Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Etnomatematika se zaměřením na model čísla

Ethnomathematics focused on model of number

Markéta Spurová

Vedoucí práce: PhDr. Michaela Kaslová

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Anglický jazyk se zaměřením na vzdělávání – Matematika se zaměřením na vzdělávání

2018

Odevzdáním této bakalářské práce na téma *Etnomatematika se zaměřením na model čísla* potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 19. 4. 2018

Poděkování:

Ráda bych poděkovala PhDr. Michaele Kaslové za užitečné rady a připomínky, za vstřícný přístup a za čas, který mé práci věnovala.

ABSTRAKT

Cílem práce je vyhledat a shromáždit informace o etnomatematice se zaměřením na přínos, kterým může v oblasti modelování čísel být, dále propojit historii matematiky s kulturním kontextem, ve kterém model čísla nacházíme a v neposlední řadě vysvětlit, proč by se učitelé měli o toto téma zajímat v době inkluze.

První část práce vymezuje pojem etnomatematika a věnuje se vývoji historie matematiky se zaměřením na jednotlivé způsoby matematického myšlení. Dále ukazuje, čím která kultura přispěla ve vývoji matematiky. Následující část je věnována číslu. Je zde uvedeno několik vymezení čísla a jsou představeny základní číselné obory. Nemalá část je věnována modelu čísla, slovům a symbolům. Zmíněno je také použití číselných soustav, které se v různých kulturách liší. V průběhu celé práce jsou uvedeny odlišné příklady modelů i pojmenování čísel pocházejících z různých, především mimoevropských kultur.

V následující části je zpracováno modelování čísel na prstech. Uvedeny jsou rozdílnosti modelování v jednotlivých kulturách a příklady z historie. Práce obsahuje také šetření, které bylo provedeno na 52 dětech mateřských škol a které ukázalo, že v našem kulturním prostředí je obsaženo spontánní otáčení dlaně k přijímači a modelování čísel na pravé ruce. Poslední část je věnována znakovému jazyku a důležitosti etnomatematiky v době inkluze. Je zde popsáno, proč by bylo přínosné seznámit s etnomatematikou jak učitele, tak i žáky.

KLÍČOVÁ SLOVA

Etnomatematika, historie matematiky, model čísla, kulturní kontext

ABSTRACT

The aim of this work is to find and assemble information about the ethnomathematics and its possible contribution to the model of number. Furthermore, the aim is to interconnect the history of mathematics and the cultural context in which the model of number now occurs. This work also explains the reason why this topic should be of particular interest to teachers in inclusive approach to education.

The initial part focuses on the concept of ethnomathematics and deals with the history of mathematics. Different methods of mathematical thinking and contributions of particular cultures are also scrutinized. The next part concentrates on the number. Several definitions are presented and the main number systems are described. Significant part of this segment deals with the model of number, words and symbols. The use of numeral systems, which differs in distinct cultures, is also discussed. Moreover, different examples of models and names of numbers are illustrated throughout this work.

The subsequent part describes models of numbers via fingers, with focus on differences in distinct cultures and examples from the past. The research, carried out on 52 children in kindergartens, is also interpreted. The results showed that children tend to use right hand for forming numbers on their fingers and turn the palm to the listener. The final part examines the sign language and the importance of the ethnomathematics in inclusive approach to education. The fact that ethnomathematics can be beneficial for teachers as well as for their students is also specified.

KEYWORDS

Ethnomathematics, history of mathematics, model of number, cultural context

Obsah

Úvod

Téma etnomatematiky jsem si vybrala ze dvou důvodů. Prvním důvodem bylo zjištění, jak moc je v dnešní době toto téma důležité. Druhým důvodem bylo překvapení z toho, jak málo učitelů o etnomatematice slyšelo a obecně jak málo rozšířené toto téma mezi veřejností je. Na nápad, napsat o etnomatematice bakalářskou práci, mě přivedla až doktorka Kaslová. Etnomatematika je však velice komplexní vědní disciplína, a proto jsme se s vedoucí práce doktorkou Kaslovou shodly, že se zaměřím na model čísla u běžné populace, konkrétně na model pomocí vlastního těla.

Cílem práce je vyhledat a shromáždit informace o etnomatematice se zaměřením na přínos, kterým může v oblasti modelování čísel být. Druhým cílem je propojit historii matematiky s kulturním kontextem, ve kterém model čísla nacházíme. Dále jsou v práci uvedeny odlišné příklady modelů čísel pocházejících z různých, především mimoevropských kultur. Práce si navíc klade za cíl vysvětlit, proč by se učitelé měli o toto téma zajímat v době inkluze.

Tato práce může posloužit budoucím učitelům jako vstupní seznámení s etnomatematikou. Na mnohých příkladech uvádím, proč by mělo být v jejich zájmu se o dané téma zajímat a případně začlenit do svých budoucích hodin určité partie historie matematiky, či rozdílnosti v modelování čísel v odlišných kulturách.

V první kapitole vysvětluji pojem etnomatematika, a to z pohledů několika odborníků. Dále uvádím rozdíl mezi tím, co zkoumá historie matematiky a co etnomatematika. Vysvětluji pojem antropomatematika a poukazuji na problém většího zastoupení západních tradic ve vyučování na úkor ostatních. V neposlední řadě vysvětluji, proč by byla etnomatematika přínosem pro samotné žáky.

Druhá kapitola je věnována historii matematiky. Nesnažím se však datovat všechny důležité události a zmínit všechny matematiky. Spíše se zaměřuji na jednotlivé způsoby matematického myšlení a snažím se ukázat, čím která kultura přispěla ve vývoji matematiky. Jsou zde zmíněny počátky matematiky v Babylónii a v Egyptě. Nemalá část je věnována řecké historii matematiky, kde se po pythagorejcích soustředím na Platóna, Aristotela a Euklida. Dále se věnuji matematice v Číně s důrazem na systém zápisu čísel v „counting rods“. V dalším oddílu popisuji matematiku v islámském světě, kde se mimo jiné zabývám arabskými číslicemi a vznikem algebry. Na závěr se posouvám do období mezi 13. a 17.

stoletím, kde zmiňuji rostoucí vliv fyziky na matematiku a přínos L. Fibonaccioho a R. Descarta.

Ve třetí kapitole se věnuji číslu. Uvádím několik vymezení čísla a to například z pohledu pythagorejců a z pohledu I. Kanta. Dále v této kapitole představuji základní číselné obory. Uvádím přirozená, celá, racionální, reálná, iracionální a komplexní čísla. Také zmiňuji kvaterniony a důvod, proč se stále nachází nové číselné obory. Poté se věnuji modelu čísla, a zmiňuji některé běžně používané modely ve školním prostředí. Další oddíl tvoří slova a symboly, kde uvádím rozdíl mezi matematickým pojmem, zápisem pojmu a symbolu. Zmiňuji se také o použití číselných soustav, které se v různých kulturách liší.

Ve čtvrté kapitole zpracovávám modelování čísel na prstech. Uvádím rozdílnosti modelování v jednotlivých kulturách, a to nejenom na prstech rukou. Popisuji častou propojenost názvu čísla s částmi lidského těla a s názvy prstů, kterými se dané číslo modeluje. Jako příklad uvádím mimo jiné kulturu amerických indiánských kmenů. Dále se zabývám historií modelování na prstech, konkrétně systémem B. Venerabilise a R. Maura. Navíc ve čtvrté kapitole zmiňuji některé nedávné výzkumy v oblasti modelování čísel na prstech. Závěrečná část čtvrté kapitoly je věnována mému šetření, které mělo za cíl zjistit, jak modelují čísla na prstech děti v mateřských školách.

Pátá kapitola je věnována znakovému jazyku. Nejprve zmiňuji, proč je znakový jazyk zařazen do této práce. Dále je zde popsáno modelování čísel od 1 do 5 v českém a americkém znakovém jazyce. Uvádím též rozdílnosti v modelování čísel v dalších světových znakových jazycích.

V poslední šesté kapitole vysvětluji, proč je důležité se etnomatematikou zabývat v době inkluze. Popisuji, proč by bylo přínosné seznámit s etnomatematikou jak učitele, tak i žáky. Na závěr uvádím, čím může tato práce přispět v době inkluze.

1 Etnomatematika

„Čísla, která zapisujeme a vyslovujeme, jsou slovy jazyka, a tento jazyk nazýváme matematika“ (Bentley, 2013, s. 13). Z této definice by se však mohlo zdát, že existuje pouze jedna matematika. Většina populace v to také věří. Považují matematiku za univerzální jazyk, kterým se domluví všude. Pravdou sice je, že matematika je opravdu rozšířený jazyk a také se s ním dá domluvit v mnoha zemích, avšak matematika není neměnná. Proto souhlasím se Spenglerem, který tvrdí, že: „Neexistuje žádná matematika, jen matematiky“ (2010, s. 68). Matematika se totiž liší v různých kulturách a také v různých sociálních prostředích. Rosa a Orey uvádí, že v minulosti se vždy matematika učila jako předmět nezávislý na dané kultuře (2011). Zjištění, že matematika se opravdu v rozdílných kulturách a prostředí liší, k čemuž došel i Favilli (2000), dalo vzniknout novému odvětví, etnomatematice. Etnomatematikou se začali odborníci více zabývat teprve nedávno. Jak uvádí Kaslová, teprve v roce 1998 se konal první mezinárodní kongres k etnomatematice (2013, s. 49).

„Etnomatematika je obor zabývající se pojetím matematiky v jednotlivých kulturách od historie po dnešek (časově se neomezuje). Její kapitoly zkoumají specifika přístupu k různým pojmům, tematickým celkům, včetně nástrojů, které k tomu ta která oblast využívá, na čem staví, z čeho vychází, respektive na co navazuje, avšak je mnohem širší než historie matematiky“ (Kaslová, 2013, s. 49). Obdobně etnomatematiku vymezuje D’Ambrosio, který říká, že je to vztah mezi kulturou a matematikou a dále rozebírá jednotlivé části slova – etno a matematika (2001). Najít jiné vymezení etnomatematiky je velice obtížné, jelikož mnoho autorů jako například Cimen (2014), Powell a Frankenstein (1997), Weldeana (2016) se na D’Ambrosia odvolávají.

Avšak v cílech etnomatematiky se odborníci rozchází. Ascher ve svém díle považuje za cíl etnomatematiky „rozšířit historii matematiky na historii, která je multikulturní a globální“ (1991, s. 188). Tedy chce rozšířit povědomí o jiných minoritních kulturách, které jsou často v historii matematiky zanedbávány nebo zcela vynechány. Podle Ascher je etnomatematika „zakořeněna v historii“ (1991, s. 195). A skutečně se Ascher ve své knize soustředí převážně na historii. Kaslová ovšem vidí etnomatematiku jako „širší, či lépe komplexnější obor než historie matematiky…“ (2013, s. 52). Tedy i Kaslová připouští, že etnomatematika je nutně propojena s historií, avšak vidí etnomatematiku jako více obsáhlou disciplínu. Tento pohled Kaslové Ascher nevyvrací a dokonce uvádí, že zatímco ona sama se soustředila na etnomatematiku jako součást světové historie, jsou zde jiní, kteří se soustředí na etnomatematiku v přítomnosti a v budoucnosti (1991, s. 195). Tedy jak je vidět, jak Ascher tak Kaslová považují historii za nutnou součást etnomatematiky, avšak Ascher se k historii upíná daleko více.

Pro mnohé etnomatematiky je důležitým oborem antropomatematika. „Antropomatematika jako součást antropodidaktiky sleduje užití matematiky v běžném životě a vyučování matematice v daném historicko-sociálně-kulturním kontextu (kdy–kdo–kde)…“ (Kaslová, 2013, s. 50). Součástí dnešní problematiky je i to, jak moc je dnešní matematické vzdělávání ovlivněno západní kulturou. Etnomatematici se tedy mimo jiné snaží o to, aby byly do vzdělávání zařazeny i jiné kulturní tradice než ty západní. Podle Favilliho (2000) by se učitelé měli zamyslet nad jejich metodami vzhledem k rostoucímu počtu imigrantů. Tvrdí, že matematické vzdělávání by mělo být upraveno s ohledem na kultury zastoupené ve třídě. Proto si myslí, že by znalost etnomatematiky byla přínosem. S tím je samozřejmě lehké souhlasit, avšak počet imigrantů v Itálii bude daleko větší než například v České republice, tudíž rostoucí počet imigrantů bych nebrala jako hlavní faktor. Vzrůstající počet cizinců není jediným důvodem, proč by učitelé měli změnit své metody a přístupy. V České republice se například vlivem inkluze dostává do stejných tříd nejenom více dětí cizinců, ale i více dětí pocházející ze zcela odlišného sociálně-kulturního prostředí (viz kapitola 6). A právě proto je téma etnomatematiky aktuální i u nás.

Odlišným prostředím se myslí, jak poukazuje D’Ambrosio, lidé odlišných národností, z různých pracovních skupin, odlišných profesí… (1985). Zastoupení žáků z rozdílných prostředí ve třídě bude samozřejmě nižší například na vesnicích a daleko vyšší procento bude zastoupeno ve velkých městech. Zastoupení těchto žáků bude v porovnání například s Prahou také vyšší v přístavních městech jako Marseille či Neapol. Avšak i v České republice se vlivem globalizace a většího mísení lidí z odlišných kultur téměř v každé třídě nachází jedinec či více žáků z odlišného prostředí. Velikou roli hraje také postavení, které dítě zaujímá v rodině. Jak říká Sarrazy, postavení dětí v rodině významně ovlivňuje jejich chování ve třídě (2018). A právě z těchto důvodů se etnomatematika stává velice důležitou vědní disciplínou, o kterou by se současní i budoucí učitelé měli zajímat. Bohužel podle D’Ambrosia mnoho učitelů o etnomatematice neslyšelo, přestože by jim její základní pochopení rozšířilo matematické obzory a pomohlo by jim lépe instruovat žáky (2001). Tuto myšlenku napsal D’Ambrosio v roce 2001. Bohužel ani o 17 let později není situace o moc lepší, přestože se každým rokem stává etnomatematika více a více aktuální.

Na čem se navíc Kaslová, Ascher i D‘Ambrosio shodují je to, že etnomatematika pomáhá pochopit vlastní kulturu a identitu. „Pochopení etnomatematiky umožňuje lépe pochopit vlastní specifika a tím napomáhá k pochopení i vlastní identity (v oblasti vyučování matematice)“ (Kaslová, 2013, s. 49). Tedy tím, že rozšíříme naše obzory a budeme se snažit nahlédnout na problém očima lidí z odlišných kultur, zároveň více pochopíme kulturu naši, v čem se od ostatních liší a v čem je naopak stejná. Ovšem jak zmiňuje Ascher, musíme mít na paměti, že pokud se snažíme vidět matematické problémy v rámci kontextu jiné kultury, stále jsme limitování naším matematickým a kulturním rámcem (1991, s. 3). Pokud tedy nebudeme odlišnou kulturu déle studovat, ideálně v ní několik let žít, nebude nám nikdy umožněno zcela pochopit myšlení a nahlížení na problémy očima lidí z této kultury. Naše vlastní kultura je v nás totiž hluboko zakořeněna a ať si to připouštíme nebo ne, stále nás ovlivňuje.

