

4 PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

4.1 INTRODUÇÃO

A Cartografia se constitui numa ferramenta aplicável a qualquer das atividades humanas que requeiram conhecimento acerca do seu ambiente ou de relacionamentos ocorridos entre fenômenos deste ambiente. Sob a denominação Cartografia encontram-se todos os procedimentos e métodos voltados para o planejamento, coleta, representação e utilização de dados geográficos, quer na forma digital quer na forma analógica. A Cartografia pode ser vista, dentre outras formas, como meio de comunicação de informação. Neste sentido a Cartografia é veículo de comunicação mais eficiente do que um relatório escrito ou do que uma tabela ou gráfico.

De modo simplificado, um mapa consiste de um conjunto de símbolos que devem ter um relacionamento inequívoco/único com entidades/objetos/fenômenos existentes no mundo real, além disso deve existir um relacionamento entre a representação e o mundo real que seja baseado numa métrica. O mundo real é por demais complexo para ser representado de forma completa e acurada. A produção de um mapa é uma atividade de engenharia e portanto exige projeto. O projeto realizado denomina-se projeto cartográfico. Com o projeto cartográfico busca-se estabelecer quais métodos e quais processos deverão ser aplicados para que as finalidades realizáveis a partir do uso do mapa possam ser alcançadas. Os processos de abstração cartográfica e de generalização cartográfica são aplicados em primeiro lugar na produção de um mapa, e como resultado das ações da cartografia, tem-se uma representação simplificada e/ou aproximada do mundo. Nesta figura percebe-se que a representação cartográfica é realizada por meio de pontos, linhas, áreas, textos, cores e texturas. Ocorre portanto a simbolização e a seleção das entidades/objetos/fenômenos representados. Embora saibamos que uma edificação não seja, na realidade, um polígono vazado com um código impresso por cima, aceitamos que aquela figura representa e nos invoca o conceito de casa. Na realidade a eficiência de uma representação cartográfica depende tanto do conhecimento daquele que a interpreta quanto da representação em si.

Além dos processos de abstração e generalização a que as entidades /objetos/ fenômenos do mundo real estão submetidos ao se buscar representá-los na forma de mapa, existe ainda um aspecto analítico que envolve a produção dos mapas. O aspecto analítico diz respeito ao relacionamento geométrico entre as entidades/objetos/fenômenos representados e as entidades/objetos/fenômenos existentes no mundo real. Este relacionamento, que é baseado em funções matemáticas, recebe o nome de projeção cartográfica.

Uma projeção cartográfica pode ser definida como um relacionamento matemático entre posições referidas a um modelo de superfície terrestre e posições referidas a uma superfície plana ou uma superfície desenvolvível no plano. De forma mais rigorosa uma projeção cartográfica é a transformação de espaços bi-unívoca entre uma superfície de referência (SR) e uma superfície de projeção (SP) (Figura 4.1). Todas as projeções cartográficas envolvem operações analíticas e operações de representação gráfica.

Como definiu-se projeção cartográfica como uma transformação entre espaços deve-se aceitar que algo que é produzido por meio de uma transformação será diferente do original, visto que as projeções cartográficas não são realizadas por meio das transformações ortogonais. O aspecto mais importante no tema projeções cartográficas reside no conceito de *distorção* ou *distorção de escala*. Uma projeção cartográfica procura ser uma forma de representar o mundo real, e no entanto, pelo fato de ser uma

transformação introduz *distorção* e o resultado do processo de representação, em geral, é diferente do original (Figura 4.2).



Figura 4.1 Superfícies relacionadas em projeções cartográficas

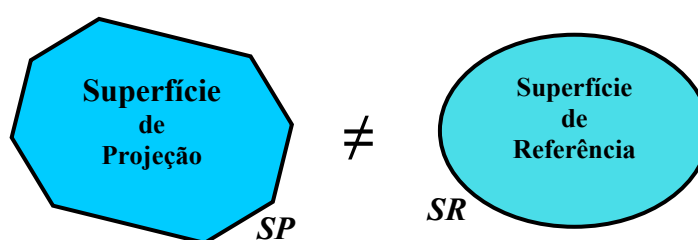


Figura 4.2 - Superfície de projeção (SP) e superfície de referência (SR) diferentes

4.2 CLASSIFICAÇÃO DAS PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

Existem diversas maneiras de se classificar as projeções cartográficas e existe certa dificuldade de se estabelecer nomes para diferentes projeções cartográficas (Richardus, 1982). No entanto para todas as projeções cartográficas deve ser estabelecido um conjunto de elementos que possam individualizá-la. Tais elementos são: a) o modelo adotado para a Terra, isto é qual é a superfície de referência (SR); b) a figura geométrica adotada como superfície de representação ou superfície de projeção (SP); c) o modo como o modelo da Terra e a superfície de projeção se tocam; d) o ângulo formado entre o eixo de rotação do modelo da Terra e a linha de simetria da superfície de projeção; e) o modo como as funções de projeção cartográfica são desenvolvidas; e f) a propriedade verificada ou existente nas entidades/ objetos representados quando comparados com os originais do modelo da Terra adotado.

As projeções cartográficas podem ser identificadas pelo nome de seu idealizador, como por exemplo, Projeção de Mercator, Projeção de Robinson. As projeções cartográficas também podem ser identificadas por um nome composto por alguns dos elementos descritos acima, como por exemplo, projeção Azimutal Ortográfica Oblíqua.

4.2.1 Superfícies de referência

Um *modelo* é uma representação de algo com aproximação suficiente para atender a alguma finalidade. O rigor da representação é função, ou depende, da finalidade da modelagem. Assim, como o planeta Terra é um sólido curvo um dos modelos que podem ser aplicados para descrevê-lo é uma esfera. No entanto, os desenvolvimentos ocorridos no campo da Geodésia mostraram que um elipsóide é um modelo da Terra mais adequado,

visto que de fato existe um achatamento na região dos pólos e uma protuberância na região equatorial, e quando se realizam operações em escalas grandes a aproximação da Terra por uma esfera já não é suficiente. Cada uma destas superfícies tem suas características próprias e sua aplicabilidade como superfície de referência (Figura 4.3).

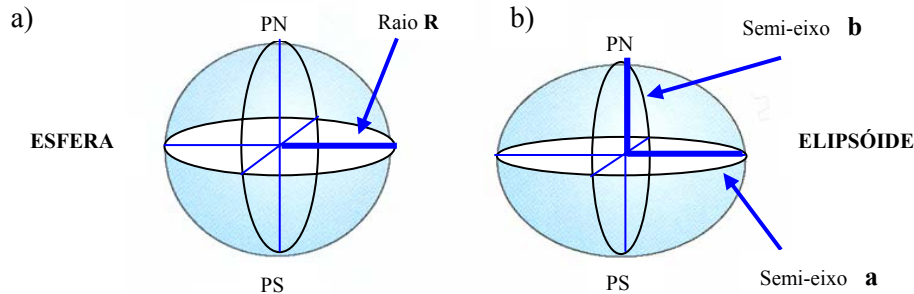


Figura 4.3 - Modelos da Terra (esfera e elipsóide)

A esfera é uma superfície que tem curvatura constante e requer apenas um parâmetro para a sua definição (Fig. 4.3a). Este parâmetro é o raio (R), ou seja, para definir uma esfera basta definir um valor para o raio. A distância de qualquer ponto pertencente à esfera ao seu centro é constante. Para esta superfície de referência são definidos como característicos os pólos PN e PS , a linha do Equador contida num plano perpendicular à linha dos pólos e um círculo máximo que contém a linha dos pólos denominado meridiano de Greenwich.

A superfície do elipsóide (Fig. 4.3b) é um pouco mais complexa, e pode ser descrita como a superfície que se obtém pela rotação de uma semi-ellipse, daí ser denominada *elipsóide de revolução*. Os semi-eixos da ellipse são denominado a e b . O círculo que representa o Equador tem raio de curvatura a (semi-eixo maior). Todos os meridianos têm forma de elipses com o semi-eixo maior contido no plano do Equador e o semi-eixo menor b contido na linha $PN - PS$. A superfície do elipsóide é mais complexa do que a superfície da esfera, e esta complexidade pode ser sintetizada no fato de que um elipsóide tem infinitos raios de curvatura em cada ponto, enquanto a esfera tem apenas um. Em cada ponto da superfície do elipsóide existem dois raios de curvatura principais que são o raio de curvatura da seção meridiana M e o raio de curvatura da seção transversal ou primeiro vertical N . Todos os procedimentos analíticos que consideram a superfície do elipsóide tomam em consideração os seus raios de curvatura principais.

A utilização de uma ou outra superfície de referência (esfera ou elipsóide) leva a diferentes resultados no produto final que é o mapa. De um modo geral a adoção do modelo de Terra ou da superfície de referência depende da escala e da finalidade da representação.

No âmbito da cartografia ou da Engenharia Cartográfica, o estudo das propriedades geométricas da superfície da esfera pertence ao campo da Astronomia de Posição, e o estudo das propriedades geométricas da superfície do elipsóide pertence ao campo da Geodésia. Os conceitos relativos às duas superfícies são de extrema importância para o tema Projeções Cartográficas visto que as superfícies de referência são tomadas como a verdade que será mapeada, isto é, os valores referidos a estas superfícies são tomados como a verdade para comparar valores representados, e desta comparação é que se conclui acerca da distorção a que a grandeza foi submetida ao ser representada numa ou noutra projeção cartográfica.

4.2.2 Superfícies de Projeção

A superfície de projeção (*SP*) podem ser um plano, ou um cilindro ou um cone. Isso não quer dizer que se produzirão mapas para ser usados ou interpretados enquanto estiverem na forma de cone ou cilindro, quer dizer que as características geométricas destas figuras proporcionam variabilidades apropriadas para se realizar as projeções cartográficas. Uma projeção cartográfica é produzida usando apenas uma superfície de projeção. Estas superfícies (*SR*) admitem seu desenvolvimento num plano, ou seja, é possível tornar plana a superfície de um cone e a superfície de um cilindro.

4.2.3 Contato entre *SR* e *SP*

As transformações de espaços que se realizam nas projeções cartográficas sempre ocorrem tendo como consideração que as duas superfícies *SR* e *SP* têm pontos ou linhas comuns, isto é, as duas superfícies se tocam. Por exemplo, uma esfera e um plano podem se tocar de modo que, do ponto de vista geométrico, só exista um ponto de contato, ou então que o contato ocorra por meio de um conjunto de pontos que, necessariamente neste caso, pertencerão a um círculo. Para o caso da *SR* e um cone pode-se ter contato por meio de uma linha ou por meio de duas linhas. Quando um plano toca a *SR* num único ponto se diz que o contato ocorre de modo tangente, e o mesmo se diz da *SP* cone ou cilindro quando o contato ocorre por meio de uma linha (Figura 4.4). Quando o contato entre um plano e uma esfera ou um elipsóide ocorre por meio de uma linha tem-se o contato de modo secante. Para um cone e para um cilindro o contato de modo secante ocorre quando existem duas linhas de contato (Figura 4.5).

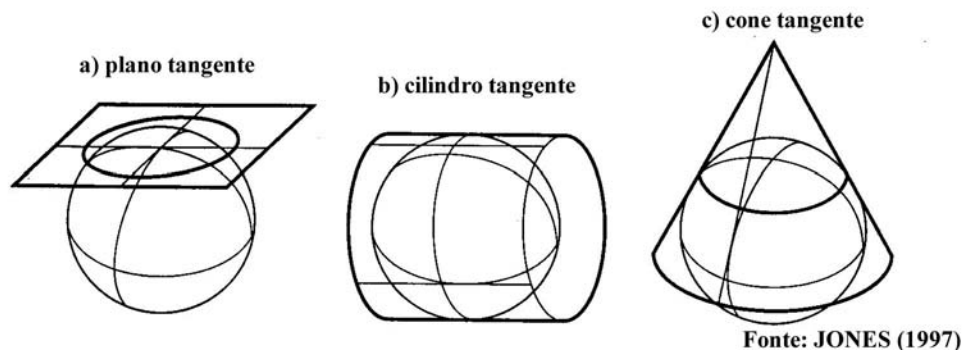


Figura 4.4 - Superfícies de projeção (*SP*) relacionadas de modo tangente com a superfície de referência (*SR*): a) plano, b) cilindro, e c) cone

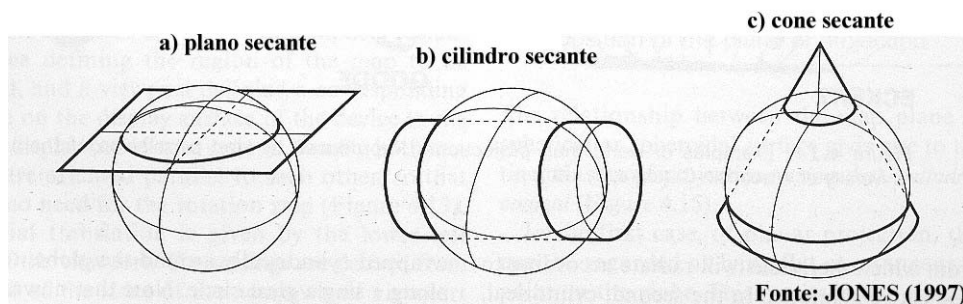


Figura 4.5 - Superfícies de projeção (*SP*) relacionadas de modo secante com a superfície de referência (*SR*): a) plano, b) cilindro, e c) cone

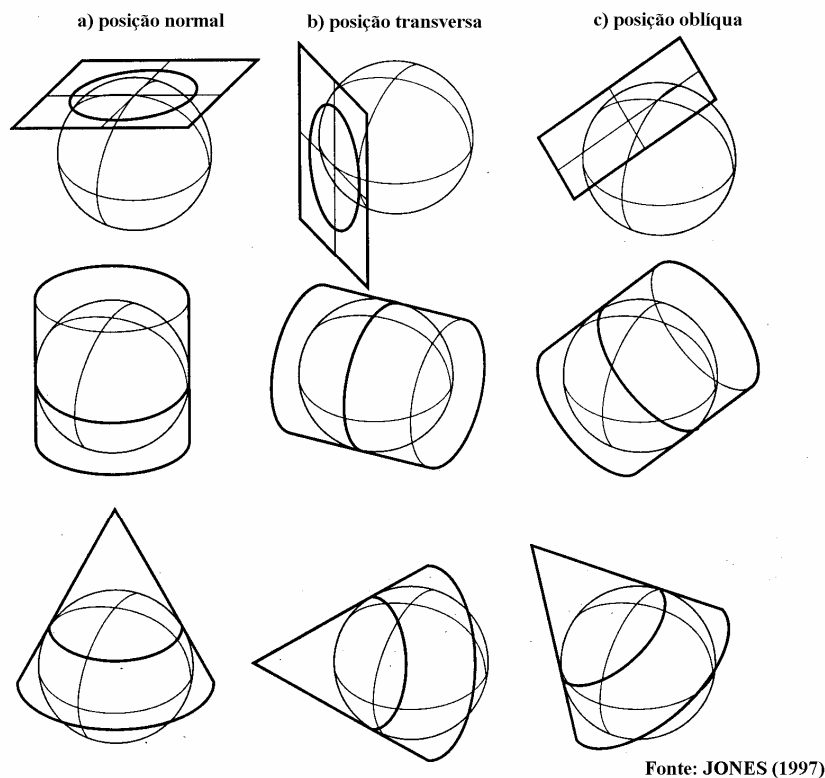
Fonte: Jones (1997).

