Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Michálek

Konvergence Fourierových řad v L^p prostorech

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2011

Chtěl bych na tomto místě velmi poděkovat doc. Miroslavu Zelenému, vedoucímu mé práce, za velmi vstřícný přístup, podnětné rady a za čas, který mi věnoval ke konzultacím.

Zároveň bych chtěl poděkovat svým rodičům, za to, že mě vždy podporují v mých zájmech.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 24. 5. 2011 Martin Michálek

Název práce: Konvergence Fourierových řad v L^p prostorech

Autor: Martin Michálek

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D., katedra matematické analýzy

Abstrakt: Hlavní otázkou, kterou si klademe v této práci, je, zda posloupnost částečných součtů Fourierovy řady konverguje v nějakém smyslu k funkci, z níž byla řada vytvořena. V našem případě se budeme zabývat konvergencí Fourierových řad lebesgueovsky integrovatelných funkcí a konvergenci uvažujeme ve smyslu L^p prostorů pro $p \in [1, \infty)$. Případ $p = 2$ se dá rozhodnout za použití vlastností ortogonální báze Hilbertova prostoru. Naším cílem bude analyzovat konvergenci především pro ostatní uvažovaná p. Je proto potřebné využít některé hlubší výsledky z teorie Banachových (speciálně L^p) prostorů.

Klíčová slova: Fourierovy řady, periodické funkce, L^p prostory

Title: Convergence of Fourier series in L^p spaces

Author: Martin Michálek

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: The main question of this thesis is whether the partial sums of Fourier series converge in some sense to the function from which the series was derived. In our case we will analyze the convergence of Fourier series of Lebesgue integrable functions and the convergence will be meant in the sense of L^p spaces for $p \in [1, \infty)$. The case $p = 2$ could be concluded from properties of orthogonal basis in Hilbert spaces. Our intention is to analyze the problem especially for the other $p \in [1, \infty)$. Therefore we need to use some results from the theory of Banach (particularly L^p) spaces.

Keywords: Fourier series, periodic functions, L^p spaces

Obsah

1. Základní pojmy a poznatky

V této kapitole připomeneme některé pojmy a shrneme důležitá tvrzení (především z funkcionální analýzy a teorie L^p prostorů), s nimiž budeme dále hojně pracovat.

1.1 L^p prostory

V celé této části textu značí trojice $(X, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou. Pro teorii Fourierových řad je vhodné uvažovat funkce s hodnotami v oboru komplexních čísel. Pro $p \in [1, \infty)$ označme $\mathcal{L}^p(X)$ množinu $\mathcal{S}$–měřitelných funkcí $f\colon X \to \mathbb{C}$, pro něž platí:

$$\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty,$$

kde integrál bereme v Lebesgueově smyslu.

Množina $\mathcal{L}^p(X)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem komplexních čísel vzhledem ke standardním operacím sčítání funkcí a násobení funkce komplexním číslem. Definujme zobrazení $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$ z prostoru $\mathcal{L}^p(X)$ do reálných čísel následovně:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Toto zobrazení zavádí seminormu na prostoru $\mathcal{L}^p(X)$. Vektorový prostor $\mathcal{L}^p(X)$ faktorizujeme podle podprostoru $K = \{f \in \mathcal{L}^p(X)\colon\ f = 0\ \mu \text{ skoro všude}\}$, čímž sjednotíme funkce z $\mathcal{L}^p(X)$ s nulovou seminormou do jedné třídy ekvivalence faktorprostoru. Obdržíme tak lineární prostor $\mathcal{L}^p(X)/K = L^p(X)$ s normou, kterou značíme $\|\cdot\|_{L^p(X)}$ nebo stručněji $\|\cdot\|_p$, jestliže nemůže dojít k nejednoznačnostem.

Poznámka 1.1. Ačkoliv je prostor $L^p(X)$ prostorem tříd ekvivalencí, dále v textu již nebudeme explicitně rozlišovat mezi funkcemi $f \in \mathcal{L}^p(X)$ a jim příslušnými třídami ekvivalencí $\{g \in \mathcal{L}^p(X)\colon\ f - g \in K\} \in L^p(X)$ ani mezi prostory $\mathcal{L}^p(X)$ a $L^p(X)$.

Tvrdíme-li například, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje v prostoru $L^p(X)$ k funkci $f \in L^p(X)$, myslíme tím, že posloupnost tříd ekvivalencí reprezentovaných funkcemi f_n konvergují v normě prostoru $L^p(X)$ ke třídě ekvivalence reprezentované funkcí f. Což nám o funkcích $f_1, f_2, \ldots, f$ dává informaci:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n|^p \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Píšeme-li například, že prostor všech spojitých funkcí $\mathcal{C}([0,1])$ je podprostorem $L^1([0,1])$, míníme tím podprostor tříd ekvivalencí reprezentovaných právě spojitými funkcemi.

