Řetězové zlomky

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

49

Vydal ÚV Matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

PAVEL VÍT

Řetězové zlomky

PRAHA 1982
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali RNDr. Miroslav Sisler, CSc.,
a Jiří Váňa, prom. pedagog

PŘEDMLUVA

Množina všech reálných čísel se dělí na dvě disjunktní podmnožiny: množinu všech racionálních čísel, kterou zpravidla označujeme Q, a množinu všech iracionálních čísel, kterou budeme označovat I. Tím je dáno i rozdělení této knížky:

I. Racionální čísla.
II. Iracionální čísla.
III. Použití řetězových zlomků.

Ze středoškolské matematiky budeme potřebovat jen základní pojmy o dělitelnosti: relaci | (je dělitelem) a pojem největšího společného dělitele (pro největšího společného dělitele čísel a, b však nezavádíme symbol (a, b); tento symbol si rezervujeme pro uspořádanou dvojici). V kapitole o kongruencích budeme také potřebovat relaci ekvivalence.

Knížka je doplněna seznamem literatury, na kterou čtenáře příležitostně odkazujeme. Perronova kniha [4] je základní dílo o řetězových zlomcích, Chinčinova knížka [3] je stručná monografie, k níž její překladatel Karel Rychlík připojil cenné dodatky. Hardyova-Wrightova kniha [2] je učebnice teorie čísel, obsahující také kapitolu o řetězových zlomcích. Na rozdíl od této knihy je Rychlíkova kniha [5] také učebnicí teorie čísel, ale bez výkladu o řetězových zlomcích. Tuto knihu také nikde necitujeme, neuvádíme ji však v seznamu literatury nadarmo: kdysi vyšla v ŠMM knížka o kongruencích — také bez řetězových zlomků. Konečně knížky [1] a [6] jsou malé rozsahem, obě však obsahují partie o řetězových zlomcích. [6] navíc obsahuje velmi stručný výklad o Pellově rovnici.

Autor

I. ČÁST

RACIONÁLNÍ ČÍSLA

1. ZÁKLADNÍ POJMY

Řetězovým zlomkem budeme nazývat výraz tvaru

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

nebo

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5}}}}}$$

Hodnotu takového výrazu můžeme snadno vypočítat „od-zadu“. V prvním případě dostáváme

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{5}}=3+\frac{5}{13}=\frac{44}{13}$$

a ve druhém

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{5}{16}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{16}{37}}}=\frac{1}{1+\frac{37}{53}}=\frac{53}{90}.$$

Vidíme, že jsme v obou případech dostali kladná racionální čísla. To je pochopitelné, neboť jsme k výsledku dospěli racionálními operacemi — sčítáním a dělením — s přirozenými čísly.

Budeme se tedy zabývat řetězovými zlomky tvaru

$$q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\ddots+\cfrac{1}{q_n}}}, \tag{1}$$

kde $q_2, q_3, \ldots, q_n \in \mathrm{N}$. Pro q_1 budeme připouštět $q_1 \in \mathrm{N}_0$ (může být tedy i $q_1=0$, jako v našem druhém příkladu). Řetězový zlomek (1) s $q_2, q_3, \ldots, q_n \in \mathrm{N}$ budeme nazývat *pravidelným*. O q_1 se v definici pravidelného řetězového zlomku obvykle předpokládá $q_1 \in \mathbf{Z}$; může tedy být i $q_1<0$, jak to zavedeme v 8. kapitole. Prozatím však budeme uvažovat jen $q_1 \in \mathrm{N}_0$.

Číslům $q_1, q_2, \ldots, q_n$ říkáme *neúplné podíly* (tento název souvisí s Euklidovým algoritmem, jak bude vyloženo ve 2. kapitole) nebo *prvky* řetězového zlomku (1). Úpravami (1) dostáváme (při $q_1 \in N_0$) kladné racionální číslo $\frac{p}{q}$. Později uvidíme, že $\frac{p}{q}$ je dokonce zlomek v základním tvaru, tj. čísla p, q jsou nesoudělná.

Hodnotu řetězového zlomku (1) můžeme — a také napříště budeme — počítat „zepředu“. Dostáváme postupně zlomky

$$q_1 = \frac{q_1}{1} = \frac{P_1}{Q_1},$$

$$q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{q_1 q_2 + 1}{q_2} = \frac{P_2}{Q_2},$$

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}} = \frac{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3}{q_2 q_3 + 1} = \frac{P_3}{Q_3}, \tag{2}$$

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4}}} =$$

$$= \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 + q_1 q_4 + q_3 q_4 + 1}{q_2 q_3 q_4 + q_2 + q_4} = \frac{P_4}{Q_4},$$

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}} = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{p}{q}.$$

Vidíme, že všechny zlomky $\frac{P_i}{Q_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ mají tvar

$$\frac{P(q_1, q_2, \ldots, q_n)}{Q(q_2, q_3, \ldots, q_n)},$$

kde P, Q jsou celistvé funkce přirozených argumentů, tedy přirozená čísla, a $\frac{p}{q} = \frac{P_n}{Q_n}$ je kladné racionální číslo.

Zlomkům $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}$ říkáme *sblížené zlomky* řetězového zlomku (1). Jak uvidíme později, jsou to vesměs zlomky v základním tvaru $\left(\text{o zlomku } \frac{P_n}{Q_n} = \frac{p}{q} \text{ jsme to už řekli prve}\right)$. Rozumí se, že je nebudeme počítat podle vzorců (2), které jsou s rostoucím indexem stále delší; pro jejich výpočet odvodíme ve 3. kapitole jednoduché rekurentní vzorce.

Sblížený zlomek $\frac{P_i}{Q_i}$ nazýváme *i-tým sblíženým zlomkem* řetězového zlomku (1) nebo také sblíženým zlomkem *i-tého řádu.* Místo n-tý sblížený zlomek budeme také říkat *poslední sblížený zlomek* $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{p}{q}$ řetězového zlomku (1).

Sblížené zlomky mají mnoho zajímavých vlastností; těm je věnována 4. kapitola.

Příklad 1. Zkusme vypočítat sblížené zlomky prvních dvou řetězových zlomků z úvodu této kapitoly bez dosazování do vzorců (2) (stejně bychom s nimi nevystačili). Nezapomeňme, že ve druhém příkladě je $q_1 = 0$.

Řešení. V prvním případě je $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{3}{1} = 3$, $\frac{P_2}{Q_2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$,

$$\frac{P_3}{Q_3} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}} = \frac{10}{3}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + 1}} = \frac{17}{5},$$

$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{44}{13} = \frac{p}{q}$ je poslední sblížený zlomek.

Ve druhém případě je první sblížený zlomek $\frac{P_1}{Q_1} = 0$, výpočtem dostaneme posloupnost šesti sblížených zlomků
$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{10}{17}, \frac{53}{90}$.

Uvedeme si typograficky výhodnější způsoby zápisu řetězových zlomků. Řetězový zlomek (1) se v různých publikacích zapisuje např. takto:

$$q_1 + \frac{1}{q_2 +} \cdots \frac{1}{q_n}$$

nebo také:

$$q_1 + \frac{1|}{|q_2} + \ldots + \frac{1|}{|q_n}.$$

Oba tyto zápisy mají sice tu přednost, že připomínají, že jde o dělení, ale typograficky příliš výhodné nejsou. Nejsou ani zvlášť instruktivní po matematické stránce, neboť to, co nás zajímá, jsou čísla $q_1, q_2, \ldots, q_n$; vypíšeme tedy prostě posloupnost těchto čísel, a to, že jde o řetězový zlomek, vyznačíme tím, že tuto posloupnost dáme do závorek. Místo (1) budeme tedy psát

$$(q_1, q_2, \ldots, q_n). \tag{3}$$

Od zápisu (3) snadno přejdeme, kdykoli to potřebujeme, k zápisu (1).

Řetězové zlomky, kterými začíná tato kapitola, tedy píšeme (3, 2, 1, 1, 2), popř. (0, 1, 1, 2, 3, 5).

Sblížené zlomky řetězového zlomku (3) zapíšeme stejným způsobem: $\frac{P_1}{Q_1} = (q_1) = q_1$, $\frac{P_2}{Q_2} = (q_1, q_2)$, $\frac{P_3}{Q_3} = (q_1, q_2, q_3)$ ..., obecně

$$\frac{P_i}{Q_i} = (q_1, q_2, \ldots, q_i), \qquad 1 \leqq i \leqq n. \tag{4}$$

Poznámka. V literatuře se často nalezne zápis řetězového zlomku

$$[q_0, q_1, \ldots, q_n].$$

Až dosud jsme hledali vyjádření řetězového zlomku racionálním číslem. Řešme nyní obrácenou úlohu: ke kladnému racionálnímu číslu $\frac{p}{q}$ nalézt řetězový zlomek (3) tak, aby platilo

$$\frac{p}{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

tj. nalézt čísla $q_1 \in \mathrm{N}_0$, $q_2, \ldots, q_n \in \mathrm{N}$. Protože $\frac{p}{q} > 0$, stačí uvažovat p, $q \in \mathrm{N}$. Dále nás nebude zajímat případ $q|p$, neboť pak je $\frac{p}{q} \in \mathrm{Z}$; také nás nebude příliš zajímat případ $p=1$, který ihned vede k vyjádření

$$\frac{1}{q} = (0, q).$$

K výpočtu čísel $q_1, q_2, \ldots, q_n$ potřebujeme vědět něco o celé části reálného čísla α. (Mohli bychom se prozatím omezit na celou část kladného racionálního čísla; ale v 8. kapitole budeme potřebovat celou část záporného racionálního čísla a v 9. kapitole celou část iracionálního čísla, a vzhledem k tomu, že celá část je ve všech těchto případech definována stejně, zavedeme už nyní tento pojem pro jakékoli reálné číslo.)

V algebře se dokazuje, že ke každému reálnému číslu α existuje právě jedno $k \in \mathrm{Z}$ takové, že

$$k \leqq \alpha < k+1 .$$

Toto celé číslo k se obvykle označuje $[\alpha]$, v cizí literatuře také $\mathrm{E}\alpha$ nebo $\mathrm{E}(\alpha)$, a nazývá se *celá část čísla* α. Pro číslo α pak platí $\alpha = [\alpha] + \beta$, kde $0 \leqq \beta < 1$. Číslo β se nazývá *lomená část čísla* α a obvykle se označuje $\{\alpha\}$. Celkem tedy

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\} .$$

Pokud není $\alpha \in Z$, je $0 < \{\alpha\} < 1$, a tedy $\dfrac{1}{\{\alpha\}} > 1$.

Příklady.

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad \alpha = 5 : [\alpha] = 5, \{\alpha\} = 0;\\
&\text{(b)}\quad \alpha = -2 : [\alpha] = -2, \{\alpha\} = 0;\\
&\text{(c)}\quad \alpha = \frac{5}{2} : [\alpha] = 2, \{\alpha\} = \frac{1}{2};\\
&\text{(d)}\quad \alpha = -\frac{7}{5} : [\alpha] = -2, \{\alpha\} = \frac{3}{5};
\end{aligned}$$

rozklady iracionálních čísel na celou a lomenou část se budeme zabývat v 9. kapitole. Nás teď budou zajímat rozklady typu (c).

Buď dáno kladné racionální číslo a, $a \notin N$. Položme $q_1 = [a]$, $a_1 = 1/\{a\}$. Zřejmě pak platí

$$a = q_1 + \frac{1}{a_1},$$

kde $a_1 > 1$, $a_1 \in Q$. Odtud plyne

$$a_1 = \frac{1}{a - q_1}.$$

Pro a_1 celý postup opakujeme. Definujeme tedy číslo

$$q_2 = [a_1] = \left[\frac{1}{a - q_1}\right]$$

a číslo

$$a_2 = \frac{1}{\{a_1\}}.$$

Pak platí

$$a_1 = q_2 + \frac{1}{a_2},$$

kde $a_2 > 1$, $a_2 \in \mathrm{Q}$. Z posledního vztahu dostáváme

$$a_2 = \frac{1}{a_1 - q_2}$$

a opět definujeme podobným způsobem čísla q_3, a_3, q_4, a_4, ...

Postup se zastaví, jakmile je některé a_{n-1} celé číslo; pak je $q_n = [a_{n-1}]$ poslední prvek řetězového zlomku racionálního čísla a.

Postup má dvě nevýhody:

1. Je zbytečně pracný; Euklidův algoritmus dává mnohem jednodušší způsob výpočtu čísel $q_1, q_2, \ldots, q_n$. (Ale při počítání prvků řetězového zlomku iracionálního čísla ho nebudeme používat, neboť pro iracionální čísla žádnou obdobu Euklidova algoritmu nemáme.)
2. Horší je skutečnost, že postup, tak jak jsme jej popsali, nedává žádnou záruku, že vůbec skončí. Řekli jsme, že se zastaví při některém celém a_{n-1}, ale odkud víme, že v posloupnosti čísel a, a_1, $a_2, \ldots$, skutečně existuje celé číslo? Opět teprve Euklidův algoritmus nám umožní tvrdit,

že čísel q_1, q_2, ..., q_n je konečný počet (jednoznačně určený číslem $a=\frac{p}{q}$).

Budeme nyní tento postup ilustrovat na příkladu.

Příklad 2. Vyjádřeme racionální číslo $a=\frac{43}{30}$ řetězovým zlomkem.

Řešení.

$$q_1=\left[\frac{43}{30}\right]=1,$$

$$\frac{43}{30}=1+\frac{1}{a_1}, \qquad a_1=\frac{1}{\frac{43}{30}-1}=\frac{30}{13},$$

$$q_2=\left[\frac{30}{13}\right]=2,$$

$$\frac{30}{13}=2+\frac{1}{a_2}, \qquad a_2=\frac{1}{\frac{30}{13}-2}=\frac{13}{4},$$

$$q_3=\left[\frac{13}{4}\right]=3,$$

$$\frac{13}{4}=3+\frac{1}{a_3}, \qquad a_3=\frac{1}{\frac{13}{4}-3}=4,$$

$$q_4=[4]=4.$$

Tím je výpočet ukončen a dostáváme

$$\frac{43}{30} = (1, 2, 3, 4).$$

Doporučujeme čtenáři vypočítat ještě hodnoty sblížených zlomků $\frac{P_1}{Q_1}, \ldots, \frac{P_4}{Q_4}$. Vyjde posloupnost $1, \frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{43}{30}$.

Řekli jsme už, i když jsme to zatím nedokázali, že sblížené zlomky jsou vesměs zlomky v základním tvaru, což platí i pro poslední z nich $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{p}{q}$. Co se tedy stane, jestliže vypočítáme poslední sblížený zlomek nějakého (kladného) racionálního čísla $\frac{p}{q}$, kde p, q, *nebudou* nesoudělná čísla? Tomu věnujeme poslední příklad této kapitoly.

Příklad 3. Hledejme řetězový zlomek a pak sblížené zlomky racionálního čísla $\frac{363}{300}$ (což zřejmě není zlomek v základním tvaru).

Vyjde $\frac{363}{300} = (1, 4, 1, 3, 5)$. Sblížené zlomky jsou po řadě $1, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{23}{19}, \frac{121}{100}$. Poslední sblížený zlomek $\frac{121}{100}$ je skutečně výchozí zlomek $\frac{363}{300}$, ale ve zkráceném tvaru; je to skutečně zlomek v základním tvaru.

Co se tedy stane, jestliže budeme rovnou hledat řetězový zlomek racionálního čísla $\frac{121}{100}$? Odpověď zní, že nic. Opět vyjde (nechť se čtenář přesvědčí) $\frac{121}{100}=(1, 4, 1, 3, 5)$.

To ovšem není příliš překvapující, neboť zlomky $\frac{363}{300}$ a $\frac{121}{100}$ vyjadřují totéž racionální číslo. Vede nás to jen k podezření, že vyjádření racionálního čísla řetězovým zlomkem je jednoznačné. Toto podezření je oprávněné právě tehdy, jestliže pro poslední prvek řetězového zlomku q_n platí $q_n > 1$. V příští kapitole uvidíme, že tato podmínka plyne z rovností Euklidova algoritmu. Ponechme prozatím otázku jednoznačnosti do příští kapitoly — vzhledem k souvislosti s Euklidovým algoritmem — a položme si nyní ještě otázku, co tedy s řetězovým zlomkem, jehož poslední prvek je 1.

Ve 3. kapitole dokážeme vztah

$$(q_1, q_2, \ldots, q_n, 1) = (q_1, q_2, \ldots, q_n + 1). \tag{5}$$

Tento vzorec ukazuje, že jednoznačnost je porušena, je-li poslední prvek řetězového zlomku roven jedné. Nemusí nás to však mrzet: ve 2. kapitole se naučíme počítat prvky řetězového zlomku z Euklidova algoritmu, a při tomto výpočtu, jak uvidíme, nikdy nedostáváme jako poslední prvek jedničku.

Tato dvojznačnost je dokonce výhodná: V některých teoretických úvahách je totiž třeba vyjádřit racionální číslo řetězovým zlomkem, přičemž je předepsáno, že počet prvků má být sudý (popř. lichý). Této podmínce lze podle (5) vždy vyhovět, neboť na levé straně (5) je $(n+1)$ prvků, na pravé straně n prvků; a jak víme, z čísel n, $n+1$ je vždy jedno sudé a druhé liché. Této úvahy využijeme v jednom případě i my, a to v 7. kapitole.

Cvičení

1. Vypočítejte sblížené zlomky řetězového zlomku (a) $(2, 3, 1, 4, 2)$; (b) $(3, 4, 7, 1, 2)$; (c) $(0, 3, 8, 2)$; (d) $(10, 10, 10, 10)$.
2. Vyjádřete jako řetězový zlomek (a) $\frac{61}{11}$; (b) $\frac{137}{37}$; (c) $\frac{99}{170}$.
3. Ověřte si vztah (5) na číselných příkladech.

2. EUKLIDŮV ALGORITMUS

V učebnicích algebry se dokazuje tzv. *algoritmus dělení v* Z. Spočívá v tomto:

Ke každé uspořádané dvojici celých čísel (p, q), *kde* $q \neq 0$, *existuje právě jedna taková uspořádaná dvojice celých čísel* (q_1, r_1), *že platí*

$$p = qq_1 + r_1, \qquad 0 \leqq r_1 < |q|.$$

Číslu q_1 říkáme *neúplný podíl* (pro $r_1 = 0$ je to *„úplný“ podíl*), číslu r_1 *zbytek*.

Není-li $r_1=0$, můžeme algoritmus dělení použít na uspořádanou dvojici celých čísel (q, r_1): existuje právě jedna uspořádaná dvojice celých čísel (q_2, r_2) tak, že platí

$$q=r_1q_2+r_2, \qquad 0 \leqq r_2 < r_1 .$$

Pro $r_2 \neq 0$ můžeme celý proces opakovat atd., až nakonec bude některé $r_n=0$. K tomu musí nutně dojít, neboť pro nezáporná čísla r_1, r_2, ... zřejmě platí

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_{n-1} > r_n = 0 . \tag{1}$$

Poslední vztah (s $r_n=0$) je tedy

$$r_{n-2}=r_{n-1}q_n .$$

Tato řada rovností se nazývá *Euklidův algoritmus.* V algebře ho používáme k určení největšího společného dělitele dvou celých čísel p, q: tímto největším společným dělitelem je poslední nenulový zbytek r_{n-1}.

Jsou-li čísla p, q přirozená, nesoudělná, pak v Euklidově algoritmu je

$$r_{n-1}=1, \qquad 0<r_1<q .$$

Vypíšeme nyní všechny rovnosti Euklidova algoritmu pro přirozená nesoudělná p, q a vedle nich zapíšeme další vztahy, které získáme z jednotlivých rovností dělením:

$$p=qq_1+r_1 \rightarrow \frac{p}{q}=q_1+\frac{1}{\dfrac{q}{r_1}},$$

$$q = r_1 q_2 + r_2 \rightarrow \frac{q}{r_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}, \tag{2}$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3 \rightarrow \frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}},$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n \rightarrow \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n .$$

Jestliže v (2) dosadíme $\frac{q}{r_1}$ ze druhé rovnosti do první, $\frac{r_1}{r_2}$ ze třetí rovnosti do druhé atd., dostáváme

$$\frac{p}{q} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}},$$

tedy vyjádření kladného racionálního čísla $\frac{p}{q}$ ve tvaru řetězového zlomku.

Přitom platí: 1. Toto vyjádření je jediné možné, neboť neúplné podíly $q_1, q_2, \ldots, q_n$ jsou rovnostmi Euklidova algoritmu určeny jednoznačně v souhlasu s algoritmem dělení v Z.

2. Musí být $q_n > 1$, neboť pro $q_n = 1$ dává poslední rovnost vztah $r_{n-2} = r_{n-1}$, ale podle (1) musí být

$$r_{n-2} > r_{n-1}.$$

Odtud ihned plyne věta o jednoznačnosti.

Věta 1. *Jestliže dva pravidelné řetězové zlomky*

$$(q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad (q_1, q_2, \ldots, q_m)$$

jsou vyjádřením téhož racionálního čísla a přitom platí $q_n > 1$, $q_m > 1$, *pak je* $n = m$ *a oba řetězové zlomky jsou identické.*

Vidíme ihned, že z rovností Euklidova algoritmu nemůžeme dostat $q_n = 1$.

Euklidův algoritmus poskytuje pohodlný a velice účinný způsob, jak vypočítat čísla $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Praktický výpočet bývá různě modifikován. Uvedeme postup, který je pravděpodobně nejstručnější (i když ve své obecné podobě tak nevypadá). Ukážeme nejprve tuto obecnou podobu, a to pro větší srozumitelnost v několika krocích:

(1)
$$\begin{array}{l} p : q = q_1 \\ \underline{-qq_1} \\ r_1 \end{array}$$

(2) Před číslo r_1 napíšeme symbol q a dělíme, takže máme celkem

$$\begin{array}{l} p : q = q_1 \\ \underline{-qq_1} \\ q : r_1 = q_2 \\ \underline{-r_1q_2} \\ r_2 \end{array}$$

(3) Před číslo r_2 předepíšeme číslo r_1 a opět dělíme; celý výpočet teď vypadá takto:

$$\begin{array}{l} p : q = q_1 \\ \underline{-qq_1} \\ q : r_1 = q_2 \\ \underline{-r_1 q_2} \\ r_1 : r_2 = q_3 \\ \underline{-r_2 q_3} \\ r_3 \\ \text{atd.} \end{array}$$

Ukážeme si teď, jak tento postup vypadá při numerickém počítání. Zvolíme za příklad racionální číslo $\frac{43}{30}$, s nímž jsme už počítali ve 2. příkladu 1. kapitoly. Víme tedy předem, co má vyjít: $\frac{43}{30} = (1, 2, 3, 4)$.

Příklad 1. Vypočítejme $q_1, \ldots, q_n$ čísla $\frac{43}{30}$.

Řešení.

$$\begin{array}{l} 43 : 30 = 1 \\ \underline{-30} \\ 30 : 13 = 2 \\ \underline{-26} \\ 13 : \ 4 = 3 \\ \underline{-12} \\ 4 : \ 1 = 4 \end{array}$$

Výpočet zkracujeme tím, že nezbytná odčítání provádíme zpaměti. To se podobá postupu při obyčejném dělení. Počítáme tedy takto:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 43:30 & =1 \\
 & 30:13 & =2 \\
 & 13:\ 4 & =3 \\
 & 4:\ 1 & =4
\end{array}
$$

Teď je už dosti názorně vidět rychlost tohoto postupu.

Příklad 2. Vypočítejme $q_1, \ldots, q_n$ čísla $\frac{1156}{375}$.

Řešení.

$$
\begin{array}{rl}
1156:375 & =3 \\
375:\ 31 & =12 \\
31:\ 3 & =10 \\
3:\ 1 & =3
\end{array}
$$

Výpočet metodami 1. kapitoly by znamenal dosti úmorné počítání.

Na ukázku předvedeme dosti dlouhý výpočet. Nové zde je to, že budeme počítat řetězový zlomek racionálního čísla 2,3547. (Ve skutečnosti na tom ovšem nic nového není; bereme prostě $p = 23\,547$, $q = 10\,000$.)

Příklad 3. Vypočítejme $q_1, \ldots, q_n$ čísla 2,3547.

Řešení.

$$
\begin{array}{l}
23547 : 10000 = 2 \\
10000 : 3547 = 2 \\
3547 : 2906 = 1 \\
2906 : 641 = 4 \\
641 : 342 = 1 \\
342 : 299 = 1 \\
43
\end{array}
$$

pokračování:

$$
\begin{array}{l}
299 : 43 = 6 \\
43 : 41 = 1 \\
41 : 2 = 20 \\
2 : 1 = 2
\end{array}
$$

Tedy $2{,}3547 = (2, 2, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 20, 2)$.

Naučili jsme se počítat neúplné podíly čili prvky řetězového zlomku kladného racionálního čísla; ještě však neznáme žádný efektivní způsob výpočtu sblížených zlomků, jestliže naopak známe prvky. Tomu bude věnována příští kapitola.

Cvičení

1. Vypočítejte znovu způsobem popsaným v této kapitole cvičení 2(a), (b), (c) předchozí kapitoly.
2. Vypočítejte tímto způsobem řetězové zlomky racionálních čísel (a) $\frac{95}{42}$, (b) $\frac{308}{95}$, (c) $\frac{17}{53}$, (d) $\frac{10301}{1020}$.

   Srovnejte s cvičením 1(a), (b), (c), (d) předchozí kapitoly.

3. Vypočítejte řetězový zlomek racionálního čísla $\frac{47561}{26904}$.
(Buďte připraveni na dlouhý výpočet.)

3. VÝPOČET SBLÍŽENÝCH ZLOMKŮ

Pro sblížený zlomek $\frac{P_k}{Q_k}$ řetězového zlomku $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ platí pro $k \geqq 3$ rekurentní vzorce, které jsme slíbili už v 1. kapitole. Vyslovíme je v následující větě.

Věta 1. *Pro čitatele P_k a jmenovatele Q_k sblíženého zlomku řetězového zlomku $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ platí tyto vztahy:*

$$
\begin{aligned}
&P_1 = q_1, \quad Q_1 = 1,\\
&P_2 = q_1 q_2 + 1, \quad Q_2 = q_2,\\
&P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}, \quad k \geqq 3,\\
&Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}, \quad k \geqq 3.
\end{aligned} \tag{1}
$$

První dva vztahy (pro P_1, Q_1, P_2, Q_2) dostaneme z obecných vztahů

$$
\begin{aligned}
&P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2},\\
&Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2},
\end{aligned}
$$

jestliže v nich položíme $P_0 = 1$, $P_{-1} = 0$, $Q_0 = 0$, $Q_{-1} = 1$.

Pak pro $k=1$ dostáváme $P_1=q_1$, $Q_1=1$; pro $k=2$ je pak $P_2=q_2P_1+P_0=q_1q_2+1$, $Q_2=q_2Q_1+Q_0=q_2$.

Prozatím však budeme dávat přednost tomu, definovat vztahy pro P_1, Q_1, P_2, Q_2, protože provedená úvaha má tu vadu, že se v ní počítá se „sblíženým zlomkem nultého řádu $\frac{P_0}{Q_0}$", a dokonce i se „sblíženým zlomkem (-1)-ho řádu $\frac{P_{-1}}{Q_{-1}}$", což odporuje tomu, jak jsme sblížené zlomky zavedli.