4.2.4 Posição relativa entre *SR* e *SP*

A maneira como ocorre o contato entre a *SR* e a *SP* depende da definição de eixo de rotação da *SR* e e eixo de simetria da *SP*. Eixo de rotação da *SR* é definido como a linha dos pólos, ou linha *PN-PS*. A linha de simetria da *SP* pode ser definida como a linha que contém todos os centros dos círculos ou das elipses formados por pontos das seções aos cones ou aos cilindros. No caso de um plano a linha de simetria é uma das normais ao plano.

Quando os eixos de simetria e de rotação formam ângulo de 0° (zero graus) se diz que a *SP* está em posição *normal*, quando estes eixos formam um ângulo de 90° (noventa graus) se diz que a *SP* está em posição *transversa*, e quando os dois eixos formam ângulo diferente de 0° e de 90° se diz que a *SP* está em posição *oblíqua*. Na Figura 4.6 pode-se observar as diferentes possibilidades.

Há ainda as projeções cartográficas polisuperficiais em que a mesma superfície de projeção é utilizada repetidas vezes em diferentes posições relativamente à *SR*. Um exemplo deste tipo de projeção é a Projeção Policônica, utilizada pelo IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística para realizar a representação de todo o território nacional.



Fonte: JONES (1997)

Figura 4.6 - Posições da superfície de projeção (*SP*) em relação à superfície de referência (*SR*): a) normal, b) transversa e c) oblíqua

Fonte: Jones (1997).

4.2.5 Geração da projeção cartográfica

Todas as projeções cartográficas envolvem procedimentos analíticos, isto é, envolvem cálculos, embora o termo projeção seja utilizado para sua denominação. O resultado da aplicação de uma projeção cartográfica, embora resulte muitas vezes num produto gráfico como um mapa, é obtido por meio de operações analíticas.

As projeções cartográficas podem ser classificadas segundo o processo de geração em projeções geométricas, semi-geométricas e analíticas. Isso quer dizer que são utilizados aspectos geométricos para desenvolver uma projeção cartográfica, ou que são utilizados aspectos geométricos e condições matemáticas em seu desenvolvimento, ou que apenas condições matemáticas são aplicadas ao desenvolvimento da projeção cartográfica respectivamente (Richardus, 1982).

4.2.6 Propriedade de uma projeção cartográfica

O aspecto mais importante numa projeção cartográfica está ligado ao resultado da comparação, entre grandezas geométricas representadas na *SP* e suas correspondentes ou suas originais da *SR*. Quando se comparam grandezas da *SP* com as suas correspondentes da *SR* chega-se a uma de três possibilidades. Estas possibilidades são:

- 1- a grandeza na *SP* é igual à sua correspondente original da *SR*;
- 2- a grandeza na *SP* é maior do que sua correspondente original da *SR*; ou
- 3- a grandeza na *SP* é menor do que sua correspondente original da *SR*.

A diferença entre valores da *SR* e os correspondentes na *SP* é devida ao fato de a *SP* ser uma representação da *SR*, e não a própria *SR*. Como já foi dito, quando se realiza a comparação entre as superfícies de referência e de projeção percebe-se que são diferentes e esta diferença recebe o nome de *distorção* ou *distorção de escala*. De acordo com o comportamento da *distorção de escala* pode-se classificar as projeções cartográficas em:

- 1) **Conformes** – são aquelas projeções cartográficas em que a *distorção* atua de modo igual para todas as direções em cada ponto na *SP*. Esta propriedade tem o significado geométrico de preservação da forma das entidades/objetos/elementos representados. De forma mais rigorosa diz-se que nas projeções cartográficas que têm a propriedade de conformidade os ângulos são preservados. A projeção UTM tem a propriedade de conformidade e por conseqüência proporciona a manutenção da forma/ângulos.
- 2) **Equivalentes** – são aquelas projeções cartográficas em que a *distorção de escala* atua de forma inversa em duas direções perpendiculares em cada ponto na *SP*. Numa direção ocorre ampliação do elemento geométrico e na outra ocorre uma redução do elemento geométrico, de modo a garantir que o valor numérico da área da região representada seja mantido. Desse modo o valor numérico obtido no mapa deve ser afetado apenas da escala nominal de representação para se obter o valor numérico da área na *SR*. A Projeção Cilíndrica Equivalente Normal tem esta propriedade.
- 3) **Equidistantes** - são aquelas projeções cartográficas em que uma família de linhas não sofre *distorção*, ou seja, o comprimento de qualquer parte ou qualquer destas linhas deve apenas ser afetado da escala nominal de representação para se obter o comprimento correspondente na *SR*. A Projeção Azimutal Ortográfica tem esta propriedade.
- 4) **Afiláticas** - são aquelas projeções cartográficas em que não ocorre nenhuma das três propriedades anteriores. A Projeção Cilíndrica de Muller é afilática.

A ocorrência de uma das propriedades implica necessariamente na ausência das outras. Isso quer dizer que quando uma projeção cartográfica tem a propriedade de

conformidade não será possível identificar nela as propriedades de equivalência ou equidistância. As propriedades das projeções cartográficas são excludentes.

4.3 CONCEITO DE PROJEÇÃO CARTOGRÁFICA

A representação de uma *SR* numa *SP* implica na seleção destas duas superfícies, além disso implica na seleção ou especificação dos outros elementos descritos acima na classificação das projeções cartográficas. Uma projeção cartográfica será, então, uma transformação entre espaços de modo que os elementos referidos a uma *SR* são calculados ou transformados para a *SP*. A forma genérica de uma projeção cartográfica é dada na equação 4.1.

$$\begin{aligned} X &= f_1(\varphi, \lambda) \text{ e} \\ Y &= f_2(\varphi, \lambda). \end{aligned} \quad (4.1)$$

As quantidades *X* e *Y* representam posições ou coordenadas de pontos na *SP* e as quantidades φ (lê-se "fi"), λ (lê-se "lâmbda") representam posições ou coordenadas na *SR*. As coordenadas φ, λ são denominadas coordenadas geográficas latitude (φ) e longitude (λ), a cada interseção de um paralelo com um meridiano tem-se uma posição na *SR* (Figura 4.7).

Logo, nas eq. 4.1 são calculadas coordenadas numa projeção cartográfica (*X, Y*) a partir do conhecimento das coordenadas de pontos da superfície de referência (φ, λ). Existem virtualmente infinitas possibilidades de relacionar as quantidades de um *SR* para obter valores em uma *SP*. Desse modo pode-se dizer que existem virtualmente infinitas projeções cartográficas.

Para que a transformação seja reversível, e possam ser calculadas posições na *SR* a partir das posições na *SP* deve existir o relacionamento funcional expresso na equação 4.2.

$$\begin{aligned} \varphi &= f_1^{-1}(X, Y) \text{ e} \\ \lambda &= f_2^{-1}(X, Y). \end{aligned} \quad (4.2)$$

As quantidades φ e λ representam posições ou coordenadas de pontos na *SR* e as quantidades *X* e *Y* representam posições ou coordenadas na *SP*. Logo, nas eq. 2.2 são calculadas coordenadas numa superfície de referência (φ, λ) a partir do conhecimento das coordenadas de pontos da superfície de projeção (*X, Y*).

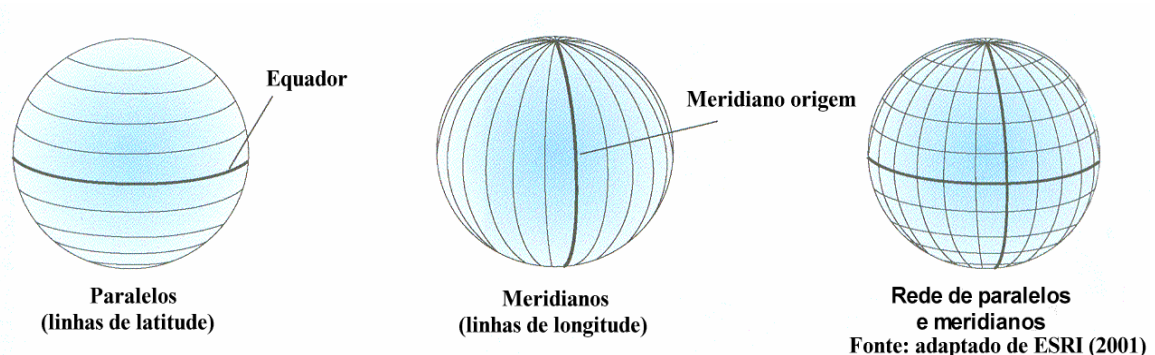
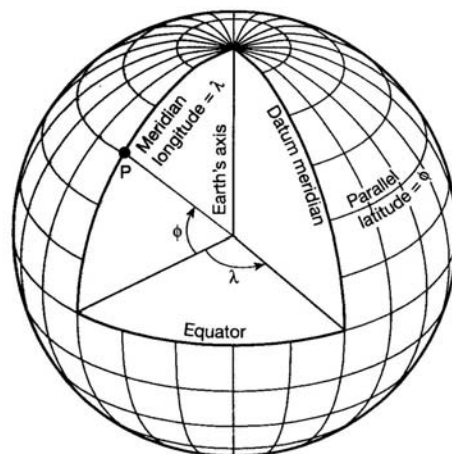


Figura 4.7 - Linhas de latitude e linhas de longitude numa esfera

Fonte: Adaptado de ESRI (2001).

Os valores de latitude e de longitude são medidos em unidades angulares, normalmente graus sexagesimais. Os valores válidos de latitude φ variam entre -90° (noventa graus Sul) e $+90^\circ$ (noventa graus Norte) (Figura 4.8), e os valores de longitude λ entre -180° (cento e oitenta graus Oeste) e $+180^\circ$ (cento e oitenta graus Leste).

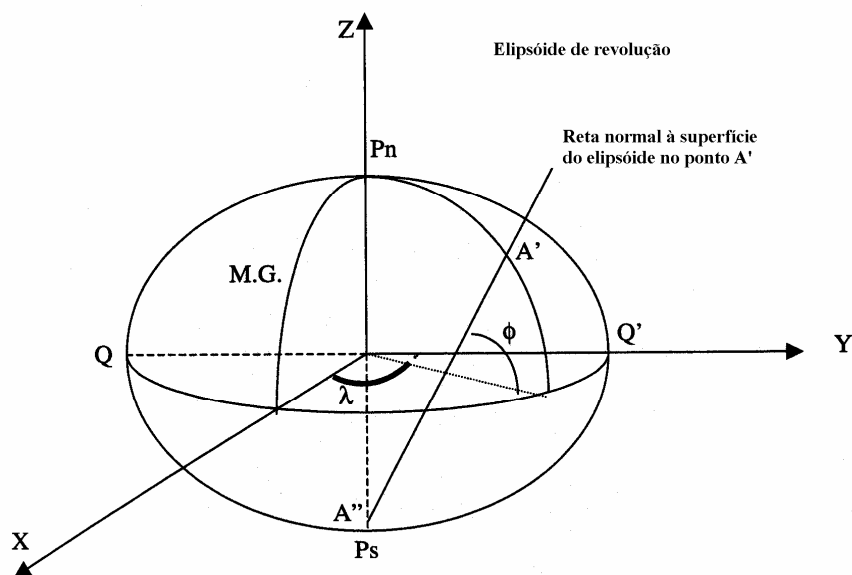


Fonte: Jones (1997)

Figura 4.8 -Coordenadas geográficas latitude φ e longitude λ na esfera

Fonte: Jones (1997).

Para aplicações em que a escala de representação deve ser grande adota-se o elipsóide como superfície de referência. O elipsóide tem coordenadas latitude e longitude geodésicas e estas têm os mesmos limites de existência que as coordenadas medidas numa esfera (Figura 4.9).



Fonte: adaptado de NADAL (2003)

Figura 4.9 - Elipsóide de revolução e as coordenadas latitude φ e longitude λ geodésicas

Fonte: Adaptado de Nadal (2003).