Následující věty uvádějí nejdůležitější vlastnosti L^p prostorů. Důkazy k nim můžeme nalézt např. v kapitolách 3 a 6 knihy [3].

Věta 1.2. *Buďte* $(X, \mathcal{S}, \mu)$, p, $L^p(X)$ *a* $\|\cdot\|_p$ *jako výše. Pak prostor* $\left(L^p(X), \|\cdot\|_p\right)$ *je Banachův prostor.*

Věta 1.3. *Nechť μ je konečná míra na X. Potom prostor $S = \{s\colon s$ je jednoduchá funkce$\}$ je hustý v prostoru $L^p(X)$ pro $p \in [1,\infty)$. (Připomeňme, že s nazveme* jednoduchou funkcí*, jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$, komplexní čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a měřitelné množiny $A_1, \dots, A_n$ takové, že $s(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}(x)$.)*

Věta 1.4 (duální prostor k L^p)**.** *Nechť $1 < p < \infty$ a μ je σ-konečná míra na X. Nechť Φ je spojitý lineární funkcionál na $L^p(X)$, potom existuje právě jeden prvek $g \in L^q(X)$ (přičemž $q = \frac{p}{p-1}$) takový, že pro všechna $f \in L^p(X)$ platí*

$$\Phi(f) = \int_X fg \mathrm{d}\mu.$$

Dále budeme potřebovat některé závěry z funkcionální analýzy týkající se Banachových prostorů. Důkazy příslušných vět lze nalézt ve druhé kapitole [4]. Tam také lze nalézt definice a základní vlastnosti spojitých (omezených) lineárních operátorů a duálních prostorů.

Věta 1.5 (princip stejnoměrné omezenosti)**.** *Nechť X je Banachův prostor, Y normovaný lineární prostor a buď $\mathcal{G}$ libovolný systém spojitých lineárních zobrazení $L\colon X \to Y$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- *existuje $K > 0$ takové, že $||L|| \leq K$ pro všechna $L \in \mathcal{G}$,*
- *pro každé $x \in X$ existuje M takové, že $||Lx|| \leq M$ pro všechna $L \in \mathcal{G}$.*

Věta 1.6 (banachovsky adjungované zobrazení/duální operátor)**.** *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T\colon X \to Y$ je spojité lineární zobrazení. Označme X^*, resp. Y^* duální prostory k X, resp. k Y (prvky duálního prostoru značíme též s hvězdičkou). Definujme zobrazení $T'\colon Y^* \to X^*$ předpisem $T'(y^*)(x) = y^*(Tx)$. Potom T' je spojité lineární zobrazení a navíc mají operátory T a T' stejnou normu.*

Následující tvrzení je důsledkem úplnosti příslušných prostorů (případně Hahn-Banachovy věty). Ukazuje, že spojitý lineární operátor je již charakterizován svojí restrikcí na hustý podprostor.

Věta 1.7. *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory, M je hustý podprostor prostoru X a $T\colon M \to Y$ je omezený lineární operátor. Potom existuje právě jeden lineární operátor $\tilde{T}\colon X \to Y$ splňující $\tilde{T}(x) = T(x)$ pro $x \in M$ a $\|\tilde{T}\|_X = \|T\|_M$.*

Zobecněnou verzi následující věty můžeme nalézt v první kapitole knihy [1].

Věta 1.8 (Riesz-Thorin)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a p, q, r, je trojice koeficientů z $(1,\infty)$ splňující $p < q < r$. Buď T lineární operátor definovaný na množině jednoduchých funkcí na X, s oborem hodnot v prostoru $\mathcal{S}$–měřitelných funkcí z X do $\mathbb{C}$. Nechť existují kladné reálné konstanty M_1 a M_2, že pro všechny jednoduché funkce s na X platí*

$$\|T(s)\|_{L^p} \leq M_1 \|s\|_{L^p}$$

a

$$\|T(s)\|_{L^r} \leq M_2 \|s\|_{L^r} .$$

Potom pro všechny jednoduché funkce s na X máme

$$\|T(s)\|_{L^q} \leq M_1^{1-\theta} M_2^{\theta} \|s\|_{L^q},$$

kde

$$\theta = \frac{r(q-p)}{q(r-p)}.$$

1.2 Prostory $\mathbb{T}^n$, $L^p(\mathbb{T}^n)$ a periodické funkce

Teorie Fourierových řad se zabývá rozvojem periodických funkcí do nekonečných trigonometrických řad. V této práci budeme formulovat závěry pro periodické funkce více reálných proměnných s hodnotami v $\mathbb{C}$, potřebujeme proto zobecnit některé základní pojmy.