Důkaz provedeme matematickou indukcí. První krok: Podle (2) z 1. kapitoly je

$$\frac{P_3}{Q_3}=\frac{q_3q_2q_1+q_3+q_1}{q_3q_2+1},$$

tj. $P_3=q_3(q_1q_2+1)+q_1=q_3P_2+P_1$, $Q_3=q_3q_2+1=$ $=q_3Q_2+Q_1$; pro $k=3$ tedy naše vzorce platí.

Druhý krok: Nechť (1) platí pro nějaké $i>3$, tedy

$$\frac{P_i}{Q_i}=\frac{q_iP_{i-1}+P_{i-2}}{q_iQ_{i-1}+Q_{i-2}}; \tag{2}$$

chceme dokázat, že pak platí i pro $i+1$. Pro větší názornost budeme řetězové zlomky zapisovat ve tvaru (1) z první kapitoly. Je tedy

$$\frac{P_i}{Q_i}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\ddots+\cfrac{1}{q_i}},$$

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_i + \cfrac{1}{q_{i+1}}}}}.$$

Sblížený zlomek $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$ tedy dostaneme ze sblíženého zlomku $\frac{P_i}{Q_i}$, jestliže v něm prvek q_i nahradíme součtem $q_i + \frac{1}{q_{i+1}}$.

Totéž tedy provedeme v (2), čímž ze zlomku $\frac{P_i}{Q_i}$ dostaneme zlomek $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$:

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} = \frac{\left(q_i + \frac{1}{q_{i+1}}\right) P_{i-1} + P_{i-2}}{\left(q_i + \frac{1}{q_{i+1}}\right) Q_{i-1} + Q_{i-2}},$$

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} = \frac{q_i q_{i+1} P_{i-1} + P_{i-1} + q_{i+1} P_{i-2}}{q_i q_{i+1} Q_{i-1} + Q_{i-1} + q_{i+1} Q_{i-2}}.$$

Dále budeme opět počítat P_{i+1}, Q_{i+1} samostatně:

$$P_{i+1} = q_{i+1}(q_i P_{i-1} + P_{i-2}) + P_{i-1},$$

$$Q_{i+1} = q_{i+1}(q_i Q_{i-1} + Q_{i-2}) + Q_{i-1}$$

a po dosazení z (1)

$$P_{i+1} = q_{i+1} P_i + P_{i-1},$$

$$Q_{i+1} = q_{i+1} Q_i + Q_{i-1},$$

což jsou skutečně dokazované vzorce pro $i+1$. Tím je věta dokázána.

Jiný důkaz je uveden v Chinčinově knížce [3]. Opírá se o pojem zbytku, který v této knížce také později použijeme.

Mějme řetězový zlomek

$$(q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, q_k, q_{k+1}, \dots, q_n). \tag{3}$$

Řetězový zlomek

$$r_k = (q_k, q_{k+1}, \dots, q_n)$$

nazýváme *zbytkem* řetězového zlomku (3). Mějme na paměti mezní případy $r_1 = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $r_n = (q_n) = q_n$. Pro (3) zřejmě platí

$$(q_1, \dots, q_n) = (q_1, \dots, q_{k-1}, r_k). \tag{4}$$

Řetězový zlomek $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ můžeme podle (4) psát jako (q_1, r_2); zde je

$$r_2 = (q_2, q_3, \dots, q_n),$$

$$(q_1, r_2) = q_1 + \frac{1}{r_2}. \tag{5}$$

Symetrický charakter vzorců (1) umožňuje sestavit výpočty do tabulky:

q_k	q_1	q_2	q_3	......	q_n
P_k	q_1	q_1q_2+1			
Q_k	1	q_2			

(6)

První dva sloupce tabulky (pod q_1 a q_2) vyplníme, jak je naznačeno, a pro ostatní používáme vzorců (1). Všimněme si, že podíly čísel P_k, Q_k, obsažených ve druhém a třetím řádku tabulky, se rovnají sblíženým zlomkům; pod q_n najdeme poslední sblížený zlomek $\frac{P_n}{Q_n}=\frac{p}{q}$.

Příklad 1. Sestavme tabulku (6) a vypočítejme sblížené zlomky řetězového zlomku (3, 2, 1, 1, 2, 3).

Řešení.

q_k	3	2	1	1	2	3
P_k	3	7	10	17	44	149
Q_k	1	2	3	5	13	44

Posloupnost sblížených zlomků je $3, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{5}, \frac{44}{13}, \frac{149}{44}$.

Příklad 2. Vypočítejme sblížené zlomky řetězového zlomku čísla $\frac{218}{161}$.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
218 &: 161 = 1\\
161 &: 57 = 2\\
57 &: 47 = 1\\
47 &: 10 = 4\\
10 &: 7 = 1\\
7 &: 3 = 2\\
3 &: 1 = 3
\end{aligned}
$$

$$\frac{218}{161} = (1, 2, 1, 4, 1, 2, 3)$$

q_k	1	2	1	4	1	2	3
P_k	1	3	4	19	23	65	218
Q_k	1	2	3	14	17	48	161

Sblížené zlomky: $1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{19}{14}, \frac{23}{17}, \frac{65}{48}, \frac{218}{161}$.

Příklad 3. Dokažme vzorec (5) z 1. kapitoly:

$$(q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n, 1) = (q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n + 1).$$

Řešení. Vzorec dokážeme vyplněním tabulky (6). Sestavíme dvě tabulky, nejprve pro levou stranu dokazované rovnosti, potom pro pravou stranu. Protože až po prvek q_{n-1} jsou obě strany rovnosti identické, dávají obě strany totéž P_{n-1}, Q_{n-1}, a stačí tedy sestavit jen pravé okraje tabulek.

Levá strana:

q_{n-1}	q_n	1
P_{n-1}	$q_nP_{n-1} + P_{n-2}$	$(q_n + 1)P_{n-1} + P_{n-2}$
Q_{n-1}	$q_nQ_{n-1} + Q_{n-2}$	$(q_n + 1)Q_{n-1} + Q_{n-2}$

Pravá strana:

q_{n-1}	$q_n + 1$
P_{n-1}	$(q_n + 1)P_{n-1} + P_{n-2}$
Q_{n-1}	$(q_n + 1)Q_{n-1} + Q_{n-2}$

Skutečně tedy pro oba řetězové zlomky dostáváme totéž vyjádření racionálním číslem, totiž

$$\frac{(q_n+1)\,P_{n-1}+P_{n-2}}{(q_n+1)\,Q_{n-1}+Q_{n-2}}.$$

Cvičení

1. Vypočítejte sblížené zlomky řetězových zlomků:

(a) $(0, 2, 1, 2, 1, 2)$; (b) $(1, 1, 2, 3, 2)$;
(c) $(2, 5, 1, 1, 2, 7, 10)$; (d) $(0, 5, 1, 4, 2, 3, 3, 5)$;
(e) $(0, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$.

2. Vypočítejte sblížené zlomky řetězových zlomků čísel

(a) $\frac{30}{41}$; (b) $\frac{2001}{1760}$; (c) $\frac{697}{505}$; (d) $\frac{900}{3361}$; (e) $\frac{1557}{9697}$.

3. Fibonacciho posloupnost $\{u_n\}$ je určena svými prvními dvěma členy $u_1 = u_2 = 1$ a rekurentním vztahem $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k$, $k \in \mathrm{N}$. Začíná tedy členy 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Vypočítejte sblížené zlomky řetězového zlomku (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) a povšimněte si souvislosti s prvními členy Fibonacciho posloupnosti.

4. Dokažte (srovnejte s příkladem 3 a cvičením 3 předchozí kapitoly):

(a) $(2, 2, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 20, 2) = 2{,}3547$;

(b) $(1, 1, 3, 3, 3, 1, 5, 4, 4, 1, 3) = \dfrac{47561}{26904}$.

4. VLASTNOSTI SBLÍŽENÝCH ZLOMKŮ

Budeme vyšetřovat vlastnosti posloupnosti sblížených zlomků řetězového zlomku kladného racionálního čísla. Vezměme např. posloupnost $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{11}{30}$ sblížených zlomků řetězového zlomku čísla $\frac{11}{30}$. Utvořme rozdíly $\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_2}{Q_2}$ atd., obecně $\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$, kde $k \geqq 2$ (a v daném případě $k \leqq 6$):

$$\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} = \frac{1}{Q_2 Q_1},$$

$$\frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_2}{Q_2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{6} = \frac{-1}{Q_3 Q_2},$$

$$\frac{P_4}{Q_4}-\frac{P_3}{Q_3}=\frac{3}{8}-\frac{1}{3}=\frac{1}{24}=\frac{1}{Q_4Q_3},$$

$$\frac{P_5}{Q_5}-\frac{P_4}{Q_4}=\frac{4}{11}-\frac{3}{8}=\frac{-1}{88}=\frac{-1}{Q_5Q_4},$$

$$\frac{P_6}{Q_6}-\frac{P_5}{Q_5}=\frac{11}{30}-\frac{4}{11}=\frac{1}{330}=\frac{1}{Q_6Q_5}.$$

Patrně platí

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{\pm 1}{Q_kQ_{k-1}}$$

se znamením + pro sudá k, − pro lichá k.

Věta 1. *Pro rozdíl dvou sousedních sblížených zlomků kladného racionálního čísla platí*

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k-1}}, \quad 2\leqq k\leqq n. \tag{1}$$

Důkaz provedeme nikoli pro vztah (1), nýbrž pro vztah

$$P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k=(-1)^k, \tag{2}$$

který dostaneme z (1) odstraněním zlomků. Vzorec (2) je velmi užitečný a často se s ním setkáme.

Především dokážeme, že (2) platí pro $k=2$, a to dosazením známých hodnot $P_1=q_1$, $P_2=q_1q_2+1$, $Q_1=1$, $Q_2=$ $=q_2$:

$$(q_1q_2+1).1-q_1q_2=1=(-1)^2.$$

Označme rozdíl na levé straně (2) symbolem Δ_k. Je zřejmě $\Delta_2 = 1$. Do (2) dosadíme za P_k, Q_k ze vzorců (1) předešlé kapitoly; dostáváme

$$\Delta_k = (q_k P_{k-1} + P_{k-2})\, Q_{k-1} - P_{k-1}(q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}) =$$

$$= -(P_{k-1} Q_{k-2} - P_{k-2} Q_{k-1}) = -\Delta_{k-1}.$$

Je tedy $\Delta_k = -\Delta_{k-1}$ a opakováním téhož postupu dostaneme rovnosti

$$\Delta_k = -\Delta_{k-1} = \Delta_{k-2} = \ldots = \pm \Delta_2;$$

je-li k sudé, je na konci znamení $+$, je-li k liché, je tam znamení $-$, přičemž $\Delta_2 = 1$.
Tedy celkem

$$\Delta_k = P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^k.$$

Ze vzorce (2) plyne tvrzení o nesoudělnosti čísel P_k, Q_k, které jsme vyslovili už v 1. kapitole: Největší společný dělitel čísel P_k, Q_k totiž musí dělit pravou stranu rovnosti (2), tj. číslo ± 1, je tedy 1 největším společným dělitelem čísel P_k, Q_k a $\frac{P_k}{Q_k}$ je zlomek v základním tvaru.

(Čtenář, kterému vadí, že vzorec (2), a tedy také tvrzení o nesoudělnosti čísel P_k, Q_k, platí pro $k \geqq 2$, nechť si uvědomí, že pro $k = 1$ je $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_1}{1}$, tedy největší společný dělitel čísel P_1 a Q_1 je opět 1.)

Na posloupnosti sblížených zlomků ze začátku této kapitoly si ukážeme další vlastnost sblížených zlomků. Jde o posloupnost sblížených zlomků řetězového zlomku čísla $\frac{11}{30}$. Platí

$$\frac{P_1}{Q_1}=0<\frac{11}{30},$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=\frac{1}{2}>\frac{11}{30},$$

$$\frac{P_3}{Q_3}=\frac{1}{3}<\frac{11}{30},$$

$$\frac{P_4}{Q_4}=\frac{3}{8}>\frac{11}{30},$$

$$\frac{P_5}{Q_5}=\frac{4}{11}<\frac{11}{30},$$

a konečně ovšem

$$\frac{P_6}{Q_6}=\frac{11}{30}.$$

Vidíme, že hodnoty sblížených zlomků jsou střídavě menší a větší než hodnota daného racionálního čísla, až ovšem na poslední sblížený zlomek, pro který platí rovnost. Přitom menší hodnoty mají sblížené zlomky lichého řádu $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \frac{P_5}{Q_5}$, větší hodnoty sblížené zlomky sudého řádu $\frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_4}{Q_4}$.

Věta 2. *Sblížené zlomky lichého řádu* $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \frac{P_5}{Q_5}, \ldots$ *kladného racionálního čísla* $\frac{p}{q}$ *tvoří rostoucí posloupnost, sblížené zlomky sudého řádu* $\frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_4}{Q_4}, \frac{P_6}{Q_6}, \ldots$ *klesající posloupnost.*

Důkaz. K důkazu potřebujeme vzorec

$$P_{k-2}Q_k - P_kQ_{k-2} = (-1)^k q_k, \quad k \geqq 3. \tag{3}$$

Jestliže jako prve dosadíme za P_k, Q_k ze vzorců (1) předešlé kapitoly, dostáváme

$$P_{k-2}(q_kQ_{k-1} + Q_{k-2}) - (q_kP_{k-1} + P_{k-2})\, Q_{k-2} = -q_k\Delta_{k-1},$$

kde označení Δ_{k-1} je převzato z důkazu předešlé věty: je $\Delta_{k-1} = (-1)^{k-1}$, což dokazuje vzorec (3). Vydělíme-li (3) číslem Q_kQ_{k-2}, které je ovšem kladné, dostáváme

$$\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k\, q_k}{Q_kQ_{k-2}}.$$

Tedy pro sudé k je

$$\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} - \frac{P_k}{Q_k} > 0 \quad \text{pro} \quad k \geqq 3$$

a pro sblížené zlomky sudého řádu je

$$\frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}},$$

tvoří tedy klesající posloupnost. Pro liché k je však

$$\frac{P_k}{Q_k} > \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}},$$

tj. sblížené zlomky lichého řádu tvoří rostoucí posloupnost.

Z této věty a z věty 1 vyplývá, že platí

$$\frac{P_1}{Q_1} < \frac{P_3}{Q_3} < \ldots < \frac{p}{q} < \ldots < \frac{P_4}{Q_4} < \frac{P_2}{Q_2}.$$

Slovy: Sblížené zlomky lichého řádu řetězového zlomku kladného racionálního čísla $\frac{p}{q}$ jsou vesměs menší než $\frac{p}{q}$, sblížené zlomky sudého řádu jsou vesměs větší. Toto tvrzení se netýká posledního sblíženého zlomku

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{p}{q}.$$

Toto tvrzení se často vyskytuje v této zjednodušené formě: $\frac{p}{q}$ leží mezi dvěma sousedními sblíženými zlomky.

Platí však silnější věta:

Věta 3. *Pro každé k (i pro $k = n$) platí, že hodnota zlomku $\frac{p}{q}$ je blíže hodnotě sblíženého zlomku $\frac{P_k}{Q_k}$ než hodnotě zlomku $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$; tj. platí*

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\left|\frac{p}{q}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right|.$$

Důkaz. Mějme řetězový zlomek

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n) \tag{4}$$

a označme písmenem r jeho zbytek:

$$r=(q_{k+1}, \ldots, q_n).$$

Místo (4) tedy píšeme

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, r). \tag{5}$$

Racionální číslo $\frac{p}{q}$, které je vyjádřeno řetězovým zlomkem (4), resp. (5), zapíšeme takto:

$$\frac{p}{q}=\frac{rP_k+P_{k-1}}{rQ_k+Q_{k-1}},$$

čili

$$\frac{p}{q}\cdot rQ_k+\frac{p}{q}Q_{k-1}=rP_k+P_{k-1},$$

$$\frac{p}{q}\cdot rQ_k-rP_k=P_{k-1}-\frac{p}{q}Q_{k-1},$$

$$rQ_k\left(\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right)=Q_{k-1}\left(\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-\frac{p}{q}\right).$$

Pro $r>1$, $Q_k>Q_{k-1}$ odtud dostáváme

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\left|\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{p}{q}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right|. \qquad (6)$$

Důsledek. Z toho, že $\frac{p}{q}$ leží mezi dvěma po sobě jdoucími sblíženými zlomky, řekněme $\frac{P_k}{Q_k}$ a $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$, plyne

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\left|\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}-\frac{P_k}{Q_k}\right|,$$

což podle věty 1 dává

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\frac{1}{Q_kQ_{k+1}}. \qquad (7)$$

Tento vzorec platí pro $k<n$; uvědomíme-li si však, že $Q_{k+1}>Q_k$, dostáváme vzorec

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\frac{1}{Q_k^2}, \qquad (8)$$

který platí i pro $k=n$.

Poznámka. Vzorec (8) udává horní mez výrazu

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|. \qquad (9)$$

Výraz (9) je absolutní hodnota chyby aproximace čísla $\frac{p}{q}$ sblíženým zlomkem $\frac{P_k}{Q_k}$. Samotná chyba je rozdíl

$$\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k};$$

může to být i záporné číslo.

Existuje také vzorec pro dolní mez výrazu (9). Důležitější však je otázka, zda odhad (8) nelze zlepšit. V Chinčinově knížce [3] i v Perronově knize [4] se dokazují tato dvě tvrzení:

1. *Ze dvou po sobě jdoucích sblížených zlomků řetězového zlomku čísla* $\frac{p}{q}$ *má alespoň jeden tu vlastnost, že platí*

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{2Q_k^2}.$$

2. *Ze tří po sobě jdoucích sblížených zlomků řetězového zlomku čísla* $\frac{p}{q}$ *má alespoň jeden tu vlastnost, že platí*

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,.\,Q_k^2}.$$

Věta 4. *Hodnota sblíženého zlomku* $\frac{P_k}{Q_k}$ *se méně liší od hodnoty* $\frac{p}{q}$ *než hodnota kteréhokoli jiného zlomku* $\frac{x}{y}$, *pro jehož jmenovatele platí* $y < Q_k$, *tj. platí nerovnost*

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \left|\frac{p}{q} - \frac{x}{y}\right|, \tag{10}$$

pokud je $y < Q_k$.

Jinak: Mezi zlomky se jmenovateli nejvýše rovnými Q_k aproximuje sblížený zlomek $\frac{P_k}{Q_k}$ číslo $\frac{p}{q}$ nejlépe.

Důkaz sporem. Nechť existuje zlomek $\frac{x}{y}$ vyhovující podmínkám věty. Protože zlomek $\frac{P_k}{Q_k}$ je blíže zlomku $\frac{p}{q}$ než zlomek $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ a zlomek $\frac{x}{y}$ je blíže zlomku $\frac{p}{q}$ než zlomek $\frac{P_k}{Q_k}$, je zlomek $\frac{x}{y}$ blíže zlomku $\frac{p}{q}$ než zlomek $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$. Protože dále $\frac{p}{q}$ leží mezi $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ a $\frac{P_k}{Q_k}$, platí

$$\left|\frac{x}{y}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right|<\left|\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right|.$$

Odtud s použitím věty 1

$$\frac{|xQ_{k-1}-yP_{k-1}|}{yQ_{k-1}}<\frac{1}{Q_kQ_{k-1}}.$$

Z $y<Q_k$ plyne $yQ_{k-1}<Q_kQ_{k-1}$, a tedy

$$|xQ_{k-1}-yP_{k-1}|<1.$$

Protože x, y, P_{k-1}, Q_{k-1} jsou celá čísla, je i výraz v absolutní hodnotě celé číslo, ale to je možné jen tak, že je

$$xQ_{k-1}-yP_{k-1}=0,$$

tj.

$$\frac{x}{y}=\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}.$$

To je však hledaný spor, protože sblížený zlomek $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ by se podle toho měl méně lišit od zlomku $\frac{p}{q}$ než sblížený zlomek $\frac{P_k}{Q_k}$, zatímco podle věty 3 se liší více.

Budeme definovat pojem nejlepšího přiblížení. Zlomek $\frac{P}{Q}$ se nazývá *nejlepším přiblížením zlomku* $\frac{p}{q}$, jestliže kterýkoli jiný zlomek, který leží blíže nebo stejně blízko zlomku $\frac{p}{q}$, má většího jmenovatele; nechť je tento zlomek $\frac{x}{y}$, pak slova „leží blíže nebo stejně blízko“ znamenají, že platí

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P}{Q}\right| \leqq \left|\frac{p}{q}-\frac{x}{y}\right| \tag{11}$$

pro $y > Q$.

Podle věty 4 jsou tedy sblížené zlomky řetězového zlomku čísla $\frac{p}{q}$ nejlepšími přiblíženími zlomku $\frac{p}{q}$.

Toto tvrzení platí pro sblížené zlomky $\frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots,$

nemusí však platit pro první sblížený zlomek $\frac{P_1}{Q_1}$. Ukážeme si to na příkladě.

Příklad 1. Zvolme $\frac{p}{q}$ tak, aby bylo $q_2 = 1$. Sestavme např. tabulku

q_k	2	1	3	2
P_k	2	3	11	25
Q_k	1	1	4	9

Sblížené zlomky $\frac{3}{1} = 3$, $\frac{11}{4}$, $\frac{25}{9}$ jsou podle věty 4 nejlepšími přiblíženími zlomku $\frac{25}{9}$. Tvrdíme, že sblížený zlomek $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{2}{1} = 2$ není nejlepším přiblížením zlomku $\frac{25}{9}$ podle naší definice. Je totiž zřejmě

$$\left|\frac{25}{9} - \frac{P_2}{Q_2}\right| \leqq \left|\frac{25}{9} - \frac{P_1}{Q_1}\right|,$$

tj.

$$\left|\frac{25}{9} - 3\right| \leqq \left|\frac{25}{9} - 2\right|,$$

$$\frac{2}{9} \leqq \frac{7}{9},$$

přičemž pro jmenovatele obou zlomků platí $Q_1 = Q_2 = 1$.

Věta 5. *První sblížený zlomek* $\frac{P_1}{Q_1}$ *je nebo není nejlepším přiblížením zlomku* $\frac{p}{q}$ *podle toho, zda* $q_2 > 1$ *nebo* $q_2 = 1$.

Důkaz je téměř samozřejmý. Pro $q_2 = 1$ je $Q_1 = Q_2 = 1$, přičemž platí nerovnost (11). Je $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{q_1 + 1}{1}$, $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_1}{1}$ a zřejmě

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{P_2}{Q_2}\right| \leqq \left|\frac{p}{q} - \frac{P_1}{Q_1}\right|,$$

$$\left|\frac{p}{q} - (q_1 + 1)\right| \leqq \left|\frac{p}{q} - q_1\right|,$$

protože

$$\left|\frac{p}{q} - q_1 - 1\right| = \left|\frac{p}{q} - q_1 + (-1)\right| \leqq \left|\frac{p}{q} - q_1\right| + 1.$$

Cvičení

1. Čtenář si jistě povšiml teoretického rázu této kapitoly. Přitom všechny dokázané věty lze ilustrovat na nějaké posloupnosti sblížených zlomků, tak jako jsme to provedli před uvedením vět 1 a 2. Doporučujeme čtenáři, aby si podobnou ilustraci provedl sám i u dalších vět s použitím např. některé posloupnosti sblížených zlomků ze cvičení 1, 2 předešlé kapitoly.
2. Vlastnosti sblížených zlomků, které jsme zde popsali, připouštějí velmi názornou geometrickou interpretaci. Nechť se o ni čtenář pokusí. V soustavě pravoúhlých souřadnic vyznačíme číslo $\frac{p}{q}$ na svislé ose

a vedeme rovnoběžku s vodorovnou osou. Pak zobrazíme v 1. kvadrantu sblížené zlomky $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots$ body, jejichž první souřadnice budou 1, 2, ... a druhé souřadnice čísla $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots$. K tomuto cvičení lze opět vybrat některou z posloupností sblížených zlomků ze cvičení 1, 2 předešlé kapitoly.

3. Nalezněte pátý sblížený zlomek řetězového zlomku čísla 0,317317 a určete horní mez výrazu $\left|0{,}317317 - \frac{P_5}{Q_5}\right|$ podle vzorce (7). Vypočítejte chybu $\delta = 0{,}317317 - \frac{P_5}{Q_5}$.

5. NEROVNOSTI MEZI ŘETĚZOVÝMI ZLOMKY

Který ze dvou řetězových zlomků (3, 2, 4), (3, 3, 4) je větší? Byli bychom možná ochotni prohlásit za větší (3, 3, 4), protože ve dvou prvcích se shoduje s druhým řetězovým zlomkem a třetí prvek je větší. Ale snadno — převedením řetězových zlomků na racionální čísla — se přesvědčíme, že je tomu právě naopak: $(3, 2, 4) = \frac{31}{9}$, $(3, 3, 4) = \frac{43}{13}$, $\frac{31}{9} > \frac{43}{13}$, tedy také $(3, 2, 4) > (3, 3, 4)$.

A dále, který ze dvou řetězových zlomků (1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 4, 3, 2) je větší? Zatím to dovedeme zjistit jen převedením řetězových zlomků na racionální čísla. Je $(1, 2, 3, 4) > (1, 2, 3, 4, 3, 2)$; proveďte výpočet.

Přesvědčte se, že také platí $(3, 2, 4) < (3, 2, 5)$ a $(1, 2, 3) < (1, 2, 3, 4, 5)$.

V této kapitole odvodíme věty, které nám umožní srovnávat řetězové zlomky bez jejich převádění na odpovídající racionální čísla.

Vyšetřování nerovnosti rozdělíme na dva případy. Nejprve se budeme zabývat nerovnostmi typu $(1, 2, 3, 4) > (1, 2, 3, 4, 3, 2)$ a $(1, 2, 3) < (1, 2, 3, 4, 5)$. Vidíme, co mají tyto dva příklady společného. Porovnáváme dva řetězové zlomky $(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ a $(q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n)$. Druhý řetězový zlomek dostaneme z prvního přidáním $n-k$ prvků $q_{k+1}, \ldots, q_n$.