Kulturní odlišnosti, a to nejen v chápání matematiky, jsou však jistě zakořeněny v historii. Souhlasím tedy s Ascher, že pro etnomatematiku je velice důležitý historický vývoj matematiky, a proto se na něj nyní zaměřím.

2 Počátky matematiky

Matematika je jednou z nejstarších věd. Její počátky se však jen těžko dají dohledat. V Evropě je zakořeněna myšlenka, že matematika vznikla ve starověkém Řecku, tedy kolem roku 800 před naším letopočtem. Tento převládající názor je zapříčiněn eurocentrismem. „Eurocentrismus je nadřazování evropských a amerických myšlenek nad myšlenkami africkými či asijskými" (Hodgkin, 2005, s. 12). K tomuto názoru se přidává i Joseph, který tvrdí, že právě z tohoto důvodu byly a jsou matematické aktivity mimo Evropu často ignorovány a podceňovány (2000, s. 3). Bohužel se tento postoj ani v současné době moc nezměnil. Nejde-li člověk na vysokou školu a nezabývá-li se tímto tématem více, vstupuje do života pouze se znalostmi ze základní popř. střední školy, tedy většinou se znalostí pouze řeckých matematiků. Pokud se však máme dozvědět více o historii matematiky, musíme se vypravit do časů před vznikem starověkého Řecka a hlavně mimo Evropu. Nebudu však uvádět všechna historická data a významná jména matematiků. Spíše se budu snažit ukázat, jak se v průběhu let a v rozdílných kulturách měnil pohled na matematiku. Při popisu vývoje matematiky v jednotlivých kulturách je nutné si uvědomit, že to, co popisujeme jako objev či pokrok dané kultury, neznamená, že většina lidí v této kultuře se na pokroku podílela. Právě naopak, pouze malé procento lidí dané kultury, někdy dokonce jednotlivci většinou z vyšších vrstev, se matematikou zabývali.

2.1 Babylónie a Egypt

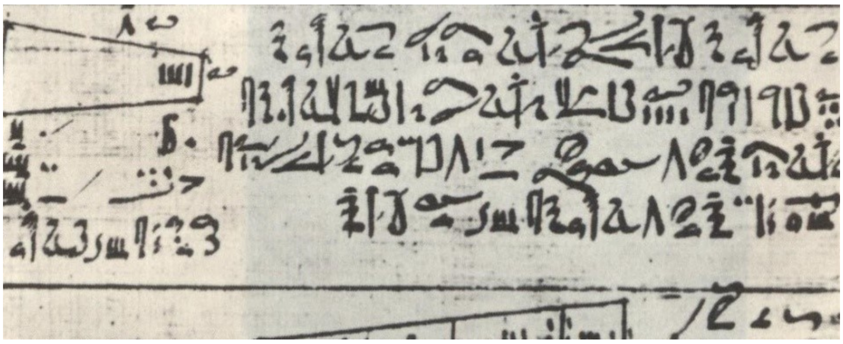
Jak uvádí Hodgkin, nejstarší dochované matematické památky pochází z území dnešního Iráku, které obývalo v období od 4 000 let př. n. l. do 300 let př. n. l. několik civilizací (sumerská, akkadská, babylonská). Záznamy se zachovaly díky tomu, že v této době bylo vše zaznamenáváno do hliněných destiček, které se poté, co ztratily svoji důležitost, používaly například ke stavbě domů (2005, s. 15–17). Již v této době se rozvíjel obchod, a tak vznikla potřeba zaznamenávat zboží. „Byrokracie potřebovala účetnictví dříve, než potřebovala literaturu" (Hodgkin, 2005, s. 16). Jak se shoduje Hodgkin s Fauvelem, již kolem roku 2 500 př. n. l. vznikaly školy pro písaře, kde se učenci potýkali s prvními matematickými příklady (1987, s. 25).

Postupem času se matematika v Babylónii vyvíjela. „Způsob zápisu čísel Babyloňanů je natolik pokročilý a sofistikovaný, že udivuje mnoho matematiků" (Hodgkin, 2005, s. 24).

Nejenže používali šedesátkovou soustavu, ale na dochovaných tabulkách se můžeme dočíst o složitých příkladech, které museli učenci řešit. Jak uvádí Joseph, Babylóňané byli natolik pokročilí, že na jedné z dochovaných tabulek vypočítali $\sqrt{2}$ se správností na 5 desetinných míst (2000, s. 105), tedy již v této době se v Babylónii vyskytla iracionální čísla.

Matematika v Babylónii a v Egyptě byla zaměřená prakticky. Z dochovaných záznamů můžeme vyčíst, že babylonský a egyptský přístup k matematice se velice lišil od přístupu, který je pro nás v Evropě typický. „Třebaže se na konci dospěje ke stejnému výsledku, postupy a přístupy, kterými se k němu dopracovalo, se významně liší“ (Hodgkin, 2005, s. 20). Staří Egypťané například využívali metodu „chybné stanovisko“ (Hodgkin, 2005, s. 21), kdy výsledek typovali a po zjištění, že je nesprávný, ho už jen poupravovali, dokud nedospěli k výsledku správnému. V Egyptě byla matematika velice pokročilá. Z dochovaného Rhindova papyru (viz obr. 1), který, jak uvádí Struik, vznikl před rokem 1650 př. n. l. (1963, s. 20), se můžeme dočíst, že Egypťané pracovali se zlomky. Byly to tzv. kmenové zlomky, tedy zlomky, které měly v čitateli jedničku a „všechny zlomky se převáděly na součty kmenových zlomků“ (Struik, 1963, s. 21).

Obr. 1: Výsek z Rhindova papyru



Zdroj: Depman, 1973, s. 20

Je však nutné si uvědomit, že dosavadní informace o babylonském a egyptském období pochází pouze z archeologických nálezů. Tudíž to, co bylo doposud objeveno a co považujeme za důležité, nemusí být podstatné za 50 let, kdy s postupným technologickým pokrokem budeme schopni odhalit mnohem více a možná bude objevena úplně jiná památka, která nám změní pohled na matematiku, jak ji známe dnes.

2.2 Řecko

„Praktická aritmetika Babyloňanů byla Řeky přeměněna na vědu o číslech a operacích s nimi" (Drábek, 1985, s. 6). Jedním z prvních významných matematiků starověkého Řecka byl Pythagoras (570–510 př. n. l.). Z jeho pythagorejské školy, jak tvrdí Struik, pochází první důkaz Pythagorovy věty, kterou však znali již Babylóňané (1963, s. 39). Pythagoras a i jeho následovníci, pythagorejci, byli přesvědčeni, že svět lze popsat přes číselné vztahy. Ovšem jako čísla uvažovali pouze přirozená čísla. Problém ovšem nastal, když pythagorejci zkoumali vztah mezi stranou čtverce a jeho diagonálou. Došli k názoru, že „poměr těchto dvou úseček nelze vyjádřit číslem" (Struik, 1963, s. 39), myšleno přirozeným číslem. V tento okamžik dochází, jak Drábek píše „k 1. metodologické krizi matematiky" (1985, s. 7). V této době byly filosofie a matematika úzce propojeny, tvořily jednotku. A když pythagorejci zjistili, že existuje vztah, který nelze vyjádřit číslem (přirozeným číslem), zbortila se jim celá jejich idea.

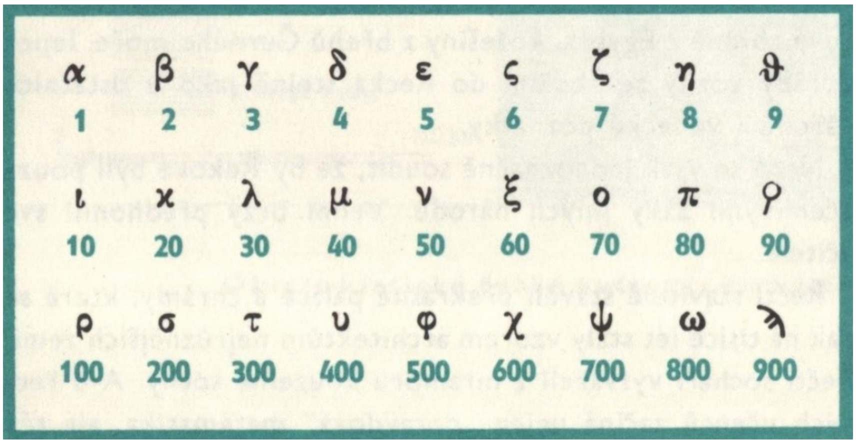
Dalším významným matematikem starověkého Řecka byl Platón (427–348 př. n. l.). Platónovy *Dialogy* jsou jedním z nejstarších dokumentů, které se zachovaly do dnešní doby. Jak poznamenává Hodgkin: „Platón definoval specifický pohled na to, co matematika byla a jaká by měla být. Obecně řečeno, pravá matematika je více abstraktní, čísla už nejsou pouze počet věcí nebo měření délky, prostoru nebo času, ale čísla existují individuálně jako objekty, kterými se dorozumíváme" (2005, s. 33). Právě vliv filosofie na matematiku přináší v této době úplně jiný pohled na matematiku. Jak píše Vopěnka o Platónově filosofii: „Něco jiného je vědět, co pravda je, a něco jiného je umět se k ní dobrat. Na tomto místě končí filosofie a začíná věda, nebo chceme-li, filosofie plynule přechází ve vědu" (2003, s. 77). Ve starověkém Řecku byla filosofie nezbytnou součástí všeho. Bohužel v dnešní době se na důležitost filosofie a její propojení s ostatními vědními obory často zapomíná. Na propojení filosofie s matematikou bychom však měli stále pamatovat, neboť jak tvrdí Spengler: „Dosud každá filosofie vyrůstala ve spjatosti s příslušnou matematikou" (2010, s. 65).

Pro pochopení Platónovy filosofie a tedy i matematiky je nutné vysvětlit pojem ideje. Ideje jsou myšlenky, jsoucna, pravzory. Vopěnka vymezuje ideje jako: „Úsečka, kružnice, přímost, křivost a podobně jsou to, co lze na geometrických objektech vidět, co lze na nich uzřít; jsou to určité vidy, určitá vzezření, jsou to ideje" (2003, s. 70). Platónova ontologie (nauka o bytí) rozlišuje dva světy. Prvním světem je svět smyslově vnímatelný. Ten je proměnlivý, nedokonalý a vyvíjí se v čase. Druhým světem je svět idejí. Jak říká Jirásková, svět idejí je dokonalý, prvotný a věčný. Není smyslově vnímatelný a nepodléhá změnám. Platón tvrdí, že člověk se může pohybovat v obou světech. Prohlašuje, že tělo patří do prvního světa, kdežto duše patří do světa druhého. Je však přesvědčen, že duše je věčná a před tím, než se duše spojila s tělem, byla ve druhém světě. A právě proces poznávání považuje pouze za proces rozpomínání se na svět druhý, na pravzory, ideje (2015). Dále „ideje evidujeme jak v geometrickém světě, tak v reálném světě. Svět idejí je tedy společným základem obou těchto světů, je jim nadřazen“ (Vopěnka, 2003, s. 72). Například idea přímky je nadřazena geometrické interpretaci přímky a geometrická interpretace je nadřazena reálnému zobrazení přímky. Načrtneme-li přímku na papír, může být tato reálná interpretace snadno zničena, zkřivena, popřípadě úplně vymazána. Reálná interpretace je tedy nestálá. Avšak v této době dochází i k odcizení filosofie a matematiky: „V tomto okamžiku se začíná věda s filosofií rozcházet. I když oběma jde stále o pravdu, rozcházejí se ve svých cílech a ve směrech cest, po nichž se ubírají. Filosofie zůstává věrná svému platónskému poslání, její snahou je dobrat se k pravdě. Naproti tomu snahou vědy je pravdu získávat, čerpat ji ze světa“ (Vopěnka, 2003, s. 102).

Platónova filosofie ovlivnila mnohé filosofy a vědce, avšak našli se i tací, kteří s Platónem úplně nesouhlasili. Jedním z nich byl Aristoteles, žák Platóna. Aristoteles kritizuje Platónovy ideje, neodmítá je jako celek, ale odmítá pravzory idejí. Jak tvrdí Jirásková, Aristoteles nechápe, jak by mohla být podstata něčeho oddělena od toho, čeho je to podstata. Aristoteles se zaměřil na náš svět, tedy na svět reálný. Prohlašuje, že podstaty jsou ve věcech („inrébus“). Tedy i duše je „inrébus“ a musí zaniknout se smrtí těla. Dále tvrdí, že svět idejí se rodí pozorováním a porovnáváním světa reality (2015). Platón a Aristoteles otevřeli dvě cesty poznání. Platónův přístup odpovídá myšlení vysoce nadprůměrných lidí, kteří najednou znají odpověď, ale nevědí, jak na ni přišli (tzv. řešení vhledem). Platónův přístup by byl i odpovědí na otázku: Proč některé děti umí z ničeho nic číst? Avšak já se přikláním k názoru Lakoffa, že: „Samotná věda nemůže dokázat ani vyvrátit existenci platónské matematiky, stejně jako nemůže dokázat ani vyvrátit existenci boha“ (2000, s. 2). Naopak Aristotelův přístup odpovídá myšlení a postupu většiny lidí, kteří se k odpovědi musí nějak dopracovat. Navíc i současné české školství stojí na aristotelské filosofie, že v realitě se matematika rodí porovnáním různých situací a z obecného se dostáváme k abstrakci.

Řečtí matematici jsou známí tím, že se zajímali o důkazy (nikoliv jako Babyloňané, kteří kladli důraz na počítání). Právě Euklides ve svém díle *Základy* přichází s novým „axiomatickým přístupem“ (Lakoff, 2000, s. 118). Řeší úlohy jako „sekvence dedukcí“ (Hodgkin, 2005, s. 44). *Základy* jsou velice významným dílem, jelikož Euklides „sepsal matematické vědění své doby tak jasným způsobem“ (Bentley, 2013, s. 60). Avšak i matematika ve starověkém Řecku má své limity. Řečtí matematici sice uvádějí jak vypočítat obsah čtverce, který má stranu délky například 1, avšak už nezkoumají diagonálu tohoto čtverce (tedy $\sqrt{2}$), což pravděpodobně vzešlo z 1. metodologické krize matematiky (viz výše). Obdobně se ve svých spisech nezabývají zápornými čísly. Navíc jak uvádí Struik: „Říkalo se, že abecední systém poškodil růst řecké algebry; užívání písmen jako symbolů pro určitá čísla zabránilo prý jejich užití při označení obecnějších čísel…“ (1963, s. 63). Řečtí matematici totiž kódovali čísla do písmen s proužkem (viz obr. 2, kde jsou ovšem písmena zakreslena bez horních proužků). Zápis čísel v alfabetickém systému tedy byl značně nepřehledný, jelikož byl text od čísel hůře očima rozeznatelný. To mohlo vést i k problému, proč staří Řekové nepostoupili k dalším číselným oborům a zůstali pouze u přirozených čísel (viz kapitola 3.1.1).

