumíme kladné číslo

$$c_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \tag{4·2}$$

Ve zbytku tohoto odstavce je $a_n > 0$.

Cvičení 8. Dokažte, že c_n je nejvýš rovno největšímu a alespoň rovno nejmenšímu z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Cvičení 9. Když $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$, pak také $c_1 < c_2 < c_3 < \ldots$

Cvičení 10. Když $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$, pak také $c_1 > c_2 > c_3 > \ldots$

Věta 2 (t. zv. věta Cauchyova).*) Jest

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}. \tag{4·3}$$

Důkaz. I. Nejprve dokážeme, že (4·3) platí pro $n = 2$. Jest $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}) \geqq 0$, t. j. $a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geqq 0$, tedy $a_1 + a_2 \geqq 2\sqrt{a_1 a_2}$ neboli

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1 a_2}.$$

II. Při určitém n předpokládejme, že platí (4·3), tedy také

$$\sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{2n}} \leqq \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}}{n} \tag{4·4}$$

a dokažme, že je potom $c_{2n} \leqq b_{2n}$, neboli, že platnost vzorce (4·3) se zachová, píšeme-li v něm $2n$ místo n. Je však

$$c_{2n} = \sqrt[2n]{a_1 a_2 \ldots a_n \,.\, a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{2n}} = \sqrt{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \,.\, \sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{2n}}},$$

tedy podle (4·3) a (4·4)

$$c_{2n} \leqq \sqrt{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}}{n}}.$$

Napravo máme geometrický střed dvou čísel, který podle odst. I je nejvýš roven aritmetickému středu týchž čísel. Tedy

$$c_{2n} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}}{n}\right) = b_{2n}.$$

III. Z I a II následuje indukcí, že (4·3) platí, je-li číslo n mocninou dvojky. Je-li nyní n libovolné, zvolme k tak, že $n < 2^k$ a všimněme si 2^k kladných čísel

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \underbrace{c_n, c_n, \ldots, c_n}_{(2^k - n)\text{-krát}}.$$

Víme, že geometrický střed těchto 2^k čísel je nejvýš roven jejich aritmetickému středu, t. j. že

$$\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \ldots a_n \,.\, c_n^{2^k - n}} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + (2^k - n)\, c_n}{2^k}. \tag{4·5}$$

Avšak $a_1 a_2 \ldots a_n = c_n{}^n$, tedy $a_1 a_2 \ldots a_n \,.\, c_n{}^{2^k - n} = c_n{}^{2^k}$, takže ve (4·5) nalevo je číslo c_n. Tedy

*) Čti Košiova.

$$2^k c_n \leqq a_1 + a_2 + \ldots + a_n + (2^k - n)\, c_n,$$

takže

$$n c_n \leqq a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n b_n,$$

tedy $c_n \leqq b_n$.

Cvičení **11.** Proberte znovu důkaz věty 2 a dokažte, že ve (4·3) platí znamení rovnosti pouze tehdy, když všecka čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si jsou rovna.

5. Limita posloupnosti. Nejdůležitější posloupnosti jsou konvergentní posloupnosti. Pravíme, že posloupnost (3·1) je konvergentní a že má limitu α, což píšeme

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha, \tag{5·1}$$

když pro všecka velká n je a_n přibližně rovné číslu α. Přesně řečeno, znamená vztah (5·1) toto: Je-li dáno libovolně malé kladné číslo ε, existuje index p takový, že pro všecka $n > p$ je

$$| a_n - \alpha | < \varepsilon.$$

Totéž můžeme vyjádřiti stejně přesně různými jinými způsoby. Můžeme na př. také říci, že vztah (5·1) znamená toto: Je-li dán jakýkoli interval J, uvnitř kterého je bod α, pak jsou **skoro všecka** a_n uvnitř intervalu J. Rčení „skoro všecka" znamená, že sice mohou existovati výjimečné indexy n, pro které tomu tak není, že však počet těch výjimečných n je jistě konečný.

Posloupnost (3·1) se nazývá nulová, je-li $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Cvičení **12.** Je-li posloupnost (3·1) konvergentní a má-li limitu α, pak posloupnost

$$a_1 - \alpha,\ a_2 - \alpha,\ a_3 - \alpha,\ \ldots \tag{5·2}$$

je nulová. Obráceně, je-li (5·2) nulová posloupnost, pak platí (5·1).

Cvičení **13.** Jsou-li (3·1) a

$$b_1, b_2, b_3, \ldots \tag{5·3}$$

nulové posloupnosti, pak také $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$.

Ze cvičení 12 a 13 plyne:

Věta 3. Platí-li (5·1) a

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \beta, \tag{5·4}$$

pak $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$, $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$.

Cvičení 14. Platí-li (5·1) a je-li c libovolné číslo, je $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$.

Posloupnost (3·1) se jmenuje omezená, existuje-li číslo c takové, že $|a_n| < c$ pro všecka n.

Cvičení 15. Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Cvičení 16. Je-li (3·1) nulová posloupnost a je-li (5·3) omezená posloupnost, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Věta 4. Platí-li (5·1) a (5·4), pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$.

Důkaz. Posloupnost

$$\alpha(b_1 - \beta),\ \alpha(b_2 - \beta),\ \alpha(b_3 - \beta),\ \ldots$$

je nulová podle cvič. 12 a 14; posloupnost

$$b_1(a_1 - \alpha),\ b_2(a_2 - \alpha),\ b_3(a_3 - \alpha),\ \ldots$$

je nulová podle cvič. 12, 15 a 16. Protože

$$a_n b_n - \alpha\beta = \alpha(b_n - \beta) + b_n(a_n - \alpha),$$

je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ podle cvič. 12 a 13.

Cvičení 17. Budiž $a_n \neq 0$ pro všecka n; budiž $\alpha \neq 0$. Platí-li (5·1), pak

$$\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \frac{1}{a_3},\ \ldots$$

je omezená posloupnost.

Věta 5. Budiž $a_n \neq 0$ pro všecka n; budiž $\alpha \neq 0$. Platí-li (5·1), pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}.$$

Důkaz. Podle cvič. 12 a 14 je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha}(a_n - \alpha) = 0$. Tedy podle cvič. 16 a 17 je také $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha a_n}(a_n - \alpha) = 0$. Avšak

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha a_n}(a_n - \alpha),$$

takže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$ podle cvič. 12.

Když posloupnost (3·1) není konvergentní, jmenuje se **divergentní**. Mezi divergentními posloupnostmi jsou pozoruhodné takové, pro něž

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty. \tag{5·5}$$

Vztah (5·5) znamená, že pro **velká** n jsou čísla a_n **kladná a velká**. Přesně řečeno, znamená (5·5) toto: Je-li dáno libovolně velké kladné číslo c, pak existuje index p takový, že pro všecka $n > p$ je $a_n > c$. Jinak řečeno, skoro všecka a_n jsou větší než libovolně předepsané kladné číslo.

Vztah

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty \tag{5·6}$$

znamená, že $\lim\limits_{n \to \infty} (-a_n) = \infty$.

Limity **konvergentních** posloupností se jmenují **vlastní limity**; limity v (5·5) a (5·6) jsou **nevlastní limity**.

Cvičení 18. Udejte příklad divergentní posloupnosti, pro kterou neplatí ani (5·5) ani (5·6).

Cvičení 19. Budiž $a_n > 0$ pro všecka n. Je-li $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, je $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$.

Cvičení 20. Budiž $a_n \neq 0$ pro všecka n. Platí-li (5·5) nebo (5·6), pak $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

Věta 6. Budiž $q > 1$. Pak $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = \infty$.

Důkaz. Je-li q celé, je to zřejmé. Ale je-li q jen o málo větší než 1, na př. $q = 1{,}0001$, není to tak zřejmé. Avšak ze (3·2) plyne

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} > n,$$

takže $q^n > 1 + n(q - 1)$, tedy $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = \infty$.

Věta 7. Budiž $0 < q < 1$. Pak $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

To plyne z věty 6 a cvič. 20.

Říkáme, že (3·1) je:

[1] **neklesající posloupnost**, když

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \dots;$$

[2] **nestoupající posloupnost**, když

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \dots$$

Společný název pro oba případy je monotonní posloupnost. Mezi neklesající posloupnosti patří všecky stoupající posloupnosti, pro které

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$$

Mezi nestoupající posloupnosti patří všecky klesající posloupnosti, pro které

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$$

Věta 8. Budiž (3·1) neklesající posloupnost. Existuje-li číslo c takové, že $a_n \leqq c$ pro všecka n, pak posloupnost (3·1) je konvergentní.

Přesný důkaz této věty je udán ve VM, odst. 36, I. Z názoru je správnost věty celkem zřejmá. Každý bod a_{n+1} buďto splyne s bodem a_n nebo je od něho napravo. Protože však žádné a_n není napravo od bodu c, nezbývá patrně bodům a_n nic jiného, než aby se hromadily k určitému místu α, načež platí (5·1).

Věta 9. Budiž (3·1) nestoupající posloupnost. Existuje-li číslo c takové, že $a_n \geqq c$ pro všecka n, pak posloupnost (3·1) je konvergentní.

Důkaz. Zřejmě

$$-a_1, -a_2, -a_3, \ldots \tag{5·7}$$

je neklesající posloupnost. Pro všecka n je $-a_n \leqq -c$, takže (5·7) je konvergentní podle věty 8. Tedy také (3·1) je konvergentní podle cvič. 14.

Dodatek k větě 8. Za předpokladů věty 8 budiž $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$. Pak je $a_n \leqq \alpha$ pro všecka n. Je-li (3·1) stoupající posloupnost, je dokonce $a_n < \alpha$ pro všecka n.

Dodatek k větě 9. Za předpokladů věty 9 budiž $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$. Pak je $a_n \geqq \alpha$ pro všecka n. Je-li (3·1) klesající posloupnost, je dokonce $a_n > \alpha$ pro všecka n.

Oba dodatky jsou zřejmé.

Věty 8 a 9 jsou velmi důležité pro vyšetřování limit. Prokážeme si to na dvou příkladech.

Příklad 1. Budiž $c > 0$, $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$. Pak je

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}. \tag{5·8}$$

Důkaz. Víme-li, že naše posloupnost je konvergentní, je vše lehké. Neboť platí-li (5·1), pak je podle věty 3 $\lim_{n \to \infty} (c + a_n) = c + \alpha$ a podle věty 4 $\lim_{n \to \infty} a_n^2 = \alpha^2$. Protože je $a_{n+1}^2 = c + a_n$, musí býti $\alpha^2 = c + \alpha$. Mimoto zřejmě $a_n > 0$ pro všecka n, takže α nemůže býti záporné. Z toho následuje, že α je kladný kořen rovnice $\alpha^2 - \alpha - c = 0$, tedy

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}. \tag{5·9}$$

Celá potíž je jen v tom, že musíme napřed dokázat, že posloupnost (3·1) je konvergentní. Avšak

$$a_{n+1}^2 = c + a_n, \quad a_{n+2}^2 = c + a_{n+1},$$

takže

$$a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = (a_{n+2} - a_{n+1})(a_{n+2} + a_{n+1}) = a_{n+1} - a_n.$$

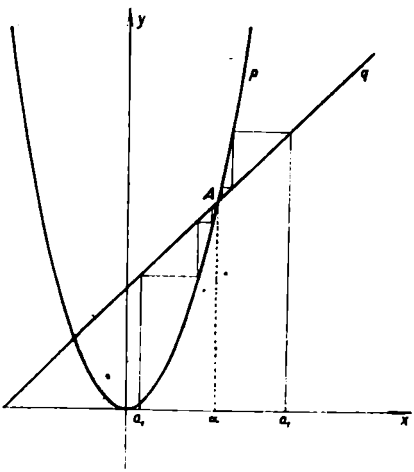
Jelikož $a_n > 0$ pro všecka n, plyne z toho, že diference

$$a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ a_4 - a_3,\ \ldots \tag{5·10}$$

jsou buďto všecky rovny nule, nebo všecky kladné, nebo všecky záporné. Je tedy (3·1) monotonní posloupnost a podle vět 8 a 9 potřebujeme ještě jen vědět, že je to omezená posloupnost. Zvolme $k > c$, $k > a_1$, $k > 2$. Dokážeme, že $a_n < k$ pro všecka n. Protože $a_n > 0$, budeme hotovi. Nerovnost $a_n < k$ je zřejmá pro $n = 1$: je-li však správná pro určité n, pak je

$$a_{n+1}^2 = c + a_n < k + k = 2k < k^2,$$

takže také $a_{n+1} < k$.



Obr. 2.

Posloupnost, kterou jsme právě aritmeticky vyšetřili, dá se pěkně znázornit geometricky a výsledek (5·8) se pak zdá zřejmý. Viz obr. 2, ve kterém je silněji vytažena parabola p s rovnicí $y = x^2$ a přímka q s rovnicí $y = c + x$. Parabola p a přímka q se protnou ve dvou bodech, z nichž jeden leží napravo od osy y; je to bod $A \equiv (\alpha; c + \alpha)$, kde α má hodnotu (5·9). Zvolme si na ose x bod $(a_1; 0)$, kde a_1 je kladné a různé od α. Rovnoběžka s osou y vedená bodem $(a_1; 0)$ určí na přímce q bod $(a_1; c + a_1)$; rovnoběžka s osou x vedená bodem $(a_1; c + a_1)$ určí na parabole p bod $(a_2;\, c + a_1)$; rovnoběžka s osou y vedená bodem $(a_2;\, c + a_1)$ určí na přímce q bod $(a_2;\, c + a_2)$; rovnoběžka s osou x vedená bodem $(a_2;\, c + a_2)$ určí na parabole p bod $(a_3;\, c + a_2)$; a tak můžeme pokračovati dále. Obdržíme posloupnost bodů

$$(a_1;\, c + a_1),\ (a_2;\, c + a_1),\ (a_2;\, c + a_2),\ (a_3;\, c + a_2),\ (a_3;\, c + a_3),\ \ldots;$$

z názoru je patrné, že se tyto body blíží poloze $A \equiv (\alpha;\, c + \alpha)$, což je geometrické znázornění vztahu (5·8). Mimo to je z obrazce patrné, že posloupnost (3·1) stoupá, je-li $a_1 < \alpha$, a klesá, je-li $a_1 > \alpha$.

Cvičení 21. Dokažte aritmeticky, že právě studovaná posloupnost stoupá, je-li $a_1 < \alpha$, a klesá, je-li $a_1 > \alpha$.

Příklad 2. Budiž $c > 0$, $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{c}{1 + a_n}$. Pak je

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\sqrt{1 + 4c} - 1}{2}. \tag{5·11}$$

Důkaz. Víme-li, že (3·1) je konvergentní, je to zase snadné. Pro všecka n je $a_n > 0$; platí-li (5·1), je tedy $\alpha \geqq 0$. Podle vět 3, 5 a cvič. 14 je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c}{1 + a_n} = \frac{c}{1 + \alpha}.$$

Tedy

$$\alpha = \frac{c}{1 + \alpha},\ \alpha \geqq 0$$

a z toho plyne

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 + 4c} - 1}{2}. \tag{5·12}$$

Zase však musíme napřed dokázat, že posloupnost (3·1) je konvergentní. Je-li $a_1 = a_2$, je $a_n = \alpha$ pro všecka n; tento případ můžeme vyloučit, takže $a_2 - a_1 \neq 0$. Jest

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{c}{1 + a_{n+1}} - \frac{c}{1 + a_n} = \frac{-c}{(1 + a_{n+1})(1 + a_n)}\,(a_{n+1} - a_n)$$

neboli

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}}\,(a_{n+1} - a_n).$$

Z toho následuje předně, že diference (5·10) jsou střídavě kladné a záporné, a za druhé, že absolutní hodnoty těch diferencí jsou stále menší a menší. Z toho pak plyne, že z posloupností

$$\begin{gathered} a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7,\ \ldots \\ a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8,\ \ldots \end{gathered} \tag{5·13}$$

jedna stoupá a druhá klesá. Mimo to je jasné, že všecky členy leží mezi oběma čísly a_1, a_2, takže podle vět 8 a 9 jsou obě posloupnosti (5·13) konvergentní. Je tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \alpha_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha_2$ a zbývá patrně pouze dokázati, že $\alpha_1 = \alpha_2$. Podle dodatků k větám 8 a 9 je jistě $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Protože

$$a_{n+1} = \frac{c}{1 + a_n}, \text{ jest}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{c}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}}, \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \frac{c}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}}$$

neboli

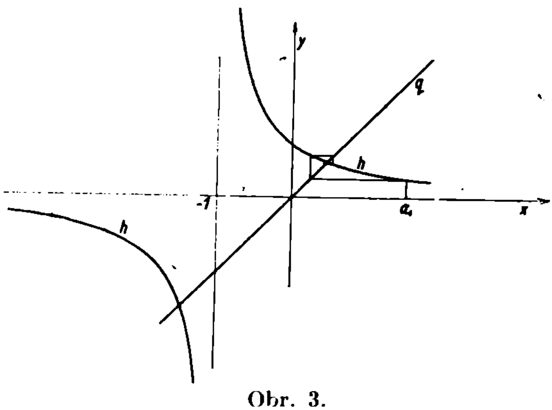
$$\alpha_2 = \frac{c}{1 + \alpha_1}, \quad \alpha_1 = \frac{c}{1 + \alpha_2}. \tag{5·14}$$

Z (5·14) se najde velmi snadným počtem $\alpha_1 = \alpha_2$. Ostatně můžeme z (5·14) usoudit $\alpha_1 = \alpha_2$ bez jakéhokoli počtu takto. Sestavíme-li znovu posloupnost vytvořenou naším rekurentním předpisem, volíce však místo čísla a_1 za prvý člen číslo α_1, tu podle (5·14) dostaneme posloupnost

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \tag{5·15}$$

o které tedy musí platiti vše, co bylo výše řečeno o posloupnosti (3·1). Z toho následuje $\alpha_1 = \alpha_2$, neboť jinak by absolutní hodnoty diferencí v posloupnosti (5·15) musily klesati, což je ovšem nemožné.

Také tento příklad se dá znázorniti geometricky. Viz obr. 3, ve kterém je silněji vytažena hyperbola h s rovnicí $y = \dfrac{c}{1 + x}$ a přímka q s rovnicí $y = x$. Hyperbola h a přímka q se protnou ve dvou bodech, z nichž jeden leží v prvém kvadrantu; je to bod $(\alpha; \alpha)$, kde α má hodnotu (5·12). Zvolme si na ose x bod $(a_1, 0)$, kde $a_1 > 0$, $a_1 \neq \alpha$. Bodem $(a_1; 0)$ veďme rovnoběžku s osou y až k jejímu průsečíku s hyperbolou h; tímto průsečíkem vedeme rovnoběžku s osou x až k průsečíku s přímkou q; novým průsečíkem vedeme zase rovnoběžku s osou y až k průsečíku s hyperbolou q atd. Tak dostaneme posloupnost bodů



Obr. 3.

$$(a_1; a_2), (a_2; a_2), (a_2; a_3), (a_3; a_3), \ldots, \tag{5·16}$$

které leží střídavě na hyperbole h a na přímce q. Z názoru je patrné, že se body (5·16) blíží poloze $(\alpha; \alpha)$, což je geometrické znázornění vztahu (5·11). Dále je z názoru patrné, že každý člen posloupnosti (3·1), členem a_3 počínajíc, leží mezi oběma předcházejícími členy, takže z posloupností (5·13) jedna stoupá a druhá klesá.

6. Řetězy intervalů. Členy posloupnosti nemusí býti vždycky čísla. Často je na př. užitečné vyšetřovati posloupnost intervalů. Důležité jsou takové posloupnosti intervalů

$$\langle r_1, s_1\rangle, \langle r_2, s_2\rangle, \langle r_3, s_3\rangle, \ldots \tag{6·1}$$

u kterých je každý následující interval částí intervalu předcházejícího. Takovou posloupnost nazveme řetězem intervalů.

Cvičení **22.** Je-li (6·1) řetěz intervalů, pak

$$r_1, r_2, r_3, \ldots \tag{6·2}$$

je neklesající posloupnost a

$$s_1, s_2, s_3, \ldots \tag{6·3}$$

je nestoupající posloupnost. Obráceně, když (6·2) je neklesající posloupnost, když (6·3) je nestoupající posloupnost a když

$$r_n < s_n \tag{6·4}$$

pro všecka n, pak (6·1) je řetěz intervalů.

Je-li (6·1) řetěz intervalů, pak posloupnost (6·2) je konvergentní podle věty 8 a cvičení 22; neboť zřejmě $r_n < s_1$ pro všecka n. Také posloupnost (6·3) je konvergentní podle věty 9 a cvičení 22, neboť zřejmě $s_n > r_1$ pro všecka n. Položme

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha, \tag{6·5}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \beta. \tag{6·6}$$

Cvičení **23.** Budiž (6·1) řetěz intervalů. Je-li $\alpha \leqq x \leqq \beta$, pak bod x leží ve všech intervalech (6·1). Obráceně, když bod x leží ve všech intervalech (6·1), jest $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

Cvičení **24.** Když bod x neleží ve všech intervalech řetězu (6·1), pak leží x nejvýš v konečně mnoha intervalech (6·1).

Zvláště důležité jsou takové řetězy intervalů, u kterých je $\alpha = \beta$. Takové řetězy nazveme vytvořující řetězy. Podle cvič. 23 mají vytvořující řetězy tu charakteristickou vlastnost, že existuje jediný bod x obsažený ve všech intervalech řetězu; je to ovšem bod $x = \alpha = \beta$. Určitěji mluvíme o vytvořujícím řetězu bodu x.

Cvičení 25. Je-li řetěz intervalů (6·1) vytvořující, pak je

$$\lim_{n \to \infty} (s_n - r_n) = 0, \tag{6·7}$$

t. j. délky intervalů (6·1) tvoří nulovou posloupnost. Obráceně každý řetěz intervalů splňující podmínku (6·7) je vytvořující řetěz.

Cvičení 26. Budiž (6·1) řetěz intervalů a budiž $r_1 > 0$. Je-li

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{r_n} = 1, \tag{6·8}$$

pak (6·1) je vytvořující řetěz a obráceně, je-li (6·1) vytvořující řetěz (a stále $r_1 > 0$), pak platí (6·8).

Zvolme si libovolné číslo $c > 0$. Sestrojíme si určitý vytvořující řetěz bodu $\sqrt{c}$. Vyjděme od libovolného kladného čísla r_1 menšího než $\sqrt{c}$, takže $r_1^2 < c$, a položme

$$s_1 = \frac{c}{r_1}.$$

Pak je $s_1^2 > c$, takže bod $\sqrt{c}$ leží uvnitř intervalu $\langle r_1, s_1 \rangle$. Tím jsme si opatřili první interval hledaného řetězu. Tento interval splňuje podmínku

$$r_n s_n = c. \tag{6·9}$$

Je-li při určitém n dán interval $\langle r_n, s_n \rangle$ $(0 < r_n < s_n)$, splňující podmínku (6·9), pak položme

$$r_{n+1} = \frac{c}{s_{n+1}}, \quad s_{n+1} = \frac{r_n + s_n}{2}. \tag{6·10}$$

Podle (6·9) je číslo $\sqrt{c}$ geometrickým středem čísel r_n a s_n. Číslo s_{n+1} je aritmetickým středem týchž čísel, takže $s^2_{n+1} > c$ podle věty 2 a cvič. 11. Z toho následuje $r^2_{n+1} < c$, takže číslo $r_{n+1} < \sqrt{c} < s_{n+1}$. Tedy $\langle r_{n+1}, s_{n+1} \rangle$ je interval, uvnitř kterého je bod $\sqrt{c}$. Ježto

$$r_n < s_n, \quad s_{n+1} = \frac{r_n + s_n}{2},$$

je $s_{n+1} < s_n$. Ježto

$$r_n = \frac{c}{s_n}, \; r_{n+1} = \frac{c}{s_{n+1}}, \; 0 < s_{n+1} < s_n,$$

je $r_n < r_{n+1}$. Tedy celý interval $\langle r_{n+1}, s_{n+1} \rangle$ leží uvnitř intervalu $\langle r_n, s_n \rangle$, takže (6·1) je řetěz intervalů. Mají-li α a β význam (6·5) a (6·6), tu ze vztahu

$$2s_{n+1} = r_n + s_n$$

následuje $2\beta = \alpha + \beta$ neboli $\alpha = \beta$. Tedy (6·1) je vytvořující řetěz a to ovšem vytvořující řetěz bodu $\sqrt{c}$, který leží uvnitř všech intervalů (6·1).

