O nerovnostech

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

O NEROVNOSTECH

Vydal matematický ústav ČSAV a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

FRANTIŠEK VESELÝ

O NEROVNOSTECH

PRAHA 1963

VYDAL MATEMATICKÝ ÚSTAV ČSAV A ÚV ČSM
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

PŘEDMLUVA

•

Dvacáté století zůstane ve vývoji lidstva významným mezníkem pro revoluční změny společenské i pro neobyčejný rozmach vědy a techniky. Tyto jevy spolu velmi těsně souvisí. Matematikové podporovali svou prací takový vývoj vždy, když usilovali o to, aby pomáhali pracovníkům v jiných vědách nebo v praktickém životě. Současný stav společenského vývoje vyžaduje, aby se stále zvyšovalo vzdělání všech lidí v matematice a aby byly odkrývány mladé talenty a vychovávány pro práci v matematických vědách. Tyto úkoly se snaží plnit též tradiční žákovské soutěže Matematické olympiády. Na jejich podporu vznikla knižnice Škola mladých matematiků, jejíž vydávání bylo usnadněno porozuměním nakladatelství Mladá fronta.

Úkolem tohoto svazku je osvěžit nebo přehledně zopakovat a pak prohloubit vaše vědomosti z nauky o nerovnostech. Dobrá znalost učiva o nerovnostech má totiž velký význam nejen pro studium matematické analýzy, ale i pro řešení četných problémů praktického života, jak se to nejvíce projevuje v tzv. lineárním programování. V tomto svazku se pokusíme vysvětlit vám mimo jiné též základní pojmy, podstatu úloh i pracovní metody lineárního programování, které se stalo nepostradatelným pomocníkem velkého počtu našich techniků i ekonomů. Jeho výklad se opírá jen o takové vědomosti z elementární matematiky, které již máte nebo je získáte při studiu této knížky. V čl. 7—8 je ukázán pohled na jednoduché úlohy lineárního programování, které v obecnější formě se vyskytují v technické i hospodářské praxi. Při řešení tako-

vých úloh uvidíte, jak úzce spolu souvisí četné poznatky z různých oborů matematiky, a to daleko víc, než se to jeví ve školské praxi, kde učivo aritmetiky, algebry i geometrie je často od sebe odtrženo. Má-li matematika dobře sloužit pracovníkům v praxi, pak je často nutné používat poznatků z různých oborů matematiky, které se musí vzájemně podporovat a doplňovat. Jen tak je možno získávat nové pohledy na řešené problémy a hledat nové cesty k využití matematické vědy.

Omezený rozsah této knížky vyžadoval, aby výklad byl stručný. Jeho studium je však usnadněno tím, že do textu bylo zařazeno 30 příkladů, v nichž byly některé úlohy buď zcela vyřešeny nebo byl popsán postup řešení, které si podle návodu můžete již provést sami. Téměř do všech článků jsou zařazena cvičení, jichž je celkem 33 a obsahují celkem 82 úloh. Řešením úloh upevníte nově získané poznatky a vycvičíte se v numerickém počítání. Nepodaří-li se vám některé úlohy rozřešit, nedejte se tím odradit od studia dalších článků. V žádném z nich nepředpokládáme při výkladu znalost řešení některých úloh ze cvičení. Radíme vám, abyste si soustavně dělali obrázky při studiu celé knížky. Jedno staré čínské přísloví říká, že je lépe jednou uvidět než stokrát uslyšet. O moudrosti skryté v tomto přísloví se jistě mnohokrát přesvědčíte.

Největší zisk z této knížky budete mít tehdy, budete-li ji soustavně a samostatně studovat. Jestliže však narazíte na překážky, které by vám znemožňovaly pokračovat v jejím studiu, obraťte se se žádostí o radu na svého učitele matematiky.

František Veselý

1. VZNIK HLAVNÍCH OBORŮ MATEMATIKY

•

Z práce na řešení některých otázek skutečného života se vyvíjely již v nejstarších dobách společenského vývoje dovednosti počtářské a zeměměřičské. Při rozvoji umění počtářského i zeměměřičského přibývalo stále více nových poznatků, které bylo třeba roztřídit a uspořádat. Tak vznikala matematická věda jako jedna z nejstarších věd. Velikou zásluhu o to si získali ve starověku zejména řečtí učenci, z nichž nejznámější jsou *Pythagoras* (žil v 6. stol. před n. l.), *Euklides* (žil kolem roku 325 před n. l.) a *Archimédes* (287—212 před n. l.). Celá matematická věda byla v době svého vzniku v Řecku označována názvem geometrie, který zřetelně ukazoval na její praktický původ. Řecké slovo gé znamená totiž země, řecké slovo metrein měřiti. Teprve později se význam názvu geometrie zúžil na označení té části matematiky, která se zabývá vztahy mezi prostorovými prvky, jako jsou body, přímky, roviny, křivky, plochy, tělesa apod.

Názvem aritmetika označujeme dnes tu část matematiky, která jedná o vlastnostech čísel různých číselných oborů a o počítání s určitými čísly. Proto zkoumání vlastností celých čísel (dělitelnost, prvočísla apod.), zahrnované do tzv. číselné teorie, tvoří jen část aritmetiky. Ve starší době patřilo do aritmetiky i řešení rovnic, z něhož se vyvinula nová samostatná část matematiky, označovaná slovem arabského původu algebra. K velkému rozvoji algebry přispělo užívání písmen ve významu čísel, k němuž došlo zejména od konce 16. století. Moderní algebra se však rozvinula tak, že nauka o řešení rovnic tvoří jen její poměrně malou a ne nejdůležitější část. Dnes se často dělí matematika zhruba na geometrii, na matematickou analýzu a algebru.

Od starověku se geometrie jako věda vyvíjela nejprve tak, že po zavedení základních geometrických pojmů a základních vět, jejichž platnost byla uznávána bez důkazu, byly další geometrické poučky odvozovány logickými úvahami. Pro označení této části dnešní geometrie se často užívá názvu syntetická geometrie. Od 17. století se začala v geometrii vyvíjet nová pracovní metoda tím, že geometrickým prvkům, např. bodům, přímkám, křivkám, rovinám, plochám apod., byly přiřazovány prvky aritmetické a algebraické, tj. čísla, číselné dvojice nebo trojice, rovnice apod., s nimiž byly prováděny početní operace a po jejichž provedení byly dosažené výsledky vykládány opět geometricky. Pro tuto část geometrie, která řeší geometrické úlohy prostředky početními (analytickými), ustálil se název analytické geometrie.

Jako zakladatel analytické geometrie bývá zpravidla uváděn francouzský filosof a matematik *René Descartes*[1]) (1596—1650), který je v odborné literatuře uváděn často též latinským jménem *Cartesius*[2]). Základy analytické geometrie i její pracovní metodu naznačil v doplňku k svému slavnému spisu „Rozprava o metodě", který vyšel roku 1637. Francouzský matematik *Pierre de Fermat*[3]) (1601—1665), který se proslavil některými výsledky svých prací v číselné teorii, budoval také základy analytické geometrie,

[1]) čti Dékár

[2]) čti Kartézius; spisovatel Zikmund Winter ve svém historickém románu Mistr Kampanus připomíná Descartesův (čti Dékártův) pobyt v Praze v době bitvy na Bílé hoře 1620; uvádí jej tam se jménem Cartesius

[3]) čti Pier d'Ferma

a to snad o něco dříve i hlouběji než Descartes, jemuž je přiznáváno prvenství jen proto, že jako první své úvahy o analytické geomertii uveřejnil, zatímco Fermatův spis s úvahami o analytické geometrii vyšel až po Fermatově smrti. Vznik analytické geometrie a její rozvoj měl silný vliv nejen na další vývoj matematiky, ale i na vývoj přírodních věd, zejména fyzikálních.

I když matematika vyrůstala z práce na řešení otázek skutečného života, stávaly se časem úvahy matematiků stále abstraktnější, takže často souvislost některých úvah s otázkami praktického života nebyla již zřejmá. Tak se stalo, že se začala rozlišovat matematika ryzí a matematika užitá čili aplikovaná. V posledních dvou desítiletích vzrostl pronikavě společenský význam matematiky proto, že se jejích poznatků využívá nejen ve vědách fyzikálních a technických, ale i ve vědách společenských, zejména v ekonomii.

2. NĚKTERÉ POZNATKY Z ANALYTICKÉ GEOMETRIE (analytický popis polorovin)

●

Ze školy je vám známo, jak lze v rovině, v níž byla zvolena pravoúhlá souřadnicová soustava, přiřadit všem bodům $[x, y]$ dané přímky p lineární rovnici, která má obecný tvar $ax + by + c = 0$. V tomto článku vám chceme ukázat, jak lze v takové rovině přiřadit všem bodům $[x, y]$ poloroviny vyťaté přímkou p lineární nerovnost $ax + by + c \geq 0$ nebo nerovnost obrácenou, tj. $ax + by + c \leq 0$, a všem vnitřním bodům těchto polorovin nerovnost $ax + by + c > 0$ nebo nerovnost obrácenou, tj. $ax + by + c < 0$. Dříve než tak učiníme, připomeneme vám některé základní pojmy z geometrie a pak se umluvíme na užívání některých názvů a značek, jímž se umožní stručnost v našich pozdějších výkladech.

Je-li dána přímka p a mimo ni ležící bod A, jest jimi určena rovina pA. Přímka p rozděluje body této roviny na tři části:

I. Všechny takové body X roviny pA, pro které platí, že úsečka AX nemá žádný bod společný s přímkou p; nevylučujeme $X \equiv A$.

II. Všechny body přímky p.

III. Všechny takové body X roviny pA, pro které platí, že úsečka AX má vnitřní bod společný s přímkou p.

Souhrn všech bodů, které leží v části I. a II., nazveme polorovinou, určenou přímkou p a bodem A, a označíme ji $\varrho\ (p, A)$. Souhrn všech bodů, které leží v části II. nebo III. nazveme polorovinou opačnou k $\varrho\ (p, A)$. Polorovina $\varrho\ (p, A)$ a polorovina k ní opačná mají společné body přímky p, kterou nazýváme hraniční přímkou obou polorovin. Body části I. nazveme vnitřními body $\varrho\ (p, A)$ a body části III. vnitřními body poloroviny opačné k $\varrho\ (p, A)$.

V rovině, v níž byla zvolena kartézská pravoúhlá souřadnicová soustava, můžeme si označování obou polorovin vyťatých přímkou p ještě více zjednodušit. Za předpokladu, že souřadnicová soustava s počátkem O a jednotkovými body J_1 na první souřadnicové ose[4]) a J_2 na druhé byla zvolena tak, že osa x je vodorovná, osa y svislá, bod J_1 leží vpravo od bodu O a bod J_2 nad bodem O, můžeme rozlišení polorovin vyťatých přímkou p charakterizovat zhruba takto: a) Je-li přímka p různoběžná s osou y, pak dolní polorovinu označíme $\varrho\ (p)$ a horní $\bar{\varrho}\ (p)$. b) Je-li přímka p rovnoběžná s osou y, označíme levou polorovinu $\varrho\ (p)$ a pravou $\bar{\varrho}\ (p)$. Pro praktickou potřebu řešení úloh v této knížce by snad stačila tato úmluva, která se odvolává na smyslový názor při volbě zvláštní souřadnicové soustavy. Ukážeme však, že můžeme zavést označení $\varrho\ (p)$ a $\bar{\varrho}\ (p)$ bez odvolání na názor takto:

1. Prochází-li přímka p_0 počátkem a je různá od osy y, pak označíme $\bar{\varrho}\ (p_0)$ polorovinu $\varrho\ (p_0, J_2)$ a $\varrho\ (p_0)$ polorovinu opačnou. Jestliže posuneme přímku p_0 tak, aby se dostala do polohy $p \parallel p_0$ a protínala osu y v bodě Q, pak označíme $\varrho\ (p)$ a $\bar{\varrho}\ (p)$ ty poloroviny, které dostaneme posunutím $\varrho\ (p_0)$ a $\bar{\varrho}\ (p_0)$, při němž počátek O přejde do bodu Q.

2. Jestliže p_0 splývá s osou y, pak označíme $\bar{\varrho}\ (p_0)$ polorovinu $\varrho\ (p_0, J_1)$ a $\varrho\ (p_0)$ polorovinu opačnou. Jestliže posuneme přímku p_0 tak, aby se dostala do polohy $p \parallel p_0$ a protínala osu x v bodě P, pak označíme $\varrho\ (p)$ a $\bar{\varrho}\ (p)$

[4]) $J_1 \equiv [1;0]$ $J_2 \equiv [0;1]$

ty poloroviny, které dostaneme posunutím $\varrho(p_0)$ a $\bar{\varrho}(p_0)$, při němž počátek O přejde do bodu P.

Nechť je dána přímka p různoběžná s osou y rovnicí ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$. Zvolme nyní libovolně mimo přímku p ležící bod $M \equiv [x, y]$, tj. vnitřní bod z $\varrho(p)$ nebo $\bar{\varrho}(p)$. (Udělejte si náčrtek.) Bod P přímky p, který má s bodem M stejnou souřadnici x, je bod $[x, kx + q]$. Pro souřadnici y bodu M však platí:
$y > kx + q$, je-li M vnitřním bodem poloroviny $\bar{\varrho}(p)$ 0
$y < kx + q$, je-li M vnitřním bodem poloroviny $\varrho(p)$ 0.
Poněvadž k polorovinám $\bar{\varrho}(p)$ i $\varrho(p)$ počítáme též body hraniční přímky $y = kx + q$, dostáváme pro body obou polorovin tyto nerovnosti:

$y \geqq kx + q$ pro body z poloroviny $\bar{\varrho}(p)$,
$y \leqq kx + q$ pro body z poloroviny $\varrho(p)$.

Znásobíme-li druhou z těchto nerovností číslem -1 a v obou nerovnostech převedeme všechny členy na levou stranu nerovnosti, dostaneme

$-kx + y - q \geqq 0$ pro body z poloroviny $\bar{\varrho}(p)$,
$kx - y + q \geqq 0$ pro body z poloroviny $\varrho(p)$.

Jsou to nerovnosti souhlasného druhu ($\geqq$) a jejich platnost pro obě poloroviny se snadno mnemotechnicky zapamatuje: je-li koeficient při y rovný číslu $+1$, jde o polorovinu $\bar{\varrho}(p)$ (horní), je-li -1, jde o polorovinu $\varrho(p)$ (dolní). Na tento tvar však převedeme každou nerovnost tvaru

$$ax + by + c \geqq 0, \tag{2.1}$$

jestliže celou nerovnost dělíme kladným číslem $|b|$. Podíl $\frac{b}{|b|} = \pm 1$ podle toho, je-li $b > 0$ nebo $b < 0$. Dělení však není nutno provádět, neboť stačí, když určíme znamení čísla b.

Je-li p přímka jdoucí bodem $[r; 0]$ rovnoběžná s osou y, snadno zjistíme, že platí $x \geqq r$ pro body z $\bar{\varrho}(p)$

a $x \leqq r$ čili $-x \geqq -r$ pro body z $\varrho(p)$. Na tento tvar můžeme však snadno převést nerovnost $ax + c \geqq 0$, jestliže absolutní člen c převedeme na pravou stranu a pak celou nerovnost dělíme kladným číslem $|a|$.

Shrnutím těchto výsledků můžeme stanovit pravidlo pro určení polorovin popsaných nerovností tvaru (2.1) takto:

1. Je-li $b \neq 0$, pak při $b < 0$ platí nerovnost pro body z $\varrho(p)$ a při $b > 0$ pro body z $\bar{\varrho}(p)$.

2. Je-li $b = 0$, pak při $a < 0$ platí nerovnost pro body z $\varrho(p)$ a při $a > 0$ pro body z $\bar{\varrho}(p)$.

Bylo by ovšem možné odvodit i jiná pravidla pro rozhodování o tom, pro kterou polorovinu nerovnost (2.1) platí. Nebudeme je ovšem odvozovat, poněvadž pro řešení úloh v dalších článcích této knížky obsažených vystačíme s tímto pravidlem. Dobře si však zapamatujeme, že hraniční přímkou poloroviny, pro kterou platí nerovnost (2.1), je přímka o rovnici $ax + by + c = 0$, a že pro vnitřní body příslušných polorovin dostaneme platnou nerovnost, když neostrou nerovnost např. se znaménkem $\geqq$ změníme na ostrou nerovnost se znaménkem $>$.