Obr. 2: Řecké záznamy čísel



Zdroj: Depman, 1973, s. 35

Mnoho dnešních tvrzení, která považujeme za základní, přičítáme velikánům jako Pythagoras, Thalés, Ptolemaios… Musíme však mít na paměti, že na rozdíl od dochovaných záznamů z Babylónie (hliněné destičky) nemáme ze starověkého Řecka žádný původní záznam. Například jak píše Hodgkin, nejstarší dochovaný záznam Euklidových *Základů* pochází až z 9. století, tedy více jak 1000 let po vzniku originálu (2005, s. 41). Množstvím přepisováním bylo zajisté pozměněno mnoho údajů a možná se ztratilo i několik důležitých myšlenek. Je nám tak odepřeno zcela pochopit myšlení řeckých myslitelů a matematiků.

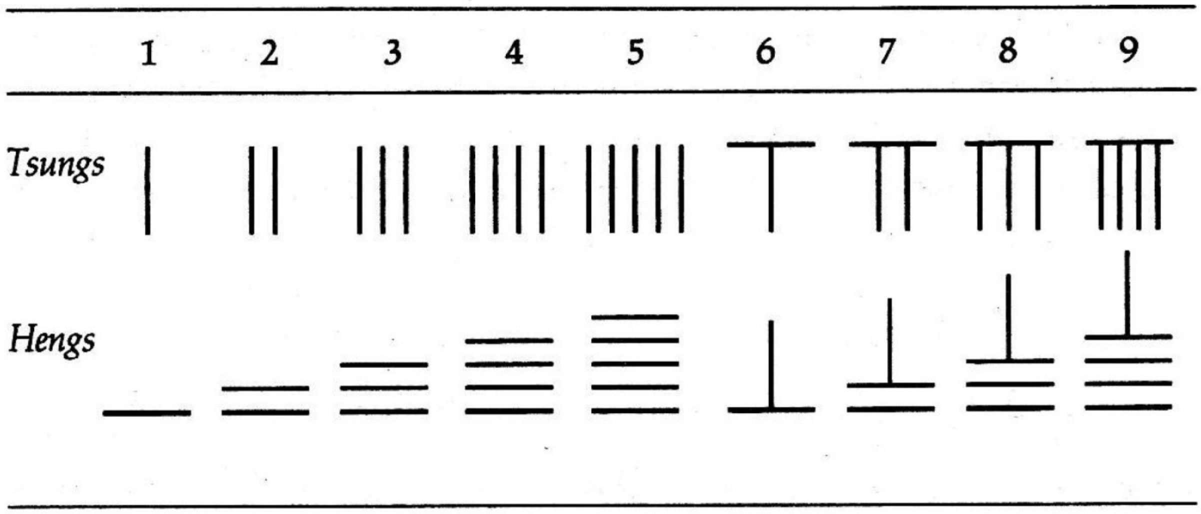
2.3 Čína

Je zde několik faktorů, proč se v dnešní době klade tak malý důraz na čínskou matematiku a místo toho se stále častěji obracíme k výše zmíněné matematice řecké. Svoji roli určitě hraje vzdálenost, ale podstatnější je jazyk. „Nápady a otázky čínské matematiky obsahují prvky, které se jen těžko dají přeložit do našich výrazů“ (Hodgkin, 2005, s. 79). Počátky matematiky na území dnešní Číny se datují kolem roku 400 př. n. l. a až do příchodu „evropské“ matematiky kolem roku 1 600 (Hodgkin, 2005, s. 79) se matematika a matematické myšlení v Číně izolovaně vyvíjelo svým vlastním směrem. Avšak Joseph uvádí, že první důkazy o zápisu číslic pochází již z časů kolem roku 1500 př. n. l., kdy se číslice vrývaly do kostí (2000, s. 140).

Jedním z nejstarších a nejvýznamnějších čínských děl je *Devět kapitol matematického umění*. Datum a autor nejsou známy. Podle Hodgkina se doba vzniku odhaduje na 2. století před naším letopočtem, do období vlády dynastie Chan. Na rozdíl od Euklida, který se soustředil na používání důkazů a sytému založeným na axiomech, se v *Devíti kapitolách* klade důraz na praktické zaměření a řešení problému, tedy ve struktuře podobné spíše babylonské a egyptské matematice než řecké (2005, s. 81–83).

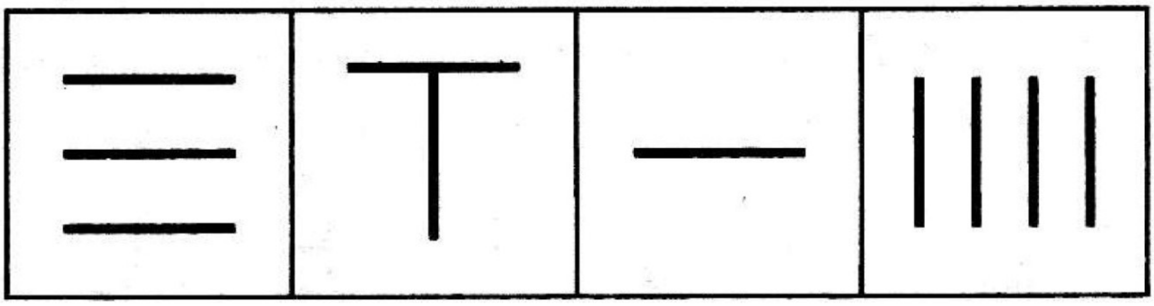
Velice zajímavé je, že zápis číslic v čínském písmu má stejnou formu jako název číslice. Tedy jak píše Hodgkin, vytratila se zde rozdílnost mezi zápisem číslic a slov (2005, s. 85). Významným přispěním čínské matematiky světu byl vynález tzv. počítacích prutů – „counting rods“ (Joseph, 200, s. 141), zmíněný již právě v *Devíti kapitolách*. Pruty byly vyrobeny z bambusu nebo ze slonoviny. Jak dále píše Joseph, pruty byly uspořádány v řádcích zprava doleva, kde jejich pozice představovala mocniny deseti (2000, s. 141) (viz tab. 1 a 2). Tento počítací systém předcházel běžněji známému počítadlu abaku. Bohužel jak uvádí Hodgkin, nemáme přímé důkazy, zda se z „counting rods“ později vyvinul poziční zápis čísel – „place-value system“. Avšak téměř identický způsob počítání v arabských učebnicích, který se liší pouze zápisem číslic, tomu napovídá (2005, s. 87–88). Dalším rozdílem oproti Západu je, že čínští matematici již od počátků počítali se zápornými čísly a právě z Číny se pak záporná čísla pravděpodobně rozšířila do Indie a na Západ. Jak píše Joseph, v zápise „counting rods“ byla rozlišována kladná a záporná čísla rozdílnou barvou. Kladná čísla představovaly červené pruty a záporná čísla pruty černé (2000, s. 141).

Tab. 1: Tabulka zápisu čísel v systému „counting rods“. *Tsungs* reprezentují jednotky, stovky, desetitisíce… a *Hengs* jsou desítky, tisíce, statisíce…



Zdroj: Joseph, 2000, s. 142

Tab. 2: Zápis čísla 3614 pomocí „counting rods“



Zdroj: Joseph, 2000, s. 142

Během 11. a 12. století dochází k častým kontaktům mezi čínskými učenci a učenci z Blízkého východu (islámský svět) a jak uvádí Hodgkin, koncem 16. století s příchodem Mattea Ricci, jezuitského misionáře, se do Číny dostávají Evropské metody. Dochází k překladům Euklidových a dalších děl (2005, s. 95–98). Izolovaný vývoj čínské matematiky tedy končí.

2.4 Islámský svět

Na rozdíl od čínské matematiky, která se vyvíjela izolovaně od západního světa, matematika v islámském/arabském světě (9.–15. století) se dá považovat za součást Západu navazující na Řecko. Avšak jak píše Hodgkin, dílům islámských matematiků se začala přičítat důležitost až v 50. a 60. letech minulého století, kdy se začala hojně studovat a překládat (2005, s. 101–102). Přesto však zůstává mnoho děl nepřeloženo.

Jedno z přednějších děl je dílo autora al-Uqlidisi z roku 951. Jeho dílo je dlouhé a detailní. Podle Hodgkina, al-Uqlidisi jako pouliční matematik z Damašku potřeboval pracovat rychle a precizně. A právě proto shledal nový systém číslic (indická později arabská číslice) ideálním pro svoji práci. V jeho práci je každé pravidlo vysvětleno do posledního detailu (2005, s. 106), třeba práce s desítkovou soustavou a hlavně s desetinnými zlomky.

Jak se shoduje Hodgkin s Fauvelem, nejvýznamnějším chalífou byl Ma'mun (786–833). Ma'mun chápal důležitost bádání, a to vedlo k objevu řeckých a indických matematických děl a k jejich pozdějším překladům do arabštiny. A právě islámští matematici se zasloužili o to, že mnoho řeckých děl přežilo až do dnešní doby (1987, s. 223). Velice vlivným dílem, a to jak v islámském světě, tak i ve středověké Evropě, se stala algebraická učebnice *Hisab al-jabr w'al-muqabala* (v dnešní době nazývána *Algebra*), „která dala oboru i jméno“ (Joseph, 2000, s. 305), zabývající se převážně kvadratickými rovnicemi, kterou napsal al-Khwarizmi. Al-Khwarizmi se snažil o to, aby jeho výroky byly obecné. Vysvětloval metodu skrze příklad, ne tedy jako Babyloňané, kteří předkládali mnoho příkladů a nechali na čtenáři, aby si obecné pravidlo vyvodil. Jak píše Hodgkin, Al-Khwarizmi postupoval obdobně jako al-Uqlidisi v aritmetice, navíc představil nový způsob myšlení, který spojil řešení a důkaz zahrnující veliké zjednodušení a generalizaci. Al-Khwarizmiho algebra je „numerická kuchařka pro řešení praktických problémů“ (Hodgkin, 2005, s. 114). Významným rozdílem oproti Řecku bylo, že odlišnost mezi čísly a délkami byla narušena. Neboť jak tvrdí Hodgkin, islámští matematici považovali čísla za kvantitu, tedy v případě, že je možné zkonstruovat délku, existuje číslo, které délce odpovídá (2005, s. 117).

Dalším významným arabským matematikem 15. století byl al-Kashi, jehož dílo *Miftah al-hisab* se stalo bestsellerem. Jak píše Hodgkin, dílo obsahuje nespočetné množství tabulek: tabulky pro násobení, pro sinus, převody desítkové soustavy na šedesátkovou… Sám autor tvrdí, že právě tabulky jsou velikým přínosem pro dílo samotné. Najdeme zde tabulky statické i dynamické, které ukazují postup jak počítat (2005, s. 121–122). A podle Josepha to byl al-Kashi, kdo určil číslo π s přesností na 16 desetinných míst (2000, s. 311).

2.5 13.–17. století

V této době na rozdíl od předchozích, nastává, co se literatury týče, opačný problém: dochovala se celá řada děl, až je někdy těžké vyseparovat ta podstatná. Jak píše Hodgkin, nastává i druhý problém: matematika se často dostává na „druhé místo až za fyziku“, a to platí i u velikánů jako G. Galilei či J. Kepler (2005, s. 134). Toto období je také velice hojné jak do počtu matematiků, tak do počtu zkoumaných odvětví. „Je tedy zřejmé, že odlišné společnosti mají jiné názory na to, co by mělo být objektem jejich zkoumání“ (Hodgkin, 2005, s. 138).

Mnoho děl vznikalo v italských školách. Velice rozšířeným dílem se stala *Kniha počtů* (*Liber abaci),* napsána na počátku 13. století L. Fibonaccim (1180–1250). Jak píše Bentley, ze svých cest po arabském světě si L. Fibonacci přivezl cenné vědomosti: znalost arabských číslic či poziční číselné soustavy, které zúročil ve své knize (2013, s. 74). Zjednodušené verze knihy v italštině se pak staly učebnicemi na mnohých školách („abacus schools“), především díky jejich praktičnosti a užitečnosti (Hodgkin, 2005, s. 141–142). Počet vydaných knih se navíc rapidně zvýšil po vynalezení knihtisku (1447).

Na rozdíl od předchozích děl, Descartova *Geometrie* vypadá novodobě a pro nás je relativně jednoduché v ní číst. Například jsou zde použita *x, y* pro neznámé a *a, b* pro konstanty. Avšak v Descartově době působilo jeho dílo velice složitě, jelikož přinášelo úplně jiný, nový pohled. Jak tvrdí Hodgkin, R. Descartes (1596–1650) je mnohými matematickými historiky považován za revolucionáře, jelikož se jako jeden z prvních osvobodil od zdlouhavých metod starých Řeků a těžké geometrické problémy přetvořil na jednoduché algebraické (2005, s. 149–150). A právě Descartes propojil do té doby dva odlišné světy: geometrii (tedy grafické pojetí) s aritmetikou a algebrou.

V dalším období se již objevují matematici jako I. Newton či G. W. Leibnitz. Jejich přínos především v oblasti infinitezimálního počtu byl značný, avšak pro bakalářskou práci méně podstatný.

Co však je důležité pro práci, je 20. století. Po druhé světové válce se použití matematiky rozrůstá. A díky postupnému vývoji se matematika postupně dostává do všech odvětví lidského života. Výjimku netvoří medicína ani informatika. V průběhu minulého století začaly též vznikat nové oblasti a odvětví matematiky. Jedním z těchto odvětví je etnomatematika (viz 1. kapitola).

3 Číslo

3.1 Vymezení čísla

Co je to číslo? Na tuto otázku neexistuje jednoznačná odpověď. Pojetí čísla se měnilo v průběhu historie (viz kapitola 2). Avšak i v odlišných kulturách ve stejné době se na číslo nahlíží rozdílně, jak i poukazuje Spengler: „Nějaké číslo o sobě neexistuje a nemůže existovat. Je více číselných světů, protože je více kultur. Nacházíme indický, arabský, antický, západní typ matematického myšlení a tedy typ čísla, každé od základu něco vlastního a jedinečného…“ (Spengler, 2010, s. 67).