Vytvořující řetězy, o kterých jsme právě mluvili, poskytují velmi pohodlný prostředek k výpočtu druhých odmocnin na velký počet desetinných míst. Počítejme na př. $\sqrt{10}$. Volme $r_1 = 3$. Pak je $s_1 = \frac{10}{3}$, $s_2 = \frac{19}{6}$, $r_2 = \frac{60}{19}$, $s_3 = \frac{721}{228}$, $r_3 = \frac{2280}{721}$, $s_4 = \frac{1039681}{328776}$, $r_4 = \frac{3287760}{1039681}$. Dělením najdeme

$$\begin{aligned} s_4 &= 3{,}162\,277\,660\,169\,842\,080\,930\,481\,543\,664\ldots, \\ r_4 &= 3{,}162\,277\,660\,166\,916\,583\,067\,306\,221\,812\ldots \end{aligned} \tag{6·11}$$

Porovnáním vyjde prvých 11 desetinných míst čísla $\sqrt{10} = 3{,}162\,277\,660\,16\ldots$ Můžeme však bez dalšího dělení určit spolehlivě mnohem více míst. Položme

$$s_n = \sqrt{c} + \varepsilon_n, \tag{6·12}$$

takže $\varepsilon_n > 0$ a

$$s_n = \sqrt{c}\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}}\right), \quad r_n = \frac{\sqrt{c}}{1 + \dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}}}.$$

Pak je

$$s_{n+1} = \frac{r_n + s_n}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{c}\left[1 + \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}} + \frac{1}{1 + \dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}}}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{c}\,\frac{\left(1 + \dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}}\right)^2 + 1}{1 + \dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{c}\,\frac{2 + \dfrac{2\varepsilon_n}{\sqrt{c}} + \dfrac{\varepsilon_n^2}{c}}{1 + \dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}}} =$$

$$= \sqrt{c}\left[1 + \frac{\varepsilon_n^2}{2c\left(1 + \dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{c}}\right)}\right] < \sqrt{c}\left(1 + \frac{\varepsilon_n^2}{2c}\right) = \sqrt{c} + \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{c}}.$$

Tedy

$$\varepsilon_{n+1} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{c}}. \tag{6·13}$$

Ze (6·10) dostaneme sečtením a dělením dvěma

$$s_5 = 3{,}162\,277\,660\,168\,379\,331\,998\,893\,882\,738\ldots,$$

při čemž poslední místo není úplně spolehlivé. Ze (6·13) plyne, že s_5 je mnohem lepší přiblížení k číslu $\sqrt{10}$ nežli s_4, takže jistě

$$\varepsilon_4 = s_4 - \sqrt{c} < 2\,.\,10^{-12}.$$

Tedy podle (6·13)

$$\varepsilon_5 = s_5 - \sqrt{c} < \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot 10^{-24},$$

a z toho následuje, že čísla s_5 a $\sqrt{c}$ jistě souhlasí v prvých 24 desetinných místech, takže

$$\sqrt{10} = 3{,}162\,277\,660\,168\,379\,331\,998\,893\ldots$$

Cvičení 27. Počítejte podobně $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$.

Nyní si hodláme definovati pomocí vytvořujícího řetězu velmi důležité číslo. Napřed si dokažme, že

$$\text{když } x > -1,\ n = 2, 3, 4, \ldots, \text{ pak } (1 + x)^n > 1 + nx. \qquad (6\cdot14)$$

Pro $n = 2$ je $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$, neboť $x^2 > 0$. Budiž pro určitém $n \geqq 2$ už dokázáno, že $(1 + x)^n > 1 + nx$. Tuto nerovnost můžeme na obou stranách násobit kladným číslem $(1 + x)$ a dostaneme $(1 + x)^{n+1} > (1 + nx)(1 + x)$. Avšak

$$(1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)\,x + nx^2 > 1 + (n + 1)\,x,$$

neboť $nx^2 > 0$. Tedy $(1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)\,x$ a důkaz je hotov.

Věta 10. Posloupnost

$$(1 + \tfrac{1}{1})^1,\ (1 + \tfrac{1}{2})^2,\ (1 + \tfrac{1}{3})^3,\ (1 + \tfrac{1}{4})^4, \ldots$$

stoupá.

Důkaz. V (6·14) volme $x = -\dfrac{1}{n^2}$, což je pro $n > 1$ dovoleno, neboť je $x > -1$. Dostaneme

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{(n^2 - 1)^n}{n^{2n}} > \frac{n - 1}{n}.$$

Protože $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$, dostaneme, násobíce na obou stranách kladným číslem $\dfrac{n^n}{(n-1)^n}$,

$$\left(\frac{n + 1}{n}\right)^n > \left(\frac{n}{n - 1}\right)^{n-1}, \quad \text{t. j.} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n - 1}\right)^{n-1}.$$

Věta 11. Posloupnost

$$(1 + \tfrac{1}{1})^2,\ (1 + \tfrac{1}{2})^3,\ (1 + \tfrac{1}{3})^4,\ (1 + \tfrac{1}{4})^5, \ldots$$

klesá.

Důkaz. Podle (6·14) je pro $x > -1$, $n \geqq 1$: $(1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)\,x$. Pro $n > 1$ můžeme dosaditi $x = \dfrac{1}{n^2 - 1}$ a dostaneme

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^{n+1} > 1 + \frac{1}{n-1}, \text{ t. j. } \frac{n^{2n+2}}{(n^2-1)^{n+1}} > \frac{n}{n-1}.$$

Násobíme-li na obou stranách kladným číslem $\dfrac{(n-1)(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$, vyjde

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}, \text{ t. j. } \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Z vět 10 a 11 a ze cvič. 26 následuje, že (6·1) je vytvořující řetěz určitého čísla, klademe-li

$$r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad s_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Toto číslo označujeme v matematice písmenem e. Je tedy e definováno nerovnostmi

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{6·15}$$

které platí pro $n = 1, 2, 3, \ldots$; také můžeme říci, že e je definováno vztahem

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{6·16}$$

nebo vztahem

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e. \tag{6·17}$$

Délky intervalů našeho vytvořujícího řetězu se blíží nule velmi pomalu, takže z naší definice se dá číslo e jen velmi nepohodlně počítat. To nevadí, protože v odst. 16 poznáme jinou velmi pohodlnou cestu k výpočtu čísla e (viz cvič. 80).

Abychom se přesvědčili, jak pomalu se délky našich intervalů blíží nule, volme v (6·15) $n = 500$, tedy počítejme

$$r_{500} = (1 + \tfrac{1}{500})^{500} = (\tfrac{1002}{1000})^{500}, \quad s_{500} = (1 + \tfrac{1}{500})^{501} = (\tfrac{1002}{1000})^{501}.$$

Výpočet provedeme pomocí Valouchových logaritmických tabulek. Musíme najít napřed log 1002. Chceme-li najíti pětimístné logaritmy čísel r_{500}, s_{500}, potřebujeme najít log 1002 na osm míst. Za tím účelem rozložíme 1002 na prvočinitele: $1002 = 2 \cdot 3 \cdot 167$ a užijeme logaritmů prvočísel v dílu X Valouchových tabulek. Takto dostaneme na osm míst log 1002 = = 3,0008 6772 a z toho už najdeme snadno na pět míst $\log r_{500} = 0{,}43386$; $\log s_{500} = 0{,}43473$, takže je s pěticifernou přesností

$$r_{500} = 2{,}7156; \quad s_{500} = 2{,}7210.$$

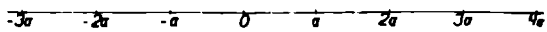
Tedy ač jsme volili veliké $n = 500$, dostali jsme hodnotu e pouze na dvě desetinná místa.

Cvičení 28. Počítejte podobně $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ pro $n = 10$, 50, 100, 300, 1000.

7. Aritmetické svazky. Zvolme si určité kladné číslo a a mysleme si na číselné ose všecky násobky čísla a, kladné i záporné i nulu, tedy čísla

$$\ldots, -4a, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, 4a, \ldots$$

Celá číselná osa se nám rozdělí na nekonečně mnoho intervalů, které mají všeckou touž délku a a které číselnou osu celou pokryjí, ale nikde se nepřekrývají (viz obr. 4).



Obr. 4.

Takové rozdělení číselné osy nazveme aritmetickou stupnicí a číslo a nazveme základem stupnice. Tedy aritmetická stupnice se základem a se skládá z nekonečně mnoha intervalů se společnou délkou a. Krajní body těch intervalů nazveme dělicí body naší stupnice. Dělicí body můžeme rozložit na dvě aritmetické posloupnosti, totiž

$$0, a, 2a, 3a, \ldots$$

a

$$-a, -2a, -3a, \ldots$$

Proto jsme dali naší stupnici název „aritmetická“.

Je-li dána určitá aritmetická stupnice a zvolíme-li si jakýkoli bod x, tu mohou nastati dva případy. Buďto x je dělicí bod naší stupnice; v tomto případě náleží x do dvou intervalů stupnice a je pro jeden z nich levým krajním bodem, pro druhý pravým krajním bodem. Nebo x není dělicí bod naší stupnice; v tomto případě náleží x do jediného intervalu stupnice a je vnitřním bodem tohoto intervalu.

Ačkoli dělicí body nevyplní celou číselnou osu, můžeme, volíce za základ malé číslo a, nahraditi každý jiný bod x přibližně některým dělicím bodem, totiž jedním z obou krajních bodů toho intervalu stupnice, uvnitř kterého je bod x. Je-li na př. $a = 0{,}0001$, pak dělicí body jsou čísla, která mají za desetinnou čárkou 4 cifry a každé jiné číslo můžeme nahraditi takovým číslem „přesně na čtyři desetinná místa“.

Tedy dělicí body aritmetické stupnice postačí k určení kteréhokoli bodu, připustíme-li chyby menší než určité malé kladné číslo a, které bereme za základ stupnice. V praxi jsou chyby menší než určitá mez vždycky bezvýznamné. Ale v teoretických úvahách musíme určovati čísla přesně bez jakékoli chyby. Toho docílíme, zavedeme-li současně nekonečně mnoho aritmetických stupnic.

Budeme postupovati takto: Zvolíme si určité kladné číslo a a zavedeme posloupnost aritmetických stupnic. Základem prvé stupnice bude číslo $a_1 = a$. Označíme-li obecně základ n-té stupnice znakem a_n, bude a_{n+1} polovina čísla a_n, takže obecně bude

$$a_n = \frac{a}{2^n}. \tag{7·1}$$

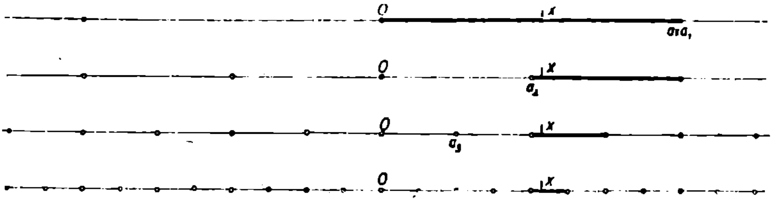
Čísla a_n tvoří tedy geometrickou posloupnost s prvním členem a a s kvocientem $\frac{1}{2}$. Podle cvič. 14 a věty 7 je

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \tag{7·2}$$

což je ostatně aritmeticky i geometricky zřejmé. Právě popsanou posloupnost aritmetických stupnic se základy

$$a_1 = a, \; a_2 = \frac{a}{2}, \; a_3 = \frac{a}{4}, \; a_4 = \frac{a}{8}, \ldots$$

nazveme aritmetickým svazkem a číslo a nazveme základem svazku. Tedy základem aritmetického svazku je základ prvé stupnice svazku. V obr. 5 jsou naznačeny prvé čtyři stupnice aritmetic-



Obr. 5.

kého svazku. Pro jasnost obrazce je každá stupnice na jiné přímce; ale musíme si ovšem představovat všecky stupnice na jediné přímce. Bodu x a silně vytažených intervalů si zatím nevšímejte; bude o nich brzy řeč.

Dělicím bodem aritmetického svazku rozumíme každý bod x, který je dělicím bodem některé stupnice svazku. Zřejmě každý dělicí bod aritmetického svazku je dělicím bodem skoro všech stupnic svazku.

Je-li M nějaká soustava bodů na číselné ose, pak řekneme, že M leží hustě na číselné ose, když ke každému bodu x a ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze udati bod z patřící do soustavy M a vzdálený od bodu x o méně než ε.

Cvičení **29.** Dělicí body aritmetického svazku leží hustě na číselné ose.

Cvičení **30.** Budiž M soustava bodů. Leží-li M hustě na číselné ose, pak uvnitř každého intervalu je nekonečně mnoho bodů soustavy M. Obráceně, když víme, že v každém intervalu leží aspoň jeden bod soustavy M, pak M leží hustě na číselné ose.

Cvičení **31.** Leží-li soustava bodů M hustě na číselné ose, pak: [1] nalevo od každého bodu je nějaký bod soustavy M; [2] napravo od každého bodu je nějaký bod soustavy M; [3] je-li dáno číslo $\varepsilon > 0$ a jsou-li dány dva různé body soustavy M, lze mezi ně vsunouti konečný počet dalších bodů soustavy M tak, aby vzdálenost dvou sousedních bodů byla vždy menší než ε. Obráceně, jsou-li splněny podmínky [1], [2] a [3], leží M hustě na číselné ose.

Cvičení **32.** Leží-li soustava bodů M hustě na číselné ose pak ke každému bodu x lze určiti posloupnost (3·1), jejíž členy jsou vzaty vesměs ze soustavy M, a pro kterou platí $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x$. Obráceně, je-li splněna tato podmínka, leží M hustě na číselné ose.

Ačkoli dělicí body aritmetického svazku leží na číselné ose hustě, přece jen nevyplní číselnou osu, nýbrž existují také body x, které nejsou dělicími body svazku. Volíme-li na př. $a = 1$, pak dělicími body svazku jsou ta čísla, která lze psáti ve tvaru zlomku se jmenovatelem rovným některému z čísel

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

Ani číslo $\frac{1}{3}$ ani číslo $\sqrt{2}$ nelze tak psáti; proto to nejsou dělicí body svazku.

Zvolme x tak, že x není dělicím bodem daného aritmetického svazku. Pro každé n máme v n-té stupnici svazku určitý interval $\langle r_n, s_n \rangle$, uvnitř kterého leží bod x. Zřejmě interval $\langle r_{n+1}, s_{n+1} \rangle$ je buďto levou nebo pravou polovinou intervalu $\langle r_n, s_n \rangle$, takže

$$\langle r_1, s_1 \rangle, \langle r_2, s_2 \rangle, \langle r_3, s_3 \rangle, \ldots \qquad (7{\cdot}3)$$

je řetěz intervalů. Ze (7·2) následuje podle cvič. 25, že (7·3) je vytvořující řetěz; protože bod x je uvnitř všech intervalů (7·3), je (7·3) vytvořující řetěz bodu x. Řekneme, že (7·3) je **aritmetický řetěz** bodu x. V obr. 5 jsou silně vytaženy prvé čtyři intervaly takového aritmetického řetězu.

Cvičení **33.** Budiž dán aritmetický svazek. Zvolme v každé stupnici svazku interval $\langle r_n, s_n\rangle$, takže dostaneme posloupnost intervalů (7·3). Když (7·3) je aritmetický řetěz nějakého bodu, který není dělicím bodem svazku, pak: [1] pro každé n je $\langle r_{n+1}, s_{n+1}\rangle$ buďto levou nebo pravou polovinou intervalu $\langle r_n, s_n\rangle$; [2] je nekonečně mnoho takových n, pro něž $\langle r_{n+1}, s_{n+1}\rangle$ je levou polovinou intervalu $\langle r_n, s_n\rangle$ i nekonečně mnoho takových n, pro něž $\langle r_{n+1}, s_{n+1}\rangle$ je pravou polovinou intervalu $\langle r_n, s_n\rangle$. Obráceně, jsou-li splněny podmínky [1] a [2], je (7·3) aritmetický řetěz určitého bodu x, který není dělicím bodem daného aritmetického svazku.

Cvičení **34.** Budiž x dělicí bod aritmetického svazku. Pak lze dvojím způsobem vybrati pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ z n-té stupnice svazku interval $\langle r_n, s_n\rangle$ tak, aby (7·3) byl vytvořující řetěz bodu x. Je-li p nejmenší z těch hodnot indexu n, pro které je x dělicím bodem n-té stupnice svazku, pak je x u jednoho z obou řetězů stále levým, u druhého stále pravým krajním bodem n-tého intervalu, a to pro všecka $n \geq p$; pro $n < p$ je interval $\langle r_n, s_n\rangle$ u obou řetězů stejný a obsahuje bod x uvnitř.

Cvičení **35.** Budiž $a = 1$ základ aritmetického svazku. Aritmetický řetěz bodu $\frac{1}{7}$ začíná intervaly

$$\langle 0, 1\rangle, \langle 0, \tfrac{1}{2}\rangle, \langle 0, \tfrac{1}{4}\rangle, \langle \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}\rangle, \langle \tfrac{1}{8}, \tfrac{3}{16}\rangle, \langle \tfrac{1}{8}, \tfrac{5}{32}\rangle, \langle \tfrac{9}{64}, \tfrac{5}{32}\rangle, \langle \tfrac{9}{64}, \tfrac{19}{128}\rangle.$$

Aritmetický řetěz bodu $\sqrt{2}$ začíná intervaly

$$\langle 1, 2\rangle, \langle 1, \tfrac{3}{2}\rangle, \langle \tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{2}\rangle, \langle \tfrac{11}{8}, \tfrac{3}{2}\rangle, \langle \tfrac{11}{8}, \tfrac{23}{16}\rangle, \langle \tfrac{45}{32}, \tfrac{23}{16}\rangle, \langle \tfrac{45}{32}, \tfrac{91}{64}\rangle, \langle \tfrac{181}{128}, \tfrac{91}{64}\rangle.$$

8. Racionální a iracionální čísla. **Racionální číslo** je takové reálné číslo x, které je kořenem lineární rovnice $ax + b = 0$, ve které $a \neq 0$ a b jsou čísla celá. Tedy na př.

$$0, 2, -5, \tfrac{1}{7}, -\tfrac{12}{5}$$

jsou racionální čísla. **Iracionální číslo** je reálné číslo, které není racionální. Na př. $\sqrt{2}$ je iracionální číslo. Neboť kdyby existovala dvě celá čísla a, b taková, že $a \neq 0$ a $a\sqrt{2} + b = 0$, mohli bychom krácením docíliti toho, že by z čísel a, b bylo aspoň jedno **liché**. Bylo by

$$2a^2 - b^2 = (a\sqrt{2} + b)(a\sqrt{2} - b) = 0,$$

tedy $b^2 = 2a^2$. Proto by číslo b bylo sudé, takže by a bylo liché. Mohli bychom položiti $b = 2c$, kde také c by bylo celé číslo. Pak by bylo $a^2 = 2c^2$. Protože a je liché, je to nemožné.

Zvolíme-li $a = 1$ za základ aritmetického svazku, pak všecky dělicí body svazku jsou racionální čísla. Tedy ze cvič. 29 plyne, že racionální čísla leží hustě na číselné ose. Z toho následuje snadno, že také čísla tvaru $x + \sqrt{2}$, kde x probíhá všecka racionální čísla, leží hustě na číselné ose. Ale zřejmě je $x + \sqrt{2}$ iracionální, je-li x racionální. Proto také iracionální čísla leží hustě na číselné ose.

Budiž dána rovnice

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{8·1}$$

kde koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou čísla celá ($a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$). Racionální kořeny této rovnice (jsou-li jaké), dají se snadno najíti. Racionální kořen lze psáti ve tvaru $\frac{r}{s}$, kde $r \neq 0$ a $s \neq 0$ jsou čísla celá. Můžeme předpokládati, že je $s > 0$ a že čísla r, s jsou nesoudělná (jinak bychom mohli zlomek $\frac{r}{s}$ krátit). Protože $\frac{r}{s}$ je kořen rovnice (8·1), jest

$$a_0r^n + a_1r^{n-1}s + \ldots + a_{n-1}rs^{n-1} + a_ns^n = 0.$$

Z toho následuje

$$a_0r^n = s \,.\, [-a_1r^{n-1} - \ldots - a_{n-1}rs^{n-2} - a_ns^{n-1}], \tag{8·2}$$

$$a_ns^n = r \,.\, [-a_0r^{n-1} - a_1r^{n-2}s - \ldots - a_{n-1}s^{n-1}]. \tag{8·3}$$

Z (8·2) plyne, že číslo $\frac{a_0r^n}{s}$ je celé. Je tedy možné zlomek $\frac{a_0r^n}{s}$ krátit číslem s a protože čísla r a s jsou nesoudělná, lze také zlomek $\frac{a_0}{s}$ krátit číslem s, t. j. číslo s je dělitel čísla a_0. Stejně se odvodí z (8·3), že číslo r je dělitel čísla a_n. Protože každé celé číslo různé od nuly má jen konečný počet dělitelů, máme pro zlomek $\frac{r}{s}$ jen konečný počet možností, takže zbývá pouze, abychom se o konečném počtu určitých racionálních čísel přesvědčili dosazením, vyhovují-li rovnici (8·1).

Příklad. $10x^3 + 7x^2 - 18x - 9 = 0$. Číslo 10 má dělitele ± 1, ± 2, ± 5, ± 10; číslo 9 má dělitele ± 1, ± 3, ± 9. Tedy v úvahu přichází 24 čísel

$$\frac{\pm 1}{1}, \frac{\pm 3}{1}, \frac{\pm 9}{1}, \frac{\pm 1}{2}, \frac{\pm 3}{2}, \frac{\pm 9}{2}, \frac{\pm 1}{5}, \frac{\pm 3}{5}, \frac{\pm 9}{5}, \frac{\pm 1}{10}, \frac{\pm 3}{10}, \frac{\pm 9}{10}. \tag{8·4}$$

Dosazením se můžeme přesvědčit, že jediné z nich, totiž číslo $-\frac{3}{2}$, je kořenem dané rovnice.

I ve zvoleném jednoduchém příkladě bylo hledání racionálních kořenů dosti pracné, protože čísel přicházejících v úvahu je dosti mnoho. Ale můžeme si výpočet zkrátit takto. Zvolme si libovolné celé číslo c. Levou stranu rovnice (8·1) si označme $f(x)$. Položme $x = c + t$. Pak je

$$f(c+t) = a_0(c+t)^n + a_1(c+t)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(c+t) + a_n;$$

jednotlivé mocniny dvojčlenu $c + t$ můžeme rozvésti podle binomické věty a dostaneme

$$f(c+t) = b_0t^n + b_1t^{n-1} + \ldots + b_{n-1}t + b_n, \tag{8·5}$$

kde $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ jsou patrně čísla celá. Má-li rovnice $f(x) = 0$ kořen $x = \frac{r}{s}$, má patrně rovnice $f(c+t) = 0$ kořen

$$t = -c + \frac{r}{s} = \frac{r - cs}{s}.$$

Jsou-li r, s čísla nesoudělná, jsou patrně také $r - cs$, s čísla nesoudělná (neboť každý společný dělitel čísel $r - cs$, s je také dělitelem čísla $r - cs + cs = r$). Proto musí býti $r - cs$ dělitelem čísla b_n a s musí býti dělitelem čísla b_0. Druhý z těchto poznatků není ničím novým, neboť snadno se najde, že $b_0 = a_0$; a že s je dělitelem čísla a_0, to už víme. Hodnotu b_n můžeme určiti pohodlně bez binomické věty, dosadíme-li $t = 0$ do identity (8·5). Vyjde $b_n = f(c)$, takže náš výsledek zní: ať si jakkoli zvolíme celé číslo c, musí býti $r - cs$ dělitelem čísla $f(c)$. Nyní se vraťme k našemu příkladu a volme za c jednak číslo 1, jednak číslo -1. Ježto $f(1) = -10$, $f(-1) = 6$, dostaneme:

$$r - s \text{ je dělitelem čísla } 10; \tag{8·6}$$

$$r + s \text{ je dělitelem čísla } 6. \tag{8·7}$$

Ze 24 čísel (8·4) vyhovují podmínce (8·6) pouze čísla

$$\frac{-1}{1}, \frac{+3}{1}, \frac{-9}{1}, \frac{+1}{2}, \frac{+3}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{+3}{5}, \frac{9}{10}$$

a podmínce (8·7) pouze čísla

$$\frac{+1}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{+1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{+1}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{9}{10}.$$

Oběma podmínkám zároveň vyhovují pouze tři čísla, totiž, $\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$ a $\frac{9}{10}$ a dosazením se přesvědčíme, že pouze $-\frac{3}{2}$ je kořenem dané rovnice.