4.4 DISTORÇÃO DE ESCALA E ELIPSE DE TISSOT

A distorção de escala se constitui, como já foi dito, no aspecto mais importante das projeções cartográficas, visto que o produto de uma projeção cartográfica sofre algumas modificações relativamente ao original na *SR*. O tema distorção de escala deve ser abordado de forma aprofundada nos cursos regulares de Cartografia. Todo o estudo relativo à distorção de escala está baseado na Geometria Diferencial e constitui a Teoria das Distorções (Richardus, 1982). Na Teoria das Distorções inicia-se com a caracterização de uma superfície qualquer seguida da generalização do conceito de superfície. O passo seguinte consiste do estudo das propriedades de uma superfície e sua generalização. De posse de ferramentas analíticas oriundas da Teoria das Distorções é possível avaliar uma projeção cartográfica bem como desenvolver projeções cartográficas.

A distorção de escala (m) é obtida da comparação entre o comprimento de um arco infinitesimal da *SP* com o seu correspondente da *SR* (Eq. 4.3).

$$m^2 = dS^2 / ds^2. \quad (4.3)$$

Nesta expressão dS é o comprimento infinitesimal na *SP* e ds é o comprimento infinitesimal na *SR*. Desse modo, quando dS for maior do que ds há ampliação do comprimento representado comparativamente ao original. Quando dS for menor do que ds então o comprimento representado é menor do que o original. E como uma terceira possibilidade quando dS for igual a ds então os dois comprimentos serão iguais, ou seja não ocorreu distorção.

Na prática o conceito de distorção de escala consiste em determinar o valor da escala correta em qualquer posição de um mapa ou carta. Rigorosamente, uma carta não apresenta distorção apenas em posições particulares, e estas posições particulares são aquelas onde ocorre o contato entre *SR* e *SP*. Além disso, a distorção de escala de um modo geral depende da orientação do segmento infinitesimal ds , e isso quer dizer que quando o segmento tem uma orientação está sujeito a um montante de distorção e quando está orientado em outra direção estará sujeito a outro montante.

A distorção de escala é variável com a orientação do segmento infinitesimal ds e existe simetria em seu comportamento, isto é para cada valor de distorção de escala existem quatro direções possíveis. Para cada ponto existem também valores máximos e mínimos de distorção de escala. Pelo fato de existir valores máximos e mínimos de distorção de escala devem existir também valores intermediários. Os valores de distorção de escala podem ser visualizados por meio de uma elipse denominada Elipse Indicatriz de Tissot (em homenagem ao seu proponente).

A elipse de Tissot (Figura 4.10) permite que sejam visualizados os valores de distorção de escala para um ponto qualquer e para qualquer direção a partir daquele ponto. O processo que permite calcular os valores máximo e mínimo de distorção de uma posição também permitem calcular a distorção de escala para qualquer direção a partir daquele ponto.

Na Figura 4.10 são mostrados o ponto P e os pontos afastados deste de uma distância ds . Os pontos em torno do ponto P formam um círculo na *SR*. Na superfície de projeção *SP*, os pontos da *SR* resultam numa elipse. Isso quer dizer que a distância dos pontos formadores da elipse e seu centro, ponto P' , é variável. A distância do ponto P aos pontos A, B, C, D, E e F na *SR* é constante e vale ds , por outro lado a distância do ponto P' aos pontos A' e B' é a mesma mas é diferente da distância de P' aos pontos C' e D' na *SP*. Considerando-se as linhas da AB, BC, CD e EF da *SR* na *SP* percebe-se que são representadas pelas linhas $A'B', B'C', C'D'$ e $E'F'$. Pode-se observar que as linhas AB e

CD são perpendiculares entre si na *SR* mas que não se mantém dessa forma na *SP*. Sabe-se que as direções dos paralelos e dos meridianos na *SR* são perpendiculares, e pode-se perceber que estas linhas não se mantêm perpendiculares na *SP*. Então, se AB e CD representarem respectivamente as direções dos meridianos e dos paralelos na *SR* então na *SP* estarão formando o ângulo w que é diferente do ângulo reto, pois são representadas pelas linhas A'B' e C'D', que claramente não são perpendiculares entre si ($w \neq 90^\circ$). Este efeito, de tornar um ângulo de 90 em um ângulo diferente de 90, é considerado como uma manifestação da distorção.

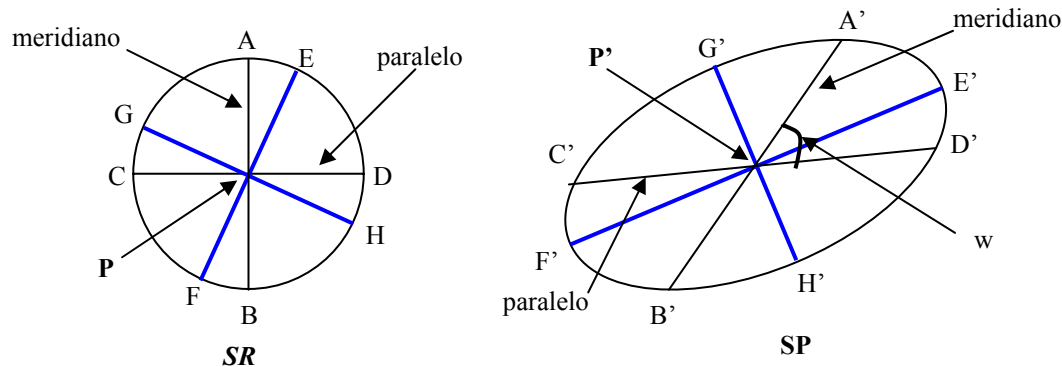


Figura 4.10 - Princípio da Elipse Indicatriz de Tissot, círculo da *SR* e elipse na *SP*

Ainda com relação à Figura 4.10, se diz que a maior distorção ocorreu segundo a direção PE ou PF, pois os segmentos de reta P'E' e P'F' são os maiores da elipse. Na mesma linha de raciocínio, se diz que a menor distorção ocorreu segundo a direção PG ou PH pois os segmentos de reta P'G' e P'H' são os menores da elipse. Além disso, como PA e PB representam a direção do meridiano pode-se dizer que a distorção que atuou sobre o meridiano é maior do que a distorção mínima e menor do que a distorção máxima. O mesmo pode ser dito acerca da linha PD e PC. Deve-se observar que a distorção que afeta os meridianos e os paralelos é diferente pois P'A' é diferente de P'D'.

Como exemplos elipses de Tissot pode-se observar os itens b e d da Figura 4.11. Na projeção apresentada no item a) da Figura 4.11 tem-se uma projeção cartográfica com a propriedade de conformidade. E neste caso as elipses de Tissot resultam em círculos, que são um caso particular do comportamento da distorção de escala, pois a manutenção da forma implica que a distorção de escala deve ser igual em todas as direções. Na mesma figura, porém nos itens c) e d) tem-se uma projeção com a propriedade de equivalência, isto é, uma projeção cartográfica em que os valores numéricos de áreas de polígonos medidos na projeção mantêm uma relação constante com os seus originais na *SR*. A manutenção do valor numérico das áreas ocorre à custa da distorção na forma dos elementos representados.

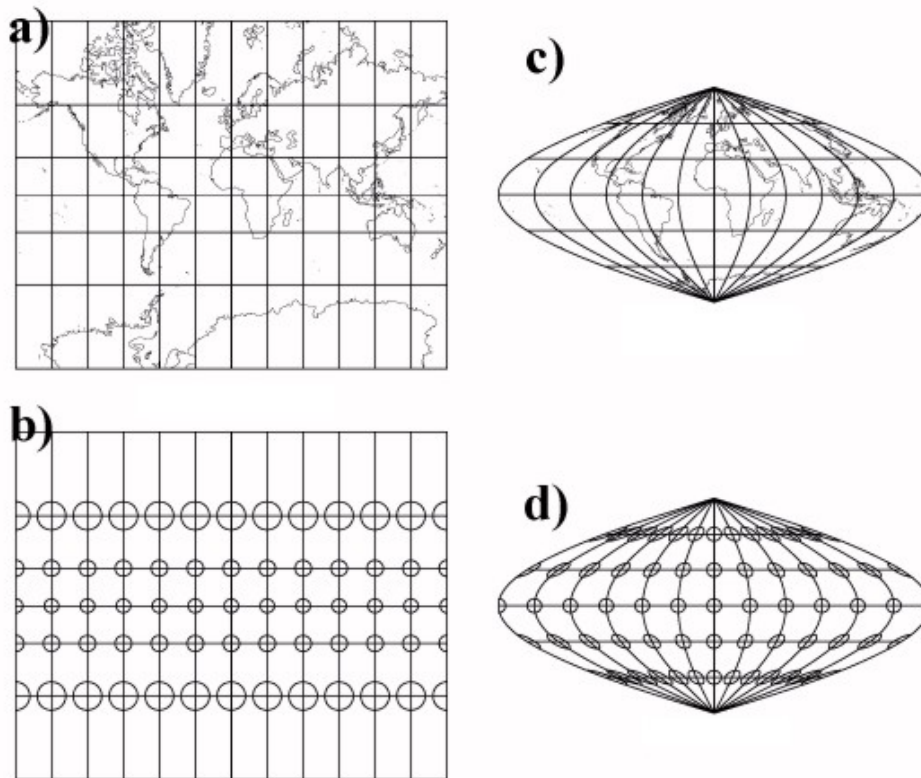


Figura 4.11 - Elipse Indicatriz de Tissot; a) projeção conforme (valor da área distorcido); b) elipses para a projeção conforme; c) projeção equivalente em que a forma é distorcida; e d) elipses para a projeção equivalente

Fonte: adaptado de <http://www.mapmathematics.com/Essentials/Essentials.html>.

4.5 PROJEÇÕES AZIMUTAIS, CÔNICAS E CILÍNDRICAS

Uma das formas de abordar as diferentes projeções cartográficas é ter por referência a superfície de projeção. Desse modo algumas das possíveis projeções cartográficas azimutais, algumas cônicas e algumas cilíndricas são a seguir apresentadas.

4.5.1 PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS AZIMUTAIS PERSPECTIVAS

As projeções cartográficas azimutais perspectivas são aquelas em que a *SR* sempre é a esfera e a *SP* sempre é um plano. A posição do plano pode variar e de acordo com a classificação apresentada acima pode ocupar as posições normal, transversa ou oblíqua. Neste conjunto de projeções cartográficas a geração é do tipo geométrica, isto é, existe um ponto de vista, um ponto a projetar e um ponto projetado.

De acordo com a posição do ponto de vista as projeções azimutais perspectivas podem ser divididas em: Azimutal Gnomônica, Azimutal Estereográfica e Azimutal Ortográfica. As projeções cartográficas Azimutais receberam este nome porque têm a característica de manter ou preservar ou não distorcer o valor dos azimutes das linhas que se iniciam no ponto em que o plano toca a *SR*.

a- Projeção Azimutal Gnomônica

Nesta projeção cartográfica o ponto de vista está localizado no centro da *SR*, e o plano tangente pode ocupar qualquer posição (normal, transversa ou oblíqua). Tem como característica representar qualquer círculo máximo como reta (ortodrômica). É uma projeção cartográfica afilática, isto é, não é conforme, não é quivalente e também não é equidistante (Figura 4.12). Esta projeção não admite a representação da polar ao ponto de tangência pois sua representação seria deslocada ao infinito.

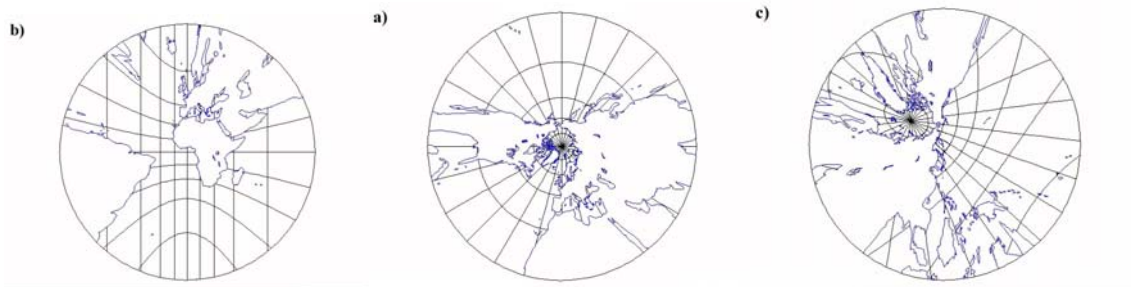


Figura 4.12 - Projeção Azimutal Gnomônica três casos: a) normal ou polar; b) transversal ou equatorial; e c) oblíquo

Fonte: adaptado de <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/karto/index.html#14>.

b- Projeção Azimutal Estereográfica

Nesta projeção o ponto de vista está localizado no ponto oposto ao ponto de tangência, e como na projeção Gnomônica o plano pode ser tangente nos pólos, no equador ou em qualquer outra posição. A projeção Azimutal Estereográfica tem a propriedade de conformidade, isto quer dizer que a forma local dos elementos representados é preservada (Figura 4.13).



Figura 4.13 - Projeção Azimutal Estereográfica, três casos: a) normal ou polar; b) transversal ou equatorial; e c) oblíquo

Fonte: adaptado de <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/karto/index.html#14>.

c- Projeção Azimutal Ortográfica

Nesta projeção o ponto de vista está localizado no infinito, e as pontos são projetados ortogonalmente sobre o plano tangente em qualquer das três casos. Para qualquer dos três casos ocorre a equidistância ao longo dos pontos pertencentes a círculos

concêntricos ao ponto onde o plano é tangente à esfera. Para o caso normal esta propriedade proporciona a manutenção do comprimento dos paralelos (Figura 4.14).