V antice převážně za doby pythagorejců (6. století př. n. l.) matematici chápali číslo jako veličinu či míru: „Čísla byla v celé antice bez výjimek chápána jako měrné jednotky, jako velikosti, vzdálenosti, plochy … Z toho nutně vyplývá, že antika zná jen přirozená čísla“ (Spengler, 2010, s. 71). Tady ovšem se Spenglerem nesouhlasím, jelikož z toho, že je číslo chápáno jako míra, neplyne, že se pracuje pouze s přirozenými čísly. I číslo 1,5 můžu chápat jako míru. Tedy teorie míry připouští například i desetinná čísla. Navíc není pravda, že by všichni v antice chápali číslo pouze jako míru. Příkladem buď Platón a jeho abstraktní pojetí čísla (viz kapitola 2.2). S čím však souhlasím, je, že matematici ve starověkém Řecku pracovali s přirozenými čísly. Tedy zvolili si jednotku a tu pak opakovaně nanášeli, avšak nedělili jí. Pro antiky bylo tedy mezi čísly 4 a 6 jen jedno číslo, pro nás je zde čísel nekonečně mnoho. Navíc jestliže staří Řekové chápali číslo jako míru/délku, pak pro ně bylo těžké si představit třeba iracionální číslo π.

Jak jsem se zmínila v předešlé kapitole, v antice nastal problém při určování vztahu mezi délkami strany čtverce a délkou diagonály. Tedy staří Řekové pracovali s přirozenými čísly, a pokud narazili na nějaký problém, kde jim přirozená čísla nestačila, tak tento problém opustili. Zajímavé ovšem je, že v této době v Egyptě již dávno pracovali třeba se zlomky (viz kapitola 2.1.). R. Descartes (17. století) pohled na číslo změnil. Podle Spenglera, pro něj nepředstavovalo číslo už míru, ale abstraktní bod, bod, který má určitou polohu v prostoru (2010, s. 79). Díky tomu mohl tedy propojit obrazovou matematiku (geometrii) s aritmetikou a s algebrou (viz kapitola 2.5).

Pro pythagorejce bylo číslo natolik důležité, že ho považovali za podstatu všeho. Důkazem může být údajný Pythagorův výrok: „Vše je číslo“ (Bentley, 2013, s. 29). Číslo pro pythagorejce bylo odpovědí pro pochopení světa, odpovědí na podstatu života. Například číselný znak 1 byl pro pythagorejce symbolem „mateřského lůna, původu všeho života" (Spengler, 2010, s. 86). Na toto pojetí se však v dnešní době pohlíží nedůvěřivě a nemálo lidí se tomuto pojetí dokonce vysmívá. Důkazem je číslo 42, které se objevilo ve sci-fi románu *Stopařův průvodce po Galaxii* od D. Adamse, jako odpověď na základní otázku života a vesmíru. I já se přikláním k názoru, že odpovědí na všechno nemůže být číslo. Avšak je pravda, že matematika se skrývá za téměř veškerými lidskými poznatky a zkoumanými odvětvími.

Zajímavým pojetím čísla je Kantovo pojetí. I. Kant (1724–1804) rozdělil vědění na *a priori* (nutné, všeobecně platné) a *a posteriori* (získané ze zkušeností) a matematické poznání zařadil do první skupiny (Spengler, 2010, s. 67). Kant ovšem mezi oběma skupinami nastolil ostrou hranici, neuvažoval možnost prolínání. A proto se dá vyvodit, že nepovažoval vliv kultury na matematiku za něco podstatného. Jelikož tím, že je něco všeobecně dáno se říká i to, že to je pro všechny lidi identické. K obdobnému názoru dospěl i Spengler (2010, s. 67). Kant tedy matematiku blíže nespecifikuje a chápe ji jako původní, ničím nepodmíněné vědění a podobně číslo chápe jako základní pojem. K tomuto názoru se přiklání i Spengler, který říká, že: „…volím číslo, jež leží v základu veškeré matematiky jako naprosto daný element" (2010, s. 64).

Chápání pojmu číslo se nemění pouze v průběhu historie a v rámci sociokulturního kontextu, jak jsem poukázala výše, ale mění se i vzhledem k jednotlivci. Pod pojmem číslo si jen někteří odborníci v dnešní době vybaví kvaterniony. Mnoho obyvatel západního světa si představí čísla reálná, avšak nemalé procento lidí skončí ve své představě u čísel celých či dokonce přirozených. Rozložení chápání čísla se liší v rámci kultury, ale i v rámci prostředí, ve kterém se lidé nachází. Ve velkých městech najdeme zajisté více lidí, kteří o pojmu kvaternion slyšeli. Naopak na vesnici nás nemůže překvapit, že většina lidí si vystačí s celými nebo přirozenými čísly. V životě většiny lidí totiž dochází k redukci toho, co se naučili v průběhu školní docházky na základní či střední škole a co poté běžně používají. Z tohoto důvodu je nutné si udělat alespoň stručný přehled o číselných oborech.

3.1.1 Číselné obory

Číselných oborů je několik, avšak jejich počet zajisté není konečný. Jak se společnost myšlenkově a technologicky vyvíjí, otevírají se dveře dalšímu pohledu na číslo. Na školách se číselné obory učí postupně od čísel přirozených až po čísla komplexní. Jak uvádí Polák, tento postup je téměř analogický historickému vývoji čísla (2008, s. 53). Každý číselný obor může být definován různě. Pro porovnání jsem vybrala dva autory, Poláka a Bartsche, ze kterých budu definice čerpat.

Prvním číselným oborem jsou přirozená čísla. „Přirozeným [nezáporným celým] číslem nazýváme kardinální číslo konečné množiny“ (Bartsch, 2006, s. 103). Tedy Bartsch definuje přirozená čísla tzv. shora, jelikož používá pojem celé číslo. Nesleduje tedy historický vývoj. Číselné obory se rozšiřují v průběhu historie, jak se mění potřeby a poznání společnosti. Což otevírá dveře dalším číselným oborům. Historie nám ukazuje, že někteří šli od přirozených čísel přes zlomky a až poté na racionální a celá čísla (např. staří Egypťané) a některé cesty naopak vedly od přirozených čísel na celá čísla a dále přes zlomky na racionální čísla. Avšak historicky byla přirozená čísla používána dříve než celá čísla. Naopak Polák uvádí daleko jednodušší definici: „Čísla 1, 2, 3, … se nazývají přirozená čísla“ (2008, s. 55).

Dalším oborem jsou celá čísla. „Obor celých čísel obsahuje přirozená čísla (celá kladná čísla), nulu a celá záporná čísla (–1, –2, –3, …, tj. čísla opačná k přirozeným číslům)“ (Polák 2008, s. 66). Obdobnou definici uvádí Bartsch, který uvádí pouze zápis množiny celých čísel: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (2006, s. 104). Staří Řekové si však vystačili s přirozenými čísly (viz kapitola 2.2), se zápornými čísly nepočítali. Naopak v Číně již ve 2. století př. n. l. záporná a kladná čísla rozlišovali. Přestože jsou celá čísla pokročilejší a dovolují nám počítat více příkladů, přechodem k nim se i leccos zkomplikuje. Nejtypičtějším příkladem je odčítání, které nám sice dovoluje od sebe odečíst libovolná dvě celá čísla, ale při odčítání dvou záporných čísel se již můžeme dostat do kladných. Dále přechodem od přirozených k celým číslům ztrácíme schopnost modelace na primitivních situacích. Řekneme-li, jsou 3 stupně, a pohybujeme se v celých číslech, musíme zajisté dodat, zda jsou 3 stupně pod nulou nebo nad nulou. Je tedy důležité uvádět vztah k nějakému pevně dohodnutému nulovému bodu. Z toho vyplývá, že postupem ke složitějším číselným oborům se něco zvýhodní, ale něco i zkomplikuje.

„Racionální číslo je každé reálné číslo, které lze zapsat ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde p je celé číslo a q je přirozené číslo“ (Polák, 2008, s. 67). Polákova definice buduje představu o racionálním čísle opět tzv. shora. Navíc nepřipouští, aby číslo $\frac{2}{-3}$ bylo racionálním číslem. Proto je zde definice Bartsche přesnější: „Podílem racionálních čísel p, q $(q \neq 0)$ nazýváme racionální číslo r, pro něž platí $p = rq$, a píšeme $p : q$ nebo ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, popř. p/q“ (2006, s. 105).

Co však Polák i Bartsch definují obdobně je obor reálných čísel. „Množina reálných čísel je rozšířením množiny racionálních čísel o všechna tzv. iracionální čísla…“ (Bartsch, 2006, s. 106). Polák navíc dodává pár příkladů iracionálních čísel. S iracionálními čísly měli problém staří Řekové (viz 1. krize matematiky kap. 2.2). Naopak Babylóňané podle dochované tabulky určili $\sqrt{2}$ se správností na 5 desetinných míst, avšak ani oni s iracionálními čísly běžně nepočítali. K iracionálním číslům se nejvíce přiblížil al-Kashi s jeho určením čísla π s přesností na 16 desetinných míst (viz kapitola 2.4).

Nutností též bylo přejít k oboru komplexních čísel. Bartsch uvádí podrobnou definici, kde definuje i operace na množině komplexních čísel. Pro představu nám však postačí Polákova definice: „K oboru reálných čísel se připojí takové číslo i, pro které platí $i^2 = -1$. Toto číslo se nazývá imaginární jednotka. Každý z výrazů tvaru $z = x + yi$, kde x, y jsou reálná čísla, se nazývá komplexní číslo v algebraickém tvaru…“ (Polák, 2008, s. 103). Právě díky komplexním číslům umíme dobře popsat pohyb v rovině.

U komplexních čísel však číselné obory nekončí. Přestože Polák i Bartsch další číselné obory nezmiňují. Obdobně jiné číselné obory ve své populárně naučné knize neuvádí Adler (1972, s. 48–55). Dalším číselným oborem, který však byl objeven, jak píše Vokřínek, již roku 1843, jsou kvaterniony (s. 2). Definici kvaternionů již nebudu uvádět, jelikož je složitá a pro práci nepodstatná. Přestože byly kvaterniony objeveny již v 19. století, až nyní, ve 21. století, se začínají dostávat do podvědomí. I tak je však znalost kvaternionů určena pro odborníky a běžní občané se s nimi třeba nikdy nesetkají. Důvod je prostý, kvaterniony je již velice těžké si představit a v normálním životě se moc často neuplatňují. Avšak ani u kvaternionů číselné obory nekončí. S vývojem společnosti vzniká potřeba dalšího rozvoje čísla a kdo ví, kolik známých číselných oborů zde bude za 100 či 200 let. Důkazem může být i stálá diskuze matematiků, zda zlomky jako takové netvoří specifický číselný obor.

3.2 Model čísla

„Model chápeme jako metodologický prostředek k tomu, abychom se vyznali v situaci“ (Hejný, Kuřina, 2001, s. 106). Dalo by se říci, že model je výsledkem procesu zjednodušení reality nebo dosud používaných modelů. Model je nositelem klíčových informací, avšak může obsahovat i nadbytečné informace. Podoba modelu závisí na jeho autorovi, jelikož každý autor zahrne do modelu jevy a informace, které jsou pro něj osobně podstatné. Tyto informace už však nutně nemusí být podstatné pro ostatní pozorovatele. To platí i pro model čísla. Důležité je, aby modely určené pro komunikaci obsahovaly znaky, které jsou srozumitelné celé komunitě. Tato srozumitelnost může být produktem tradice, přesvědčování nebo přejmutí z jiné kultury.

Hejný a Kuřina rozlišují dva typy modelů: separovaný a univerzální (2001, s. 106–110). „Separované modely jsou reprezentanty obecného pojmu. Separované modely čísla 3 jsou 3 jablka, 3 knoflíky…“ (Hejný, Kuřina, 2001, s. 106). Etapu separovaných modelů pojmu Hejný a Kuřina vymezují jako etapu hledání a etapu univerzálních modelů jako „etapu nalézání výsledků, nalézání společné podstaty komunity separovaných modelů i jejich vzájemné souvislosti… Separovaný model má charakter ukázky, univerzální model představuje obecný návod algoritmus, vzorec, graf…“ (Hejný, Kuřina, 2001, s. 108). Příkladem separovaného modelu tedy může být situace, kdy dítě dostane za úkol spočítat: *na stole je 5 jablek, 2 jablka odebereme, kolik jablek je na stole,* a dítě jablíčka postupně spočítá. Nutným dalším krokem, jak uvádí Hejný a Kuřina, je, aby dítě přeneslo již známou situaci na situaci novou a odlišnou (2001, s. 107). Tedy aby si dítě vytvořilo vazbu mezi dalšími podobnými úkoly např.: *ve třídě je 5 žáků, 2 žáci odejdou. Kolik žáků je ve třídě?* Až později přejde dítě k univerzálním modelům. Univerzálními modely v tomto případě mohou být, jak píše Hejný a Stehlíková, prsty, kuličky počítadla…(1999, s. 64). Dalším stupněm pak bude propojení s univerzálním modelem: $5 - 2 = 3$. Existuje mnoho modelů čísla. Modelem čísla 3 jsou 3 jablka ale i 3 knoflíky (viz výše). Avšak ne všechny modely jsou vhodné pro všechna čísla.

Jak uvádí Hejný a spol., základním modelem přirozeného čísla je počet předmětů (2004, s. 331). Modelem čísla 4 tedy mohou být čtyři kamínky, čtyři čárky nebo i čtyři židle. Je však zapotřebí rozlišovat mezi modelem a zápisem. V historii bylo běžné, že zápis čísla představoval i jeho model. Například číslo III mělo dvě roviny. Byl to jednak zápis, ale i model. V dnešní době je model blíže realitě, je to jeden z reprezentantů. Za jiný model můžeme považovat čtyři puntíky a za jiný čtyři prsty, ani jedno ale není zápis. Zápis je už nějaká dohoda. Zápisem můžou být arabské číslice (3, 4…), avšak tyto symboly nejsou v žádném případě modelem, je to pouze jakási dohoda. Model zde můžeme pouze uměle vytvořit, například máme-li číslo 14, tak za model můžeme vzít jeden kamínek (jedna jednotka vyššího řádu) a čtyři větvičky (čtyři jednotky nižšího řádu).

Avšak jak píše Hejný a spol., model počtu předmětů už nemůžeme využít u záporných celých čísel (2004, s. 331). Pro množinu celých čísel musíme tedy najít jiný model. Pro sčítání a odčítání záporných čísel Hejný mimo jiné uvádí „model panáčka pochodujícího na číselné ose“ (1990, s. 87). Rendl a Vondrová kromě číselné osy navíc zmiňují model teploměru a platební bilance (2013, s. 81, 129). Jiné modely se využívají pro zlomky (racionální čísla).