Množinu všech nezáporných celých čísel budeme značit $\mathbb{N}_0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ značíme symbolem $\mathbb{R}^n$ n-rozměrný euklidovský prostor s prvky $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, kde $x_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 1, \ldots, n$. Vícerozměrné proměnné budeme pro lepší přehlednost označovat tučnými písmeny. Prostor $\mathbb{R}^n$ je vzhledem ke sčítání prvků (po složkách) grupou. Na prostoru $\mathbb{R}^n$ zavádíme operaci skalárního součinu standardním způsobem: pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ definujeme $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$, dále definujeme normu prvku $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ předpisem $|\boldsymbol{x}| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Množinu všech n–tic celých čísel značíme $\mathbb{Z}^n$. Podgrupu $\{2\pi \boldsymbol{m}\colon\ \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n\}$ grupy $\mathbb{R}^n$ značíme symbolem $2\pi\mathbb{Z}^n$. Symbolem $\mathbb{T}^n$ značíme faktorgrupu $\mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$. Takže $\mathbb{T}^n$ můžeme reprezentovat grupou prvků z množiny $[0, 2\pi)^n$, na níž definujeme sčítání následovně:

$$\text{pro } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in [0, 2\pi)^n,\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \big((x_1 + y_1) \bmod 2\pi, \ldots, (x_n + y_n) \bmod 2\pi\big).$$

Na $\mathbb{T}^n$ pomocí kvocientového zobrazení $q\colon \mathbb{R}^n \to [0, 2\pi)^n$, $q(\boldsymbol{x}) = (x_1 \bmod 2\pi, \ldots, x_n \bmod 2\pi)$ přirozeným způsobem zavádíme topologii, jejíž otevřené množiny budou tvaru $q(G)$, kde G je otevřená v $\mathbb{R}^n$. Vzhledem k této topologii je prostor $\mathbb{T}^n$ metrizovatelný a kompaktní. Systém borelovských množin na $\mathbb{T}^n$ se shoduje s borelovskými množinami na $[0, 2\pi)^n$, takže se jeví přirozené zavést na $\mathbb{T}^n$ měřitelné množiny a míru stejně jako na $[0, 2\pi)^n$. Geometricky si prostor $\mathbb{T}^n$ můžeme představit jako n-rozměrný torus.

Definice. Buď $n \in \mathbb{N}$ a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Řekneme, že f je 2π-*periodická funkce*, jestliže pro všechna $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a pro libovolné $\boldsymbol{t} \in 2\pi\mathbb{Z}^n$ platí $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{t})$.

Poznámka 1.9. Veškeré důležité informace o periodické funkci získáváme ze znalosti jejích hodnot na $[0, 2\pi)^n$. Je přirozené ztotožňovat periodické funkce s funkcemi na $\mathbb{T}^n$, s nimiž budeme dále pracovat.

Standardním postupem zmíněným v oddílu 1.1 obdržíme vektorový prostor tříd ekvivalencí $L^p(\mathbb{T}^n)$ s normou $\|\cdot\|_p$.

Poznámka 1.10. Vzhledem k Větě 1.2 je $\Big(L^p(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_p\Big)$ Banachův prostor.

Pozorování 1.11. Zdůrazněme, že norma konstantní jednotkové funkce není rovna jedné:

$$\sqrt[p]{\int_{\mathbb{T}^n} 1^p \mathrm{d}\boldsymbol{x}} = \sqrt[p]{(2\pi)^n}.$$

Díky invariantnosti Lebesgueovy míry vzhledem k posunutí plyne snadno z věty o substituci následující tvrzení.

Lemma 1.12. *Nechť* $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ *a* $\boldsymbol{t} \in \mathbb{T}^n$. *Potom*

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{T}^n} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Pozorování 1.13. Buďte $p \in (1, +\infty)$ a $q = \frac{p}{p-1}$. Aplikací Hölderovy nerovnosti na funkce $f \in L^p(\mathbb{T}^n),\ g = 1 \in L^q(\mathbb{T}^n)$ dostáváme $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ a

$$\|f\|_1 \leq \sqrt[q]{(2\pi)^n}\, \|f\|_p \leq (2\pi)^n \|f\|_p .$$

Pozorování 1.14. Nechť $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$. Z definice integrálu přes $\mathbb{T}^n$, z předchozího pozorování (jež nám dává integrovatelnou majorantu) a z Fubiniovy věty plyne:

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{\mathbb{T}} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n.$$

V následujícím lemmatu zavádíme operaci, kterou nazýváme *konvoluce.* Důkazy této a dalších zde nedokázaných vět lze nalézt v knihách [1] či [2].