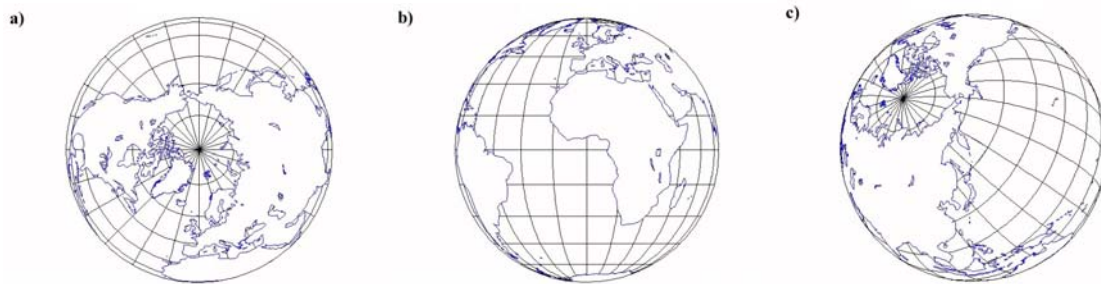


Figura 4.14 – Projeção Azimutal Ortográfica, três casos: a) normal ou polar; b) transverso ou equatorial; e c) oblíquo

Fonte: adaptado de <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/karto/index.html#14>.

Há ainda projeções azimutais não perspectivas que têm a propriedade de equivalência (Figura 4.15a) e equidistância (Figura 4.15b). Na Figura 4.15 é possível observar que as representações embora semelhantes não são iguais visto que têm diferentes propriedades, uma é equivalente e outra é equidistante. Em ambas ocorre distorção no entanto de comportamento diferente.

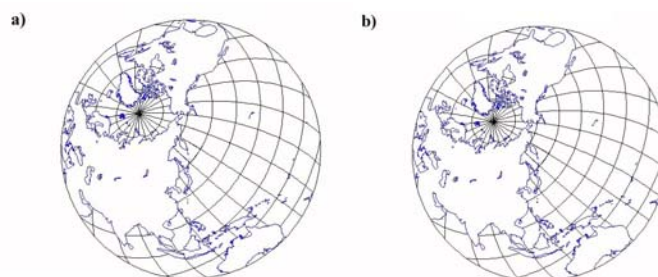


Figura 4.15 - Projeções azimutais não perspectivas: a) equivalente e b) equidistante

Fonte: adaptado de <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/karto/index.html#14>

4.5.2 PROJEÇÕES CÔNICAS

As projeções cartográficas cônicas usam um ou mais cones como *SR*. Podem ser desenvolvidas a partir de condições matemáticas de conformidade, equivalência ou equidistância, ou podem ser desenvolvidas a partir de outra condição matemática qualquer. As projeções cônicas normais são apropriadas para realizar representação de regiões com extensão predominante na direção Leste-Oeste. Ainda para as projeções cônicas normais a distorção de escala tem igual valor para todos os pontos que pertencem ao mesmo paralelo. Assim, para o caso normal, a distorção de escala é diferente ao longo dos meridianos.

a- Projeção cônica conforme

A projeção Cônica conforme com um paralelo-padrão é apresentada Figura 4.16 nas três posições da *SP* relativamente à *SP*. Nestas assim como em todas as projeções, não ocorre distorção de escala ao longo da linha de tangência. A linha de tangência ou linha sem distorção de escala para o caso normal se confunde com um paralelo, e pode-se avaliar

o comportamento da distorção tomando-a como referência, no entanto, para os casos transversal e oblíquo esta linha de tangência não é facilmente perceptível e nem o comportamento da distorção de escala é facilmente descrito. Para o caso normal existe simetria, e dentre os três casos desta projeção é o caso que apresenta as equações da transformação menos complexas.

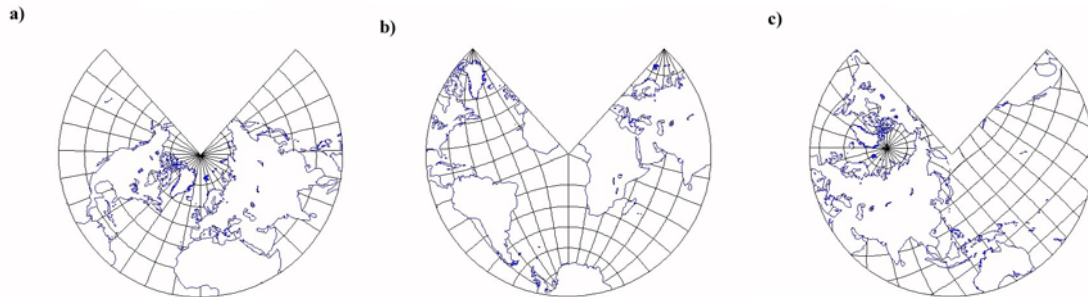


Figura 4.16 - Projeção cônica conforme: a) normal; b) transversa; e c) oblíqua

Fonte: adaptado de <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/karto/index.html#14>.

b- Projeção Cônica Equivalente

A propriedade destas projeções cônicas é a equivalência. Comparativamente às projeções cônicas conformes mostradas no item anterior a forma é distorcida de modo que seja possível privilegiar a manutenção do valor numérico da área (Figura 4.17).

Na Figura 4.18 mostra-se uma projeção cartográfica proposta por Euler em 1777 e que tem a propriedade de equidistância. Existe um conjunto de linhas cuja distorção de escala é igual a 1, isto é estas linhas não sofrem distorção. No caso desta projeção a equidistância ocorre ao longo dos meridianos. Nas direções diferentes da direção dos meridianos existe distorção e esta distorção de escala é crescente quando a latitude diminui.

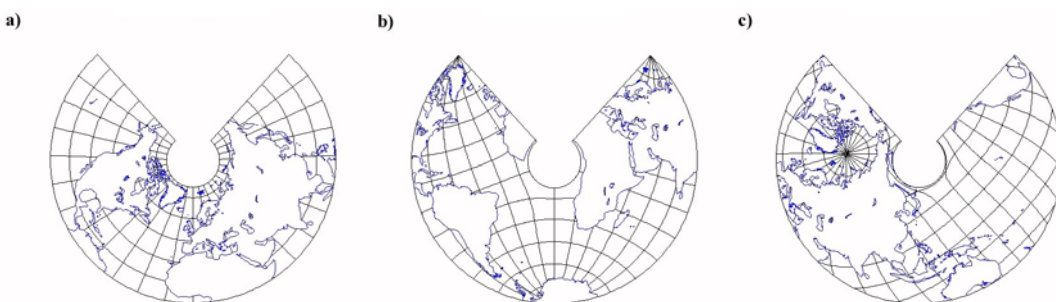


Figura 4.17 – Projeção cônica equivalente: a) normal; b) transversa; e c) oblíqua

Fonte: adaptado de <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/karto/index.html#14>.



Figura 4.18 – Projeção cônica equidistante de Euler

Fonte: adaptado de http://www.ilstu.edu/microcam/map_projections/Conic.html.

4.5.3 PROJEÇÕES CILÍNDRICAS

As projeções cilíndricas são aplicadas para representar regiões próximas do equador, isto é, regiões de baixas latitudes. Nestas projeções ocorre a tangência na linha do equador ou sobre dois paralelos simétricos ao equador para o caso normal. Evidentemente também existem os casos transversos e oblíquos.

Dentre as projeções cilíndricas, aquelas que levam o nome de Mercator são as mais conhecidas e as mais importantes para o mapeamento e para a navegação. A projeção transversa de Mercator é de extrema importância para o mapeamento e será descrita com mais detalhe adiante. A projeção de Mercator tem como característica a representação da linha de azimute por meio de uma reta, o que é de importância para a navegação (aspectos históricos em: <http://www.ualberta.ca/~norris/navigation/Mercator.html>) (Figura 4.19a). Na projeção de Mercator os meridianos são linhas retas verticais paralelas entre si e igualmente espaçadas e os paralelos são linhas retas horizontais paralelas porém com espaçamento crescente com o aumento do módulo da latitude. Este afastamento entre os paralelos dependente do módulo da latitude se deve à propriedade de conformidade, que estabelece que se há ampliação numa direção a partir de um ponto, então haverá ampliação em todas as direções. Como nas projeções conformes os ângulos são preservados então as linhas de meridianos e de paralelos se interceptam a ângulos retos (90°).

A projeção cartográfica denominada Space Oblique Mercator ou projeção Espacial Oblíqua de Mercator foi desenvolvida para a representação dinâmica de dados oriundos de imagens obtidas por sensores remotos como o LANDSAT (Figura 4.19b) (detalhes e especificações: http://exchange.manifold.net/manifold/manuals/5_userman/mfd50SpaceObliqueMercator.htm). Apesar do nome da projeção conter o termo Mercator, o comportamento das linhas de latitude e linhas de longitude nesta projeção é distinto daquele da projeção de Mercator. No entanto, as linhas de latitude e as linhas de longitude mantêm-se perpendiculares devido à propriedade de conformidade.

Nesta projeção percebe-se que para as altas latitudes ocorre maior distorção em área, no entanto sua maior utilidade como já foi mencionado é a possibilidade de obtenção direta de ângulos de orientação, necessários para navegação.

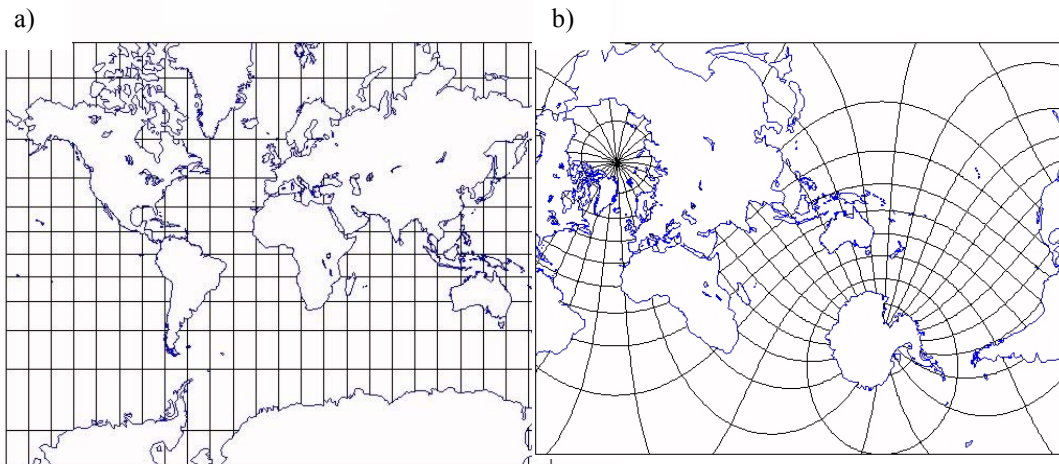


Figura 4.19 - a) Projeção de Mercator ou Projeção Cilíndrica Conforme Normal e b) Projeção Transversa de Mercator (direita)

Fonte: adaptado de <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/karto/>.

4.6 PROJEÇÃO TRANSVERSA DE MERCATOR OU PROJEÇÃO DE GAUSS

A projeção transversa de Mercator foi proposta por Johann Lambert (1728-1777) em 1772. O formulário para a *SR* elipsóide foi desenvolvido inicialmente pelo alemão Carl Friedrich Gauss em 1822, e por L. Krueger, por L.P. Lee e outros autores no Século XX. Para a Projeção Transversa de Mercator (TM) ou Projeção de Gauss tem-se o desenvolvimento de expressões da transformação de (φ, λ) para (X, Y) e também de (X, Y) para (φ, λ) . A primeira é denominada Transformação Direta e a segunda Transformação Inversa.

As especificações da projeção transversa de Mercator ou projeção de Gauss são:

- Superfície de Referência -> Elipsóide
- Superfície de Projeção -> Cilindro
- Contato -> Tangente por linha
- Posição -> Transversa (Figura 4.20)
- Geração -> Analítica
- Propriedade -> Conformidade

Na projeção de Mercator ou Projeção de Gauss as linhas de latitude e as linhas de longitude se interceptam a ângulos retos, isto é, 90° . O meridiano central ou meridiano de tangência e o equador são retas. Todos os outros meridianos e paralelos são curvas que também se interceptam a 90° . Os meridianos tem concavidade voltada para o meridiano central (MC), e os paralelos são curvas com a concavidade voltada para o pólo do respectivo hemisfério (Figura 4.21).

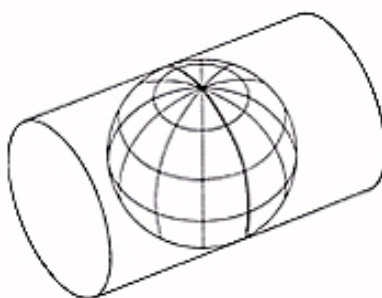


Figura 4.20 – Cilindro tangente da projeção Transversa de Mercator

Fonte: adaptado de

http://exchange.manifold.net/manifold/manuals/5_userman/mfd50Universal_Transverse_Mercator_UT.htm.