Příklad 1. Rozhodněte, pro které body platí nerovnost $3x + 2y - 15 < 0$ a také o tom, zda platí pro body $A \equiv [0; 0]$, $B \equiv [4; 1]$, $C \equiv [2; 6]$, $D \equiv [-1; 9]$.

Tato nerovnost platí pro vnitřní body poloroviny vyťaté přímkou r, která má rovnici $3x + 2y - 15 = 0$. Abychom danou nerovnost převedli na nerovnost se znaménkem $>$, znásobíme ji číslem -1 a podle záporného koeficientu při y v nerovnosti $-3x - 2y + 15 > 0$ rozhodneme, že jde o dolní polorovinu $\varrho(r)$. Dosadíme-li třebas do původní nerovnosti souřadnice bodu A, obdržíme $-15 < 0$; je tedy bod A vnitřním bodem poloroviny $\varrho(r)$. Podobně to zjistíme i o bodu B. Při dosazení souřadnic bodu C do původní nerovnosti dostaneme

$3 < 0$, což neplatí; bod C leží v $\bar{\varrho}(r)$. Dosadíme-li do původní nerovnosti souřadnice bodu D, dostaneme $0 < 0$, což neplatí. Bod D není vnitřním bodem $\varrho(r)$, leží však zřejmě na hraniční přímce r, jejíž rovnici vyhovuje.

Příklad 2. Rozhodněte, zda přímka s daná rovnicí $x - 2y + 4 = 0$ protíná strany trojúhelníka o vrcholech $A \equiv [-3; 1]$, $B \equiv [4; -1]$, $C \equiv [2; 3]$. Po dosazení souřadnic vrcholů A, B, C daného trojúhelníka ABC do levé strany rovnice přímky s dostaneme výsledky -1, 10, 0. Bod C leží tedy na přímce s, která protíná stranu AB daného trojúhelníka ABC, poněvadž body A, B leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou s.

Příklad 3. Najděte nerovnost, která platí pro polorovinu $\varrho(p, M)$, je-li hraniční přímka p určena body $[0; 1]$, $[5; 5]$, a bod $M \equiv [9; 8]$. Ze známého vzorce $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ najdeme $k = \dfrac{5 - 1}{5 - 0} = \dfrac{4}{5}$ a dosazením souřadnic bodu M do rovnice $y = \dfrac{4}{5}x + q$ vypočteme q. Po úpravě má rovnice přímky p tvar $4x - 5y + 5 = 0$. Dosadíme-li do levé strany této rovnice souřadnice bodu M, dostaneme jako hodnotu výrazu $4x - 5y + 5$ číslo 1. Pro bod M platí tedy nerovnost $4x - 5y + 5 > 0$. Podle známého pravidla můžeme určit $\varrho(p) \equiv \varrho(p, M)$. Leží tedy bod M pod přímkou p.

Uvědomte si, že jsme zjišťovali některé vztahy mezi geometrickými prvky jen početními metodami. Při studiu těchto příkladů i při řešení úloh v následujících cvičeních rýsujte příslušné obrazce, abyste se přesvědčili o významu početních metod pro geometrii, která jindy vydatně pomáhá výpočtářské technice. Poloroviny, pro které platí dané nebo nalezené nerovnosti, si vyznačte nějakou značkou nebo šrafováním.

Tento článek zakončíme tím, že bez důkazu uvedeme vzorec pro výpočet vzdálenosti v daného bodu $[x_0, y_0]$ od přímky dané rovnicí $ax + by + c = 0$. Platí pro ni

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Příklad 4. Vypočtěte vzdálenosti v_1, v_2 bodů $M_1 \equiv [1; 0]$, $M_2 \equiv [-5; -4]$ od přímky p dané rovnicí

$$12x - 5y + 14 = 0.$$

Snadno provedeme výpočet

$$v_1 = \frac{|12.1 - 5.0 + 14|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|26|}{13} = 2,$$

$$v_2 = \frac{|12(-5) - 5(-4) + 14|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2|}} = \frac{|-26|}{13} = 2.$$

Oba body M_1, M_2 mají od přímky p stejnou vzdálenost $v_1 = v_2 = 2$. Přitom snadno též zjistíme, že body M_1, M_2 leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou p.

Cvičení

2.1 Rozhodněte, zda body $A \equiv [2; 4]$, $B \equiv [6; 2]$, $C \equiv [8; 3]$ leží v polorovině dané nerovností

a) $x - 2y - 2 \geqq 0$,

b) $3x + 2y - 21 \geqq 0$,

c) $x \geqq 7$.

2.2 Rozhodněte početně, zda trojúhelník o vrcholech $A \equiv [-2; -1]$, $B \equiv [4; 2]$, $C \equiv [2; 3]$ má společné body s přímkou, která je dána rovnicí a) $3x - 4y + 4 = 0$, b) $x + y = 0$, c) $2x - y - 6 = 0$.

2.3 Narýsujte hraniční přímky polorovin, které jsou dány nerovnostmi $3x + y \geqq 0$, $x - y \leqq 0$, $y \geqq 3$ a šrafováním vyznačte část roviny, v níž leží body společné všem daným polorovinám.

2.4 S použitím náčrtu charakterizujte body, které vyhovují současně třem daným ostrým nerovnostem $x + y > 0$, $x - y < 0$, $x - 3y + 8 > 0$.

3. MNOŽINY

●

Pojem množiny je blízký pojmu souhrn nebo soubor. Každá množina se skládá z předmětů, které mohou být jakékoli povahy (konkrétní nebo abstraktní) a jsou od sebe dobře rozlišitelné; nazýváme je prvky množiny. Množina je určena, je-li dán předpis, podle kterého můžeme o každém předmětu jakékoli povahy rozhodnout, zda je nebo není prvkem této množiny. Prvky tvořící množinu mohou být různorodé předměty, neboť předmětem studia v teorii množin nejsou jednotlivé prvky, nýbrž jen vlastnosti příslušných souborů, při nichž se k vlastnostem jeho prvků nepřihlíží. Stanovíme-li na příklad, že prvky jisté množiny jsou planeta Mars, číslo 7 a písmeno A, je tím tato množina určena. My se ovšem budeme zajímat hlavně o množiny složené z takových prvků, s nimiž se setkáváme v aritmetice, v algebře a v geometrii. V matematice se též zavádí tzv. prázdná množina. Tak označujeme množinu, která nemá žádný prvek. Prázdná množina se obvykle označuje znakem $\emptyset$.

Pro označování množin se užívá nejčastěji velkých písmen, pro označování jejich prvků malých písmen. Řekne-li se, že „x je prvkem množiny M“, zaznamená matematik tento vztah mezi množinou M a prvkem x zápisem $x \varepsilon M$. Uvedený zápis se čte někdy i jinak, jako např. „x patří do množiny M“ nebo „x náleží do množiny M“ apod. Při užívání takových rčení je však třeba dávat pozor na to, že slovesa patřit a náležet mohou mít i jiný význam. V této knížce nebudeme užívat speciálních zápisů, jichž matematikové užívají v teorii množin, neboť nám jde jen o to, abyste se trochu seznámili s pojmy prvek množiny, množina, sjednocení a průnik množin. Někdy se užívá k zápisu množin takového způsobu, že do složených závorek se zapíší označení všech prvků množiny. Jindy se do takových závorek nebo do závorek jiného druhu zapíší takové matematické výrazy, které podle smluvené dohody umožňují zjistit prvky takto označené množiny. S některými zápisy tohoto druhu se v této knížce setkáte. Uvedeme nyní několik příkladů množin, přičemž se omezíme jen na množiny čísel reálných:

1. $M_1 = \{0\}$, 2. $M_2 = \{1\}$, 3. $M_3 = \{0, 1, 2\}$, 4. $M_4 = \{2, 0, 1\}$, 5. M_5 označíme množinu všech reálných kořenů rovnice $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$, 6. M_6 označíme množinu všech racionálních kořenů rovnice $x^2 - 2x - 7 = 0$, 7. M_7 označíme množinu všech přirozených čísel, 8. M_8 označíme množinu všech celých čísel, 9. M_9 označíme množin u všech reálných čísel, 10. M_{10} označíme množinu, která nemá žádný prvek.

K uvedeným příkladům připojíme tyto poznámky:

a) 1 je prvkem množiny M_2, M_3, M_4, M_5, M_7, M_8, M_9. Číslo $1 + 2\sqrt{2}$ je prvkem množiny M_9.

b) Na příkladu množiny M_6 je vidět účelnost pojmu prázdné množiny. Je ovšem třeba rozlišovat mezi množinou M_1 a M_{10}, neboť množina M_1 má jeden prvek, tj. číslo 0, avšak M_6 a M_{10} nemají žádných prvků. Stejně je třeba opatrnosti a nezaměňovat pojem množiny o jednom prvku s pojmem prvku této množiny. Je totiž pravdivý výrok „1 je prvkem $\{1\}$“, ale věta „$\{1\}$ je prvkem 1“ nemá vůbec smysl.

c) Dvě množiny pokládáme za rovné, jestliže se skládají z týchž prvků. Je tedy např. $M_3 = M_4 = M_5$. Také $M_6 = M_{10} = \emptyset$.

d) Množina všech přirozených čísel je přesné označení určité množiny, tj. v našem případě M_7, kdežto název množina přirozených čísel je označení pro takové množiny, jejichž prvky jsou jen přirozená čísla. Obdobnou poznámku bychom mohli učinit o množinách všech celých čísel nebo všech reálných čísel.

Sjednocení dvou množin A, B nazýváme takovou množinu C, o jejichž prvcích platí, že každý z nich je prvkem množiny A nebo množiny B. Tak např. sjednocením množin $\{1, 2, 3, 4\}$ a $\{3, 4, 5\}$ je množina $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Obdobně se definuje sjednocení libovolného počtu množin. Tak např. sjednocením množin M_1, M_2, M_3 je množina $M_3 = M_4 = M_5$. Průnikem dvou množin A, B nazýváme takovou množinu D, jejímiž prvky jsou všechny společné prvky množin A, B. Je tedy průnikem množin $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$ množina $\{3, 4\}$. Obdobně se definuje průnik libovolného počtu množin. Je jistě zřejmé, že průnikem dvou množin, které nemají žádné společné prvky, je prázdná množina. Tak např. průnikem množiny M_1 a M_2 je M_{10}.

Některých pojmů teorie množin i množinových operací se užívalo již dříve, než vznikl název množiny i jiné odborné názvy s pojmem množiny souvisící. V budování teorie množin učinil první kroky pražský rodák Bernard Bolzano (1781—1848), vynikající logik a matematik. O její rozvoj se zasloužil zejména německý matematik Georg Cantor (1845—1918). K mohutnému rozvoji teorie množin došlo však teprve v posledních 40 letech a velmi se o něj zasloužili matematikové sovětští a polští. V teorii množin a v oborech matematiky, které na ní byly nejdříve budovány, dosáhli významných výsledků též matematikové čeští, zejména akademik Eduard Čech (1893—1960) a jeho velmi nadaný žák Bedřich Pospíšil (1912—1944), který se stal obětí nacistické perzekuce.

4. MNOŽINY BODŮ V PŘÍMCE INTERVALY

Názvem číselná množina budeme v této knížce označovat stále jen takové množiny, jejichž prvky jsou reálná čísla. Z těchto číselných množin užíváme v matematice zejména často takových, jimž na číselné ose odpovídají úsečky nebo polopřímky a celá číselná osa. Nazývají se intervaly a v tomto článku pojednáme o nich podle druhů, na které se rozdělují.

Nechť jsou dána dvě čísla a, b, pro něž platí $a \leqq b$. Pak množina všech reálných čísel, pro která platí dvě nerovnosti $x \geqq a$, $x \leqq b$, což zapisujeme stručněji $a \leqq x \leqq b$, se nazývá uzavřený interval. Pro takovou množinu budeme užívat též zápisu $\langle a, b \rangle$. Obrazem této množiny bodů na číselné ose je úsečka s krajními body, které odpovídají číslům a, b. Číselnou množinu, pro kterou platí $a < x < b$, nazýváme otevřený interval a užíváme pro něj zápisu (a, b). Obrazem této množiny na číselné ose jsou vnitřní body úsečky s krajními body a, b. Liší se tedy $\langle a, b \rangle$ a (a, b) tím, že krajní body intervalu v prvním případě k intervalu patří a v druhém případě nepatří. Symboly $\langle a, b)$ a $(a, b\rangle$ znamenají ovšem intervaly (polouzavřené), k nimž jeden krajní bod intervalu patří a druhý nepatří.

Při řešení úloh na operace s intervaly si pomáháme někdy tím, že je znázorňujeme buď na číselné ose s vyznačením krajních bodů úhlovými nebo okrouhlými závorkami nebo při vyznačování většího počtu intervalů pomocnými úsečkami, které rýsujeme rovnoběžně s číselnou osou a blízko ní. Příklady jsou narýsovány v obr. 1a, kde jsou vyznačeny tyto intervaly: $I_1 = \langle -2; 1\rangle$, $I_2 = (2; 4)$, $I_3 = \langle -1; 3)$, $I_4 = (4; 6\rangle$. Na obr. 1c je vyznačen též otevřený interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, který je množinou všech bodů z okolí bodu a takových, že jejich vzdálenost od bodu a je menší než dané kladné číslo ε. Matematikové nazývají takový interval epsilonovým okolím bodu a.

Obr. 1.

V matematice užíváme též intervalů neomezených. Jsou to číselné množiny popsané jednou z nerovností tvaru $x \leqq c$, $x \geqq c$, $x < c$, $x > c$, v nichž c je dané číslo. Jim na číselné ose odpovídají polopřímky s krajním bodem c, který k intervalu patří nebo nepatří podle toho, je-li příslušná množina popsána nerovností neostrou nebo ostrou. Chceme-li pro označování neomezených intervalů užít obdobného způsobu jako při intervalech omezených, užijeme symbolů $-\infty$, $+\infty$, které čteme „minus nekonečno“ a „plus nekonečno“, a které používáme k vyznačení, že interval není zleva nebo zprava omezen. Výše uvedené intervaly označujeme takto: $(-\infty, c\rangle$, $\langle c, +\infty)$, $(-\infty, c)$,

$(c, +\infty)$. Celou číselnou osu označujeme někdy jako interval $(-\infty, +\infty)$. Pomocné značky $-\infty$, $+\infty$ jsme tu zavedli jen k úspornému označování neomezených intervalů. Na obr. 1b jsou vyznačeny tyto neomezené intervaly: $I_5 = (-\infty; -1\rangle$, $I_6 = \langle -1; +\infty)$, $I_7 = (-\infty; 3)$, $I_8 = (0; +\infty)$.

Poněvadž intervaly jsou množiny, můžeme tvořit jejich sjednocení nebo průniky, jak to bylo vysvětleno v předchozím článku. Ukážeme to na několika příkladech s výše uvedenými intervaly.

Příklad 1. Sjednocením intervalů I_1 a I_3 je interval $\langle -2; 3)$, jejich průnikem $\langle -1; 1\rangle$. Sjednocením intervalů I_3 a I_2 je interval $\langle -1; 4)$, jejich průnikem $(2; 3)$. Sjednocením intervalů I_5 a I_7 je interval I_7, jejich průnikem je I_5. Sjednocením intervalů I_7 a I_8 je interval $(-\infty, +\infty)$, jejich průnikem je $(0; 3)$. Sjednocením intervalů I_1 a I_6 je interval $\langle -2; +\infty)$, jejich průnikem je $\langle -1; 1\rangle$.