Cvičení 36. Určete racionální kořeny rovnice

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x - 2 = 0,\\
&\text{b)}\ 4x^6 + 13x^5 + 16x^4 + 23x^3 - 5x^2 - 45x + 18 = 0,\\
&\text{c)}\ 2x^6 + x^5 - 9x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 7x + 6 = 0.
\end{aligned}$$

Cvičení 37. Jsou-li koeficienty rovnice

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

čísla celá a je-li x racionální kořen rovnice, pak x je číslo celé. Proto na př. čísla $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$ atd. jsou jistě iracionální.

Budiž α iracionální číslo. Je-li dáno celé kladné číslo s, pak v aritmetické stupnici se základem $\frac{1}{s}$ budiž $\frac{r}{s}$ ten dělicí bod, který je bodu α nejblíž. Protože α je iracionální, nemůže ležet uprostřed mezi dvěma dělicími body; proto vzdálenost α od $\frac{r}{s}$ je menší než $\frac{1}{2s}$. Tedy: Ke každému celému $s > 0$ existuje celé r tak, že zlomek $\frac{r}{s}$ aproximuje iracionální číslo α s chybou menší než $\frac{1}{2s}$, neboli že

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2s}. \tag{8·8}$$

Uvidíme, že je vždy nekonečně mnoho takových s, která dávají lepší aproximaci než (8·8).

Věta 12. Budiž α iracionální číslo. Budiž n celé kladné číslo. Pak existují celá čísla r, s taková, že $0 < s \leq n$ a

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{sn}. \tag{8·9}$$

Důkaz. Všimněme si aritmetické stupnice se základem 1. Každé z čísel

$$1 \,.\, \alpha,\ 2 \,.\, \alpha,\ 3 \,.\, \alpha,\ \ldots,\ (n+1)\,\alpha$$

leží uvnitř určitého intervalu naší stupnice. To znamená, že existují celá čísla $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ taková, že diference

$$1 \,.\, \alpha - r_1,\ 2 \,.\, \alpha - r_2,\ 3 \,.\, \alpha - r_3,\ \ldots,\ (n+1)\,\alpha - r_{n+1} \tag{8·10}$$

leží uvnitř intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Interval $\langle 0, 1\rangle$ můžeme rozděliti na n menších intervalů

$$\langle 0, \frac{1}{n}\rangle, \quad \langle \frac{1}{n}, \frac{2}{n}\rangle, \ \ldots, \ \langle \frac{n-1}{n}, 1\rangle \tag{8·11}$$

a každé z čísel (8·10) leží uvnitř jednoho z intervalů (8·11). Počet čísel (8·10) je $n + 1$, kdežto intervalů (8·11) je pouze n. Proto musí býti mezi intervaly (8·11) aspoň jeden, uvnitř kterého jsou aspoň dva z bodů (8·10). Budiž J takový interval. Existují tedy celá čísla h, k taková, že $0 < h < k \leqq n + 1$ a že oba body

$$h\alpha - r_h, \ k\alpha - r_k \tag{8·12}$$

leží uvnitř intervalu J. Vzdálenost bodů (8·12) musí býti menší nežli $\frac{1}{n}$, neboť $\frac{1}{n}$ je délka intervalu J. Tedy

$$|(k - h)\alpha - (r_k - r_h)| < \frac{1}{n}.$$

Položme $k - h = s$, $r_k - r_h = r$. Pak jsou čísla r a s celá, jest $0 < s \leqq n$ a $|s\alpha - r| < \frac{1}{n}$, z čehož plyne (8·9).

Cvičení **38.** Je-li číslo α racionální, pak zůstane věta 12 v platnosti, napíšeme-li nerovnost (8·9) ve slabším tvaru

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| \leqq \frac{1}{sn}.$$

Cvičení **39.** Z věty 12 odvoďte, že ke každému iracionálnímu číslu α existuje nekonečně mnoho racionálních čísel $\frac{r}{s}$ (r, s celá; $s > 0$) takových, že

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{s^2}. \tag{8·13}$$

Dá se dokázati, že nerovnost (8·13) se dá nahraditi ostřejší nerovností

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{cs^2}, \tag{8·14}$$

ve které c je číslo větší než 1. Při tom lze voliti $c = \sqrt{5}$. Je-li však $c > \sqrt{5}$, tu lze jak uvidíme, voliti iracionální číslo α tak, že jen konečný počet zlomků $\frac{r}{s}$ může vyhověti nerovnosti (8·14).

Iracionální čísla dělíme na **algebraická** a **transcendentní**. Reálné číslo x se nazývá algebraické, je-li kořenem rovnice (8·1), jejíž koeficienty jsou čísla celá ($a_0 \neq 0$). Volíme-li rovnici (8·1) tak, aby její stupeň n byl co nejmenší, pak číslo n se jmenuje **stupeň** algebraického čísla x. Reálné číslo je transcendentní, není-li algebraické.

Cvičení 40. Racionální číslo je algebraické číslo stupně 1. Obráceně každé algebraické číslo stupně 1 je racionální.

Věta 13. Budiž α reálné algebraické číslo stupně $k \geqq 2$. Pak existuje $c > 0$ takové, že počet zlomků $\frac{r}{s}$, pro něž

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{cs^k}, \tag{8·15}$$

je konečný. Je-li α kořenem rovnice $f(x) = 0$, kde $f(x)$ je mnohočlen k-ho stupně s celými koeficienty, pak můžeme za c voliti kterékoli číslo větší než $|f'(\alpha)|$. (Čárka znamená **derivaci**. O derivacích viz VM.)

Důkaz. Budiž $c > |f'(\alpha)|$ a předpokládejme, že je nekonečně mnoho zlomků vyhovujících nerovnosti (8·15). Musíme ukázat, že náš předpoklad je nemožný. **Při daném jmenovateli** s je jistě počet zlomků s vlastností (8·15) konečný. Proto z našeho předpokladu plyne, že existuje posloupnost

$$\frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}, \frac{r_3}{s_3}, \ldots,$$

ve které r_n a $s_n > 0$ jsou čísla celá, $s_n < s_{n+1}$ a

$$\left|\alpha - \frac{r_n}{s_n}\right| < \frac{1}{cs_n^k} \tag{8·16}$$

pro všecka n. Z (8·15) plyne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{s_n} = \alpha. \tag{8·17}$$

Podle definice derivace je tedy [jest $f(\alpha) = 0$]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{r_n}{s_n}\right) - f(\alpha)}{\frac{r_n}{s_n} - \alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{r_n}{s_n}\right)}{\frac{r_n}{s_n} - \alpha} = f'(\alpha). \tag{8·18}$$

To je však nemožné. Neboť rovnice $f(x) = 0$ má, jak známo, jen konečný počet kořenů, takže lze udati interval J, uvnitř kterého má ta rovnice jen **jediný** kořen $x = \alpha$. Podle (8·17) existuje index p takový, že pro $n > p$ leží $\frac{r_n}{s_n}$ uvnitř J. Protože α je iracionální a $\frac{r_n}{s_n}$ je racionální, je $\frac{r_n}{s_n} \neq \alpha$. Proto pro $n > p$ je jistě $f\left(\frac{r_n}{s_n}\right) \neq 0$. Ježto však $f(x)$ je mnohočlen k-ho stupně s celými koeficienty, dá se číslo $f\left(\frac{r_n}{s_n}\right)$ psáti ve tvaru

$$f\left(\frac{r_n}{s_n}\right) = \frac{u_n}{s_n{}^k},$$

kde u_n je číslo celé. Tedy pro $n > p$ je $|u_n| \geqq 1$, takže

$$\left| f\left(\frac{r_n}{s_n}\right) \right| \geqq \frac{1}{s_n{}^k}.$$

Z této nerovnosti a z (8·16) následuje však, že pro $n > p$ je

$$\left| \frac{f\left(\frac{r_n}{s_n}\right)}{\frac{r_n}{s_n} - \alpha} \right| > c.$$

Protože $c > |f'(\alpha)|$, je tedy vztah (8·18) nemožný.

Nyní se snadno přesvědčíme, že v (8·14) nelze voliti $c > \sqrt{5}$. Neboť volme $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Číslo α je iracionální a je kořenem rovnice druhého stupně $f(x) = 0$, kde $f(x) = x^2 - x - 1$. Tedy α je algebraické číslo druhého stupně. Jest $f'(\alpha) = 2\alpha - 1 = \sqrt{5}$, takže $c > f'(\alpha)$. Z toho plyne podle věty 13 (ve které $k = 2$), že jen konečný počet zlomků může vyhovovati nerovnosti (8·14).

Cvičení 41. Různými způsoby můžeme rekurentně vytvořit posloupnost intervalů

$$\langle r_1, s_1\rangle, \langle r_2, s_2\rangle, \langle r_3, s_3\rangle, \ldots \qquad (8\cdot19)$$

s těmito vlastnostmi. [1] Pro všecka n jsou r_n racionální čísla. [2] Každý interval $\langle r_{n+1}, s_{n+1}\rangle$ leží uvnitř předcházejícího. [3] Existují celá čísla

$$0 < c_1 < c_2 < c_3 < \ldots$$

taková, že pro všecka n je

$$s_n = r_n + \frac{1}{c_n^{c_n}}.$$

Pak (8·19) je vytvořující řetěz transcendentního čísla α.

Číslo e [viz (6·15)] je transcendentní. Číslo π je transcendentní. Dekadický logaritmus kladného čísla celého, které není mocninou deseti, je transcendentní. Je-li $c > 1$ celé a je-li α iracionální, pak c^α je transcendentní. Tyto zajímavé výsledky můžeme zde pouze uvésti bez jakéhokoli důkazu.

II. Logaritmus a obecná mocnina.

9. Pojem logaritmické funkce. Je-li každému kladnému číslu y přiřazeno určité číslo $f(y)$, máme funkci $f(y)$, jejíž obor je soustava všech kladných čísel. Řekneme, že $f(y)$ je logaritmická funkce, když má tyto dvě vlastnosti:

I. $f(y)$ je rostoucí funkce. To znamená, že když $0 < y_1 < y_2$, je také $f(y_1) < f(y_2)$.

II. Je-li $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, pak

$$f(y_1 y_2) = f(y_1) + f(y_2). \tag{9·1}$$

Cvičení **42.** Je-li $f(y)$ logaritmická funkce a je-li c kladné číslo, pak také $F(y) = c\, f(y)$ je logaritmická funkce.

Cvičení **43.** Je-li $f(y)$ logaritmická funkce, pak $f(1) = 0$. [Dosaďte $y_1 = y_2 = 1$ do (9·1).]

Cvičení **44.** Je-li $f(y)$ logaritmická funkce, pak pro $y > 1$ je $f(y) > 0$ a pro $0 < y < 1$ je $f(y) < 0$.

Cvičení **45.** Je-li $f(y)$ logaritmická funkce, pak pro $y > 0$ je $f\left(\frac{1}{y}\right) =$ $= -f(y)$. [Dosaďte $y_1 = y$, $y_2 = \frac{1}{y}$ do (9·1).]

Věta 14. Budiž $f(y)$ logaritmická funkce. Pro $y > 0$ a pro každé celé k je

$$f(y^k) = k\, f(y). \tag{9·2}$$

Důkaz. I. Pro $k = 0$ platí (9·2) podle cvič. 43.

II. Pro $k = 1$ je (9·2) zřejmé. Platí-li (9·2) pro určité celé kladné k, pak je podle (9·1)

$$f(y^{k+1}) = f(y^k \,.\, y) = f(y^k) + f(y) = k\, f(y) + f(y) = (k + 1)\, f(y).$$

Tím je (9·2) dokázáno indukcí pro celé kladné k.

III. Je-li k celé kladné, pak je podle II a cvič. 45

$$f(y^{-k}) = f\left[\left(\frac{1}{y}\right)^k\right] = k\,f\left(\frac{1}{y}\right) = -\,k\,f(y).$$

Tím je (9·2) dokázáno také pro celé záporné k.

Nyní stojíme před dvěma důležitými otázkami: Existuje vůbec nějaká logaritmická funkce? Jaká je souvislost mezi dvěma logaritmickými funkcemi? Na tyto otázky odpovíme v odst. 11; odstavec 10 připraví odpověď.

10. Geometrické svazky. Obrazy kladných čísel vyplní tu část číselné osy, která je napravo od počátku; nazveme ji číselnou poloosou. Protože nulu nepočítáme mezi čísla kladná, počátek sám už nepatří do číselné poloosy.

Zvolme si určité číslo g větší než číslo 1 a tvořme postupně mocniny

$$g^0 = 1,\ g^1 = g,\ g^2,\ g^3,\ \ldots, \tag{10·1}$$

z nichž každá následující je g-krát větší než předcházející. Čísla (10·1) tvoří stoupající geometrickou posloupnost s prvým členem 1 a s kvocientem g. Intervaly

$$\langle 1, g\rangle,\ \langle g, g^2\rangle,\ \langle g^2, g^3\rangle,\ \langle g^3, g^4\rangle,\ \ldots \tag{10·2}$$

se řadí na číselné poloose jeden vedle druhého od levé strany k pravé. Podle věty 6 vyplní intervaly (10·2) celou část číselné poloosy od bodu 1 napravo (i s bodem 1 samotným). Věta 6 byla odvozena početem; můžeme však také usuzovati geometricky takto. Délky intervalů (10·2) jsou

$$g - 1,\ g(g - 1),\ g^2(g - 1),\ g^3(g - 1),\ \ldots;$$

jsou tedy tyto délky čím dále tím větší a z toho je patrné, že intervaly (10·2) vyplní celou část číselné poloosy napravo od bodu 1, čímž je geometricky potvrzena věta 6. Z věty 6 následuje podle cvič. 14, že $\lim\limits_{n\to\infty} g^n(g - 1) = \infty$, t. j. že délky intervalů (10·2) rostou do nekonečna.

Nyní si k mocninám (10·2) připojme ještě mocniny se zápornými mocniteli

$$g^{-1} = \frac{1}{g},\ g^{-2} = \frac{1}{g^2},\ g^{-3} = \frac{1}{g^3},\ \ldots; \tag{10·3}$$

také čísla (10·3) jsou kladná a každé následující je g-krát menší než předcházející. Čísla (10·3) tvoří klesající geometrickou posloupnost s prvým členem g^{-1} a s kvocientem g^{-1}. Intervaly

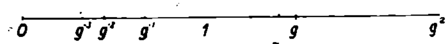
$$\langle g^{-1}, 1\rangle, \langle g^{-2}, g^{-1}\rangle, \langle g^{-3}, g^{-2}\rangle, \langle g^{-4}, g^{-3}\rangle, \ldots \qquad (10\cdot 4)$$

se řadí na číselné poloose jeden vedle druhého od pravé strany k levé. Podle věty 7 vyplní intervaly (10·4) celou část číselné poloosy od bodu 1 nalevo (i s bodem 1 samotným).

Vyznačme si nyní na číselné poloose všecky body

$$\ldots, g^{-3}, g^{-2}, g^{-1}, 1, g, g^2, g^3, \ldots$$

Celá číselná poloosa se nám rozdělí na nekonečně mnoho intervalů, které číselnou poloosu celou *pokryjí*, ale nikde se *nepřekrývají* (viz obr. 6). Bod 0 pokryt není, ale také nepatří do číselné poloosy.



Obr. 6.

Takové rozdělení číselné poloosy nazveme *geometrickou stupnicí* a číslo g nazveme základem stupnice. Tedy geometrická stupnice se skládá z nekonečně mnoha *nestejně dlouhých* intervalů. Ze dvou intervalů geometrické stupnice je vždy ten delší, který leží více napravo. Mezi těmi intervaly jsou vždy takové, jejichž délka je větší než libovolně předepsané kladné číslo (jakkoli veliké), i takové, jejichž délka je menší než libovolně předepsané kladné číslo (jakkoli malé). Krajní body našich intervalů, tedy body (10·1) a (10·3), nazveme *dělicí body* geometrické stupnice.

Nyní si vysvětlíme pojem *geometrického svazku*. To je posloupnost geometrických stupnic, k níž dojdeme takto. Zvolíme si určité číslo $g > 1$, které nazveme *základem svazku*. Základem prvé stupnice svazku bude číslo $g_1 = g$. Označíme-li obecně základ n-té stupnice svazku znakem g_n, bude

$$g_{n+1} = \sqrt{g_n}, \quad g_{n+1}^2 = g_n, \qquad (10\cdot 5)$$

takže obecně bude

$$g_n = \sqrt[2^{n-1}]{g}.$$

(Je-li $g_n > 1$, je také $g_{n+1} > 1$.) Dělicí body n-té stupnice svazku jsou

$$\ldots, g_n^{-3}, g_n^{-2}, g_n^{-1}, 1, g_n, g_n^2, g_n^3, \ldots; \qquad (10{\cdot}6)$$

dělicí body $(n + 1)$-ní stupnice jsou

$$\ldots, g_{n+1}^{-3}, g_{n+1}^{-2}, g_{n+1}^{-1}, 1, g_{n+1}, g_{n+1}^2, g_{n+1}^3, \ldots \qquad (10{\cdot}7)$$

Podle (10·5) můžeme psáti (10·6) také ve tvaru

$$\ldots, g_{n+1}^{-6}, g_{n+1}^{-4}, g_{n+1}^{-2}, 1, g_{n+1}^2, g_{n+1}^4, g_{n+1}^6, \ldots$$

Tedy soustava (10·7) vznikne ze soustavy (10·6) tím, že mezi každé dva sousední body vsuneme jeden bod nový. Tedy intervaly $(n + 1)$-ní stupnice vzniknou tím, že každý interval n-té stupnice rozdělíme na dvě „poloviny". Slovo polovina dávám do uvozovek, protože to nejsou poloviny v obvyklém smyslu tohoto slova, nýbrž dvě části, z nichž levá je menší než pravá.

Protože interval $\langle 1, g_{n+1} \rangle$ je menší „polovinou" intervalu $\langle 1, g_n \rangle$, je

$$g_{n+1} - 1 < \tfrac{1}{2} (g_n - 1),$$

takže

$$0 < g_n - 1 < \frac{1}{2^{n-1}} (g - 1);$$

z toho následuje

$$\lim_{n \to \infty} g_n = 1. \qquad (10{\cdot}8)$$

V každé stupnici geometrického svazku jsou intervaly, jejichž délka přesáhne libovolně dané kladné číslo. Ale přes to platí:

Věta 15. Budiž dán geometrický svazek. Budiž $c > 0$, $\varepsilon > 0$. Pak existuje index p takový, že pro všecka $n > p$ mají všecky ty intervaly n-té stupnice svazku, které leží nalevo od bodu c, délku menší než ε.

Důkaz. Zvolme k tak, že $g^k > c$. Pro každé n je g^k levým krajním bodem určitého intervalu J_n z n-té stupnice svazku. Budiž d_n délka intervalu J_n. Pro každé n je $d_{n+1} < \frac{1}{2} d_n$, a z toho následuje $\lim_{n \to \infty} d_n = 0$. Proto existuje index p takový, že pro všecka $n > p$ je $d_n < \varepsilon$. Je-li $n > p$ a leží-li nějaký interval K z n-té stupnice nalevo od bodu c, pak K leží nalevo od J, takže délka intervalu K je menší než délka intervalu J, která je menší než ε, takže délka intervalu K je menší než ε.

Dělicím bodem geometrického svazku rozumíme každý bod y, který je dělicím bodem některé stupnice svazku. Zřejmě dělicí bod geometrického svazku je dělicím bodem skoro všech stupnic svazku.

Je-li M nějaká soustava bodů na číselné poloose, pak řekneme, že M leží hustě na číselné poloose, když ke každému bodu y číselné poloosy a ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze udati bod z patřící do soustavy M a vzdálený od bodu y o méně než ε.

Cvičení **46.** Dělicí body geometrického svazku leží hustě na číselné poloose.

Cvičení **47.** Budiž M soustava bodů na číselné poloose. Leží-li M hustě na číselné poloose, pak uvnitř každého intervalu obsaženého v číselné poloose je nekonečně mnoho bodů soustavy M. Obráceně, když víme, že v každém intervalu obsaženém v číselné poloose leží aspoň jeden bod soustavy M, pak M leží hustě na číselné poloose.

Cvičení **48.** Leží-li soustava bodů M hustě na číselné poloose, pak: [1] nalevo od každého bodu číselné poloosy je nějaký bod soustavy M, [2] napravo od každého bodu číselné poloosy je nějaký bod soustavy M, [3] je-li dáno číslo $\varepsilon > 0$ a jsou-li dány dva různé body soustavy M, lze mezi ně vsunouti konečný počet dalších bodů soustavy M tak, aby vzdálenost dvou sousedních bodů byla vždy menší než ε. Obráceně, jsou-li splněny podmínky [1], [2] a [3], leží M hustě na číselné poloose.

Cvičení **49.** Leží-li soustava bodů M hustě na číselné poloose, pak ke každému kladnému číslu α lze určiti posloupnost (3·1), jejíž členy jsou vzaty vesměs ze soustavy M, a pro kterou platí $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$. Obráceně, je-li splněna tato podmínka, leží M hustě na číselné poloose.

Ačkoli dělicí body geometrického svazku leží na číselné poloose hustě, přece existují vždy na číselné poloose také body y, které nejsou dělicími body svazku. Volíme-li na př. $g = 2$, pak bod 3 není dělicím bodem svazku. Neboť kdyby bod 3 byl dělicím bodem n-té stupnice svazku, existovalo by celé číslo k, pro které by platilo $g_n{}^k = 3$. Protože $g_n{}^{2n-1} = 2$, bylo by $2^k = 3^{2n-1}$, což je nemožné.

Cvičení **50.** Když základ geometrického svazku je prvočíslo p, pak celé číslo není dělicím bodem svazku, není-li mocninou prvočísla p.

Cvičení **51.** Budiž dán jakýkoli geometrický svazek. Z čísel 2 a 3 je nejvýš jedno dělicím bodem svazku.

Zvolme bod y na číselné poloose tak, že y není dělicím bodem daného geometrického svazku. Pro každé n máme v n-té stupnici svazku určitý interval $\langle u_n, v_n \rangle$, uvnitř kterého leží bod y. Zřejmě interval $\langle u_{n+1}, v_{n+1} \rangle$ je buďto levou nebo pravou „polovinou" intervalu $\langle u_n, v_n \rangle$, takže

$$\langle u_1, v_1 \rangle, \langle u_2, v_2 \rangle, \langle u_3, v_3 \rangle, \ldots \tag{10·9}$$

je řetěz intervalů. Ze cvič. 25 a z věty 15 následuje, že (10·9) je vytvořující řetěz; protože bod y je uvnitř všech intervalů (10·9), je (10·9) vytvořující řetěz bodu y. Řekneme, že (10·9) je **geometrický řetěz** bodu y.