Věta 1. *Buďte racionální čísla a, b dána ve tvaru řetězových zlomků $a = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$, $b = (q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n)$. Pak platí $a > b$, je-li k sudé, $a < b$, je-li k liché.*

Důkaz. Označme zbytky řetězového zlomku čísla a postupně $r_k, r_{k-1}, r_{k-2}, \ldots, r_1$.
Je

$$r_k = (q_k) = q_k,$$

$$r_{k-1} = (q_{k-1}, q_k),$$

$$r_{k-2} = (q_{k-2}, q_{k-1}, q_k),$$

$$\ldots\ldots$$

$$r_1 = a.$$

Podobně zbytky řetězového zlomku čísla b označme s_k, $s_{k-1}, s_{k-2}, \ldots, s_1$. Je

$$s_k = (q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n),$$

$$s_{k-1}=(q_{k-1},\ q_k,\ \ldots,\ q_n),$$

$$s_{k-2}=(q_{k-2},\ q_{k-1},\ \ldots,\ q_n),$$

$$\ldots\ldots$$

$$s_1=b\,.$$

Především je $s_k=(q_k,\ q_{k+1},\ \ldots,\ q_n)>q_k=r_k$. Dále platí

$$r_{k-1}=q_{k-1}+\frac{1}{r_k},\quad s_{k-1}=q_{k-1}+\frac{1}{s_k}.$$

Protože podle hořejšího je $r_k<s_k$ a r_k i s_k jsou kladná čísla, je

$$\frac{1}{r_k}>\frac{1}{s_k},$$

a tedy

$$r_{k-1}>s_{k-1}.$$

Dále platí

$$r_{k-2}=q_{k-2}+\frac{1}{r_{k-1}},\quad s_{k-2}=q_{k-2}+\frac{1}{s_{k-1}}$$

a vzhledem k nerovnosti mezi r_{k-1}, s_{k-1} je

$$r_{k-2}<s_{k-2}.$$

Postup lze opakovat tak dlouho, až skončíme nerovností mezi r_1 a s_1, tj. mezi a a b. Dostáváme posloupnost nerovností, v níž se střídají znaky $<$, $>$:

$$r_k<s_k\,,$$

$$r_{k-1}>s_{k-1}\,,$$

$$r_{k-2} < s_{k-2},$$

$$\dots\dots$$

$$a = r_1 \lesseqgtr s_1 = b.$$

Počet těchto nerovností je k. Proto pro liché k bude v poslední nerovnosti znak $<$, pro sudé k znak $>$. To je tvrzení naší věty.

Nyní jsou už jasné dva příklady, které jsme uvedli před vyslovením věty: $(1, 2, 3, 4) > (1, 2, 3, 4, 3, 2)$ (sudé k), $(1, 2, 3) < (1, 2, 3, 4, 5)$ (liché k).

Druhý typ nerovností, který budeme zkoumat, je charakterizován příklady $(3, 2, 4) > (3, 3, 4)$ a $(3, 2, 4) < (3, 2, 5)$. Naše úvaha však bude obecnější, tj. neomezíme se na dva řetězové zlomky s týmž počtem prvků. Předem vyloučíme řetězové zlomky, jejichž poslední prvek je 1, neboť už z 1. kapitoly známe vzorec

$$(q_1, q_2, \dots, q_n, 1) = (q_1, q_2, \dots, q_n + 1).$$

Věta 2. *Buďte dány dva řetězové zlomky, netvořící právě uvedenou dvojici. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Nejsou-li zlomky identické, pak si nejsou rovny.*

(b) *Označíme-li*

$$a = (q_1, q_2, \dots, q_n),\ b = (q'_1, q'_2, \dots, q'_m),$$

pak pro $q_1 > q'_1$ platí $a > b$, pro $q_1 < q'_1$ platí $a < b$.

(c) *Nechť $q_1 = q'_1$, $q_2 = q'_2$, …, $q_k = q'_k$. Je-li k sudé, pak pro $q_{k+1} > q'_{k+1}$ je $a > b$, pro $q_{k+1} < q'_{k+1}$ je $a < b$. Je-li k*

liché, platí naopak, že pro $q_{k+1} > q'_{k+1}$ je $a < b$, *pro* $q_{k+1} < q'_{k+1}$ *je* $a > b$.

Důkaz. Tvrzení (b) i (a) plyne z (c). Budeme tedy dokazovat tvrzení (c). Uvažujme řetězové zlomky racionálních čísel

$$a = (q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n),$$

$$b = (q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{k+1}, \ldots, q'_m).$$

Budiž

$$q'_{k+1} > q_{k+1}.$$

Označme jako v důkazu předešlé věty $r_k, r_{k-1}, \ldots, r_1 = a$ zbytky řetězového zlomku čísla a, $s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1 = b$ zbytky řetězového zlomku čísla b.

Především platí

$$s_{k+1} \geqq q'_{k+1} \geqq q_{k+1} + 1 \geqq r_{k+1},$$

tedy

$$s_{k+1} \geqq r_{k+1},$$

kde rovnost platí jen v případě, který jsme předem vyloučili.

Jako předtím dokážeme posloupnost nerovností

$$r_{k+1} < s_{k+1},$$

$$r_k > s_k,$$

$$\ldots\ldots$$

$$a = r_1 \gtrless s_1 = b.$$

Tyto nerovnosti jsou opačného smyslu než nerovnosti v důkazu předešlé věty. Proto pro $q_{k+1} < q'_{k+1}$ (předpoklad důkazu) pro sudé k je $a < b$, pro liché k je $a > b$. Pro $q_{k+1} > q'_{k+1}$ se smysl nerovnosti mezi čísly a, b změní: tj. pro sudé k je $a > b$, pro liché k je $a < b$.

Tato věta, zdánlivě složitá, dává ihned (3, 2, 4) > (3, 3, 4), (3, 2, 4) < (3, 2, 5), ale také např. (3, 2, 4) < (3, 2, 5, 7, 1) nebo (3, 2, 4) > (3, 3, 3, 3, 3).

Poznámka 1. Při důkazu věty 1 jsme vůbec nepoužili přidaných prvků $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n$. Podobně nikde v důkazu věty 2 jsme nepoužili čísel n, m, tj. počtu prvků řetězových zlomků čísel a, b.

Poznámka 2. Může se stát, že z nějakých důvodů máme k dispozici jen prvních $k+1$ prvků srovnávaných řetězových zlomků. Podle poznámky 1 platí: srovnáváme-li řetězové zlomky podle věty 1, je

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k) < (q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots)$$

nebo

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k) > (q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots),$$

podle toho, jaké je číslo k. Používáme-li věty 2, platí $(q_1, q_2, \ldots, q_{k+1}, \ldots) \gtrless (q_1, q_2, \ldots, q'_{k+1})$ podle toho, jaké je číslo k a zda platí $q_{k+1} \lesseqgtr q'_{k+1}$.

6. APROXIMACE IRACIONÁLNÍHO ČÍSLA

Iracionální číslo vyjadřujeme různými způsoby; např. nekonečnými neperiodickými desetinnými rozvoji nebo hodnotami různých funkcí (jako je odmocnina, logaritmus, goniometrické funkce apod.)

Ke každému iracionálnímu číslu α a $n \in \mathrm{N}$ existuje racionální číslo a_n takové, že platí

$$|\alpha - a_n| \leqq 0{,}5 \,.\, 10^{-n}. \tag{1}$$

Toto číslo a_n nazýváme *n-místným* nebo *n-ciferným zaokrouhlením iracionálního čísla* α; také se používá názvu *n-místná* (*n-ciferná*) *racionální aproximace iracionálního čísla* α.

Např. zaokrouhlení čísla π na dvě desetinná místa je 3,14; na čtyři desetinná místa 3,1416; na deset desetinných míst 3,1415926536. Tyto hodnoty se naleznou v běžných logaritmických tabulkách, které obsahují některé konstanty zaokrouhlené na dostatečný počet desetinných míst. U jiných čísel, např. druhých a třetích odmocnin, logaritmů, hodnot goniometrických funkcí, však zpravidla najdeme jen zaokrouhlení na pět nebo určitý malý počet desetinných míst. Tak např. najdeme $\sqrt{2} = 1{,}41421$, $\sqrt{5} = 2{,}236068$, $\log 2 = 0{,}30103$, číslo e (základ přirozených logaritmů) $= 2{,}71828$ atd. Čísla a_n, pro něž platí (1), určujeme také měřením: Odhad chyby je dán tím, že prostým okem dokážeme rozlišit, zda ručička měřicího přístroje nedosáhla nebo naopak překročila polovinu posledního dílku stupnice.

Nás však bude zajímat něco jiného. Budeme iracionální čísla (ve skutečnosti jejich racionální zaokrouhlení) aproximovat zlomky, které mají vlastnost nejlepšího přiblížení, definovanou v kapitole 4. Tam jsme také dokázali, že tuto vlastnost mají sblížené zlomky, až snad na první.

Existují však ještě jiné zlomky, které mají vlastnost nejlepšího přiblížení. Říká se jim *vsunuté zlomky*.

Buďte $\frac{P_k}{Q_k}$, $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ dva po sobě jdoucí sblížené zlomky řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Utvoříme posloupnost zlomků: $\frac{P_k}{Q_k}$, $\frac{P_{k+1}+P_k}{Q_{k+1}+Q_k}$, $\frac{2P_{k+1}+P_k}{2Q_{k+1}+Q_k}$, $\frac{3P_{k+1}+P_k}{3Q_{k+1}+Q_k}$, $\ldots$, $\frac{cP_{k+1}+P_k}{cQ_{k+1}+Q_k}$, $\ldots$, $\frac{(q_{k+2}-1)\,P_{k+1}+P_k}{(q_{k+2}-1)\,Q_{k+1}+Q_k}$, $\frac{q_{k+2}P_{k+1}+P_k}{q_{k+2}Q_{k+1}+Q_k}=\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$.

První a poslední člen této posloupnosti jsou sblížené zlomky $\frac{P_k}{Q_k}$, $\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$. Žádný jiný člen však není sblížený zlomek; jsou to vesměs zlomky tvaru

$$\frac{cP_{k+1}+P_k}{cQ_{k+1}+Q_k}, \tag{2}$$

kde $c \in \mathrm{N}$ splňuje nerovnosti

$$1 \leqq c \leqq q_{k+2}-1. \tag{3}$$

Právě těmto zlomkům říkáme vsunuté zlomky. Je zřejmé, že nějaké zlomky dostaneme jen pro $q_{k+2}>1$; pro $q_{k+2}=1$ vsunuté zlomky neexistují.

Připomeneme si definici „sblíženého zlomku nultého řádu“ $\frac{P_0}{Q_0}$, o kterém jsme se zmínili v kapitole 3: $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$. Definice vsunutých zlomků má totiž smysl i pro $k = 0$.

Ne všechny vsunuté zlomky jsou však nejlepšími přiblíženími. Perron v [4] dokazuje větu:

Vsunutý zlomek (2) *je právě tehdy nejlepším přiblížením, jestliže* $2c > q_{k+2}$ *nebo jestliže* $2c = q_{k+2}$ *a přitom platí* $(q_{k+2}, q_{k+1}, \ldots, q_2) > (q_{k+2}, q_{k+3}, q_{k+4}, \ldots)$. *Pro* $2c < q_{k+2}$ *není vsunutý zlomek* (2) *nejlepším přiblížením.*

Perron ilustruje důsledky tohoto tvrzení na nejlepších přiblíženích čísla π. Uveďme jeho příklad; k výpočtu použijeme hodnoty π, zaokrouhlené na deset desetinných míst. Menší počet desetinných míst by nezaručil dostatečnou přesnost; čtenář se může sám přesvědčit, že pro hodnotu $\pi = 3{,}1415926$ nedostane s dostatečnou přesností už prvek q_5.

Příklad 1. Určeme nejlepší přiblížení čísla π.

Řešení.

3,14159 26536 : 1 00000 00000 = 3
1 00000 00000 : 14159 26536 = 7
14159 26536 : 885 14248 = 15
885 14248 : 882 12816 = 1
3 01432

pokračování:

882 12816 : 3 01432 = 292
3 01432 : 1 94672 = 1
1 94672 : 1 06760 = 1

V dělení nebudeme pokračovat; dostali jsme právě $q_7 = 1$; uvidíme však, že už sblížený zlomek $\frac{P_6}{Q_6}$ má příliš velkého čitatele i jmenovatele, a takové zlomky se k aproximaci nehodí. Prvních šest sblížených zlomků: $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{3}{1}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{22}{7}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{333}{106}$, $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{355}{113}$, $\frac{P_5}{Q_5} = \frac{103993}{33102}$, $\frac{P_6}{Q_6} = \frac{104348}{33215}$.

Budeme teď hledat vsunuté zlomky: Hodnoty $P_0 = 1$, $P_1 = 3$, $Q_0 = 0$, $Q_1 = 1$ dávají vsunuté zlomky

$$\frac{3c+1}{c}, \quad \text{kde } 1 \leqq c \leqq 6;$$

hodnoty $P_1 = 3$, $P_2 = 22$, $Q_1 = 1$, $Q_2 = 7$ dávají

$$\frac{22c'+3}{7c'+1}, \quad \text{kde } 1 \leqq c' \leqq 14;$$

hodnoty $P_2 = 22$, $P_3 = 333$, $Q_2 = 7$, $Q_3 = 106$ by dávaly

$$\frac{333c''+22}{106c''+7}, \text{ avšak } q_4 = 1;$$

hodnoty $P_3 = 333$, $P_4 = 355$, $Q_3 = 106$, $Q_4 = 113$ dávají

$$\frac{355c'''+333}{113c'''+106}, \quad \text{kde } 1 \leqq c''' \leqq 291.$$

Avšak podle citované věty zlomky $\frac{3c+1}{c}$ poskytují nejlepší přiblížení pro hodnoty $c = 4, 5, 6$: odtud po snadném výpočtu vsunuté zlomky $\frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}$. Zlomky $\frac{22c'+3}{7c'+1}$ poskytují nejlepší přiblížení pro $c'=8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$; odtud sedm vsunutých zlomků $\frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \frac{311}{99}$. Zlomky $\frac{355c'''+333}{113c'''+106}$ poskytují nejlepší přiblížení pro $c'''=147, 148, \ldots$, což jsou zlomky s velkými čitateli a jmenovateli: $\frac{52518}{16717}, \frac{52873}{16830}, \ldots$. Zde je $q_5 = 292$; pro $c'''=146$ tedy platí $2c'''=q_5$; tedy to, zda dostaneme nejlepší přiblížení také pro $c'''=146$, závisí na tom, zda platí nerovnost $(q_5, q_4, q_3, q_2) > (q_5, q_6, q_7, \ldots)$. Vzpomeňme si na poznámku z předešlé kapitoly. Více prvků než sedm jsme nevypočítali, ale podle zmíněné poznámky to stačí. Skutečně platí $(292, 1, 15, 7) > (292, 1, 1, \ldots)$ podle věty 2 z předešlé kapitoly. Dostáváme tedy nejlepší přiblížení i pro $c'''=146$; je to zlomek $\frac{52163}{16604}$.

Už jsme se zmínili o tom, že zlomky s příliš velkými čísly se k aproximacím nehodí.

Účelem těchto aproximací je najít zlomek pokud možno s malými čísly, přičemž je ovšem taková aproximace tím lepší, čím je chyba menší. U čísla π byly některé dobré aproximace známy už před vybudováním teorie řetězových zlomků. Tak např. Archimédes věděl, že π leží mezi $\frac{22}{7}$

a $\frac{223}{71}$, Adrian z Metz, zvaný Metius (okolo roku 1600) znal aproximace $\frac{333}{106}$ i $\frac{355}{113}$.

Vypočítejme hodnoty těchto zlomků a jejich chyby:

$$\frac{22}{7} = 3{,}14285\,7\ldots; \quad \text{chyba} = -0{,}001;$$

$$\frac{223}{71} = 3{,}14084\,5\ldots; \quad \text{chyba} = +0{,}0007;$$

$$\frac{333}{106} = 3{,}14150\,94\ldots; \quad \text{chyba} = +0{,}00008;$$

$$\frac{355}{113} = 3{,}14159\,29203\,5\ldots; \quad \text{chyba} = -0{,}00000\,02667\,6.$$

Vidíme, že $\frac{355}{113}$ je velmi dobrá aproximace.

O aproximacích iracionálních čísel racionálními existuje řada značně hlubokých vět; v této elementární knížce se však omezíme jen na to, co jsme řekli až dosud. Některé věty o aproximacích nalezne čtenář v Chinčinově knížce [3].

Následující dva příklady mají zcela odlišný charakter; jejich význam je především heuristický. Jsou přípravou na kapitoly o řetězových zlomcích iracionálních čísel. Nahradíme-li totiž iracionální číslo α jeho racionálním zaokrouhlením a_n, bude zřejmě přesnost výpočtů záviset na čísle n;

uvidíme však, že přitom narazíme na jistou charakteristickou vlastnost prvků řetězového zlomku, kterou ovšem prokážeme až v kapitole 9, pojednávající o řetězových zlomcích iracionálních čísel.

Příklad 2. Počítejme prvky řetězového zlomku čísla 1,41421, což je pětimístné zaokrouhlení iracionálního čísla $\sqrt{2}$. Dostaneme $q_1 = 1$ a $q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = q_7 = 2$. Bohužel q_8 kazí tento dojem periodicity, protože je $q_8 = 3$. Ale kdybychom vzali zaokrouhlení čísla $\sqrt{2}$ na více desetinných míst, dostali bychom patrně další dvojky. Rozhodně je zde podezření, že řetězový zlomek čísla $\sqrt{2}$ je periodický, přičemž jednoprvková perioda je 2.

Příklad 3. Ve cvičení 3 kapitoly 3 jsme vyšetřovali řetězový zlomek (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1). Toto číslo je jistým racionálním zaokrouhlením iracionálního čísla $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Zkusme vzít za zaokrouhlení čísla $\sqrt{5}$ hodnotu 2,236068, uvedenou na začátku této kapitoly. Pro racionální zaokrouhlení čísla $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ dostaneme 1,618034. Přesvědčme se, že řetězový zlomek tohoto čísla je $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$; zkusme, kolik jedniček takto dostaneme. Jak se ukáže výpočtem (snadným, ale zdlouhavým), který si čtenář provede ve cvičení, vyjde dokonce $q_1 = q_2 = \ldots = q_{18} = 1$; až teprve $q_{19} \neq 1$. Zde už je tedy podezření z periodicity velmi silné.

Rozumí se ovšem, že výpočtem prvků žádného racionálního zaokrouhlení nemůžeme nikdy periodicitu prokázat. Pojem periodicity je totiž spjat s pojmem nekonečného rozvoje, v případě řetězových zlomků s pojmem nekonečného řetězového zlomku; ten však zavedeme až v kapitole 9.

Smiřme se tedy s tím, co jsme řekli předem o heuristické ceně takovýchto příkladů.

Doufáme, že čtenář nyní nepojal podezření, že řetězový zlomek **každého** iracionálního čísla je periodický. Viz k tomu cvičení 3.

Cvičení

1. Vypočítejte prvních šest sblížených zlomků čísla $\sqrt{2}$. Vypočítejte vsunuté zlomky až do $\dfrac{cP_6 + P_5}{cQ_6 + Q_5}$ a určete, které z nich jsou nejlepšími přiblíženími.
2. Proveďte podrobný výpočet příkladu 3 až do $q_{18} = 1$ a určete $q_{19} \neq 1$.
3. Jisté racionální zaokrouhlení čísla e je dáno řetězovým zlomkem (2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6). Zjistěte, zda k výpočtu těchto devíti prvků postačí pětimístné zaokrouhlení čísla e, uvedené na začátku kapitoly. Jestliže ne, proveďte výpočet s vícemístným zaokrouhlením. (Devítimístné zaokrouhlení je 2,71828 1828.)

7. SYMETRICKÉ ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

První pojem, který zde zavedeme, je *inverzní řetězový zlomek*. Název napovídá, oč jde: k řetězovému zlomku (2, 3, 5, 4, 2) je inverzní řetězový zlomek zřejmě (2, 4, 5, 3, 2) a obráceně.

Příklad 1. Vypočítejme řetězové zlomky (2, 3, 5, 4, 2) a (2, 4, 5, 3, 2).

Řešení.

Q_k	2	3	5	4	2
P_k	2	7	37	155	347
Q_k	1	3	16	67	150

Je tedy (2, 3, 5, 4, 2) $=\frac{P_5}{Q_5}=\frac{347}{154}$. Povšimněme si, že $P_4=155$.

q_k	2	4	5	3	2
P_k	2	9	47	150	347
Q_k	1	4	21	67	155

Je (2, 4, 5, 3, 2) $=\frac{347}{155}=\frac{P_5}{P_4}$, kde čísla P_4, P_5 jsou čitatelé sblížených zlomků inverzního řetězového zlomku (2, 3, 5, 4, 2).

Tento příklad je ilustrací následující věty:

Věta 1. *Nechť je* $(q_1, q_2, \ldots, q_n)=\frac{P_n}{Q_n}$ *a nechť* P_{n-1} *je čitatel předposledního sblíženého zlomku. Řetězový zlomek*

$$(q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1)$$

nazýváme inverzním k řetězovému zlomku $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ *a platí*

$$(q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1)=\frac{P_n}{P_{n-1}}.$$

Důkaz. Sestavme posloupnost rovností pro čísla P_k, počínajíc P_1:

$$P_1=q_1 . 1,$$

$$P_2=q_1 q_2+1=q_2 . P_1+1,$$

$$P_3=q_3 . P_2+P_1$$

$$\ldots\ldots$$

$$P_n=q_n . P_{n-1}+P_{n-2}.$$

Odtud

$$\frac{P_2}{P_1}=q_2+\frac{1}{P_1}=q_2+\frac{1}{q_1}=(q_2, q_1),$$

$$\frac{P_3}{P_2}=q_3+\frac{1}{\frac{P_2}{P_1}}=(q_3, q_2, q_1),$$

$$\ldots\ldots$$

$$\frac{P_n}{P_{n-1}}=q_n+\frac{1}{\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}}=(q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1).$$

Tím je věta dokázána.

Jsou-li si oba inverzní řetězové zlomky rovny, je $q_1 = q_n$, $q_2 = q_{n-1}$, ... Mohou nastat dva případy. Řetězový zlomek

$$(q_1, \ldots, q_m, q_m, \ldots, q_1) \tag{1}$$

má sudý počet prvků $2m$; řetězový zlomek

$$(q_1, \ldots, q_m, q_{m+1}, q_m, \ldots, q_1) \tag{2}$$

má lichý počet prvků $2m+1$.

Řetězový zlomek tvaru (1) nebo (2) se nazývá *symetrický*.

Odvodíme nyní jednu větu o symetrických řetězových zlomcích; omezíme se přitom na řetězové zlomky se sudým počtem prvků. (Pro případ (2) platí obdobná věta, tu však nebudeme v dalším potřebovat.)

Věta 2. *Budiž $\frac{p}{q}$ zlomek v základním tvaru, $p > q > 1$ ($p, q \in \mathrm{N}$). Potom $\frac{p}{q}$ lze vyjádřit řetězovým zlomkem, který je symetrický a má sudý počet prvků $n = 2m$ právě tehdy, když $p \mid q^2 + 1$.*

Důkaz má dvě části, protože dokazujeme (logickou) ekvivalenci. Budiž tedy nejprve $\frac{p}{q}$ zlomek v základním tvaru a nechť jeho řetězový zlomek je symetrický o sudém počtu prvků $n = 2m$:

$$\frac{p}{q} = (q_1, \ldots, q_m, q_m, \ldots, q_1).$$

Protože je tento řetězový zlomek roven svému inverznímu řetězovému zlomku, platí $Q_n = P_{n-1}$; je ovšem $p = P_n$, $q = Q_n$. Ze vztahu (2) v kapitole 4 plyne pro sudé n

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = 1 .$$

Dosadíme-li za P_n, Q_n, P_{n-1}, dostáváme

$$p Q_{n-1} = q^2 + 1 ,$$

tedy $p \mid q^2 + 1$.

Druhá část důkazu je obtížnější. Nechť tedy nyní $p \mid q^2 + 1$, tj. existuje $t \in \mathrm{Z}$ tak, že je

$$q^2 + 1 = pt .$$

Budiž řetězový zlomek čísla $\frac{p}{q}$ roven $(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \frac{P_n}{Q_n}$. Nyní musíme připomenout to, co jsme řekli na samém konci kapitoly 1; snad to čtenář dosud nezapomněl. Rovnosti

$$(q_1, \ldots, q_n, 1) = (q_1, \ldots, q_n + 1)$$

lze využít k tomu, abychom podle potřeby zvolili v řetězovém zlomku kteréhokoli kladného racionálního čísla za počet prvků buď číslo sudé, nebo liché. Volme v našem řetězovém zlomku čísla $\frac{p}{q}$ za počet prvků n sudé číslo, takže je $(-1)^n = 1$, a platí stejně jako v první části důkazu

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = 1 .$$

Je $p = P_n$, $q = Q_n$ a podle předpokladu věty $P_n > Q_n$, tj. existuje $t \in Z$ tak, že

$$P_n t = Q_n^2 + 1$$

čili

$$Q_n^2 + 1 = P_n t .$$

Jestliže k této rovnosti připojíme

$$Q_n P_{n-1} + 1 = P_n Q_{n-1}$$

a obě rovnosti odečteme, dostaneme

$$Q_n(Q_n - P_{n-1}) = P_n(t - Q_{n-1}),$$

což znamená, že

$$P_n \,|\, Q_n(Q_n - P_{n-1}).$$

Protože však čísla P_n, Q_n jsou nesoudělná, je

$$P_n \,|\, Q_n - P_{n-1}.$$

Je však $P_n > Q_n - P_{n-1}$; jediné celé číslo, které je dělitelné větším číslem, je nula. Musí proto být

$$Q_n - P_{n-1} = 0,$$

tj.

$$Q_n = P_{n-1}.$$

Platí tedy pro zlomek $\frac{p}{q} = \frac{P_n}{Q_n}$ rovnost

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_n}{P_{n-1}},$$

to značí, že řetězový zlomek čísla $\frac{p}{q}$ je symetrický, a to se sudým počtem prvků $n=2m$, tj. je to řetězový zlomek $(q_1, \ldots, q_m, q_m, \ldots, q_1)$. Tím je důkaz věty ukončen.

Této věty lze použít k řešení následující úlohy: Je dáno číslo $p>1$ a chceme najít číslo $q>1$ těchto vlastností: $p>q$, čísla p, q jsou nesoudělná (to jsou podmínky věty) a řetězový zlomek racionálního čísla $\frac{p}{q}$ je symetrický a má sudý počet prvků. Naše věta o existenci takového čísla q nic neříká; říká jen, že nutná a postačující podmínka je $p \mid q^2+1$. Ukážeme si to na několika příkladech.

Příklad 2. $p=12$; q vyhovující podmínkám úlohy může být jen některé z čísel 5, 7, 11; neplatí však ani jeden ze vztahů $12 \mid 5^2+1$, $12 \mid 7^2+1$, $12 \mid 11^2+1$. Tedy pro $p=12$ je naše úloha neřešitelná.

Příklad 3. $p=17$; q může být některé z čísel 2, 3, ..., 16. Vyhovuje $q=4$, neboť $17 \mid 4^2+1$. Příslušný řetězový zlomek čísla $\frac{17}{4}$ je ovšem jednoduchý: $\frac{17}{4}=(4, 4)$.

Příklad 4. $p=34$; q může být jen některé liché číslo kromě 17, pro které $3 \leqq q \leqq 33$. Vyhovuje $q=13$; $34 \mid 13^2+1$. Řetězový zlomek je $\frac{34}{13}=(2, 1, 1, 1, 1, 2)$.

Příklad 5. $p=5$ dává $q=2$, $q=3$. Je $\frac{5}{2}=(2, 2)$, avšak s číslem $q=3$ úloha na první pohled nevychází: $\frac{5}{3}=(1, 1, 2)$. Uvědomme si však, že jsme v důkazu věty použili vzorce

$$(q_1, \ldots, q_n, 1)=(q_1, \ldots, q_n+1).$$

Použijeme tedy tohoto vzorce také v naší úloze. Podle něj platí

$$(1, 1, 2)=(1, 1, 1, 1),$$

což je řetězový zlomek požadovaných vlastností. Pro $p=5$ má tedy úloha dvě řešení.