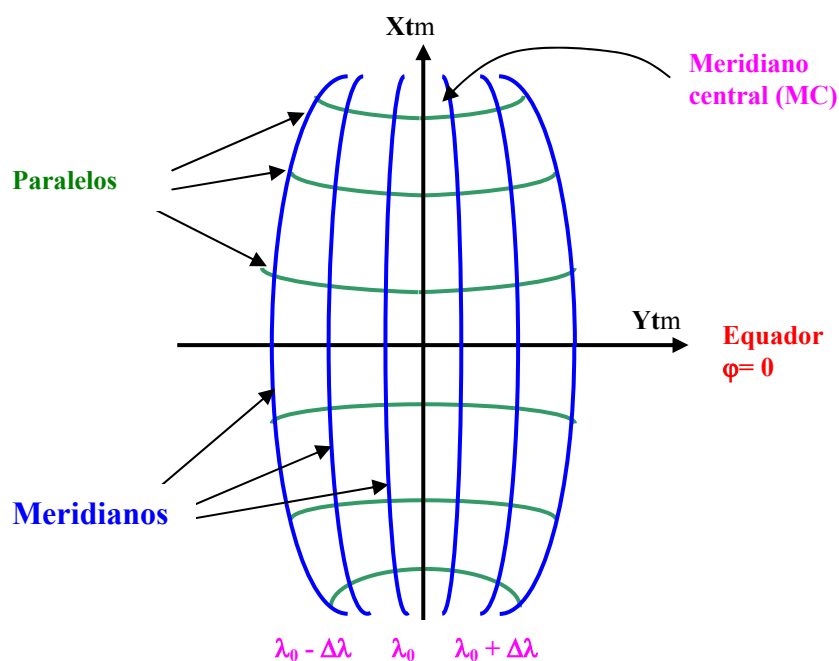


Figura 4.21 - Aparência dos meridianos e paralelos na Projeção de Mercator ou Projeção de Gauss

Os meridianos representados numa projeção TM são levemente curvados na direção do meridiano central, e isso faz com que seja necessário definir um ângulo entre a direção dos eixos coordenados e a direção do meridiano ou paralelo. Este ângulo denomina-se convergência meridiana γ .

A convergência meridiana γ é o ângulo entre a direção de uma paralela ao eixo coordenado X e a direção do meridiano no ponto considerado. A convergência meridiana γ é contada no sentido horário a partir da tangente ao meridiano no ponto considerado em direção a uma linha paralela ao eixo coordenado X_{tm} . Desse modo a convergência meridiana pode assumir valores positivos e negativos. A convergência meridiana γ é nula para os pontos do meridiano de contato e para pontos do equador.

O formulário apresentado a seguir é inteiramente baseado na publicação: Conformal Map Projections in Geodesy, E.J. Krakiwsky, Department of Surveying Engineering - University of New Brunswick , 1973.

Desta projeção é que se obtém, por especificação, a Projeção UTM (Universal Transverse Mercator), que é adotada como projeção cartográfica do mapeamento oficial do Brasil desde 1956. Além disso, outras projeções são derivadas da TM por especificação como é a UTM.

4.6.1 Problema Direto

1- Coordenadas na Projeção Transversa de Mercator ou Projeção de Gauss (X, Y)= f(φ , λ).

$$X = Bm + \frac{N \Delta \lambda^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{N \Delta \lambda^4}{24} \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) + \frac{N \Delta \lambda^6}{720} \sin \varphi \cos^5 \varphi (61 - 58 t^2 + t^4 + 270 \eta^2 - 330 \eta^2 t^2 + 445 \eta^4 + 324 \eta^6 - 680 \eta^4 t^2 + 88 \eta^8 - 600 \eta^6 t^2 - 192 \eta^8 t^2) + \frac{N \Delta \lambda^8}{40320} \sin \varphi \cos^7 \varphi (1385 - 311 t^2 + 543 t^4 - t^6). \quad (4.4)$$

$$Y = N \Delta \lambda \cos \varphi + \frac{N \Delta \lambda^3}{6} \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{N \Delta \lambda^5}{120} \cos^5 \varphi (5 - 18 t^2 + t^4 + 14 \eta^2 - 58 \eta^2 t^2 + 13 \eta^4 + 4 \eta^6 - 64 \eta^4 t^2 - 24 \eta^6 t^2) + \frac{N \Delta \lambda^7}{5040} \cos^7 \varphi (61 - 479 t^2 + 179 t^4 - t^6) \quad (4.5)$$

A quantidade Bm é o comprimento de arco de elipse meridiana contado a partir do equador até o ponto de latitude φ , e:

$$\eta^2 = (e')^2 \cos^2 \varphi; \quad (4.6)$$

$$t = \operatorname{tg}(\varphi); \quad (4.7)$$

e'^2 é a segunda excentricidade.

Estas expressões conduzem a valores de X e Y com acurácia de 1mm para pontos com afastamento de até 3° do meridiano central, segundo o autor.

2- Comprimento de arco de elipse meridiana

Expressão para o cálculo do comprimento de um arco de elipse meridiana definido pelos limites (φ_1 ; φ_2), em que sempre $\varphi_1=0$.

$$B = a [A_0 \varphi - A_2 \sin(2\varphi) + A_4 \sin(4\varphi) - A_6 \sin(6\varphi) + A_8 \sin(8\varphi)] \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 - \frac{5}{256} e^6 - \frac{175}{16384} e^8 \\
 A_2 &= \frac{3}{8} \left(e^2 + \frac{1}{4} e^4 + \frac{15}{128} e^6 - \frac{455}{4096} e^8 \right) \\
 A_4 &= \frac{15}{256} \left(e^4 + \frac{3}{4} e^6 - \frac{77}{128} e^8 \right) \\
 A_6 &= \frac{35}{3072} \left(e^6 - \frac{41}{32} e^8 \right) \\
 A_8 &= - \frac{315}{131072} e^8
 \end{aligned}$$

Nestas expressões a é o semi-eixo maior e e^2 é a primeira excentricidade do elipsóide.

3- Distorção de escala em função das coordenadas geodésicas $m = f(\varphi, \lambda)$.

$$m = 1 + \frac{\Delta\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) + \frac{\Delta\lambda^4}{24} \cos^4 \varphi (5 - t^2). \quad (4.9)$$

Esta expressão, segundo *KRAKIWSKY*, fornece o valor da distorção de escala para um ponto com erro de uma ou duas unidades no oitavo dígito significativo para pontos com afastamento do meridiano central de até 3° .

4- Convergência meridiana em função de coordenadas geodésicas $\gamma = f(\varphi, \lambda)$.

$$\gamma = \Delta\lambda \sin \varphi \left[1 + \frac{\Delta\lambda^2 \cos^2 \varphi}{3 (\rho'')^2} (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{\Delta\lambda^4 \cos^4 \varphi}{15 (\rho'')^4} (2 - t^2) \right] \quad (4.10)$$

com :

$$\rho'' = \operatorname{cosec} 1'' \quad (4.11)$$

$$\eta^2 = (e')^2 \cos^2 \varphi \quad (4.12)$$

$$t = \operatorname{tg} \varphi. \quad (4.13)$$

4.6.2 Problema Inverso

1- Coordenadas elipsóidicas em função das coordenadas na Projeção Transversa de Mercator ou Projeção de Gauss $(\varphi, \lambda) = f(X, Y)$.

$$\begin{aligned}
 \varphi = \varphi_0 - \frac{Y^2}{2 M_0 N_0} t_0 + \frac{Y^4}{24 M_0 N_0^3} t_0 (5 + 3t_0^2 + \eta_0^2 - 4\eta_0^4 - 9\eta_0^2 t_0^2) - \frac{Y^6}{720 M_0 N_0^5} t_0 \\
 (61 - 90t_0^2 + 46\eta_0^2 + 45t_0^4 - 252\eta_0^2 t_0^2 - 3\eta_0^4 + 100\eta_0^6 - 66\eta_0^4 t_0^2 - 90\eta_0^2 t_0^4 + 88\eta_0^8 + \\
 225\eta_0^4 t_0^4 + 84\eta_0^6 t_0^2 - 192\eta_0^8 t_0^2) + \frac{Y^8}{40320 M_0 N_0^7} t_0 (1385 + 3633t_0^2 + 4095t_0^4 + \\
 1575 t_0^6)
 \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\Delta\lambda = \frac{Y}{N_0 \cos \varphi_0} - \frac{Y^3}{6 N_0^3 \cos \varphi_0} (1 + 2t_0^2 + \eta_0^2) + \frac{Y^5}{120 N_0^5 \cos \varphi_0} (5 + 6\eta_0^2 + 28t_0^2 - 3\eta_0^4 + 8\eta_0^2 t_0^2 + 24t_0^4 - 4\eta_0^6 + 4\eta_0^4 t_0^2 + 24\eta_0^6 t_0^2) - \frac{Y^7}{5040 N_0^7 \cos \varphi_0} (61 + 662t_0^2 + 1320t_0^4 + 720t_0^6).$$
(4.15)

O valor φ_0 é o resultado obtido pelo método iterativo de Newton-Raphson aplicado à expressão do cálculo do comprimento de elipse meridiana, iniciado com φ_i dado pela aproximação $\varphi_i = X/a$.

Todos os elementos com sub-índice zero são calculados em função da latitude φ_0 . As constantes η_0 e t_0 tem o mesmo significado daquele mostrado no problema direto.

Método de Newton-Raphson

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} - \frac{f(\varphi_{n-1})}{f'(\varphi_{n-1})}$$
(4.16)

1- φ_{n-1} é igual a φ_i para a primeira iteração;

2- $f(\varphi_{n-1})$ é dado por:

$$f(\varphi_{n-1}) = a [A_0 \varphi - A_2 \sin(2\varphi) + A_4 \sin(4\varphi) - A_6 \sin(6\varphi) + A_8 \sin(8\varphi)] - X$$
(4.17)

3- $f'(\varphi_{n-1})$ é dado por:

$$f''(\varphi_{n-1}) = a [A_0 - 2A_2 \cos(2\varphi) + 4A_4 \cos(4\varphi) - 6A_6 \cos(6\varphi) + 8A_8 \cos(8\varphi)]$$
(4.18)

O processo iterativo é terminado quando o módulo da diferença entre os módulos dos valores de latitude entre duas iterações for menor do que ε , que pode ser de 0.0001" dado em radianos. A latitude obtida por este processo iterativo é denominada *latitude do pé da normal* a X por P, ou *foot point latitude*.

3- Distorção de escala em função das coordenadas (X, Y).

$$m = 1 + \frac{Y^2}{2 N_0^2} (1 + \eta_0^2) + \frac{Y^4}{24 N_0^4} (1 + 6\eta_0^2 + 9\eta_0^4 + 4\eta_0^6 - 24\eta_0^4 t_0^2 - 24\eta_0^6 t_0^2) + \frac{Y^6}{720 N_0^6}$$
(4.19)

4- Convergência meridiana em função das coordenadas (X, Y).

$$\begin{aligned} \text{tg } \gamma = & \frac{Y}{N_0} t_0 - \frac{Y^3}{3 N_0^3} t_0 (1 - \eta_0^2 - 2\eta_0^4) + \frac{Y^5}{15 N_0^5} t_0 (2 + 2\eta_0^2 + 9\eta_0^4 + 6\eta_0^2 t_0^2 + 20\eta_0^6 + 3\eta_0^4 t_0^2 - \\ & 27\eta_0^6 t_0^2 + 11\eta_0^8 - 24\eta_0^8 t_0^2) - \frac{17 Y^7}{315 N_0^7} t_0. \end{aligned}$$
(4.20)

4.7 – PROJEÇÃO UTM - UNIVERSAL TRANSVERSA DE MERCATOR

Para a utilização da projeção UTM convencionou-se, em nível internacional, realizar a representação de fusos com 6° de amplitude em longitude, de acordo com a convenção da Carta Internacional do Mundo ao Milionésimo. Desse modo para representar toda a Terra são necessários 60 cilindros transversos secantes. Assim, um par de coordenadas UTM é válido em 60 fusos diferentes e portanto é necessário especificar a que fuso pertence o ponto. Isso pode ser feito pelo conhecimento da longitude do seu meridiano central. Na Figura 4.22 mostram-se dois cilindros transversos para dois meridianos centrais quaisquer.

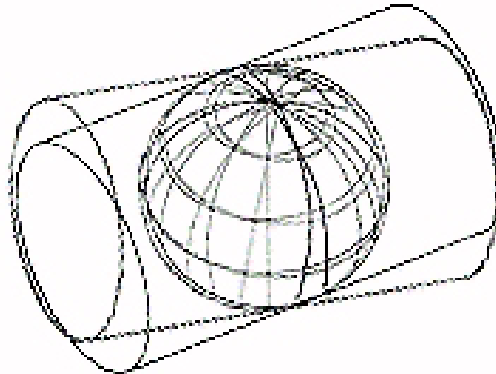


Figura 4.22 - Dois posicionamentos do cilindro transverso em diferentes fusos

Fonte: adaptado de

[http://exchange.manifold.net/manifold/manuals/5_userman/mfd50Universal Transverse Mercator UT.htm](http://exchange.manifold.net/manifold/manuals/5_userman/mfd50Universal_Transverse_Mercator_UT.htm).

Esta projeção é derivada da Projeção Transversa de Mercator - TM e tem por especificações:

- 1- Representação transversa de Mercator com fusos de 6° de amplitude;
- 2- Numeração dos fusos em concordância com a Carta Internacional do Mundo ao Milionésimo (primeiro fuso 180° - 174° Oeste, e último fuso 174° Leste - 180°);
- 3- Meridianos centrais com longitudes múltiplas de 6° iniciando em 177° Oeste;
- 4- Distorção de escala igual a 0,9996 no meridiano central do fuso;
- 5- Limitação em latitude a 80° Norte e 80° Sul.
- 6- Norte Falso para pontos do Hemisfério Sul igual a 10.000.000m;
- 7- Este Falso igual a 500.000 m;
- 8- Coordenadas Norte e Este:

$$\begin{aligned} \text{Norte} = N &= X_{TM} * 0.9996 + 10.000.000\text{m} \quad (\text{para pontos do H.S.}) \\ \text{Norte} = N &= X_{TM} * 0.9996 \quad (\text{para pontos do H.N.}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\text{Este} = E = Y_{TM} * 0.9996 + 500.000\text{m} \quad (4.22)$$

X_{TM} e Y_{TM} são coordenadas na projeção TM.