Cvičení **52.** Budiž dán geometrický svazek. Zvolme v každé stupnici svazku interval $\langle u_n, v_n \rangle$, takže dostaneme posloupnost intervalů (10·9). Když (10·9) je geometrický řetěz nějakého bodu y na číselné poloose, který není dělicím bodem svazku, pak: [1] pro každé n je $\langle u_{n+1}, v_{n+1} \rangle$ buďto levou nebo pravou „polovinou" intervalu $\langle u_n, v_n \rangle$; [2] je nekonečně mnoho takových n, pro něž $\langle u_{n+1}, v_{n+1} \rangle$ je levou „polovinou" intervalu $\langle u_n, v_n \rangle$ i nekonečně mnoho takových n, pro něž $\langle u_{n+1}, v_{n+1} \rangle$ je pravou „polovinou" intervalu $\langle u_n, v_n \rangle$. Obráceně, jsou-li splněny podmínky [1] a [2], je (10·9) geometrický řetěz určitého bodu y na číselné poloose, který není dělicím bodem daného geometrického svazku.

Cvičení **53.** Budiž y dělicí bod geometrického svazku. Pak lze dvojím způsobem vybrati pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ z n-té stupnice svazku interval $\langle u_n, v_n \rangle$ tak, aby (10·9) byl vytvořující řetěz bodu y. Je-li p nejmenší z těch hodnot indexu n, pro které je y dělicím bodem n-té stupnice svazku, pak je y u jednoho z obou řetězů stále levým, u druhého stále pravým krajním bodem n-ho intervalu a to pro všecka $n \geqq p$; pro $n < p$ je interval $\langle u_n, v_n \rangle$ u obou řetězů stejný a obsahuje bod y uvnitř.

Cvičení **54.** Budiž $g = 2$ základ geometrického svazku. Geometrický řetěz bodu 3 začíná intervaly

$$\langle g_1, g_1^2 \rangle, \langle g_2^3, g_1^2 \rangle, \langle g_2^3, g_3^7 \rangle, \langle g_2^3, g_4^{13} \rangle, \langle g_5^{25}, g_4^{13} \rangle, \langle g_5^{25}, g_6^{51} \rangle,$$
$$\langle g_7^{101}, g_6^{51} \rangle, \langle g_7^{101}, g_8^{203} \rangle.$$

11. Konstrukce všech logaritmických funkcí. Budiž nyní dána nějaká logaritmická funkce $f(y)$. Zvolme si určité číslo $g > 1$ a hodnotu $f(g)$ označme a:

$$a = f(g). \tag{11·1}$$

Podle cvič. 44 je $a > 0$. Protože $a > 0$, $g > 1$, můžeme zavésti aritmetický svazek se základem a a geometrický svazek se základem g.

Jako v odst. 7 a 10 budiž

$$a_1 = a,\ g_1 = g, \tag{11·2}$$

$$a_n = 2a_{n+1},\ g_n = g_{n+1}^2. \tag{11·3}$$

Podle (11·1) a (11·2) je $a_1 = f(g_1)$. Obecněji je při každém n

$$a_n = f(g_n). \tag{11·4}$$

Neboť když při určitém n platí (11·4), pak podle (11·3) je $2a_{n+1} = f(g_{n+1}^2)$. Avšak $f(g_{n+1}^2) = 2f(g_{n+1})$ podle vlastnosti II logaritmických funkcí (viz odst. 9), takže $a_{n+1} = f(g_{n+1})$.

Z (11·4) následuje podle věty 14, že pro každé celé k (kladné, záporné i nulu) je

$$f(g_n^k) = ka_n. \tag{11·5}$$

Tedy funkce f přiřazuje dělicím bodům n-té stupnice geometrického svazku dělicí body n-té stupnice aritmetického svazku, a to po pořádku bodům

$$1,\ g_n,\ g_n^2,\ g_n^3,\ \ldots$$

body

$$0,\ a_n,\ 2a_n,\ 3a_n,\ \ldots$$

a bodům

$$g_n^{-1},\ g_n^{-2},\ g_n^{-3},\ \ldots$$

body

$$-a_n,\ -2a_n,\ -3a_n,\ \ldots$$

Budiž nyní y bod na číselné poloose, který není dělicím bodem geometrického svazku a budiž

$$\langle u_1, v_1\rangle,\ \langle u_2, v_2\rangle,\ \langle u_3, v_3\rangle,\ \ldots \tag{11·6}$$

geometrický řetěz bodu y. Položme

$$r_n = f(u_n),\ s_n = f(v_n), \tag{11·7}$$

takže $\langle r_n, s_n\rangle$ je interval n-té stupnice aritmetického svazku. Intervaly (11·6) mají vlastnosti [1], [2] vyslovené ve cvič. 52. Z toho následuje snadno, že intervaly

$$\langle r_1, s_1\rangle,\ \langle r_2, s_2\rangle,\ \langle r_3, s_3\rangle,\ \ldots \tag{11·8}$$

mají vlastnosti [1], [2] vyslovené ve cvič. 33. Proto (11·8) je aritmetický řetěz určitého bodu x, který není dělicím bodem aritmetického svazku. Snadno se dokáže, že

$$f(y) = x. \tag{11·9}$$

Neboť bod y leží uvnitř všech intervalů (11·6), t. j. $u_n < y < v_n$ pro všecka n. Z vlastnosti I logaritmických funkcí (viz odst. 9) následuje tedy podle (11·7), že $r_n < f(y) < s_n$, t. j. bod $f(y)$ leží uvnitř všech intervalů (11·8). Avšak x je jediný bod společný všem intervalům (11·8); z toho plyne (11·9).

Touto úvahou jsme získali předpis, který z každého bodu y číselné poloosy, ať už y je či není dělicím bodem geometrického svazku, vytvoří bod $f(y)$. O funkci $f(y)$ samé při tom předpisu potřebujeme znát pouze (11·1). Z toho následuje, že když dvě logaritmické funkce nabývají obě v jednom čísle $g > 1$ stejné hodnoty a, jsou ty dvě funkce identické.

Věta 16. Buďtež $f(y)$, $F(y)$ dvě logaritmické funkce. Pak existuje kladné číslo c takové, že je identicky (pro všecka $y > 0$)

$$F(y) = c \cdot f(y).$$

Důkaz. Zvolme si libovolně číslo $g > 1$. Čísla $f(g)$, $F(g)$ jsou kladná podle cvič. 44, takže lze určiti kladné číslo c rovnicí

$$F(g) = c \cdot f(g).$$

Funkce $F(y)$ a $c\, f(y)$ jsou dvě logaritmické funkce (viz cvič. 42), které nabývají pro $y = g$ obě stejné hodnoty, takže jsou identické.

Věta 16 dává odpověď na druhou z otázek uvedených na konci odst. 9. Zbývá odpověděti na prvou z těch otázek, zda totiž vůbec nějaká logaritmická funkce existuje. Cesta ke kladné odpovědi na tuto otázku je dosavadními vývody tohoto odstavce jasně naznačena. Zvolíme si číslo $a > 0$ a číslo $g > 1$. Zavedeme si aritmetický svazek se základem a a geometrický svazek se základem g. Pomocí těchto dvou svazků přiřadíme každému kladnému číslu y určité číslo $f(y)$. Je-li y dělicí bod geometrického svazku, definujeme číslo $f(y)$ podle (11·5). Není-li y dělicí bod geometrického svazku, budiž (11·6) geometrický řetěz bodu y; pomocí (11·7) dostaneme aritmetický řetěz (11·8) určitého bodu x a definujeme $f(y) = x$.

Nyní budeme zkoumati vlastnosti právě definované funkce $f(y)$; hlavním cílem je ovšem věta 21.

Cvičení 55. Jsou-li u, v dělicí body geometrického svazku a je-li $u < v$, je $f(u) < f(v)$.

Věta 17. Je-li $u < y < v$ a jsou-li u, v dělicí body geometrického svazku, jest $f(u) < f(y) < f(v)$.

Důkaz. Je-li také y dělicí bod geometrického svazku, plyne to ze cvič. 55. Není-li y dělicí bod geometrického svazku, budiž (11·6) geometrický řetěz bodu y; pomocí (11·7) vznikne aritmetický řetěz (11·8) bodu $f(y)$. Protože (11·6) je vytvořující řetěz bodu y, je

$$\lim_{n\to\infty} u_n = y, \ \lim_{n\to\infty} v_n = y;$$

protože $u < y < v$, existuje index n takový, že $u < u_n$, $v_n < v$. Podle (11·7) a podle cvič. 55 je $f(u) < r_n$, $s_n < f(v)$. Protože (11·8) je aritmetický řetěz bodu $f(y)$, je $r_n \leqq f(y) \leqq s_n$. Tedy $f(u) < f(y) < f(v)$.

Věta 18. $f(y)$ je rostoucí funkce.

Důkaz. Budiž $0 < y_1 < y_2$. Máme dokázati, že $f(y_1) < f(y_2)$. Podle cvičení 46 a 47 existují dělicí body u, v, w geometrického svazku takové, že $u < y_1 < v < y_2 < w$. Podle věty 17 je $f(u) < f(y_1) < f(v) < f(y_2) < f(w)$, tedy $f(y_1) < f(y_2)$.

Cvičení 56. Ke každému reálnému číslu x existuje kladné číslo y, pro které je $f(y) = x$.

Věta 19. Budiž

$$y_1, y_2, y_3, \ldots$$

posloupnost kladných čísel; budiž $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, kde také y je kladné číslo. Pak je

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(y).$$

Důkaz. Zvolme kladné číslo ε. Máme dokázati, že pro skoro všecka n je $| f(y_n) - f(y) | < \varepsilon$. Podle cvič. 56 existují kladná čísla u, v taková, že $f(u) = f(y) - \varepsilon$, $f(v) = f(y) + \varepsilon$. Z věty 18 následuje snadno, že $u < y < v$. Protože $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, existuje index p takový, že pro všecka $n > p$ je $u < y_n < v$. Pro $n > p$ je podle věty 18: $f(u) < f(y_n) < f(v)$, t. j. $f(y) - \varepsilon < f(y_n) < f(y) + \varepsilon$.

Cvičení 57. Jsou-li u, v dělicí body geometrického svazku, je $f(uv) = f(u) + f(v)$.

Věta 20. Je-li $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, je $f(y_1 y_2) = f(y_1) + f(y_2)$.

Důkaz. Podle cvič. 46 a 49 existují posloupnosti

$$u_1, u_2, u_3, \ldots; v_1, v_2, v_3, \ldots,$$

jejichž členy jsou všecky dělicími body geometrického svazku, a pro které platí $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = y_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = y_2$. Podle cvič. 57 je pro všecka n

$$f(u_n v_n) = f(u_n) + f(v_n).$$

Podle vět 3, 4 a 19 je však

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n v_n) = f(y_1 y_2), \lim_{n\to\infty} [f(u_n) + f(v_n)] = f(y_1) + f(y_2),$$

takže $f(y_1 y_2) = f(y_1) + f(y_2)$.

Věta 21. $f(y)$ je logaritmická funkce.

To plyne z vět 18 a 20. Mimoto je z našich úvah patrné, že každá logaritmická funkce je tvaru $f(y)$, volíme-li $g > 1$ libovolně a volíme-li za a hodnotu dané logaritmické funkce v bodě g. Proto výsledek cvič. 56 platí pro každou logaritmickou funkci. Zejména ke každé logaritmické funkci $\varphi(y)$ existuje číslo $g > 0$ takové, že $\varphi(g) = 1$; protože $\varphi(y)$ je rostoucí funkce, je jen jediné takové číslo g; podle cvič. 44 je $g > 0$. Toto číslo g nazveme základem logaritmické funkce. Za základ můžeme voliti libovolné číslo $g > 1$; neboť volíme-li dané $g > 1$ za základ geometrického svazku a číslo 1 za základ aritmetického svazku, pak naše funkce $f(y)$ je patrně logaritmická funkce se základem g. Konečně podle věty 16 je logaritmická funkce svým základem g jednoznačně určena. Logaritmickou funkci se základem $g > 1$ označíme

$$\log_g y.$$

V početní praxi se užívá logaritmické funkce se základem $g = 10$, což má tu výhodu, že násobíme-li číslo mocninou desíti, změní se pouze celá část logaritmu (t. zv. charakteristika). Při praktických výpočtech se užívá pro logaritmy se základem 10 (t. zv. dekadické neboli briggsovy logaritmy) značky log; i v této knížce jsme tak na jednom místě učinili (na konci odst. 6). V teoretických úvahách však jsou nejvýhodnější logaritmy se základem e [viz (6·16)] a budeme i v této knížce užívati znaku log pouze pro tyto logaritmy (viz odst. 15).*)

*) Obvykle se u nás pro logaritmy o základu e užívá značky lg, aby se rozlišily od logaritmů dekadických označovaných log.

Věta 22. Budiž $g > 1$, $h > 1$. Pak je identicky

$$\log_h y = \frac{\log_g y}{\log_g h}, \tag{11·9}$$

$$\log_h y = \log_h g \,.\, \log_g y. \tag{11·10}$$

Důkaz. Podle věty 16 existuje číslo $c > 0$, pro které je identicky $\log_h y = c \,.\, \log_g y$. Dosadíme-li $y = h$, vyjde $1 = c.\ \log_g h$, z čehož plyne (11·9); dosadíme-li však $y = g$, vyjde $\log_h g = c$, z čehož plyne (11·10).

12. Obecná mocnina. Dosud jsme v této knížce užívali pouze takových mocnin u^s, u kterých mocnitelem s je číslo celé. Budeme nyní přesně definovati numerický význam znaku u^s, u kterého je mocnitelem s libovolné reálné číslo. Ale o mocněnci u budeme při tom předpokládati, že je to kladné číslo. Na jednu věc musíme při tom dávati pozor! Je-li s celé číslo, je nám význam znaku u^s už znám; proto se musíme přesvědčit, že obecná definice znaku u^s ve zvláštním případě celého s dává tomuto znaku jeho obvyklý význam.

Budiž tedy u číslo kladné a s libovolné číslo reálné. Při definici znaku u^s budeme rozeznávati tři případy.

I. Budiž $u = 1$. Pak klademe $1^s = 1$ pro všecka s. Pro celá s to souhlasí.

II. Budiž $u > 1$. Víme (viz cvič. 56), že existuje kladné číslo v, pro které je

$$\log_u v = s. \tag{12·1}$$

Protože logaritmická funkce stále roste, může býti jen jediné takové číslo v. Numerickou hodnotou znaku u^s rozumíme toto číslo v. Že to souhlasí pro celá s, plyne z věty 14.

III. Budiž konečně $0 < u < 1$. Pak je $\frac{1}{u} < 1$, takže podle II víme, co znamená znak $\left(\frac{1}{u}\right)^s$; hodnotou znaku u^s rozumíme převrácenou hodnotu

$$u^s = \frac{1}{\left(\frac{1}{u}\right)^s}$$

čísla $\left(\frac{1}{u}\right)^s$. Pro celá s zase to souhlasí.

Ve všech případech je u^s kladné číslo (pro všecka kladná u a pro libovolné s).

Na střední škole se postupuje obráceně nežli jsme postupovali zde. My jsme napřed zavedli logaritmus a užili jsme vztahu (12·1) k tomu, abychom pojem obecné mocniny převedli na pojem logaritmu. Na střední škole se obráceně pomocí vztahu (12·1) převádí pojem logaritmu na pojem mocniny. Postup známý ze střední školy není nesprávný; ale aby byl přesný, musila by se napřed mocnina s iracionálním exponentem definovati pečlivěji než se to děje na střední škole.

Věta 23. Je-li $g > 1$, $u > 0$ a s jakékoli reálné číslo, je

$$\log_g u^s = s \log_g u. \tag{12·2}$$

Důkaz. I. Je-li $u = 1$, platí (12·2) podle cvič. 43.

II. Budiž $u > 1$. Pro $g = u$ platí (12·2) podle (12·1), neboť $\log_u u = 1$. Změníme-li (12·2), pak se obě strany vztahu (12·2) znásobí týmž číslem, takže vztah (12·2) zůstane správný.

III. Případ $0 < u < 1$ se převede na případ $u > 1$ podle cvič. 45.

Věta 24. Pro $u > 0$ a libovolná s, t jest.

$$u^s \,.\, u^t = u^{s+t}.$$

Důkaz. Zvolme $g > 1$. Protože pro $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ ze vztahu $\log_g y_1 = \log_g y_2$ následuje $y_1 = y_2$, stačí dokázati, že

$$\log_g (u^s \,.\, u^t) = \log_g u^{s+t},$$

což plyne z věty 23.

Cvičení **58.** Pro $u > 0$, $v > 0$ a libovolné s jest

$$u^s \,.\, v^s = (uv)^s.$$

Cvičení **59.** Pro $u > 0$ a libovolná s, t jest

$$(u^s)^t = u^{st}.$$

Cvičení **60.** Pro $u > 1$, $s < t$ je $u^s < u^t$.

Cvičení **61.** Pro $0 < u < 1$, $s < t$ je $u^s > u^t$.

Cvičení **62.** Pro $0 < u < v$, $s > 0$ je $u^s < v^s$.

Cvičení **63.** Pro $0 < u < v$, $s < 0$ je $u^s > v^s$.

13. Spojitost. Budiž $f(x)$ funkce, která nemusí býti definována pro všecky hodnoty proměnné x. Je-li c číslo, pro které hodnota $f(c)$ je definována (neboli je-li c číslo z oboru funkce $f(x)$), pak říkáme, že funkce $f(x)$ je v čísle c spojitá, když

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c). \tag{13·1}$$

Vztah (13·1) znamená, že pro všecky body x z oboru funkce $f(x)$, které leží dosti blízko u bodu c, je hodnota $f(x)$ blízká hodnotě $f(c)$. Přesný význam vztahu (13·1) je: Každému číslu $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ je splněna pro všecka ta x z oboru funkce $f(x)$, pro která je $|x - c| < \delta$.

Věta 25. Budiž $f(x)$ funkce spojitá v čísle c. Budiž

$$c_1, c_2, c_3, \ldots \tag{13·2}$$

posloupnost, jejíž všecky členy jsou v oboru funkce $f(x)$. Je-li $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, pak také $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(c)$.

Důkaz. Budiž dáno $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že pro skoro všecka n je $|f(c_n) - f(c)| < \varepsilon$. Protože platí (13·1), existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro všecka x z oboru funkce $f(x)$, pro která $|x - c| < \delta$, je $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Protože $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, existuje index p takový, že pro všecka $n > p$ je $|c_n - c| < \delta$. Pro $n > p$ je $|f(c_n) - f(c)| < \varepsilon$.

Věta 26. Budiž c číslo z oboru funkce $f(x)$. Budiž $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(c)$ pro každou posloupnost (13·2), jejíž všecky členy jsou v oboru funkce $f(x)$, pro kterou platí $\lim_{n\to\infty} c_n = c$. Pak funkce $f(x)$ je spojitá v čísle c.

Důkaz. Je-li ε kladné číslo, řekneme, že číslo $\delta > 0$ má vlastnost $V(\varepsilon)$, když $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ pro všecka ta x z oboru funkce $f(x)$, pro která je $|x - c| < \delta$. Máme dokázati, že při každé volbě čísla $\varepsilon > 0$ existuje nějaké číslo $\delta > 0$ s vlastností $V(\varepsilon)$. Budeme předpokládati naopak, že máme dáno určité číslo $\varepsilon > 0$ takové, že žádné číslo $\delta > 0$ nemá vlastnost $V(\varepsilon)$. Důkaz bude dokončen, jakmile se přesvědčíme, že tento předpoklad vede k nemožnému důsledku. Podle našeho předpokladu pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ číslo $\frac{1}{n}$ nemá vlastnost $V(\varepsilon)$. To znamená, že v oboru funkce $f(x)$ musí existovat aspoň jedno číslo c_n takové, že

$$|c_n - c| < \frac{1}{n}, \tag{13·3}$$

$$|f(c_n) - f(c)| \geqq \varepsilon. \tag{13·4}$$

Ze (13·3) však následuje $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, takže musí býti $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(c)$. To je však nemožné, platí-li (13·4) pro všecka n.

Věta 27. Buďtež $f(x)$ a $g(x)$ dvě funkce, které jsou obě spojité v čísle c. Pak také funkce

$$f(x) + g(x),\quad f(x) - g(x),\quad f(x)\,.\,g(x)$$

jsou spojité v čísle c.

To plyne z vět 3, 4 a 26. Jiný důkaz věty 27 se najde ve VM, odst. 15.

Cvičení 64. Budiž $f(x)$ funkce spojitá v čísle c. Je-li $f(c) \neq 0$, pak také funkce $\frac{1}{f(x)}$ je spojitá v čísle c.

Řekneme-li o funkci $f(x)$ prostě, že je spojitá, míníme, že je spojitá v každém čísle c z oboru funkce $f(x)$.

Věta 28. Logaritmická funkce je spojitá.

To plyne z vět 19 a 26.

Věta 29. Jsou-li $f(x)$ a $\varphi(y)$ spojité funkce, pak také $\varphi[f(x)] = F(x)$ je spojitá funkce.

Důkaz. Budiž c číslo z oboru funkce $F(c)$. To znamená, že jednak číslo c je v oboru funkce $f(x)$, jednak číslo $f(c)$ je v oboru funkce $\varphi(y)$. Budiž (13·2) posloupnost, jejíž každý člen je v oboru funkce $F(x)$ a pro kterou platí $\lim_{n\to\infty} c_n = c$. Podle věty 26 stačí dokázati, že $\lim_{n\to\infty} F(c_n) = F(c)$. Ježto každé c_n je v oboru funkce $F(x)$, je každé c_n v oboru funkce $f(x)$ a každé $f(c_n)$ je v oboru funkce $\varphi(y)$. Protože $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ a protože čísla c_n jsou v oboru spojité funkce $f(x)$, podle věty 25 je $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(c)$. Protože $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(c)$ a protože čísla $f(c_n)$ jsou v oboru funkce $\varphi(y)$, podle věty 25 je $\lim_{n\to\infty} \varphi[f(c_n)] = \varphi[f(c)]$, t. j. $\lim_{n\to\infty} F(c_n) = F(c)$. Tím je důkaz dokončen.

Jiný důkaz se najde ve VM, odst. 17.

Věta 30. Všecky členy posloupnosti (13·2) buďtež čísla kladná; také c budiž kladné. Budiž $g > 1$.

Je-li

$$\lim_{n\to\infty} \log_g c_n = \log_g c, \tag{13·5}$$

je

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

Důkaz. Budiž $0 < \varepsilon < c$. Máme dokázati, že pro skoro všecka n je $|c_n - c| < \varepsilon$. Protože logaritmická funkce roste, je

$$\log_g (c - \varepsilon) < \log_g c < \log_g (c + \varepsilon). \tag{13·6}$$

Podle (13·5) existuje index p takový, že pro všecka $n > p$ je

$$\log_g (c - \varepsilon) < \log_g c_n < \log_g (c + \varepsilon).$$

Protože logaritmická funkce roste, je $c - \varepsilon < c_n < c + \varepsilon$ pro všecka $n > p$.

Věta 31. Budiž $u > 0$. Pro všecka reálná x budiž $f(x) = u^x$. Pak $f(x)$ je spojitá funkce.

Důkaz. Budiž $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = c$. Podle věty 26 máme dokázati, že $\lim\limits_{n \to \infty} f(c_n) = f(c)$. Zvolme $g > 1$. Podle cvičení 14 je $\lim\limits_{n \to \infty} c_n \log_g u = c \log_g u$. Tedy $\lim\limits_{n \to \infty} \log_g f(c_n) = \log_g f(c)$ podle věty 23, takže $\lim\limits_{n \to \infty} f(c_n) = f(c)$ podle věty 30.

Cvičení 65. Budiž s reálné číslo. Pro všecka kladná y budiž $f(y) = y^s$. Pak $f(y)$ je spojitá funkce.