Za univerzální modely zlomků Hejný považuje „model tyče/úsečky, model koláče/kruhu a model čokolády (obdélník nakreslený na čtverečkovaném papíře)“ (1990, s. 69, 76–77). Model koláče jako velice rozšířený model a žáky velice oblíbený uvádí i Rendl a Vondrová (2013, s. 76, 130). Pro reálná čísla Hejný rozlišuje dva modely: „aritmetický model – množina všech čísel a geometrický model – číselná osa“. Přičemž geometrický model považuje za přehlednější (1990, s. 91). Navíc Rendl a Vondrová uvádí, že geometrický model se mimo jiné dá použít i pro odvození či ověření vztahů (2013, s. 93). Můžeme tedy říci, že k číslu jako takovému existuje více modelů. Avšak nejčastěji používaným modelem ve školním prostředí nadále zůstává číselná osa.

Záleží však, z kterého číselného oboru čísla na číselné ose modelujeme. Pro modelaci přirozených čísel nám postačí polopřímka. Čísla zobrazíme jako jednotlivé izolované body. Model čísla ovšem také závisí na tom jakého čísla a v jaké roli to dané číslo je. Například pro model přirozeného čísla v roli počtu mi postačí zobrazit izolovaný bod na číselné ose. Jestliže mám ale číslo jako operátor změny, tak mi číselná osa nestačí. Mám-li například na ose zobrazený bod 2 a chci ho zvětšit o 3, tak zvětšení o 3 můžu znázornit třemi obloučky nad osou a výsledkem bude opět izolovaný bod 5. Avšak operátor změny jsem nanesla nad osu. Tedy číslo v roli operátora změny má jiný charakter než číslo v roli počtu.

S přidáním celých čísel se již dostáváme na přímku, avšak stále to jsou izolované body (jednorozměrný prostor). Přidáme-li zlomky a racionální čísla, bude se číselná osa stále zahušťovat, avšak stále zde zůstanou volná místa. Tohoto problému se dotkli již pythagorejci (viz 1. krize matematiky kap. 2.2).

Postoupíme-li k popisu roviny, použijeme například dvě osy na sebe kolmé (kartézský systém). Pomocí dvojice reálných čísel již umím popsat polohu jakéhokoli bodu v rovině (dvojrozměrný prostor). O dimenzi výše mohu pomoci trojice reálných čísel popsat bod v prostoru (trojrozměrný prostor) atd.

S rozvojem vědy se však zjišťuje, že číslo může figurovat v libovolně rozměrném prostoru. Tyto vícerozměrné prostory však vytváří modely, které neodpovídají tomu, co si naše hlava dovede představit. A právě proto většina lidí skončí se svojí představivostí u trojrozměrného prostoru a někteří dokonce jen u dvojrozměrného. Ze stejného důvodu u trojrozměrného prostoru pravděpodobně skončili i staří Řekové. Navíc pochopení vícerozměrných prostorů není určitě nutností a většina lidí to jednoduše nepotřebuje. Avšak s rozvojem algebry se ukazuje, že některé problémy je výhodné převést do vícerozměrných prostorů, vyřešit je tam a až poté je převést zpět do nižších prostorů. Tyto složitější modely jsou určeny jen části společnosti, která to potřebuje a která jim rozumí. Jelikož číselné obory, které se vyvinuli později, člověk běžně nepoužívá. Naopak přirozená čísla jsou součástí každodenního života většiny lidí, a proto jsou součástí i té dané kultury. Čím sofistikovanější číselný obor totiž mám, tím více se vzdaluji praxi té většiny. Složitější číselné obory tedy nabývají spíše toho mezinárodního kulturního povědomí mezi jenom částí společnosti.

Modelů čísla může být nepřeberné množství, ale kulturní vzorce v dané kultuře preferují ty modely, které obyvatelé dané kultury užívají nejčastěji, což závisí například i na historickém vývoji, pracovní náplni většiny – tedy i na nejvíce užívaném číselném oboru (viz kapitola 3.1.1). Historie ukazuje za klíčové přirozené číslo v roli počtu a jeho příslušné modelování související s tím, co měl uživatel nejčastěji na dosah tak, aby to bylo funkční v komunikaci, nebránilo práci, případně obraně. Z těchto důvodů se ukázalo modelování čísel na prstech rukou vhodným způsobem (viz kapitola 4). Jak uvádí Hejný a Kuřina: „Prsty běžně slouží jako univerzální model pro první počítání“ (Hejný, Kuřina, 2001, s. 108). „Prvním počítáním“ však Hejný a Kuřina pravděpodobně myslí proces, kdy se malé děti učí počítat. Avšak prsty jako univerzální model slouží lidem po celý život a v některých kulturách je tento model nezbytnou součástí matematiky (viz názvy čísel v rozdílných kulturách – kapitola 4).

3.3 Slova a symboly

„Je zde veliký rozdíl mezi matematickým pojmem, zápisem tohoto pojmu pomocí matematického symbolu a slovem popisující tento pojem“ (Lakoff, 2000, s. 49). Při pracování s čísly je tedy důležité, jak toto číslo zapíšeme slovy, jak symbolem a jak tento symbol vyslovíme. *Jedna*, *dva*, *tři* je zápis čísel našeho mluveného slova. Čísla však zapisujeme i pomocí symbolů 1, 2, 3. Vidíme-li napsáno *jedna* nebo symbol 1 vyslovíme „jedna“. Avšak pro symbol 1 existuje mnoho pojmenování v různých jazycích. Češi pravděpodobně vysloví „jedna“, Francouzi „un“ a Angličané „one“. Proto souhlasím s Ascher, že symbol 1 nepředstavuje mluvené slovo, které se v rozdílných jazycích liší, ale myšlenku schovávající se za slovem (1991, s. 15). Nepotřebujeme vidět ani *jedna* ani 1, abychom vyslovili „jedna“. Vše spočívá pouze v myšlence. Navíc se symbol 1 dá zapsat i jako I, nebo $\bar{\alpha}$ a pořád představuje tu samou myšlenku.

Zajímavé je, že ne všechny jazyky mají odlišené pojmenování pro číslici a pro samotné číslo. V češtině představuje slovo „jednička“ pojmenování číslice a slovo „jedna“ už samotné číslo v roli počtu. Kdežto například v angličtině neexistuje pojmenování pro číslici 1. Pro zdůraznění, že se myslí 1 jako grafický symbol, se v angličtině řekne „number one“ (tedy „číslice/číslo jedna“). Navíc je-li v češtině číslo v roli počtu, tak se neříká například „jedno jablko“, ale řekne se „jablko“. Početnost totiž plyne ze singuláru. Naopak u jazyků, které mají člen, je člen současně nositelem početnosti (toho „jedna“) a je nutnou součástí. Například neurčitý člen ve francouzštině „un/une“ může znamenat „nějaký“ ale také „jedna“ („une pomme“ – „nějaké/jedno jablko“) a podle kontextu se pozná, co má dotyčný na mysli. Kdežto v češtině stačí říct „jablko“ a hned je zřejmé, že je jenom jedno.

Myšlenka je však často podstatnější než pojmenování čísla. Důkazem je i fakt, že v některých kulturách mají názvy jen pro malá čísla (třeba jen do 5). Jak píše Barrow, kmen Botokudů z Brazílie má slova pro čísla od 1 do 4. Vyšší číslovky označují slovem „velmi hodně“ a zároveň si ukazují na vlasy, aby vyjádřili, že větší počet už nelze jednoduše spočítat (2000, s. 42). Stejně jako počet vlasů na hlavě. Obdobně, jak uvádí Kaslová, v jazyce paici na Nové Kaledonii se veliké číslo označí slovem znamenající „listy na stromě“ (2013, s. 60).

Je třeba si také uvědomit, že ne všechny kultury symboly čísel zaznamenávají. Některé kultury nemají ani písmo. Jak se pak v takových kulturách počítá? Zaprvé mluvené slovo má drtivá většina obyvatel Země. Zadruhé mnoho kultur vynalezlo svůj počítací mechanismus. Ať už se bavíme o systému „counting rods“ ve staré Číně nebo jak uvádí Ascher důmyslný systém uzlového písma Inků tzv. kipu (1991, s 16–26). Zatřetí modelování čísel na prstech je dovedností, která se vyskytuje v mnoha kulturách (viz kapitola 4).

Při počítání je velice důležité, v jaké soustavě se pohybujeme. Mnoho kultur využívá desítkovou soustavu, například i uzlové písmo Inků je založené na této soustavě. Vyskytují se však kultury, kde používají soustavy jiné. Jazykem, kde se názvy číslovek opírají o dvacítkovou soustavu, je například jazyk Nahuatl používaný v centrálním Mexiku. Jak uvádí Ascher, 36 se v tomto jazyce řekne jako $20 + (15 + 1)$, 41 jako $(2 \times 20) + 1$, 221 jako $[(10 + 1) \times 20] + 1$ atd. (1991, s. 8). Avšak i v některých evropských jazycích najdeme dodnes náznaky jiné soustavy. Příkladem jsou francouzské názvy číslovek, kde se dodnes vyskytují čísla založená na dvacítkové soustavě. Ve francouzštině se například 80 řekne „quatre-vingts“, tedy 4×20.

Je velice rozšířeným názorem, že počítání v desítkové soustavě je pro lidi přirozené vzhledem k počtu prstů. Avšak v rozdílných kulturách to vidí jinak. Jak uvádí Ascher, kmen Yuki žijící v Kalifornii považuje za logickou svoji soustavu se základem osm, právě vzhledem k počítání na prstech. Jelikož pro tento kmen je určující počet prostorů mezi prsty (1991, s. 9), tedy 4 na každé ruce.

4 Modelování na prstech

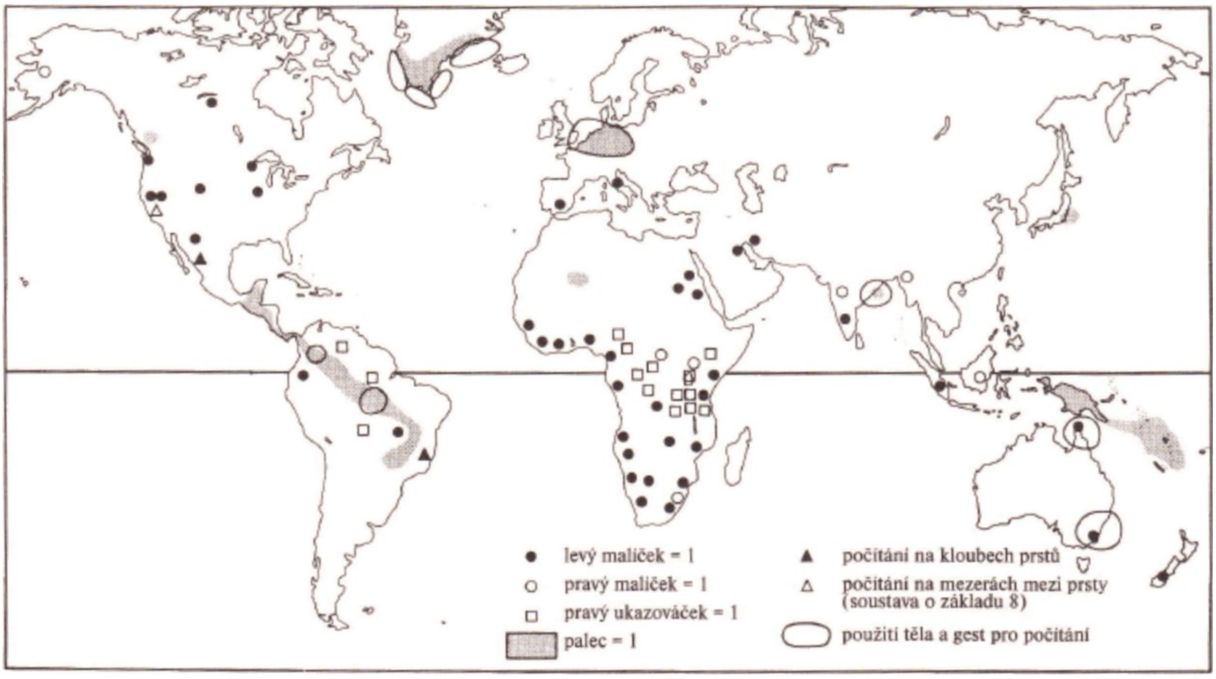
Modelování na prstech je jedním z nejjednodušších způsobů, jak modelovat čísla. Hejný a Kuřina nazývají prsty „přirozeným aritmetickým modelem“ (2010, s. 107). Díky prstům se již malé děti v mateřské škole naučí základní číslovky. Avšak prsty k počítání nepoužívají pouze děti. Složitější počítání na prstech, kdy se pomocí prstů násobí například dvě dvojciferná čísla, využívají pro urychlení počítání i odborníci. Jak píše Barrow, nedá se s určitostí říct „kdy ani jak tato početní metoda začala“ (2000, s. 51). Předpokládá se však, že gestikulace doprovázela počítání od nepaměti.

4.1 Rozdílnost modelování v různých kulturách

Počítání na prstech se v různých kulturách liší. Navíc některé kultury k počítání využívají i jiné části těla. Jak píše Koval, v řeči kmene Tamanaků na řece Orinoko znamená „celá ruka“ číslo 5, „obě ruce“ je 10, „celá noha“ znamená 15, „jeden člověk“ je 20 a „dva lidé“ označuje 40. Navíc pokud chce Tamanak říct 6, řekne „jeden prst od druhé ruky“ (1969, s. 8). Obdobné pojmenování čísel používají i obyvatelé Nové Kaledonie v jazyce paici. Všechny prsty používá k počítání i kmen sibiřských Čukču. Jak píše Depman, ke spočítání 128 sobů ve stádě bylo zapotřebí 7 lidí (1973, s. 9). Barrow dále uvádí, že lidé, kteří žili na ostrovech Torresova průlivu, používali ještě v 19. století k počítání celé tělo. Pro ně znamenaly prsty pravé ruky čísla od 1 do 5. Zápěstí znamenalo 6, loket 7, rameno 8, hruď 9, levé rameno 10, levý loket 11 a pomocí prstů na levé ruce došli až k číslu 17. Dále začali počítat na levém malíčku u nohy, který znamenal 18 a přes všechny prsty na noze, kotník, koleno, bok a po pravé straně zase zpátky dospěli až k číslu 33 (2000, s. 52).

V některých kulturách se tedy k počítání využívá celé tělo, ale základ tvoří prsty na rukou. Mohlo by se zdát, že tedy počítání na prstech ruky je pro všechny stejné. Opak je ale pravdou. Již v minulé kapitole jsem se zmínila o kmenu Yuki, jejichž počítání se odvíjí od mezer mezi prsty. Častější rozlišností v počítání na prstech je ale pořadí, ve kterém se prsty ohýbají nebo zvedají a od kterého prstu se začíná (viz obr. 3). Z obrázku je například patrné, že v Africe je velice rozšířené, že vztyčený levý malíček znamená 1.