Příklad 2. Sjednocením intervalů I_1 a I_2 je množina všech prvků z I_1 a I_2, avšak nelze ji zapsat jako jeden interval, jejich průnikem je prázdná množina, neboť tyto intervaly nemají žádný společný prvek. Sjednocením intervalů I_5 a I_6 je interval $(-\infty, +\infty)$, jejich průnikem je množina mající jen jeden prvek, totiž číslo 1. Sjednocením tří intervalů I_1, I_2, I_3 je interval $\langle -2; 4)$, jejich průnikem je $\emptyset$.

V závěru tohoto článku vás upozorníme na některé zajímavé vlastnosti intervalů a jim odpovídajících geometrických útvarů na číselné ose, tj. přímky, polopřímky a úsečky.

1. Geometrický útvar se nazývá konvexní, jestliže pro každé dva jeho libovolně zvolené body X, Y platí, že

všechny body úsečky XY jsou body tohoto útvaru. Je zřejmé, že přímka, polopřímka i úsečka jsou konvexní útvary. Pro konvexní útvary platí věta, že jejich průnik je opět konvexní útvar. Můžete si to ověřit na úsečce, která je průnikem dvou polopřímek.

2. Jestliže k intervalu patří levý krajní bod, existuje v něm číslo nejmenší, a jestliže k němu patří pravý krajní bod, existuje v něm číslo největší. V uzavřeném intervalu existuje nejmenší i největší číslo, v otevřeném intervalu neexistuje ani nejmenší ani největší číslo.

Cvičení

4.1 Určete sjednocení a průniky dvojic neomezených intervalů v těchto případech: a) $(-\infty; 2)$, $(-\infty; 4)$, b) $\langle 1; +\infty)$, $\langle 5; +\infty)$, c) $(-\infty; 3)$, $\langle -3; +\infty)$, d) $(-\infty; 2{,}4\rangle$, $\langle 2{,}4; +\infty)$, e) $(-\infty; 1)$, $\langle 1; +\infty)$.

4.2 Určete sjednocení a průniky dvojic omezených intervalů a) $\langle -2; 1\rangle$, $\langle -1; 3\rangle$, b) $(-2; 1)$, $(-1; 3)$, c) $\langle -2; 1\rangle$, $\langle 1; 2\rangle$, d) $(-2; 1)$, $(1; 2)$, e) $\langle -2; 1)$, $(1; 4)$.

4.3 Určete sjednocení a průniky intervalů v těchto případech: a) $(-\infty; 1)$, $(-1; 3)$, b) $(-2; 1)$, $\langle -1; 1\rangle$, c) $\langle -3; +\infty)$, $(3; 5\rangle$.

4.4 Určete sjednocení a průniky tří daných intervalů: a) $(-\infty; 2)$, $(-2; +\infty)$, $\langle -1; 1\rangle$, b) $\langle -2; 4\rangle$, $\langle 0; 5\rangle$, $\langle 1; 3\rangle$.

5. ZÁKLADNÍ VĚTY O NEROVNOSTECH

●

V matematice užíváme velmi často vztahů, označovaných značkami $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leqq$, $\geqq$. Je užitečné přehledně připomenout vlastnosti těchto vztahů a jejich vzájemnou souvislost. Písmena budou označovat reálná čísla. Vztah rovnosti ($=$) má tyto vlastnosti: Platí vždy $a=a$. Současně platí $a=b$, $b=a$. Z platnosti $a=b$, $b=c$ plyne $a=c$. Vztah nerovnosti ($\neq$) čili různosti má tyto vlastnosti: Nikdy neplatí $a \neq a$. Současně platí $a \neq b$, $b \neq a$. Z platnosti $a \neq b$, $b \neq c$ nelze soudit o vztahu a, c. Ze vztahů $=$ a $\neq$ mezi dvěma čísly platí právě jeden. Jestliže tedy jeden z těchto vztahů popíráme, musíme uznat platnost druhého. Vztah $a \neq b$ souvisí s následujícími vztahy tak, že při jeho platnosti musí platit jeden ze vztahů $a < b$ nebo $b > a$.

Společným názvem nerovnosti (v užším smyslu tohoto názvu) označujeme ty vztahy, které v matematice zapisujeme značkami $<$, $>$, $\leqq$, $\geqq$.. Vztahy zapsané znaky $<$, $>$ se často nazývají nerovnosti ostré, vztahy zapsané znaky $\leqq$, $\geqq$ nerovnosti neostré. Vztahy $a<b$, $b>a$, o nichž říkáme, že jsou navzájem obrácené (konverzní), současně platí nebo současně neplatí. Také nerovnosti $a \leqq b$, $b \geqq a$ jsou navzájem obrácené. Dvojice nerovností $a<b$, $a \geqq b$ a také dvojice $a>b$, $a \leqq b$ mají tu vlastnost, že z každé dvojice platí právě jedna nerovnost. Z popření (negace) platnosti kterékoli z těchto nerovností vyplývá platnost druhé nerovnosti v téže dvojici. Říkáme též, že nerovnosti v těchto dvojicích jsou navzájem protikladné (kontradiktorické).

Nyní uvedeme několik definic:

1. Platí-li $a>0$, říkáme, že číslo a je kladné, platí-li $a<0$, říkáme, že číslo a je záporné. 2. Jsou-li dvě čísla obě kladná nebo obě záporná, říkáme, že jsou souhlasná. Je-li ze dvou čísel jedno kladné a jedno záporné, říkáme, že jsou nesouhlasná. 3. Souhlasné nerovnosti jsou takové, v jejichž zápisu je stejná značka nerovnosti. 4. Zápis soustavy nerovností $a<b$, $b<c$ provádíme stručněji $a<b<c$ a takto zapsanou soustavu nerovností nazýváme postupná nerovnost a čísla a, b, c její členy.

Ostré a neostré nerovnosti mají tyto vlastnosti:

N Nikdy neplatí $a<a$ ani $a>a$.

P Vždy platí $a\leqq a$ a také $a\geqq a$.

R Ze současné platnosti $a\leqq b$, $a\geqq b$ plyne $a = b$.

S_1 Platí-li $a<b$, pak platí též $a\leqq b$.

S_2 Platí-li $a>b$, pak platí též $a\geqq b$.

Nyní uvedeme nejdůležitější věty o nerovnostech mezi reálnými čísly a, b, c.

T_1 Platí právě jeden ze vztahů $a<b$ nebo $a = b$ nebo $a>b$.

T_2 a) Je-li $a<b$, $b<c$, pak platí $a<c$.
b) Je-li $a>b$, $b>c$, pak platí $a>c$.
Platí obdobně též pro nerovnosti neostré.

T_3 Nerovnost mezi čísly zůstane v platnosti, jestliže na obou jejích stranách totéž číslo přičteme.

T_4 Nerovnost mezi čísly zůstane v platnosti, jestliže čísla na obou jejích stranách týmž kladným číslem znásobíme.

T_5 Znásobíme-li čísla na obou stranách nerovnosti týmž číslem záporným, pak platí mezi nimi nerovnost obrácená.

T_6 Součin dvou čísel souhlasných je kladný, nesouhlasných záporný.

T_7 Vždy platí $a^2 \geqq 0$; je-li $a \neq 0$, pak $a^2 > 0$.

T_8 Každé číslo $a \neq 0$ je souhlasné s číslem k němu převráceným.

T_9 Souhlasné nerovnosti je dovoleno sčítat.

Pro nerovnosti mezi kladnými čísly platí ještě tyto další věty:

K_1 Souhlasné nerovnosti mezi kladnými čísly je dovoleno spolu znásobit.

K_2 Nerovnost mezi kladnými čísly je dovoleno umocnit nebo odmocnit.

K_3 Platí-li mezi dvěma kladnými čísly nerovnost, pak mezi čísly k nim převrácenými platí nerovnost obrácená.

K_4 Pro kladné číslo a a pro přirozená čísla $m < n$ platí:
a) je-li $a < 1$, pak $a^m > a^n$;
b) je-li $a = 1$, pak $a^m = a^n = 1$;
c) je-li $a > 1$, pak $a^m < a^n$.

Pro absolutní hodnoty reálných čísel platí:

A_1 $|a| = a$, je-li $a \geqq 0$; $|a| = -a$, je-li $a \leqq 0$.

A_2 $-|a| \leqq a \leqq |a|$.

A_3 $|a| < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ znamená totéž jako $-\varepsilon < a < \varepsilon$.

A_4 $||a| - |b|| \leqq |a + b| \leqq |a| + |b|$.

Všechny věty uvedené v tomto přehledu nejsou na sobě nezávislé. Dá se dokonce ukázat, že užitím vět $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$, $\mathbf{T}_4$ bylo by možno dokázat všechny další věty v tomto přehledu za nimi uvedené. Z toho je zřejmá velká důležitost vět $\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_4$, které byste si měli především dobře zapamatovat. Budete-li však znát i věty za nimi následující, urychlíte tím svou práci při řešení mnohých úloh.

Příklad 1. Na ukázku toho, jak se dokazují věty výše uvedené, dokážeme větu $\mathbf{T}_5$ za předpokladu správnosti vět

T_1 až T_4. Větu T_5 dokážeme nejprve pro nerovnost $a<b$. Záporné číslo, jímž chceme nerovnost znásobit, označíme c; platí tedy $c<0$. Jestliže k číslům na obou stranách této nerovnosti přičteme $-c$ podle věty T_3, dostaneme $0<-c$ čili přechodem k obrácené nerovnosti $-c>0$, což znamená, že číslo $-c$ je číslo kladné. Jestliže tímto číslem znásobíme nerovnost $a<b$, což je dovoleno podle věty T_4, dostaneme $-ca<-cb$. Jestliže na obou stranách této nerovnosti přičteme číslo $ca+cb$, dostaneme $bc<ac$. Přechodem k zápisu s obrácenou nerovností dostaneme $ac>bc$. Tím je dokázána již podstatná část naší poučky T_5. Je nyní potřebí dokázat větu o násobení nerovnosti $a>b$ číslem $c<0$. To je snadné, a to třeba tak, že užijeme obdobného postupu jako v případě předcházejícím. Je však možno také nerovnost $a>b$ přepsat na tvar $b<a$ a provést násobení této nerovnosti kladným číslem $-c>0$ a postupovat dále stejně jako v případě předchozím. Zjistíme přitom, že poslední krok nebude nutné provádět již tak jako v případě předchozím. Tím je již věta dokázána pro obě ostré nerovnosti. Poněvadž však rovnost $a=b$ smíme násobit číslem c, ať je jakékoli, vede nás toto zjištění k tomu, že věta T_5 platí i pro nerovnosti neostré.

Příklad 2. Máme dokázat, že pro kladná čísla a, b platí nerovnost $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2$.

Jestliže danou nerovnost znásobíme číslem $ab>0$, dostaneme $a^2+b^2 \geqq 2ab$. (5.1)
Po převedení čísla $2ab$ na levou stranu a po jednoduché úpravě dostaneme $(a-b)^2 \geqq 0$. Nerovnost platí tehdy a jen tehdy, platí-li $(a-b)^2 \geqq 0$. Tento vztah však platí podle T_7. Důkaz je proveden.

Jestliže z dané nerovnosti dostaneme úpravou druhou nerovnost takovou, že obě nerovnosti současně platí nebo současně neplatí při jakémkoli dosazení určitých čísel do početních výrazů, z nichž se nerovnosti skládají, pak takové nerovnosti nazýváme ekvivalentní a příslušnou úpravu ekvivalentní úpravou. Důkaz platnosti dané nerovnosti můžeme proto provádět tak, že ji ekvivalentními úpravami převedeme na nerovnost, jejíž platnost je již dokázána.

Příklad 3. Máme dokázat, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí nerovnost $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + ac + bc$.

1) Znásobíme-li danou nerovnost číslem 2 a všechny členy převedeme na levou stranu, pak výraz na levé straně upravíme tak, že dostaneme $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqq 0$. Tento vztah však platí, neboť podle $\mathbf{T}_7$ je čtverec každého dvojčlenu na levé straně nezáporný a proto je nezáporný i jejich součet. Poněvadž jsme od původní nerovnosti k nerovnosti $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqq 0$ dospěli ekvivalentními úpravami, je důkaz proveden.

2) Má-li někdo v paměti vztah (5.1), pak ho snad napadne, aby k němu připsal další nerovnosti z něho plynoucí záměnou písmen, tj. $b^2 + c^2 \geqq 2bc$, $c^2 + a^2 \geqq 2ac$; všechny platí pro libovolná reálná čísla. Sečteme-li tyto nerovnosti podle věty $\mathbf{T}_9$, pak po zkrácení číslem 2 dostaneme hned nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

Příklad 4. Pro libovolná reálná čísla a, b, c platí nerovnost $a + b \leqq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$. Dokažte.

Podle znění dané úlohy může být na levé straně dané nerovnosti i číslo záporné a danou nerovnost nelze umocnit, neboť umocňování je podle věty $\mathbf{K}_2$ ekvivalentní úpravou jen pro nerovnosti mezi kladnými čísly. Rozpomeneme-li se však na větu $\mathbf{A}_2$, pak podle nerovnosti, kterou představuje druhý a třetí člen postupné nerovnosti $\mathbf{A}_2$, můžeme psát $a + b \leqq |a + b|$. Kdybychom k ní připsali další nerovnost $|a + b| \leqq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$, pak by z této dvojice nerovností plynula podle věty $\mathbf{T}_2$ nerovnost, kterou máme dokázat, ovšem za předpokladu, že nerovnost $|a + b| \leqq \leqq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ platí. Důkaz její platnosti je však nyní snadný, když ji jako nerovnost mezi nezápornými čísly můžeme umocnit a dalšími ekvivalentními úpravami uvést na tvar $(a - b)^2 \geqq 0$. Proveďte podrobně sami.

Cvičení

5.1 Jsou-li a, b libovolná kladná čísla taková, že $a > b$, platí tato tvrzení: a) zlomek $\frac{a}{b}$ se zmenší, když jeho čitatele i jmenovatele zvětšíme o stejné kladné číslo; b) zlomek $\frac{b}{a}$ se zvětší, když jeho čitatele i jmenovatele zvětšíme o stejné kladné číslo. Dokažte.

5.2 Do třídy, do níž chodí chlapci i děvčata, přistoupil stejný počet chlapců i děvčat. Co lze usoudit o vztahu mezi původním počtem chlapců i děvčat, ví-li se, že po přistoupení nových žáků a žákyň původní počet % chlapců a) se zvýšil, b) se nezměnil, c) klesl.

5.3 Dokažte, že geometrický průměr dvou nezáporných čísel se nejvýš rovná jejich aritmetickému průměru. Kdy nastane rovnost?

5.4 Dokažte, že pro kladná čísla a, b platí:

a) $a + \frac{1}{a} \geqq 2$,

b) $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqq 4$.

5.5 Dokažte, že pro reálná čísla a taková, že $|a| < 1$, platí:

a) $\dfrac{1}{1-a} \geqq 1 + a$,

b) $\dfrac{1}{1+a} \geqq 1 - a$.

Kdy nastane rovnost?

5.6 Jsou-li a, b velikosti odvěsen a c velikost přepony pravoúhlého trojúhelníka, pak o nich platí: a) $a + b \leqq c\sqrt{2}$, b) $c > \frac{2}{3}(a + b)$. Dokažte tato tvrzení.

5.7 Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a platí nerovnost

$$\frac{a^2}{a^4 + 1} \leqq \frac{1}{2}.$$

5.8 Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnosti

a) $(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geqq 9$,

b) $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \geqq \dfrac{9}{2(a+b+c)}$.

Rozhodněte též, kdy platí rovnost.