14. Exponenciální funkce. Je-li každému reálnému číslu x přiřazeno určité číslo $f(x)$, máme funkci, jejíž obor je soustava všech reálných čísel. Řekneme, že $f(x)$ je exponenciální funkce, když má tyto dvě vlastnosti:

I. $f(x)$ je rostoucí funkce.

II. Jsou-li x_1, x_2 libovolná reálná čísla, pak

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \,.\, f(x_2).$$

Věta 32. Je-li $f(x)$ exponenciální funkce, pak $f(0) = 1$.

Důkaz. Podle vlastnosti I exponenciální funkce existuje číslo c takové, že $f(c) \neq 0$. Podle vlastnosti II je $f(c) = f(0) \,.\, f(c)$, tedy $f(0) = 1$.

Cvičení 66. Je-li $f(x)$ exponenciální funkce, je $f(x) \,.\, f(-x) = 1$ pro každé reálné x.

Cvičení 67. Je-li $f(x)$ exponenciální funkce, je $f(x) > 1$ pro $x > 0$, $0 < f(x) < 1$ pro $x < 0$.

Cvičení 68. Budiž $f(x)$ exponenciální funkce. Pro každé reálné x a pro každé celé k je $f(kx) = [f(x)]^k$.

Cvičení 69. Budiž $u > 1$. Pro všecka reálná x budiž $f(x) = u^x$. Pak $f(x)$ je exponenciální funkce.

Věta 33. Buďtež $f_1(x)$, $f_2(x)$ dvě exponenciální funkce. Budiž $a > 0$, $f_1(a) = f_2(a)$. Pak je identicky $f_1(x) = f_2(x)$.

Důkaz. Položme $g = f_1(a) = f_2(a)$, takže $g > 1$ podle cvič. 67. Zaveďme aritmetický svazek se základem a a geometrický svazek se základem g. Jako obvykle položme

$$a_1 = a, \; g_1 = g,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2}, \; g_{n+1} = \sqrt{g_n}.$$

Pro $n = 1$ jest $f_1(a_n) = g_n$; platí-li $f_1(a_n) = g_n$ při určitém n, jest $f_1(a_{n+1}) \,.\, f_1(a_{n+1}) = f_1(2a_{n+1}) = f_1(a_n) = g_n = g_{n+1} \,.\, g_{n+1}$, tedy $f_1(a_{n+1}) = \pm\, g_{n+1}$, takže $f_1(a_{n+1}) = g_{n+1}$ podle cvič. 67. Tedy je $f_1(a_n) = g_n$

pro všecka n; podle cvič. 68 je $f_1(ka_n) = g_n{}^k$ pro všecka celá k. Docela stejně se dostane $f_2(ka_n) = g_n{}^k$, takže $f_1(x) = f_2(x)$ pro všecky dělicí body x aritmetického svazku. Není-li x dělicí bod aritmetického svazku, budiž

$$\langle r_1, s_1 \rangle, \langle r_2, s_2 \rangle, \langle r_3, s_3 \rangle, \ldots \tag{14·1}$$

aritmetický řetěz bodu x. Položme

$$u_n = f_1(r_n), \; v_n = f_1(s_n), \tag{14·2}$$

takže $\langle u_n, v_n \rangle$ je interval n-té stupnice geometrického svazku. Intervaly (14·1) mají vlastnosti [1], [2] vyslovené ve cvič. 33. Z toho následuje snadno, že intervaly

$$\langle u_1, v_1 \rangle, \langle u_2, v_2 \rangle, \langle u_3, v_3 \rangle, \ldots \tag{14·3}$$

mají vlastnosti [1], [2] vyslovené ve cvič. 52. Proto (14·3) je geometrický řetěz určitého bodu y, který není dělicím bodem geometrického svazku. Pro všecka n je $r_n < x < s_n$; protože exponenciální funkce stále roste, následuje ze (14·2), že $u_n < f_1(x) < v_n$ pro všecka n. Tedy bod $f_1(x)$ je uvnitř všech intervalů (14·3). Avšak y je jediný bod společný všem intervalům (14·3). Proto je $f_1(x) = y$. Docela stejně se dokáže také $f_2(x) = y$, takže $f_1(x) = f_2(x)$.

Cvičení 70. Je-li $f(x)$ exponenciální funkce, pak existuje číslo $u > 1$ takové, že je identicky $f(x) = u^x$.

15. Derivace. Pojem derivace je jeden z nejdůležitějších pojmů nauky o funkcích. Názorný výklad tohoto pojmu se najde ve VM, odst. 10. Zde si pouze uveďme aritmetickou definici derivace. O funkci $f(x)$ pravíme, že má pro $x = a$ derivaci rovnou číslu α, je-li funkce $f(x)$ definována ve všech bodech dosti blízkých bodu a a je-li

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha. \tag{15·1}$$

Přesný význam vztahu (15·1) jest: Každému číslu $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \alpha \right| < \varepsilon$$

je splněna i pro kladná h taková, že $0 < h < \delta$ i pro záporná h taková, že $0 < -h < \delta$. Hodnotu derivace funkce $f(x)$ pro $x = a$ značíme obvykle $f'(a)$. Pojmu derivace jsme v této knížce již jednou příležitostně užili (při větě 13).

Z vlastností derivace si uveďme jen tuto:

Věta 34. Budiž $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $\langle r, s\rangle$. Má-li $f(x)$ pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ stále kladnou derivaci, pak $f(x)$ roste v intervalu $\langle r, s\rangle$. Má-li $f(x)$ pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ stále zápornou derivaci, pak $f(x)$ klesá v intervalu $\langle r, s\rangle$.

Důkaz se najde ve VM, odst. 21 a 35.

Užitečnost věty je prokázána četnými příklady ve VM, odst. 21 a 22.

Má-li logaritmická funkce $\log_g y$ pro $y = 1$ derivaci rovnou číslu α, pak existuje limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log_g (1 + h)}{h} = \alpha. \tag{15·1}$$

Existuje-li takové číslo α, pak je zřejmě při každém kladném y

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log_g\left(1 + \frac{h}{y}\right)}{\frac{h}{y}} = \alpha$$

neboli

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log_g (y + h) - \log_g y}{h} = \frac{\alpha}{y},$$

takže

$$(\log_g y)' = \frac{\alpha}{y}$$

pro každé kladné y. Potíž je pouze v důkaze existence limity (15·1). Za tím účelem potřebujeme zkoumati, jakých hodnot nabývá funkce

$$\frac{\log_g y}{y - 1} \tag{15·2}$$

v blízkosti bodu $y = 1$. Místo funkce (15·2) můžeme studovati její převrácenou hodnotu, tedy funkci

$$\varphi(y) = \frac{y - 1}{\log_g y}.$$

Pro $y = 1$ není $\varphi(y)$ definována, neboť zlomek se jmenovatelem 0 je bezvýznamný. Pro všecka ostatní $y > 0$ je však funkce $\varphi(y)$ definována. Tedy obor funkce $\varphi(y)$ je číselná poloosa, ze které se odstraní bod 1.

Věta 35. Funkce $\varphi(y)$ je spojitá.

To plyne z vět 27, 28 a cvič. 64.

Zaveďme si aritmetický svazek se základem $a_1 = 1$ a geometrický svazek se základem $g_1 = g$. Jako obvykle budiž

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2}, \; g_{n+1} = \sqrt{g_n}.$$

Víme, že

$$\log_g g_n^k = ka_n,$$

takže pro $k \neq 0$ je

$$\varphi(g_n^k) = \frac{g_n^k - 1}{ka_n}. \tag{15·3}$$

Věta 36. Jsou-li u, v dělicí body geometrického svazku a je-li $u \neq 1 \neq v$, $u < v$, jest $\varphi(u) < \varphi(v)$.

Důkaz. Zvolme n tak, že oba body u, v jsou dělicí body n-té geometrické stupnice. Mimo bod 1, ve kterém funkce $\varphi(y)$ není definována, má tato stupnice za dělicí body jednak body

$$g_n, g_n^2, g_n^3, \dots \tag{15·4}$$

napravo od bodu 1, jednak body

$$\frac{1}{g_n}, \frac{1}{g_n^2}, \frac{1}{g_n^3}, \dots \tag{15·5}$$

nalevo od bodu 1. V bodech (15·4) nabude funkce $\varphi(y)$ hodnot

$$\frac{g_n - 1}{a_n}, \frac{g_n^2 - 1}{2a_n}, \frac{g_n^3 - 1}{3a_n}, \dots; \tag{15·6}$$

v bodech (15·5) nabude funkce $\varphi(y)$ hodnot

$$\frac{g_n - 1}{g_n a_n}, \frac{g_n^2 - 1}{2g_n^2 a_n}, \frac{g_n^3 - 1}{3g_n^3 a_n}, \dots; \tag{15·7}$$

Protože $g_n > 1$, $a_n > 0$, následuje ze cvič. 6, že (15·6) je stoupající posloupnost, a ze cvič. 7, že (15·7) je klesající posloupnost. V (15·6) je tedy nejmenší člen $\frac{g_1 - 1}{a_1}$; v (15·7) je největší člen $\frac{g_1 - 1}{g_1 \, a_1}$; zřejmě však

$$\frac{g_1 - 1}{g_1 a_1} < \frac{g_1 - 1}{a_1},$$

takže kterýkoli člen posloupnosti (15·7) je menší než kterýkoli člen posloupnosti (15·6). Tím je patrně důkaz věty dokončen.

Věta 37. Funkce $\varphi(y)$ je rostoucí funkce.

Důkaz. Budiž $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, $y_1 \neq 1 \neq y_2$, $y_1 < y_2$. Máme dokázati, že $\varphi(y_1) < \varphi(y_2)$. Podle cvič. 46 a 47 existují dělicí body geometrického svazku u, v takové, že $u \neq 1 \neq v$, $y_1 < u < v < y_2$. Podle věty 36 je $\varphi(v) > \varphi(u)$. Proto můžeme zvoliti číslo $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\varphi(u) + \varepsilon < \varphi(v) - \varepsilon. \tag{15·8}$$

Podle věty 35 existuje na číselné poloose interval J, který neobsahuje bod 1, takový, že bod y_1 leží uvnitř J a takový, že $|\varphi(y) - \varphi(y_1)| < \varepsilon$ pro každý bod y uvnitř J. Podle cvič. 46 a 47 můžeme zvolit uvnitř J dělicí bod t_1 geometrického svazku, pro který je $t_1 < u$; jest tedy $\varphi(t_1) < \varphi(u)$ podle věty 36 a mimoto je $|\varphi(t_1) - \varphi(y_1)| < \varepsilon$. Docela stejně se dokáže, že existuje dělicí bod $t_2 \neq 1$ geometrického svazku, pro který je $\varphi(v) < \varphi(t_2)$ a $|\varphi(t_2) - \varphi(y_2)| < \varepsilon$. Jest

$$\varphi(y_1) < \varphi(t_1) + \varepsilon < \varphi(u) + \varepsilon,$$
$$\varphi(y_2) > \varphi(t_2) - \varepsilon > \varphi(v) - \varepsilon,$$

takže podle (15·8) je $\varphi(y_1) < \varphi(y_2)$.

Body $g_n, g_{n+1}, g_n^{-1}, g_{n+1}^{-1}$ jsou dělicí body našeho geometrického svazku, jsou různé od bodu 1 a jest $g_n^{-1} < g_{n+1}^{-1} < g_{n+1} < g_n$. Podle věty 36 je

$$\varphi(g_n^{-1}) < \varphi(g_{n+1}^{-1}) < \varphi(g_{n+1}) < \varphi(g_n).$$

Tedy

$$\langle\varphi(g_1^{-1}), \varphi(g_1)\rangle, \langle\varphi(g_2^{-1}), \varphi(g_2)\rangle, \langle\varphi(g_3^{-1}), \varphi(g_3)\rangle, \dots \tag{15·9}$$

je řetěz intervalů. Podle (15·3) je

$$\varphi(g_1^{-1}) > 0, \quad \frac{\varphi(g_n)}{\varphi(g_n^{-1})} = g_n,$$

takže podle (10·8) a podle cvič. 26 je (15·9) vytvořující řetěz určitého bodu α. Bod α leží v intervalu $\langle\varphi(g_1^{-1}), \varphi(g_1)\rangle$, takže je $\alpha > 0$.

Věta 38. Pro $y > 1$ je $\varphi(y) > \alpha$; pro $0 < y < 1$ je $\varphi(y) < \alpha$; mimo to je

$$\lim_{y \to 1} \varphi(y) = \alpha. \tag{15·10}$$

Důkaz. Je-li $y > 1$, pak podle (10·8) existuje index n, pro který $g_n < y$, takže $\varphi(g_n) < \varphi(y)$ podle věty 37; protože α je v n-tém intervalu posloupnosti (15·9), je $\alpha < \varphi(y)$. Je-li $0 < y < 1$, pak existuje takové n, že $g_n < y^{-1}$ neboli $g_n^{-1} > y$, tedy $\varphi(g_n^{-1}) > y$, takže $\alpha > y$. Zbývá dokázati vztah (15·10). Budiž dáno číslo $\varepsilon > 0$; máme dokázati, že existuje interval J, uvnitř kterého je bod 1, takový, že $| \varphi(y) - \alpha | < \varepsilon$ pro všecka $y \neq 1$ uvnitř intervalu J. Ježto (15·9) je vytvořující řetěz bodu α, jest

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(g_n^{-1}) = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi(g_n) = \alpha.$$

Tedy můžeme zvolit n tak, že $| \varphi(g_n^{-1}) - \alpha | < \varepsilon$, $| \varphi(g_n) - \alpha | < \varepsilon$. Protože $g_n^{-1} < 1 < g_n$, leží bod 1 uvnitř intervalu $J = \langle g_n^{-1}, g_n \rangle$. Leží-li $y \neq 1$ uvnitř J, pak podle věty 37 je

$$\varphi(y) < \varphi(g_n) < \alpha + \varepsilon, \quad \varphi(y) > \varphi(g_n^{-1}) > \alpha - \varepsilon.$$

Hodnota čísla $\alpha > 0$ závisí na volbě základu g logaritmické funkce, s pomocí které jsme tvořili funkci $\varphi(y)$. Nahradíme-li funkci $\log_g y$ jinou logaritmickou funkcí, pak podle věty 16 existuje číslo $c > 0$ takové, že nová logaritmická funkce je identická s funkcí $c \log_g y$; obráceně $c \log_g y$ je podle cvič. 42 logaritmická funkce při každé volbě čísla $c > 0$. Zavedeme-li místo funkce $\log_g y$ funkci $c \log_g y$, máme místo funkce

$$\varphi(y) = \frac{y - 1}{\log_g y}$$

funkci

$$\frac{y - 1}{c \log_g y} = \frac{\varphi(y)}{c},$$

takže místo čísla α dostaneme číslo $\frac{\alpha}{c}$. Protože je $\alpha > 0$, vidíme, že vhodnou volbou základu logaritmické funkce můžeme docíliti toho, že číslo odpovídající číslu α bude míti libovolně předepsanou kladnou hodnotu; a různým hodnotám čísla α odpovídají různé logaritmické funkce. Zejména existuje zcela určitá logaritmická funkce, u které číslo odpovídající číslu α má hodnotu 1. Základ této logaritmické funkce označíme e; my jsme sice v odst. 6 už označili písmenem e zcela určité číslo, ale to nevadí, neboť ze vztahu (15·13), který v brzku dokážeme, plyne volbou $x = 1$ a porovnáním s (6·16), že číslo e zde zavedené je totožné s číslem e zavedeným v odst. 6. Logaritmy o základu e se jmenují přirozené neboli Napierovy (čti neperovy) logaritmy; budeme je značiti symbolem log, poněvadž záměna s logaritmy dekadickými není zde možná.*)

Cvičení 71. Jest

$$\lim_{y \to 1} \frac{y-1}{\log y} = 1, \tag{15·11}$$

$$\lim_{y \to 1} \frac{\log y}{y-1} = 1. \tag{15·12}$$

Cvičení 72. Pro $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, $y_1 \neq 1 \neq y_2$, $y_1 < y_2$ jest

$$\frac{y_1 - 1}{\log y_1} < \frac{y_2 - 1}{\log y_2}.$$

Věta 39. Pro $y > 0$, $y \neq 1$ je $1 + \log y < y$.

Důkaz. Podle věty 38 (ve které $g = e$, tedy $\alpha = 1$) je pro $y > 1$

$$\frac{y-1}{\log y} > 1$$

a mimo to $\log y > 0$ podle cvičení 44, takže $y - 1 > \log y$ neboli $y > 1 + \log y$. Podle věty 38 je pro $0 < y < 1$

$$\frac{y-1}{\log y} < 1 \quad \text{neboli} \quad \frac{y-1}{-\log y} > -1$$

a mimo to $-\log y > 0$ podle cvič. 44, takže zase $y - 1 > \log y$ neboli $y > 1 + \log y$.

Věta 40. Pro každé reálné x je

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \tag{15·13}$$

Důkaz. Pro $x = 0$ je vztah (15·13) zřejmý. Budiž tedy $x \neq 0$. Položme $y = 1 + \dfrac{x}{n}$. Pro $n > |x|$ je $y > 0$, takže symbol $\log y$ má význam, a jest

$$\frac{\log y}{y-1} = \frac{n}{x} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Když celé n roste do nekonečna, pak y se blíží jedné (a pro $n > |x|$ je $y > 0$, $y \neq 1$); tedy podle (15·12) je

*) Viz poznámku na str. 43.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1$$

takže

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = x.$$

Podle vět 25 a 31 je tedy

$$\lim_{n\to\infty} e^{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = e^x.$$

Tím je (15·13) dokázáno, neboť

$$e^{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

podle definice levé strany.

Cvičení 73. Je-li $0 < u < v$, jest

$$\frac{1}{v} < \frac{\log v - \log u}{v - u} < \frac{1}{u}.$$

Je-li $0 > u > v$, jest

$$\frac{1}{v} > \frac{\log |v| - \log |u|}{v - u} > \frac{1}{u}.$$

[Ve větě 39 volte jednak $y = \frac{v}{u}$, jednak $y = \frac{u}{v}$.]

Věta 41. Pro každé $y \neq 0$ je

$$(\log |y|)' = \frac{1}{y}.$$

To plyne snadno ze cvič. 73.

Cvičení 74. Je-li $r < s$, je

$$e^r < \frac{e^s - e^r}{s - r} < e^s.$$

[Ve cvič. 73 volte $u = e^r$, $v = e^s$.]

Věta 41a. Pro každé reálné x je

$$(e^x)' = e^x.$$

Cvičení 75. Budiž $u > 0$. Pro každé reálné x je

$$(u^x)' = u^x \log u.$$

[Jest $u^x = e^{x \log u}$.]

Věta 42. Budiž s libovolné reálné číslo. Pro každé reálné x je

$$(x^s)' = sx^{s-1}. \tag{15·14}$$

Důkaz. Jest $x = e^{\log x}$ podle definice pravé strany, tedy $x^s = e^{s \log x}$ podle cvič. 59. Vzorec (15·14) plyne tedy z vět 41 a 41a podle pravidla o derivování složené funkce (viz VM, odst. 17).

Můžeme si odvoditi vzorec (15·14) také bez pravidla o derivování složené funkce. Budiž nejprve $s > 1$. Je-li $0 < x < y$, pak je podle cvič. 60

$$0 < \frac{y}{x} < \left(\frac{y}{x}\right)^s$$

a podle cvič. 61

$$0 < \left(\frac{x}{y}\right)^s < \frac{x}{y}.$$

Tedy podle cvič. 72 je

$$\frac{\frac{y}{x} - 1}{\log \frac{y}{x}} < \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^s - 1}{\log \left(\frac{y}{x}\right)^s},$$

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^s - 1}{\log \left(\frac{x}{y}\right)^s} < \frac{\frac{x}{y} - 1}{\log \frac{x}{y}}.$$

Podle (12·2) můžeme tyto nerovnosti psáti ve tvaru

$$\frac{\frac{y}{x} - 1}{\log \frac{y}{x}} < \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^s - 1}{s \log \frac{y}{x}}, \tag{15·15}$$

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^s - 1}{s \log \frac{x}{y}} < \frac{\frac{x}{y} - 1}{\log \frac{x}{y}}. \tag{15·16}$$

V nerovnosti (15·15) násobme na obou stranách kladným číslem $\log \frac{y}{x}$, a týmž kladným číslem $\log \frac{y}{x} = -\log \frac{x}{y}$ násobme také obě strany nerovnosti (15·16). Vyjde

$$\frac{y}{x} - 1 < \frac{1}{s}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^s - 1\right], \tag{15·17}$$

$$\frac{1}{s}\left[1 - \left(\frac{x}{y}\right)^s\right] < 1 - \frac{x}{y}. \tag{15·18}$$

Násobíme-li ještě v (15·17) obě strany kladným číslem sx^s a v (15·18) obě strany kladným číslem sy^s, dostaneme, že pro $s > 1$, $0 < x < y$ je

$$sx^{s-1} < \frac{y^s - x^s}{y - x} < sy^{s-1}$$

a z toho plyne snadno (15·14) pro $s > 1$, protože funkce sx^{s-1} je pro $x > 0$ spojitá podle cvič. 65. Máme-li takto (15·14) dokázáno pro $s > 1$, můžeme dále usuzovati na př. takto. Platí-li (15·14) pro určité s, pak je podle pravidla o derivování podílu [viz VM, vzorec (18·3)]

$$(x^{s-1})' = \left(\frac{x^s}{x}\right)' = \frac{sx^{s-1} \cdot x - x^s \cdot 1}{x^2} = (s-1)\, x^{s-2}$$

t. j. vzorec (15·14) zůstane v platnosti, zmenšíme-li s o jedničku. Proto vzorec (15·14) platný pro $s > 1$ zůstane v platnosti pro $s > 0$, pro $s > -1$, pro $s > -2$ atd., t. j. pro všecka reálná s vůbec.

Cvičení 76. Derivujte funkce

a) $\log(x^2 + 1)$; b) e^{x^2}; c) x^x;

d) $e^{\sqrt{x}}$; e) $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$, f) $(x^2 + 1)^{\frac{1}{x}}$.

16. Exponenciální řada.

Když $|x| < 1$, jest

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

$$\log\frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

S pomocí těchto řad se dají velmi pohodlně počítati logaritmy. Ale o tom je řeč ve VM, odst. 30, a není důvodu, abychom se tím v této knížce zabývali znovu. Za to se v tomto odstavci seznámíme s jinou nekonečnou řadou, s pomocí které můžeme velmi snadno počítati nejen číslo e, nýbrž také hodnoty funkce e^x pro všecka reálná x.

Věta 43. Budiž

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots \tag{16·1}$$

posloupnost spojitých funkcí v intervalu $\langle r, s\rangle$. Pro všecka x uvnitř

$\langle r, s\rangle$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ budiž

$$f'_{n+1}(x) = f_n(x). \tag{16·2}$$

Pro $n \geqq 2$ budiž $f_n(r) = 0$. Je-li $f_1(x)$ stále kladná pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$, pak také pro $n \geqq 2$ je $f_n(x)$ stále kladná pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$.

Důkaz. Nechť při určitém n je $f_n(x) > 0$ pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$. Máme dokázati totéž o funkci $f_{n+1}(x)$. Funkce $f_{n+1}(x)$ je spojitá v intervalu $\langle r, s\rangle$ a uvnitř $\langle r, s\rangle$ má podle (16·2) stále kladnou derivaci. Funkce $f_{n+1}(x)$ tedy roste v intervalu $\langle r, s\rangle$ podle věty 34, takže pro x uvnitř $\langle r, s\rangle$ je $f_{n+1}(x) > f_{n+1}(r) = 0$.

Cvičení 77. Budiž (16·1) posloupnost spojitých funkcí v intervalu $\langle r, s\rangle$. Pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nechť platí (16·2). Pro $n \geqq 2$ budiž $f_n(s) = 0$. Je-li $f_1(x)$ stále kladná pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$, pak pro $n \geqq 2$ je $f_n(x)$ pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$
a) stále kladná, je-li n liché; b) stále záporná, je-li n sudé.