Obr. 3: Počítání na prstech ve světě



Zdroj: Barrow, 2000, s. 54

Přestože pro nás v České republice je typické, že 1 značí vztyčený jeden prst a 5 je otevřená celá ruka, v jiných kulturách to může být naopak. U indiánského kmene Navahů nazývají čísla od 1 do 5 takto:

1 = „konec je ohnutý" (tedy malíček je ohnutý)

2 = „ještě jeden je ohnutý" (teď je ohnutý prsteníček)

3 = „prostřední je ohnutý" (teď je prostředníček ohnutý)

4 = „pouze jeden zbývá" (teď ohni ukazováček, takže zůstává pouze palec)

5 = „má ruka je vyčerpaná"

(Barrow, 2000, s. 56)

Z příkladu je tedy patrné, že čísla na prstech modelují obráceně, než je pro nás typické, prsty postupně ohýbají. Navíc ohýbání prstů kopírují i slova pro jednotlivé číslovky. Obdobně číslovky nazývali i indiáni patřící do kmene Zuniů:

1 = töpinte – „ten [prst], kterým se začíná"

2 = kwilli – „zvednutý spolu s předchozím"

3 = kha'i – „prst, který dělí [ruku] na stejné části"

4 = awite – „všechny prsty [ruky] zvednuté až na jeden"

5 = öpte – „úplný počet [na ruce]"

6 = topalïk'ye – „další přidaný k tomu, co už bylo spočítáno"

7 = kwillik'ya – „dva přidané a zvednuté s ostatními"

8 = khailïk'ya – „tři přidané a zvednuté s ostatními"

9 = tenalïk'ya – „všechny až na jeden zvednuté s ostatními"

10 = ästem'thila – „všechny prsty"

11 = ästem'thila topayä'thl'tona – „zvednuté všechny prsty a jeden navíc" (Bentley, 2000, s. 17).

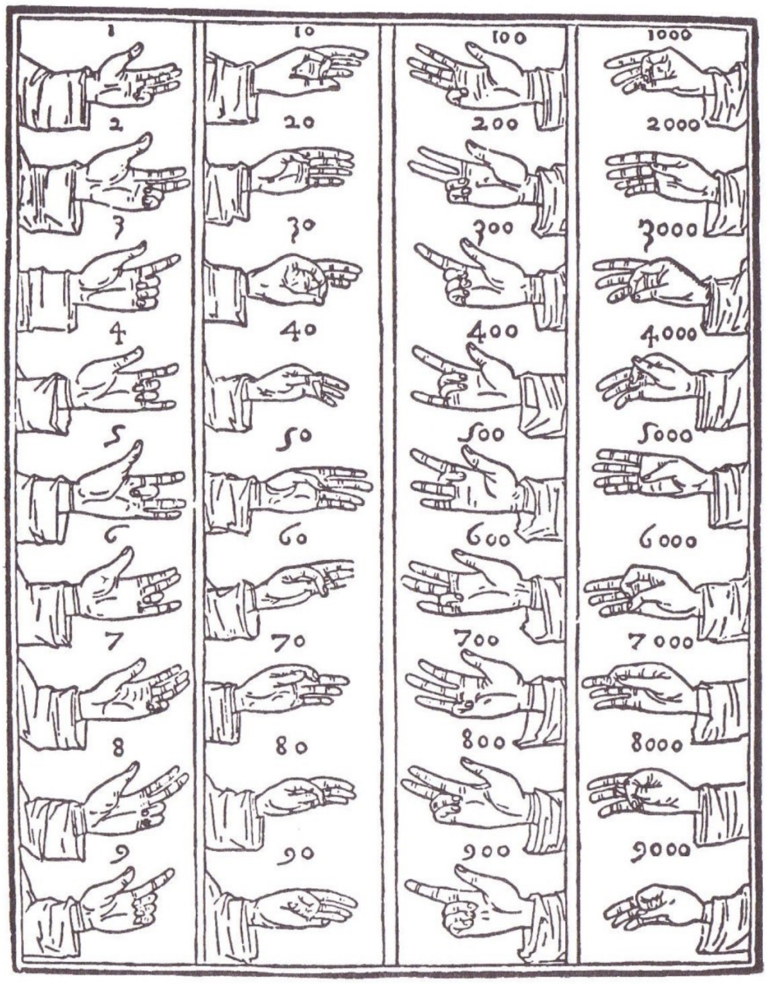
Avšak je patrné, že Zunité na rozdíl od Navahů prsty postupně zvedají. Pro odlišné modelování číslovek na prstech ovšem nemusíme chodit pouze do Ameriky.

Zulové jsou africkým národem žijící převážně v jižní Africe. Jejich názvy číslovek jsou také provázány na modelování čísel na prstech. Jak píše Zaslavsky, v zulštině se například 1 řekne „nye", což znamená „stav být sám" a na prstech levé ruky se zvedne malíček (1999, s. 47). Zulové tedy modelují čísla na prstech od malíčku stejně jako Navahové, akorát prsty zvedají, nikoliv jako Navahové, kteří je pokrčují. Avšak přejdou-li Zulové k druhé ruce, začínají na ni modelovat od palce. Vycházejí totiž z polohy rukou dlaněmi od řešitele, palci k sobě. Tedy jak uvádí Zaslavsky, číslo 6 vymodelují jako 5 prstů zvednutých na levé ruce a pravý palec k tomu (1999, s. 47). Další odlišností je, že v některých afrických jazycích názvy čísel a i jejich modelování vychází z tendence vše rozdělit na stejné části. Jak dále tvrdí Zaslavsky, dobrým příkladem je jazyk Ekoi, používaný v Kamerunu. Číslo 3 se v jazyce Ekoi řekne „esa", 4 je „eni", 6 se vysloví „esaresa" (3 + 3) a 7 se řekne „eniresa" (4 + 3). Přičemž, při modelování čísla 6 se na každé ruce zvednou 3 prsty a při modelování čísla 7 se zvednou 4 prsty na jedné a 3 prsty na druhé ruce (1999, s. 48).

4.2 Počítání na prstech v minulosti

Jak jsem se zmínila v předešlé kapitole, vznik využívání prstů k počítání nelze jednoznačně určit. Pravděpodobně již ve starověkém Římě se žáci na prstech učili malou násobilku. Tento systém počítání ve své knize uvádí Koval, avšak bez bližšího uvedení zdroje (1969, s. 20). Dochovaly se také ilustrace, které potvrzují, že se na prstech v minulosti počítalo. Na prstech rukou se přitom zobrazovala veliká čísla daleko přesahující číslo 5 (příp. 10). Jedním z dochovaných záznamů počítání na prstech je záznam vytvořený anglickým benediktinským mnichem B. Venerabilisem (672–735). Z jeho schématu můžeme vyčíst, že na prstech rukou zvládl zobrazit čísla až do 9 000 (viz obr. 4). Barrow však píše, že B. Venerabilis byl schopen ukázat čísla až do 100 000 tím, že prsty ukazoval na odlišené části těla (2000, s. 56). Navíc stejně jako výše zmíněný kmen Navahů, začíná B. Venerabilis ohýbáním malíčku.

Obr. 4: Návod pro počítání na prstech od B. Venerabilise, nakreslené 1772 J. Leopoldem.

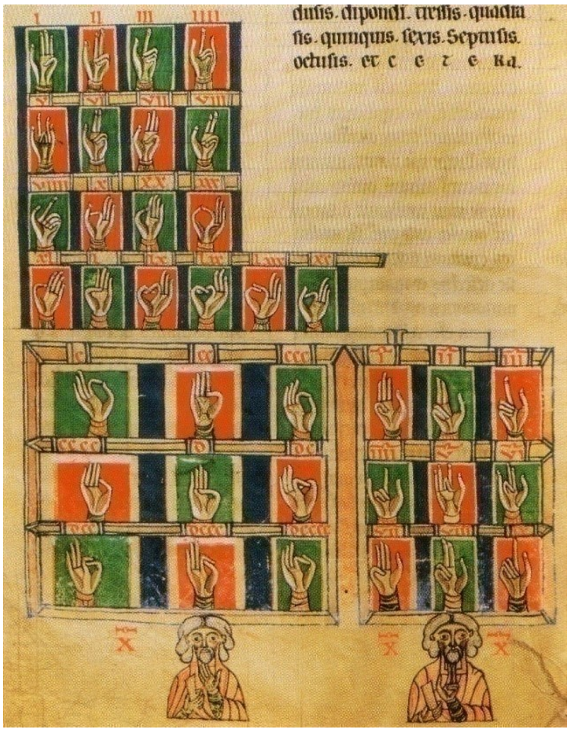


Zdroj: Barrow, 2000, s. 55

Prstovým počítáním se zabýval i německý teolog R. Maurus (780–856) ve svém spise *De Computo*. Čísla 1–10 znázorňuje stejně jako B. Venerabilis až na to, že B. Venerabilis prsty ohýbá pouze v prostředním kloubu, kdežto R. Maurus ohýbá celé prsty (viz obr. 5). Výjimkou je číslo 6, které R. Maurus znázorňuje téměř shodně s číslem 8. Výrazně se pak liší znázornění čísla 20 a 40. Pro znázornění čísel od 100 výše používá R. Maurus pravou ruku stejně jako B. Venerabilis, avšak znázornění stovek a tisíců se výrazně liší. B. Venerabilis modeluje stovky stejně jako jednotky. Naopak u R. Maura můžeme najít podobu mezi modelováním stovek a desítek. Tisíce se u B. Venerabilise ukazují stejně jako desítky, kdežto

R. Maurus znázorňuje tisíce na pravé ruce stejně jako jednotky na levé. Výjimku u něj tvoří modelování čísla 6 a 6 000.

Obr. 5: Návod pro počítání na prstech od R. Maura ze spisu *De Computo*



Zdroj: Bentley, 2013, s. 15

4.3 Nedávné výzkumy

V posledních letech bylo provedeno mnoho výzkumů, které potvrdily odlišnosti v počítání na prstech v jednotlivých kulturách. Lindemann, Alipour a Fisher (2011) provedli výzkum, kde sledovali odlišnosti v modelování čísel na prstech mezi jedinci z Blízkého východu (Íránci) a ze Západu (Evropané a Američané). Podle jejich výsledků Íránci ve většině případů začínali počítat na pravé ruce a číslo 1 znázorňovali zvednutým malíčkem. Tedy systém podobný Zulům, kteří ovšem začínají na ruce levé (viz kapitola 4.1). Naopak Evropané a Američané podle výzkumu preferovali počítání na levé ruce a palec pro ně znázorňoval 1. Avšak Sato a Lalain (2008) provedli výzkum na francouzské populaci a z výsledků vzešlo, že většina respondentů používala pro modelování čísel 1–5 pravou ruku a pro čísla 6–10 ruku levou. V roce 2017 provedli Liutsko, Veraksa a Yakupova výzkum na španělské a ruské populaci. Výsledkem bylo, že jak u Španělů, tak u Rusů bylo častější začínat modelovat na pravé ruce. A nejčastějším případem bylo modelování čísel od palce.

Z výzkumů tedy nevyplývá jednoznačný závěr. Dalo by se říci, že Evropané preferují modelování čísel na pravé ruce, což ovšem vyvrací výzkum Lindemanna a spol. (2011). Bude tedy muset být provedeno ještě mnoho výzkumů, aby se mohl učinit jednoznačný závěr a určit, co jaké kultury preferují. Jednoznačného výsledku však pravděpodobně nebude možné dosáhnout, jelikož souhlasím s Ascher, která tvrdí, že díky rozšíření dominantních kultur po celém světě tu v současné době prakticky není kultura, která by byla původní, nezměněná, neovlivněná (1991, s. 2). Nejpůvodnější kultury proto budeme moci hledat pouze u domorodých kmenů v Americe či v Africe, kterých se ovlivnění dominantními kulturami týká nejméně (viz kapitola 4.1).

4.4 Modelování čísel na prstech u dětí v mateřských školách

V návaznosti na předchozí kapitoly vycházím z toho, že s modelováním čísel na prstech rukou se děti setkávají již v útlém věku (většinou v mateřské škole, někdy i dříve). V tomto věku ještě nejsou ovlivněny převládající kulturou ve školách, ale nejčastěji úzkým okolím, jako je rodina. Modelování čísla však není, co do způsobu, opravováno. Opravy se týkají pouze počtu prstů. Nástupem na základní školu, kde se začíná matematika vyučovat, dochází případně k unifikaci ovlivňované učiteli, ostatními dětmi a v neposlední řadě vlivem západní kultury, která převládá v českém vzdělávání (viz kapitola 1). Právě proto jsme provedla šetření na dětech v předškolním věku, kdy je jejich modelování ovlivněno převážně jejich domácím zázemím. Sledování proběhlo na dvou různých pražských státních mateřských školách, na všech dětech, které byly zrovna přítomny. Zúčastnilo se 52 dětí ve věku 3–6 let, z toho bylo 18 dívek a 34 chlapců.

Zadání bylo jednoduché. Děti jsem si jednotlivě zvala k sobě a postupně jsem jim dala za úkol ukázat na prstech čísla 1, 5, 3, 2 a 4. Toto pořadí jsem vybrala proto, aby nedocházelo k ovlivňování modelování předchozím číslem. Navíc bylo zapotřebí mezi každou ukázkou čísla dát ruce zpátky podél těla, aby pro každé číslo byla stejná výchozí pozice. Zkoumala jsem: a) zda děti ukazují čísla na levé či pravé ruce, b) které prsty mají vztyčené, c) jestli otáčejí dlaň k přijímači (ke mně) nebo k vysílači (k sobě). Výsledky jsem si zaznamenávala do předem připravené tabulky.

Celkem 39 dětí ukázalo číslo 1 zvednutým palcem na pravé ruce. 10 dětí zvedlo palec na levé ruce a 3 děti zvedly ukazováček na pravé ruce.

Číslo 5 (zvednutím všech prstů) ukázalo 8 dětí na pravé ruce dlaní k sobě, 33 dětí na pravé ruce dlaní ke mně, 4 děti ukázaly 5 na levé ruce dlaní k sobě a 7 dětí na levé ruce dlaní ke mně.

Číslo 3 modelovala většina dětí z palce, ukazováčku a prostředníčku, 16 dětí použilo pravou ruku dlaní k sobě, 24 dětí pravou ruku dlaní od sebe, 3 děti vymodelovaly číslo 3 na levé ruce dlaní k sobě a 4 děti levou rukou dlaní ke mně. Další 3 děti vymodelovaly číslo 3 pomocí ukazováčku, prostředníčku a prsteníčku na levé ruce dlaní ke mně. Jedno dítě použilo malíček, prsteníček a prostředníček pravé ruky dlaní k sobě. Dokonce jedno dítě použilo malíček, prsteníček a palec pravé ruky dlaní ke mně.