Lemma 1.15. *Buď* $p \in [1, +\infty)$. *Nechť* $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ *a* $g \in L^1(\mathbb{T}^n)$. *Potom funkce zadaná předpisem* $(f * g)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ *je definovaná skoro všude na* $\mathbb{T}$ *a náleží prostoru* $L^p(\mathbb{T}^n)$. *Navíc platí* $f * g = g * f$ *a*

$$\|f * g\|_p \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \|f\|_p \|g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_1 . \tag{1.1}$$

2. Fourierovy řady

2.1 Trigonometrické polynomy a sčítací jádra

Definice. Periodickou funkci $P\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ tvaru $P(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^n} a_{\boldsymbol{m}} e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}}$, kde $a_{\boldsymbol{m}} \in \mathbb{C}$, $a_{\boldsymbol{m}} \neq 0$ jen pro konečně mnoho $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n$, nazýváme *trigonometrickým polynomem.*

Značení. Množinu $\{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n : a_{\boldsymbol{m}} \neq 0\}$ z předchozí definice příslušící polynomu P budeme značit $\operatorname{sp} P$.

Trigonometrické polynomy tvoří vektorový prostor, jež budeme značit $\mathcal{T}(\mathbb{T}^n)$.

Definice. Pro $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ a $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n$ definujme *$\boldsymbol{m}$-tý Fourierův koeficient* předpisem

$$\widehat{f}(\boldsymbol{m}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Definice. Nechť $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$. Formální sumu $S[f](\boldsymbol{x}) \sim \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\boldsymbol{m}) e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}}$ nazýváme *Fourierovou řadou* funkce f.

Příklad 2.1. Buď $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$. Víme, že $|e^{i\tau}| = 1$ pro všechna $\tau \in \mathbb{R}$, navíc funkce $\boldsymbol{x} \mapsto e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}}$ náleží prostoru $L^1(\mathbb{T}^n)$. Potom z Pozorování 1.14 dostáváme:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n} e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbb{T}^n} e^{im_1x_1} \cdots e^{im_nx_n} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \\
&= \int_{\mathbb{T}} e^{im_1x_1} \mathrm{d}x_1 \cdots \int_{\mathbb{T}} e^{im_nx_n} \mathrm{d}x_n \\
&= \begin{cases} (2\pi)^n & \text{pokud } \boldsymbol{m} = 0, \\ 0 & \text{pokud } \boldsymbol{m} \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Uvažujme nyní trigonometrický polynom $P(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\operatorname{sp} P} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$. Pak pro $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n$ platí

$$\begin{aligned}
\widehat{P}(\boldsymbol{m}) &= \sum_{\boldsymbol{k}\in\operatorname{sp} P} a_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{m})\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \begin{cases} a_{\boldsymbol{m}} & \text{pro } \boldsymbol{m} \in \operatorname{sp} P, \\ 0 & \text{pro } \boldsymbol{m} \notin \operatorname{sp} P. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že Fourierovou řadou trigonometrického polynomu je opět tentýž trigonometrický polynom.

Definice. Buď $n \in \mathbb{N}$ a $N \in \mathbb{N}_0$.

- Trigonometrický polynom

  $$D_{(n,N)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^n \\ |m_j| \leq N}} e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}}$$

  nazýváme n–rozměrným *čtvercovým Dirichletovým jádrem* stupně N.

- Trigonometrický polynom

$$F_{(n,N)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(N+1)^n}\left(\sum_{k_1=0}^{N} D_{(1,k_1)}(x_1)\right)\cdots\left(\sum_{k_n=0}^{N} D_{(1,k_n)}(x_n)\right)$$

nazýváme n–rozměrným *Fejérovým jádrem* stupně N.

Poznámka 2.2. Obdobně lze zavést *kruhové Dirichletovo jádro*, jež definujeme předpisem

$$\tilde{D}_{(n,R)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^n \\ |\boldsymbol{m}|\le R}} e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}}.$$

Obě Dirichletova jádra pro $n = 1$ splývají.

Pozorování 2.3. Nechť $N \in \mathbb{N}_0$, $n = 1$ a $x \in \mathbb{T}\backslash\{0\}$, potom

$$\begin{aligned} D_{(1,N)}(x) &= \sum_{m=-N}^{N} e^{imx} = e^{-iNx}\frac{e^{i(2N+1)x}-1}{e^{ix}-1} \\ &= \frac{e^{i\frac{1}{2}(2N+1)x} - e^{-i\frac{1}{2}(2N+1)x}}{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{1}{2}x}} = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\sin(\frac{x}{2})}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Uvažujme nyní obecné $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, zafixujme $m_1 \in \{-N, -N+1, \dots, 0, \dots, N\}$, pak

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{m}\in\{m_1\}\times\mathbb{Z}^{n-1} \\ |m_j|\le N}} e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}} = e^{im_1x_1} \sum_{\substack{\boldsymbol{m}\in\{m_1\}\times\mathbb{Z}^{n-1} \\ |m_j|\le N}} e^{i(m_2,\dots,m_n)\cdot(x_2,\dots,x_n)},$$

sečteme-li předchozí výrazy přes $m_1 \in \{-N, -N+1, \dots, 0, \dots, N\}$, obdržíme