Věta 44. Budiž (16·1) posloupnost spojitých funkcí v intervalu $\langle r, s\rangle$. Pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nechť platí (16·2). Pro $n \geqq 2$ budiž $f_n(r) = 0$. Budiž $c > 0$ určité číslo; pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ budiž $| f_1(x) | < c$. Pak pro $n \geqq 2$ je pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$

$$| f_n(x) | < c \frac{(x - r)^{n-1}}{(n - 1)!}.$$

Důkaz. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ budiž

$$F_n(x) = c \frac{(x - r)^{n-1}}{(n - 1)!} - f_n(x),$$

$$G_n(x) = c \frac{(x - r)^{n-1}}{(n - 1)!} + f_n(x),$$

zejména

$$F_1(x) = c - f_1(x), \quad G_1(x) = c + f_1(x),$$

takže $F_1(x) > 0$, $G_1(x) > 0$ pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$. $F_n(x)$ a $G_n(x)$ jsou spojité v intervalu $\langle r, s\rangle$ a uvnitř $\langle r, s\rangle$ je

$$F'_{n+1}(x) = F_n(x), \quad G'_{n+1}(x) = G_n(x).$$

Pro $n \geqq 2$ je $F_n(r) = 0 = G_n(r)$. Podle věty 43 je pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ $F_n(x) > 0$, $G_n(x) > 0$, tedy

$$c\,\frac{(x-r)^{n-1}}{(n-1)!} > |f_n(x)|.$$

Cvičení 78. Budiž (16·1) posloupnost spojitých funkcí v intervalu $\langle r, s\rangle$. Pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nechť platí (16·2). Pro $n \geqq 2$ budiž $f_n(s) = 0$. Budiž c určité číslo; pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$ budiž $|f_1(x)| < c$. Pak pro $n \geqq 2$ je pro všecka x uvnitř $\langle r, s\rangle$

$$|f_n(x)| < c\,\frac{(s-x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Cvičení 79. Pro každé reálné x je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$. $\left[\text{Pro dosti veliká } n \text{ je } \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leqq \frac{1}{2}\left|\frac{x^n}{n!}\right|.\right]$

Věta 45. Pro všecka záporná x a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ je

$$\left|e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)\right| < \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|.$$

Mimo to má diference $e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$ stejné znamení jako $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, je tedy kladná při lichém n a záporná při sudém n.

Důkaz. Zvolme $r > 0$ tak, že číslo $x < 0$, pro které chceme provésti důkaz, je uvnitř intervalu $\langle -r, 0\rangle$. Pro x v intervalu $\langle -r, 0\rangle$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ budiž

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) - e^x,$$

zejména $f_1(x) = 1 - e^x$. Pak jsou $f_n(x)$ spojité funkce v intervalu $\langle -r, 0\rangle$ a pro všecka n je $f_n(0) = 0$. Podle věty 41a je pro všecka x: $f'_{n+1}(x) = f_n(x)$. Konečně je $f_1(x) > 0$ uvnitř intervalu $\langle -r, 0\rangle$. Tedy podle cvič. 77 je uvnitř $\langle -r, 0\rangle$ stále

$$f_n(x) > 0 \text{ při lichém } n, \quad f_n(x) < 0 \text{ při sudém } n.$$

Z toho plyne tvrzení věty snadno. Je-li n liché, pak pro $-r < x < 0$ jest $f_n(x) > 0$, $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^n}{n!} < 0$, tedy $0 < f_n(x) < \left|\frac{x^n}{n!}\right|$.

Podobně při sudém n je: $f_n(x) < 0$, $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \dfrac{x^n}{n!} > 0$, tedy $0 > f_n(x) > \dfrac{x^n}{n!}$.

Věta 46. Pro všecka kladná x a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ je

$$0 < e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) \leqq (e^x - 1)\frac{x^n}{n!}.$$

Důkaz. Zřejmě stačí dokázati, že pro každé $r > x$ je

$$0 < e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) < (e^r - 1)\frac{x^n}{n!}. \tag{16·3}$$

Jest $r > 0$; dokážeme, že (16·3) platí pro všecka x uvnitř intervalu $\langle 0, r\rangle$. Za tím účelem položme

$$f_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right),$$

zejména $f_1(x) = e^x - 1$. Pak jsou $f_n(x)$ spojité funkce v intervalu $\langle 0, r\rangle$, jest $f_n(0) = 0$, $f'_{n+1}(x) = f_n(x)$. Pro x uvnitř r je $0 < f_1(x) < e^r - 1$. Tedy uvnitř $\langle 0, r\rangle$ je $f_n(x) > 0$ podle věty 43 a $f_n(x) < (e^r - 1)\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ podle věty 44. Píšeme-li $n + 1$ místo n, dostaneme (16·3).

Věta 47. Pro všecka reálná x je

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ do nekonečna.}$$

Důkaz. To je zřejmé pro $x = 0$ a plyne pro $x < 0$ ze cvič. 79 a věty 45, pro $x > 0$ ze cvič. 79 a věty 46.

Cvičení 80. Vypočtěte

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots,$$
$$e^{-1} = 0{,}367\,879\,441\,117\ldots$$

III. Goniometrické funkce.

17. Komplexní čísla. Na střední škole se zavádějí komplexní čísla při nauce o kvadratických rovnicích. Má-li kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ záporný diskriminant $D = b^2 - 4ac$, pak nemá tato rovnice v oboru reálných čísel žádný kořen. Ale v širším oboru komplexních čísel má ta rovnice dva kořeny, totiž

$$x_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|D|}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Každé komplexní číslo z má tvar $z = x + y\mathrm{i}$, kde x, y jsou dvě reálná čísla. Řekneme, že x je reálná část komplexního čísla z a že y je imaginární část komplexního čísla z, což budeme psáti

$$x = \Re(z), \quad y = \Im(z).$$

Na př.

$$\Re(2 - 3\mathrm{i}) = 2, \quad \Im(2 - 3\mathrm{i}) = -3;$$
$$\Re(5) = 5, \quad \Im(5) = 0;$$
$$\Re(5\mathrm{i}) = 0, \quad \Im(5\mathrm{i}) = 5;$$
$$\Re(0) = 0, \quad \Im(0) = 0.$$

Čísla reálná jsou zvláštním případem čísel komplexních; jsou to ta komplexní čísla, jejichž imaginární část je rovna nule. Ta komplexní čísla, jejichž reálná část je rovna nule, jmenují se ryze imaginární čísla. Každé komplexní číslo je součet dvou sčítanců, z nichž jeden je reálný a druhý ryze imaginární.

Komplexní čísla sčítáme, odčítáme a násobíme jako čísla reálná, jen musíme věděti, že $\mathrm{i}^2 = -1$:

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i},$$
$$(a + b\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\,\mathrm{i},$$
$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = ac + b\mathrm{i} \,.\, c + a \,.\, d\mathrm{i} + b\mathrm{i} \,.\, d\mathrm{i} = (ac - bd) + (bc + ad)\,\mathrm{i}.$$

Cvičení 81. Vypočtěte

a) $(2 + 3i)(3 - 2i) - (4 + i)(1 - 4i)$;
b) $(2 + 3i)^2 + (3 + i)^2 + (1 + 2i)^2$;
c) $(i + 1)(i + 2)(i + 3)$;
d) $(3 + i)^2(4 - i) - (3 + i)(4 - i)^2$.

Cvičení 82. $(x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$.

Dělení komplexních čísel převádíme na násobení pomocí cvič. 82. Dělení nulou je i v oboru komplexních čísel stejně nemožné jako v oboru čísel reálných. Je-li však $c + di \neq 0$, pak

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)\ (c - di)}{(c + di)\ (c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} =$$
$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i.$$

Cvičení 83. Vypočtěte

$$\text{a)}\ \frac{2 + i}{1 + 2i};\quad \text{b)}\ \frac{3 + i}{1 - i};\quad \text{c)}\ \frac{i - 2}{i - 3};\quad \text{d)}\ \frac{2i - 1}{1 + 3i}.$$

Ke komplexnímu číslu $z = x + yi$ konjugované komplexní číslo je $z^* = x - yi$. Hvězdička má v dalším všude tento význam.

Cvičení 84. Buďtež u, v komplexní čísla. Pak je

$$(u + v)^* = u^* + v^*,\ (u - v)^* = u^* - v^*,\ (uv)^* = u^*v^*$$

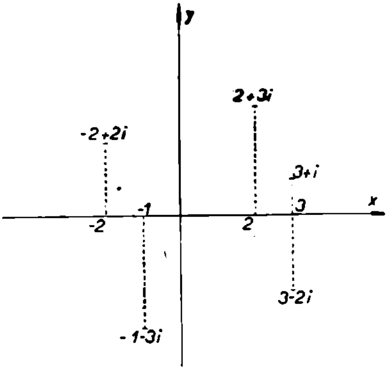
a když $v \neq 0$, je také

$$\left(\frac{u}{v}\right)^* = \frac{u^*}{v^*}.$$

Jako si reálná čísla znázorňujeme body na přímce, tak si komplexní čísla znázorňujeme body v rovině. Za tím účelem si zvolíme v rovině pravoúhlou soustavu souřadnic v obvyklé poloze: osu x vodorovně s kladným smyslem od levé strany k pravé, osu y svisle s kladným smyslem zdola nahoru. Obrazem komplexního čísla $x + yi$ je bod, jehož pravoúhlé souřadnice jsou x, y. Obrazy reálných čísel padnou na osu x, které proto říkáme reálná osa; obrazy ryze imaginárních čísel padnou na osu y, které proto říkáme imaginární osa. Nad reálnou osu padnou obrazy těch komplexních čísel, jejichž imaginární část je kladná, pod reálnou osu obrazy těch, jejichž imaginární část je záporná. Napravo od imaginární osy padnou obrazy těch komplexních čísel, jejichž reálná část je kladná, nalevo padnou obrazy těch, jejichž reálná část je záporná.

V obr. 7 jsou znázorněna komplexní čísla $2 + 3i$, $-2 + 2i$, $-1 - 3i$, $3 - 2i$, 2, 3, -2, -1, 0.

Protože vlastním předmětem našich úvah nejsou body, nýbrž čísla, a protože body v rovině jsou pro nás pouze obrazy komplexních čísel, není třeba příliš ostře rozlišovati mezi komplexním číslem a bodem, který je jeho obrazem. Proto mluvíme krátce na př. o bodu $2+3i$ místo o bodu, který je obrazem komplexního čísla $2 + 3i$.



Obr. 7.

Cvičení 85. Budiž $u \neq 0$ komplexní číslo. Probíhá-li t všecka reálná čísla, probíhá bod tu přímku, která spojuje bod 0 s bodem u. Probíhá-li t pouze kladná reálná čísla a nulu, probíhá bod tu polopřímku, která vychází z bodu 0 a jde bodem u.

Cvičení 86. Buďtež u, v dvě komplexní čísla; budiž $u \neq v$, $u \neq 0 \neq v$. Neleží-li všecky tři body 0, u, v na přímce, pak jsou 0, u, $u + v$, v vrcholy rovnoběžníka.

Ze střední školy víte, že střed úsečky, která spojuje bod $z_1 = x_1 + y_1 i$ s bodem $z_2 = x_2 + y_2 i$, má souřadnice

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Tedy je tento střed dán komplexním číslem

$$\frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{17·1}$$

Cvičení 87. Dokažte pomocí komplexních čísel, že úhlopříčky rovnoběžníka se navzájem půlí (viz cvič. 86).

U komplexních čísel nedefinujeme pojmy „větší“ a „menší“. Přes to také v nauce o komplexních číslech hrají důležitou roli nerovnosti. Nerovnosti přicházejí do této nauky s pomocí pojmu absolutní hodnoty. **Absolutní hodnotou** komplexního čísla $x + yi$ rozumíme číslo $\sqrt{x^2 + y^2}$; značíme je obyčejně $|x + yi|$. Geometricky znamená

$|x + yi|$ vzdálenost bodu $x + yi$ od počátku, t. j. od bodu $z = 0$. Obecněji znáte ze střední školy vzorec pro vzdálenost d bodu $z_1 = x_1 + y_1 i$ od bodu $z_2 = x_2 + y_2$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

tento vzorec lze psáti ve tvaru

$$d = |z_2 - z_1|. \tag{17·2}$$

Všimněme si, že pro reálné z má symbol $|z|$ obvyklý význam.

O absolutních hodnotách komplexních čísel platí jednoduchá, ale důležitá pravidla.

Cvičení 88. Pro každé komplexní číslo z je $|-z| = |z|$, $|z^*| = |z|$.

Cvičení 89. Je-li komplexní číslo $z \neq 0$, je $|z| > 0$; avšak $|0| = 0$.

Cvičení 90. Pro každé komplexní číslo z je $zz^* = |z|^2$, $|z| = \sqrt{zz^*}$.

Věta 48. Jsou-li u, v komplexní čísla, je $|uv| = |u| . |v|$.

Důkaz. Podle cvič. 84 a 90 je

$$|uv| = \sqrt{uv . (uv)^*} = \sqrt{uu^* . vv^*} = \sqrt{uu^*} . \sqrt{vv^*} = |u| |v|.$$

Věta 49. Jsou-li u, v komplexní čísla, je $|u + v| \leqq |u| + |v|$.

Důkaz. I. Dokažme napřed $|1 + z| \leqq 1 + |z|$.

Budiž $z = x + iy$. Jest $x \leqq |x| \leqq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, tedy $2x \leqq 2|z|$. Přičteme-li v této nerovnosti na obou stranách číslo $1 + x^2 + y^2$, dostaneme $1 + 2x + x^2 + y^2 \leqq 1 + 2|z| + |z|^2$ neboli $|1 + z|^2 = (1 + x)^2 + y^2 \leqq (1 + |z|)^2$, takže $|1 + z| \leqq 1 + |z|$.

II. Nerovnost, kterou máme dokázati, je zřejmá pro $u = 0$. Je-li však $u \neq 0$, položme $z = \frac{v}{u}$, takže $u + v = u(1 + z)$. Podle I a podle věty 48 je

$$|u + v| = |u| . |1 + z| \leqq |u| . (1 + |z|) =$$
$$= |u| + |u| . |z| = |u| + |uz| = |u| + |v|.$$

Cvičení 91. V nerovnosti $|u + v| \leqq |u| + |v|$ platí znamení rovnosti v těchto třech případech a v žádném jiném: [1] když $u = 0$, [2] když $v = 0$, [3] když $u \neq 0 \neq v$ a když $\frac{v}{u}$ je kladné reálné číslo.

Cvičení 92. Dokažte pomocí komplexních čísel, že každá strana trojúhelníka je menší nežli součet ostatních dvou stran.

18. Jednotková kružnice. Komplexní čísla z s absolutní hodnotou rovnou jedné vyplní kružnici se středem v počátku a s poloměrem jedna; říká se jí j e d n o t k o v á k r u ž n i c e. Jednotkovou kružnici si uspořádáme takto: Prvním bodem je bod 1, posledního bodu není. Bod z_1 jednotkové kružnice je před bodem z_2 jednotkové kružnice, když přijdeme dříve do polohy z_1 nežli do polohy z_2, probíháme-li jednotkovou kružnici p r o t i směru pohybu ručiček hodin počínajíce polohou 1.

C v i č e n í **93.** Budiž $|u| = 1$, $|v| = 1$. Bod u leží na jednotkové kružnici před bodem v tenkrát (a pouze tenkrát), nastane-li jeden z těchto tří případů: [1] $\mathfrak{I}(u) \geqq 0$, $\mathfrak{I}(v) < 0$; [2] $\mathfrak{I}(u) \geqq 0$, $\mathfrak{I}(v) \geqq 0$, $\mathfrak{R}(u) > \mathfrak{R}(v)$; [3] $\mathfrak{I}(u) < 0$, $\mathfrak{I}(v) < 0$, $\mathfrak{R}(u) < \mathfrak{R}(v)$.

V ě t a 50. Budiž $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, $\mathfrak{R}(z_1) > 0$, $\mathfrak{I}(z_1) > 0$, $\mathfrak{I}(z_2) \geqq 0$. Pak leží na jednotkové kružnici bod z_2 před bodem $z_1 z_2$.

D ů k a z. I. Podle věty 48 leží $z_1 z_2$ na jednotkové kružnici. Budiž $z_1 = x_1 + y_1 \mathrm{i}$, $z_2 = x_2 + y_2 \mathrm{i}$, tedy $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, $y_2 \geqq 0$. Jest $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\,\mathrm{i}$. Protože $\mathfrak{I}(z_2) \geqq 0$, potřebujeme podle cvič. 93 pouze dokázati, že je buďto $x_1 y_2 + x_2 y_1 < 0$ nebo $x_1 x_2 - y_1 y_2 < x_2$. Rozeznávejme tři případy.

II. Budiž $x_2 > 0$. Ježto $x_1^2 = 1 - x_2^2 < 1$, jest $x_1 < 1$; tuto nerovnost smíme násobiti kladným číslem x_2 a dostaneme $x_1 x_2 < x_2$. Ježto $y_1 > 0$, $y_2 \geqq 0$, tedy $x_1 x_2 - y_1 y_2 \leqq x_1 x_2 < x_2$.

III. Budiž $x_2 = 0$. Pak je $y_2^2 = |z_2|^2 = 1$, $y_2 \geqq 0$, tedy $y_2 = 1$. Proto je $x_1 x_2 - y_1 y_2 = -y_1 < 0 = x_2$.

IV. Budiž $x_2 < 0$. V případě $x_1 y_2 + x_2 y_1 < 0$ nemáme co dokazovati. Budiž tedy $x_1 y_2 + x_2 y_1 \geqq 0$. Jest $x_1 \leqq 1$, $y_2 \geqq 0$, tedy $x_1 y_2 \leqq y_2$. Protože $x_2 < 0$, $y_1 > 0$, je $x_2 y_1 < 0$, tedy $x_1 y_2 + x_2 y_1 < x_1 y_2 \leqq y_2$; protože $x_1 y_2 + x_2 y_1 \geqq 0$, je $(x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 < y_2^2$. Tedy $1 = |z_1 z_2|^2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 < (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + y_2^2$, takže $(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 > 1 - y_2^2 = x_2^2$, tedy $|x_1 x_2 - y_1 y_2| > |x_2|$. Avšak $x_2 < 0$, tedy $|x_2| = -x_2$. Ježto $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $y_1 > 0$, $y_2 \geqq 0$, je $|x_1 x_2 - y_1 y_2| = y_1 y_2 - x_1 x_2$. Tedy $y_1 y_2 - x_1 x_2 > -x_2$, takže $x_1 x_2 - y_1 y_2 < x_2$.

Jsou-li u, v dva různé body na jednotkové kružnici, jest jimi jednotková kružnice rozdělena na dva oblouky s krajními body u, v.

Označíme $\{u, v\}$ ten z nich, který dostaneme, pohybujeme-li se po jednotkové kružnici proti ručičkám hodinovým od polohy u do polohy v; druhý oblouk bude pak ovšem $\{v, u\}$. Když bod u leží před bodem v, pak oblouk $\{u, v\}$ obsahuje mimo své krajní body u, v ještě právě ty body jednotkové kružnice, které leží mezi u a v, t. j. současně za bodem u a před bodem v. Je-li $v = 1$, tedy $u \neq 1$, pak oblouk $\{u, 1\}$ obsahuje mimo své krajní body u, 1 ještě právě ty body jednotkové kružnice, které leží za bodem u.

Budiž dán na jednotkové kružnici konečný počet bodů

$$z_1 = 1, z_2, z_3, \ldots, z_m, \tag{18·1}$$

z nichž prvý je bod 1 a které jsou napsány v takovém pořádku, v jakém je dostaneme, probíháme-li jednotkovou kružnici počínajíc polohou 1 proti ručičkám hodinovým. Pak se nám jednotková kružnice rozdělí na oblouky

$$\{z_1, z_2\}, \{z_2, z_3\}, \ldots, \{z_{m-1}, z_m\}, \{z_m, z_1\}, \tag{18·2}$$

které se navzájem nepřekrývají, ale které pokryjí celou jednotkovou kružnici. Takové rozdělení jednotkové kružnice na oblouky (18·2) nazveme kruhovou stupnicí a body (18·1) nazveme dělicími body té stupnice.

19. Kruhový svazek. V tomto odstavci si zavedeme zcela určitou posloupnost kruhových stupnic, kterou nazveme kruhovým svazkem. Prvá stupnice kruhového svazku má dva dělicí body 1, — 1 a skládá se tedy ze dvou oblouků $\{1, -1\}$ a $\{-1, 1\}$.

Cvičení **94.** $\{1, -1\}$ se skládá z těch bodů z jednotkové kružnice, pro něž $\mathfrak{I}(z) \geqq 0$; $\{-1, 1\}$ se skládá z těch z, pro něž $\mathfrak{I}(z) \leqq 0$.

Abychom si definici ostatních stupnic kruhového svazku připravili, budeme si definovati rekurentně zcela určitou posloupnost

$$u_1, u_2, u_3, \ldots \tag{19·1}$$

bodů jednotkové kružnice a položíme pro všecka n

$$u_n = p_n + iq_n. \tag{19·2}$$

Nejprve budiž

$$u_1 = -1, \text{ tedy } p_1 = -1,\ q_1 = 0. \tag{19·3}$$

Je-li při určitém n bod (19·2) již definován, definujme u_{n+1} rovnicemi

$$p_{n+1} = \sqrt{\frac{1+p_n}{2}},\ q_{n+1} = \sqrt{\frac{1-p_n}{2}}. \tag{19·4}$$

(Ježto $|u_n|^2 = p_n^2 + q_n^2 = 1$, je $|p_n| \leqq 1$, takže žádný odmocněnec v (19·4) není číslo záporné.) Jest

$$p_{n+1}^2 + q_{n+1}^2 = \frac{1+p_n}{2} + \frac{1-p_n}{2} = 1,$$

takže (19·1) je vskutku posloupnost bodů na jednotkové kružnici.

Podle (19·3) a (19·4) je

$$u_2 = \mathrm{i},\ p_2 = 0,\ q_2 = 1. \tag{19·5}$$

Cvičení 95. Pro $n \geqq 3$ je $0 < p_n < 1$, $0 < q_n < 1$.

Věta 51. Pro $n \geqq 1$ je $u_{n+1}^2 = u_n$.

Důkaz. Pro $n = 1$ to plyne z (19·3) a (19·5). Budiž tedy $n \geqq 2$. Podle (19·5) a podle cvič. 95 je $q_n \geqq 0$. Protože $p_n^2 + q_n^2 = 1$, $q_n \geqq 0$, je $q_n = \sqrt{1-p_n^2}$. Avšak z (19·4) plyne

$$u_{n+1}^2 = (p_{n+1} + q_{n+1}\mathrm{i})^2 = p_n + \mathrm{i}\sqrt{1-p_n^2},$$

takže $u_{n+1}^2 = p_n + q_n\mathrm{i} = u_n$.

Cvičení 96. Pro $n \geqq 1$ je $u_n^{2^{n-1}} = -1$, $u_n^{2^n} = 1$.

Věta 52. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, k celé, $0 \leqq k \leqq 2^{n-1}$ je $\Im(u_n^k) \geqq 0$.

