Oponentský posudek na disertační práci:

Jan Grebík
Definable graphs

Předložená disertační práce J. Grebíka sestává z pěti článků týkajících se deskriptivní teorie množin, teorie grafů a jejich souvislostí. Všech pět článků bylo napsáno teprve nedávno, lze však očekávat, že všechny budou publikovány v renomovaných mezinárodních časopisech.

První a druhý článek se týkají grafových limit, tzv. grafonů. V prvním článku, napsaném společně s dalšími čtyřmi spoluautory, je zkoumán prostor grafonů prostřednictvím w^*-topologie na prostoru $L^\infty([0,1]^2)$. Tím je zajímavým způsobem prohloubena teorie grafonů, neboť jsou nalezeny nové charakterizace konvergentních posloupností, tím i podán nový důkaz kompaktnosti prostoru grafonů, dále je ukázána souvislost s hyperprostorem w^*-kompaktních množin a zavedeno uspořádání strukturovanosti grafonů.

Ve druhém článku, jehož spoluautorem je I. Rocha, je uvažován pojem frakcionálního izomorfismu konečných grafů a jeho čtyři charakterizace. Tento pojem pak autoři zobecňují do kontextu grafonů, a dostávají tak hned pět ekvivalentních definic frakcionálního izomorfismu grafonů.

V případě třetího a čtvrtého článku je J. Grebík jediným autorem. Obě práce se týkají složitosti orbitálních ekvivalenčních relací. Ve třetím článku je použita dichotomie Kechrise, Soleckého a Todorčeviće o obarvování analytických grafů, resp. její verze pro hypergrafy. To vede k zajímavým dichotomiím pro borelovské orbitální ekvivalenční relace. Ve čtvrtém článku je pak dokázána ekvivalence některých vlastností pro borelovské orbitální ekvivalenční relace, zejména ekvivalence σ-lakunarity a bireducibility se spočetnou borelovskou ekvivalenční relací.

Konečně, v posledním pátém článku, jehož spoluautorem je O. Pikhurko, jsou dokázány výsledky o horním odhadu počtu barev, kterými je možno obarvit hrany v grafu (nebo obecněji v multigrafu) tak, aby z žádného vrcholu nevycházely dvě hrany stejné barvy. Pro konečné grafy toto řeší klasická Vizingova věta, autoři článku pak dokazují její dvě verze pro borelovské grafy s pravděpodobnostní mírou.

Předloženou práci hodnotím velmi pozitivně z hlediska rozsahu, zpracování, aktuálnosti i významu dokázaných výsledků. Převážná většina nedostatků, které jsem nalezl, se týká jen překlepů a drobných nepřesností. Autor prokazuje předpoklady k samostatné tvořivé práci.

Předložená práce jednoznačně splňuje požadavky kladené na disertační práci.

Následují některé otázky a připomínky:

(1) V důkazu Tvrzení 1.7.2 jsou nesrovnalosti. Je podezřelé, že v nerovnosti (1.34) se nijak neprojevuje faktor $2^{-(n+k)}$, jak je tomu v (1.7). V pozdější části důkazu je pak sumace $\sum_{e,f=1}^{K} \sum_{t\in\mathcal{K}_e} \sum_{p\in\mathcal{K}_f}$ ztotožněna se sumací $\sum_{t,p=1}^{q}$, k tomu je ale podle všeho třeba, aby množiny A_k byly disjunktní.

(2) Proč je borelovskost relace E_G^X postačující pro analytičnost hypergrafů $\mathcal{H}_{n+m,n}$ zavedených v Definici 3.3.4?

(3) Proč platí inkluze $\mathbb{E}_0^T \subseteq F$ na str. 94 v 8. řádku?

(4) Jak se sestrojí redukce na konci důkazu Věty 4.2.2?

V Praze, 28. 2. 2020, Ondřej Kurka