A distorção de escala (m) na Projeção UTM é dada por

$$m_{UTM} = m_{TM} * 0.9996. \quad (4.23)$$

A convergência meridiana (γ) para ambas as projeções cartográficas, TM e UTM, é a mesma visto que ambas as coordenadas (X, Y) são multiplicadas pelo mesmo valor 0.9996, o que não altera a forma. Assim

$$\gamma_{UTM} = \gamma_{TM}. \quad (4.24)$$

Na Figura 4.23 são mostrados os elementos componentes de um fuso UTM. Estes elementos são: os meridianos limite do fuso de 6° , um par de paralelos, as linhas de secância e os eixos coordenados onde são contadas as coordenadas Norte e Este. As linhas que representam os paralelos as linhas que representam os meridianos formam ângulo de 90° , pois a projeção UTM tem a propriedade de conformidade. As linhas de secância não são meridianos, isto é não são formadas por pontos que têm a mesma longitude, nem são retas, isto é, também não são linhas formadas por pontos que têm a mesma coordenada ESTE. Estas linhas são denominadas curvas complexas.

A distorção de escala (m) assume o valor 0.9996 para todos os pontos do meridiano central do fuso. Sobre as linhas de secância a distorção de escala assume o valor 1 visto que estas linhas complexas não sofrem distorção pois pertencem a ambas as superfícies (SR e SP) simultaneamente. A região situada entre o meridiano central e as linhas de secância sofre distorção de escala de compressão e as regiões entre as linhas de secância e o correspondente meridiano limite de fuso sofrem ampliação. A redução é caracterizada por valores de distorção de escala menores do que a unidade ($m < 1$), e a ampliação por valores de distorção de escala maiores do que a unidade ($m > 1$) (Figura 4.24).

Do ponto de vista de simetria e das linhas de latitude e longitude a distorção de escala tem o seguinte comportamento:

- 1- tem mesmo valor para pontos simétricos em relação ao meridiano central;
- 2- tem mesmo valor para pontos simétricos em relação ao equador;
- 3- tem valor diferente ao longo de cada paralelo exceto para pontos simétricos; e
- 4- tem valor diferente ao longo de cada meridiano exceto para pontos simétricos.

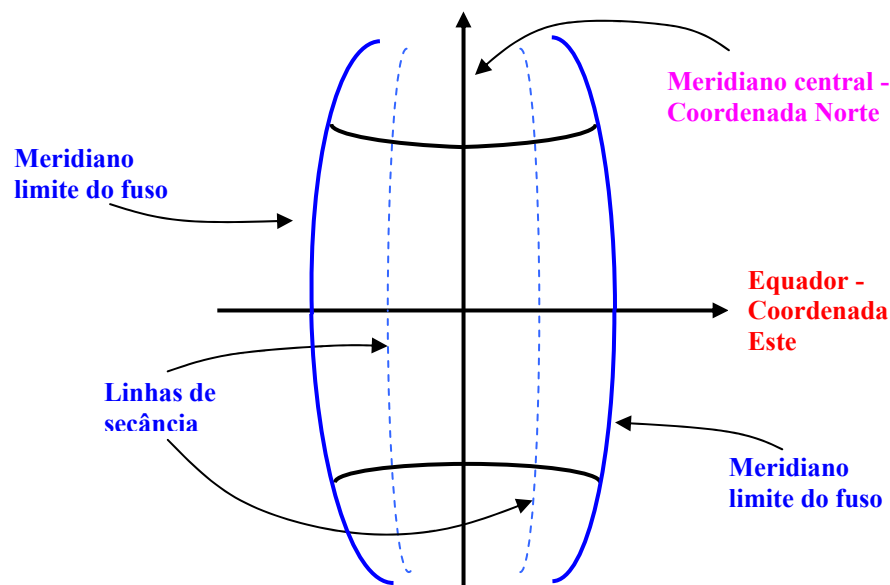


Figura 4.23 - Fuso UTM e seus principais elementos

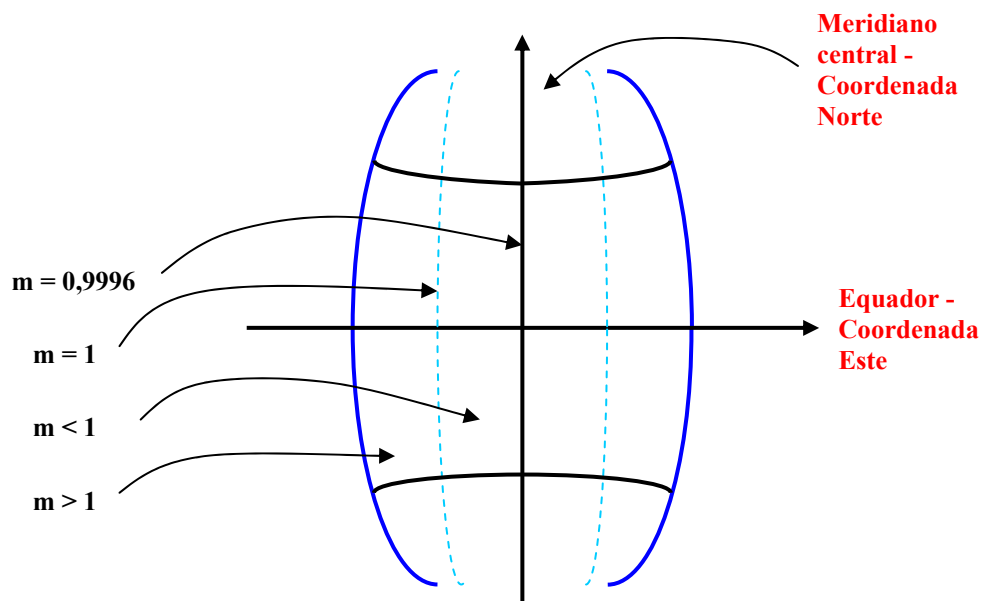


Figura 4.24 - Distorção de escala em diferentes regiões de um fusão UTM

4.7.1 Outras Projeções Baseadas na Projeção TM

Além da Projeção Universal Transversa de Mercator outras projeções conformes voltadas para mapeamento de regiões cujas características de extensão e/ou de posição em relação às convenções adotadas no sistema UTM não sejam compatíveis ou favoráveis. A seguir são listadas algumas destas projeções derivadas por especificação da projeção Transversa de Mercator- TM (Krakiwsky, 1982).

1- LTM Local Transverse Mercator

- fusos de 1° de amplitude
- meridianos centrais a cada 30'
- distorção de escala sobre o MC igual a 0.999 9995
- coordenadas
$$\begin{aligned} N &= X_{TM} * 0.999\ 995 + 5.000.000\ m \\ E &= Y_{TM} * 0.999\ 995 + 200.000\ m \end{aligned} \quad (4.25)$$

2- RTM Regional Transverse Mercator

- fusos de 2° de amplitude
- meridianos centrais nas longitudes ímpares
- distorção de escala sobre o MC igual a 0.999 9995
- coordenadas
$$\begin{aligned} N &= X_{TM} * 0.999\ 995 + 5.000.000\ m \\ E &= Y_{TM} * 0.999\ 995 + 400.000\ m \end{aligned} \quad (4.26)$$

3- Gauss-Kruger

- fusos de 3° de amplitude
- meridianos centrais múltiplos de 3°
- distorção de escala sobre o MC igual a 1

$$\begin{aligned}
 - \text{ coordenadas} \quad N &= X_{TM} + 5.000.000 \text{ m} \\
 E &= Y_{TM} + 200.000 \text{ m}
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

4- Gauss-Tardi

$$\begin{aligned}
 - \text{ fusos de } 6^\circ \text{ de amplitude} \\
 - \text{ meridianos centrais múltiplos de } 6^\circ \\
 - \text{ distorção de escala sobre o MC igual a } 0.999\ 333 \\
 - \text{ coordenadas} \quad N &= X_{TM} * 0.999\ 333 + 5.000.000 \text{ m} \\
 E &= Y_{TM} * 0.999\ 333 + 500.000 \text{ m}
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

4.8 TRANSPORTE DE COORDENADAS NA PROJEÇÃO UTM

Apesar da representação de dados na projeção UTM ser realizada num plano e ter um sistema de coordenada retangular não existe uma correspondência direta entre as grandezas medidas no terreno e aquelas representadas na projeção. No caso da topografia qualquer linha representada no plano topográfico está sujeita à mesma escala de representação, no entanto na projeção UTM, assim como em qualquer projeção cartográfica, uma linha estará sujeita a um ou outro valor de escala de acordo com a sua posição na projeção. Esta dependência escala-posição é característica das projeções cartográficas. Assim, a utilização de medidas resultantes de operações de campo na projeção UTM está sujeita a algum tratamento que as torne adequadas à projeção. A manipulação de coordenadas no plano UTM pode ser feita com dois propósitos principais: 1) determinar coordenadas UTM de um terceiro ponto a partir de observações de campo de distância e ângulo horizontal realizadas a partir de um ponto com coordenadas UTM conhecidas; ou 2) determinar as quantidades geodésicas azimute e distância a partir de um par de pontos com coordenadas UTM conhecidas.

Para que se possa utilizar observações de campo para inserí-las numa base de dados UTM é necessário realizar algum tratamento a estas observações uma vez que os dados são coletados sobre a superfície física ou no interior da superfície física e as coordenadas UTM são referidas a uma projeção cartográfica.

Este tratamento que deve ser dado aos dados observados é conhecido como redução de dados observados. Como são realizadas medidas de ângulo e distância estas são as grandezas que sofrem o tratamento.

4.8.1 Reduções lineares

Uma distância observada em campo, em geral, é inclinada e representa a distância entre o centro eletrônico do distanciômetro e o espelho refletor. O cálculo de uma coordenada no plano de projeção UTM requer um comprimento reduzido à projeção por meio da aplicação do conceito de distorção de escala. As reduções lineares são todas aquelas operações que possibilitam obter a distância na projeção a partir de uma distância medida no campo. Durante este processo de redução a distância inclinada é usada para calcular a distância horizontal, e esta é usada para calcular a distância reduzida à superfície do elipsóide, que por fim é usada tendo por base a aplicação do conceito de distorção de escala, para calcular a distância na projeção cartográfica (Figura 2.26).

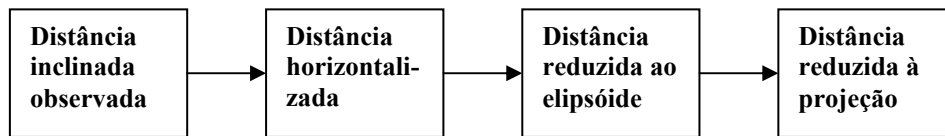


Figura 4.25 - Esquema das reduções lineares

4.8.2 Reduções Angulares

Apesar da projeção UTM ter a propriedade de conformidade existe um tratamento a ser dado às grandezas angulares observadas em campo antes que se possa usá-las no cálculo de novas coordenadas UTM. Estão envolvidos o conceito de convergência meridiana γ (lê-se "gama"), azimute de quadrícula Az_q , azimute geodésico Az_g , ângulo entre a corda da geodésica projetada e a geodésica projetada ψ (lê-se "psi"). Partindo de um azimute geodésico, o cálculo do azimute de quadrícula requer a consideração dois ângulos a convergência meridiana e redução angular.

No transporte de coordenadas UTM o problema DIRETO está caracterizado no propósito 1, e o problema INVERSO caracteriza o propósito 2.

4.8.3 Problema Direto

Dados de entrada:

- coordenadas UTM de um ponto ré (N_1, E_1);
- coordenadas UTM do ponto ocupado (N_2, E_2);
- ângulo observado entre o lado 2-1 e 2-3 (α);
- comprimento da geodésica 2-3 (D_e).

Pretende-se calcular as coordenadas UTM do ponto 3.