Číslo 2 vymodelovalo 41 dětí pomocí palce a ukazováčku. Z toho 13 dětí použilo pravou ruku dlaní k sobě a 23 dětí dlaní ke mně. 1 dítě použilo levou ruku dlaní k sobě a 4 děti levou ruku dlaní ke mně. Celkem 11 dětí vymodelovalo číslo 2 vztyčeným ukazováčkem a prostředníčkem, z toho 3 děti použily levou ruku dlaní k sobě. 7 dětí takto vymodelovalo číslo 2 na pravé ruce dlaní ke mně a 1 dítě dlaní k sobě.

Číslo 4 vymodelovalo pomocí skrčeného palce celkem 45 dětí, 15 dětí vymodelovalo číslo 4 na pravé ruce dlaní k sobě a 23 dětí dlaní ke mně. Levou ruku použilo 7 dětí, z toho 2 dlaní k sobě a 5 dlaní ke mně. Navíc 7 dětí vymodelovalo číslo 4 skrčeným malíčkem na pravé ruce, z toho 6 dětí dlaní ke mně a 2 děti dlaní k sobě. Vše jsem pro přehlednost zanesla do tabulky (viz tab. 3).

Sečteme-li všechny jednotlivé modelace, tedy počet dětí vynásobíme počtem modelových čísel, vyjde nám, že bylo celkem provedeno 260 modelací, z toho ve 214 případech byla použita pravá ruka a jen ve 46 případech ruka levá (aniž bychom zkoumali, kdo je levák a kdo pravák). Ve 139 případech byla dlaň nasměrována k přijímači a v 69 případech směřovala dlaň k vysílači, tedy v poměru 2:1, nepočítáme-li modelování čísla 1, které většina dětí ukázala zvednutým palcem, klouby prstů směřující ke mně. Pokud bychom mohli zobecňovat (což na malém vzorku 52 dětí nelze), pak bychom řekli, že v našem kulturním prostředí je obsaženo modelování čísel na pravé ruce a spontánní otáčení dlaně k přijímači, tedy dlaň slouží jako prostředek komunikace.

Tab. 3.: Výsledky modelování čísel na prstech u dětí ve školce

Modelované číslo	**Použitá ruka** pravá (P), levá (L)	**Zvednuté prsty**	**Pozice dlaně** k sobě (V), ke mně (P)	**Počet dětí**
1	P	palec	-	39
	L	palec	-	10
	P	ukazováček	-	3
5	P	všechny	V	8
	P	všechny	P	33
	L	všechny	V	4
	L	všechny	P	7
3	P	pal., uk., pros.	V	16
	P	pal., uk., pros.	P	24
	L	pal., uk., pros.	V	3
	L	pal., uk., pros.	P	4
	L	uk., pros., prst.	P	3
	P	pros., prst., mal.	V	1
	P	pal., prst., mal.	P	1
2	P	pal., uk.	V	13
	P	pal., uk.	P	23
	L	pal., uk.	V	1
	L	pal., uk.	P	4
	L	uk., pros.	V	3
	P	uk., pros.	P	7
	P	uk., pros.	V	1
4	P	ohnutý palec	V	15
	P	ohnutý palec	P	23
	L	ohnutý palec	V	2
	L	ohnutý palec	P	5
	P	ohnutý malíček	P	5
	P	ohnutý malíček	V	2

Sledujeme-li stabilitu modelování, lze konstatovat, že 43 dětí volilo k modelování vždy jen jednu ruku, avšak 9 dětí střídalo ruce, aniž bych odkryla příčinu výměny. Například jedno dítě vymodelovalo čísla 1 a 3 na levé ruce a čísla 5, 2 a 4 na ruce pravé. Někdy děti vymodelovaly číslo dlaní k sobě a až poté otočili dlaň ke mně. Dalo by se tedy říct, že jakmile si dítě bylo jisté, že má číslo vymodelováno správně, otočilo dlaň k přijímači. Avšak tato míra jistoty nebyla více pozorována. Obdobně nebylo zkoumáno, zda dítě zvedá prsty postupně, či všechny naráz. Z pohledu úspěšnosti modelace většina dětí vykazovala jistotu, nad modelací nepřemýšlela, model tvořila většinou během několika sekund. Zajímavosti je, že jedno dítě mi po zadání úkolu: ukaž na prstech číslo 3, zvedlo palec a ukazováček levé ruky. Po chvíli jsem se ho zeptala, zda to jsou doopravdy tři. Dítě tedy svůj výsledek opravilo a k již zvednutým prstům přidalo ještě prostředníček. Nabízí se ovšem varianta, že dítě počítalo počet ohnutých prstů a tedy mělo výsledek správně napoprvé. Možné to je, jelikož jak jsem již v minulých kapitolách zmínila, v některých kulturách počítají ohnuté prsty a nikoli zvednuté. Dítě by tedy vymodelovalo číslo 3 stejně jako B. Venerabilis, R. Maurus (viz kapitola 4.2) nebo Navahové (viz kapitola 4.1). Vzhledem ale k tomu, že mi dítě ostatní čísla vymodelovalo zvednutými prsty, počítám, že se pouze spletlo. Avšak i takovéto ojedinělé případy je třeba brát v potaz.

Nejfrekventovanější reakcí v šetření bylo: číslo 1 modelováno na pravé ruce vztyčeným palcem, číslo 5 vztyčením všech prstů na pravé ruce dlaní k příjemci komunikace, číslo 3 vztyčením palce, ukazováčku a prostředníčku na pravé ruce dlaní k příjemci, číslo 2 pomocí palce a ukazováčku opět na pravé ruce dlaní k příjemci a číslo 4 vztyčením všech prstů pravé ruky kromě palce dlaní k příjemci.

5 Čísla ve znakovém jazyce

Doteď jsme se zabývali pouze kulturami, kde lidé modelují čísla na prstech a ještě k tomu pro ně mají pojmenování. Existuje ovšem případ, kdy se člověk musí spoléhat pouze na modelaci čísel na prstech. Tímto případem je vyjádření čísel ve znakové řeči. Jak tvrdí Fulka, znakový jazyk je „plně rozvinutý jazykový systém…, který nejenže nevyžaduje, ale obvykle dokonce vylučuje spolupřítomnost mluveného jazyka“ (2017, s. 9). Jak dále uvádí Fulka, hluchota by se neměla chápat jako deficit, ale jako „kulturní a jazyková rozdílnost“ (2017, s. 112). A právě proto, že se znakový jazyk dá považovat za projev kultury, rozhodla jsem se popsat, jakým způsobem se v komunikaci prostřednictvím znakování modelují čísla a vše zahrnout do této práce.

Znakový jazyk je velice komplexní systém. Je velice rozšířenou domněnkou, že znakový jazyk je stejný pro všechny lidi na světě. Opak je pravdou. Jak píše Komůrková, znakový jazyk se liší „stát od státu“ (2014). Navíc jak uvádí Vysuček, ve znakovém jazyce je mnoho tzv. „inkorporovaných znaků“ (splynutí dvou znaků v jeden). Tedy například „dva roky se nevyjádří samostatným znakem pro číslovku 2 a samostatným znakem pro rok, ale jakousi jednou složeninou obou znaků“ (2007). Pro práci však postačí, když níže uvedu znaky pro samotné číslovky od 1 do 5, a to jednak v českém znakovém jazyce a poté pro porovnání v jazyce americkém. Přičemž znaky pro číslovky jsem získala z webu: ruce.cz/slovnik.

Číslovky v českém a americkém znakovém jazyce je možné modelovat na kterékoli ruce. Většinou se uvádí pojem dominantní ruky (tedy pro praváky pravá, pro leváky levá), proto dále nebudu uvádět, o kterou ruku se jedná. V českém znakovém jazyce se číslo 1 vymodeluje zvednutým palcem, číslo 2 zvednutým palcem a ukazováčkem a číslo 3 se vymodeluje palcem, ukazováčkem a prostředníčkem. Číslo 4 se ukáže otevřením všech prstů kromě palce a číslo 5 se vytvoří otevřením všech prstů. Všechna čísla 1–5 se modelují dlaní k sobě.

V americkém znakovém jazyce se číslo 1 ukáže vztyčeným ukazováčkem, číslo 2 se předvede zvednutým ukazováčkem a prostředníčkem. Čísla 3, 4 a 5 se ukazují stejně jako v českém znakovém jazyce.

Pozor se musí dávat na pohyby ruky. Pro čísla od 1–5 se pouze ruka zvedne a ukáže počet prstů. Pokud bychom však chtěli ukázat čísla 20, 30 atd. v českém znakovém jazyce, ruka se přiblíží k posluchači. Udělá se tedy jakýsi pohyb od těla ven. V americkém znakovém jazyce se naopak ukáže znak pro dané číslo dlaní od sebe a po ukázání se ruka zavře.

Obdobně jsou zcela rozdílné znaky pro čísla od 6 do 10. V českém znakovém jazyce se pro tato čísla využívají obě ruce, kdežto v americkém znakovém jazyce se používá ruka jedna.

Zajímavé je, že znak pro číslo 1 a 2 se výrazně liší v mnohých kulturách. Stejně jako v českém znakovém jazyce se čísla 1 a 2 modelují například i ve znakovém jazyce francouzském, německém a chorvatském. Naopak ve znakovém jazyce italském, ruském, tureckém, japonském, španělském i čínském se čísla 1 a 2 modelují stejně jako v jazyce americkém.

Srovnáme-li spontánní modelování čísel u hluchoněmých s reakcemi dětí v mém šetření (viz kapitola 4.4), dojdeme k závěru, že většina dětí (49) vymodelovala číslo 1 tak, jak by se ukázalo i v českém znakovém jazyce. Pouze 3 děti ukázaly číslo 1 zvednutým ukazováčkem, tedy stejně jako v americkém znakovém jazyce. Číslo 2 vymodelovalo 41 dětí stejnými prsty, jako se modeluje v českém znakovém jazyce a 11 použilo americký způsob. Avšak porovnáme-li volbu prstů při modelování čísel ve znakovém jazyce se systémem modelování od B. Venerabilise a R. Maura (viz kapitola 4.2), nenajdeme zde pro čísla 1-5 žádnou podobnost.

6 Etnomatematika v době inkluze

„Jako inkluze se označuje společné vzdělávání dětí včetně těch, které mají speciální potřeby, ve spádových školách“ (Polanská, 2018). Jak dále píše Polanská, od září 2016, kdy se upravil způsob financování, má již každá škola nárok na podporu od státu v plné výši (2018). Od roku 2016 se tedy ve větší míře setkávají ve společných třídách děti s různým zdravotním postižením, děti nadané, ale i děti cizinců. Zkrátka se nyní ve třídách společně učí děti z různých sociálně-kulturních prostředí. A právě proto je téma etnomatematiky a antropomatematiky důležitější než kdy jindy.

V rámci rostoucího počtu odlišných kultur zastoupených v jedné třídě je velice důležité, aby učitelé změnili svůj přístup k vyučování (viz kapitola 1). V současné době je spíše výjimkou, kdy se sejde jednotná třída, ve smyslu aby všechny děti pocházeli ze stejného sociálně-kulturního prostředí. Z tohoto důvodu se situace ve třídě mění. Žáci již na problém nenahlížejí všichni jednotně a může se objevovat spousta odlišných názorů a někdy může docházet i ke konfliktům. Učitelé na tento nový jev musí být připraveni. Inkluze však s sebou nepřináší pouze problémy. Jak píše Kaslová: „Jinak se k danému tématu staví žáci vyrůstající v naší kultuře, jinak děti přistěhovalců, což je jednak obohacením pro všechny přítomné, jednak ukazuje, jak vlastní zkušenost dítěte zasahuje do procesu učení“ (2013, s. 56). Díky množství rozdílných názorů, samozřejmě korigovaných učiteli, si jednotlivý žáci mohou obohatit své znalosti a rozšíří svůj pohled na danou tématiku (viz kapitola 1).

V rámci práce jsem se snažila ukázat některé odlišnosti ve vnímání matematiky různými kulturami. Mnohé může být přínosem v době inkluze. Je třeba začít již historií matematiky. V dnešním školství se u probírání historie matematiky na základních a středních školách klade důraz na řeckou historii matematiky. Samozřejmě chápu problém nedostatku prostoru pro začlenění více historie do vyučovacích hodin. Avšak je-li historie matematiky v hodinách přítomna alespoň v malé míře, měly by v historii figurovat rozdílné národy, které přispěly k rozvoji matematiky. Tedy neklást důraz pouze na starověké Řecko. Zajisté by začlenění například „counting rods“ (viz kapitola 2.3) zpestřila výuku matematiky. Obdobně zajímavé by zajisté bylo v prvních třídách poukázat na fakt, že jiné národy modelují čísla na prstech zcela odlišně, např. kmen Navahů (viz kapitola 4.1).

Vlivem inkluze však budou učitelé více vystavování střetu jednotlivých kultur. Šance, že by se český učitel setkal ve třídě s žákem z indiánského či afrického kmene je mizivá, avšak například děti pocházející z amerického prostředí do našich škol chodí běžně. Jak jsem ukázala v šetření (viz kapitola 4.4), děti z českých mateřských škol mají tendenci modelovat čísla na prstech stejným způsobem, jako jsou čísla ukazována v české znakové řeči. Není tedy od věci se domnívat, že americké děti to budou mít obdobně. Znalost rozdílů mezi českým a americkým modelováním čísel tedy může učitelům značně ulehčit práci, a to nejenom při práci se sluchově postiženými žáky.

Častěji střetávat se budou nejenom kultury, ale i sociální prostředí. V minulosti se rodiny s dětmi z venkova ve veliké míře stěhovaly do měst, v dnešní době je trend opačný. Ať tak či tak, rodiče dětí žijících na venkově budou mít častěji jiné zaměstnání, než rodiče žijící ve velikých městech, a taktéž v mnohých případech rozdílné vzdělání. Děti těchto rodičů se doma budou setkávat například s jinými číselnými obory (viz kapitola 3.1.1). Pro učitele bude tedy u některých žáků obtížnější vysvětlit důležitost znalosti některých číselných oborů, protože se s nimi doma vůbec nesetkávají, jelikož u rodičů žáků došlo k redukci znalostí číselných oborů a dalších nabytých vědomostí (viz kapitola 3.1). Z hlediska etnomatematiky je toto třeba brát v úvahu. Učitelé si musí být vědomi, že dochází ke konfliktům mezi učiteli a rodiči, jelikož se různí jejich představy o tom, co je pro žáky důležité. Bývá občas obtížnější vysvětlit rodičům, proč by se žáci měli učit např. komplexní čísla, než vlastním žákům. Toto tedy může způsobovat nedorozumění v tom, co po žácích chce učitel a to může vést i k názorům žáků nebo rodičů, že něco ve škole je zbytečné. Rozdíly mezi prostředími jsou totiž významné.