6. ALGEBRAICKÉ NEROVNOSTI O JEDNÉ NEZNÁMÉ

●

Máte-li za úkol nalézt ta čísla, která vyhovují nerovnosti $2x + 3 > 0$, pak postupujete tak, že nejprve k číslům na obou stranách této nerovnosti přičtete číslo -3 a dostanete nerovnost $2x > -3$; říkáte též, že jste převedli sčítance 3 na druhou stranu nerovnosti s opačným znaménkem. Když násobíte obě strany kladným číslem $\frac{1}{2}$, dostanete nerovnost $x > -1{,}5$ a říkáte, že jste našli řešení dané nerovnosti. Na tomto jednoduchém příkladě si uvědomíte podstatu i postup při řešení nerovností. Od nerovnosti dané jste došli k nerovnosti poslední ekvivalentními úpravami podle vět $\mathbf{T}_3$, $\mathbf{T}_4$. To znamená, že všechna taková čísla x, která vyhovují nerovnosti první, vyhovují i nerovnosti poslední. Kdybychom však měli zjistit, zda nějaké číslo, např. -1, vyhovuje podmínce dané nerovností $2x + 3 > 0$, pak bychom o této otázce rozhodli prostým dosazením tohoto čísla do dané nerovnosti. Nebudeme v tom případě provádět ekvivalentní úpravy a pak zjišťovat, že číslo -1 vyhovuje nerovnosti $x > -1{,}5$. Ekvivalentní úpravy provádíme zpravidla tehdy, když chceme mít přehled po množině všech čísel, která dané nerovnosti vyhovují. V našem případě nám ekvivalentní úpravy pomohly ke zjištění, že dané nerovnosti vyhovují všechna reálná čísla otevřeného intervalu $(-1{,}5; +\infty)$ a žádná jiná. Při této příležitosti vás upozorňujeme na jedno úskalí při chápání našich výkladů. Názvem řešení označujeme nejen všechna čísla z množiny těch reálných čísel, která vyhovují dané nerovnosti, ale i postup, jímž z dané nerovnosti odvozujeme další ekvivalentní nerovnosti, z nichž poslední má být taková, aby nám poskytovala jasný pohled na tu číselnou množinu, jejíž prvky dané nerovnosti vyhovují.

Pro řešení nerovností mají základní význam ty věty, podle nichž provádíme jejich ekvivalentní úpravy. Jsou to především věty $\mathbf{T}_3$, $\mathbf{T}_4$, $\mathbf{T}_5$, které mají obecnou platnost pro všechny nerovnosti, a věta $\mathbf{K}_2$, která platí pro nerovnosti mezi kladnými čísly. V tomto článku vám ukážeme, že lze s výhodou používat k řešení nerovností i jiných vět z přehledu uvedeného v předcházejícím článku. Poněvadž řešení lineárních nerovností tvaru $ax + b < 0$, kde $a \neq 0$, b jsou daná čísla, x neznámá, případně s jiným znakem nerovnosti mezi lineárním dvojčlenem a číslem 0, je vám dobře známo, omezíme se tu jen na několik poznámek o soustavách lineárních nerovností o jedné neznámé a takových nelineárních nerovností, jejichž řešení se snadno převede na řešení nerovností lineárních.

Často se stává, že je dána soustava dvou nebo několika nerovností, které je třeba rozřešit a pak vybrat taková řešení, která jsou vázána jistými podmínkami mezi danými nerovnostmi. Pro jednoduchost předpokládejme, že je dána soustava dvou nerovností s neznámou x a že je dovedeme rozřešit. Pak můžeme dávat tyto otázky:

1. Která čísla x vyhovují oběma daným nerovnostem?
2. Která čísla x vyhovují první nerovnosti a nevyhovují druhé?
3. Která čísla x nevyhovují nerovnosti první a vyhovují přitom nerovnosti druhé?
4. Která čísla x vyhovují aspoň jedné z daných nerovností?
5. Která čísla x nevyhovují žádné z daných nerovností?

6. Která čísla x vyhovují nejvýš jedné z daných nerovností?
7. Která čísla x vyhovují právě jedné z daných nerovností?

Nejčastěji nás ovšem zajímá otázka, která čísla x vyhovují oběma daným nerovnostem. Odpověď najdeme, když dovedeme najít průnik množin (intervalů), z nichž každá je množinou všech řešení jedné z daných nerovností. Řešení takových úloh je příležitostí k dobrému výcviku v logickém myšlení. Přitom jistě dáte pozor na význam slov aspoň jeden, nejvýš jeden a právě jeden, což má velký význam. Přitom se upevní váš poznatek, že popřít platnost některé z nerovností $x \geqq a$, $y \leqq b$, $z > c$, $u < d$ znamená totéž jako uznat platnost nerovnosti protikladné jí odpovídající podle předcházejícího pořadí $x < a$, $y > b$, $z \leqq c$, $u \geqq d$.

Soustava nerovností bývá někdy dána tak, že je stručně zapsána postupnou nerovností. Nejčastěji to bývá trojčlenná postupná nerovnost tvaru $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ (resp. s ostrými nerovnostmi nebo s některou nerovností ostrou), kde jsme symboly $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ naznačili, že jde o početní výrazy, v nichž se vyskytuje písmeno x ve významu neznámého čísla. V tom případě můžeme přepsat tento zápis na zápis dvou nerovností $f(x) \leqq g(x)$, $g(x) \leqq h(x)$. Snadno lze dokázat, že lze provádět ekvivalentní úpravy postupných nerovností tím, že ke všem členům postupné nerovnosti stejné číslo přičteme nebo každý člen stejným kladným číslem znásobíme. Jestliže každý člen znásobíme stejným číslem záporným, musíme všechny znaky nerovnosti po znásobení nahradit znaky nerovností obrácených. Těchto vět využijeme při řešení některých nerovností.

Všechny mocniny z^{2k-1}, kde z je reálné číslo a k číslo přirozené, tj. tedy mocniny s lichým přirozeným mocnitelem, nabývají všechny současně hodnot kladných pro $z >$

> 0, hodnoty 0 pro $z = 0$ a hodnot záporných pro $z < 0$. Jsou proto všechny nerovnosti tvaru $z^{2k-1} < 0$ navzájem ekvivalentní, a tedy i ekvivalentní s nerovností $z < 0$. Vyloučíme-li případ $z = 0$, jsou všechny mocniny s lichým záporným exponentem též čísly souhlasnými, neboť jsou převrácenými čísly k mocninám s lichým kladným mocnitelem. Při vyloučení $z = 0$ jsou také všechny mocniny z^{2k} a z^{-2k} čísly souhlasnými, a proto nerovnosti $z^{2k} > 0$, $z^{-2k} > 0$ jsou všechny ekvivalentní, tedy ekvivalentní s nerovností $z^2 > 0$. Všechna tato tvrzení platí obdobně i pro nerovnosti s jinými znaky nerovností. Dosadíme-li $z = ax + b$ nebo $z = x - x_1$ do nerovností výše uvedených, ukáže se, že řešení nerovnosti $(ax + b)^n < 0$, resp. $(x - x_1)^n < 0$ lze převést na řešení jednoduchých lineárních nebo kvadratických nerovností, což ukážeme na příkladech.

Příklad 1. Řešme nerovnost $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 > 0$. Tuto algebraickou nerovnost třetího stupně snadno rozřešíme, když ji převedeme na tvar

$$(x - 1)^3 > 0,$$

která je ekvivalentní s nerovností $x - 1 > 0$. Hledané řešení je

$$x > 1.$$

Příklad 2. Řešme nerovnost

$$\frac{5}{x^2 - 6x + 9} \leq 0.$$

Poněvadž $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, nemá zlomek na levé straně smysl pro $x = 3$. Nerovnost krátíme číslem 5 a pak přejdeme k nerovnosti $(x - 3)^2 \leq 0$. Pro $x \neq 3$ jsou obě nerovnosti ekvivalentní. Avšak pro $x \neq 3$ nemá poslední nerovnost řešení. Tedy původní nerovnost nemá řešení.

Příklad 3. Řešte soustavu nerovností

$$-1 < \frac{2-5x}{3} \leqq 2.$$

Všechny členy této postupné nerovnosti znásobíme kladným číslem 3 a pak od nich odečteme číslo 2. Tak dostaneme postupnou nerovnost $-5 < -5x \leqq 4$. Všechny její členy znásobíme záporným číslem $-\frac{1}{5}$, přičemž znaménka mezi jednotlivými členy obrátíme a dostaneme tak nerovnost $1 > x \geqq -\frac{4}{5}$, kterou můžeme psát též ve tvaru $-\frac{4}{5} \leqq x < 1$. Každá z těchto postupných nerovností udává přehledně, která čísla x dané soustavy nerovností vyhovují. Jsou to všechna čísla x z intervalu $\langle -\frac{4}{5}; 1)$.

Příklad 4. Hledejme na číselné ose všechny body x, které mají od bodu a vzdálenost menší než $\varepsilon > 0$ (viz obr. 1c).

Matematický zápis této úlohy je $|x - a| < \varepsilon$. Podle věty $\mathbf{A}_3$ ji můžeme napsat ve tvaru $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$. Jestliže ke všem členům této postupné nerovnosti přičteme číslo a, dostaneme již řešení naší úlohy ve tvaru $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Hledané body x leží zřejmě v otevřeném intervalu $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.

Poznámka: Při studiu mat. analýzy se setkáte s nerovnostmi v tomto příkladě uvedenými tak často, že je užitečné, když se vám při pohledu na ně vybaví ihned představa okolí bodu a. Znamenají tedy např. $|x - 7| < 2$ otevřený interval $(5; 9)$ nebo $|x + 3| < 0,2$ otevřený interval $(-3,2; -2,8)$.

Příklad 5. Jak musíme volit číslo m, aby soustava rovnic $3x + 2y = 15$, $x + 2y = m$ měla řešení x, y, která jsou a) nezáporná, b) kladná. Která řešení soustavy mají tu vlastnost, že číslo m je při uvedených podmínkách 1) co nejmenší, 2) co největší?

Řešíme-li tuto soustavu rovnic, dostaneme pro neznámé

$$x = \frac{15 - m}{2}, \; y = \frac{3m - 15}{4}.$$

a) Mají-li být čísla x, y nezáporná, musí platit nerovnosti $\frac{15 - m}{2} \geqq 0$, $\frac{3m - 15}{4} \geqq 0$, které mají řešení $m \leqq 15$, $m \geqq 5$. To znamená, že číslo m musí být prvkem uzavřeného intervalu $\langle 5; 15 \rangle$.

b) Mají-li být čísla x, y kladná, musí platit ostré nerovnosti $\frac{15 - m}{2} > 0$, $\frac{3m - 15}{4} > 0$. Jejich řešením dostaneme, že číslo m musí být prvkem otevřeného intervalu $(5; 15)$.

1) Při řešení v oboru nezáporných čísel můžeme vybrat nejmenší hodnotu $m = 5$ z intervalu $\langle 5; 15 \rangle$. Této hodnotě m odpovídá řešení $x = 5$, $y = 0$. Při řešení v oboru kladných čísel nemůžeme z intervalu $(5; 15)$ vybrat nejmenší hodnotu. I když zvolíme pro m číslo hodně blízké číslu 5, jako např. 5 000 001, pak v otevřeném intervalu $(5; 15)$ najdeme snadno další číslo, které je menší než 5 000 001. Nejmenší číslo v tomto otevřeném intervalu neexistuje.

2) Při řešení v oboru nezáporných čísel můžeme vybrat největší $m = 15$, jemuž odpovídá řešení $x = 0$, $y = 7{,}5$. Při řešení v oboru kladných čísel neexistuje žádná dvojice čísel x, y, pro něž m by bylo největší.

Příklad 6. Řešme nerovnost $\sqrt{x^2 + 5} < x - 3$.

Nejprve zjistíme, že početní výrazy na levé i na pravé straně nerovnosti mají smysl pro libovolná reálná čísla x. Poněvadž druhá odmocnina z nezáporného čísla je definována jako nezáporné číslo, musí platit $x - 3 \geqq 0$ čili $x \geqq 3$. S touto podmínkou můžeme nerovnost umocnit a pak řešením lineární nerovnosti dostaneme $x < \frac{2}{3}$. Tento neomezený interval nemá však žádný společný prvek s neomezeným intervalem $x \geqq 3$. Daná nerovnost neplatí tedy pro žádné reálné číslo x.

Cvičení

6.1 Národní podnik musí vynakládat m Kčs na jednu výrobní jednotku ke krytí nákladů závislých na velikosti výroby (suroviny, polotovary, mzdy apod.) a mimo to s Kčs ročně na krytí stálých výdajů nezávislých na velikosti výroby. Kolik výrobků musí ročně produkovat, má-li celkový zisk podniku být z Kčs při prodejní ceně c Kčs na jednotku produkce. Proveďte diskusi řešení.

6.2 Osazenstvo dolu má vytěžit a tun uhlí denně a těží denně b tun. Tím plní plán na p procent. Když se plánovaná denní těžba i skutečná denní těžba zvýšily o d tun, změnil se tím procentový ukazatel plnění plánu na p' procent. Porovnejte rozdílem procentové ukazatele p, p' a proveďte diskusi řešení.

6.3 Řešte nerovnosti:

a) $x^2 + 10x + 25 > 0$, b) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^2 \leqq 0$,

c) $(4x^2 - 4x + 1)^{-3} > 0$, d) $(4x + 3)^{-5} \leqq 0$.

6.4 Která čísla x vyhovují všem nerovnostem dané soustavy:

a) $2x + 1 < 0$, $\quad 2x + 5 > 0$, $\quad 0 < x + 2 < 3$,
b) $5x + 3 > 0$, $\quad |x| < 0{,}5$, $\quad |x - 1| < 0{,}6$,
c) $3 < 2x + 5 < 7$, $\quad 2x - 1 \leqq 4x + 2 \leqq 2x + 1$,
d) $\sqrt{2x - 1} < \sqrt{4x - 1}$, $\quad 0 < 3 - x < 0{,}5$.

6.5 Pro která čísla m má soustava rovnic $x - 2y + 4 = 0$, $4x + 3y + m = 0$ taková řešení, že x, y jsou čísla nezáporná. Zvolte pak největší možnou hodnotu čísla m a určete k němu příslušné řešení dané soustavy rovnic. Přitom si všimněte, že neexistuje žádné řešení soustavy, při němž číslo m by bylo nejmenší.

Nyní se naučíme řešit algebraické nerovnosti tvaru

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) \geqq 0 \qquad (6.1)$$

v nichž levá strana je součinem lineárních činitelů tvaru $x - x_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Přitom se má rozhodnout, zda a pro která x platí mezi tímto součinem a číslem 0 ostrá nebo neostrá nerovnost. Při dalších úvahách budeme nejprve předpokládat, že čísla x_i jsou navzájem různá a že jejich označení bylo zvoleno tak, aby platilo $x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_{n-1} < x_n$. Součin lineárních činitelů nerovnosti (6.1) bude rovný nule právě jen pro tato čísla x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n. Jejich součin bude různý od nuly jen ve vnitřních bodech intervalů, jejichž dělícími body na číselné ose jsou čísla x_i. Znaménko součinu je třeba určit jen pro body zmíněných intervalů, což vás pro větší názornost i stručnost naučíme na vhodně zvolených příkladech. Přitom budeme předpokládat, že umíte rozložit kvadratický trojčlen v součin reálných lineárních činitelů, což je vždy možné, když diskriminant kvadratického trojčlenu není záporný.