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^n \\ |m_j|\le N}} e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}} = \sum_{\substack{(m_2,\dots,m_n)\in\mathbb{Z}^{n-1} \\ |m_j|\le N}} \sum_{m_1=-N}^{N} e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}}.$$

Aplikací matematické indukce tedy můžeme získat jiné vyjádření Dirichletova jádra:

$$D_{(n,N)}(x) = D_{(1,N)}(x_1)\cdots D_{(1,N)}(x_n). \tag{2.2}$$

Dle identit (2.1) a (2.2) je čtvercové Dirichletovo jádro reálnou funkcí. Z definice zřejmě vyplývá $|D_{(1,N)}(x)| \le 2N+1$, tudíž z rovnosti (2.2) plyne jednoduchý odhad:

$$|D_{(n,N)}(x)| \le (2N+1)^n. \tag{2.3}$$

Pozorování 2.4. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $N \in \mathbb{N}_0$. Obdobně jako v předchozím pozorování lze skoro všude vyjádřit polynom $F_{(1,N)}$ ve tvaru

$$F_{(1,N)}(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\frac{N+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2,$$

tudíž $F_{(1,N)}$ nabývá pouze nezáporných reálných hodnot (pro $x = 0$ plyne nezápornost z definice).

Jednorozměrné Fejérovo jádro nabývá pouze nezáporných reálných hodnot. Použitím Příkladu 2.1 tedy dostáváme

$$\left\|F_{(1,N)}\right\|_1 = \frac{1}{(N+1)} \int_{\mathbb{T}} \sum_{k=0}^{N} D_{(1,N)}(x)\mathrm{d}x = 2\pi.$$

Počítejme

$$\begin{aligned}\left\|F_{(n,N)}\right\|_1 &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{\mathbb{T}} \left|F_{(1,N)}(x_1) \cdots F_{(1,N)}(x_n)\right| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n \\ &= \left\|F_{(1,N)}\right\|_1^n = (2\pi)^n.\end{aligned}$$

Poznámka 2.5. Fejérova jádra libovolného stupně jsou tedy stejně omezené. Ukažme si, že tuto vlastnost postrádají Dirichletova jádra. Jak později uvidíme, bude tento fakt hrát důležitou roli v otázce konvergence Fourierových řad v normě prostoru $L^1(\mathbb{T}^n)$.

Příklad 2.6 (Lebesgueovy konstanty). (Příklad je zároveň řešením cvičení 3.1.8 monografie [1]). Odhadujme normu $\left\|D_{(n,N)}\right\|_1$. Vzhledem k Pozorování 1.14 a rovnosti (2.2) z Pozorování 2.3 se stačí zaměřit na případ $n = 1$. Postupným využitím identity (2.1), sudosti Dirichletova jádra a odhadu $\sin(\frac{x}{2}) \leq \frac{x}{2}$ na intervalu $[0, \pi]$ máme

$$\begin{aligned}\left\|D_{(1,N)}\right\|_1 &= \int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{\sin(\frac{x}{2})}\right| \mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{\sin(\frac{x}{2})}\right| \mathrm{d}x \\ &\geq 4\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{x}\right| \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Poslední integrál odhadneme zdola součtem N integrálů přes intervaly délky $\frac{\pi}{N+1/2}$ (tj. integrál přes vlastní podmnožinu $[0, 2\pi]$). Následně shora odhadneme jmenovatele jednotlivých integrandů horními mezemi integrálů

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{x}\right| \mathrm{d}x &\geq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\frac{j\pi}{N+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{N+\frac{1}{2}}} \left|\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{x}\right| \mathrm{d}x \\ &\geq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{N+\frac{1}{2}}{(j+1)\pi} \int_{\frac{j\pi}{N+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{N+\frac{1}{2}}} \left|\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right| \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Mějme $j \in \{0, \dots, N-1\}$. Funkce $x \mapsto \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x$ nemění na intervalu $\left(\frac{j\pi}{N+\frac{1}{2}}, \frac{(j+1)\pi}{N+\frac{1}{2}}\right)$ znaménko, a tedy

$$\begin{aligned}\int_{\frac{j\pi}{N+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{N+\frac{1}{2}}} \left|\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right| \mathrm{d}x &= \left|\int_{\frac{j\pi}{N+\frac{1}{2}}}^{\frac{(j+1)\pi}{N+\frac{1}{2}}} \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\frac{1}{N+\frac{1}{2}}[\cos(j+1)\pi - \cos j\pi]\right| = \frac{2}{N+\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Souhrnem dostáváme

$$\left\|D_{(1,N)}\right\|_1 \geq 4\sum_{j=0}^{N-1} \frac{N+\frac{1}{2}}{(j+1)\pi} \frac{2}{N+\frac{1}{2}} = \frac{8}{\pi}\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j}.$$

Následující věta uvádí postačující podmínky k tomu, aby určitá posloupnost funkcí odvozená z funkce $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ konvergovala k f v prostoru $L^p(\mathbb{T}^n)$. Můžeme podotknout, že Dirichletova jádra dle Příkladu 2.6 nesplňují podmínku (i). Obecnější znění i s důkazem lze nalézt v první kapitole [1] (nutno poznamenat, že v citované monografii zavádí autor konvoluci bez konstanty před integrálem).