Cvičení

1. Řešte popsanou úlohu pro $p=10$.
2. Čtenář, který vyřešil cvičení 2(a), (b) v 1. kapitole, ví, že řetězové zlomky čísel $\frac{61}{11}$ a $\frac{137}{37}$ jsou symetrické a mají sudý počet prvků. Pro takto zadaná čísla p, q tedy platí věta 2; přesvědčte se o tom.

8. ZÁPORNÁ RACIONÁLNÍ ČÍSLA

Hledáme pravidelný řetězový zlomek záporného racionálního čísla, tj. chceme, aby bylo $q_2, q_3, \ldots, q_n \in \mathrm{N}$. Toho lze dosáhnout jedině tak, že q_1 bude záporné celé číslo. Použijeme celé hodnoty záporného racionálního čísla. Je

$$a=[a]+\frac{1}{a_1},$$

tj.

$$a = q_1 + \frac{1}{a_1},$$

a pro $a<0$ je $q_1<0$, $a_1>0$, tj. $q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$.

Příklad 1. Najděme řetězový zlomek čísla $-\frac{43}{30}$.

Řešení. Především je $-\frac{43}{30} = -2 + \frac{17}{30}$; dále je $\frac{17}{30} = (0, 1, 1, 3, 4)$; celkem tedy

$$-\frac{43}{30} = (-2, 1, 1, 3, 4).$$

Vypočítáme sblížené zlomky.

q_k	-2	1	1	3	4
P_k	-2	-1	-3	-10	-43
Q_k	1	1	2	7	30

Posloupnost sblížených zlomků je -2, -1, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{10}{7}$, $-\frac{43}{30}$.

Povšimněte si dvou věcí:

1. Všechna čísla P_k jsou záporná, všechna čísla Q_k jsou kladná.

2. Věta 2 z kapitoly 4 (sblížené zlomky lichého řádu jsou vesměs menší než $\frac{p}{q}$ a tvoří rostoucí posloupnost, sblížené

zlomky sudého řádu jsou větší a tvoří klesající posloupnost) zůstává v platnosti i pro záporné $\frac{p}{q}$. Také ostatní věty o sblížených zlomcích platí i pro záporné racionální číslo.

Našli jsme vyjádření záporného racionálního čísla ve tvaru pravidelného řetězového zlomku. Prvky tohoto řetězového zlomku jsou opět neúplnými podíly v rovnostech Euklidova algoritmu; v první z nich ovšem musíme připustit záporný neúplný podíl. To není nikterak v rozporu s algoritmem dělení v $\mathbb{Z}$; protože jsme se však dosud omezovali na přirozené p, q, vypíšeme si rovnosti Euklidova algoritmu pro $p = -43$, $q = 30$ (čímž dostaneme prvky řetězového zlomku z příkladu 1). Bylo by možné volit také $p = 43$, $q = -30$; dostali bychom tytéž rovnosti. Pro $p = -43$, $q = 30$ je

$$-43 = 30 \,.\, (-2) + 17\,,$$

$$30 = 17 \,.\, 1 + 13\,,$$

$$17 = 13 \,.\, 1 + 4\,,$$

$$13 = 4 \,.\, 3 + 1\,,$$

$$4 = 1 \,.\, 4\,.$$

Dostáváme opět $-\frac{43}{30} = (-2,\ 1,\ 1,\ 3,\ 4)$.

Cvičení

Najděte řetězový zlomek čísla $-\frac{96}{65}$ a vypočítejte jeho sblížené zlomky.

II. ČÁST

IRACIONÁLNÍ ČÍSLA

9. NEKONEČNÉ ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

V této kapitole zavedeme *nekonečné řetězové zlomky*, které zapisujeme $(q_1, q_2, \ldots)$. Striktní postup, vyložený v Perronově knize [4], je tento: Rozšíříme definici pravidelného řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ na nekonečný počet prvků $q_1, q_2, \ldots$ a prokážeme, že nekonečný řetězový zlomek $(q_1, q_2, \ldots)$ konverguje, a to k nějakému *iracionálnímu* číslu, které nazýváme *hodnotou* nekonečného řetězového zlomku.

Ponecháme si však tyto úvahy až do následující kapitoly. V této kapitole budeme postupovat obráceně: vyjdeme od iracionálního čísla α a dokážeme, že je lze vyjádřit řetězovým zlomkem, který však musí mít nekonečný počet prvků. Odtud také vyplyne způsob, jak takový řetězový zlomek vypočítat, což předvedeme na numerických příkladech. Tak asi postupuje student, který se na vysoké škole seznamuje s nekonečnými řadami: z dřívějška, totiž ze střední školy, už předem ví, že nekonečné řady mají někdy součet, a zná příklady nekonečných geometrických řad s kvocientem q, pro nějž je $|q|<1$.

(K analogii s nekonečnými řadami se ještě vrátíme v příští kapitole.)

Budiž tedy $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathrm{I}$. Zopakujeme postup vyložený v 1. kapitole:

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{\alpha_1};$$

zde je

$$q_1 = [\alpha],\ \alpha_1 > 1,\ \alpha_1 \in \mathrm{I}$$

(kdyby totiž bylo $\alpha_1 \in \mathrm{Q}$, bylo by i $\alpha \in \mathrm{Q}$),

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - q_1},$$

$$q_2 = [\alpha_1],$$

$$\alpha_1 = q_2 + \frac{1}{\alpha_2},\quad \alpha_2 > 1,\quad \alpha_2 \in \mathrm{I},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - q_2},$$

$$q_3 = [\alpha_2],$$

$$\alpha_2 = q_3 + \frac{1}{\alpha_3},\quad \alpha_3 > 1,\quad \alpha_3 \in \mathrm{I},$$

Všechna čísla α, α_1, α_2, α_3, ... jsou iracionální, a proto postup nemůže skončit, jako v 1. kapitole, nalezením nějakého celého α_{n-1}. Dostáváme tedy skutečně nekonečný řetězový zlomek $(q_1, q_2, \ldots)$, ve kterém je $q_1 \in \mathrm{N}_0$, $q_2, q_3, \ldots \in \mathrm{N}$. Pro $\alpha < 0$, $\alpha \in \mathrm{I}$ bude zřejmě q_1 záporné celé číslo, ostatní $q_i \in \mathrm{N}$, $i = 2, 3, \ldots$.

Nyní si ukážeme na příkladech, jak skutečně probíhá výpočet čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ a $q_1, q_2, \ldots$ Výpočet se bude podobat výpočtu příkladu 2 v 1. kapitole. Hledání celé části je ovšem komplikováno tím, že jde o iracionální čísla.

Příklad 1. Najděme řetězový zlomek čísla $\sqrt{2}$.

Řešení.

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{\alpha_1}, \quad q_1=1,$$

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1, \quad q_2=2,$$

$$\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{\alpha_2}, \quad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1, \quad q_3=2,$$

$$\vdots$$

Je $\alpha_1=\alpha_2$, a tedy ovšem $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\sqrt{2}+1$, a $q_2=q_3=q_4=\ldots=2$.

Dostáváme $\sqrt{2}=(1, 2, 2, 2, \ldots)$.

Dostali jsme nekonečný řetězový zlomek, a to *periodický,* jak jsme předpověděli ve 2. příkladu 6. kapitoly. *Perioda* je jednoprvková (neříkáme jednomístná nebo jednociferná, neboť víme, že prvky řetězového zlomku mohou být několikaciferná čísla) a začíná prvkem q_2.

Příklad 2. Zkusme totéž pro nějaké „složitější" α, třeba $\alpha = \frac{24 - \sqrt{15}}{17}$.

Řešení. Při výpočtech se nám budou hodit nerovnosti $3 < \sqrt{15} < 4$.

$$\frac{24 - \sqrt{15}}{17} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad q_1 = 1,$$

$$\alpha_1 = \frac{7 + \sqrt{15}}{2}, \quad q_2 = 5,$$

$$\frac{7 + \sqrt{15}}{2} = 5 + \frac{1}{\alpha_2},$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{15} + 3}{3}, \quad q_3 = 2,$$

$$\frac{\sqrt{15} + 3}{3} = 2 + \frac{1}{\alpha_3},$$

$$\alpha_3 = \frac{\sqrt{15} + 3}{2}, \quad q_4 = 3,$$

$$\frac{\sqrt{15} + 3}{2} = 3 + \frac{1}{\alpha_4},$$

$$\alpha_4 = \frac{\sqrt{15} + 3}{3}, \quad q_5 = 2,$$

$$\frac{\sqrt{15}+3}{3}=2+\frac{1}{\alpha_5},$$

$$\alpha_5=\frac{\sqrt{15}+3}{2}, \quad q_6=3,$$

....

Je $\alpha_2=\alpha_4$, $\alpha_3=\alpha_5$, tedy $\alpha_2=\alpha_4=\alpha_6=\ldots=\dfrac{\sqrt{15}+3}{3}$ a $q_3=$ $=q_5=q_7=\ldots=2$; dále je $\alpha_3=\alpha_5=\ldots=\dfrac{\sqrt{15}+3}{2}$, tedy $q_4=q_6=q_8=\ldots=3$. Dostáváme opět nekonečný periodický řetězový zlomek, tentokráte však s dvouprvkovou periodou (2, 3), začínající prvkem q_3, a s dvouprvkovou *předperiodou* (1, 5):

$$\frac{24-\sqrt{15}}{17}=(1, 5, 2, 3, 2, 3, \ldots).$$

Další příklady si čtenář vypočítá sám:

(a) $\sqrt{3}=(1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots)$;

(b) $\sqrt{5}=(2, 4, 4, 4, 4, \ldots)$;

(c) $\sqrt{6}=(2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \ldots)$;

(d) $2-\sqrt{2}=(0, 1, 1, 2, 2, 2, \ldots)$.

Pro periodické řetězové zlomky

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n, q_{k+1}, \ldots) \tag{1}$$

budeme používat podobného zápisu, jakým se označují periodické desetinné rozvoje racionálních čísel. Místo (1) budeme psát

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, \overline{q_{k+1}, \ldots, q_n}). \tag{2}$$

Periodické nekonečné řetězové zlomky z této kapitoly tedy píšeme

$$\sqrt{2} = (1, \overline{2}),$$

$$\frac{24 - \sqrt{15}}{17} = (1, 5, \overline{2, 3}),$$

$$\sqrt{3} = (1, \overline{1, 2}),$$

$$\sqrt{5} = (2, \overline{4}),$$

$$\sqrt{6} = (2, \overline{2, 4}),$$

$$2 - \sqrt{2} = (0, 1, 1, \overline{2}).$$

Nyní by se snad mohlo čtenáři zdát, že buď všecky nekonečné řetězové zlomky jsou periodické, nebo že jiné nás zásadně nezajímají. Pravda je ta, že periodické řetězové zlomky hrají v teorii řetězových zlomků zvláštní úlohu, jak ukážeme za chvíli a podrobně dokážeme v 13. kapitole;

ale tvoří jen nepatrnou menšinu mezi všemi nekonečnými řetězovými zlomky. Tak např. platí

$$\pi = (3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \ldots.)$$

(pro π zaokrouhlené na deset desetinných míst jsme to spočítali v 1. příkladu 6. kapitoly).

Pro číslo $\sqrt[3]{2}$ uvádí Davenport v [1] nekonečný řetězový zlomek $(1, 3, 1, 5, 1, 1, 4, \ldots)$.

Žádný z těchto dvou řetězových zlomků není periodický; přitom nejsou známy žádné zákonitosti pro jejich prvky (tj. není znám žádný výtvarný zákon pro tyto řetězové zlomky).

Jiná je situace u čísel e, e^2, pro něž takové výtvarné zákony jsou známy. Platí

$$e = (2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, \ldots)$$

(po prvních dvou prvcích 2, 1 následují po sobě jdoucí sudá čísla 2, 4, 6, 8, ..., oddělená od sebe vždy dvěma jedničkami),

$$e^2 = (7, 2, 1, 1, 3, 18, 5, 1, 1, 6, 30, 8, 1, 1, \ldots);$$

výtvarný zákon pro prvky řetězového zlomku už není tak jasný. Perron v [4] dokazuje oba výtvarné zákony a zapisuje je užitím snadno pochopitelné symboliky takto:

$$e = (2, \overline{1, 2m, 1})_{m=1}^{\infty},$$

$$e^2 = (7, \overline{2 + 3m, 1, 1, 3 + 3m, 18 + 12m})_{m=0}^{\infty}.$$

Pokuste se podle těchto vzorců znovu rozepsat oba řetězové zlomky!

Čeho jsme zatím dosáhli? Dokázali jsme sice, že iracionální číslo má nekonečný řetězový zlomek, přičemž jsme odvodili jakýsi algoritmus pro výpočet jeho prvků, ale tohoto algoritmu dovedeme ke skutečnému numerickému výpočtu použít jen pro iracionální čísla s druhou odmocninou, taková jako v našich příkladech 1 a 2. Důvod je v tom, že při výpočtech provádíme tzv. usměrňování zlomků. Už pro velmi jednoduché iracionální číslo $\sqrt[3]{2}$ tento algoritmus selhává: dovedeme sice určit $q_1 = 1$, pomocí vzorce $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ vypočítáme ještě $q_2 = 3$, ale pak dostáváme $\alpha_2 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2}$ a se znalostmi středoškolské matematiky už nevystačíme. Nekonečný řetězový zlomek čísla $\sqrt[3]{2}$, který jsme prve uvedli, byl získán metodou uvedenou v 6. kapitole (viz cvičení 5), stejně jako nekonečný řetězový zlomek čísla π. Výpočet řetězových zlomků čísel e, e^2 je pak mnohem složitější než náš algoritmus.

Víme tedy alespoň to, že každé iracionální číslo má nekonečný řetězový zlomek. Zbývá ještě dokázat obrácené tvrzení, že hodnotou každého (pravidelného) nekonečného řetězového zlomku je nějaké iracionální číslo. To dokážeme postupem naznačeným v prvním odstavci této kapitoly, ale až v příští kapitole, která se zabývá konvergencí nekonečných řetězových zlomků.

Nechť nyní

$$(q_1, q_2, \ldots) \tag{3}$$

je nekonečný řetězový zlomek. Sblížené zlomky jsou definovány stejně jako v 1. části. Můžeme tedy počítat $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots$ stejně jako dříve, nyní ovšem neexistuje žádný „poslední" sblížený zlomek. To se projevuje ve vzorci pro horní mez absolutní hodnoty chyby $\left(\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right)$, pro kterou jsme ve 4. kapitole odvodili vzorec (7) (píšeme nyní α místo $\frac{p}{q}$):

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{Q_k Q_{k-1}}; \tag{4}$$

pro konečné řetězové zlomky o n prvcích platí tento vzorec jen pro $k < n$, ale pro nekonečné řetězové zlomky ovšem toto omezení odpadá a vzorec platí pro všechna $k \in \mathrm{N}$. Při vyšetřování konvergence ho vydatně využijeme.

Nekonečný řetězový zlomek (3) můžeme vždy nahradit konečným řetězovým zlomkem

$$(q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_n), \tag{5}$$

kde ovšem α_n je iracionální číslo. Vypadá to, jako by byla porušena podmínka pravidelnosti, ale zrovna tak byla tato podmínka „porušena" na pravé straně rovnosti (4) ve 3. kapitole, kde jsme jako poslední prvek řetězového zlomku psali jeho zbytek, což bylo racionální (a nikoli přirozené) číslo. Také nyní není α_n nic jiného než zbytek řetězového zlomku (3):

$$\alpha_n = (q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots).$$

Znamená tedy (5) totéž co (3) a o žádné porušení nejde.

Je tedy

$$\alpha = (q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_n),$$

tedy podle vzorců (1) 3. kapitoly

$$\alpha = \frac{\alpha_n P_n + P_{n-1}}{\alpha_n Q_n + Q_{n-1}}. \tag{6}$$

Známe-li P_{n-1}, P_n, Q_{n-1}, Q_n, α_n, můžeme odtud počítat α.

Příklad 3. Vypočítejme podle (6) hodnotu řetězového zlomku $\alpha = (1, 2, \sqrt{2}+1)$. Zde je $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $\alpha_2 = \sqrt{2}+1$. Víme ovšem, že podle příkladu 1 musí vyjít $\alpha = \sqrt{2}$. Z hodnot q_1, q_2 určíme $P_1 = 1$, $P_2 = 3$, $Q_1 = 1$, $Q_2 = 2$ a dosadíme do (6):

$$\alpha = \frac{3(\sqrt{2}+1)+1}{2(\sqrt{2}+1)+1} = \frac{3\sqrt{2}+4}{2\sqrt{2}+3} =$$

$$= \frac{(3\sqrt{2}+4)(2\sqrt{2}-3)}{-1} = \sqrt{2}.$$

Na závěr si ještě řekneme něco o výrazech s druhou odmocninou, jejichž nekonečné řetězové zlomky dovedeme počítat podle algoritmu uvedeného na začátku kapitoly. Obecný tvar toho, čemu jsme zatím říkali „výraz s druhou odmocninou“, je

$$\frac{P \pm \sqrt{N}}{Q}, \tag{7}$$

kde P, Q jsou celá čísla a N je přirozené číslo, které není druhou mocninou celého čísla: $N \neq a^2$, kde $a \in \mathsf{Z}$. Jinak řečeno N je takové přirozené číslo, že $\sqrt{N} \in \mathsf{I}$. Velké N bude od nynějška značit jen takováto přirozená čísla, na rozdíl od malého n, které bude nadále označovat jakékoli přirozené číslo. (Zavedení písmene N je užitečné také proto, že se nám v několika případech přihodí, že budeme mít oba „druhy“ přirozených čísel v těsné souvislosti, např. budeme mluvit o n-tém prvku řetězového zlomku čísla $\sqrt{N}$.) Pokud jde o to, že celá čísla P, Q zapisujeme velkými písmeny, k tomu nás vede jednak to, že máme-li jedno velké písmeno N, vypadá snad lépe, jsou-li i ostatní písmena velká, jednak také skutečnost, že malým písmenem p budeme vždycky označovat prvočíslo. Uvědomme si však, že P, Q v (7) nemají nic společného s P_k, Q_k, kterými označujeme čitatele a jmenovatele sblížených zlomků.

Každý takový výraz (7) je kořenem nějaké kvadratické rovnice; budeme pro něj používat názvu *kvadratická iracionalita* (někdy se říká iracionála, např. v dodatcích, které k Chinčinově knížce [3] napsal její překladatel K. Rychlík).

Je-li $\alpha=\dfrac{P+\sqrt{N}}{Q}$ iracionálním kořenem nějaké kvadratické rovnice, je $\alpha'=\dfrac{P-\sqrt{N}}{Q}$ jejím druhým iracionálním kořenem, a rovnice má tvar

$$(x-\alpha)(x-\alpha')=0.$$

Pro výrazy $\alpha=\sqrt{N}$, kterých jsme několik vypočítali, je $\alpha'=-\sqrt{N}$ a příslušná kvadratická rovnice je obzvlášť jednoduchá: $x^2-N=0$. Pro $\alpha=\dfrac{24-\sqrt{15}}{17}$, jehož řetězový zlomek jsme počítali v příkladu 2, zní kvadratická rovnice: $17x^2-48x+33=0$ (přesvědčte se o tom).

Druhými odmocninami čísel N (kde N má uvedený význam, tj. $N\neq a^2$, kde $a\in \mathrm{Z}$, N je přirozené číslo) se budeme soustavně zabývat až ve 12. kapitole. Protože je však budeme potřebovat k některým výpočtům už dříve a protože jejich řetězové zlomky dovedeme počítat už nyní, uvádíme tabulku řetězových zlomků všech $\sqrt{N}$, $N\leqq 50$. Tabulka je převzata z Davenportovy knížky [1]*) a potřebuje několik vysvětlivek. Především pro zjednodušení sazby jsou vynechány vodorovné pruhy, vyznačující periodu. Jak bude dokázáno ve 12. kapitole, pro každé N

*) Podobná tabulka je pro $N\leqq 99$ také v Perronovi [4]

N	Řetězový zlomek čísla $\sqrt{N}$	x	y	$x^2 - Ny^2$
2	(1, 2)	1	1	−1
3	(1, 1, 2)	2	1	+1
5	(2, 4)	2	1	−1
6	(2, 2, 4)	5	2	+1
7	(2, 1, 1, 1, 4)	8	3	+1
8	(2, 1, 4)	3	1	+1
10	(3, 6)	3	1	−1
11	(3, 3, 6)	10	3	+1
12	(3, 2, 6)	7	2	+1
13	(3, 1, 1, 1, 1, 6)	18	5	−1
14	(3, 1, 2, 1, 6)	15	4	+1
15	(3, 1, 6)	4	1	+1
17	(4, 8)	4	1	−1
18	(4, 4, 8)	17	4	+1
19	(4, 2, 1, 3, 1, 2, 8)	170	39	+1
20	(4, 2, 8)	9	2	+1
21	(4, 1, 1, 2, 1, 1, 8)	55	12	+1
22	(4, 1, 2, 4, 2, 1, 8)	197	42	+1
23	(4, 1, 3, 1, 8)	24	5	+1
24	(4, 1, 8)	5	1	+1
26	(5, 10)	5	1	−1
27	(5, 5, 10)	26	5	+1

N	Řetězový zlomek čísla $\sqrt{N}$	x	y	$x^2 - Ny^2$
28	(5, 3, 2, 3, 10)	127	24	+1
29	(5, 2, 1, 1, 2, 10)	70	13	−1
30	(5, 2, 10)	11	2	+1
31	(5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10)	1520	273	+1
32	(5, 1, 1, 1, 10)	17	3	+1
33	(5, 1, 2, 1, 10)	23	4	+1
34	(5, 1, 4, 1, 10)	35	6	+1
35	(5, 1, 10)	6	1	+1
37	(6, 12)	6	1	−1
38	(6, 6, 12)	37	6	+1
39	(6, 4, 12)	25	4	+1
40	(6, 3, 12)	19	3	+1
41	(6, 2, 2, 12)	32	5	−1
42	(6, 2, 12)	13	2	+1
43	(6, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12)	3482	531	+1
44	(6, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12)	199	30	+1
45	(6, 1, 2, 2, 2, 1, 12)	161	24	+1
46	(6, 1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12)	24335	3588	+1
47	(6, 1, 5, 1, 12)	48	7	+1
48	(6, 1, 12)	7	1	+1
50	(7, 14)	7	1	−1

je totiž $\sqrt{N}=(q_1, \overline{q_2, \ldots, q_n})$: jestliže je tedy pro $N=3$ uvedeno (1, 1, 2), znamená to $\sqrt{3}=(1, \overline{1, 2})$; nebo pro $N=13$ znamená (3, 1, 1, 1, 1, 6), jak je uvedeno v tabulce, že $\sqrt{13}=(3, \overline{1, 1, 1, 1, 6})$. Za druhé v tabulce nejsou uvedeny jen hodnoty N a $\sqrt{N}$, nýbrž v dalších sloupcích také jakási x, y a x^2-Ny^2. Těchto sloupců si prozatím nevšímejte; použijeme jich teprve ve třetí části v kapitole 18 při řešení tzv. Pellovy rovnice.

Cvičení

1. Vypočítejte šestý sblížený zlomek řetězových zlomků čísel (a) $\sqrt{2}$; (b) $\sqrt{3}$; (c) $\sqrt{5}$ a určete horní mez absolutní hodnoty chyby podle vzorce (4).
2. Vypočítejte řetězové zlomky čísel (a) $\sqrt{41}$; (b) $\sqrt{59}$; (c) $\sqrt{61}$.
3. Vypočítejte řetězový zlomek kladného kořene kvadratické rovnice (a) $x^2-2x-7=0$; (b) $3x^2-7x-3=0$.
4. Kvadratická rovnice $x^2-4x+2=0$ má oba kořeny kladné. Vypočítejte jejich řetězové zlomky.
5. Vypočítejte prvních sedm prvků řetězového zlomku čísla $\sqrt[3]{2}$ ze zaokrouhlené hodnoty $\sqrt[3]{2}=1{,}25992$.
6. Sledujte výpočet prvních několika prvků řetězového zlomku čísla $\log 5$:

$$0<\log 5<1, \quad q_1=0,$$

$$\log 5=\frac{1}{\alpha_1}, \quad 5^{\alpha_1}=10, \quad q_2=1,$$

$$5^{1+1/\alpha_2}=5.5^{1/\alpha_2}=10, \quad 2^{\alpha_2}=5, \quad q_3=2,$$

$$2^{2+1/\alpha_3}=5, \quad \left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha_3}=2,$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{125}{64}<2, \quad \left(\frac{5}{4}\right)^4=\frac{625}{256}>2,$$

tedy

$$3<\alpha_3<4, \quad q_4=3,$$

$$\alpha_3=3+\frac{1}{\alpha_4},$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{3+1/\alpha_4}=2,$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{1/\alpha_4}=\frac{128}{125},$$

$$1{,}024^{\alpha_4}=1{,}25.$$

Platí

$$1{,}024^9<1{,}25<1{,}024^{10};$$

tyto nerovnosti však zjistíme nejspíše logaritmicky, takže pro výpočet pátého prvku řetězového zlomku čísla log 5 nemají velkou hodnotu. Vyšlo by nám takto $q_5=9$ a měli bychom tento nekonečný řetězový zlomek

$$\log 5=(0, 1, 2, 3, 9, \ldots).$$

7. Podle předchozího cvičení vypočítejte prvních několik prvků řetězových zlomků čísel (a) log 2; (b) log 3; (c) log 25.

10. KONVERGENCE

V předešlé kapitole jsme sice zavedli nekonečný řetězový zlomek $(q_1, q_2, \ldots)$ jako vyjádření iracionálního čísla, ale přesto tento zápis má dvě vady.

1. Zatímco zápis konečného řetězového zlomku má souvislost s Euklidovým algoritmem a tím i s racionálním číslem $\frac{p}{q}$, které je hodnotou tohoto řetězového zlomku, u nekonečných řetězových zlomků nám taková souvislost chybí. Zápis $(q_1, q_2, \ldots)$ je formální. Potřebujeme zavést jeho konvergenci pomocí známého zápisu $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

2. Celý náš postup se stále ubírá jedním směrem. Až budeme mít definovánu konvergenci nekonečného řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots)$, budeme oprávněni tvrdit, že nějaké iracionální číslo α je hodnotou řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots)$, ale stále ještě nám bude scházet důkaz, že také obráceně každý nekonečný řetězový zlomek $(q_1, q_2, \ldots)$ má za svou hodnotu nějaké iracionální číslo α.

Tyto dvě věci tedy probereme v této kapitole; úkol je to dosti snadný.