Důkaz. Pro $n = 1$ a pro $n = 2$ to plyne z (19·3) a (19·5). Můžeme tedy předpokládati, že při určitém $n \geqq 2$ je věta správná a máme dokázati, že zůstane správná i pro $n + 1$. Máme tedy dokázati, že pro $0 \leqq k \leqq 2^n$ je $\Im(u_{n+1}^k) \geqq 0$. Je-li $k = 2h$ sudé, je $u_{n+1}^k = u_{n+1}^{2h} = u_n^h$ podle věty 51 a $0 \leqq h \leqq 2^{n-1}$, tedy $\Im(u_{n+1}^k) \geqq 0$. Je-li však k liché, jsou $k-1$ a $k+1$ čísla sudá, jež jsou obě nezáporná (t. j. $\geqq 0$) a nejvýše rovna 2^n, takže $\Im(u_{n+1}^{k-1}) \geqq 0$, $\Im(u_{n+1}^{k+1}) \geqq 0$. Avšak $|u_{n+1}| = 1$, tedy $u_{n+1} \,.\, u_{n+1}^* = 1$, takže

$$u_{n+1}^{k-1} + u_{n+1}^{k+1} = u_{n+1}^k(u_{n+1}^* + u_{n+1}) = 2p_{n+1}u_{n+1}^k.$$

Tedy $2p_{n+1} \,.\, \Im(u_{n+1}^k) = \Im(u_{n+1}^{k-1}) + \Im(u_{n+1}^{k+1}) \geqq 0$. Avšak $p_{n+1} > 0$ podle cvič. 95 (neboť $n \geqq 2$), takže $\Im(u_{n+1}^k) \geqq 0$.

Věta 53. Body

$$1, u_n, u_n^2, \ldots, u_n^{2^n-1} \tag{19·6}$$

jdou za sebou v tomto pořádku na jednotkové kružnici, probíháme-li ji proti ručičkám hodinovým.

Důkaz. I. Budiž $0 \leqq k \leqq 2^{n-1}$. Dokážeme, že bod u_n^k leží před bodem u_n^{k+1}. Pro $n = 1$ to plyne z (19·3), pro $n = 2$ z (19·5). Budiž tedy $n \geqq 3$. Podle cvič. 95 je $\Re(u_n) > 0$, $\Im(u_n) > 0$; podle věty 52 je $\Im(u_n^k) \geqq 0$. Tedy bod u_n^k leží před bodem $u_n^{k+1} = u_n \,.\, u_n^k$ podle věty 50.

II. Pro $0 < k < 2^{n-1}$ jest $\Im(u_n^k) > 0$. Neboť podle I leží bod u_n^k za bodem 1 a před bodem $u_n^{2^{n-1}}$, t. j. před bodem -1, protože $u_n^{2^{n-1}} = -1$ podle cvič. 96.

III. Pro $2^{n-1} < k < 2^n$ jest $u_n^k = -u_n^{k-2^{n-1}}$ podle cvič. 96, takže $\Im(u_n^k) < 0$ podle II.

IV. Budiž $0 \leqq h < k < 2^n$. Máme dokázati, že bod u_n^h je před bodem u_n^k. Rozeznávejme tři případy. Je-li předně $k \leqq 2^{n-1}$, leží u_n^h před u_n^k podle I; mimo to je v tomto případě $\Im(u_n^h) \geqq 0$, $\Im(u_n^k) \geqq 0$ podle věty 52, takže $\Re(u_n^h) > \Re(u_n^k)$ podle cvič. 93. Je-li za druhé $h > 2^{n-1}$, pak podle toho, co právě bylo řečeno, je $\Re(u_n^{h-2^{n-1}}) > \Re(u_n^{k-2^{n-1}})$; podle cvič. 96 je však $u_n^h = -u_n^{h-2^{n-1}}$, $u_n^k = -u_n^{k-2^{n-1}}$, takže $\Re(u_n^h) < \Re(u_n^k)$; mimo to je $\Im(u_n^h) < 0$, $\Im(u_n^k) < 0$, takže u_n^h leží před u_n^k podle cvič. 93. Je-li konečně $h \leqq 2^{n-1} < k < 2^n$, je $\Im(u_n^h) \geqq 0$ podle věty 52, $\Im(u_n^k) < 0$ podle III, takže u_n^h leží před u_n^k podle cvič. 93.

Nyní můžeme konečně definovati n-tou stupnici kruhového svazku. Skládá se z oblouků

$$\{1, u_n\}, \{u_n, u_n^2\}, \ldots, \{u_n^{2^n-1}, 1\}$$

a (19·6) jsou její dělicí body. Tyto body jsou, v tom pořádku jak jsou psány za sebou, vrcholy jakéhosi 2^n-úhelníka M_n vepsaného do jednotkové kružnice.

Věta 54. M_n je pravidelný 2^n-úhelník s délkou strany $2q_{n+1}$.

Důkaz. Délka k-té strany mnohoúhelníka M_n je $|u_n^{k-1} - u_n^k|$. (Podle cvič. 96 je $u_n^{2^n} = 1$, takže je to pravda i pro $k = 2^n$.) Podle věty 48 je

$$|u_n^{k-1} - u_n^k| = |u_n^{k-1}(1 - u_n)| = |u_n|^{k-1} \,.\, |1 - u_n| = |1 - u_n|,$$

neboť $|u_n| = 1$. Tedy jsou všecky strany stejně dlouhé a tudíž M_n je pravidelný, neboť je vepsán do kružnice. Podle věty 51 je $u_n = u_{n+1}^2$; mimoto $u_{n+1} u_{n+1}^* = 1$ podle cvič. 90. Tedy podle věty 48

$$| 1 - u_n | = | u_{n+1} u_{n+1}^* - u_{n+1}^2 | = | u_{n+1} | . | u_{n+1}^* - u_{n+1} | =$$
$$= | u_{n+1}^* - u_{n+1} | = | 2q_{n+1} | = 2q_{n+1},$$

neboť $q_{n+1} \geqq 0$ podle (19·5) a podle cvič. 95.

Dělicí body (19·6) n-té stupnice kruhového svazku lze podle věty 51 psáti ve tvaru

$$1, u_{n+1}^2, u^{n+14}, \ldots, u_{n+1}^{2^{n+1}-2}.$$

Tedy $(n + 1)$-ní stupnice kruhového svazku vznikne z n-té stupnice rozpůlením všech jejích oblouků.

Věta 55. Jest

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1, \lim_{n\to\infty} q_n = 0.$$

Důkaz. Podle (19·4) je

$$1 - p_{n+1} = 1 - \sqrt{\frac{1+p_n}{2}} = \frac{1 - \frac{1+p_n}{2}}{1 + \sqrt{\frac{1+p_n}{2}}} = \frac{1-p_n}{2} \cdot \frac{1}{1+p_{n+1}}.$$

Podle (19·5) a podle cvič. 95 je $p_{n+1} \geqq 0$, tedy $1 + p_{n+1} \geqq 1$, takže $1 - p^{n+1} \leqq \frac{1-p_n}{2}$. Z toho následuje indukcí

$$1 - p_n \leqq \frac{1-p_1}{2^{n-1}} = \frac{4}{2^n};$$

mimo to $p_n \leqq 1$ (neboť $p_n^2 + q_n^2 = 1$), tedy $0 \leqq 1 - p_n \leqq \frac{4}{2^n}$, takže $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$. Protože $p_n^2 + q_n^2 = 1$, musí býti také $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$.

Je-li $n \geqq 2$, pak každý oblouk $\{u_n^k, u_n^{k+1}\}$, $(0 \leqq k \leqq 2^n - 1)$ n-té stupnice kruhového svazku je částí jednoho ze čtyř oblouků

$$\{1, \mathrm{i}\}, \{\mathrm{i}, -1\}, \{-1, -\mathrm{i}\}, \{-\mathrm{i}, 1\}$$

druhé stupnice svazku. Z toho následuje, že když bod $z = x + y\mathrm{i}$ probíhá oblouk $\{u_n^k, u_n^{k+1}\}$ od polohy u_n^k do polohy u_n^{k+1}, x buďto stále roste nebo stále klesá, a také y buďto stále roste nebo stále klesá. Proto jak x tak y při tom probíhá určitý interval. Označme $\{u_n^k, u_n^{k+1}\}_1$

interval, který probíhá x, a $\{u_n^k, u_n^{k+1}\}_2$ interval, který probíhá y. Je-li

$$\{u_n^k, u_n^{k+1}\}_1 = \langle a, b\rangle, \{u_n^k, u_n^{k+1}\}_2 = \langle c, d\rangle,$$

pak z čísel a, b jedno se rovná $\Re(u_n^k)$ a druhé $\Re(u_n^{k+1})$; z čísel c, d, jedno se rovná $\Im(u_n^k)$ a druhé $\Im(u_n^{k+1})$. Zřejmě

$$b - a \leqq | u_n^k - u_n^{k+1} |, \; d - c \leqq | u_n^k - u_n^{k+1} |,$$

takže délky obou intervalů jsou $\leqq 2q_{n+1}$ podle věty 54.

Pro $n = 1$ máme dva oblouky $\{1, -1\}, \{-1, 1\}$. Když $z = x + yi$ probíhá oblouk $\{1, -1\}$ od polohy 1 do polohy -1, tu x stále klesá od hodnoty 1 do hodnoty -1, a y nejprve roste od hodnoty 0 do hodnoty 1 a potom klesá od hodnoty 1 do hodnoty 0, takže x probíhá interval $\{1, -1\}_1 = \langle -1, 1\rangle$ a y probíhá interval $\{1, -1\}_2 = \langle 0, 1\rangle$. Podobně když $z = x + yi$ probíhá oblouk $\{-1, 1\}$, probíhá x interval $\{-1, 1\}_1 = \langle -1, 1\rangle$ a y probíhá interval $\{-1, 1\}_2 = \langle -1, 0\rangle$.

Cvičení **97.** Budiž $\{v, w\}$ jeden oblouk některé stupnice kruhového svazku. Je-li $z = x + yi$ bod na jednotkové kružnici a náleží-li číslo x do intervalu $\{v, w\}_1$ a y do intervalu $\{v, w\}_2$, pak z náleží do oblouku $\{v, w\}$.

Dělicí bod kruhového svazku je takový bod na jednotkové kružnici, který je dělicím bodem některé stupnice svazku. Zřejmě každý dělicí bod kruhového svazku je dělicím bodem skoro všech stupnic svazku.

Je-li M nějaká soustava bodů na jednotkové kružnici, pak řekneme, že M leží hustě na jednotkové kružnici, když ke každému bodu z jednotkové kružnice a ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze udati bod v patřící do soustavy M a vzdálený od bodu v o méně než ε.

Cvičení **98.** Dělicí body kruhového svazku leží hustě na jednotkové kružnici.

Je-li

$$z_1 = x_1 + y_1 i, \; z_2 = x_2 + y_2 i, \; z_3 = x_3 + y_3 i, \ldots \tag{19·7}$$

posloupnost komplexních čísel a je-li také $z = x + yi$ komplexní číslo, pak vztah

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z \tag{19·8}$$

znamená, že platí zároveň $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, $\lim_{n \to \infty} y_n = y$.

Cvičení 99. Platí-li vztah (19·8), ve kterém z_n a z jsou komplexní čísla, pak lze každému kladnému ε přiřaditi index p tak, že pro všecka $n > p$ je $|z_n - z| < \varepsilon$. Obráceně, je-li splněna tato podmínka, platí vztah (19·8).

Cvičení 100. Věty 3, 4 a 5 platí také pro posloupnosti s komplexními členy.

Cvičení 101. Leží-li soustava bodů M hustě na jednotkové kružnici, pak lze každému bodu z na jednotkové kružnici přiřaditi posloupnost (19·7), jejíž členy jsou vzaty vesměs ze soustavy M, a pro kterou platí (19·8). Obráceně, je-li splněna tato podmínka, leží M hustě na jednotkové kružnici.

Ačkoli dělicí body kruhového svazku leží hustě na jednotkové kružnici, přece existují na této kružnici také body, které nejsou dělicími body svazku. Takový bod je na př.

$$z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Kdyby při nějakém n bylo $z = u_n^k$, pak by podle cvič. 96 bylo $z^{2^n} = 1$, tedy také $z^{4^n} = (z^{2^n})^{2^n} = 1$. Avšak snadno se vypočte, že $z^3 = 1$, takže $z^4 = z$ a z toho následuje indukcí, že $z^{4^n} = z \neq 1$.

Zvolme bod $z = x + yi$ na jednotkové kružnici tak, že z není dělicím bodem kruhového svazku. Pro každé n máme v n-té stupnici svazku určitý oblouk $\{v_n, w_n\}$, ve kterém leží bod z. Zřejmě

$$\{v_1, w_1\}_1, \{v_2, w_2\}_1, \{v_3, w_3\}_1, \ldots, \tag{19·9}$$

$$\{v_1, w_1\}_2, \{v_2, w_2\}_2, \{v_3, w_3\}_2, \ldots \tag{19·10}$$

jsou řetězy intervalů. Bod x leží ve všech intervalech (19·9); bod y leží ve všech intervalech (19·10); pro $n \geqq 2$ je délka n-tého intervalu obou řetězů nejvýše rovna $2q_{n+1}$; tedy ze cvič. 25 následuje podle věty 55, že (19·9) je vytvořující řetěz bodu x a (19·10) je vytvořující řetěz bodu y. Bod z náleží do všech oblouků

$$\{v_1, w_1\}, \{v_2, w_2\}, \{v_3, w_3\}, \ldots; \tag{19·11}$$

obráceně, když bod $\zeta = \xi + \eta i$ náleží do všech oblouků (19·1), náleží ξ do všech intervalů (19·9) a η do všech intervalů (19·10), takže je $\xi = x$, $\eta = y$, tedy $\zeta = z$. Tudíž z je jediný bod společný všem obloukům (19·11); řekneme, že (19·11) je kruhový řetěz bodu z.

Cvičení 102. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ zvolme v n-té stupnici kruhového svazku oblouk $\{v_n, w_n\}$, takže dostaneme posloupnost (19·11). Když (19·11) je kruhový řetěz nějakého bodu z na jednotkové kružnici, který není dělicím bodem kruhového svazku, pak: [1] pro každé n je buďto $v_{n+1} = v_n$ nebo

$w_{n+1} = w_n$; [2] je nekonečně mnoho takových n, pro něž $v_{n+1} = v_n$ i nekonečně mnoho takových n, pro něž $w_{n+1} = w_n$. Obráceně, jsou-li splněny podmínky [1] a [2], je (19·11) kruhový řetěz určitého bodu z na jednotkové kružnici, který není dělicím bodem kruhového svazku.

Cvičení **103.** Budiž z bod na jednotkové kružnici, který není dělicím bodem kruhového svazku. Budiž (19·11) kruhový řetěz bodu z. Pak je

$$\{w_1^*, v_1^*\}, \{w_2^*, v_2^*\}, \{w_3^*, v_3^*\}, \ldots$$

kruhový řetěz bodu z^*.

20. Funkce sin x a cos x.

Na střední škole se učí, jak lze každému úhlu α přiřaditi dvě čísla, která se značí $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$. My si budeme definovati numerický význam symbolů $\sin x$ a $\cos x$, kde x probíhá všecka reálná čísla. Za tím účelem přiřadíme každému reálnému číslu x určitý úhel α a položíme

$$\sin x = \sin \alpha,$$
$$\cos x = \cos \alpha,$$

kde symboly napravo mají týž význam jako na střední škole. Úhel α volíme v takové poloze, že jeho vrchol je v počátku a že prvním ramenem je kladná část reálné poloosy; druhé rameno úhlu α protne jednotkovou kružnici v bodě z. Podle toho, co víte ze střední školy, bude (i co do znamení!)

$$\sin x = \Im(z), \quad \cos x = \Re(z).$$

Běží tedy jen o to, jak každému reálnému číslu x přiřadit určitý úhel α neboli, což je v podstatě totéž, určitý bod z na jednotkové kružnici; budeme psáti

$$z = E(x).$$

Geometricky se dá toto přiřazení popsati velmi názorně a jednoduše. Nejprve je $E(0) = 1$. Je-li za druhé číslo x kladné, pohybujeme se po jednotkové kružnici proti ručičkám hodinovým od polohy 1 až do té polohy $z = E(x)$, ve které délka dráhy, kterou jsme urazili, je rovna číslu x. Je-li za třetí x záporné, pohybujeme se po jednotkové kružnici po ručičkách hodinových od polohy 1 až do té polohy $z = E(x)$, ve které délka dráhy, kterou jsme urazili, je rovna číslu $|x|$.

Nyní budeme zkoumati, jak lze od této geometrické definice dospěti k ryze aritmetické definici symbolu $E(x)$. Délka celé jednotkové kružnice je, jak známo, rovna 2π. Budiž dáno určité $n = 1, 2, 3, \ldots$ Víme, že body

$$1, u_n, u_n^2, \ldots, u_n^{2^n-1},$$

kde $u_n = p_n + q_n i$ bylo definováno v odst. 19, rozdělí jednotkovou kružnici na 2^n sobě rovných (viz větu 54) oblouků

$$\{1, u_n\}, \{u_n, u_n^2\}, \ldots, \{u_n^{2^n-1}, 1\},$$

které následují za sebou v tomto pořádku, probíháme-li jednotkovou kružnici od bodu 1 proti ručičkám hodinovým. Délky všech těch oblouků dohromady dají 2π, takže délka každého z nich je $\pi : 2^{n-1}$. Proto podle geometrické definice symbolu $E(x)$ je

$$E\left(\frac{k\pi}{2^{n-1}}\right) = u_n^k \tag{20·1}$$

pro $0 \leqq k \leqq 2^n - 1$; protože však $u_n^{2^n} = 1$ (viz cvič. 96), následuje z geometrické definice symbolu $E(x)$ snadno, že (20·1) platí pro každé celé $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Mimo to plyne z geometrické definice symbolu $E(x)$, že když x probíhá interval $\langle \frac{k\pi}{2^{n-1}}, \frac{(k+1)\pi}{2^{n-1}} \rangle$, probíhá bod $z = E(x)$ na jednotkové kružnici oblouk $\{u_n^k, u_n^{k+1}\}$; i toto platí pro každé celé k.

Dosud jsme vycházeli od geometrické definice symbolu $E(x)$. Nyní začneme všecko znovu, ale tentokrát budeme postupovati ryze aritmeticky; co bylo řečeno dosud v tomto odstavci, o to se nebudeme opírati, ač je tím ovšem následující aritmetický postup motivován. Při tom nebudeme z geometrie předpokládat ani znalost čísla π. Místo toho si zatím zvolme docela libovolné kladné číslo, které sice už nyní označíme symbolem π, pro které však teprve v následujícím odstavci provedeme určitou aritmetickou volbu [viz (21·11)], o které se potom přesvědčíme, že geometricky znamená polovinu délky jednotkové kružnice.

Zavedeme si aritmetický svazek se základem π a budeme hodnotu symbolu $E(x)$ definovati aritmeticky nejprve pro ten případ, že x je dělicí bod našeho aritmetického svazku. Zvolme určité n; n-tá stupnice aritmetického svazku má základ $\pi : 2^{n-1}$, takže její dělicí body jsou

$$\frac{k\pi}{2^{n-1}}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{20·2}$$

Hodnotu symbolu $E(x)$ v těchto dělicích bodech definujeme aritmeticky pomocí (20·1), takže tyto hodnoty jsou body jednotkové kružnice; jsou to dělicí body n-té stupnice kruhového svazku. Je-li u_n^k $(0 \leqq k \leqq 2^{n-1})$ libovolný dělicí bod n-té stupnice kruhového svazku, pak je $E(x) = u_n^k$ pro nekonečně mnoho dělicích bodů x n-té stupnice aritmetického svazku, a to pro dělicí body

$$\frac{k\pi}{2^{n-1}}, \quad \frac{k\pi}{2^{n-1}} \pm 2\pi = \frac{(k \pm 2^n)\pi}{2^{n-1}}, \quad \frac{k\pi}{2^{n-1}} \pm 4\pi, \quad \frac{k\pi}{2^{n-1}} \pm 6\pi, \ldots,$$

neboť $u_n^{2^n} = 1$ podle cvič. 96.

Každý dělicí bod x aritmetického svazku je dělicím bodem skoro všech stupnic svazku a musíme se přesvědčit, že pomocí (20·1) je symbolu $E(x)$ dána táž hodnota, ať jakkoli zvolíme index n, pro který je x obsažen mezi body (20·2). Stačí se přesvědčit, že je tomu tak, přejdeme-li od indexu n k indexu $n + 1$. Je-li

$$x = \frac{k\pi}{2^{n-1}} = \frac{2k\pi}{2^n},$$

pak pomocí n-té stupnice dostáváme $E(x) = u_n^k$, pomocí $(n + 1)$-ní stupnice $E(x) = u_{n+1}^{2k}$, což je totéž podle věty 51.

Zbývá definovati symbol $E(x)$ pro takové x, které není dělicím bodem aritmetického svazku. Budiž

$$\langle r_1, s_1\rangle, \langle r_2, s_2\rangle, \langle r_3, s_3\rangle, \ldots \tag{20·3}$$

aritmetický řetěz bodu x. Pro každé n budiž

$$v_n = E(r_n), \; w_n = E(s_n); \tag{20·4}$$

z definice (20·1) plyne, že $\{v_n, w_n\}$ je určitý oblouk n-té stupnice kruhového svazku. Podle cvič. 33 je pro každé n buďto $r_{n+1} = r_n$ nebo $s_{n+1} = s_n$ a je nekonečně mnoho takových n, pro něž $r_{n+1} = r_n$, i nekonečně mnoho takových n, pro něž $s_{n+1} = s_n$. Z toho následuje, že pro každé n je buďto $v_{n+1} = v_n$ nebo $w_{n+1} = w_n$ a že je nekonečně mnoho takových n, pro něž $v_{n+1} = v_n$, i nekonečně mnoho takových n, pro něž $w_{n+1} = w_n$. Tedy podle cvič. 102 je

$$\{v_1, w_1\}, \{v_2, w_2\}, \{v_3, w_3\}, \ldots \tag{20·5}$$

kruhový řetěz určitého bodu z na jednotkové kružnici, který není dělicím bodem kruhového svazku. Hodnotou symbolu $E(x)$ rozumíme tento bod z.

Cvičení **104.** Pro každé reálné x je $|E(x)| = 1$.

Cvičení **105.** Pro každé reálné x je $E(x + 2\pi) = E(x)$.

Cvičení **106.** Jest

$$E(0) = 1, \; E(\pi) = -1, \; E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}, \; E\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}.$$

Věta 56. Pro každé reálné x je $E(-x) = [E(x)]^*$.

Důkaz. I. Budiž nejprve x dělicí bod aritmetického svazku. Při vhodných n a k je $x = \frac{k\pi}{2^{n-1}}$, tedy $E(x) = u_n^k$, $E(-x) = u_n^{-k}$. Avšak $|u_n^k| = 1$, tedy $u_n^k \cdot (u_n^k)^* = 1$, takže $u_n^{-k} = (u_n^k)^*$.

II. Není-li x dělicí bod aritmetického svazku, budiž (20·3) jeho aritmetický řetěz, takže pomocí (20·4) dostaneme kruhový řetěz (20·5) bodu $E(x)$. Zřejmě

$$\langle -s_1, -r_1 \rangle, \langle -s_2, -r_2 \rangle, \langle -s_3, -r_3 \rangle, \ldots$$

je aritmetický řetěz bodu $-x$, takže podle I je

$$\{w_1^*, v_1^*\}, \{w_2^*, v_2^*\}, \{w_3^*, v_3^*\}, \ldots$$

kruhový řetěz bodu $-x$. Tedy $E(-x) = [E(x)]^*$ podle cvič. 103.

Věta 57. Budiž $0 \leqq x_1 < x_2 < 2\pi$. Pak bod $E(x_1)$ leží na jednotkové kružnici před bodem $E(x_2)$; probíháme-li jednotkovou kružnici počínajíc bodem 1 proti ručičkám hodinovým.

Důkaz. Leží-li x v některém z intervalů

$$\langle 0, \frac{\pi}{2^{n-1}} \rangle, \langle \frac{\pi}{2^{n-1}}, \frac{2\pi}{2^{n-1}} \rangle, \ldots, \langle \frac{(2^n - 1)\pi}{2^{n-1}}, 2\pi \rangle, \tag{20·6}$$

leží bod $E(x)$ v příslušném z oblouků

$$\{1, u_n\}, \{u_n, u_n^2\}, \ldots, \{u_n^{2^n-1}, 1\}. \tag{20·7}$$

Při dosti velkém n je takový interval, ve kterém je bod x_1, jistě napsán ve (20·6) před takovým intervalem, ve kterém je bod x_2. Z toho plyne tvrzení věty, neboť oblouky (20·7) následují jeden za druhým v napsaném pořádku, probíháme-li jednotkovou kružnici počínajíc bodem 1 proti ručičkám hodinovým.