Příklad 7. Řešme nerovnost $x(x^2 - 4)(x^2 - 4x - 5) \geqq 0$.
Po rozkladu $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$, $x^2 - 4x -$

$-5 = (x+1)(x-5)$, po dosazení do dané nerovnosti a po uspořádání lineárních činitelů dostaneme

$$(x+2)(x+1)(x-0)(x-2)(x-5) \geqq 0. \qquad (6.2)$$

Platí tedy rovnost pro body $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 5$. Vyznačte si tyto body na náčrtu číselné osy, abyste mohli dobře sledovat další výklad. Pět bodů $-2, -1, 0, 2, 5$ rozděluje číselnou osu na šest částí a naším úkolem nyní je zjistit znaménko součinu lineárních činitelů z nerovnosti (6.2) pro čísla x v otevřených intervalech $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 2)$, $(2; 5)$, $(5; +\infty)$. Předpokládejme nejprve, že jsme zvolili číslo x z posledního intervalu, takže platí $x+2 > 0$, $x+1 > 0$, $x-0 > 0$, $x-2 > 0$, $x-5 > 0$. Součin všech pěti činitelů bude pro čísla x z posledního neomezeného intervalu kladný, a proto tato x patří k řešení dané nerovnosti. Zvolme nyní x z předposledního intervalu $(2; 5)$. Pro body z tohoto intervalu platí $x+2 > 0$, $x+1 > 0$, $x > 0$, $x-2 > 0$, $x-5 < 0$. Součin čtyř kladných činitelů s jedním záporným bude záporný, a proto body intervalu $(2; 5)$ nebudou dané nerovnosti vyhovovat. Zvolíme-li nyní x z intervalu $(0; 2)$, budou tři činitelé kladní, dva záporní. Součin všech pěti činitelů bude kladný a všechny body intervalu $(0; 2)$ budou patřit k řešení dané nerovnosti. Tak postupujeme dále od jednoho intervalu k druhému v témž směru, až dojdeme konečně do prvního neomezeného intervalu $(-\infty; -2)$. Při tomto zkoumání součinu lineárních činitelů v nerovnosti (6.2) se střídaly otevřené intervaly, jejichž prvky patřily k řešení, s intervaly, jejichž prvky k řešení nepatřily. Shrneme-li výsledky zkoumání dané nerovnosti v otevřených intervalech se zjištěním, že v krajních bodech intervalů platí v dané nerovnosti rovnost, dostaneme tento výsledek: Nerovnost (6.2) platí pro všechny body z intervalů $\langle -2; -1 \rangle$, $\langle 0; 2 \rangle$, $\langle 5; +\infty)$.

Poznámka: Vyšetřování dané nerovnosti jsme mohli provádět při libovolném pořadí intervalů. Výhodné je ovšem, když je probíráme v uspořádaném pořadí odleva doprava nebo odprava doleva.

Příklad 8. Řešme algebraickou nerovnost 6. stupně
$$(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x - 5) \leqq 0.$$
První z kvadratických trojčlenů má záporný diskriminant a nelze jej rozložit na součin reálných lineárních činitelů. Poněvadž pro něj platí $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 > 0$ pro libovolné x, můžeme kladným číslem, které tento trojčlen představuje, nerovnost zkrátit a po rozkladu zbývajících kvadratických trojčlenů dostaneme ekvivalentní nerovnost
$$(x - 2)^2 (x + 1)(x - 5) \leqq 0.$$
Rovnost bude platit v této nerovnosti pro čísla $x = 2$, $x = -1$ a pro $x = 5$. Čtverec prvního dvojčlenu má mimo výjimečný bod $x = 2$ stále kladnou hodnotu, takže tímto čtvercem můžeme nerovnost krátit a hledat nyní jen řešení ostré nerovnosti (kvadratické)
$$(x + 1)(x - 5) < 0,$$
kterou vyšetříme podle vzoru z předcházející úlohy pro hodnoty x ve třech otevřených intervalech $(-\infty; -1)$, $(-1; 5)$, $(5; +\infty)$. Jen v prostředním z těchto intervalů jsou lineární činitelé čísly nesouhlasnými, jejichž součin je záporný. Čísla x z tohoto intervalu dané nerovnosti vyhovují. Shrneme-li výsledky našeho zkoumání, dostaneme: Daná nerovnost je splněna pro číslo $x = 2$ a pro čísla z intervalu $\langle -1; 5\rangle$. Tedy nerovnost je splněna pro čísla z intervalu $\langle -1; 5\rangle$.

Příklad 9. Řešme nerovnost
$$\frac{x-2}{x-3} - \frac{5}{x-1} \leqq 1.$$

Výrazy na levé straně nerovnosti mají smysl, jen když $x \neq 1$, $x \neq 3$. Převedeme-li všechny výrazy na zlomky o společném jmenovateli, dostaneme po sečtení a po zkrácení nerovnost

$$\frac{x - 3{,}5}{(x - 1)(x - 3)} \geqq 0.$$

Výraz na levé straně poslední nerovnosti nabývá nulové hodnoty jen pro $x = 3{,}5$. Poněvadž případ, kdy nastává v této nerovnosti rovnost, jsme již vyšetřili, můžeme vyšetřovat již jen ostrou nerovnost

$$(x - 1)^{-1}(x - 3)^{-1}(x - 3{,}5) > 0,$$

která je však (za předpokladu $x \neq 1$, $x \neq 3$) ekvivalentní s nerovností

$$(x - 1)(x - 3)(x - 3{,}5) < 0.$$

Tato nerovnost je splněna pro x z intervalů $(1; 3)$, $(3{,}5; +\infty)$. Shrnutí. Daná nerovnost je splněna pro x z intervalů $(1; 3)$, $\langle 3{,}5; +\infty)$.

Příklad 10. Řešme nerovnost
$(x + 2)^3 (x + 1)^{-1} (x - 1)^{-2} (x - 3)^5 (x - 5)^4 \leqq 0$.
Výraz na levé straně má smysl, jen když $x \neq -1$, $x \neq 1$. Rovnost nastane v dané nerovnosti pro $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$. Po vyšetření případů, kdy nastává rovnost, můžeme vyšetřovat ostrou nerovnost, kterou z této poslední nerovnosti dostaneme vynecháním znaménka $=$. Přitom vynecháme lineární dvojčleny se sudými exponenty, neboť představují kladná čísla v intervalech, o kterých budeme uvažovat, a všechny dvojčleny s lichými exponenty nahradíme dvojčleny s exponentem 1, takže dostaneme nerovnost

$$(x + 2)(x + 1)(x - 3) < 0.$$

Tato nerovnost má řešení, a to čísla x z intervalů $(-\infty; -2)$, $(-1; 3)$.

Shrnutí. Daná nerovnost je splněna pro číslo 5 a pro čísla z intervalů $(-\infty; -2\rangle$, $(-1; 3\rangle$.

Nerovnosti, které se dají převést na tvar $k_1|x - x_1| + k_2|x - x_2| + k_3|x - x_3| + \ldots + k_n|x - x_n| \leqq k_0x + q$ řešíme tak, že je vyšetřujeme v intervalech, jejichž krajními body jsou čísla $x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_n$, přesněji v intervalech $(-\infty; x_1\rangle$, $\langle x_1; x_2\rangle$, $\langle x_2; x_3\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}; x_n\rangle$, $\langle x_n; +\infty)$.

Příklad 11. Řešme nerovnost $|x| - |x-2| + |x-5| \leqq 4$. Dělící body $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$ jsou krajními body intervalů $(-\infty; 0\rangle$, $\langle 0; 2\rangle$, $\langle 2; 5\rangle$, $\langle 5; +\infty)$, v nichž můžeme danou nerovnost vyšetřovat v libovolně zvoleném pořadí intervalů. Zvolme je např. odprava doleva.

a) Zkoumání v intervalu $\langle 5; +\infty)$. Když $x \geqq 5$, pak platí $|x| = x$, $|x-2| = x-2$, $|x-5| = x-5$. Po dosazení do dané nerovnosti dostaneme

$$x - (x-2) - (x-5) \leqq 4.$$

Po úpravě dostaneme $x \leqq 7$. Ve zkoumaném intervalu platí tedy daná nerovnost, jestliže $5 \leqq x \leqq 7$.

b) Zkoumání v intervalu $\langle 2; 5\rangle$. V tomto intervalu je již $x - 5 \leqq 0$, zatímco ostatní výrazy, a to x, $x - 2$ zůstávají ještě nezáporné. Proto platí v tomto intervalu $|x| = x$, $|x-2| = x-2$, $|x-5| = -(x-5)$. Po dosazení do dané nerovnosti a po krátké úpravě dostaneme $x \geqq 3$. Ve zkoumaném intervalu má tedy daná nerovnost řešení $3 \leqq x \leqq 5$.

c) Zkoumání v intervalu $\langle 0; 2\rangle$. V tomto intervalu platí $|x| = x$, $|x-2| = -(x-2)$, $|x-5| = -(x-5)$. Po dosazení a jednoduché úpravě dostaneme $x \leqq +1$. V tomto intervalu má tedy daná nerovnost řešení $0 \leqq x \leqq 1$.

d) Zkoumání v intervalu $(-\infty; 0\rangle$. V tomto intervalu platí $|x| = -x$, $|x-2| = -(x-2)$, $|x-5| = -(x-5)$. Po dosazení a úpravě dostaneme $x \geqq -1$. V tomto intervalu má tedy daná nerovnost řešení $-1 \leqq x \leqq 0$.

Shrnutí. Daná nerovnost platí pro všechna x z intervalů $\langle -1; 1\rangle$, $\langle 3; 7\rangle$.

Příklad 12. Řešte nerovnost $|4(x^2 + 2x)| < 3$ a rozhodněte pak, zda existuje nějaké okolí bodu 0, jehož prvky vyhovují dané nerovnosti.

Přepíšete-li danou nerovnost podle věty $\mathbf{A}_3$ na tvar $-3 < 4(x^2 + 2x) < 3$, zjistíte, že je třeba nalézt všechna čísla x, která vyhovují současně dvěma kvadratickým nerovnostem:

1. $4x^2 + 8x + 3 > 0$, 2. $4x^2 + 8x - 3 < 0$.

Násobíte-li tyto nerovnosti kladným číslem $\frac{1}{4}$ a provedete-li rozklad kvadratických trojčlenů na součin lineárních kořenových činitelů, dostanete místo nich ekvivalentní nerovnosti:

1. $\left(x + \frac{3}{2}\right)(x + 1) > 0$,

2. $\left(x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right)\left(x + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{7}\right) < 0$.

Ostré kvadratické nerovnosti tohoto typu, v nichž levou stranu tvoří součin dvou lineárních činitelů $(x - x_1)(x - x_2)$, můžete podle vzoru předcházejících úvah tohoto článku rozřešit zkoumáním znamení hodnot tohoto součinu v intervalech $-(\infty; x_1)$, (x_1, x_2), $(x_3, +\infty)$. Snadno se ukáže, že kvadratický trojčlen $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ je kladný v prvním i třetím z těchto intervalů a záporný v druhém z nich. Je účelné pamatovat si tento výsledek pro rychlé řešení kvadratických nerovností; k zapamatování vám bude jistě napomáhat poznatek, že graf funkce $y = x^2 + px + q$, která v bodech x_1, x_2 nabývá nulových hodnot, leží v neomezeném prvním i třetím intervalu nad osou x a v druhém intervalu (x_1, x_2) pod osou x (načrtněte si příslušný graf, jímž jest parabola protínající osu x v bodech x_1, x_2). Tak zjistíte, že výše uvedeným nerovnostem vyhovují čísla x v intervalech

$$1.\quad \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right), \qquad 2.\quad \left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{7}; -1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right).$$

Dále zjistíte, že oběma nerovnostem vyhovují čísla x z intervalů

$$\left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{7}; -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; -1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right).$$

Na dodatkovou otázku dané úlohy můžeme nyní odpovědět, že okolí bodu 0, vyhovující dané podmínce, musí být částí druhého z těchto intervalů, který po jednoduchém výpočtu můžeme zapsat $(-0{,}5; 0{,}3)$. Jeho částmi jsou např. intervaly $(-0{,}3; +0{,}3)$ nebo $(-0{,}25; +0{,}25)$ apod.

Poznámka: Při studiu matematické analýzy se setkáte s řešením úloh typu, který byl v tomto příkladě naznačen. Zpravidla však stačí nalézt odpověď na otázku toho druhu, která byla uvedena jako dodatková otázka v naší úloze. Ukážeme, že řešení lze pak nalézt rychle užitím vět $\mathbf{K}_4$ a $\mathbf{A}_4$. Budeme-li předpokládat pro řešení naší úlohy $|x| < 1$, pak platí $|x^2| \leqq |x|$. Za tohoto předpokladu lze však danou nerovnost upravit tak, že existence řešení se snadno prokáže. Podle věty $\mathbf{A}_4$ můžete psát

$$|4x^2 + 8x| \leqq |4x^2| + |8x| = 4|x^2| + 8|x| \leqq 4|x| + 8|x| = 12|x| < 3.$$

Odtud plyne: je-li $|x| < \frac{1}{4}$, tj. $-0{,}25 <$

$< x < 0{,}25$, potom je původní nerovnost splněna. Tento příklad ukazuje též užitečnost věty $\mathbf{A}_4$ která se často nazývá trojúhelníková nerovnost.

Cvičení

6.6 Řešte soustavy nerovností:

a) $x^2 - x - 2 \leqq 0, \quad 4x^2 - 12x + 5 \leqq 0;$
b) $x^2 + x - 2 > 0, \quad x^2 - 2x - 3 < 0;$
c) $(x^2 - 2x + 5)(x^2 - 4) < 0, \ (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2x + 1) > 0;$
d) $|x^2 - 3x| < 2;$
e) $|6x^2 - 5x| < 6.$

6.7 Řešte nerovnosti:

a) $\dfrac{2x - 5}{3 - 2x} \geqq 2;$ b) $\dfrac{x - 2}{2x + 3} \leqq 0;$

c) $\dfrac{x + 3}{x - 3} + \dfrac{x + 4}{x - 4} \geqq 2;$

d) $\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - x + 2} < 0;$

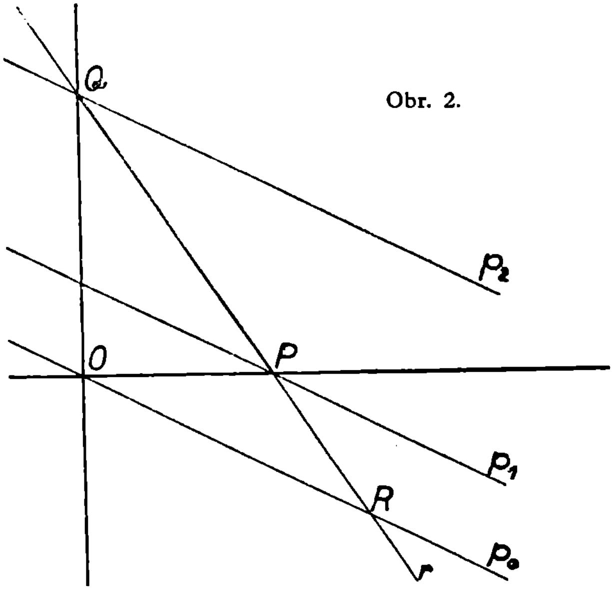
e) $\dfrac{2}{3} \leqq \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leqq 2;$ f) $\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right| \geqq 1.$

7. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC A NEROVNOSTÍ O DVOU NEZNÁMÝCH

V 9. třídě ZDŠ jste řešili soustavy dvou lineárních rovnic o 2 neznámých, přičemž grafické znázornění rovnic vám usnadnilo jejich řešení. Vaše vědomosti v tomto oboru chceme nyní osvěžit a trochu rozšířit, a to zejména tím, že budeme uvažovat též o soustavách lineárních rovnic i nerovností o 2 neznámých. Nerovnostem o dvou neznámých odpovídají při geometrickém znázornění poloroviny, jak jste se o tom poučili již v čl. 2, který si před studiem tohoto článku znovu přečtěte. Pro omezený rozsah této knížky seznámíme vás hlavně s těmi novými poznatky, které budete potřebovat ke studiu dalšího článku. Budeme vás o nich poučovat hlavně na příkladech s určitými čísly. Pro úsporu místa nejsou v této knížce otištěny takové obrázky, které si sami snadno narýsujete podle znění textu.

Jedna lineární rovnice o 2 neznámých, např. $3x + 2y - 15 = 0$ má nekonečný počet řešení. Každému z nich odpovídá bod $[x, y]$ přímky, která je grafickým znázorněním příslušné rovnice. V případě námi zvoleném je to přímka $r \equiv PQ$ v obr. 2. Body $P \equiv [5;0], G \equiv [0; \frac{7}{2}]$ najdete snadno jako průsečníky dané přímky se souřadnicovými osami.