Věta 2.7. *Nechť $\{k_N\}$ je posloupnost funkcí z $L^1(\mathbb{T}^n)$, které pro všechna $N \in \mathbb{N}$ splňují podmínky*

(i) existuje konstanta $M > 0$ nezávislá na N, že

$$\|k_N\|_1 \leq M,$$

(ii) $\int_{\mathbb{T}^n} k_N = (2\pi)^n$,

(iii) pro všechna $\delta \in (0, \pi)$

$$\lim_{N\to\infty} \int_\delta^{2\pi-\delta} \cdots \int_\delta^{2\pi-\delta} |k_N(\boldsymbol{x})| \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

Potom pro libovolnou $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$, kde $p \in [1, \infty)$, platí

$$\lim_{N\to\infty} \|k_N * f - f\|_p = 0.$$

Důsledek 2.8. *Buď $p \in [1, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ a $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$. Pak*

$$\lim_{N\to\infty} \left\|F_{(n,N)} * f - f\right\|_p = 0.$$

Důkaz. Stačí ověřit, že posloupnost $\{F_{(n,N)}\}_{N=1}^\infty$ splňuje všechny tři podmínky Věty 2.7.

Podmínka (i) plyne z Pozorování 2.4.

Z definice Fejérova jádra máme pro $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^n$

$$F_{n,N}(\boldsymbol{x}) = F_{1,N}(x_1) \dots F_{1,N}(x_n),$$

a tedy použitím Fubiniovy věty a Příkladu 2.1 (případně Pozorování 2.4) dostáváme

$$\int_{\mathbb{T}^n} F_{n,N}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = (2\pi)^n,$$

z čehož plyne platnost podmínky (ii).

Dle Pozorování 2.4 platí pro $x \in \mathbb{T}\backslash\{0\}$

$$F_{n,N}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(N+1)^n} \left(\frac{\sin \frac{N+1}{2} x_1}{\sin \frac{x_1}{2}} \right)^2 \dots \left(\frac{\sin \frac{N+1}{2} x_n}{\sin \frac{x_n}{2}} \right)^2.$$

Zvolme $0 < \delta < \pi$, potom pro $j \in \{1, \dots, n\}$ obdržíme odhad

$$\int_\delta^{2\pi-\delta} \left(\frac{\sin \frac{N+1}{2} x_1}{\sin \frac{x_1}{2}} \right)^2 \mathrm{d}x_1 \leq \int_\delta^{2\pi-\delta} \left(\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 \mathrm{d}x_1 = (2\pi - 2\delta) \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Celkem

$$\int_\delta^{2\pi-\delta} \cdots \int_\delta^{2\pi-\delta} |F_{n,N}(\boldsymbol{x})| \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \frac{1}{(N+1)^n} (2\pi - 2\delta)^n \frac{1}{\sin^{2n} \frac{\delta}{2}} \to 0, \ N \to \infty,$$

a tedy i podmínka (iii) je splněna. □

Důsledek 2.9. *Buď $p \in [1, \infty)$. Množina trigonometrických polynomů je hustá v prostoru $L^p(\mathbb{T}^n)$.*

Důkaz. Stačí si rozmyslet, že pro libovolné $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ a $N \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}(F_{(n,N)} * f)(\boldsymbol{t}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\boldsymbol{m} \in \operatorname{sp} F_{(n,N)}} a_{\boldsymbol{m}} e^{i\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \sum_{\boldsymbol{m} \in \operatorname{sp} F_{(n,N)}} a_{\boldsymbol{m}} e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{t}} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

trigonometrický polynom a aplikovat předešlý poznatek. (Pro přehlednost jsme v rovnostech psali $a_{\boldsymbol{m}}$ místo $\widehat{F_{(n,N)}}(\boldsymbol{m})$). □

2.2 Konvergence Fourierových řad v normě a omezenost operátorů S_N

Hlavním zdrojem, podle něhož byly zpracovány tento následující dva oddíly, je monografie [1].

Dále se již budeme zabývat pouze konvergencí Fourierových řad v normě prostoru $L^p(\mathbb{T}^n)$. Nejprve si ovšem musíme vyjasnit, v jakém smyslu tuto konvergenci uvažujeme.

Definice. Buď $N \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, +\infty)$ a $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$. Trigonometrický polynom

$$S_{(n,N)}[f](\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n \\ |m_j| \le N}} \widehat{f}(\boldsymbol{m}) e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{2.4}$$

nazýváme *N–tým částečným čtvercovým součtem* Fourierovy řady funkce f.