Nejprve ke konvergenci nekonečného řetězového zlomku. Připomeňme si, jak se definuje konvergence nekonečné řady $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

Sestavíme posloupnost částečných součtů

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\ldots\ldots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$\ldots\ldots$$

a definujeme: Jestliže existuje $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ této posloupnosti, pak číslo s prohlásíme za součet nekonečné řady $a_1 + a_2 + + a_3 + \dots$

Podtrhli jsme prve slovo posloupnost. To proto, že při definici konvergence nekonečného řetězového zlomku používáme také posloupnosti, tentokráte posloupnosti sblížených zlomků. Sblížené zlomky jsou definovány stejně jako v případě konečných řetězových zlomků a počítají se týmž způsobem. Budiž tedy $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \dots$ posloupnost sblížených zlomků nekonečného řetězového zlomku $(q_1, q_2, \dots)$. Definujeme:

Jestliže platí $\lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \alpha$, říkáme, že číslo α je hodnotou řetězového zlomku $(q_1, q_2, \dots)$. Pro důkaz konvergence řetězového zlomku $(q_1, q_2, \dots)$ stačí dokázat, že výraz $\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right|$ konverguje k nule pro $n \to \infty$. Právě k tomu používáme vzorce

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}},$$

který jsme připomněli v předešlé kapitole.

Platí totiž, že posloupnost $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ je rostoucí (až snad na první dva členy; pro $q_2 = 1$ je totiž $Q_1 = Q_2 = 1$); pro $k \geqq 3$ to plyne ze vzorce

$$Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}.$$

Tedy Q_n a také Q_{n+1} konverguje k $+\infty$ pro $n \to +\infty$, ke každému $\varepsilon > 0$ existuje tedy n takové, že

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \varepsilon ; \tag{1}$$

tedy $\left| a - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$.

Všimněme si, že provedené úvahy platí pro každý pravidelný nekonečný řetězový zlomek, neboť posloupnost Q_1, Q_2, Q_3, ... je ve všech případech rostoucí (až snad na první dva členy). Dospíváme tak k tomuto výsledku: Každý pravidelný nekonečný řetězový zlomek konverguje. Zde končí analogie s nekonečnými řadami, neboť ne všechny řady jsou konvergentní.

Příklad 1. Dokažme, že $(2, \bar{4}) = \sqrt{5}$. Posloupnost Q_1, Q_2, Q_3, ... je v našem případě (vypočítejme to) $Q_1 = 1$, $Q_2 = 4$, $Q_3 = 17$, $Q_4 = 72$, $Q_5 = 305$, $Q_6 = 1\,292$, $Q_7 = 5\,437$, $Q_8 = 23\,184$, $Q_9 = 98\,209$, $Q_{10} = 416\,020$ ... (Jak vidíme, čísla Q_k rostou pro $k \geqq 3$ velmi rychle.)

Zvolme $\varepsilon = 10^{-3}$; pak postačí vzít $n = 3$, neboť $\frac{1}{17 . 72}$ je menší než $\frac{1}{1000}$, a tedy $\left| \sqrt{5} - \frac{P_3}{Q_3} \right| < 10^{-3}$.

Budiž tedy $\varepsilon = 10^{-6}$, pak musíme vzít $n = 6$; $\frac{1}{1292 . 5437} < \frac{1}{10^6}$; je tedy $\left| \sqrt{5} - \frac{P_6}{Q_6} \right| < 10^{-6}$.

Do třetice zvolme $\varepsilon = 10^{-10}$; pak musíme vzít $n = 9$, a je

$$\frac{1}{98209.416020} < \frac{1}{10^{10}} \text{ a } \left|\sqrt{5} - \frac{P_{10}}{Q_{10}}\right| < 10^{-10}.$$

Vidíme názorně, že ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít n takové, že je

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \varepsilon .$$

V příkladu jsme se zmínili o tom, že čísla Q_k rostou velmi rychle. O tom hovoří následující věta.

Věta 1. *Pro $k \geqq 3$ platí*

$$Q_k \geqq 2^{(k-1)/2}. \tag{2}$$

Čísla $2^{(k-1)/2}$ tvoří pro k, $k+1$, $k+2, \ldots$ geometrickou posloupnost:

$$2^{(k-1)/2} = 2^{k/2} . 2^{-1/2},$$

$$2^{k/2} = 2^{k/2} . 2^{0},$$

$$2^{(k+1)/2} = 2^{k/2} . 2^{1/2},$$

$$\ldots\ldots$$

jejíž první člen je $2^{(k-1)/2}$ a kvocient $2^{1/2} = \sqrt{2}$. Rostou tedy čísla Q_3, $Q_4, \ldots$ alespoň stejně rychle jako členy geometrické posloupnosti s kvocientem $\sqrt{2}$.

Důkaz. Pro $k \geqq 3$ je

$$Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \geqq Q_{k-1} + Q_{k-2} \geqq 2 Q_{k-2};$$

odtud postupně dostáváme

$$Q_{2k} \geqq 2^k \,.\, Q_2 \geqq 2^{k-2}, \ Q_{2k+1} \geqq 2^k \,.\, Q_1 = 2^k.$$

Tím je (2) dokázáno pro sudý index $2k$ i pro lichý index $2k+1$. Tedy (2) platí pro všechna $k \geqq 3$.

Iracionality nekonečného řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots)$ se týká tato věta:

Věta 2. *Hodnota nekonečného pravidelného řetězového zlomku je iracionální číslo.*

Důkaz. Označme

$$\alpha = (q_1, q_2, \ldots) = (q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_n);$$

je

$$\alpha = \frac{\alpha_n P_n + P_{n-1}}{\alpha_n Q_n + Q_{n-1}}.$$

Odtud dostaneme po snadném výpočtu

$$\alpha Q_n - P_n = \frac{Q_n P_{n-1} - Q_{n-1} P_n}{\alpha_n Q_n + Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha_n Q_n + Q_{n-1}}.$$

Z toho plyne, že výraz $|\alpha Q_n - P_n|$ s rostoucím n stále klesá, ale nikdy není roven nule, což je možné jen pro iracionální α. Skutečně pro racionální $\alpha = \frac{p}{q}$ je

$$\left|\frac{p}{q} Q_n - P_n\right| = \frac{|pQ_n - qP_n|}{|q|},$$

což nemůže být menší než $\frac{1}{|q|}$, a tedy nemůže s rostoucím n stále klesat. Je tedy hodnota α nekonečného pravidelného řetězového zlomku iracionální číslo.

Poznámka. Chybí nám ještě protějšek věty 1 z kapitoly 2 o jednoznačnosti řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots)$. Tato věc vyplývá ze srovnání dvou nekonečných řetězových zlomků podle velikosti; zmíníme se proto o ní až v kapitole 14, která je zobecněním kapitoly 5 z první části.

Cvičení

Dokažte, že nekonečný řetězový zlomek $(q_1, q_2, \ldots)$ konverguje právě tehdy, když nekonečná řada $q_2 + q_3 + q_4 + \ldots$ diverguje k $+\infty$.

Mohlo by se zdát, že je toto cvičení zbytečné, když přece všechny pravidelné řetězové zlomky konvergují. Ve cvičení 7 v následující kapitole však budeme mít co dělat s nekonečným řetězovým zlomkem, který bude obsahovat nuly i na místech jiných prvků než prvního. Takové řetězové zlomky jsme v definici pravidelného řetězového zlomku nepřipouštěli. Ukáže se však, že tento řetězový zlomek konverguje podle právě uvedeného kritéria.

11. RYZE PERIODICKÉ ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

Tak nazýváme řetězové zlomky tvaru

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, q_1, q_2, \ldots, q_k, q_1, \ldots). \tag{1}$$

Jejich perioda je k-prvková a místo (1) píšeme pro $k > 1$

$$\overline{(q_1, q_2, \ldots, q_k)}. \tag{2}$$

Pro $k=1$ je příslušný zápis tento:

$$\overline{(q_1)}.$$

Především je třeba říci, že ryze periodické řetězové zlomky existují, tj. existují iracionální čísla mající rozvoj v periodické řetězové zlomky. Příklad 3 v kapitole 6, v němž nám vyšlo $q_1 = q_2 = \ldots = q_{18} = 1$, vedl k podezření, že patrně platí

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \overline{(1)};$$

v kapitole 6 jsme to ovšem nemohli dokázat, dokážeme to teď.

Příklad 1. Dokažme $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \overline{(1)}$.

Řešení. Protože je

$$2 < \sqrt{5} < 3,$$

je

$$\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right] = q_1 = 1,$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \alpha;$$

je tedy $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ a odtud

$$q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = 1.$$

Příklad 2. Perioda ovšem nemusí být jen jednoprvková. Např. s tříprvkovou periodou ryze periodického řetězového zlomku už se čtenář setkal, jestliže vyřešil cvičení 3(b) kapitoly 9, v němž měl najít kladný kořen rovnice $3x^2 - 7x - 3 = 0$. Tam vychází $\alpha = (\overline{2, 1, 2})$ (což je totéž jako $(2, 1, 2, \alpha)$).

Pišme $\alpha = (2, 1, 2, \alpha)$ a použijme vzorce (6) kapitoly 9:

$$\alpha = \frac{\alpha_n P_n + P_{n-1}}{\alpha_n Q_n + Q_{n-1}}.$$

Z daných prvků $q_1 = 2$, $q_2 = 1$, $q_3 = 2$ můžeme vypočítat čísla P_2, P_3, Q_2, Q_3 a psát

$$\alpha = \frac{\alpha P_3 + P_2}{\alpha Q_3 + Q_2},$$

tj.

$$\alpha = \frac{8\alpha + 3}{3\alpha + 1},$$

což dává kvadratickou rovnici pro α:

$$3\alpha^2 - 7\alpha - 3 = 0,$$

tedy rovnici, z níž jsme vyšli (až na to, že místo x je zde α).

Dříve než vyložíme vlastnosti ryze periodických řetězových zlomků, vypočítáme podobným způsobem ještě dva příklady.

Příklad 3. Budiž $\alpha = (\overline{2, 1, 3})$. Píšeme opět $\alpha = (2, 1, 3, \alpha)$. Především si zapamatujme, že je $\alpha > 1$. Sestrojme kvadratickou rovnici pro α za použití vzorce

$$\alpha = \frac{\alpha P_3 + P_2}{\alpha Q_3 + Q_2} = \frac{11\alpha + 3}{4\alpha + 1},$$

tj.

$$4\alpha^2 - 10\alpha - 3 = 0, \tag{3}$$

a nahradíme-li písmeno α písmenem x, abychom rozlišili neznámou a kořeny, máme

$$4x^2 - 10x - 3 = 0. \tag{4}$$

Jedním kořenem rovnice (4) je číslo α, o kterém víme, že je to kvadratická iracionalita typu $\frac{P + \sqrt{N}}{Q}$, kde $P, Q \in \mathrm{Z}$, $N \in \mathrm{N}$ a $\sqrt{N} \in \mathrm{I}$. (Znamení $+$, protože α je kladné.) O druhém kořeni α' víme, že je $\alpha' = \frac{P - \sqrt{N}}{Q}$ s týmiž P, Q, N.

Taková dvě čísla $\alpha, \alpha' \in \mathrm{I}$ se nazývají *sdružená* a každá dvě iracionální čísla, jež jsou kořeny nějaké kvadratické rovnice, jsou sdružená. Tak např. sdružené kořeny rovnice $x^2 - N = 0$ ($N \neq a^2$, kde $a \in \mathrm{Z}$) jsou čísla $\alpha = \sqrt{N}$, $\alpha' = -\sqrt{N}$.

Příklad 4. Proveďme totéž pro $\beta = (\overline{3, 1, 2})$. Perioda čísla β vznikla — v tom je podstata věci — z periody čísla α tím, že jsme prvky psali v obráceném pořádku. Je opět $\beta > 1$ a platí

$$\beta = \frac{11\beta + 4}{3\beta + 1},$$

tj.

$$3\beta^2 - 10\beta - 4 = 0, \tag{5}$$

$$3x^2 - 10x - 4 = 0. \tag{6}$$

Rovnice (4) a (6) budeme nazývat *konjugovanými*. Povšimněme si jejich tvaru. Je-li

$$ax^2 + bx + c = 0$$

nějaká kvadratická rovnice, pak kvadratická rovnice s ní konjugovaná má tvar

$$cx^2 - bx + a = 0.$$

Podívejme se ještě na rovnice (3) a (5). Jestliže do (3) dosadíme $\alpha = -\frac{1}{\beta}$, dostaneme (5), jak se snadno přesvědčíme. Je tedy číslo $-\frac{1}{\beta}$ jedním z kořenů rovnice (3). Nemůže však být $\alpha = -\frac{1}{\beta}$, protože čísla α, β jsou kladná. Je tedy $-\frac{1}{\beta}$ druhý kořen rovnice (3), sdružený s α, tedy

$$\alpha' = -\frac{1}{\beta}.$$

Protože $\beta > 1$, je $-1 < \alpha' < 0$.

Úvahy, které jsme prováděli nad příklady 3 a 4, platí obecně. Dokážeme větu:

Věta 1. *Buďte* $\alpha = (\overline{q_1, \ldots, q_k})$, $\beta = (\overline{q_k, \ldots, q_1})$ *dva ryze periodické řetězové zlomky, přičemž perioda řetězového zlomku* β *vznikne obrácením periody řetězového zlomku* α. *Pak kvadratické rovnice pro* α *a* β *(přesněji rovnice, které z nich vzniknou, píšeme-li místo* α, β *neznámou* x*) jsou vzájemně konjugované. Má-li první kvadratická rovnice kladný kořen* $\alpha > 1$, *druhá kladný kořen* $\beta > 1$, *platí pro sdružený kořen* α' *první rovnice rovnost*

$$\alpha' = -\frac{1}{\beta}$$

a je $-1 < \alpha' < 0$.

Důkaz je v podstatě opakováním výpočtů z příkladů 3 a 4. Řetězové zlomky pro α, β pišme ve tvaru

$$\alpha = (q_1, \ldots, q_k, \alpha),$$

$$\beta = (q_k, \ldots, q_1, \beta).$$

Odtud

$$\alpha = \frac{\alpha P_k + P_{k-1}}{\alpha Q_k + Q_{k-1}},$$

$$\beta = \frac{\beta P'_k + P'_{k-1}}{\beta Q'_k + Q'_{k-1}},$$

kde hodnoty P'_{k-1}, P'_k, Q'_{k-1}, Q'_k odpovídají samozřejmě periodě čísla β, skládající se z prvků q_k, $q_{k-1}, \ldots, q_1$. Chceme-li ve vztahu pro β dostat tytéž hodnoty P_{k-1}, P_k, Q_{k-1}, Q_k jako ve vztahu pro α, musíme použít vzorců z kapitoly 7 (resp. jejich zobecnění pro nekonečné řetězové zlomky).

Řetězové zlomky

$$(q_k, q_{k-1}, \ldots, q_1),$$

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k)$$

jsou inverzní. Podle věty 1 z kapitoly 7 platí

$$\frac{P'_k}{P'_{k-1}} = (q_1, q_2, \ldots, q_k) = \frac{P_k}{Q_k}.$$

Podobně jako ve zmíněné větě se dokáže, že pro inverzní řetězové zlomky

$$(q_{k-1}, q_{k-2}, \ldots, q_1),$$

$$(q_1, q_2, \ldots, q_{k-1})$$

platí (důkaz nalezne čtenář v [3])

$$\frac{Q'_k}{Q'_{k-1}} = (q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}) = \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}.$$

Odtud dostáváme

$$P'_k = P_k, \; P'_{k-1} = Q_k, \; Q'_k = P_{k-1}, \; Q'_{k-1} = Q_{k-1};$$

rovnice pro β je tedy

$$\beta = \frac{\beta P_k + Q_k}{\beta P_{k-1} + Q_{k-1}}.$$

Kvadratické rovnice pro α, β pak jsou

$$Q_k \alpha^2 + (Q_{k-1} - P_k)\alpha - P_{k-1} = 0,$$

$$P_{k-1}\beta^2 + (Q_{k-1} - P_k)\beta - Q_k = 0,$$

které jsou zřejmě konjugované: Má-li tedy první z nich kladný kořen $\alpha > 1$, je její sdružený kořen $\alpha' = -\frac{1}{\beta}$, kde $\beta > 1$ je kladný kořen druhé rovnice; z $\beta > 1$ ovšem plyne $-1 < \alpha' < 0$.

Platí také obrácené tvrzení: Jsou-li α, α' dva sdružené kořeny kvadratické rovnice takové, že $\alpha > 1$, $-1 < \alpha' < 0$, je nekonečný řetězový zlomek čísla α ryze periodický. Toto tvrzení nebudeme dokazovat.

Cvičení

1. Určete hodnoty ryze periodických řetězových zlomků: (a) $(\overline{2})$; (b) $(\overline{4})$; (c) $(\overline{8})$; (d) $(\overline{10})$. Využijte tabulky řetězových zlomků druhých odmocnin v kapitole 9.

2. Totéž pro řetězové zlomky (a) $(\overline{4, 2})$; (b) $(\overline{6, 2})$; (c) $(\overline{8, 1})$; (d) $(\overline{10, 5})$; (e) $(\overline{12, 6})$.

3. Totéž pro řetězové zlomky (a) $(\overline{1, 2, 3})$; (b) $(\overline{3, 4, 1})$; (c) $(\overline{1, 2, 3, 4})$.

4. Označte řetězové zlomky ze cvičení 1(a) — (d), 2(a) — (e), 3(a) — (c) po řadě písmeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{12}$. Sestavte kvadratické rovnice, jejichž kladnými kořeny jsou čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{12}$. Napište k těmto rovnicím konjugované rovnice a vypočítejte jejich kladné kořeny $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{12}$. Přesvědčte se, že platí $\alpha_1' = -\frac{1}{\beta_1}$, $\alpha_2' = -\frac{1}{\beta_2}, \ldots, \alpha_{12}' = -\frac{1}{\beta_{12}}$. Podle vyložené teorie napište bez jakéhokoli počítání ryze periodické řetězové zlomky čísel $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{12}$.

5. Napište konjugovanou rovnici ke kvadratické rovnici $4x^2 - 18x - 5 = 0$. Určete kladný kořen α dané rovnice a kladný kořen β konjugované rovnice a ověřte vztah $\alpha' = -\frac{1}{\beta}$.

6. Napište periodické řetězové zlomky kvadratických iracionalit $\frac{P+\sqrt{N}}{Q}$ pro (a) $P = Q = 2$, $N = 8$, (b) $P = 1$, $Q = 3$, $N = 7$. Přesvědčte se, že vycházejí ryze periodické řetězové zlomky.

7. V nekonečném řetězovém zlomku lze připustit i některé nulové prvky, různé od prvního. Pak ovšem některé sblížené zlomky nejsou definovány, ale, jak si ukážeme, konvergence může zůstat zachována. Ukážeme to na ryze periodickém řetězovém zlomku $(\overline{1, 0, 2})$. Sestavíme tabulku:

q_k	1	0	2
P_k	1	1	3
Q_k	1	0	1

Píšeme-li $\alpha = (1, 0, 2, \alpha)$, máme

$$\alpha = \frac{3\alpha + 1}{\alpha},$$

$$\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0,$$

a kladný kořen je

$$\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

To by tedy měla být hodnota našeho nekonečného řetězového zlomku za předpokladu, že konverguje. Jak to vypadá se vztahem (1) z kapitoly 10? Je jasné, že posloupnost $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ není rostoucí; ve vztahu (1) ovšem hraje úlohu posloupnost $Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_4, \ldots$. Abychom si to ujasnili, rozšíříme tabulku:

q_k	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2
P_k	1	1	3	4	3	10	13	10	33	43	33	109
Q_k	1	0	1	1	1	3	4	3	10	13	10	33

Vidíme, že s nedefinovaností sblížených zlomků to není tak zlé: jediný, který není definován, je $\frac{P_2}{Q_2}$. Sestavme nyní posloupnost $Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_4, \ldots$: 0, 0, 1, 1, 3, 12, 12, 30, 130, 130, 330, … Není to sice rostoucí posloupnost, ale je neklesající. To však stačí, aby výraz $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$ konvergoval pro $n \to \infty$ k nule. Tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \alpha$, kde $\alpha = (\overline{1, 0, 2})$; smíme tedy psát

$$\frac{3+\sqrt{13}}{2} = (\overline{1, 0, 2}).$$

Čtenář, který vyřešil úlohu z kapitoly 10, měl ovšem lehčí práci, neboť zřejmě platí:

$$0+2+1+0+2+1+\ldots$$

diverguje spolu s řadou

$$2+1+2+1+\ldots$$

k $+\infty$.

12. ŘETĚZOVÉ ZLOMKY DRUHÝCH ODMOCNIN

Výrazem „druhá odmocnina“ budeme rozumět výhradně číslo $\sqrt{N} \in \mathrm{I}$ (tedy $N \neq a^2$, kde $a \in \mathrm{Z}$). Pro $N \leqq 50$ jsme tabulku řetězových zlomků takových odmocnin zařadili už do kapitoly 9. Snad si čtenář povšiml některých zákonitostí v této tabulce; o jedné z nich jsme se ostatně zmínili těsně před uvedením tabulky, že totiž jde o periodické řetězové zlomky, přičemž perioda začíná druhým prvkem q_2.

Především platí téměř samozřejmá věta:

Řetězové zlomky iracionálních čísel $\sqrt{N}$ nejsou ryze periodické. Neboť je-li $\alpha = \sqrt{N}$ kladným kořenem kvadratické rovnice $x^2 - N = 0$, je pro $N \neq 1$, což předpokládáme, $\alpha > 1$. Pro sdružený kořen α' je však $\alpha' < -1$, což odporuje podmínce $-1 < \alpha' < 0$. Tedy číslo $\sqrt{N}$ nevyhovuje větě 1 z předešlé kapitoly, a tedy nemá ryze periodický řetězový zlomek.

Jak vypadá perioda řetězového zlomku čísla $\sqrt{N}$, o tom mluví následující věta.

Věta 1. *Pro řetězový zlomek čísla $\sqrt{N}$, $N \in \mathrm{N}$, $\sqrt{N} \in \mathrm{I}$ platí*

$$\sqrt{N} = (q_1, \overline{q_2, q_3, \ldots, q_3, q_2, 2q_1}).$$

Slovy: Perioda řetězového zlomku čísla $\sqrt{N}$ se skládá ze dvou částí: ze symetrické části $(q_2, q_3, \ldots, q_3, q_2)$ a z posledního prvku $2q_1$, který je dvojnásobkem prvního prvku, jenž ovšem není součástí periody. Prohlédněte si tabulku řetězových zlomků druhých odmocnin v kapitole 9 a uvědomte si, že znění naší věty nikterak nevylučuje případy jako $(q_1, \overline{2q_1})$ (počet prvků v symetrické části periody je roven nule) nebo $(q_1, \overline{q_2, 2q_1})$ (počet prvků v symetrické části je roven jedné). Symetrická část může mít prostřední prvek (pak obsahuje lichý počet prvků) jako

$$\sqrt{54} = (7, \overline{2, 1, 6, 1, 2, 14})$$

nebo nemá prostřední prvek (a obsahuje sudý počet prvků) jako

$$\sqrt{53} = (7, \overline{3, 1, 1, 3, 14}).$$

(Doporučujeme čtenáři, aby si tyto dva příklady, které nejsou uvedeny v tabulce v kapitole 9, přepočítal.)

Důkaz. Budeme vyšetřovat číslo $q_1 + \sqrt{N}$, jehož řetězový zlomek je ryze periodický. Příklady takových čísel:

$$1 + \sqrt{2} = (\overline{2, 2}) = (\overline{2}),$$

$$1 + \sqrt{3} = (\overline{2, 1}),$$

$$2 + \sqrt{5} = (\overline{4, 4}) = (\overline{4}),$$

$$2+\sqrt{6}=(\overline{4, 2}),$$

$$2+\sqrt{7}=(\overline{4, 1, 1, 1}),$$

$$\ldots\ldots$$

$$7+\sqrt{50}=(\overline{14, 14})=(\overline{14}).$$

Dokažme toto tvrzení obecně. Označme $\alpha = q_1 + \sqrt{N}$. Je $q_1 = [\sqrt{N}]$ a víme, že $q_1 \in Z$ a platí

$$q_1 \leqq \sqrt{N} < q_1 + 1.$$

Je ovšem

$$\alpha = q_1 + \sqrt{N} > 1.$$

Pro číslo α' sdružené s α, tj. pro číslo $\alpha' = q_1 - \sqrt{N}$, je pak (stále předpokládáme $\sqrt{N} > 1$)

$$-1 < \alpha' < 0.$$

Nerovnosti pro čísla α, α' jsou však podmínkou, aby $\alpha = q_1 + \sqrt{N}$ mělo ryze periodický řetězový zlomek, jehož perioda zřejmě začíná prvkem $2q_1$:

$$\alpha = q_1 + \sqrt{N} = (\overline{2q_1, q_2, \ldots, q_k}).$$

Z věty 1 předešlé kapitoly víme, že ryze periodický řetězový zlomek

$$\overline{(q_k, q_{k-1}, \ldots, q_2, 2q_1)}$$

je vyjádřením čísla $-\dfrac{1}{\alpha'}$, kde α' je sdružené s α, tedy

$$\alpha' = q_1 - \sqrt{N}.$$

Je

$$-\frac{1}{\alpha'} = (q_k, q_{k-1}, \ldots, q_2, 2q_1, q_k, \ldots),$$

zároveň však také

$$-\frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{-q_1 + \sqrt{N}} = \frac{1}{\alpha - 2q_1} =$$

$$= \frac{1}{(0, q_2, \ldots, q_k, 2q_1, \ldots)}.$$

Výraz na pravé straně poslední rovnosti rozepíšeme:

$$\cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{2q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}}}} = q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{2q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}}}$$

Máme tedy $-\dfrac{1}{\alpha'} = (q_2, q_3, \ldots, q_k, 2q_1, q_2, \ldots)$. Srovnáme-li oba výrazy pro $-\dfrac{1}{\alpha'}$, dostáváme $q_k = q_2$, $q_{k-1} =$

$= q_3, \ldots, q_2 = q_k$. Tím jsme dostali symetrickou část periody. Zbytek periody je tvořen prvkem $2q_1$. Řetězový zlomek čísla $\sqrt{N}$ dostaneme z čísla $\alpha = q_1 + \sqrt{N}$ ihned odečtením q_1:

$$\sqrt{N} = (q_1, \overline{q_2, q_3, \ldots, q_3, q_2, 2q_1}).$$

Tím jsme větu dokázali.

Poslední věta této kapitoly se týká čísel $\sqrt{p}$, kde p je prvočíslo tvaru $4n + 1$, $n \in \mathrm{N}$, tedy jedno z čísel

$$5, 13, 17, 29, 37, 41, \ldots$$

Dříve než vyslovíme větu, povšimněme si těchto příkladů, na jejichž ověření stačí tabulka v kapitole 9:

$\sqrt{5} = (2, \overline{4})$: počet prvků v symetrické části periody $= 0$,

$\sqrt{13} = (3, \overline{1, 1, 1, 1, 6})$: počet prvků tamtéž $= 4$,

$\sqrt{17} = (4, \overline{8})$: počet prvků tamtéž $= 0$,

$\sqrt{29} = (5, \overline{2, 1, 1, 2, 10})$: počet prvků tamtéž $= 4$,

$\sqrt{37} = (6, \overline{12})$: počet prvků tamtéž $= 0$,

$\sqrt{41} = (6, \overline{2, 2, 12})$: počet prvků tamtéž $= 2$.