Rýsujete-li obraz přímky na čtverečkovaném papíře, pak někdy velmi snadno postřehnete, že přímka prochází několika mřížovými body roviny, tj. takovými body, jejichž obě souřadnice jsou čísla celá. Souřadnice těchto bodů pak představují řešení dané rovnice v oboru celých čísel. Tak např. u přímky r snadno najdete mřížové body [— 1; 9], [1; 6], [3; 3], [5; 0], [7; —3] atd. Všimnete-li si dobře zápisu těchto po sobě jdoucích mřížových bodů na přímce, pak snadno objevíte, že při přechodu od jednoho bodu k druhému za ním následujícímu se první souřadnice zvětší o 2,



Obr. 2.

druhá se zmenší o 3. Zvolíme-li některý bod z této množiny za základní, pak můžeme všechna celočíselná řešení dané rovnice zapsat jednoduchým způsobem. Zvolíme-li např. bod [1;6] za základní, pak pro všechny mřížové body roviny na přímce r platí: $x = 1 + 2t$, $y = 6 - 3t$, kde t je libovolné celé číslo. Snadno lze dokázat, že na každé přímce souřadnicové roviny leží buď nekonečně mnoho mřížových bodů nebo jen jeden nebo žádný. Řešení rovnic v oboru celých čísel patří k velmi starým oborům aritmetiky. Jejich řešením se zabýval mimo jiné též řecký matematik Diofantos (žil koncem 3. stol. n. l.). Proto se někdy též užívá názvu diofantické rovnice. Poznámky tohoto odstavce nesměřovaly k tomu, abyste se naučili řešit diofantické rovnice, nýbrž jen k tomu, abyste něco věděli o existenci těchto problémů, které patří do číselné teorie.

Je-li dána soustava dvou lineárních rovnic o 2 neznámých

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \qquad (7.1)$$

v nichž koeficienty při obou neznámých nejsou současně rovné nule, pak při řešení této soustavy mohou nastat tyto případy:

a) Je $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$ a platí $a_2 = ra_1$, $b_2 = rb_1$, $c_2 = rc_1$, kde r je reálné číslo různé od nuly. Po dosazení do druhé rovnice soustavy (7.1) a po vytknutí r dostaneme $r(a_1x + b_1y + c_1) = 0$, což ukazuje, že tato rovnice je ekvivalentní s první rovnicí soustavy. Soustava rovnic, která je v tomto případě znázorněna dvěma splývajícími přímkami, má nekonečný počet řešení.

b) Je $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$, avšak $a_1 : c_1 \neq a_2 : c_2$, resp. též $b_1 : c_1 \neq b_2 : c_2$, pak jde o rovnice tzv. sporné, které nemají společné řešení. Dvě rovnice soustavy (7.1)jsou v tomto případě znázorněny různými rovnoběžnými přímkami, které nemají žádný společný bod.

c) Nenastane-li žádný z předcházejících výjimečných případů, soustava rovnic (7.1) má pak jediné řešení. V tomto případě jsou rovnice znázorněny dvěma různoběžnými přímkami a souřadnice x, y jejich průsečíku udávají řešení dané soustavy.

Je-li dána soustava n lineárních rovnic o 2 neznámých $(a_i^2 + b_i^2 \neq 0)$

$$a_i x + b_i y + c_i = 0, \; i = 1, 2, 3, \ldots, n, \tag{7.2}$$

pak má jediné řešení jen tehdy, když všechny přímky odpovídající jednotlivým rovnicím soustavy (7.2) procházejí jedním bodem. Neexistuje-li bod, jímž všechny přímky procházejí, nemá soustava (7.2) žádné řešení. Nekonečný počet řešení by měla soustava (7.2) v tom případě, kdyby všechny přímky odpovídající jednotlivým rovnicím splynuly v jedinou. V tom případě by všechny rovnice byly nenulovými násobky jedné z nich.

Jestliže v dané soustavě rovnic je některá rovnice nenulovým násobkem jiné rovnice soustavy, můžeme jednu z těchto navzájem ekvivalentních rovnic ze soustavy vypustit, čímž si vyšetřování soustavy rovnic zjednodušíme. O tom, jak lze početní cestou vyšetřit řešitelnost soustavy rovnic a vzájemné vztahy mezi jednotlivými rovnicemi, vás poučí následující příklady, v nichž budeme předpokládat, že žádné dvě rovnice dané soustavy nejsou ekvivalentní.

Příklad 1. Vyšetřme řešitelnost soustavy lineárních rovnic

$$x - 3y - 4 = 0, \qquad 2x + y - 8 = 0,$$
$$2x + 5y - 16 = 0, \qquad -2x + y - 2 = 0.$$

Označme p_1, p_2, p_3, p_4 přímky, jež odpovídají daným rovnicím v pořadí, v němž jsou v úloze uvedeny, a hledejme průsečíky všech dvojic přímek. Abychom měli přehled o postupu výpočtu a nezapomněli vypočíst průsečík některé dvojice přímek, zapišme výsledky rovnic do tabulky (7.3). Souřadnice průsečíku přímek p_1 p_2 jsou uvedeny v tabulce tam, kde se protíná řádek označený záhlavím

p_1 se sloupcem se záhlavím p_2 a obdobně pro všechny ostatní dvojice přímek. Tabulka je „čtvercová", neboť má stejný počet řádek i sloupců. Ze zřejmých důvodů je souměrná podle úhlopříčky jdoucí z levého horního rohu do pravého dolního a místa na úhlopříčce zůstanou nezaplněna.

	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	*	$[4; 0]$	$\left[\frac{68}{11}; \frac{8}{11}\right]$	$[-2; -2]$
p_2	$[4; 0]$	*	$[3; 2]$	$\left[\frac{3}{2}; 5\right]$
p_3	$\left[\frac{68}{11}; \frac{11}{8}\right]$	$[3; 2]$	*	$\left[\frac{1}{2}; 3\right]$
p_4	$[-2; -2]$	$\left[\frac{3}{2}; 5\right]$	$\left[\frac{1}{2}; 3\right]$	*

(7.3)

Prohlédneme-li si tabulku (7.3), zjistíme, že všechny průsečíky různých dvojic přímek jsou různé, takže daná soustava nemá řešení. Všechny čtyři přímky odpovídající daným rovnicím se protínají po dvou v šesti bodech.

K tomu, abychom zjistili, že daná soustava nemá řešení, stačilo ovšem zjistit, že pouze dva body v tabulce (7.3) jsou různé. Užitečnost tabulky (7.3) poznáme ještě později při jiné příležitosti. Kdybychom však chtěli dokázat, že soustava má řešení, museli bychom zjistit, že všecky body v tabulce (7.3) splývají.

Příklad 2. Vyšetřme řešitelnost soustavy lineárních rovnic

$$x - 3y - 4 = 0, \qquad -2x + y - 8 = 0,$$
$$6x + 7y - 24 = 0, \qquad -2x + y - 2 = 0.$$

Označme q_1, q_2, q_3, q_4 přímky, odpovídající rovnicím dané soustavy a sestavme příslušnou tabulku pro průsečíky dvojic přímek.

	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	*	[4; 0]	[4; 0]	[− 2; − 2]
q_2		*	[4; 0]	$\parallel$
q_3			*	$\left[\frac{1}{2}; 3\right]$
q_4				*

(7.4)

V tabulce (7.4) jsou zapsány průsečíky jednotlivých dvojic přímek již jen v horní části čtvercové tabulky, a to nad její úhlopříčkou vyznačenou hvězdičkami. Kdybychom označení v záhlaví jednotlivých řádek přesunuli doprava až na místo příslušných hvězdiček, dostali bychom snad ještě přehlednější „trojúhelníkovou" tabulku. Ze zápisů v tabulce je zřejmé, že průsečíky přímek q_1q_2, q_1q_3, q_2q_3 splývají, což znamená, že přímky q_1, q_2, q_3 procházejí bodem [4; 0]; přímky q_2 a q_4 jsou navzájem rovnoběžné, což bylo na příslušném místě tabulky vyznačeno značkou v geometrii pro rovnoběžnost užívanou. Z hlediska algebraického to znamená, že soustava rovnic utvořená z prvních tří rovnic dané soustavy má řešení a že čtvrtá rovnice je ve sporu s druhou rovnicí dané soustavy.

Příklad 3. Vyšetřme soustavu přímek, které jsou dány rovnicemi

$$y = 0, \quad x = 0, \quad x + 2y - 2 = 0,$$
$$x + 4y - 20 = 0, \quad 2x + y - 12 = 0$$

a vyhledejme všechny body, v nichž se protínají aspoň dvě přímky této soustavy.

Označme r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 přímky v tom pořadí, jak jsou dány rovnicemi. Ze zkušenosti z předcházející tabulky víme, že do první řádky tabulky máme zapsat průsečíky přímek r_1r_2, r_1r_3, r_1r_4, r_1r_5, do druhé řádky průsečíky přímek r_2r_3, r_2r_4, r_2r_5, do třetí řádky průsečíky přímek r_3r_4, r_3r_5 a do čtvrté řádky průsečík přímek r_4r_5. Jestliže tento výpočet provedeme a zapíšeme průsečíky v uvedeném pořadí, dostaneme celkem 10 různých bodů, v nichž se protínají přímky dané soustavy, a to: $[0; 0]$, $[2; 0]$, $[20; 0]$, $[6; 0]$, $[0; 1]$, $[0; 5]$, $[0; 12]$, $[-16; 9]$, $\left[\frac{22}{3}; \frac{8}{3}\right]$, $[4; 4]$.

I když tabulkové metody nebudeme již mnoho používat, vyvodíme jejím užitím vzorec pro nejvyšší možný počet všech bodů, v nichž se protíná soustava n daných přímek. Čtvercová tabulka n-řadová obsahuje celkem n^2 polí, z nichž je třeba vyplnit jen $n^2 - n$ polí, avšak jen polovina z nich stačí pro zápis nejvyššího možného počtu bodů. Je jich tedy $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ čili $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Pokud se týká soustav lineárních nerovností o 2 neznámých, je dobře mít stále na paměti, že nerovnostem

$$ax + by + c \geqq 0, \qquad -ax - by - c \geqq 0 \qquad (7.5)$$

vyhovují souřadnice bodů ve dvou navzájem opačných polorovinách s hraniční přímkou o rovnici $ax + by + c = 0$. Sjednocením množin bodů těchto dvou polorovin je množina všech bodů celé roviny, jejich průnikem hraniční přímka. V 2. kapitole jsme se též naučili pravidlu, podle něhož lze rychle rozhodnout, kterou polorovinu daná nerovnost popisuje. Další úvahy o geometrických útvarech popsaných dvěma nebo několika nerovnostmi ukážeme na příkladech, v nichž místo písmen a, b, c v nerovnostech tvaru (7.5) budou zvolena určitá čísla. Přitom budeme pamatovat na to, že množina všech bodů, které vyhovují aspoň jedné nerovnosti dané soustavy, je sjednocením množin, z nichž každá je popsána jednou nerovností. Množinu všech bodů, které vyhovují současně všem nerovnostem dané soustavy, najdeme, když vyhledáme průnik, tj. společné body množin, které jsou popsány jednotlivými nerovnostmi. Vyhledávání průniku několika polorovin budeme častěji potřebovat, a proto je budeme více procvičovat.

Příklad 4. Vyšetříme, které poloroviny jsou popsány nerovnostmi

1. $x + 2y \geqq 0$; 2. $x + 2y - 5 \geqq 0$;
3. $-x - 2y + 15 \geqq 0$; 4. $-3x - 2y + 15 \geqq 0$;

pak ukážeme sjednocení nebo průniky některých těchto polorovin.

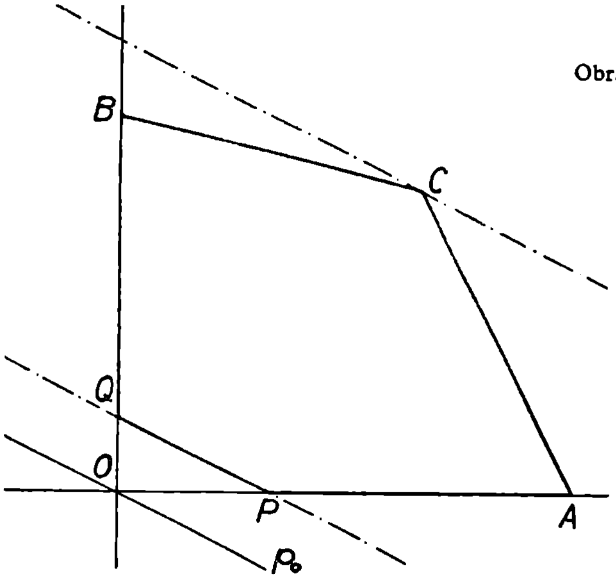
Hraniční přímky těchto polorovin označíme p_0, p_1, p_2, r v tom pořadí, v jakém byly uvedeny poloroviny jimi vyťaté. Tyto přímky jsou zobrazeny na obr. 2. Po označení hraničních přímek polorovin můžeme dané poloroviny podle úmluvy v kapitole 2 zapsat stručně takto: 1. $\bar{\varrho}\,(p_0)$; 2. $\bar{\varrho}\,(p_1)$; 3. $\varrho\,(p_2)$; 4. $\varrho\,(r)$. V prvních dvou případech jde o poloroviny nad přímkou p_0, resp. p_1, neboť koeficient při y je kladný, ve druhých dvou případech o poloroviny pod přímkou p_2, resp. r, neboť koeficient při y je v posledních dvou nerovnostech záporný.

Sjednocením $\bar{\varrho}\,(p_0)$ a $\bar{\varrho}\,(p_1)$ jest $\bar{\varrho}\,(p_0)$, jejich průnikem jest $\bar{\varrho}\,(p_1)$. Sjednocením polorovin $\bar{\varrho}\,(p_1)$ a $\varrho\,(p_2)$ je množina všech bodů celé roviny, jejich průnikem množina bodů, které tvoří pás ohraničený rovnoběžkami p_1, p_2; stejné sjednocení i průnik mají množiny bodů tří polorovin $\bar{\varrho}\,(p_0)$, $\bar{\varrho}\,(p_1)$, $\varrho\,(p_2)$.

Průnikem $\bar{\varrho}(p_0)$ a $\varrho(r)$ je část roviny tvořící ostrý úhel ORQ. Jejich sjednocením je množina těch bodů roviny, které v ní zůstanou po vynětí vnitřních bodů průniku polorovin opačných k polorovinám $\bar{\varrho}(p_0)$ a $\varrho(r)$, tj. tedy průniku polorovin $\varrho(p_0)$, $\bar{\varrho}(r)$. Pokud nejste ještě vycvičeni v určování sjednocení a průniku dvou polorovin, můžete použít této pomůcky: Vyšrafujte polorovinu $\bar{\varrho}(p_0)$ šrafy rovnoběžnými s hraniční přímkou p_0 a polorovinu $\varrho(r)$ šrafy rovnoběžnými s hraniční přímkou r. Do sjednocení množin všech bodů obou polorovin patří pak všechny body z těch částí roviny, které jsou šrafovány jakkoli, do průniku body té části roviny, která má šrafy obojího směru.

Příklad 5. Vyhledejme množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice vyhovují současně nerovnostem: $y \geqq 0$, $x \geqq 0$, $x + 2y - 2 \geqq 0$, $x + 4y - 20 \leqq 0$, $2x + y - 12 \leqq 0$.

Hraničními přímkami polorovin popsaných těmito nerovnostmi jsou přímky, které jsme v příkladu 3 tohoto článku označili písmeny r_1, r_2, r_3, r_4, r_5. Jde tedy o to najít průnik polorovin $\bar{\varrho}(r_1)$, $\bar{\varrho}(r_2)$, $\bar{\varrho}(r_3)$, $\varrho(r_4)$, $\varrho(r_5)$. Snad jste si povšimli, že v posledních dvou nerovnostech tohoto příkladu jsou znaky nerovnosti $\leqq$ a že je tedy nutné znásobit tyto nerovnosti číslem -1 nebo jiným záporným číslem, aby všechny nerovnosti měly souhlasný znak $\geqq$; v tom případě je pak koeficient při y záporný a podle pravidla v kapitole 2 je hned zřejmé, že poslední dvě nerovnosti popisují poloroviny pod přímkami r_4, r_5. Do množiny všech bodů, které vyhovují prvním dvěma nerovnostem této úlohy, patří ty body souřadnicové roviny, které vyplňují pravý úhel s vrcholem v počátku O; jeho rameny jsou kladné části os x, y a je to tedy neomezená část roviny. Průnikem tohoto pravého úhlu s třetí polorovinou $\bar{\varrho}\,(r_3)$ je opět neomezená část roviny v kvadrantu I, která je ohraničena polopřímkami PA, QB a úsečkou PQ. Do množiny všech bodů, které vyhovují jen posledním dvěma nerovnostem, patří všechny body neomezené části roviny, kterou tvoří tupý úhel ACB. Průnikem všech pěti polorovin je pak pětiúhelník $PACBQ$ (viz obr. 3).