Věta 58. Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, je $\lim_{n\to\infty} E(a_n) = E(a)$.

Důkaz. I. Leží-li body x', x'' v témž intervalu $\langle r, s \rangle$ k-té stupnice aritmetického svazku, jest

$$|\mathfrak{R}[E(x')] - \mathfrak{R}[E(x'')]| \leqq 2q_{k+1},$$
$$|\mathfrak{I}[E(x')] - \mathfrak{I}[E(x'')]| \leqq 2q_{k+1}.$$

Neboť oba body $E(x')$, $E(x'')$ leží na oblouku $\{v, w\}$, kde $v = E(r)$, $w = E(s)$, takže oba body $\mathfrak{R}[E(x')]$, $\mathfrak{R}[E(x'')]$ jsou v intervalu $\{v, w\}_1$ a oba body $\mathfrak{I}[E(x')]$, $\mathfrak{I}[E(x'')]$ jsou v intervalu $\{v, w\}_2$; a na str. 70 jsme si všimli, že z věty 54 následuje, že délky obou intervalů $\{v, w\}_1$, $\{v, w\}_2$ jsou $\leqq 2q_{k+1}$.

II. Zvolme $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje index p takový, že pro všecka $n > p$ je

$$\begin{aligned} |\,\Re[E(a_n)] - \Re[E(a)]\,| &< \varepsilon, \\ |\,\Im[E(a_n)] - \Im[E(a)]\,| &< \varepsilon. \end{aligned} \tag{20·8}$$

Podle věty 55 můžeme zvoliti index k tak, že $4q_{k+1} < \varepsilon$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, existuje takový index p, že pro všecka $n > p$ je $|\,a_n - a\,| < \pi : 2^{k-1}$. Budiž $n > p$; dokážeme, že platí (20·8). V k-té stupnici aritmetického svazku budiž J_1 interval obsahující bod a a J_2 interval obsahující bod a_n. Protože $|\,a_n - a\,|$ je menší než délka intervalů k-té stupnice aritmetického svazku, intervaly J_1, J_2 buďto splynou, nebo to jsou dva sousední intervaly. Rozhodně existuje bod y, který leží i v intervalu J_1 i v intervalu J_2. Podle I jsou čísla

$$\begin{aligned} &|\,\Re[E(a_n)] - \Re[E(y)]\,|, \quad |\,\Re[E(y)] - \Re[E(a)]\,|, \\ &|\,\Im[E(a_n)] - \Im[E(y)]\,|, \quad |\,\Im[E(y)] - \Im[E(a)]\,| \end{aligned}$$

vesměs $\leqq 2q_{k+1}$. Protože $4q_{k+1} < \varepsilon$, platí (20·8).

Věta 59. Jest $E(x + y) = E(x)\,.\,E(y)$.

Důkaz. I. Předpokládejme nejprve, že x a y jsou dělicí body aritmetického svazku. Existuje takové n, že x a y jsou dělicí body n-té stupnice aritmetického svazku, takže existují celá čísla h, k taková, že

$$x = \frac{h\pi}{2^{n-1}}, \quad y = \frac{k\pi}{2^{n-1}}, \quad \text{tedy } x + y = \frac{(h+k)\pi}{2^{n-1}}.$$

Pak je

$$E(x) = u_n^h, \quad E(y) = u_n^k, \quad E(x + y) = u_n^{h+k},$$

takže $E(x + y) = E(x)\,E(y)$.

II. Buďtež nyní x, y libovolná reálná čísla. Podle cvičení 29 a 32 existují pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ dělicí body x_n a y_n aritmetického svazku takové, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Podle věty 3 je $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$. Podle věty 58 je

$$\lim_{n\to\infty} E(x_n) = E(x), \quad \lim_{n\to\infty} E(y_n) = E(y),$$

$$\lim_{n\to\infty} E(x_n + y_n) = E(x + y).$$

Podle cvič. 100 je

$$\lim_{n\to\infty} E(x_n)\, E(y_n) = E(x)\, E(y).$$

Podle I je však pro všecka n:

$$E(x_n + y_n) = E(x_n)\, E(y_n), \text{ takže } E(x + y) = E(x)\, E(y).$$

Cvičení **107.** Budiž z libovolný bod na jednotkové kružnici. Pak existuje (jediné) reálné číslo x takové, že $-\pi < x \leqq \pi$, $E(x) = z$.

Nyní položme pro každé reálné x

$$\sin x = \Im[E(x)], \quad \cos x = \Re[E(x)], \tag{20·9}$$

takže

$$E(x) = \cos x + \mathrm{i} \sin x. \tag{20·10}$$

Z vlastností komplexní funkce $E(x)$ plynou ihned příslušné vlastnosti obou reálných funkcí $\cos x$, $\sin x$.

Cvičení **108.** Pro každé reálné x je $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Cvičení **109.** Pro každé reálné x je

$$\cos (x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin (x + 2\pi) = \sin x.$$

Cvičení **110.** Jest

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \pi = -1, \quad \cos \tfrac{1}{2}\pi = 0, \quad \cos (-\tfrac{1}{2}\pi) = 0,$$
$$\sin 0 = 0, \quad \sin \pi = 0, \quad \sin \tfrac{1}{2}\pi = 1, \quad \sin (-\tfrac{1}{2}\pi) = -1.$$

Cvičení **111.** Pro každé reálné x je

$$\cos (-x) = \cos x, \quad \sin (-x) = -\sin x.$$

Cvičení **112.** Funkce $\cos x$ klesá v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Funkce $\sin x$ roste v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.

Cvičení **113.** Funkce $\cos x$ a $\sin x$ jsou spojité.

Cvičení **114.** Pro všecka reálná x a y je

$$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Cvičení **115.** Je-li $-1 \leqq t \leqq 1$, pak existuje (jediné) reálné číslo x takové, že $0 \leqq x \leqq \pi$, $\cos x = t$ a (jediné) reálné číslo y takové, že $-\frac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \frac{1}{2}\pi$, $\sin y = t$.

Cvičení **116.** Jest $\cos x = 0$ pro

$$x = \pm \tfrac{1}{2}\pi, \quad \pm \tfrac{3}{2}\pi, \pm \tfrac{5}{2}\pi, \ldots \tag{20·11}$$

a pro žádné jiné reálné x. Jest $\sin x = 0$ pro

$$x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \ldots \tag{20·12}$$

a pro žádné jiné reálné x.

Jakmile známe definici a vlastnosti funkcí $\sin x$, $\cos x$, můžeme zavésti funkce $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ rovnicemi

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}. \tag{20·13}$$

Funkce $\operatorname{tg} x$ není definována v bodech (20·11); funkce $\operatorname{cotg} x$ není definována v bodech (20·12).

Cvičení **117.** Jest identicky

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(x + \pi) = \operatorname{cotg} x,$$
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x.$$

Cvičení **118.** Jest identicky

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

$$\operatorname{cotg}(x + y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}.$$

Cvičení **119.** Pro $-\tfrac{1}{2}\pi < x < \tfrac{1}{2}\pi$ funkce $\operatorname{tg} x$ stále roste a nabývá všech reálných hodnot (každé jednou). Pro $0 < x < \pi$ funkce $\operatorname{cotg} x$ stále klesá a nabývá všech reálných hodnot (každé jednou).

21. Derivace. Věta 60. Buďtež r, s dělicí body aritmetického svazku se základem π. Je-li $0 < r < s \leqq \pi$, jest

$$\frac{\sin r}{r} > \frac{\sin s}{s}. \tag{21·1}$$

Důkaz. Zvolme n tak, že r a s jsou dělicí body n-té stupnice aritmetického svazku. Pak je

$$r = \frac{h\pi}{2^{n-1}}, \; s = \frac{k\pi}{2^{n-1}}, \; 0 < h < k \leqq 2^n, \tag{21·2}$$

$$\sin r = \Im(u_n^h), \; \sin s = \Im(u_n^k).$$

Položme pro $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_m = \Im(u_n^m - u_n^{m-1}),$$

takže

$$a_{m+1} - a_m = \Im(u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1}).$$

Podle (19·2) a podle věty 51 je, protože $|u_{n+1}|^2 = u_{n+1} \cdot u_{n+1}{}^* = 1$,

$$u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1} = u_n^m \left(u_{n+1}^2 - 2 + \frac{1}{u_{n+1}^2}\right) = u_n^m \left(u_{n+1} - \frac{1}{u_{n+1}}\right)^2 =$$

$$= u_n^m (u_{n+1} - u_{n+1}{}^*)^2 = u_n^m (2\mathrm{i}q_{n+1})^2 = -4q_{n+1}^2 u_n^m,$$

takže

$$a_{m+1} - a_m = -4q_{n+1}^2 \Im u_n^m.$$

Je-li $0 < m < 2^n$, je u_n^m vnitřní bod oblouku $\{1, -1\}$, takže $\Im(u_n^m) > 0$; mimoto $q_{n+1} \neq 0$ podle (19·5) a cvič. 95, takže $a_{m+1} - a_m < 0$. Tedy

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_{2^n}.$$

Podle cvič. 5 je tedy, ježto $0 < h < k \leqq 2^n$,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_h}{h} > \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}.$$

Avšak

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \Im[(u_n - 1) + (u_n{}^2 - u_n) + \ldots + (u_n^k - u_n^{k-1})] =$$
$$= \Im(u_n^k - 1) = \Im(u_n^k) = \sin s$$

a podobně $a_1 + a_2 + \ldots + a_h = \Im(u_n^h) = \sin r$. Tedy

$$\frac{\sin r}{h} > \frac{\sin s}{k}$$

a z toho plyne (21·1) podle (21·2).

Věta 61. Buďtež r, s dělicí body aritmetického svazku se základem π. Je-li $0 < r < s < \frac{1}{2}\pi$, je

$$\frac{\sin r}{r \cos r} < \frac{\sin s}{s \cos s}. \tag{21·3}$$

Důkaz. Při vhodném $n \geqq 4$ je

$$r = \frac{h\pi}{2^{n-1}}, \quad s = \frac{k\pi}{2^{n-1}}, \quad 0 < h < k < 2^{n-2}, \tag{21·4}$$

$$u_n^h = \cos r + \mathrm{i} \sin r, \quad u_n^k = \cos s + \mathrm{i} \sin s.$$

Pro $0 < m < 2^{n-2}$ leží body u_n^m, u_n^{m-1} na oblouku $\{1, \mathrm{i}\}$ a jsou různé od i, takže $\Re(u_n^m) \neq 0 \neq \Re(u_n^{m-1})$; proto můžeme položiti

$$a_m = \frac{\Im(u_n^m)}{\Re(u_n^m)} - \frac{\Im(u_n^{m-1})}{\Re(u_n^{m-1})}.$$

Píšeme-li $u_n^m = \alpha_m + \beta_m \mathrm{i}$, je

$$a_m = \frac{\beta_m}{\alpha_m} - \frac{\beta_{m-1}}{\alpha_{m-1}} = \frac{\beta_m \alpha_{m-1} - \alpha_m \beta_{m-1}}{\alpha_m \alpha_{m-1}}.$$

Avšak

$$\beta_m \alpha_{m-1} - \alpha_m \beta_{m-1} = \Im[(\alpha_m + \mathrm{i}\beta_m)(\alpha_{m-1} - \mathrm{i}\beta_{m-1})] =$$

$$= \Im[u_n^m \cdot (u_n^{m-1})^*] = \Im\left(u_n^m \cdot \frac{1}{u_n^{m-1}}\right) = \Im(u_n) = q_n,$$

takže

$$a_m = \frac{q_n}{\alpha_m \alpha_{m-1}}.$$

Tedy

$$a_{m+1} - a_m = \frac{q_n}{\alpha_{m+1}\alpha_m} - \frac{q_n}{\alpha_m \alpha_{m-1}} = \frac{q_n(\alpha_{m-1} - \alpha_{m+1})}{\alpha_{m+1}\alpha_m \alpha_{m+1}}. \quad (21{\cdot}5)$$

Body $1 = \alpha_0 + \beta_0 \mathrm{i}$, $u_n = p_n + q_n \mathrm{i} = \alpha_1 + \beta_1 \mathrm{i}$, $u_n{}^2 = \alpha_2 + \beta_2 \mathrm{i}$, ... $u_n^{2^n-2} = \alpha_{2^n} + \beta_{2^n} . \mathrm{i} = \mathrm{i}$ následují popořádku za sebou na oblouku $\{1, \mathrm{i}\}$, sledujeme-li jej od bodu 1 k bodu i; proto z (21·5) plyne, že

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{2^{n-2}-1},$$

takže podle věty 1 je

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_h}{h} < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}.$$

Avšak

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} - \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right) + \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) + \ldots + \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} - \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}}\right) =$$

$$= \frac{\beta_k}{\alpha_k} - \frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{\beta_k}{\alpha_k} = \frac{\sin s}{\cos s}$$

a podobně je

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_h = \frac{\sin r}{\cos r},$$

takže

$$\frac{\sin r}{h \cos r} < \frac{\sin s}{k \cos s}$$

a z toho plyne (21·3) podle (21·4).

Věta 62. Funkce $\frac{\sin x}{x}$ klesá pro $0 < x \leqq \pi$.

Důkaz. Budiž $0 < x_1 < x_2 \leqq \pi$. Máme dokázati, že

$$\frac{\sin x_1}{x_1} > \frac{\sin x_2}{x_2}. \tag{21·7}$$

Podle cvič. 29 a 30 existují dělicí body r, s aritmetického svazku takové, že $x_1 < r < s < x_2$. Podle věty 60 je

$$\frac{\sin r}{r} > \frac{\sin s}{s},$$

takže můžeme zvoliti číslo $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\frac{\sin r}{r} - \varepsilon > \frac{\sin s}{s} + \varepsilon. \tag{21·8}$$

Podle věty 27 a podle cvič. 64 a 113 je funkce $\frac{\sin x}{x}$ spojitá v bodě x_1. Tedy existuje na číselné ose interval J, který neobsahuje bod 0, takový, že bod x_1 leží uvnitř J a že

$$\left| \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x_1}{x_1} \right| < \varepsilon$$

pro každý bod x uvnitř J. Podle cvič. 29 a 30 můžeme zvolit uvnitř J dělicí bod t_1 aritmetického svazku, pro který je $t_1 < r$; podle věty 60 je

$$\frac{\sin t_1}{t_1} > \frac{\sin r}{r};$$

mimoto je
$$\left| \frac{\sin t_1}{t_1} - \frac{\sin x_1}{x_1} \right| < \varepsilon.$$

Docela stejně se dokáže, že existuje dělicí bod t_2 aritmetického svazku, pro který je

$$\frac{\sin t_2}{t_2} < \frac{\sin s}{s}, \quad \left| \frac{\sin t_2}{t_2} - \frac{\sin x_2}{x_2} \right| < \varepsilon.$$

Jest
$$\frac{\sin x_1}{x_1} > \frac{\sin t_1}{t_1} - \varepsilon > \frac{\sin r}{r} - \varepsilon,$$

$$\frac{\sin x_2}{x_2} < \frac{\sin t_2}{t_2} + \varepsilon < \frac{\sin s}{s} + \varepsilon,$$

takže z (21·8) plyne (21·7).

Cvičení 120. Funkce $\dfrac{\sin x}{x \cos x}$ roste pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$.

Jest

$$E\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = u_n = p_n + iq_n, \quad \cos\frac{\pi}{2^{n-1}} = p_n, \quad \sin\frac{\pi}{2^{n-1}} = q_n.$$

Podle věty 60 je

$$q_1,\ 2q_2,\ 2^2q_3,\ 2^3q_4, \ldots \tag{21·9}$$

stoupající posloupnost; podle věty 61 je

$$\frac{2^2q_3}{p_3},\ \frac{2^3q_4}{p_4},\ \frac{2^4q_5}{p_5}, \ldots \tag{21·10}$$

klesající posloupnost; členy posloupnosti (21·10) jsou kladné podle cvič. 95; tedy posloupnost (21·10) je konvergentní podle věty 9. Nyní plyne z vět 4 a 55, že také posloupnost (21·9) je konvergentní. Je to stoupající posloupnost s kladnými členy, takže její limita je kladné číslo. My jsme však v odst. 20 označili písmenem π kladné číslo, jehož určitou volbu jsme odsunuli do tohoto odstavce. Nyní volíme

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1}q_n. \tag{21·11}$$

Věta 63. Číslo π je polovina obvodu jednotkové kružnice.

Důkaz. Podle věty 54 je M_n pravidelný 2^n-úhelník s délkou strany $2q_{n+1}$. Obvod jednotkové kružnice je limita posloupnosti, jejíž n-tý člen je obvod mnohoúhelníka M_n, tedy $2^n \,.\, 2q_{n+1}$, takže z (21·11) plyne, že obvod jednotkové kružnice je 2π.

Věta 64. Jest

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Důkaz. Protože $\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}} = q_n$, je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1, \text{ je-li } x_n = \frac{\pi}{2^n}. \tag{21·12}$$

Je-li dáno $\varepsilon > 0$, můžeme podle (21·12) zvoliti index p tak, že pro všecka $n > p$ je $\left|\dfrac{\sin x_n}{x_n} - 1\right| < \varepsilon$. Stačí dokázati, že pro $x \neq 0$,

$|x| < x_p$ je $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$. Je-li $x \neq 0$, $|x| < x_p$, existuje index $n > p$ takový, že $x_n < |x| < x_p$. Jest $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin |x|}{|x|}$ podle cvič. 111, takže číslo $\frac{\sin x}{x}$ podle věty 62 leží mezi čísly $\frac{\sin x_p}{x_p}$ a $\frac{\sin x_n}{x_n}$, která leží mezi čísly $1 - \varepsilon$ a $1 + \varepsilon$. Proto je $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$.

Věta 65. Jest

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0. \tag{21·13}$$

Důkaz. Z věty 64 plyne, že

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1,$$

takže podle cvič. 108 je

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = 1$$

a z toho následuje snadno, že

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} = 0. \tag{21·14}$$

Avšak

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \tag{21·15}$$

a podle cvič. 110 a 113 je

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \tfrac{1}{2}. \tag{21·16}$$

Z (21·14), (21·15) a (21·16) plyne (21·13).

Věta 66. Pro každé reálné x je $(\sin x)' = \cos x$.

Důkaz. Podle cvič. 114 je pro $h \neq 0$

$$\frac{\sin (x + h) - \sin x}{h} = \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} - \sin x \, \frac{1 - \cos h}{h},$$

takže podle vět 64 a 65 je

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin (x + h) - \sin x}{h} = \cos x.$$

Cvičení 121. Pro každé reálné x je $(\cos x)' = -\sin x$.

Cvičení 122. Pro každé x různé od hodnot (20·11) je $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Pro každé x různé od hodnot (20·12) je $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. (Podle pravidla o derivování podílu).

Cvičení 123. Derivujte funkce

a) $\sin^3 x \cos 3x$; b) $\frac{\sin^3 x}{\cos 3x}$; c) $\frac{\cos^3 3x}{\sin x}$;

d) $x^n \sin^n x$; e) $x^n \sin^2 nx$; f) $x^n \sin^n nx$;

g) $e^{-x} \sin^m x \cos^n x$; h) $\log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$; i) $e^{\sin x}$.

22. Rozvoje funkcí sin x a cos x v nekonečné řady. Jak se dá číslo π pohodlně počítati pomocí nekonečných řad, o tom je řeč ve VM, odst. 32 a zde se tím nebudeme zabývati. Za to poznáme v tomto odstavci nekonečné řady, pomocí kterých se dají pohodlně počítati hodnoty funkcí $\sin x$ a $\cos x$ pro všecka x.

Věta 67. Pro všecka $x > 0$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ je

$$\left|\sin x - \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]\right| < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\left|\cos x - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]\right| < \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Mimoto jsou diference

$$\sin x - \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right],$$

$$\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] - \cos x$$

kladné při sudém n a záporné při lichém n.

Důkaz. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ budiž

$$f_n(x) = \sin x - \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right],$$

$$g_n(x) = \cos x - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right].$$

Pak je pro všecka n a x

$$f'_{n+1}(x) = g_n(x),\ g'_n(x) = -f_n(x).$$

Zejména je $f_1(x) = \sin x - x$, tedy $f_1(x) < 0$ pro $0 < x \leqq \pi$ podle vět 62 a 64; pro $x > \pi$ je $f_1(x) \leqq 1 - \pi < 0$, takže je $f_1(x) < 0$ pro všecka $x > 0$. Pro všecka n je $f_n(0) = g_n(0) = 0$. Užijeme-li věty 43 na posloupnost funkcí

$$-f_1(x),\ g_1(x),\ f_2(x),\ -g_2(x),\ -f_3(x),\ g_3(x),\ f_4(x),\ -g_4(x),\ \ldots,$$

dostaneme, že pro všecka $x > 0$ je

$$f_n(x) < 0,\ g_n(x) > 0 \text{ při lichém } n,$$
$$f_n(x) > 0,\ g_n(x) < 0 \text{ při sudém } n.$$

Při lichém n je pro $x > 0$

$$f_n(x) < 0,\quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0,$$

$$g_n(x) > 0,\quad g_{n+1}(x) = g_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} < 0,$$

tedy

$$0 < -f_n(x) < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad 0 < g_n(x) < \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Podobně vyjde při sudém n

$$0 < f_n(x) < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad 0 < -g_n(x) < \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Cvičení **124.** Pro všecka reálná x je

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \text{ do nekonečna},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \text{ do nekonečna}.$$

S pomocí těchto výsledků můžeme snadno počítati velmi přesně $\sin x$ a $\cos x$ pro každé nepříliš velké x. Je-li dán úhel α ve stupních, α rovné n stupňům, je

$$\sin \alpha = \sin \frac{n\pi}{180},\ \cos \alpha = \cos \frac{n\pi}{180}.$$

Proto je při užívání našich řad třeba znáti numerickou hodnotu čísla π. Jest

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ldots,$$
$$\pi^2 = 9{,}86960\ 44010\ 89358\ldots$$

Cvičení **125.** Vypočtěte aspoň na osm desetinných míst sin 2°, cos 2°, sin 3°, cos 3°, sin 5° a přesvědčte se, že $\sin 2^\circ . \cos 3^\circ + \sin 3^\circ . \cos 2^\circ = \sin 5^\circ$. (Jest

$$\sin 2^\circ = 0{,}03489\ 94967\ 02501\ldots,$$
$$\cos 2^\circ = 0{,}99939\ 08270\ 19095\ldots,$$
$$\sin 3^\circ = 0{,}05233\ 59562\ 42943\ldots,$$
$$\cos 3^\circ = 0{,}99862\ 95347\ 54574\ldots,$$
$$\sin 5^\circ = 0{,}08715\ 57427\ 47658\ldots)$$

V odst. 16 jsme poznali, že pro každé reálné x je

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Dosadíme-li do této nekonečné řady ix místo x, dostaneme řadu

$$1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \ldots$$

jejíž členy jsou střídavě reálné a ryze imaginární. Podle cvič. 124 součet reálných členů je $\cos x$, součet všech ryze imaginárních členů je $i \sin x$. Proto je účelné definovati hodnotu e^{ix} pro reálné x identitou

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{22·1}$$

Podle cvič. 111 je

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

takže

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{22·2}$$

Formule (22·1) a (22·2) se jmenují Eulerovy formule.

OBSAH

Spisovatel	*Prof. Dr Eduard Čech*
Název díla	*ELEMENTÁRNÍ FUNKCE*
Vydala	*Jednota českých matematiků a fysiků v Praze*
Rok	*1944*
Vytiskla	*Knihtiskárna „Prometheus" v Praze*
Komisionář	*Nakladatelství „Prometheus" v Praze*
Vydání	*první*
Cena	*Brož. výtisk K 28,—*