Zdá se tedy, že platí tvrzení: *Budiž p prvočíslo tvaru $4n + 1$ a označme n počet prvků v symetrické části periody řetězového zlomku čísla $\sqrt{p}$; potom je n sudé číslo a platí*

$$\sqrt{p}=(q_1,\overline{q_2,\ldots,q_m,q_m,\ldots,q_2,2q_1}).$$

Důkaz tohoto tvrzení nebudeme uvádět.

Cvičení

1. Vypočítejte řetězové zlomky čísel (a) $\sqrt{58}$; (b) $\sqrt{85}$; (c) $\sqrt{101}$.
2. Co můžete vypozorovat z tabulky druhých odmocnin a také ze cvičení 1(c) pro řetězové zlomky čísel $\sqrt{n^2+1}$, kde $n \in \mathbf{N}$? Pokuste se svůj závěr dokázat.

13. LAGRANGEOVA VĚTA

Tato kapitola je věnována důkazu Lagrangeovy věty, která tvrdí, že řetězové zlomky kvadratických iracionalit jsou periodické, a obráceně, že hodnoty periodických řetězových zlomků jsou kvadratické iracionality. Vlastně jsme ji mohli dokázat už dříve, kdybychom například použili důkazu uvedeného v Chinčinovi [3]. Zde však dáváme přednost důkazu podle Davenporta [1] pro jeho stručnost; protože tento důkaz se opírá o pojem ryze periodického řetězového zlomku, je Lagrangeova věta zařazena až nyní.

Souvislost mezi periodickými a ryze periodickými řetězovými zlomky je v tom, že každý periodický řetězový zlomek

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n, q_{k+1}, \ldots), \tag{1}$$

kde $n > k$, lze psát ve tvaru

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, r_{k+1}),$$

kde zbytek r_{k+1} je ryze periodický řetězový zlomek

$$r_{k+1} = (\overline{q_{k+1}, \ldots, q_n}).$$

Věta (Lagrangeova). *Každou kvadratickou iracionalitu, tj. výraz tvaru* $\dfrac{P \pm \sqrt{N}}{Q}$ ($P, Q \in \mathsf{Z}$, $N \in \mathsf{N}$ a $\sqrt{N} \in \mathsf{I}$), *lze vyjádřit periodickým řetězovým zlomkem. Každý periodický řetězový zlomek je hodnotou nějaké kvadratické iracionality.*

Důkaz. Buďte $\alpha = \dfrac{P + \sqrt{N}}{Q}$, $\alpha' = \dfrac{P - \sqrt{N}}{Q}$ sdružené kořeny nějaké kvadratické rovnice. Mezi α a kterýmkoli α_k platí vztah

$$\alpha = \frac{\alpha_k P_k + P_{k-1}}{\alpha_k Q_k + Q_{k-1}}.$$

Týž vztah platí mezi α', α'_k:

$$\alpha' = \frac{\alpha'_k P_k + P_{k-1}}{\alpha'_k Q_k + Q_{k-1}}$$

(rozumí se ovšem, že čísla P_{k-1}, P_k, Q_{k-1}, Q_k v obou vztazích jsou různá; nehodí se nám však ve druhém vztahu psát P'_{k-1}, P'_k, Q'_{k-1}, Q'_k).

Pro dostatečně velká k se hodnoty sblížených zlomků

$$\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}, \quad \frac{P_k}{Q_k}$$

příliš neliší a lze dokázat, že

$$\frac{\alpha' - \dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}}{\alpha' - \dfrac{P_k}{Q_k}}$$

konverguje k 1, přičemž poslední zlomek je střídavě menší a větší než 1. Dále je $Q_k > 0$, $Q_{k-1} > 0$, $\alpha'_k < 0$. Jestliže tedy volíme k tak, aby zlomek

$$\frac{\alpha' - \dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}}{\alpha' - \dfrac{P_k}{Q_k}}$$

byl menší než jedna, pak vzhledem k tomu, že $Q_{k-1} < Q_k$, bude $-1 < \alpha'_k < 0$. Pro toto k je ovšem α_k kvadratická iracionalita a platí $\alpha_k > 0$. Od prvku q_{k+1} bude tedy řetězový zlomek ryze periodický a dostáváme skutečně vyjádření (1).

Druhá část věty se dokazuje podobně. Budiž (1) periodický řetězový zlomek a pišme jej ve tvaru

$$\alpha = (q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha_k).$$

Číslo sdružené k číslu α označíme α' a píšeme

$$\alpha' = (q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha'_k).$$

Jako prve píšeme

$$\alpha = \frac{\alpha_k P_k + P_{k-1}}{\alpha_k Q_k + Q_{k-1}},$$

$$\alpha' = \frac{\alpha'_k P_k + P_{k-1}}{\alpha'_k Q_k + Q_{k-1}}$$

a dokážeme platnost nerovností

$$-1 < \alpha'_k < 0,$$

$$\alpha_k > 1.$$

Od prvku q_{k+1} je tedy řetězový zlomek pro α ryze periodický, tj. platí

$$\alpha = (q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha).$$

To však dává vyjádření pro α:

$$\alpha = \frac{\alpha P_k + P_{k-1}}{\alpha Q_k + Q_{k-1}},$$

jež vede ke kvadratické rovnici pro α:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0.$$

Je tedy α kvadratická iracionalita, tj. platí

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{N}}{Q},$$

kde P, $Q \in \mathsf{Z}$, $N \in \mathsf{N}$, $\sqrt{N} \in \mathsf{I}$. Věta je dokázána.

Dovedeme vyjádřit kvadratickou iracionalitu periodickým řetězovým zlomkem; takové příklady jsme počítali v kapitole 9. Nyní se budeme zabývat určováním kvadratické iracionality, která je podle Lagrangeovy věty hodnotou periodického řetězového zlomku.

Pro ryze periodické řetězové zlomky jsme tuto úlohu řešili v kapitole 11. Zbývá nám tedy hledat hodnotu neryze periodického řetězového zlomku (1). Poznamenejme, že skupina k prvků

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k)$$

se jmenuje *předperioda* a skupina $n-k$ prvků

$$(q_{k+1}, \ldots, q_n)$$

se jmenuje *perioda* neryze periodického řetězového zlomku (1).

Jsou dvě metody: neryze periodický řetězový zlomek převést na ryze periodický (to bude ukázáno v příkladu 1), přičemž používáme vzorce pro $\alpha = (q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha)$:

$$\alpha = \frac{\alpha P_k + P_{k-1}}{\alpha Q_k + Q_{k-1}}.$$

Někdy (při malých n, k) se obejdeme bez tohoto vzorce (příklad 2). Druhá metoda je obecnější a hodí se v každém případě. Při ní používáme vzorce $\alpha = (q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha_k)$, kde zbytek α_k je ryze periodický a dovedeme jej vypočítat metodou z kapitoly 11; pak užijeme vzorce

$$\alpha = \frac{\alpha_k P_k + P_{k-1}}{\alpha_k Q_k + Q_{k-1}}.$$

Tento postup ukážeme na příkladech 3 a 4.

Připomeňme si, že je $(\bar{2}) = 1 + \sqrt{2}$; v některých příkladech toho použijeme. (Čtenář to ví ze cvičení 1(a) kapitoly 11; pokud toto cvičení neřešil, ověří si tento vztah pohledem na řetězový zlomek čísla $\sqrt{2}$ v tabulce v kapitole 9.)

Příklad 1. Určeme hodnotu neryze periodického řetězového zlomku $\alpha = (1, \bar{2})$.

Řešení.

$$\alpha + 1 = (\overline{2, 2}) = (\bar{2}),$$

$$\alpha + 1 = 1 + \sqrt{2},$$

$$\alpha = \sqrt{2}.$$

Příklad 2. Totéž bez užití teorie řetězových zlomků (tj. bez znalosti hodnoty $(\bar{2}) = 1 + \sqrt{2}$).

Řešení.

$$\alpha + 1 = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}},$$

$$\alpha + 1 = 2 + \frac{1}{\alpha + 1},$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 2\alpha + 3,$$

$$\alpha^2 = 2,$$

$$\alpha = \sqrt{2}.$$

Poznámka. Modifikace tohoto postupu:

$$\alpha - 1 = (0, 2, 2, \ldots),$$

$$\alpha - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}} = \frac{1}{2 + \alpha - 1},$$

$$\alpha - 1 = \frac{1}{\alpha + 1},$$

$$\alpha^2 - 1 = 1,$$

$$\alpha^2 = 2,$$

$$\alpha = \sqrt{2}.$$

Příklad 3. Určeme hodnotu neryze periodického řetězového zlomku $\alpha = (0, 1, 1, \overline{2})$.

Řešení.

$$\alpha_3 = (2, 2, \ldots) = 1 + \sqrt{2},$$

$$\alpha = (0, 1, 1, \alpha_3),$$

q_k	0	1	1
P_k	0	1	1
Q_k	1	1	2

$$\alpha = \frac{\alpha_3 P_3 + P_2}{\alpha_3 Q_3 + Q_2},$$

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{2} + 1}{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2} + 3} = 2 - \sqrt{2}.$$

Příklad 4. Určeme hodnotu neryze periodického řetězového zlomku $\alpha = (1{,}5, \overline{2, 3})$.

Řešení.
$$\alpha = (1, 5, \alpha_2),$$

$$\alpha = \frac{\alpha_2 P_2 + P_1}{\alpha_2 Q_2 + Q_1},$$

q_k	1	5
P_k	1	6
Q_k	1	5

$$\alpha = \frac{6\alpha_2 + 1}{5\alpha_2 + 1},$$

$$\alpha_2 = (2, 3, \alpha_2):$$

q_k	2	3
P_k	2	7
Q_k	1	3

$$\alpha_2 = \frac{7\alpha_2 + 2}{3\alpha_2 + 1},$$

$$3\alpha_2^2 + \alpha_2 = 7\alpha_2 + 2,$$

$$3\alpha_2^2 - 6\alpha_2 - 2 = 0,$$

$$\alpha_2 = \frac{6 + \sqrt{60}}{6} = \frac{3 + \sqrt{15}}{3},$$

$$\alpha=\frac{6\cdot\frac{3+\sqrt{15}}{3}+1}{5\cdot\frac{3+\sqrt{15}}{3}+1}=\frac{21+6\sqrt{15}}{18+5\sqrt{15}},$$

$$\alpha=\frac{24-\sqrt{15}}{17}.$$

Čtenáři jistě neušlo, že jsme počítali „obráceně" příklady z kapitoly 9; tím je také zaručena kontrola správností výsledků.

Cvičení

1. Metodou příkladu 1 a 2 počítejte hodnotu řetězového zlomku $(1, \overline{1, 3})$.
2. Metodou příkladu 3 a 4 počítejte hodnotu řetězového zlomku $(2, 3, \overline{10, 1, 1, 1})$.

14. NEROVNOSTI

Pohled na tabulku druhých odmocnin nás přesvědčí, že se musíme zabývat také vztahem nerovnosti mezi nekonečnými řetězovými zlomky. Je např.

$$\sqrt{26}<\sqrt{27},$$

což znamená

$$(5, \overline{10})<(5, \overline{5, 10})$$

neboli

$$(5, 10, 10, 10, \ldots) < (5, 5, 10, 5, \ldots).$$

Dále např. z nerovností

$$\sqrt{38} < \sqrt{39} < \sqrt{40} < \sqrt{42}$$

plyne

$$(6, \overline{6, 12}) < (6, \overline{4, 12}) < (6, \overline{3, 12}) < (6, \overline{2, 12}).$$

Také musíme umět porovnat konečný řetězový zlomek s nekonečným, neboť je např.

$$(1, 2, 3, 4) > (\overline{1, 2, 3, 4}) = (1, 2, 3, 4, 1, 2, \ldots).$$

Naštěstí věty, které jsme odvodili v kapitole 5, platí i pro tyto případy. Poznámku, že ve větě 1 nezáleží na „počtu přidaných prvků“, nyní chápeme jako „počet prvků může být nekonečný“.

Jako v kapitole 5 rozlišíme dva případy. Nejprve budeme spolu porovnávat řetězový zlomek

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$

který je ovšem konečný, a řetězový zlomek

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots),$$

který vznikne z prvního přidáním nekonečně mnoha prvků $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots$ Jako příklad může posloužit už uvedená nerovnost

$$(1, 2, 3, 4) > (1, 2, 3, 4, 1, 2, \ldots)$$

nebo také

$$(3, 2, 5) < (3, 2, 5, 3, 2, \ldots).$$

Dáme-li poznámce z kapitoly 5, že nejsme schopni určit dostatečný počet prvků ve srovnávaném řetězovém zlomku, ten smysl, že toho nejsme schopni prostě proto, že prvků je nekonečně mnoho, vidíme, že věta 1 z kapitoly 5 řeší tento případ: pro sudé k je

$$(q_1, \ldots, q_k) > (q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots),$$

pro liché k je naopak

$$(q_1, \ldots, q_k) < (q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots).$$

Druhý případ se týká nerovností typu $(5, \overline{10}) < (5, \overline{5, 10})$, ale také nerovností mezi dvěma řetězovými zlomky, z nichž jeden je konečný, např. $(3, 1, 2) < (3, \overline{2}) = (3, 2, 2, \ldots)$.

V tomto případě poskytuje řešení věta 2 z kapitoly 5. Budiž $k \geqq 1$ počet identických prvních prvků řetězových zlomků

$$\alpha = (q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots),$$

$$\beta = (q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{k+1}, \ldots);$$

přitom nevylučujeme možnost, že některý z obou řetězových zlomků je konečný a má právě $k+1$ prvků.

Druhá věta kapitoly 5 pak říká: Nerovnost mezi čísly α, β závisí na čísle k a na nerovnosti mezi prvky q_{k+1}, q'_{k+1}.

Je-li k sudé, je pro $q_{k+1} > q'_{k+1}$ také $\alpha > \beta$; je-li k liché, je pro $q_{k+1} > q'_{k+1}$ obráceně $\alpha < \beta$. Pro $q_{k+1} < q'_{k+1}$ je smysl nerovnosti mezi α, β opačný.

To dokazuje uvedené příklady: $(5, \overline{10}) < (5, \overline{5, 10})$, $(6, \overline{6, 12}) < (6, \overline{4, 12}) < (6, \overline{3, 12}) < (6, \overline{2, 12})$, $(3, 1, 2) <$ $< (3, \bar{2})$.

Poznámka 1. V první části v kapitole 6 jsme měli nerovnost mezi řetězovými zlomky

$$(q_{k+2}, q_{k+1}, \ldots, q_2) > (q_{k+2}, q_{k+3}, \ldots).$$

Tam jsme ještě nemohli mluvit o tom, že řetězový zlomek na pravé straně je nekonečný; snažili jsme se celou věc odbýt poukazem na poznámku v kapitole 5, podle které nezáleželo na dalších prvcích řetězového zlomku čísla $\pi = (3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \ldots)$, abychom mohli tvrdit, že

$$(292, 1, 15, 7) > (292, 1, 1, \ldots).$$

Nyní je věc teprve v pořádku.

Poznámka 2. V kapitole 10 jsme postrádali tvrzení o jednoznačnosti nekonečného řetězového zlomku. Uvědomme si, že jediný případ, kdy nastává rovnost dvou řetězových zlomků s neidentickými prvky, je

$$(q_1, \ldots, q_n, 1) = (q_1, \ldots, q_n + 1),$$

což jsou dva konečné řetězové zlomky. Máme-li tedy dva řetězové zlomky s neidentickými prvky, z nichž aspoň jeden je nekonečný, platí mezi nimi vždy znak nerovnosti. Je tedy nekonečný řetězový zlomek

$$(q_1, q_2, \ldots)$$

jednoznačně určen svými prvky.

15. GEOMETRICKÉ ZNÁZORNĚNÍ SBLÍŽENÝCH ZLOMKŮ

V této kapitole se budeme zabývat geometrickým znázorněním, zachycujícím kladné reálné číslo α a sblížené zlomky jeho řetězového zlomku. Nejprve zavedeme pojem *mřížový bod.*

Mřížovým bodem souřadnicové roviny Oxy budeme nazývat takový bod, jehož obě souřadnice jsou celá čísla.

Budiž nyní α nějaké reálné (racionální nebo iracionální) číslo, které chceme geometricky znázornit. Použijeme k tomu přímky

$$y = \alpha x,$$

která pro $\alpha > 0$ probíhá 1. a 3. kvadrantem. Omezíme se na 1. kvadrant, neboť jen v něm budou znázorněny sblížené zlomky řetězového zlomku čísla α. Obrazy těchto sblížených zlomků však nebudou obrazy čísel $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}$ atd., nýbrž obrazy čísel $\frac{Q_1}{P_1}, \frac{Q_2}{P_2}$ atd. (jinak bychom číslo α musili znázorňovat přímkou $x = \alpha y$).

Přímka

$$y = \alpha x \tag{1}$$

prochází pro racionální α nekonečně mnoha mřížovými body. Budiž $\alpha = \frac{p}{q}$, tedy

$$qy = px\,;$$

mřížové body, kterými prochází přímka $y = \frac{p}{q}x$, jsou $(q, p), (2q, 2p), \ldots$.

Zajímavější je případ $\alpha \in \mathsf{I}$; pak přímka

$$y = \alpha x$$

prochází jediným mřížovým bodem $(0, 0)$.

Sestrojíme obrazy bodů $A_1 = (Q_1, P_1)$, $A_2 = (Q_2, P_2)$ atd. a doplníme je obrazy bodů $A_x = (1, 0)$, $A_y = (0, 1)$. Zřejmě je $A_y = (Q_0, P_0)$. Abychom také A_x mohli psát jako „sblížený zlomek", definujme ještě $P_{-1} = 0$, $Q_{-1} = 1$; pak je $A_x = (Q_{-1}, P_{-1})$.

Poznámka. Při $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$, $P_{-1} = 0$, $Q_{-1} = 1$ platí vztahy

$$P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}, \quad Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \tag{2}$$

pro každé $k \in \mathsf{N}$.

Zavedeme rovinný vektor $\overrightarrow{PQ}$ jako uspořádanou dvojici bodů (P, Q). Bod A můžeme vždy vyjádřit jako vektor $\overrightarrow{OA}$, kde $O = (0, 0)$ je počátek souřadnic.

Rovnice (2) můžeme napsat jako jedinou vektorovou rovnici

$$\overrightarrow{OA_k} = q_k \, . \, \overrightarrow{OA_{k-1}} + \overrightarrow{OA_{k-2}},$$

platnou pro všechna $k \in \mathrm{N}$. Protože je

$$\overrightarrow{A_{k-2}A_k} = \overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OA_{k-2}},$$

je

$$\overrightarrow{A_{k-2}A_k} = \overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OA_{k-2}} = q_k \, . \, \overrightarrow{OA_{k-1}},$$

tj. vektory $\overrightarrow{A_{k-2}A_k}$ a $\overrightarrow{OA_{k-1}}$ jsou rovnoběžné. Tedy platí

$$\overrightarrow{A_1A_3} \parallel \overrightarrow{OA_2},$$

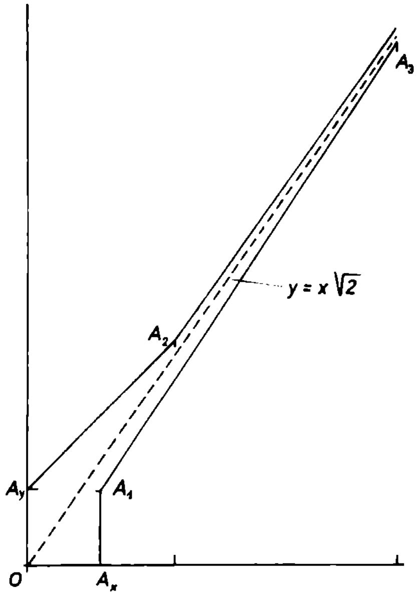
$$\overrightarrow{A_2A_4} \parallel \overrightarrow{OA_3},$$

atd.

Sestrojme alespoň pro jedno α grafické znázornění. Budiž $\alpha = \sqrt{2}$. Je $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{3}{2}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{7}{5}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{17}{12}, \ldots$, a tedy

$$A_1 = (1, 1), A_2 = (2, 3), A_3 = (5, 7), A_4 = (12, 17) \ldots .$$

Body A_i s lichým indexem leží pod přímkou $y = \alpha x$, body se sudým indexem leží nad ní. To platí i o bodech $A_x = A_{-1}$, $A_y = A_0$. Přímka $y = \alpha x$ dělí první kvadrant na dvě části. V každé z nich vzniká lomená čára. Rohy obou těchto čar jsou body zobrazující sblížené zlomky. Kon-



strukce obou čar je patrná z obrázku. Mezi oběma čarami neleží žádné mřížové body. Je-li α iracionální, jsou obě lomené čáry nekonečné.

Cvičení

Sestrojte podobný obrázek pro $\alpha = \sqrt{3}$.

III. ČÁST

POUŽITÍ ŘETĚZOVÝCH ZLOMKŮ

16. ŘEŠENÍ KONGRUENCE $ax \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$

Dříve než se pustíme do naší úlohy, řekneme si pár slov o kongruencích. Nebudeme vytvářet žádnou teorii; jde nám jen o to, aby čtenář mohl s větším pochopením sledovat výklad o řešení lineární kongruence $ax \equiv$ $\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$. Nebudeme dokazovat všechny možné věty o kongruencích, nýbrž jen ty, které budeme v dalším výkladu potřebovat. (Ostatně důkaz několika jednoduchých vět přenecháme čtenáři za cvičení. Všechny se dokazují bezprostředně z definice kongruence.)

Buďte $a, b \in \mathsf{Z}$, $m \in \mathsf{N}$, $m \geqq 2$; jestliže platí

$$m \mid a - b\,,$$

tj. jestliže existuje $t \in \mathsf{Z}$ takové, že

$$a - b = mt\,,$$

píšeme

$$a \equiv b\ (\mathrm{mod}\ m) \tag{1}$$

a čteme *a je kongruentní s b podle modulu m.*

Tedy např. $\qquad 25 \equiv 11 (\mathrm{mod}\ 7)\,,$

$$38 \equiv 3 \pmod 5,$$
$$12 \equiv 4 \pmod 8.$$

Věta 1. *Kongruence mezi dvěma čísly $a, b \in Z$ je ekvivalence v Z, tj. pro každá tři a, b, $c \in Z$ platí*

(a) $a \equiv a \pmod m$,
(b) *jestliže* $a \equiv b \pmod m$, *pak* $b \equiv a \pmod m$,
(c) *jestliže* $a \equiv b \pmod m$ *a zároveň* $b \equiv c \pmod m$, *pak* $a \equiv c \pmod m$.

Vlastnosti (a) se říká *reflexívnost*, (b) *symetričnost*, (c) *tranzitivnost* kongruence.

To, že binární relace $\equiv$ je ekvivalence, se ovšem projevuje tak, že v Z existuje k relaci $\equiv$ příslušný *rozklad* na třídy ekvivalence, kterým v tomto případě říkáme *zbytkové třídy*, úplněji zbytkové třídy $\pmod m$; jsou totiž určeny modulem m. Zbytkových tříd $\pmod m$ je právě m. Označíme-li je $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{m-1}$, jsou to tyto množiny čísel vzájemně kongruentních $\pmod m$:

$$Z_0 = \{\ldots, -3m, -2m, -m, 0, m, 2m, 3m, \ldots\},$$

$$Z_1 = \{\ldots, -3m+1, -2m+1, -m+1, 1, m+1, 2m+ +1, 3m+1, \ldots\},$$

$$\ldots\ldots$$

$$Z_{m-1} = \{\ldots, -2m-1, -m-1, -1, m-1, 2m-1, \ldots\}.$$

Protože $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{m-1}$ jsou třídy ekvivalence množiny Z, platí:

(a) $Z_0 \cup Z_1 \cup \ldots \cup Z_{m-1} = Z$,
(b) $Z_m \cap Z_n = \emptyset$ pro každá dvě m, $n \in N_0$, $m \neq n$.

Odtud: Každé číslo $a \in Z$ patří právě do jedné zbytkové třídy (mod m).

Příklad 1. Budiž $m = 3$. Zbytkové třídy označíme Z_0, Z_1, Z_2.
Jsou to tyto množiny:

$$Z_0 = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\},$$

$$Z_1 = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\},$$

$$Z_2 = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}.$$

Indexy u označení zbytkových tříd, totiž čísla $0, 1, \ldots, m-1$, volíme tak, že je jednak $0 \in Z_0$, $1 \in Z_1, \ldots, i \in Z_i, \ldots\ m-1 \in Z_{m-1}$ a jednak tak, že jsou to v příslušných zbytkových třídách nejmenší nezáporná čísla. Množina čísel $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ se nazývá *úplná soustava nejmenších nezáporných zbytků* (mod m) a každé číslo $a \in Z$ je kongruentní (mod m) právě s jedním číslem této soustavy, zatímco žádná dvě čísla této soustavy nejsou kongruentní (mod m).

Proč vlastně mluvíme o zbytcích a zbytkových třídách? Připomeňme si algoritmus dělení v Z pro čísla $a \in Z$, $m \in N$, $m \geqq 2$:

$$a = mq_1 + r_1, \quad 0 \leqq r_1 < m.$$

Může tedy zbytek $r_1 \in N_0$ nabýt právě jedné z hodnot $0, 1, \ldots, m-1$.

Věta 2. *Jestliže*

$$a \equiv b \pmod{m}$$

a

$$c \equiv d \pmod{m},$$

pak také

$$a + c \equiv b + d \pmod{m},$$

$$ac \equiv bd \pmod{m}.$$

Důsledek. Platí

$$c \equiv c \pmod{m}$$

(reflexívnost kongruence) pro každé $c \in \mathsf{Z}$, a tedy, platí-li

$$a \equiv b \pmod{m},$$

pak platí také

$$a + c \equiv b + c \pmod{m},$$

$$ac \equiv bc \pmod{m}$$

pro každé $c \in \mathsf{Z}$.

Ze vztahu (1), tj.

$$a - b = mt \quad \text{pro} \quad t \in \mathsf{Z},$$

okamžitě plyne

$$a = b + mt. \tag{2}$$

Zřejmě je

$$mt \equiv 0 \pmod{m}$$

pro každé $t \in Z$, tedy také

$$0 \equiv mt \pmod{m}$$

(symetričnost kongruence), a jestliže tuto kongruenci přičteme podle věty 2 ke kongruenci

$$a \equiv b \pmod{m},$$

dostáváme kongruenci

$$a \equiv b + mt \pmod{m}. \qquad (3)$$

Kongruence (3) a rovnost (2) mají stejný význam při zapisování řešení lineární kongruence.

Druhé tvrzení důsledku věty 2 mluví o tom, že obě strany kongruence

$$a \equiv b \pmod{m},$$

tj. obě čísla a, $b \in Z$, lze vynásobit libovolným celým číslem, aniž se tím poruší platnost kongruence.

Z platné kongruence

$$25 \equiv 11 \pmod{7}$$

dostáváme tedy např. tyto platné kongruence:

$$50 \equiv 22 \pmod{7},$$

$$100 \equiv 44 \pmod{7},$$

$$-25 \equiv -11 \pmod{7}.$$

S dělením kongruencí jsou však potíže. Vezměme platnou kongruenci

$$12 \equiv 4 \pmod{8}$$

a dělme obě strany kongruence tak, jako jsme je doposud násobili. Můžeme je dělit čtyřmi:

$$3 \equiv 1 \pmod{8};$$

tato kongruence však neplatí.