Sequência de cálculo

1) Cálculo da latitude do pé da normal ao eixo X pelo ponto médio 1-2

$$X_1 = (N_1 - 10.000.000) / 0.9996; \quad (4.29)$$

$$X_2 = (N_2 - 10.000.000) / 0.9996;$$

$$X_m = (X_1 + X_2) / 2; \quad (4.30)$$

$$\varphi_{12} = \text{função de } (X_m / a), \text{ por Newton -Raphson.}$$

2) Cálculo do raio médio (R_m)

$$N_{12} = a / (1 - e^2 \sin^2(\varphi_{12}))^{1/2}; \quad (4.31)$$

$$M_{12} = a (1 - e^2) / (1 - e^2 \sin^2(\varphi_{12}))^{3/2}; \quad (4.32)$$

$$R_m = (N_{12} * M_{12})^{1/2}; \quad (4.33)$$

3) Cálculo da redução angular ψ_{21}

$$\Delta X' = (N_1 - N_2); \quad (4.34)$$

$$Y_1 = (E_1 - 500.000) / 0.9996; \quad (4.35)$$

$$Y_2 = (E_2 - 500.000) / 0.9996;$$

$$\psi_{21} = \frac{68755 * \Delta X' * (2 * Y_2 * 0.9996 + Y_1 * 0.9996)}{2 * Rm^2 * 0.9996^2} \quad (4.36)$$

4) Cálculo do azimute da linha 1-2 sobre o plano UTM

$$Az_{12} = f(\theta);$$

$$\theta = \text{arc tg} \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}; \quad (4.37)$$

$$\Delta Y = Y_2 - Y_1;$$

$$\Delta X = X_2 - X_1;$$

θ	ΔY	ΔX	Azimute
+	+	+	$Az = \theta$
-	+	-	$Az = 180^\circ + \theta$
+	-	-	$Az = 180^\circ + \theta$
-	-	+	$Az = 360^\circ + \theta$

5) Cálculo do azimute plano aproximado do lado 2-3 (azimute plano = azimute de quadrícula)

$$Az_{qa\ 23} = Az_{12} + \alpha - 180^\circ + \psi_{21} \quad (4.38)$$

6) Cálculo das coordenadas aproximadas do ponto 3 (N'_3 , E'_3)

$$\begin{aligned} N'_3 &= N_2 + De * \cos (Az_{qa\ 23}); \\ E'_3 &= E_2 + De * \sin (Az_{qa\ 23}). \end{aligned} \quad (4.39)$$

7) Cálculo do raio médio (Rm) para o lado 2-3

$$\begin{aligned} X'_3 &= (N'_3 - 10.000.000) / 0.9996 ; \\ X_{m23} &= (X'_3 + X_2) / 2 ; \\ \varphi_{23} &= \text{função de } (X_{m\ 23} / a), \text{ por Newton -Raphson;} \\ N_{23} &= a / (1 - e^2 \text{ sen } (\varphi_{23}))^{1/2}; \\ M_{23} &= a (1 - e^2) / (1 - e^2 \text{ sen } (\varphi_{23}))^{3/2}; \\ Rm &= (N_{23} * M_{23})^{1/2}; \end{aligned}$$

8) Cálculo da redução angular ψ_{23}

$$\Delta X' = X'_3 - X_2;$$

$$\psi_{23} = \frac{68755 * \Delta X' * (2 * Y_2 * 0.9996 + Y_3 * 0.9996)}{2 * Rm_{23}^2 * 0.9996^2} \quad (4.40)$$

9) Cálculo do azimute plano definitivo da corda da geodésica 2-3

$$Az_{qc\ 23} = Az_{qa\ 23} - \psi_{23} . \quad (4.41)$$

10) Cálculo da distorção de escala m_{23}

$$m_{23} = 0.9996 * \left[1 + \frac{(Y_2^2 + Y_3^2 + Y_2 * Y_3)}{6 * Rm_{23}^2 * 0.9996^2} \right]. \quad (4.42)$$

11) Cálculo do comprimento da corda da geodésica Dc

$$Dc = De * m_{23} . \quad (4.43)$$

12) Cálculo das coordenadas definitivas do ponto 3 (N_3, E_3).

$$\begin{aligned} N_3 &= N_2 + Dc * \cos (Az_{qc\ 23}) ; \\ E_3 &= E_2 + Dc * \sin (Az_{qc\ 23}) . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Assim a partir do conhecimento das coordenadas UTM de dois pontos (N_1, E_1) e (N_2, E_2) e da observação de ângulo horizontal entre duas geodésias e da observação distância sobre a superfície física e sua posterior redução ao elipsóide, pode-se calcular a posição UTM do ponto observado (N_3, E_3)

Exemplo de valores resultantes de um cálculo de transporte de coordenadas Problema Direto

**TRANSPORTE DE COORD. NO PLANO UTM
PROBLEMA DIRETO**

Ponto RE (1)

N1 = 7182000.000 m
E1 = 550000.000 m

Ponto OCUPADO (2)

N2 = 7185000.000 m
E2 = 553000.000 m

Dados observados

Ang. horiz. 165 0 0.000 (GGG MM SS.sss)
Comprimento da Geodésica 3000.0000 m

Coordenadas TM dos pontos RE e OCUPADO

X1 = -2819127.651 m
Y1 = 50020.008 m

X2 = -2816126.451 m
Y2 = 53021.208 m
X médio Xm = -2817627.051 m

Lat. pé normal p/ Xm

fipe1 = -25.27556940 (gg.mmsss)

Grande normal e pequena normal

N12 = 6382110.572 m

M12 = 6347240.809 m

Raio médio

Rm = 6364651.811 m

Diferença de coord. Norte

deltaN = -3000.000 m

Reducao angular

Psi21 = -0.397482808 "

Azimuth no plano UTM de 1-2

Az12 = 45.000000000 (ggg.mmsss)

Lat. pé para ponto 2

fipe2 = -25.270692929 (gg.mmsss)

Grande normal para o ponto 2

NN2 = 6382106.647 m

Conv. meridiana (grau dec.)

gama = -0.1335560461 (g.mmss)

Azimuth de quadricula aproximado de 23

Azqa23 = 29.59596025 (ggg.mmss)

Ponto VANTE aproximado

N13 = 7187598.079 m

E13 = 554499.995 m

Xm23 = -2814826.891 m

Lat. pé p/ Xm23

fipe23 = -25.26246977 (gg.mmsss)

Dados para lado 23

N23 = 6382103.249 m

M23 = 6347218.959 m

Rm23 = 6364637.204 m

Distorção de escala para o lado 23

m23 = 0.99963568

Reducao psi

psi23 = 0.337747 "

Azimuth definitivo do lado 23

Azqc23 = 29.59592648 (ggg.mmsssss)

Comprimento da corda da geodésica projetada

Dc = 2998.907 m

COORDENADAS DO PONTO 3

N3 = 7187597.13502 m

E3 = 554499.44426 m

Dados para novo transporte psi32 atualizado

psi32 = -0.35733952 "

4.8.4 Problema Inverso

Dados de entrada :

- coordenadas UTM do ponto 1 (N_1, E_1);
- coordenadas UTM do ponto 2 (N_2, E_2).

Pretende-se calcular o azimute geodésico e o comprimento da geodésica 1-2.

Sequência de cálculo

- 1) Cálculo da latitude do pé da normal ao eixo X pelo ponto médio 1-2

$$X_1 = (N_1 - 10.000.000) / 0.9996;$$

$$X_2 = (N_2 - 10.000.000) / 0.9996;$$

$$X_m = (X_1 + X_2) / 2;$$

φ_{12} = função de (X_m / a), por Newton -Raphson.

- 2) Cálculo do raio médio (R_m)

$$N_{12} = a / (1 - e^2 \sin^2(\varphi_{12}))^{1/2};$$

$$M_{12} = a (1 - e^2) / (1 - e^2 \sin^2(\varphi_{12}))^{3/2};$$

$$R_m = (N_{12} * M_{12})^{1/2};$$

- 3) Cálculo da redução angular ψ_{21}

$$\Delta X' = (N_1 - N_2);$$

$$Y_1 = (E_1 - 500.000) / 0.9996;$$

$$Y_2 = (E_2 - 500.000) / 0.9996;$$

$$\psi_{12} = \frac{68755 * \Delta X' * (2 * Y_1 * 0.9996 + Y_2 * 0.9996)}{2 * R_m^2 * 0.9996^2}.$$

- 4) Cálculo da convergência meridiana γ .

Cálculo da latitude do pé da normal (φ_0) por Newton-Raphson para o ponto 1, ou seja, utiliza-se $Y = Y_1$

$$\begin{aligned} \text{tg } \gamma = & \frac{Y}{N_0} t_0 - \frac{Y^3}{3 N_0^3} t_0 (1 - \eta_0^2 - 2\eta_0^4) + \frac{Y^5}{15 N_0^5} t_0 (2 + 2\eta_0^2 + 9\eta_0^4 + 6\eta_0^2 t_0^2 + 20\eta_0^6 + 3\eta_0^4 t_0^2 - \\ & 27\eta_0^6 t_0^2 + 11\eta_0^8 - 24\eta_0^8 t_0^2) - \frac{17 Y^7}{315 N_0^7} t_0. \end{aligned}$$

(4.45)

- 5) Cálculo do azimute da linha 1-2 sobre o plano UTM

$$Az_{12} = f(\theta);$$

$$\theta = \text{arc tg } \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1};$$

$$\Delta Y = Y_2 - Y_1 ;$$

$$\Delta X = X_2 - X_1 ;$$

θ	ΔY	ΔX	Azimute
+	+	+	$Az = \theta$
-	+	-	$Az = 180^\circ + \theta$
+	-	-	$Az = 180^\circ + \theta$
-	-	+	$Az = 360^\circ + \theta$

5) Cálculo do azimute geodésico da linha 1-2

$$Az_{g12} = Az_{12} - \psi_{12} - \gamma_1$$

6) Cálculo da distorção de escala (m_{12})

$$m_{12} = 0.9996 * \left[1 + \frac{(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_1 * Y_2)}{6 * Rm_{12}^2 * 0.9996^2} \right].$$

7) Cálculo do comprimento da geodésica De

$$Dc = \sqrt{(N_2 - N_1)^2 + (E_2 - E_1)^2}; \quad (4.46)$$

$$De = Dc / m_{12}. \quad (4.47)$$

Assim a partir de dois pontos com coordenadas UTM conhecidas pode-se determinar o azimute geodésico da geodésica e o comprimento da geodésica.

Exemplo de valores resultantes de um cálculo de transporte de coordenadas Problema Inverso

**TRANSPORTE DE COORD. NO PLANO UTM
PROBLEMA INVERSO**

Ponto 1

$$N1 = 7187597.135 \text{ m}$$

$$E1 = 554499.444 \text{ m}$$

Ponto 2

$$N2 = 7185000.000 \text{ m}$$

$$E2 = 553000.000 \text{ m}$$

Coordenadas TM dos pontos 1 e 2

$$X1 = -2813528.276 \text{ m}$$

$$Y1 = 54521.253 \text{ m}$$

$$X2 = -2816126.451 \text{ m}$$

$$Y2 = 53021.208 \text{ m}$$

$$Xm = -2814827.363 \text{ m}$$

Lat. pé normal p/ Xm
fipem = -25.440198068 (Grau dec.)

Grande normal e pequena normal
N12 = 6382103.250 m
M12 = 6347218.963 m

Raio médio
Rm = 6364637.207 m

Diferença de coord. Norte
deltaN = 2597.135 m

Redução angular
Psi12 = -0.357339518 "
Psi21 = 0.354032023 "

Azimute no plano UTM de 1-2 (de quadricula)
Az12 = 209.999791664 (grau dec.)

Lat. pé para ponto 1
fipe1 = -25.428471315 (grau dec.)

Grande normal para o ponto 1
NN1 = 6382099.854 m

Convergência meridiana ponto 1 (Grau dec.)
gama = -0.2327080194

Azimute geodésico de 1-2
Azg12 = 210.23259894 (Grau dec)

Distorção de escala para o lado 1-2
m12 = 0.99963568

Comprimento da corda da geodésica projetada
Dc = 2998.907 m

Comprimento da geodésica
De = 3000.000 m

Final de cálculo

4.8.5 Avaliação de Área na Projeção UTM

O valor numérico da área de um limite determinado por um conjunto de pontos unidos entre si por segmentos de linha reta sucessivos que não se cruzam pode ser calculado com a fórmula de Gauss. O valor numérico representativo da área de um polígono pode ser referido ao plano topográfico, à superfície do elipsóide ou à uma projeção cartográfica. A determinação de valores de área referida ao plano topográfico pertence ao escopo da topografia, quando referido à superfície do elipsóide pertence ao escopo da geodésia e quando este cálculo é realizado com dados oriundos de uma projeção cartográfica então pertence ao escopo de projeções cartográficas.

A fórmula de Gauss para o cálculo da área de um polígono é:

$$Area = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i (Y_{i-1} - Y_{i+1}) \quad (4.48)$$

$$Area = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Y_i (X_{i-1} - X_{i+1})$$

Ambas as expressões fornecem o mesmo resultado para o valor da área de um conjunto de pontos. A utilização da primeira expressão com pontos ordenados de tal modo que formem o polígono no sentido horário produzirá um valor de área positivo, e caso contrário resultará num valor de área negativo. E a segunda expressão produzirá valor de área negativo para dados que formam o polígono no sentido horário e positivo no sentido antihorário. Todos os valores serão iguais em módulo. Portanto a utilização destas expressões poderá levar a valores negativos de área pois o sinal do resultado depende da expressão usada e também da orientação das coordenadas definidoras do polígono.

A seguir apresenta-se um exemplo de cálculo de área usando a fórmula de Gauss. Este exemplo serve apenas como ilustração do processo de cálculo da área, isto é, de uso da fórmula de Gauss.

Exemplo 1. Dadas as coordenadas, em metros, dos 7 pontos calcular sua área.

a) pontos organizados no sentido horário

$$X = [1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 4 \ 3];$$

$$Y = [2 \ 5 \ 6 \ 5 \ 4 \ 2 \ 1];$$

Usando a primeira expressão obtém-se $18,50m^2$
e usando a segunda expressão obtém-se $-18,50m^2$.

$$Area = (1*(1-5) + 3*(2-6) + 5*(5-5) + 7*(6-4) + 9*(5-2) + 4*(4-1) + 3*(2-2))/2 = 18,50m^2.$$

b) pontos organizados no sentido anti-horário

$$X = [3 \ 4 \ 9 \ 7 \ 5 \ 3 \ 1];$$

$$Y = [1 \ 2 \ 4 \ 5 \ 6 \ 5 \ 2];$$

Usando a primeira expressão obtém-se $-18,50m^2$
e usando a segunda expressão obtém-se $18,50m^2$.

c) O polígono formado pelos pontos organizados no sentido horário resulta como a seguir (Figura 4.26):

Nesta figura, os pontos de 1 a 7 estão ordenados de modo que o polígono seja criado no sentido horário. Na organização dos pontos no sentido anti-horário o ponto 7 será o ponto 1, o ponto 6 será o ponto 2 e assim até que se chegue ao ponto 1 que será o ponto 7.

O valor numérico da área de um polígono do qual se conhecem as coordenadas UTM de seus vértices é diferente do valor numérico da área do mesmo polígono quando se conhecem as suas coordenadas geodésicas, e também diferente do valor de área quando se conhecem as suas coordenadas retangulares referidas a um plano topográfico arbitrário.