Obr. 3.

Průnikem dvou polorovin, jejichž hraniční přímky jsou různoběžné, je vždy neomezená část roviny, a to úhel, jehož vrcholem je průsečík hraničních přímek. Jestliže třetí polorovina má hraniční přímku, která neprotíná obě ramena úhlu vytvořeného průnikem dvou polorovin, pak průnik všech tří polorovin je buď prázdná množina nebo množina obsahující jen jeden bod (vrchol úhlu) nebo množina všech bodů na jednom rameni i s vrcholem úhlu; sami si načrtněte příklady takových tří polorovin. Protíná-li hraniční přímka třetí poloroviny obě ramena daného úhlu, který vznikl jako průnik dvou polorovin, pak průnikem tří takových polorovin je buď trojúhelník, tj. omezená část roviny ohraničená třemi úsečkami, nebo neomezená část roviny, která je ohraničena dvěma polopřímkami a jednou úsečkou. Sami si již dovedete promyslit a načrtnout různé příklady průniku několika daných polorovin. Ty body, které jsou krajními body úseček nebo polopřímek ohraničujících geometrický útvar, vzniklý průnikem několika polorovin, budeme v dalším textu nazývat vrcholy tohoto útvaru, ať jde o útvar omezený nebo neomezený.

V závěru kap. 4. jste se seznámili s pojmem konvexní geometrický útvar a s poznatkem, že průnik konvexních útvarů je též konvexní útvar. Poněvadž polorovina je útvar konvexní, jsou všechny útvary vzniklé průnikem několika polorovin konvexní. Přitom vrcholy těchto útvarů mají zvláštní postavení mezi ostatními body útvarů, které jsou průnikem několika polorovin, a to tím, že kterýkoli z nich můžete z útvaru vyjmout, přičemž útvar zůstane konvexní. Vynětím vnitřního bodu hraniční úsečky nebo polopřímky poruší se konvexita útvaru. Zůstala by však zachována, kdybychom z útvaru vyňali všechny body některé hraniční úsečky nebo polopřímky.

Nakonec rozhodneme ještě otázku, zda lze vrcholy konvexního útvaru, který je průnikem několika polorovin daných nerovnostmi, určit početní cestou. Uvažme, že vrcholem takového konvexního útvaru může být jen takový bod, v němž se protínají aspoň dvě hraniční přímky daných polorovin. Ty dovedeme určit tak, jak jsme to ukázali v příkladech 1, 2, 3 tohoto článku. Obecně při n daných polorovinách existuje nejvýše $\frac{1}{2} n (n - 1)$ takových bodů, které přicházejí v úvahu jako hledané vrcholy. Musíme z nich vybrat však jen ty, které leží ve všech polorovinách, tj. vyhovují všem daným nerovnostem. Body, které jsou průsečíky hraničních přímek polorovin z příkladu 5, byly nalezeny již v příkladu 3. Prvním z nich je bod $[0; 0]$, který vyhovuje všem daným nerovnostem s výjimkou třetí; není tedy hledaným vrcholem. Bod $[2; 0]$ vyhovuje všem daným nerovnostem a patří tedy k hledaným vrcholům. Takovou početní cestou určíme mezi 10 body, nalezenými v příkladu 3, všechny vrcholy konvexního pětiúhelníka $PACBQ$ bez pomocných náčrtů.

Cvičení

7.1 Dokažte, že na každé z daných přímek

a) $x\sqrt{2} + y = 0$, b) $x - y\sqrt{3} + 1 = 0$

leží právě jeden mřížový bod roviny.

7.2 Jsou dány čtyři lineární rovnice o 2 neznámých

$5x + 3y - 8 = 0$, $2x - 4y - 11 = 0$,
$4x + 18y + 17 = 0$, $x + 11y + 14 = 0$.

Sestavte tabulku řešení všech dvojic rovnic vybraných z daných čtyř rovnic a z výsledku vyvoďte závěr o vlastnostech dané soustavy rovnic i přímek jim odpovídajících.

7.3 Z daných pěti rovnic vyberte co největší počet takových rovnic, které tvoří řešitelnou soustavu. Dané rovnice:

$$x + 2y - 4 = 0, \qquad x - y - 1 = 0,$$
$$4x - y + 11 = 0, \qquad 2x - y - 18 = 0,$$
$$x + 5y - 13 = 0.$$

7.4 Na grafu dané přímky vyhledejte několik mřížových bodů roviny a určete pak početní výrazy, které parametricky udávají celočíselná řešení dané rovnice:
a) $5x - 3y - 2 = 0$, b) $4x + 3y - 8 = 0$.

7.5 Jsou-li $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ dva mřížové body na přímce p, pak $[x, y]$ je rovněž mřížový bod roviny na přímce p, jestliže pro něj platí
$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t, \qquad y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t,$$
kde t je libovolné celé číslo. Jsou-li $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ dva sousední mřížové body roviny na přímce p, pak uvedené vzorce zahrnují všechny mřížové body roviny na přímce p. Dokažte.

7.6 Početně určete vrcholy geometrického útvaru, pro jehož body $[x, y]$ platí tyto nerovnosti:
$$y - 2 \leqq 0, \qquad x + y - 7 \leqq 0,$$
$$-3x + 2y - 4 \leqq 0, \qquad x - 4y - 2 \leqq 0.$$
Po výpočtu proveďte kontrolu s užitím náčrtu.

7.7 Řešte předcházející úlohu s tou obměnou, že první nerovnost nahradíte nerovností $y - 2 \geqq 0$.

7.8 Které geometrické útvary v rovině jsou popsány nerovnostmi: a) $|x| < 5$, b) $|y| < 3$, c) $|x| > 5$, d) $|y| > 3$, e) $|x| < 5$, $|y| > 3$, f) $|x| \geqq 5$, $|y| \geqq 3$, g) $3 < |x| < 5$, $1 < |y| < 2$.

7.9 Načrtněte obrazy geometrických útvarů, jejichž body $[x, y]$ vyhovují nerovnostem: a) $|x - 3| < 2$, b) $|y + 2| < 1$, c) $|x - 3| < 2$, $|y + 2| < 1$, d) $|x + y| < 2$, $|x - y| < 2$.

7.10 Je-li $[x_1, y_1]$ daný bod v rovině a ε libovolné kladné číslo, pak množina všech bodů, které vyhovují podmínce

a) $|x - x_1| < \varepsilon, \quad |y - y_1| < \varepsilon$ se nazývá čtvercové (kvadratické) okolí bodu $[x_1, y_1]$,

b) $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} < \varepsilon$ se nazývá kruhové (cyklické) okolí bodu $[x_1, y_1]$. Zdůvodněte tyto názvy množin.

8. LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

●

Poměrně malé rozšíření středoškolského učiva o lineárních rovnicích a nerovnostech nám umožňuje, abychom v tomto článku ukázali na společné vlastnosti i metody řešení některých matematických úloh, které jsou spjaty s aktuálními problémy současného společenského života. Jejich podstatu je možno takto charakterizovat:

I. Daná úloha vede k sestavení lineárních rovnic nebo nerovností o n neznámých, pro něž se mají nalézt řešení v oboru nezáporných čísel. Pro taková řešení budeme užívat názvu přípustná řešení.

II. V množině přípustných řešení mají být nalezena taková, pro něž veličina stanovená lineárním početním výrazem vzhledem k neznámým nabývá hodnoty co nejmenší nebo co největší, a to podle účelu, který má řešení úlohy sledovat. Rovnici pro stanovení této nejmenší (minimální) nebo největší (maximální) hodnoty veličiny, kterou v našich úlohách budeme označovat písmenem m, nazveme účelovou rovnicí.

Řešení úloh tohoto druhu objasníme na jednoduchých příkladech, při nichž přístup k němu ukážeme nejprve geometricky a pak teprve vyložíme početní postup. Pro omezený rozsah této knížky budou příklady voleny tak, aby zahrnovaly vždy několik úloh.

Příklad 1. Hledejme takové řešení rovnice $3x + 2y - 15 = 0$, pro které platí $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ a pro které je číslo $m = x + 2y$ a) co nejmenší, b) co největší.

I. Množinu přípustných řešení této úlohy jsme již hledali početně v příkladu 5 článku 6. Geometricky jim odpovídá množina všech bodů úsečky PQ na přímce r v obr. 2.

II. Rovnici $x + 2y = 0$ odpovídá přímka OR, označená p_0 v obr. 2. Body $[x, y]$, které jsou obrazy přípustných řešení, leží v $\bar{\varrho}(p_0)$ a platí pro ně tedy $x + 2y = m > 0$. Pro vzdálenost v bodu $[x, y]$ v polorovině $\bar{\varrho}(p_0)$ od přímky p_0 platí:

$$v = \frac{|x + 2y|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|m|}{\sqrt{5}} = \frac{m}{\sqrt{5}}.$$

Bude-li m nejmenší, bude též v nejmenší a obráceně; z bodů úsečky PQ má od přímky p_0 nejmenší vzdálenost bod $P \equiv [5; 0]$ a v tom případě $m = 5$. Bude-li m největší, bude též v největší a obráceně; z bodů úsečky PQ má od přímky p_0 největší vzdálenost bod $Q \equiv [0; 7,5]$ a v tom případě $m = 15$.

Hledaná řešení daných úloh v tomto příkladě jsou: a) $x = 5$, $y = 0$, $m = 5$, b) $x = 0$, $y = 7,5$, $m = 15$.

Poznámka: Kdybychom úlohy řešené v předcházejícím příkladu obměnili tak, že bychom požadovali řešení v oboru celých čísel, pak by přípustná řešení byla zobrazena jen třemi body $[5; 0]$, $[3; 3]$, $[1; 6]$ na úsečce PQ (viz třetí odstavec předcházejícího článku). V tomto případě by bylo nejmenší $m = 5$ pro $x = 5$, $y = 0$ a největší m pro $x = 1$, $y = 6$.

Příklad 2. Hledejme taková řešení nerovností $y \geqq 0$, $x \geqq 0$, $x + 2y - 2 \geqq 0$, $x + 4y - 20 \leqq 0$, $2x + y - 12 \leqq 0$, pro která $m = x + 2y$ nabývá hodnoty a) nejmenší, b) největší.

I. Všechna přípustná řešení daných úloh jsou zobrazena body konvexního pětiúhelníka $PACBQ$ (viz příklad

5 předcházející kapitoly), jehož vrcholy dovedeme určit geometrickými konstrukcemi i analyticky.

II. Označíme-li p_0 přímku o rovnici $x + 2y = 0$, pak obrazy všech bodů, jejichž souřadnice udávají přípustná řešení dané úlohy, leží opět v $\bar{\varrho}(p_0)$. Obdobnou úvahou jako v předcházejícím příkladě dostaneme tyto výsledky:

a) Nejmenší hodnoty $m = 2$ nabývá m pro taková přípustná řešení x, y, jejichž obrazy $[x, y]$ leží na úsečce PQ. V tomto případě má úloha nekonečný počet řešení.

b) Největší hodnoty $m = 12$ nabývá m pro $x = 4$, $y = 4$, jehož obrazem je bod C, který je nejvzdálenější od přímky p_0. V tomto případě má úloha jediné řešení.

Při různých účelových rovnicích můžeme pochopitelně dostat různá řešení, i když přípustná řešení zůstanou stejná. Z geometrického názoru je zřejmé, že číslo m nabude některé krajní hodnoty, ať již minimální či maximální, buď jen v jednom vrcholu konvexního geometrického útvaru, jehož body jsou obrazy přípustných řešení, nebo v jeho dvou vrcholech, přičemž má pak úloha nekonečný počet řešení, jež odpovídají bodům na spojnici příslušných dvou sousedních vrcholů. Tento poznatek (který přijmeme za správný bez důkazu) nám umožní, abychom celou úlohu řešili početně. Určíme-li totiž početně všechny vrcholy konvexního pětiúhelníka $PACBQ$ postupem, který jsme vyložili v příkladu 5 předcházejícího článku, je možno souřadnice těchto vrcholů dosadit do účelové rovnice a zjistit pak příslušné řešení. Snadným výpočtem najdeme $P \equiv [2; 0]$, $A \equiv [6; 0]$, $C \equiv [4; 4]$, $B \equiv [0; 5]$, $Q \equiv [0; 1]$. Dosadíme-li souřadnice těchto vrcholů do účelové rovnice, dostaneme pro ně čísla $m = 2, 6, 12, 10, 2$. Tak najdeme dva vrcholy P, Q, v nichž m nabývá minimální hodnoty 2, a bod C, v němž m nabývá maximální hodnoty 12.

Příklad 3. Výrobní podnik má 100 strojů druhu S_1 a 150 strojů druhu S_2, jež slouží k výrobě několika typů výrobků pro tuzemskou potřebu i pro vývoz do zahraničí. Z nich jen výrobky typu A a typu B jsou exportovány do SSSR a přinášejí našemu národnímu hospodářství zisk 5 rublů za 1 výrobek typu A a 4 ruble za 1 výrobek typu B. Ke zhotovení jednoho výrobku typu A je potřebí 2 pracovních hodin na stroji S_1 a 4 pracovních hodin na stroji S_2, zatímco pro zhotovení jednoho výrobku typu B je potřebí 2 pracovních hodin na stroji S_1 a 2 pracovních hodin na stroji S_2. Výrobní podnik je vázán státním plánem, aby zajistil denně zisk 1000 rublů pro naše socialistické hospodářství. Z provozních důvodů mohou pro export do SSSR pracovat stroje S_1 nejvýš ve 2 směnách po 8 hodinách a stroje S_2 nejvýš v 1 směně 8 hodin denně. Za těchto podmínek máme nalézt řešení tří úloh na stanovení pracovního plánu určujícího počet exportních výrobků typu A a typu B, aby byl splněn tento účel:

1. aby výrobní podnik zajistil co největší zisk z exportu do SSSR,
2. aby vyráběl co největší celkový počet výrobků pro export do SSSR,
3. aby byla co nejmenší spotřeba určité suroviny za předpokladu, že se jí spotřebuje 1 kg na jeden výrobek typu A nebo B.

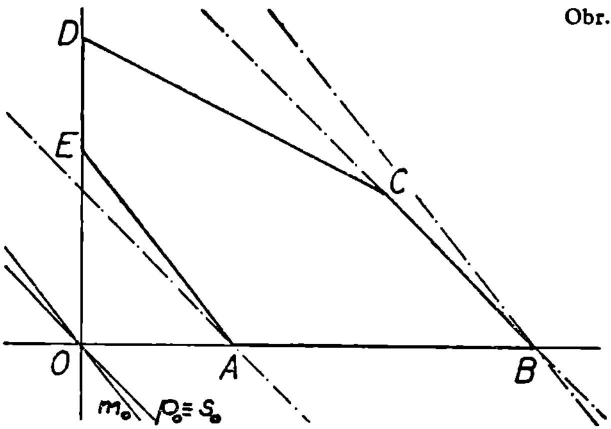
I. Podmínky omezující výrobu exportních předmětů typu A nebo B jsou ve všech třech úlohách stejné. Označíme-li x plánovaný počet výrobků typu A a y plánovaný počet výrobků typu B, pak snadno sestavíme nerovnosti

$$2x + 4y \leqq 100 \,.\, 8 \,.\, 2, \qquad 2x + 2y \leqq 150 \,.\, 8 \,.\, 1,$$

$$5x + 4y \geqq 1000.$$

První dvě z nich vyjadřují, že počet pracovních hodin na strojích druhu S_1 nemůže překročit 100 . 8 . 2 pracovních hodin (100 strojů pracujících nejvýš ve dvou osmihodinových směnách) a na strojích druhu S_2 nemůže překročit 150 . 8 pracovních hodin (150 strojů pracujících nejvýš 8 hodin denně). Třetí nerovnost vyjadřuje, že zisk z exportu musí být aspoň 1000 rublů denně. Úpravou těchto tří nerovností a připojením podmínek, že čísla x, y nemohou být záporná, dostaneme tyto nerovnosti:

$$x + 2y \leqq 800, \quad x + y \leqq 600, \quad 5x + 4y \geqq 1000, \tag{8.1}$$
$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0.$$



Obr. 4.