Pro dělení kongruencí platí složitější věta.

Věta 3. *Nechť platí*

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Nechť dále

(a) *existuje* $d \in \mathbb{N}$, *pro které* $d|a$, $d|b$, $d|m$. *Pak platí*

$$\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \left(\operatorname{mod} \frac{m}{d}\right);$$

(b) *existuje* $d \in \mathbb{Z}$, *pro které* $d|a$, $d|b$, *ale neplatí* $d|m$. *Pak platí*

$$\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}.$$

Příklad, ve kterém jsme obě strany kongruence

$$12 \equiv 4 \pmod{8}$$

dělili čtyřmi, se tedy měl počítat podle věty 3(a), tj. měli jsme dělit čtyřmi i modul. Skutečně tak dostáváme platnou kongruenci

$$3 \equiv 1 \pmod 2.$$

Vztah (3) má při řešení kongruencí důležitý praktický význam. Dovoluje nám totiž zmenšit čísla v dané kongruenci. Ukážeme si to na příkladu:

$$38 \equiv 3 \pmod 5.$$

Na levé straně kongruence můžeme přičíst (-6)-násobek modulu:

$$38 - 6 . 5 \equiv 3 \pmod 5$$

a dostáváme kongruenci s menšími čísly

$$8 \equiv 3 \pmod 5.$$

Kongruenci

$$ax \equiv b \pmod m \tag{4}$$

nazýváme *lineární kongruencí* s neznámou x; a, $b \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{N}$, $m \geqq 2$. Celá čísla x, která vyhovují (4), jsou řešení kongruence (4). Jestliže takové x existuje, pak jich existuje nekonečně mnoho a dostaneme je podle (2) nebo podle (3). Budeme však vždy vybírat takové řešení x_0, které je prvkem úplné soustavy nejmenších nezáporných zbytků $(\text{mod } m)$. Takových x_0 není ovšem nekonečně mnoho. Uvidíme, že to nikterak neznamená, že by kongruence (4) měla jediné takové řešení, ale že je jich konečný počet (jestliže konečným počtem řešení nazveme také 0 řešení, tj. žádné řešení).

Než toto všechno dokážeme, zabývejme se nejprve jednodušší kongruencí

$$x \equiv b \pmod{m}, \tag{5}$$

kterou dostaneme z (4) pro $a = 1$. Ale $x \equiv b \pmod{m}$ je už svým vlastním řešením. Podle (3) můžeme psát

$$x \equiv b + mt \pmod{m},$$

kde t je libovolné celé číslo; to má podle (2) ten význam, že je

$$x = b + mt.$$

Kongruence (5) má tedy vždy nekonečný počet řešení. Vhodnou volbou $t \in \mathsf{Z}$ dostaneme řešení x_0, které je prvkem množiny $\{0, 1, \ldots, m-1\}$. Obecné řešení se z tohoto x_0 získá přičtením mt, $t \in \mathsf{Z}$.

Příklad 2. Řešme kongruence

(a) $x \equiv 5 \pmod{11}$,
(b) $x \equiv 22 \pmod{3}$,
(c) $x \equiv -4 \pmod{20}$,
(d) $x \equiv -10 \pmod{10}$.

Řešení jsou po řadě: (a) $x_0 = 5$, (b) $x_0 = 1$, (c) $x_0 = 16$, (d) $x_0 = 0$.

Nyní se obrátíme k řešení kongruence (4). Může nastat několik případů.

Věta 4. *Nechť v kongruenci* (4) *platí:*

(1) *Největší společný dělitel čísel a, m je $d=1$. Pak má* (4) *právě jedno řešení x_0 ze soustavy $\{0, 1, \ldots, m-1\}$.* (*Toto byl ovšem případ kongruence* (5).)

(2) *Největší společný dělitel čísel a, m je $d>1$. Pak mohou nastat dva případy:*

  (a) *Neplatí $d|b$: pak* (4) *nemá řešení.*

  (b) *Platí $d|b$: pak* (4) *má právě d řešení, z nichž každé je prvkem soustavy $\{0, 1, \ldots, m-1\}$.*

Důkaz. Budeme potřebovat znát ještě pojem *úplná soustava zbytků* (mod m) (tedy nikoli nejmenších nezáporných). Úplná soustava zbytků (mod m) vznikne z úplné soustavy nejmenších nezáporných zbytků (mod m) $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, jestliže v ní každé číslo nahradíme libovolným číslem s ním kongruentním (mod m). Vezměme například $m=3$: úplná soustava nejmenších nezáporných zbytků je $\{0, 1, 2\}$, úplná soustava zbytků (mod 3) je např. $\{6, -2, 11\}$ nebo $\{3, 10, -1\}$. Zejména je ovšem úplná soustava nejmenších nezáporných zbytků (mod m) také úplnou soustavou zbytků (mod m).

(1) Budiž $d=1$. Je-li $x_i \in \mathrm{Z}$ některý prvek úplné soustavy zbytků (mod m), je také $ax_i \in \mathrm{Z}$ prvek úplné soustavy zbytků (mod m), neboť z kongruence $ax_i \equiv ax_j$ (mod m) plyne podle věty 3(b) $x_i \equiv x_j$ (mod m). Pro právě jedno x_0 kongruentní s některým z čísel $0, 1, \ldots, m-1$ patří ax_0 do téže zbytkové třídy jako b, tedy pro právě jedno x_0 je

$$ax_0 \equiv b \pmod{m}.$$

(2) Budiž $d>1$. Pak existují $a_1, m_1 \in Z$ tak, že je $a = a_1 d$, $m = m_1 d$. (4) pak znamená

$$m = m_1 d \mid a_1 dx - b,$$

tj. existuje $t \in Z$ tak, že je

$$a_1 dx - b = m_1 dt.$$

Ale tato rovnost může platit jen tehdy, existuje-li $b_1 \in Z$ tak, že je $b = b_1 d$, tj. $d \mid b$; jestliže není $d \mid b$, uvažovaná rovnost neplatí pro žádné $t \in Z$ a (4) nemá řešení.

Pro $d \mid b$, tedy $b = b_1 d$, však (4) přechází v kongruenci

$$a_1 x \equiv b_1 \pmod{m_1},$$

kde největší společný dělitel čísel a_1, m_1 je 1. Tato kongruence má tedy řešení x_0, ale také $x_0 + m_1$, $x_0 + 2m_1, \ldots, x_0 + (d-1)m_1$. Žádná dvě z těchto řešení nejsou kongruentní (mod m) a všechna jsou prvky soustavy $\{0, 1, \ldots, m-1\}$. Těchto řešení je celkem d a jsou to všechna řešení původní („nezkrácené") kongruence (4). Pro $d \mid b$ má tedy (4) d řešení, jež jsou vesměs prvky úplné soustavy nejmenších nezáporných zbytků (mod m).

Při řešení kongruencí lze tedy případ (2)b snadno (krácením) převést na případ (1), kterým se budeme zabývat podrobněji. Případ (2)a je nezajímavý; jde o takové kongruence jako

$$3x \equiv 2 \pmod 6,$$

které na první pohled nemají řešení, protože pro žádné celé x nemůže být $6 \mid 3x - 2$.

Budeme tedy řešit kongruenci

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

za předpokladu, že největší společný dělitel čísel a, m je 1. Použijeme řetězového zlomku racionálního čísla $\frac{m}{a}$; všimněme si, že vhodnou úpravou vždy můžeme dostat kladné racionální číslo. Nechť je tedy $a, m \in \mathrm{N}$. Sblížené zlomky kladného racionálního čísla $\frac{m}{a}$ nechť jsou

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n} = \frac{m}{a}.$$

Použijeme vztahu (2) z kapitoly 4:

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n$$

čili

$$mQ_{n-1} - aP_{n-1} = (-1)^n.$$

Odtud

$$aP_{n-1} = -(-1)^n + mQ_{n-1}.$$

První člen na pravé straně můžeme psát jako $(-1)^{n-1}$, a protože $Q_{n-1} \in \mathrm{Z}$, platí

$$aP_{n-1} \equiv (-1)^{n-1} \pmod{m}.$$

Násobme obě strany této kongruence číslem $(-1)^{n-1}b$:

$$a(-1)^{n-1} P_{n-1} b \equiv b \pmod{m}.$$

To však znamená, že je

$$x \equiv (-1)^{n-1} P_{n-1} b \pmod{m}. \qquad (6)$$

Jestliže takto vypočítané x není prvkem soustavy $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, dostaneme x_0 přičtením mt, kde t je vhodné celé číslo.

Příklad 3. Řešme kongruenci

$$42x \equiv 11 \pmod{95}.$$

Řešení. Je $42, 95 \in \mathrm{N}$ a čísla 42, 95 jsou nesoudělná. Vypočítáme nejprve prvky řetězového zlomku čísla $\frac{95}{42}$:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad 95 : 42 = 2 \\ \qquad\quad 42 : 11 = 3 \\ \qquad 11 : 9 = 1 \\ \quad 9 : 2 = 4 \\ 2 : 1 = 2 \end{array}$$

Tedy $\frac{95}{42} = (2, 3, 1, 4, 2)$. Sestavíme tabulku:

q_k	2	3	1	4	2
P_k	2	7	9	$\boxed{43}$	95
Q_k	1	3	4	19	42

Nápadně jsme označili číslo $P_{n-1} = P_4 = 43$, které vystupuje ve vzorci (6). Je ovšem $n = 5$ a máme

$$x \equiv 43 \,.\, 11 \pmod{95},$$

$$x \equiv 473 \pmod{95},$$

$$x_0 = 473 - 4.95 = 93.$$

Příklad 4. Řešme kongruenci

$$285x \equiv 177 \pmod{924}.$$

Řešení. Největší společný dělitel čísel 285, 177 a 924 je 3; dostaneme tedy tři řešení. Podle vzorce (6) řešíme „vykrácenou" kongruenci

$$95x \equiv 59 \pmod{308},$$

v níž je největší společný dělitel čísel 95 a 308 roven 1. Dostaneme (výpočty nechť si provede čtenář sám) $\frac{308}{95} =$ $= (3, 4, 7, 1, 2)$. Odtud $n = 5$, $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{107}{33}$. Je tedy $P_4 = 107$ a

$$x \equiv 107.59 \pmod{308},$$

$$x \equiv 6313 \pmod{308},$$

$$x_0 = 6313 - 20.308 = 153.$$

Řešení původní kongruence jsou čísla

$$153,\ 153 + 308,\ 153 + 2.308,$$

tj. čísla

$$153,\ 461,\ 769.$$

Ihned vidíme, že jsou to čísla nekongruentní (mod 924) a že všechna tři jsou prvky soustavy $\{0, 1, \ldots, 923\}$.

Příklad 5. V předešlých dvou příkladech bylo n liché, takže x nám vyšlo podle vzorce (6) kladné. To ovšem nemusí vždycky tak být. Řešme proto ještě kongruenci

$$102x \equiv 49 \pmod{121}.$$

Řešení. Největší společný dělitel čísel 102, 121 je 1; dále je (vypočítejte to) $\frac{121}{102} = (1, 5, 2, 1, 2, 2)$, tedy $n = 6$. Je $P_5 = 51$ a vzorec (6) dává

$$x \equiv -51 \,.\, 49 \pmod{121},$$

$$x \equiv -2499 \pmod{121},$$

$$x_0 = -2499 + 21 \,.\, 121 = 42.$$

Nedostali jsme ovšem nic nového; t v činiteli mt je zde kladné a dostaneme opět nezáporné x_0.

Cvičení

1. Dokažte věty 1, 2, 3 z definice kongruence.
2. V textu jsme se zmínili, že bývá prakticky výhodné při řešení kongruence (4) na jedné nebo druhé straně nebo na obou přičíst vhodné násobky modulu. Někdy takto dojdeme až ke kongruenci (5), tj. k řešení. Na ukázku příklad takových úprav kongruence:

$$11x \equiv 25 \pmod 9$$

upravíme na

$$2x \equiv 16 \pmod 9);$$

protože největší společný dělitel obou stran kongruence, totiž 2, nedělí modul, máme podle věty 3(b)

$$x \equiv 8 \pmod 9,$$

$$x_0 = 8.$$

Řešte tímto způsobem kongruence:
(a) $39x \equiv 11 \pmod{53}$; (b) $196x \equiv 77 \pmod{13}$.

3. Užitím vzorce (6) řešte kongruence:

(a) $5x \equiv 7 \pmod 8$; (b) $15x \equiv 35 \pmod{55}$; (c) $17x \equiv 25 \pmod{28}$; (d) $7x \equiv 10 \pmod{18}$; (e) $25x \equiv 1 \pmod{17}$; (f) $13x \equiv 32 \pmod{28}$; (g) $28x \equiv 21 \pmod{35}$; (h) $111x \equiv 75 \pmod{321}$; (i) $256x \equiv 179 \pmod{337}$; (j) $1215x \equiv 560 \pmod{2755}$.

17. ŘEŠENÍ NEURČITÉ ROVNICE $ax + by = c$

Buďte $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Úlohu najít čísla $x, y \in \mathbb{Z}$, která splňují vztah $ax + by = c$, nazýváme *lineární neurčitou (diofantickou) rovnicí* o dvou neznámých x, y. Známe-li jedno řešení (x_0, y_0), dovedeme okamžitě napsat nekonečně mnoho řešení (x, y): buďte $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ a nechť platí

$$ax_0 + by_0 = c. \tag{1}$$

Hledejme nyní nějaká dvě jiná čísla $x, y \in \mathbb{Z}$, pro která také platí

$$ax + by = c. \tag{2}$$

Odečteme-li (1) od (2), dostáváme

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0,$$

$$a(x-x_0)=-b(y-y_0). \tag{3}$$

Levá strana této rovnosti je dělitelná číslem $a \in Z$, tedy jím musí být dělitelná i pravá strana:

$$a \mid b(y-y_0).$$

Předpokládejme nejprve, že neplatí $a \mid b$; pak je

$$a \mid y-y_0$$

$$y-y_0=at,$$

kde $t \in Z$. Dosadíme-li odtud do (3), dostáváme

$$x-x_0=-bt.$$

Celkem tedy máme řešení (x, y), kde

$$x=x_0-bt,$$

$$y=y_0+at,$$

kde t je libovolné celé číslo a platí

$$ax_0+by_0=c,$$

tj. (x_0, y_0) je řešení rovnice (2).
Je-li $a \mid b$, musí, aby rovnice byla řešitelná, být také $a \mid c$; pak celou rovnici vydělíme číslem a a dostáváme předešlý případ.

Otázka existence řešení je spjata s jednou větou z algebry, která je důsledkem Euklidova algoritmu. Platí:

Buďte a, $b \in Z$, d největší společný dělitel čísel a, b. Potom existují čísla x, $y \in Z$ taková, že platí

$$ax + by = d. \tag{4}$$

Tato čísla lze najít Euklidovým algoritmem, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 1. Největší společný dělitel čísel 326, 72 je 2. Existují tedy čísla x, $y \in Z$ taková, že platí

$$326x + 72y = 2.$$

Najděme tato čísla x, y.

Řešení. Napíšeme rovnosti Euklidova algoritmu pro čísla 326, 72:

$$326 = 72.4 + 38,$$

$$72 = 38.1 + 34,$$

$$38 = 34.1 + 4,$$

$$34 = 4.8 + 2,$$

$$4 = 2.2.$$

(Poslední nenulový zbytek 2 mimochodem znovu dokazuje, že 2 je skutečně největší společný dělitel čísel 326, 72.)

Rovnosti Euklidova algoritmu přepíšeme ve tvaru:

$$38 = 326 - 72.4,$$

$$34 = 72 - 38.1,$$

$$4 = 38 - 34 \,.\, 1\,,$$

$$2 = 34 - 4 \,.\, 8\,.$$

Odtud postupně dostáváme:

$$34 = 72 - (326 - 72 \,.\, 4) \,.\, 1 =$$

$$= -326 + 72 \,.\, 5\,,$$

$$4 = 326 - 72 \,.\, 4 - (72 \,.\, 5 - 326) \,.\, 1 =$$
$$= 326 \,.\, 2 - 72 \,.\, 9\,,$$

$$2 = -326 + 72 \,.\, 5 - (326 \,.\, 2 - 72 \,.\, 9) \,.\, 8 =$$

$$= -17 \,.\, 326 + 77 \,.\, 72\,.$$

Srovnáme-li tento výsledek s rovnicí

$$2 = 326x + 72y\,,$$

vidíme, že jsme dostali

$$x = -17\,, \quad y = 77\,.$$

Vyřešili jsme tedy svou první neurčitou rovnici, kterou bychom ovšem raději psali ve zkráceném tvaru

$$163x + 36y = 1\,.$$

Prozatím jsme se omezili na dosti úzkou třídu rovnic. Jestliže totiž rovnici

$$ax + by = d\,,$$

kde d je největším společným dělitelem čísel a, b, vydělíme číslem d, dostaneme rovnici

$$a_1x + b_1y = 1 .$$

Není ovšem nutné omezovat se na pravou stranu rovnou jedné. Z citované algebraické věty snadno plyne: *Budiž d největší společný dělitel celých čísel a, b. Pak rovnice*

$$ax + by = d \tag{5}$$

má řešení (x_0, y_0), *tj. platí*

$$ax_0 + by_0 = d .$$

Budiž nyní t libovolné celé číslo. Položme

$$x = x_0t ,$$

$$y = y_0t .$$

Čísla x, y sice zřejmě nebudou řešením (5), ale zato pro ně bude platit

$$ax + by = dt .$$

Dostáváme podmínku řešitelnosti rovnice

$$ax + by = c ,$$

a, b, $c \in \mathrm{Z}$: Tato rovnice má řešení x, $y \in \mathrm{Z}$ právě tehdy, jestliže největší společný dělitel d čísel a, b je také dělitelem čísla c, tj. jestliže platí $d|c$.

Věta 1. *Buďte a, b, $c \in \mathrm{Z}$; neurčitá rovnice*

$$ax + by = c \tag{6}$$

má řešení x_0, y_0 v oboru celých čísel, jestliže největší společný dělitel d čísel a, b dělí také číslo c. Řešení je pak nekonečně mnoho a jsou určena vzorci

$$x = x_0 - bt,$$

$$y = y_0 + at, \tag{7}$$

kde t je libovolné celé číslo.

Abychom nalezli jednu dvojici kořenů $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$, která určuje všechna řešení x, y podle (7), použijeme opět řetězových zlomků.

Vyjdeme jako při řešení kongruencí ze vzorce

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n \tag{8}$$

a vypočítáme řetězový zlomek čísla $\frac{b}{a}$, což je zlomek v základním tvaru, jestliže rovnici

$$ax + by = c$$

dělíme společným činitelem, největším společným dělitelem čísel a, b.

Na rozdíl od kongruencí se zde můžeme setkat se záporným zlomkem. Na postupu řešení se tím nic nemění, jen si musíme být vědomi (viz kapitola 8), že pro záporná racionální čísla jsou všechna čísla P_k záporná. Určíme sblížené zlomky $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n} = \frac{b}{a}$. Dosadíme do (8) a vynásobíme na obou stranách číslem $(-1)^n c$:

$$bc(-1)^n Q_{n-1} - ac(-1)^n P_{n-1} = c,$$

tj.

$$ac(-1)^{n-1} P_{n-1} + bc(-1)^n Q_{n-1} = c,$$

$$a[(-1)^{n-1} P_{n-1} c] + b[(-1)^n Q_{n-1} c] = c,$$

odkud srovnáním s rovnicí

$$ax_0 + by_0 = c$$

dostáváme

$$x_0 = (-1)^{n-1} P_{n-1} c, \qquad (9)$$

$$y_0 = (-1)^n Q_{n-1} c.$$

Příklad 2. Budeme teď rovnici z příkladu 1 řešit pomocí vzorců (9). Rovnici ovšem vykrátíme:

$$163x + 36y = 1.$$

Najdeme prvky řetězového zlomku $\frac{b}{a} = \frac{36}{163}$:

$$
\begin{aligned}
36 &: 163 = 0\\
163 &: 36 = 4\\
36 &: 19 = 1\\
19 &: 17 = 1\\
17 &: 2 = 8\\
2 &: 1 = 2
\end{aligned}
$$

Je tedy $\frac{36}{163} = (0, 4, 1, 1, 8, 2)$, $n = 6$. Vypočítáme sblížené zlomky, přičemž silnou čarou ohraničíme P_5 a Q_5:

q_k	0	4	1	1	8	2
P_k	0	1	1	2	17	36
Q_k	1	4	5	9	77	163

Je $P_5 = 17$, $Q_5 = 77$ a podle vzorců (9)

$$x_0 = -17 \,.\, 1 = -17\,,$$

$$y_0 = 77 \,.\, 1 = 77$$

jako v příkladu 1.

Obecné řešení je

$$x = -17 - 36t\,,$$

$$y = 77 + 163t\,,$$

$t \in \mathrm{Z}$. Odtud např. pro $t = -1$ dostáváme řešení $(19, -86)$; pro $t = 1$ řešení $(-53, 240)$.

Příklad 3. Řešme rovnici

$$5x - 3y = 1\,.$$

Řešení. Zde je $\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3}{5} = -1 + \dfrac{2}{5} = (-1, 2, 2)$; $n = 3$ a tabulka vypadá takto:

q_k	-1	2	2
P_k	-1	-1	-3
Q_k	1	2	5

$P_2=-1$, $Q_2=2$ a vzorce (9) dávají

$$x_0=-1,$$
$$y_0=-2.$$

Obecné řešení je

$$x=-1+3t,$$
$$y=-2+5t.$$

Pro $t=1$ dostáváme odtud kladné hodnoty x, y:

$$x=2, \quad y=3.$$

Cvičení

1. Často bývá dána úloha řešit neurčitou rovnici $ax+by=c$ v oboru přirozených čísel, tj. pro $x, y \in \mathrm{N}$. (Ale koeficienty a, b, c jsou stále čísla celá, ne jenom přirozená.)
   Dokažte těchto několik vět o řešení rovnice $ax+by=c$ v oboru přirozených čísel. Ve všech případech předpokládáme $a>0$, $b>0$.
   (1) Rovnice $ax-by=c$ (kde největší společný dělitel čísel a, b dělí číslo c) má nekonečně mnoho řešení v oboru N.
   (2) Rovnice $ax+by=c$ buď nemá žádné řešení v oboru N, nebo jich má konečný počet.
   (3) Některé případy, kdy rovnice $ax+by=c$ nemá žádné řešení v oboru N: (a) $c \leqq 0$; (b) $c>0$, ale buď $c<a$ nebo $c<b$; (c) $c=ab$.

2. Řešte v oboru přirozených čísel ($x, y \in \mathrm{N}$) rovnice: (a) $x+15y=25$; (b) $x-13y=100$; (c) $7x+2y=35$; (d) $25x-21y=60$; (e) $15x+2y=30$.

3. Řešte v oboru celých čísel ($x, y \in \mathrm{Z}$) rovnice: (a) $11x-9y=25$; (b)

$10x+7y=97$; (c) $19x-23y=3$; (d) $47x-25y=279$; (e) $17x+21y=1001$; (f) $23x+41y=1299$; (g) $65x-37y=-212$; (h) $31x+41y=1837$; (i) $103x-15y=-882$; (j) $96x+65y=1000$.

18. PELLOVA ROVNICE

Je to neurčitá rovnice *druhého* stupně v x, y tvaru

$$x^2-Ny^2=1, \tag{1}$$

kde N má známý význam. Jako u každé neurčité rovnice hledáme řešení v oboru celých čísel a zapisujeme je jako uspořádanou dvojici (x, y).

Připusťme pro okamžik, že N se rovná druhé mocnině nějakého celého čísla: $N=a^2$, kde $a\in\mathbb{Z}$. Pak z (1) dostáváme

$$x^2-(ay)^2=1.$$

Rozdíl dvou druhých mocnin celých čísel se však může rovnat 1 jen tehdy, jde-li o čísla 1, 0 nebo -1, 0 (v tomto pořadí). Má tedy Pellova rovnice s $N=a^2$ řešení $(1, 0)$ a $(-1, 0)$. Ale tyto dvojice jsou dokonce řešeními Pellovy rovnice pro jakékoli N. Nazveme je triviálními řešeními a v dalším se jimi nebudeme zabývat.

Zajímají nás tedy řešení (x, y), pro něž je $x\neq 0$, $y\neq 0$. Buďte x, y přirozená čísla, pro která platí (1). Zřejmě jsou pak další řešení rovnice (1) uspořádané dvojice $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$. Abychom našli všechna řešení Pellovy rovnice, pokud existují, stačí tedy najít její řešení v přirozených číslech. Omezíme se tedy nadále na ta řešení (x, y), kde $x, y \in \mathbb{N}$. Pro některá dosti malá N není obtížné řešení rovnice (1) prostě uhodnout. Pro $N=2$ má zřejmě rovnice $x^2-2y^2=1$ řešení $(3, 2)$; pro $N=3$ je řešení Pellovy rovnice $(2, 1)$, pro $N=5$ je to $(9, 4)$, pro $N=6$ pak $(5, 2)$. Jistě bychom takto uhodli řešení Pellovy rovnice i pro některá $N>6$. Sotva bychom však uhodli, že nejmenším řešením rovnice $x^2-13y^2=1$ je uspořádaná dvojice $(649, 180)$ (vzhledem k tomu, že hledáme řešení v přirozených číslech, je snad jasné, co míníme „nejmenším" řešením: má-li rovnice $x^2-13y^2=1$ ještě nějaké jiné řešení v přirozených číslech (x', y'), musí být $x'>649$, $y'>180$). A rovnice $x^2-29y^2=1$ má dokonce nejmenší řešení $(9801, 1820)$, ač N není nijak příliš velké. Nechť se čtenář nedomnívá, že s rostoucím N rostou také hodnoty nejmenšího řešení Pellovy rovnice: nejmenší řešení Pellovy rovnice $x^2-30y^2=1$ je $(11, 2)$.

Platí toto tvrzení: Má-li rovnice (1) alespoň jedno řešení v přirozených číslech, má jich nekonečně mnoho. Budiž (x_0, y_0) nejmenší řešení rovnice (1). Pak všechna řešení (x, y) v přirozených číslech dostaneme ze vzorce

$$x+y\sqrt{N}=(x_0+y_0\sqrt{N})^n \tag{2}$$

pro $n=1, 2, 3, \ldots$ (Pro $n=1$ zřejmě dostaneme řešení (x_0, y_0).) Tento vzorec dokazuje Perron ve své knize [4]. Ukážeme si, jak se s ním počítá.

Pro $N=2$ jsme našli $x_0=3$, $y_0=2$. Všechna ostatní přirozená řešení rovnice $x^2-2y^2=1$ jsou tedy dána vztahem

$$x+y\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n$$

pro $n=2, 3, \ldots$

Pro $n=2$ dostáváme

$$x+y\sqrt{2}=9+12\sqrt{2}+8,$$

$$x+y\sqrt{2}=17+12\sqrt{2},$$

$$x=17, \quad y=12.$$

Pro $n=3$ je

$$x+y\sqrt{2}=27+54\sqrt{2}+72+16\sqrt{2},$$

$$x+y\sqrt{2}=99+70\sqrt{2},$$

$$x=99, \quad y=70.$$

Pro větší n bychom musili použít binomické věty a výpočet by byl komplikovanější, i když ovšem uskutečnitelný. Pro nás je důležité, že vzorec (2) zaručuje existenci nekonečně mnoha řešení rovnice (1), pokud známe nejmenší řešení (x_0, y_0).