Budoucí učitelé si musí uvědomit, že nástupem do praxe nebude docházet pouze ke střetům s žáky a s jejich rodiči. Bude také docházet ke střetu mezi tím, co se učitelé učili na vysokých školách a mezi tím, co skutečně žáky budou učit. Bohužel se často stává, že člověk, který vystudoval určitý obor a není pro něj adekvátní místo, může mít pocit zbytečnosti, protože jeho zúžený kulturní kontext není kompatibilní s kontextem, ve kterém se nachází. Tedy pro učitele to znamená, že nejde jen o žáky v inkluzi a jejich rodiče, ale je nutné najít ten střed mezi tím, co vím já a co učím a tím, jak se redukovala představa u některých rodičů nebo nebyla rozvinuta.

Větší výzvou jsou pro učitele samozřejmě žáci jiných národností. Žáci a rodiče pocházející z kulturních prostředí mimo centrální Evropu mohou mít zcela jiné požadavky na to, co by se mělo učit v hodinách matematiky, ať už co se týká historie matematiky nebo procentuálního zastoupení jednotlivých matematických disciplín (aritmetika, geometrie…). Alespoň základní znalostí jednotlivých kultur si tedy učitel značně usnadní práci a předejde tak i možným konfliktům nejenom s rodiči.

Je zřejmé, že každý učitel nemá možnosti si potřebné informace nastudovat sám. Právě proto tu je etnomatematika. Ideálním postupem by bylo, aby se nejprve sami učitelé seznámili s etnomatematikou a poté seznámili s etnomatematikou i své žáky. Oba kroky by zajisté byly pro všechny zúčastněné přínosem (viz kapitola 1).

Závěr

Práce měla tři cíle. Prvním cílem bylo vyhledat a shromáždit informace o etnomatematice se zaměřením na přínos, kterým může v oblasti modelování čísel být. Myslím si, že první cíl jsem splnila, jelikož hned v první kapitole vysvětluji pojem etnomatematika a seznamuji čtenáře s jejími možnými cíli, které se však u různých odborníků liší. Navíc celá bakalářská práce je koncipována tak, aby vždy ukázala na konkrétních příkladech, jak se daná problematika liší v závislosti na kultuře, ve které se nachází. Ve druhé kapitole, kde se věnuji historii, popisuji, co kteří matematici považovali za důležité, čím se zabývali. V návaznosti na to ve třetí kapitole ukazuji, jakými číselnými obory se jednotliví matematici v historii zabývali. Celá čtvrtá kapitola je založena na rozdílnosti modelování čísel v různých kulturách. V páté kapitole uvádím, že i znakový jazyk se liší v závislosti na kultuře. Tedy každá kapitola práce popisuje, že matematika se liší v závislosti na dané kultuře, tedy přesně to, na co poukazuje etnomatematika.

Druhým cílem bylo propojit historii matematiky s kulturním kontextem, ve kterém model čísla nacházíme. Použila jsem rešeršní činnost a srovnávací analýzu, přesto se domnívám, že tento cíl jsem splnila jen částečně, jelikož přesné propojení historie s konkrétními kulturami by vyžadovalo hlubší výzkum vývoje historie matematiky, což jak jsem si v průběhu práce uvědomila, nebylo to nejpodstatnější, čeho měla tato práce dosáhnout. Přesto se však ve třetí kapitole snažím propojit znalost číselných oborů s vývojem historie matematiky.

Třetím cílem bylo vysvětlit, proč by se učitelé měli o toto téma zajímat v době inkluze. Tento cíl jsem z mého pohledu splnila, jelikož v průběhu celé práce popisuji kulturní rozdílnosti, se kterými se učitelé právě díky inkluzi mohou stále častěji setkávat. Inkluzi je věnována celá poslední kapitola.

Součástí této práce bylo šetření na 52 dětech mateřských škol. Výsledky splnily má očekávání, jelikož i na takto malém vzorku se ukázaly veliké rozdílnosti v modelování čísel na prstech. I když toto šetření nebylo hlavní cílem práce, tak to obohatilo tuto část a pokud bych mohla zobecňovat, pak bych řekla, že v našem kulturním prostředí je obsaženo spontánní otáčení dlaně k přijímači a modelování čísel na pravé ruce. Pro práci by zajisté bylo přínosné zapojit do šetření daleko více dětí a soustředit se, aby mezi subjekty bylo větší zastoupení dětí z kultur mimo centrální Evropu. Dalším možným rozšířením šetření by bylo zkoumat míru jistoty, s jakou čísla na prstech děti modelují. V tomto druhu výzkumu je obrovský potenciál, jelikož nic podobného ještě nebylo významně sledováno.

V průběhu psaní práce jsem si uvědomila, jak je téma etnomatematiky rozsáhlé. Etnomatematika se nezabývá pouze vývojem historie a čistou matematikou, ale má přesahy například do užívaných komunikačních nástrojů, jako je například gestika, matematická symbolika, jazykověda. Dále jsem zjistila, jak moc důležité a hlavně nezbytné je rozšířit povědomí o tomto tématu mezi učitele.

Práce změnila můj pohled na okolí a na výuku matematiky. Z počátku jsem považovala za „nutné zlo", že studuji z více zdrojů, porovnávám, zda se autoři shodují či rozchází v určitých názorech. Avšak později jsem si uvědomila, že mě toto studium obohacuje. Díky tomuto studiu se nejenom dozvídám něco nového, co jsme ve výuce nebrali, ale poskytuje mi to cenné inspirační momenty a nové myšlenky. Najednou se zajímám, proč a z jakého důvodu to určitý autor napsal, z jakého důvody lidé kolem mě modelují čísla na prstech ruky atd. Zjišťuji, že lidé z odlišných kulturních prostředí skutečně nahlíží na problémy různě a je tedy třeba tyto odlišnosti dále studovat. I z těchto důvodů bych se ráda o toto téma zajímala i nadále.

Seznam použitých informačních zdrojů

Tištěné zdroje

ADLER, Irving. *Čísel hra kouzelná*. Praha: Horizont Praha, 1972.

ASCHER, Marcia. *Ethnomathematics: A Multicultural View of Mathematical Ideas*. California: Wadsworth Publishing Company, 1991. ISBN 0-412-98941-7. (vlastní překlad)

BARROW, John D. *Pí na nebesích: o počítání, myšlení a bytí*. Přeložili Naďa STEHLÍKOVÁ a Antonín VRBA. Praha: Mladá fronta, 2000. Kolumbus. ISBN 80-204-0855-X.

BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce*. Vyd. 4., V nakl. Academia 1. (reprint). Praha: Academia, 2006. ISBN 80-200-1448-9.

BENTLEY, Peter J.. *Kniha o číslech: tajemství čísel a jejich vliv na náš svět*. Čestlice: Rebo, 2013. ISBN 978-80-255-0649-3.

DEPMAN, Ivan. *Svět čísel: vyprávění o matematice*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973. Kostka.

DRÁBEK, Jaroslav. *Světonázorové problémy v matematice-II. díl*. Plzeň: Pedagogická fakulta v Plzni, 1985. Učební texty vysokých škol.

FAUVEL, John a Jeremy GRAY. *The History of mathematics: a reader*. Milton Keynes: Open University, 1987. ISBN 0-333-42791-2. (vlastní překlad)

FAVILLI, Franco. Cultural Intermediation for a Better Integration in the Classroom: The Role of the Ethnomathematics Programme. In: AHMED, Afzal, Honor WILLIAMS a Jean Marie KRAEMER. *Cultural Diversity in Mathematics (Education): CIEAEM 51*. Chichester: Horwood Publishing Limited, 2000, s. 165-168. ISBN 1-898563-68-3. (vlastní překlad)

FULKA, Josef. *Když ruce mluví: gesto a znakový jazyk v dějinách západního myšlení*. Praha: Filozofická fakulta Univerzity Karlovy, 2017. Trivium. ISBN 978-80-7308-747-0.

HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. ISBN 80-08-01344-3.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál, 2001. Pedagogická praxe. ISBN 80-7178-581-4.

HEJNÝ, Milan a Naďa Stehlíková. *Číselné představy dětí*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 1999. Kapitoly z didaktiky matematiky. ISBN 80-86039-98-6.

HEJNÝ, Milan, Jarmila NOVOTNÁ a Naďa VONDROVÁ. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3.

HODGKIN, Luke Howard. *A history of mathematics: from Mesopotamia to modernity*. Oxford: Oxford University Press, c2005. ISBN 0-19-852937-6. (vlastní překlad)

JOSEPH, George Gheverghese. *The crest of the peacock: non-European roots of mathematics*. London: Penguin, 2000. ISBN 0-14-027778-1. (vlastní překlad)

KASLOVÁ, Michaela. Etnomatematika a antropodidaktika matematiky v programu nadprůměrných žáků. In: ZHOUF, Jaroslav. Ani jeden matematický talent nazmar: sborník 6.ročníku konference učitelů matematiky a přírodních oborů na základních, středních a vysokých školách. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013, s. 47-65. ISBN 978-80-7290-699-4.

KOVAL, Václav. *Kamarádi čísla*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1969.

LAKOFF, George a Rafael E. NÚNEZ. *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books, c2000. ISBN 0-465-03770-4. (vlastní překlad)

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.

RENDL, Miroslav a Naďa VONDROVÁ. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013. ISBN 978-80-7290-723-6.

SPENGLER, Oswald. *Zánik Západu: obrysy morfologie světových dějin*. Přeložil Milan VÁŇA. Praha: Academia, 2010. Europa. ISBN 978-80-200-1886-1.

STRUIK, Dirk Jan. *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis, 1963. Malá moderní encyklopedie.

VOPĚNKA, Petr. *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci: souborné vydání Rozprav s geometrií*. 3. vyd. Praha: Práh, 2003. ISBN 80-7252-022-9.

Elektronické zdroje

CIMEN, O. Arda. Discussing Ethnomathematics: Is Mathematics Culturally Dependent?. In: *ERPA 2014* [online]. Istanbul – Turkey: Istanbul University, 2014, 8.6. 2014 [cit. 2018-03-24]. Dostupné z: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042814052823 (vlastní překlad)

D'AMBROSIO, Ubiratan. Ethnomathematics and Its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. *For the Learning of Mathematics* [online]. 1985, **5**(1), 44 [cit. 2018-03-23]. ISSN 02280671. (vlastní překlad)

D'AMBROSIO, Ubiratan. What Is Ethnomathematics, and How Can It Help Children in Schools?. *Teaching Children Mathematics* [online]. 2001, **7**(6), 308-310 [cit. 2018-03-23]. ISSN 10735836. (vlastní překlad)

KOMŮRKOVÁ, Tereza. On-line pomocník pro překlad do znakové řeči. In: *Národní Informační centrum pro Mladež* [online]. březen 2014 [cit. 2018-03-25]. Dostupné z: http://www.nicm.cz/on-line-pomocnik-pro-preklad-do-znakove-reci (vlastní překlad)

LINDEMANN, Oliver, Ahmad ALIPOUR a Martin H FISCHER. Finger Counting Habits in Middle Eastern and Western Individuals: An Online Survey. *Journal of Cross-Cultural Psychology* [online]. May 2011 [cit. 2018-03-24]. DOI: 10.1177/0022022111406254. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/200744217_Finger_Counting_Habits _in_ Middle_Eastern_and_Western_Individuals_An_Online_Survey (vlastní překlad)

LIUTSKO L., VERAKSA A.N. a YAKUPOVA V.A. Embodied finger counting in children with different cultural backgrounds and hand dominance. *Psychology in Russia: State of Art, Vol 10, Iss 4, Pp 86-92 (2017)* [online]. 2017, **10**(4), 86-92 [cit. 2018-03-24]. DOI: 10.11621/pir.2017.0408. ISSN 20746857. (vlastní překlad)

POLANSKÁ, Jitka. Co je to vlastně ta inkluze? Tady se dozvíte základní fakta v kostce. In: *Rodiče vítáni* [online]. 15.1.2018 [cit. 2018-03-25]. Dostupné z: http://www.rodicevitani.cz/skolstvi/specialni-vzdelavaci-potreby/vlastne-ta-inkluze-tady-se-dozvite-zakladni-fakta-kostce/

POWELL, Arthur B. a Marilyn FRANKENSTEIN. Ethnomathematics [electronic resource]: challenging eurocentrism in mathematics education / edited by Arthur B. Powell and Marilyn Frankenstein. 1997. ISBN 079143351X. (vlastní překlad)

ROSA, Milton a Daniel Clark OREY. Ethnomathematics: the cultural aspects of mathematics. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática* [online]. 2011, **4**(1), 32-54 [cit. 2018-03-23]. ISSN 20115474. (vlastní překlad)

Ruce [online]. [cit. 2018-03-29]. Dostupné z: http://ruce.cz/slovnik

SATO, Marc a Muriel LALAIN. Special issue: Original article. *Cortex* [online]. 2008, **44**(4), 393-399 [cit. 2018-03-24]. DOI: 10.1016/j.cortex.2007.08.005. ISSN 00109452. (vlastní překlad)

VOKŘÍNEK, Lukáš. *Kvaterniony a Geometrie v* R^3 [online]. [cit. 2018-03-10]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~koren/Kvaterniony.pdf

VYSUČEK, Petr. Poznáváme český znakový jazyk VI. - Specifické znaky. In: *Ruce*[online]. 26.3.2007 [cit. 2018-03-25]. Dostupné z: http://ruce.cz/clanky/190-poznavame-cesky-znakovy-jazyk-vi-specificke-znaky

WELDEANA, Hailu Nigus. Ethnomathematics in Ethiopia: Futile or Fertile for Mathematics Education?. *Momona Ethiopian Journal of Science* [online]. 2016, **8**(2), 146-167 [cit. 2018-04-07]. DOI: 10.4314/mejs.v8i2.4. ISSN 2073073X. (vlastní překlad)

ZASLAVSKY, Claudia. *Africa Counts: Number and Pattern in African Cultures*[online]. 3. Chicago: Lawrence Hill Books, 1999 [cit. 2018-03-25]. ISBN 978-1-55652-350-2. Dostupné z: https://ebookcentral.proquest.com/lib/cuni/detail.action?docID=839099 (vlastní překlad)

Jiné zdroje – přednášky

JIRÁSKOVÁ, Věra. *Filosofický diskurz I: přednášky*, zimní semestr 2015/2016. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy: Praha.

JIRÁSKOVÁ, Věra. *Filosofický diskurz II: přednášky*, letní semestr 2015/2016. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy: Praha.

SARRAZY, Bernard. O epistemologických a didaktických aspektech vztahů mezi zkušeností a znalostí: Případ matematického vzdělávání. KMDM, Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, 12. 4. 2018.