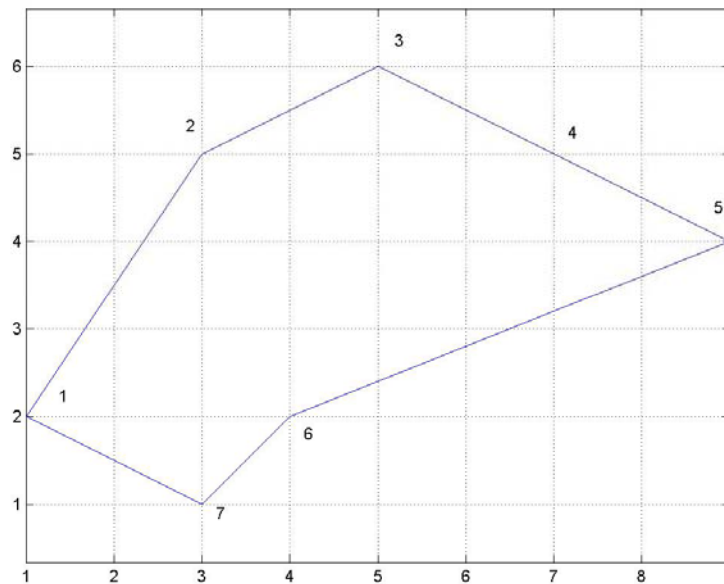


Figura 4.26 – Pontos formadores do polígono orientados no sentido horário

Uma solução para obter o valor numérico da área de um polígono sobre a superfície do elipsóide é determinar um valor médio de distorção de escala ou (fator de escala) para o polígono e aplicá-lo ao valor numérico da área calculada com as coordenadas UTM. Isto representa uma simplificação uma vez que os lados do polígono considerado na projeção UTM são retas e estes mesmos lados na superfície do elipsóide são linhas geodésicas. No entanto, quanto menor o comprimento das geodésicas menor será esta diferença, ou o que é o mesmo, quanto menor o valor numérico da área menor será a diferença.

A obtenção do valor da área sobre a superfície do elipsóide ou superfície de referência a partir do valor da área de um polígono que tem coordenadas UTM conhecidas depende da distorção de escala a que está sujeita a região que contém o polígono. A rigor cada posição da *SP* está afetada de um valor diferente de distorção de escala, no entanto dependendo das dimensões da região tratada a distorção pode ser considerada como constante. A distorção de escala atua nos comprimentos das geodésicas de modo a alongá-los ou comprimí-los, dependendo da posição do polígono dentro do fuso. O resultado da ação da distorção de escala no valor numérico da área de um polígono faz com que o valor seja reduzido ou aumentado quando se compara com o valor da área na *SR*.

Para um polígono localizado na porção do fuso em que a distorção de escala é menor do que a unidade ($m < 1$) o valor numérico da área sobre a *SR* será maior do que o valor calculado com as coordenadas UTM. Se o polígono ou região estiver localizado próximo à região de secância então os valores numéricos das áreas serão muito próximos. E, se o polígono estiver localizado na região do fuso em que $m > 1$, o valor numérico da área na *SP* será maior do que na *SR*. A proporcionalidade entre os valores numéricos de área é dada pelo quadrado da distorção de escala

O valor numérico da área de um polígono do qual se conhecem as coordenadas UTM pode também ser determinado para a superfície topográfica, valor que se deverá se aproximar daquele obtido por procedimentos da Topografia. Há diferentes modos de se obter o valor numérico da área de um polígono considerado nas imediações da superfície topográfica. Um destes modos é calcular um fator de ampliação da área obtida sobre o elipsóide para a superfície topográfica F_{et} usando a seguinte relação:

$$F_{et} = (N + Hm) / N, \quad (4.49)$$

em que N é a grande normal média para a região do polígono (deve-se lembrar que a grande normal é calculada em função da latitude), e Hm é a altitude média dos pontos formadores do polígono. Outra forma de obter o valor da área do polígono é mais rigoroso e considera as altitudes dos pontos formadores do polígono e faz uso desta informação para realizar a transformação das coordenadas UTM para coordenadas cartesianas topocêntricas. Um sistema de coordenadas retangulares dito topocêntrico tem a posição de sua origem arbitrária, tem o eixo X voltado para meridiano, o eixo Z coincidente com a vertical e o eixo Y orientado a 90° a direita de X .

A obtenção de coordenadas cartesianas topocêntricas a partir de coordenadas UTM se compõe das seguintes etapas: 1- transformação das coordenadas UTM em coordenadas geodésicas; 2- transformação das coordenadas geodésicas em coordenadas cartesianas geocêntricas; 3- transformação das coordenadas cartesianas geocêntricas em coordenadas topocêntricas (Figura 4.27). As etapas 2 e 3 pertencem ao campo de estudo da Geodésia (Sistemas de Referência), e apenas a etapa 1 é tratada em Projeções Cartográficas.

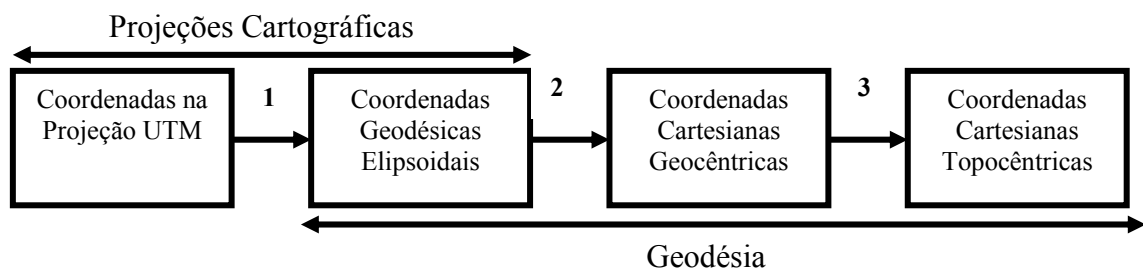


Figura 4.27 Passos da transformação de coordenadas UTM em cartesianas topocêntricas

A transformação de coordenadas Geodésicas elipsoidais para coordenadas cartesianas geocêntricas pode ser realizada usando as expressões:

$$\begin{aligned} X_c &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y_c &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z_c &= (N + h) (1 - e^2) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Nestas expressões N é a grande normal, h é a altitude do ponto (φ, λ) a transformar.

A transformação entre coordenadas geodésicas geocêntricas elipsoidais para coordenadas cartesianas topocêntricas locais pode ser realizada usando:

$$\begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X_c - X_o \\ Y_c - Y_o \\ Z_c - Z_o \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ + \lambda_o) & \sin(90^\circ + \lambda_o) & 0 \\ -\cos(90^\circ - \varphi_o) * \sin(90^\circ + \lambda_o) & \cos(90^\circ - \varphi_o) * \cos(90^\circ + \lambda_o) & \sin(90^\circ - \varphi_o) \\ \sin(90^\circ - \varphi_o) * \sin(90^\circ + \lambda_o) & -\sin(90^\circ - \varphi_o) * \cos(90^\circ + \lambda_o) & \cos(90^\circ - \varphi_o) \end{bmatrix}$$

Com esta expressão matricial é possível transformar coordenadas do sistema tridimensional geocêntrico para um sistema tridimensional topocêntrico em que: as

coordenadas X_c , Y_c e Z_c indicam as coordenadas no primeiro sistema, as coordenadas X_L , Y_L e Z_L indicam as coordenadas no segundo sistema, X_o , Y_o e Z_o indicam as coordenadas da origem do segundo sistema relativamente ao primeiro, R representa uma matriz de rotação dada em função da latitude (φ_o) e da longitude (λ_o) da origem do segundo sistema relativamente ao primeiro.

No exemplo a seguir apresenta-se os resultados dos cálculos dos valores numéricos das áreas de um polígono do qual se conhecem as coordenadas UTM. Neste exemplo os cálculos não estão explícitos e são mostrados e discutidos apenas os seus resultados.

Exemplo 2. Cálculo do valor numérico da área na projeção UTM, na superfície do elipsóide e na superfície topográfica supondo uma altitude média de $1000m$ para a região do polígono.

Tabela 4.1. Coordenadas UTM de 22 vértices do polígono

Pto.	<i>N (m)</i>	<i>E (m)</i>	Pto.	<i>N (m)</i>	<i>E (m)</i>
1	7338491.614	573464.906	12	7338031.831	573350.071
2	7338466.690	573492.957	13	7337992.255	573299.379
3	7338442.274	573514.835	14	7337963.332	573052.561
4	7338435.771	573516.754	15	7338270.946	572976.728
5	7338413.313	573517.591	16	7338248.684	573022.804
6	7338380.238	573509.424	17	7338245.322	573052.572
7	7338308.391	573477.236	18	7338253.968	573078.419
8	7338288.040	573481.554	19	7338318.397	573229.389
9	7338107.269	573446.588	20	7338409.469	573434.273
10	7338090.221	573403.511	21	7338425.566	573457.068
11	7338069.597	573382.848	22	7338441.046	573461.419

Altitude média da região = $1000 m$ (este valor foi arbitrado)

1- Área na projeção (A_p), calculada usando a primeira das (2.46)

$$A_p = 149629.68 m^2$$

Distorção de escala pada o ponto medio da area $m = 0.999666446$

$$A_e = A_p / (m * m)$$

2- Area no elipsóide (A_e)

$$A_e = 149729.55 m^2$$

Fator de multiplicação da área do elipsóide para a sup. topográfica $F_{et} = 1.00031359$

$$A_t = A_e * F_{et}$$

3- Area na sup topog $A_t = 149776.51 m^2$

4- Área num sistema cartesiano topocêntrico local $A_{tc} = 149776.53 m^2$

Tabela 4.2. Coordenadas retangulares dos pontos formadores do polígono referidas a um referencia local topocêntrico centrado na sua posição média.

<i>Pto</i>	X_L (m)	Y_L (m)	Z_L (m)	<i>Pto</i>	X_L (m)	Y_L (m)	Z_L (m)
1	117,366	215,313	-0,005	12	4,838	-245,279	-0,005
2	145,558	190,521	-0,004	13	-45,674	-285,135	-0,007
3	167,572	166,206	-0,004	14	-292,462	-315,340	-0,015
4	169,526	159,710	-0,004	15	-369,911	-7,968	-0,011
5	170,478	137,245	-0,004	16	-323,699	-30,004	-0,008
6	162,477	104,113	-0,003	17	-293,899	-33,215	-0,007
7	130,643	32,066	-0,001	18	-268,085	-24,432	-0,006
8	135,068	11,727	-0,001	19	-117,373	40,803	-0,001
9	101,014	-169,310	-0,003	20	87,140	132,971	-0,002
10	58,004	-186,587	-0,003	21	109,864	149,193	-0,003
11	37,437	-207,327	-0,004	22	114,137	164,703	-0,003

Uma comparação entre os diferentes valores de área para o mesmo conjunto de pontos associados a diferentes referenciais é encontrada na Tabela 4.3, a seguir.

Tabela 4.3. Valores numéricos de área em diferentes referenciais

Referência	Área (m ²)	Modo de obtenção
Projeção UTM	149629.68	Fórmula de Gauss
Elipsóide	149729.55	Distorção de escala ou fator de escala (m)
Sup. Topográfica	149776.48	Fator (Fet)
Sist. Local Topocêntrico	149776.53	Transformação entre referenciais

Observando-se os valores de área da Tabela 4.3, percebe-se que o valor da área para o polígono referido referida à superfície topográfica e a um sistema local topocêntrico são maiores do que aqueles para a projeção e para o elipsóide. Isso ocorre porque em geral se tem altitudes positivas, isto é, em geral não se encontram depressões sobre a superfície terrestre de tal modo que tenham altitudes menores do que o nível médio dos mares. Na Tabela 4.4 estão organizadas as diferenças entre os valores numéricos de área nos diferentes referenciais. Nesta tabela aparecem valores negativos nos casos em que o primeiro valor de área é menor do que o segundo, p. ex., (*área UTM – área Elipsóide*) = -99,87 m² (neste caso a área sobre o elipsóide é maior do que a área sobre a projeção).

Tabela 4.4 Diferença em unidades de área entre os valores em diferentes referenciais (Área linha – Área coluna)

Área	UTM	Elipsóide	Sup. Topog. (Fet)	S. Local Topoc.
UTM	0,00 m ²	-99,87 m²	-146,80 m²	-146,84 m²
Elipsóide	99,87 m²	0,00 m ²	-46,93 m²	-46,95 m²
Sup. Topog. (Fet)	146,80 m²	46,93 m²	0,00 m ²	-0,05 m²
S. Local Topoc.	146,84 m²	46,97 m²	0,05 m²	0,00 m ²

Tabela 4.5. Diferença percentual entre os valores de área em diferentes referenciais (Área linha / Área coluna)

Área	UTM	Elipsóide	Sup. Topog. (Fet)	S. Local Topoc.
UTM	0,00 %	0,07 %	0,10 %	0,10 %
Elipsóide	0,07 %	0,00 %	0,03 %	0,03 %
Sup. Topog. (Fet)	0,10 %	0,03 %	0,00 %	0,00 %
S. Local Topoc.	0,10 %	0,03 %	0,00 %	0,00 %

Da observação aos dados da Tabela 4.5 percebe-se que a maior diferença percentual se encontra ao comparar o valor numérico da área do polígono referido a um sistema local topocêntrico com o valor numérico da área do polígono referido ao elipsóide. De fato esta diferença será tanto maior quanto maior for a altitude da região que contém o polígono. A diferença percentual entre a projeção e o elipsóide depende da localização do polígono dentro do fuso UTM.