Později si ukážeme jednodušší vzorce, umožňující výpočet všech řešení ze znalosti řešení (x_0, y_0).

Přesvědčte se zkouškou, že uspořádané dvojice (17, 12) a (99, 70) jsou řešeními rovnice $x^2-2y^2=1$.

Budeme tedy nyní hledat řešení (x, y) Pellovy rovnice. Budeme přitom pracovat s iracionálním číslem $\sqrt{N}$.

Vyjádříme číslo $\sqrt{N}$ nekonečným řetězovým zlomkem

$$\sqrt{N} = (q_1, \overline{q_2, \ldots, q_n, 2q_1}).$$

Počet prvků v symetrické části periody je $n-1$, což může být číslo liché nebo sudé. Číslo n udává počet prvků v předperiodě, za nimiž jsou vypsány všechny prvky v symetrické části periody. Těchto n prvků je

$$q_1, q_2, \ldots, q_n$$

a s nimi také budeme při řešení Pellovy rovnice pracovat. Číslo n je opět buď sudé, nebo liché. Při sudém n povedou naše další úvahy k řešení Pellovy rovnice, při lichém n však k řešení rovnice

$$x^2 - Ny^2 = -1,$$

ale uvidíme, že i toto řešení lze převést na řešení rovnice (1).

Buďte $\dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \dfrac{P_n}{Q_n}$ sousední sblížené zlomky řetězového zlomku čísla $\sqrt{N}$. Je ovšem

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}),$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

a platí

$$\sqrt{N} = \alpha = \frac{\alpha_n P_n + P_{n-1}}{\alpha_n Q_n + Q_{n-1}}.$$

Pro α_n platí

$$\alpha_n = (2q_1, q_2, \ldots) = \sqrt{N} + q_1.$$

Po dosazení tedy je

$$\sqrt{N} = \frac{(\sqrt{N} + q_1) P_n + P_{n-1}}{(\sqrt{N} + q_1) Q_n + Q_{n-1}}$$

a odtud

$$\sqrt{N}(\sqrt{N} + q_1) Q_n + \sqrt{N} Q_{n-1} = (\sqrt{N} + q_1) P_n + P_{n-1}.$$

Tuto rovnost lze převést na rovnost tvaru

$$a + b\sqrt{N} = c + d\sqrt{N},$$

$a, b, c, d \in \mathrm{Q}$, $\sqrt{N} \in \mathrm{I}$. Z toho, že množiny Q, I nemají společné prvky, plyne $a = c$, $b = d$. (Ostatně jsme už této úvahy použili v jednom numerickém případě, při počítání podle vzorce (2). Ale protože zde jde o počítání s obecnými výrazy, raději jsme si to rozepsali.)

V našem případě tedy

$$NQ_n = q_1 P_n + P_{n-1},$$

$$q_1 Q_n + Q_{n-1} = P_n.$$

Odtud

$$P_{n-1} = NQ_n - q_1 P_n ,$$

$$Q_{n-1} = P_n - q_1 Q_n .$$

Tyto výrazy dosadíme do vzorce

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n ;$$

dostaneme

$$P_n(P_n - q_1 Q_n) - (NQ_n - q_1 P_n)\, Q_n = (-1)^n ,$$

což ihned dává

$$P_n^2 - NQ_n^2 = (-1)^n ,$$

tedy pro sudé n řešení Pellovy rovnice

$$x = P_n , \quad y = Q_n .$$

Takto dostaneme řešení rovnice (1) pro $N=3$ (zde je $n=2$), $N=6$ $(n=2)$, $N=7$ $(n=4)$, $N=8$ $(n=2)$, $N= 11$ $(n=2)$, ..., $N=47$ $(n=4)$, $N=48$ $(n=2)$ (viz tabulku druhých odmocnin v kapitole 9).

Pro liché n přidáme ještě jednu periodu a místo hodnoty $\frac{P_n}{Q_n}$ vypočítáme hodnotu $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$ (bereme ovšem $2q_1 \to q_{n+1}$, $q_2 \to q_{n+2}$, $q_3 \to q_{n+3}$, ..., $q_n \to q_{2n}$ podle tohoto schematu:

$$\begin{array}{llll} q_1, q_2, \ldots, q_n, & 2q_1, & q_2, & \ldots, q_n \\ & \downarrow & \downarrow & \quad\ \downarrow \\ & q_{n+1}, & q_{n+2}, & \ldots, q_{2n}). \end{array}$$

Číslo $2n$ je sudé; opakování předešlých úvah dává

$$P_{2n}^2 - NQ_{2n}^2 = 1,$$

tedy pro liché n jsou kořeny Pellovy rovnice

$$x = P_{2n}, \quad y = Q_{2n}.$$

Z naší úvahy a z vlastností sblížených zlomků vyplývá, že čísla x, y jsou přirozená a že jsou to nejmenší čísla, která jsou řešením Pellovy rovnice. Dostali jsme tedy v obou případech nejmenší řešení (x_0, y_0).

Vzhledem k platnosti vzorce (2) platí: Pellova rovnice (1) má pro $\sqrt{N} \in I$ nekonečně mnoho řešení v přirozených číslech.

Příklad 1. Řešme rovnici

$$x^2 - 21y^2 = 1.$$

Řešení. Je $\sqrt{21} = (4, \overline{1, 1, 2, 1, 1, 8})$. Tabulku sestavíme z prvků 4, 1, 1, 2, 1, 1. Je tedy $n = 6$ a čísla $x = P_6$, $y = Q_6$ jsou nejmenší přirozená čísla, která vyhovují dané rovnici.

q_k	4	1	1	2	1	1
P_k	4	5	9	23	32	55
Q_k	1	1	2	5	7	12

Je tedy $x = 55$, $y = 12$. Zkouška: $55^2 - 21 . 12^2 = 3025 - 21.144 = 3025 - 3024 = 1$.

Příklad 2. Řešme rovnici

$$x^2 - 29y^2 = 1\,.$$

Řešení. Zde je $\sqrt{29} = (5, \overline{2, 1, 1, 2, 10})$, $n = 5$, budeme proto počítat čísla P_{10}, Q_{10}:

q_k	5	2	1	1	2	10	2	1	1	2
P_k	5	11	16	27	70	727	1524	2251	3775	9801
Q_k	1	2	3	5	13	135	283	418	701	1820

Vychází $x = 9801$, $y = 1820$ (jak se čtenář dověděl už v úvodu této kapitoly). Zkouška: $9801^2 - 29\,.\,1820^2 = 96\,059\,601 - 29\,.\,3\,312\,400 = 96\,059\,601 - 96\,059\,600 = 1$.

Zbývá nalézt nějaké numericky výhodnější vzorce místo vzorce (2). Sierpiński ve své populární knížce [6] uvádí bez důkazu tvrzení, že všechna řešení rovnice (1) dostaneme ze vzorců

$$x_{k+1} = x_0 x_k + N y_0 y_k\,, \tag{3}$$

$$y_{k+1} = y_0 x_k + x_0 y_k\,,$$

$$k \in \mathrm{N}_0\,,$$

kde (x_0, y_0) je nejmenší řešení.

Dokažme, že vzorce (3) dávají řešení Pellovy rovnice. Důkaz provedeme matematickou indukcí. Platí

$$x_0^2 - N y_0^2 = 1\,;$$

předpokládejme, že platí

$$x_k^2 - Ny_k^2 = 1\,.$$

Dokážeme, že pak platí také

$$x_{k+1}^2 - Ny_{k+1}^2 = 1\,,$$

kde x_{k+1}, y_{k+1} jsou dána vzorci (3).

$$\begin{aligned} x_{k+1}^2 - Ny_{k+1}^2 &= (x_0 x_k + Ny_0 y_k)^2 - N(y_0 x_k + x_0 y_k)^2 = \\ &= x_0^2 x_k^2 + 2Nx_0 y_0 x_k y_k + N^2 y_0^2 y_k^2 - Ny_0^2 x_k^2 - 2Nx_0 y_0 x_k y_k - \\ &- Nx_0^2 y_k^2 = x_k^2(x_0^2 - Ny_0^2) - Ny_k^2(x_0^2 - Ny_0^2) = \\ &= x_k^2 - Ny_k^2 = 1\,. \end{aligned}$$

Budiž dáno N. Výrazy (3) dávají pěkné rekurentní vzorce pro řešení rovnice $x^2 - Ny^2 = 1$. Např. pro $N = 2$ je $x_0 = 3$, $y_0 = 2$ a vzorce (3) dávají pro řešení rovnice $x^2 - 2y^2 = 1$ rekurentní vzorce

$$x_{k+1} = 3x_k + 4y_k\,,$$

$$y_{k+1} = 2x_k + 3y_k$$

pro všechna $k \in \mathrm{N}_0$. Tedy

$$x_1 = 17, \quad y_1 = 12,$$

$$x_2 = 99, \quad y_2 = 70,$$

$$x_3 = 577, \quad y_3 = 408,$$

$$\ldots\ldots$$

Porovnejme s řešením téže rovnice podle vzorce (2).

Vraťme se nyní k tabulce řetězových zlomků čísel $\sqrt{N}$ v kapitole 9. Její poslední tři sloupce se vztahují k Pellově rovnici. Sloupce nadepsané „x" a „y" udávají nejmenší řešení buď Pellovy rovnice (jestliže totiž v řetězovém zlomku čísla $\sqrt{N}=(q_1, \overline{q_2, \ldots, q_n, 2q_1})$ je n sudé číslo) nebo rovnice $x^2 - Ny^2 = -1$ (je-li n liché). O kterou z obou rovnic jde, je vyznačeno v posledním sloupci buď číslem $+1$ nebo číslem -1. (V tabulce jsou tedy pro sudé i liché n zapsána čísla $x = P_n$, $y = Q_n$.)

Poznámka. V této kapitole jsme se setkali nejen s Pellovou rovnicí, ale také s rovnicí

$$x^2 - Ny^2 = -1. \tag{4}$$

Mezi oběma rovnicemi je zásadní rozdíl. Zatímco Pellova rovnice má řešení pro každé N, rovnice (4) nemusí být pro některá N vůbec řešitelná v celých číslech. Příkladem toho je např. rovnice

$$x^2 - 3y^2 = -1,$$

která nemá celočíselné řešení. Čtenář si to dokáže ve cvičení 5.

Cvičení

1. Řešte ty Pellovy rovnice s $N \leqq 50$, jejichž řešení nejsou uvedena v tabulce v kapitole 9 (tj. v řádku N je v posledním sloupci číslo -1).
2. S použitím cvičení 2 kapitoly 12 dokažte, že Pellova rovnice má pro $N = n^2 + 1$, $n \in \mathrm{N}$, řešení $x = 2n^2 + 1$, $y = 2n$.

3. Ze vztahů (3) odvoďte rekurentní vzorce pro řešení Pellovy rovnice pro (a) $N=3$; (b) $N=8$; v obou případech z (x_0, y_0) vypočítejte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

4. V textu kapitoly 12 jsou uvedeny řetězové zlomky čísel $\sqrt{53}$, $\sqrt{54}$. Řešte s jejich pomocí Pellovy rovnice: (a) $x^2-53y^2=1$; (b) $x^2-54y^2=1$.

5. Dokažte, že rovnice

$$x^2-3y^2=-1$$

nemá řešení v celých číslech.

Návod. Rovnici pište ve tvaru

$$x^2+1=3y^2;$$

má-li být $x, y \in Z$, musí být $3 \mid x^2+1$. Vyšetřujte zvlášť případy $x=3k$, $x=3k+1$, $x=3k+2$; vyjde vám, že ve všech případech vychází při dělení čísla x^2+1 třemi zbytek, a to buď 1 nebo 2. Dovedete tímto způsobem dokázat neřešitelnost rovnice (4) pro nějaké jiné N?

VÝSLEDKY CVIČENÍ

Kapitola 1:

1. (a): $2, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{43}{19}, \frac{95}{42}$; (b): $3, \frac{13}{4}, \frac{94}{29}, \frac{107}{33}, \frac{308}{95}$; (c) $0, \frac{1}{3}, \frac{8}{25}, \frac{17}{53}$; (d) $10, \frac{101}{10}, \frac{1020}{101}$; $\frac{10301}{1020}$.

2. (a): $(5, 1, 1, 5)$; (b): $(3, 1, 2, 2, 1, 3)$, (c): $(0, 1, 1, 2, 1, 1, 6, 2)$.

3. Např. $(2, 1, 3, 1) = (2, 1, 4) = \frac{14}{5}$.

Kapitola 2:

3. $(1, 1, 3, 3, 3, 1, 5, 4, 4, 1, 3)$.

Kapitola 3:

1. (a): $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{11}{30}$; (b): $1, 2, \frac{5}{3}, \frac{17}{10}, \frac{39}{23}$; (c): $2, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}, \frac{24}{11}, \frac{61}{28}, \frac{451}{207}, \frac{4571}{2098}$; (d): $0, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{29}, \frac{11}{64}, \frac{38}{221}, \frac{125}{727}, \frac{663}{3856}$; (e): $0, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{10}{33}, \frac{33}{109}, \frac{109}{360}, \frac{360}{1189}$.

2. (a): $0, 1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{11}, \frac{11}{15}, \frac{30}{41}$; (b): $1, \frac{8}{7}, \frac{25}{22}, \frac{83}{73}, \frac{274}{241}, \frac{2001}{1760}$; (c): $1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{11}{8}, \frac{29}{21}, \frac{69}{50}, \frac{98}{71}, \frac{167}{121}, \frac{265}{192}, \frac{697}{505}$; (d): $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{4}{15}, \frac{15}{56}, \frac{49}{183}, \frac{64}{239}, \frac{177}{661}, \frac{241}{900}, \frac{900}{3361}$; (e): $0, \frac{1}{6}, \frac{4}{25}, \frac{9}{56}, \frac{13}{81}, \frac{22}{137}, \frac{57}{355}, \frac{250}{1557}, \frac{1557}{9697}$.

3. $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}$: k-tý sblížený zlomek je $\frac{u_{k+1}}{u_k}$, kde u_k, (u_{k+1}) označuje k-tý ($(k+1)$-ní) člen Fibonacciho posloupnosti.

Kapitola 4:

3. $\frac{P_5}{Q_5} = \frac{13}{41}$; $\left|0{,}317317 - \frac{13}{41}\right| < \frac{1}{2583} < 0{,}0004$; $\delta = 0{,}317317 - \frac{13}{41} = 0{,}0002$.

Kapitola 6:

1. Sblížené zlomky: $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}$, vsunuté zlomky: $2, \frac{4}{3}, \frac{10}{7}, \frac{24}{17}, \frac{58}{41}, \frac{140}{99}$; z nich nejlepší přiblížení: $\frac{4}{3}, \frac{24}{17}, \frac{140}{99}$.
2. $q_{19} = 2$.
3. Postačí hodnota $e = 2{,}71828$.

Kapitola 7:

1. $q = 3$ nebo 7.

Kapitola 8:

$-\frac{96}{65} = (-2, 1, 1, 10, 3)$; $-2, -1, -\frac{3}{2}, -\frac{31}{21}, -\frac{96}{65}$.

Kapitola 9:

1. (a) $\frac{99}{70}$, $\delta < \frac{1}{11830} = 0{,}00008$; (b) $\frac{26}{15}$, $\delta < \frac{1}{615} = 0{,}0016$; (c) $\frac{2889}{1292}$, $\delta < \frac{1}{1292 . 5473} < \frac{1}{1000 . 5000} = 0{,}0000002$.
2. (b) $(7, \overline{1, 2, 7, 2, 1, 14})$; (c) $(7, \overline{1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14})$.

3. (a) $(3, \overline{1, 4})$; (b) $(\overline{2, 1, 2})$.

4. $(3, \bar{2})$ a $(0, 1, 1, \bar{2})$.
7. (a) $(0, 3, 3, 9, \ldots)$; (b) $(0, 2, 10, 2, \ldots)$; (c) $(1, 2, 1, 1, 18, \ldots)$.

Kapitola 11:

1. (a) $1+\sqrt{2}$; (b) $2+\sqrt{5}$; (c) $4+\sqrt{17}$; (d) $5+\sqrt{26}$.

2. (a) $2+\sqrt{6}$; (b) $3+\sqrt{12}$; (c) $4+\sqrt{24}$; (d) $5+\sqrt{27}$; (e) $6+\sqrt{38}$.

3. (a) $\dfrac{4+\sqrt{37}}{7}$; (b) $\dfrac{6+\sqrt{101}}{5}$; (c) $\dfrac{9+2\sqrt{39}}{15}$.

5. $5x^2-18x-4=0$; $\alpha=\dfrac{9+\sqrt{101}}{4}$, $\beta=\dfrac{9+\sqrt{101}}{5}$.

6. (a) $(\bar{2})$; (b) $(\overline{1, 4, 1, 1})$.

Kapitola 12:

1. (a) $(7, \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 14})$; (b) $(9, \overline{4, 1, 1, 4, 18})$; (c) $(10, \overline{20})$.

2. $\sqrt{n^2+1}=(n, \overline{2n})$.

Kapitola 13:

1. $\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$.

2. $\dfrac{20-\sqrt{2}}{8}$.

Kapitola 16:

2. (a) 3; (b) 12.
3. (a) 3; (b) 6, 17, 28, 39, 50; (c) 13; (d) 4; (e) 15; (f) 24; (g) 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32; (h) 99, 206, 313; (i) 81; (j) 200, 751, 1302, 1853, 2404.

Kapitola 17:

2. (a) jediné řešení $(10, 1)$; (b) nekonečně mnoho řešení $(100+13n, n)$, $n \in \mathbf{N}$; (c) dvě řešení $(1, 14)$ a $(3, 7)$; (d) nekonečně mnoho řešení $(15+21n, 15+25n)$, $n \in \mathbf{N}_0$; (e) žádné řešení.
3. (u všech řešení jsou vynechána čísla $-bt$, $+at$ a jsou — s výjimkou cvičení (i) — uváděny kladné hodnoty x_0, y_0) (a) $(8, 7)$; (b) $(9, 1)$; (c) $(5, 4)$; (d) $(7, 2)$; (e) $(28, 25)$; (f) $(3, 30)$; (g) $(3, 11)$; (h) $(9, 38)$; (i) $(-9, -3)$; (j) $(5, 8)$.

Kapitola 18:

1. $N=2:(3, 2)$; $N=5:(9, 4)$; $N=10:(19, 6)$; $N=13:(649, 180)$; $N=17:(33, 8)$; $N=26:(51, 10)$; $N=29:(9801, 1820)$; $N=37:(73, 12)$; $N=41:(2049, 320)$; $N=50:(99, 14)$.
3. (a) $x_{k+1}=2x_k+3y_k$, $y_{k+1}=x_k+2y_k$: $(7, 4)$, $(26, 15)$, $(97, 56)$; (b) $x_{k+1}=3x_k+8y_k$, $y_{k+1}=x_k+3y_k$: $(17, 6)$, $(99, 35)$, $(577, 204)$.
4. (a) $(66249, 9100)$; (b) $(485, 66)$.

SEZNAM LITERATURY

[1] Davenport H.: The Higher Arithmetic, An Introduction to the Theory of Numbers, ruský překlad Nauka Moskva 1965

[2] Hardy G. H.—Wright E. M.: An Introduction to the Theory of Numbers, německý překlad R. Oldenbourg München 1958

[3] Chinčin A. J.: Řetězové zlomky, Přírodovědecké vydavatelství Praha 1952

[4] Perron O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen, 3. verbesserte und erweiterte Auflage, Bd. I. Elementare Kettenbrüche, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart 1954

[5] Rychlík K.: Úvod do elementární číselné theorie, Přírodovědecké nakladatelství Praha 1950

[6] Sierpiński W.: Czym sie zajmuje teoria liczb, Wiedza powszechna Warszawa 1957

Seznam dosud vydaných svazků
EDICE ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ
v nakladatelství Mladá fronta

1. *František Hradecký—Milan Koman—Jan Vyšín:* Několik úloh z geometrie jednoduchých těles, 1961, 1963 a 1977
2. *Jiří Sedláček:* Co víme o přirozených číslech, 1961, 1965 a 1976
3. *Jaroslav Šedivý:* Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách, 1962
4. *Miroslav Šisler—Jiří Jarník:* O funkcích, 1962 a 1963
5. *František Veselý:* O nerovnostech, 1963
6. *Rudolf Výborný:* Matematická indukce, 1963 a 1966
7. *Jaroslav Šedivý:* O podobnosti v geometrii, 1963 a 1967
8. *Jiří Váňa:* O rovnicích s parametry, 1964 a 1970
9. *Jan Vyšín:* Konvexní útvary, 1964
10. *Jiří Sedláček:* Faktoriály a kombinační čísla, 1964
11. *Josef Holubář:* Geometrická místa bodů v prostoru, 1965
12. *Karel Havlíček:* Prostory o čtyřech a více rozměrech, 1965
13. *Miroslav Šisler—Josef Andrys:* O řešení algebraických rovnic, 1966
14. *František Veselý:* O dělitelnosti čísel celých, 1966
15. *Milan Koman:* Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic, 1966
16. *Stanislav Horák:* Kružnice, 1966
17. *Jaromír Hroník:* Úlohy o maximech a minimech funkcí, 1967
18. *Karel Havlíček:* Analytická geometrie a nerovnosti, 1967
19. *Jiří Jarník:* Komplexní čísla a funkce, 1967
20. *Bruno Budinský—Stanislav Šmakal:* Goniometrické funkce, 1968
21. *Alois Apfelbeck:* Kongruence, 1968
22. *Tibor Šalát:* Dokonalé a spriatelené čísla, 1969
23. *Jaroslav Morávek—Milan Vlach:* Oddělitelnost množin, 1969

24. *Ján Gatial—Milan Hejný:* Stavba Lobačevského planimetrie, 1969
25. *Leo Bukovský—Igor Kluvánek:* Dirichletov princíp, 1970
26. *Karel Hruša:* Polynomy v moderní algebře, 1970
27. *Stanislav Horák:* Mnohostěny, 1970
28. *Bruno Budinský—Stanislav Šmakal:* Vektory v geometrii, 1971
29. *František Zítek:* Vytvořující funkce, 1972
30. *Milan Koman—Jan Vyšín:* Malý výlet do moderní matematiky, 1972 a 1974
31. *Oldřich Odvárko:* Booleova algebra, 1973
32. *Jan Vyšín—Jitka Kučerová:* Druhý výlet do moderní matematiky, 1973
33. *Jaroslav Morávek:* O dynamickém programování, 1973
34. *Ladislav Rieger:* O grupách, 1974
35. *Alois Kufner:* Co asi nevíte o vzdálenosti, 1974
36. *Ján Černý:* O aplikáciach matematiky, 1976
37. *Beloslav Riečan—Zdena Riečanová:* O pravdepodobnosti, 1976
38. *Juraj Bosák:* Latinské štvorce, 1976
39. *Alois Kufner:* Nerovnosti a odhady, 1975
40. *Antonín Vrba:* Princip matematické indukce, 1977
41. *Bohdan Zelinka:* Rovinné grafy, 1977
42. *Ladislav Beran:* Uspořádané množiny, 1978
43. *Jiří Jarník:* Posloupnosti a řady, 1979
44. *Bohdan Zelinka:* Matematika hrou i vážně, 1979
45. *Antonín Vrba:* Kombinatorika, 1980
46. *Jaroslav Šedivý:* Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, 1980
47. *Arnošt Niederle:* Zajímavé dvojice trojúhelníků, 1980
48. *Alois Kufner:* Symetrické funkce, 1982
49. *František Veselý:* O nerovnostech a nerovnicích, Praha 1982
50. *Adam Płocki:* O náhodě a pravděpodobnosti, 1982
51. *V. B. Vasiljev—V. L. Gutenmacher:* Přímky a křivky, 1982
52. *Ján Gatial—Tomáš Hecht—Milan Hejný:* Hry takmer matematické, 1982

OBSAH

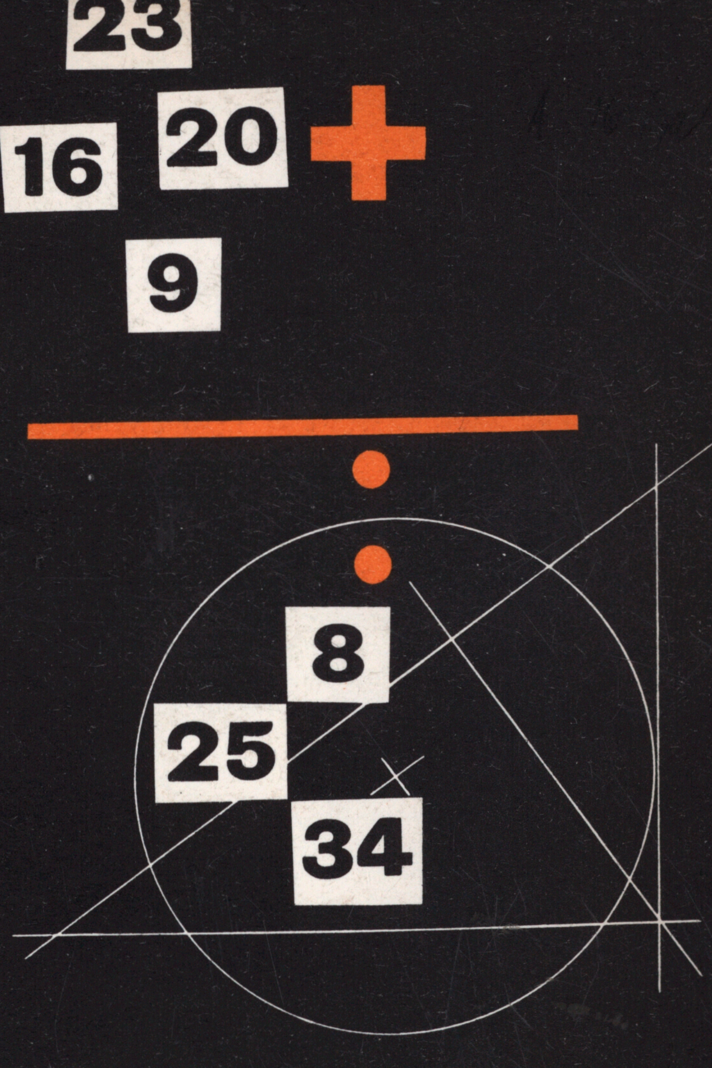
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

PAVEL VÍT

Řetězové zlomky

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
K tisku připravil Vladimír Doležal
Odpovědná redaktorka Libuše Rousková
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 4488
Edice Škola mladých matematiků, svazek 49
Vytiskly Západoslovenské tlačiarne, n. p., závod Svornosť,
Bratislava, ul. Februárového víťazstva 20
6,32 AA, 6,75 VA, 160 stran
Náklad 6000 výtisků. První vydání
Praha 1982. 508/21/82.5
23—096—82 03/2

Cena brožovaného výtisku 7,— Kčs



23–096–82
03/2
Cena brož.
Kčs 7,—