Všude tam, kde $n \in \mathbb{N}$ je pevně fixované, budeme psát $S_N[f]$ místo $S_{(n,N)}[f]$ (stejnou úmluvu mějme i pro značení Dirichletova a Fejérova jádra).

Pozorování 2.10. Pro $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ můžeme N–tý částečný součet psát také ve tvaru

$$S_N[f](\boldsymbol{x}) = (D_N * f)(\boldsymbol{x}),$$

neboť

$$\begin{aligned}S_N[f](\boldsymbol{x}) &= \sum_{\substack{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n \\ |m_j| \le N}} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\boldsymbol{t}) e^{i\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})} \mathrm{d}\boldsymbol{t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\boldsymbol{t}) \sum_{\substack{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n \\ |m_j| \le N}} e^{i\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})} \mathrm{d}\boldsymbol{t} = (D_N * f)(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

Z definice částečného součtu a Fourierova koeficientu plyne linearita operátoru $S_N \colon L^p(\mathbb{T}^n) \to L^p(\mathbb{T}^n)$. Použitím předchozí identity a nerovnosti (1.1) z Lemmatu 1.15 získáme odhad

$$\|S_N[f]\|_p = \|D_N * f\|_p \le \|D_N\|_1 \|f\|_p . \tag{2.5}$$

Pro všechna $N \in \mathbb{N}_0$ konverguje integrál z funkce D_N, z čehož vyplývá omezenost operátoru S_N.

Jako v případě Dirichletova jádra, můžeme i zde uvažovat kruhovou alternativu částečných součtů

$$\tilde{S}_N[f](\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^n \\ |\boldsymbol{m}|\le N}} \widehat{f}(\boldsymbol{m}) e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}} = \left(\tilde{D}_N * f\right)(\boldsymbol{x}).$$

Definice. Buď $p \in [1, +\infty)$ a $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$. Řekneme, že Fourierova řada funkce f konverguje k f v prostoru $L^p(\mathbb{T}^n)$, jestliže platí:

$$\lim_{N\to\infty} \|f - S_N[f]\|_p = 0. \tag{2.6}$$

Poznámka 2.11. Platí-li (2.6) pro všechny $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$, budeme říkat, že *prostor $L^p(\mathbb{T}^n)$ zaručuje konvergenci v normě.* Hlavní problém, kterým se ve zbytku práce budeme zabývat, je, zda prostor $L^p(\mathbb{T}^n)$ pro $p \in [1, \infty)$ zaručuje konvergenci v normě. Uvidíme, že kromě případu $p = 1$ dostaneme na tuto otázku kladnou odpověď.

Zmínili jsme se zatím o čtvercových a kruhových částečných součtech, obdobných symetrických součtů ovšem můžeme definovat více. Je tedy na místě se ptát, zda konvergence v normě záleží na tom, jaký typ částečných součtů uvažujeme. Pokud se zajímáme pouze o případ $n = 1$, jsou všechny symetrické částečné součty shodné. Ve více dimenzích však mohou pro $p \neq 2$ existovat funkce z prostoru $L^p(\mathbb{T}^n)$, jejichž kruhové částečné součty nesplňují rovnost (2.6).

Značení. Normu lineárního operátoru $S\colon L^p(\mathbb{T}^n) \to L^p(\mathbb{T}^n)$ značíme $\|S\|_p$. Připomeňme, že je definována předpisem

$$\|S\|_p = \sup\{\|S[f]\|_p : f \in L^p(\mathbb{T}^n),\ \|f\|_p = 1\}.$$

Věta 2.12. *Nechť $p \in [1, +\infty)$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom prostor $L^p(\mathbb{T}^n)$ zaručuje konvergenci v normě, právě když existuje kladná reálná konstanta K taková, že pro všechna $N \in \mathbb{N}_0$*

$$\|S_N\|_p \le K. \tag{2.7}$$

Důkaz. Nechť prostor $L^p(\mathbb{T}^n)$ zaručuje konvergenci v normě. Volme $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ libovolně. Potom

$$\begin{aligned}\limsup_{N\to\infty} \|S_N[f]\|_p &= \limsup_{N\to\infty} \|S_N[f] - f + f\|_p \\ &\le \limsup_{N\to\infty} \|S_N[f] - f\|_p + \limsup_{N\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_p < \infty,\end{aligned}$$

tudíž

$$\sup_{N\in\mathbb{N}_0} \|S_N[f]\|_p < \infty.$$

V Pozorování 2.10 jsme ukázali omezenost operátorů S_N, můžeme tedy aplikovat princip stejnoměrné omezenosti, jež nám přesně postuluje závěr dokazované implikace.