Grafickou metodou nebo početně určíme vrcholy konvexního pětiúhelníka $ABCDE$, v němž leží obrazy všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice představují přípustná řešení našich úloh.

Pětiúhelník $ABCDE$ je znázorněn ve vhodném měřítku na obr. 4. Chce-li vedení výrobního podniku přihlédnout ke všem podmínkám, které byly uvedeny ve znění úloh, musí při stanovení výrobního plánu volit taková celá čísla x, y, aby vyhovovala podmínkám v nerovnostech (8.1), tj. aby body $[x, y]$ ležely v pětiúhelníku $ABCDE$. Rozhodne-li vedení podniku například, že se denně bude vyrábět 300 výrobků typu A a 200 výrobků typu B, bude vyhověno všem daným podmínkám, neboť stroje druhu S_1 budou pracovat 1400 hodin, stroje druhu S_2 1000 hodin a celkový zisk z vývozu do SSSR bude 2300 rublů denně. Snadno se přesvědčíte, že bod $[300; 200]$ je bodem pětiúhelníka $ABCDE$.

Každému řešení nerovností (8.1) odpovídá bod pětiúhelníka $ABCDE$, avšak není pravda, že by každému bodu pětiúhelníka odpovídalo řešení nerovností (8.1), které lze ve výrobě realizovat. Musíme totiž v úlohách tohoto příkladu pamatovat na to, že plánovaný počet výrobků typu A i B musí být dán celým nezáporným číslem. Proto nás z bodů pětiúhelníka $ABCDE$ zajímají jen ty body, které jsou mřížovými body roviny.

II. Z množiny všech celočíselných přípustných řešení, která je pro všechny tři úlohy tohoto příkladu společná, musíme nyní vybrat taková řešení, aby jistá veličina, určená účelovou rovnicí, nabývala maximální nebo minimální hodnoty. Nyní ukážeme postup při dalším řešení daných úloh.

Úloha 1. Označíme-li m celkový zisk z exportu do SSSR, který podnik denně zajišťuje, pak účelová rovnice zní $m = 5x + 4y$. Přitom se má z přípustných celočíselných řešení vybrat takové, pro které je m největší. Označíme-li m_0 (viz obr. 4) přímku danou rovnicí $5x + 4y = 0$, pak všechna přípustná řešení mají obrazy v $\bar{\varrho}(m_0)$, takže pro ně platí $5x + 4y = m \geqq 0$. Veličina m bude největší pro ty body pětiúhelníka, které mají od přímky m_0 největší vzdálenost. Tuto vlastnost má jediný bod B pětiúhelníka $ABCDE$. Poněvadž $B \equiv [600; 0]$, plyne odtud odpověď na položenou otázku: Má-li podnik za daných podmínek dosahovat maximálního zisku z exportu do SSSR, musí vyrábět denně 600 výrobků typu A a zastavit výrobu typu B pro export; denní zisk podniku z exportu bude 3000 rublů.

Úloha 2. Označíme-li p celkový počet denně vyráběných výrobků typu A i B, pak účelová rovnice má tvar $p = x + y$, přičemž hledáme z přípustných celočíselných řešení takové, pro které je p největší. Označíme p_0 přímku danou rovnicí $x + y = 0$ a opět vyhledáme v pětiúhelníku $ABCDE$ takové body, které mají od přímky p_0 vzdálenost co největší. Snadno zjistíme, že jsou to vrcholy B, C a s nimi všechny body na straně BC. Z nich nás zajímají jen ty body, které jsou mřížovými body roviny. Jsou to body $[400; 200]$, $[401; 199]$, $[402; 198]$, ..., $[599; 1]$, $[600; 0]$. V tomto případě má tedy úloha 201 řešení, z nichž si vedení podniku může vybrat kterékoli; přitom bude celkový počet denně vyráběných exportních výrobků 600.

Poznámka: Kdyby se požadovalo, aby celkový počet výrobků byl maximální, a současně též maximální zisk, pak by existovalo jediné řešení ($x = 600$, $y = 0$, $p = 600$, $m = 3000$).

Úloha 3. Označíme-li s velikost množství spotřebované suroviny, pak účelová rovnice má tvar $s = x + y$, přičemž však požadujeme, aby s bylo co možná nejmenší. Snadno se ukáže, že obrazem příslušného řešení je bod $A \equiv [200; 0]$, který je nejméně vzdálen od přímky $s_0 \equiv p_0$. V tomto případě bude podnik vyrábět 200 výrobků typu *A* denně, spotřebuje 200 kg suroviny a bude přitom plnit závazný plán zisku 1000 rublů denně.

Sami si jistě rozřešíte všechny tři úlohy tohoto příkladu analyticky a bez pomoci jakýchkoli náčrtů. Přitom budete postupovat takto:

a) Najdete průsečíky všech dvojic hraničních přímek polorovin (8.1).

b) Určíte, které z nalezených bodů vyhovují všem nerovnostem (8.1), tj. najdete ty body, které jsou vrcholy geometrického útvaru popsaného nerovnostmi (8.1).

c) Určíte pro všechny vrcholy hodnoty té veličiny, která je mírou účelu sledovaného řešením, a rozhodnete, v kterých vrcholech nabývá požadované krajní hodnoty (maximální nebo minimální).

d) Nabývá-li tato veličina krajní hodnoty ve dvou vrcholech, což mohou být jen dva sousední vrcholy, pak mají tuto vlastnost též všechna přípustná řešení na spojnici obou vrcholů.

Různé otázky hospodářského života, strategické otázky vojenské i mnohé problémy průmyslové či zemědělské výroby vedou k podobným matematickým úlohám, s jakými jsme se setkali a které jsme řešili v tomto článku. Poněvadž při matematickém řešení těchto otázek jde o řešení lineárních rovnic a nerovností s vedlejší podmínkou, která je vymezena rovněž lineární rovnicí vzhledem k neznámým, dostal tento obor matematiky název lineární programování. Je to jeden z nejmladších oborů aplikované matematiky, který začal vyrůstat před 20 lety, když matematikové za druhé světové války musili řešit některé otázky vojenských operací. Dnes se ho využívá k řešení nejrozmanitějších problémů civilního společenského života. Při řešení takových problémů ze skutečného života nejde však o jednoduché úlohy se dvěma neznámými, nýbrž o řešení úloh s velkým počtem neznámých, přičemž vztahy mezi nimi jsou určeny velkým počtem lineárních nerovností nebo rovnic. Řešení takových úloh by však bylo velmi zdlouhavé a nákladné, kdyby k jejich řešení nebyla nalezena řada mnohem účinnějších metod (s kterými se ovšem zde nemůžeme seznamovat) a kdyby se pro jejich provádění nemohlo používat moderních rychle pracujících samočinných počítacích strojů. Naše úlohy vám zatím ukázaly jen pohled na podstatu úloh lineárního programování.

Poněvadž texty úloh z oboru lineárního programování jsou zpravidla dlouhé, neuvádíme tu další jednoduché příklady úloh se dvěma neznámými. Místo toho ukážeme řešení úlohy, v níž při sestavení příslušných rovnic a nerovností zavedeme šest neznámých, avšak vztahy mezi nimi nám dovolí vyloučit čtyři z nich tak, že se pak řešení úlohy dá provést metodami nám již známými.

Příklad 4. Důl D_1 těží denně 800 tun, důl D_2 600 tun uhlí. Vytěžené uhlí se má dopravovat do tří spotřebních středisek S_1, S_2, S_3, z nichž S_1 potřebuje 500 tun, S_2 500 tun, S_3 400 tun denně. Jak je třeba rozvrhnout dodávky uhlí z dolů do spotřebních středisek, aby dopravní náklady byly minimální, jestliže dopravné za 1 tunu z dolu D_1 do S_1, S_2, S_3 stojí 16 Kčs, 10 Kčs, 15 Kčs a z dolu D_2 do S_1, S_2, S_3 stojí 10 Kčs, 12 Kčs, 10 Kčs.

Řešení úlohy se stane přehlednějším užitím těchto tabulek:

	S_1	S_2	S_3
D_1	16	10	15
D_2	10	12	10

	S_1	S_2	S_3
D_1	x	y	z
D_2	u	v	w

První z těchto tabulek udává dopravné za 1 tunu uhlí z obou dolů do spotřebních středisek S_1, S_2, S_3; druhá tabulka obsahuje zápisy písmen, jimiž budou označena množství uhlí přepravovaného z obou dolů do spotřebních středisek S_1, S_2, S_3, přičemž za jednotku zvolíme 100 tun. Celkové dopravní náklady označíme písmenem m a za jejich jednotku zvolíme 100 Kčs. Nyní sestavíme 3 skupiny lineárních rovnic a nerovností, jejichž smysl sami poznáte:

$$x + u = 5, \quad y + v = 5, \quad z + w = 4 \tag{8.2}$$
$$x + y + z = 8, \quad u + v + w = 6 \tag{8.3}$$
$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad z \geqq 0, \quad u \geqq 0, \quad v \geqq 0, \quad w \geqq 0. \tag{8.4}$$

Pro celkové dopravní náklady sestavme účelovou rovnici

$$m = 16\,x + 10\,y + 15\,z + 10\,u + 12\,v + 10\,w. \tag{8.5}$$

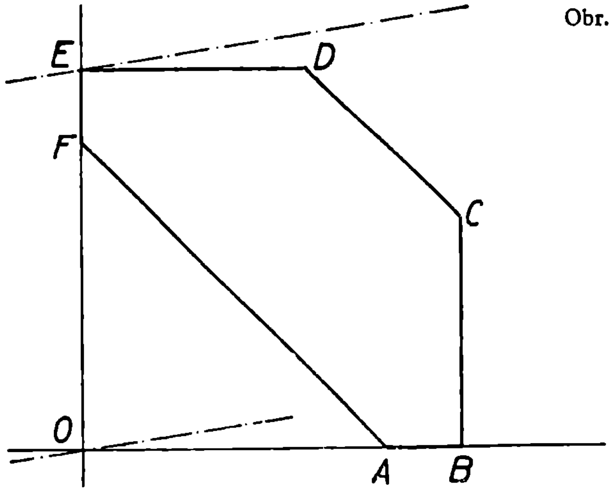
Z rovnic (8.2) a (8.3) vypočteme

$$u = 5 - x, \quad v = 5 - y, \quad w = 4 - z, \quad z = 8 - x - y$$

a po dosazení do (8.4) a (8.5) dostaneme po snadné úpravě

$$x \geqq 0, y \geqq 0, x + y \leqq 8, x \leqq 5, y \leqq 5, x + y \geqq 4, \tag{8.6}$$
$$m = x - 7\,y + 190. \tag{8.7}$$

Množina všech přípustných řešení, která vyhovují nerovnostem (8.6) je zobrazena body konvexního šestiúhelníka $ABCDEF$ (viz obr. 5). Z přípustných řešení má se vybrat takové, pro které m, určené rovnicí (8.7), nabývá hodnoty minimální. Rovnici $x - 7\,y + 190 = 0$ by odpovídala na obr. 5 přímka protínající souřadnicové osy x, y v bodech $P \equiv [-190;0]$, $G \equiv \left[0; \frac{190}{7}\right]$, kterou si jen představíme. Je rovnoběžná s přímkou o rovnici $x - 7\,y = 0$, která prochází počátkem a je v obr. 5 zobrazena. Všechny body šestiúhelníka $ABCDEF$ leží v polorovině $x - 7\,y + 190 \geqq 0$ a číslo $m = x - 7\,y + 190$ bude nejmenší pro bod $E \equiv [0; 5]$, pro který $m = 155$. Dopravní náklady ve výši 15 500 Kčs budou tedy nejmenší, když



Obr. 5.

distribuce dodávek uhlí bude provedena tak, jak je zřejmé z následující tabulky:

	S_1	S_2	S_3
D_1	0	5	3
D_2	5	0	1

V této tabulce znamená ovšem jednotka dodávku 100 tun uhlí.

Analytické řešení této úlohy provedete si jistě sami jako cvičení. Při tom se jednoduchým výpočtem můžeme přesvědčit, že roční úspora na dopravném při nejlepším rozvržení může přesahovat milión Kčs proti jinému nepříznivějšímu rozvržení dodávek, ač jsme zvolili pro náš příklad jen dva doly s nízkou těžbou. Proto si jistě dovedete udělat správnou představu o úsporách, jichž je možno dosáhnout, když se pro celostátní distribuci uhlí ze všech dolů použije nejvýhodnějšího řešení, které získáme pracovními metodami lineárního programování. Obdobně je možné dosáhnout velkých úspor při rozvrhování dodávek cihel z různých cihelen na početná staveniště, dodávek mouky z velkomlýnů do velkých pekáren apod. Z těchto příkladů vybraných z jediného oboru užité matematiky si můžete udělat představu o významu celé matematiky, která umožňuje ve státě socialisticky organizovaném hospodárné využití energie i pracovních sil k prospěchu všeho lidu.

OBSAH

•

FRANTIŠEK VESELÝ

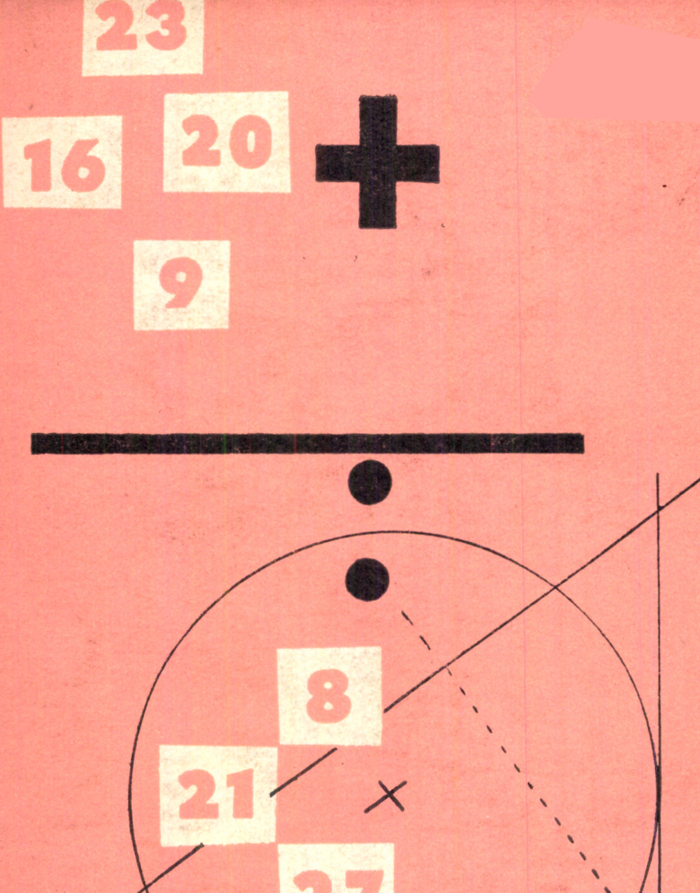
O NEROVNOSTECH

●

Pro účastníky Matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Odbor. recenzi provedl dr. Rudolf Výborný CSc
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Publikace číslo 1911, 72 stran
Edice Škola mladých matematiků, svazek 5
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p., závod 2,
provozovna 22, Praha 2, Legerova 22
3.— AA, 3,10 VA. D—16*30063. 63/III-7
Náklad 5000 výtisků. 1. vydání. Praha 1963

23-037-63

03-2 Cena brož. výtisku Kčs 2,50



23-037-63
03-2
Cena brož.
Kčs 2,50