Nechť naopak existuje $K > 0$ kladné takové, že pro všechna $N \in \mathbb{N}_0$ platí (2.7). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $K > 1$. Mějme libovolnou funkci $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Důsledku 2.9 existuje trigonometrický polynom P, pro nějž $\|f - P\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2K}$. Použitím Příkladu 2.1 dostáváme $S_N[P] = P$ pro všechna $N \geq N_0 = \max_{\boldsymbol{m} \in \operatorname{sp} P} |\boldsymbol{m}|$. Pro libovolné $N \geq N_0$ postupným využitím předešlých poznatků, linearity S_N a nerovnosti (2.7) máme:

$$\begin{aligned} \|S_N[f] - f\|_p &\leq \|S_N[f] - P\|_p + \|f - P\|_p \\ &= \|S_N[f - P]\|_p + \|f - P\|_p \\ &\leq K \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Jelikož číslo ε a funkce f byly brány libovolně, zaručuje $L^p(\mathbb{T}^n)$ konvergenci v normě. □

Poznámka 2.13. První odhad norem operátorů částečných součtů plyne z nerovnosti (2.5). V Příkladu 2.6 jsme ukázali, že normy $\|D_N\|_1$ nejsou stejně omezeny, a tedy nerovnost (2.5) nemůžeme použít k důkazu našeho ústředního tvrzení (Věty 2.21).

2.3 Konvergence Fourierových řad v $L^p(\mathbb{T})$, $p \neq 1$

V této části odvodíme stejnou omezenost operátorů S_N pro případ $n = 1$. Pokud nebude řečeno jinak, bereme $p \in (1, \infty)$.

Definice. Nechť $Q \in \mathcal{T}(\mathbb{T})$. Polynom

$$\tilde{Q}(x) = -i \sum_{m \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(m) \widehat{Q}(m) e^{imx} = -i \sum_{m \in \operatorname{sp} Q} \operatorname{sgn}(m) \widehat{Q}(m) e^{imx}$$

nazveme *konjugovaným polynomem* k polynomu Q. Operátor $Q \mapsto \tilde{Q}$ budeme nazývat *operátorem konjugace.*

Rieszovu projekci polynomu Q definujme předpisem

$$P_+[Q](x) = \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{Q}(m) e^{imx} = \sum_{m \in \operatorname{sp} Q \cap \mathbb{N}} \widehat{Q}(m) e^{imx}.$$

Poznámka 2.14 (důležitá). Z linearity operátoru $f \mapsto \widehat{f}(m)$ plyne linearita výše definovaných operátorů.

Na operátory $Q \mapsto \tilde{Q}$ a P_+ budeme nahlížet jako na operátory mezi prostory $\mathcal{T}(\mathbb{T})$ uvažované jako podprostory $L^p(\mathbb{T})$.

Lemma 2.15. *Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ a $N \in \mathbb{N}_0$. Potom*

(i) $\sum\limits_{m=-N}^{N} \widehat{f}(m) e^{imx} = e^{-iNx} \sum\limits_{m=0}^{2N} \widehat{f(\cdot) e^{iN(\cdot)}}(m) e^{imx}$, *kde $f(\cdot)e^{iN(\cdot)}$ označuje funkci $t \mapsto f(t)e^{iNt}$*

(ii) *Označme $S'_N[g](x) = \sum\limits_{m=0}^{2N} \widehat{g}(m) e^{imx}$, potom $\|S'_N\|_p = \|S_N\|_p$ pro všechna $N \in \mathbb{N}_0$.*

Důkaz. Nejprve dokažme (i). Nechť $m \in \{-N, \dots, N\}$. Počítejme

$$\begin{aligned}\widehat{f}(m) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-imt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{iNt}e^{-imt}e^{-iNt}\mathrm{d}t \\ &= \widehat{f(\cdot)e^{iN(\cdot)}}(m+N).\end{aligned}$$

Využitím předešlé rovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}&\sum_{m=-N}^{N} \widehat{f}(m)e^{imx} = e^{-iNx}\sum_{m=-N}^{N} \widehat{f}(m)e^{i(m+N)x} \\ &= e^{-iNx}\sum_{m=-N}^{N} \widehat{f(\cdot)e^{iN(\cdot)}}(m+N)e^{i(m+N)x} = e^{-iNx}\sum_{m=0}^{2N} \widehat{f(\cdot)e^{iN(\cdot)}}(m)e^{imx}.\end{aligned}$$

Pokračujme důkazem části (ii). Volme $N \in \mathbb{N}_0$ pevné. Z části (i) plyne rovnost $S_N[f] = e^{-iNx}S'_N[f(\cdot)e^{iN(\cdot)}]$. Vezmeme-li $f \in L^1(\mathbb{T})$, platí pro všechna $k \in \mathbb{Z}$

$$\left\|e^{ik(\cdot)}f(\cdot)\right\|_p^p = \int_{\mathbb{T}} \left|e^{ikt}f(t)\right|^p \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} \left|e^{ikt}\right|^p |f(t)|^p \mathrm{d}t = \|f\|_p^p. \tag{2.8}$$

Je-li navíc $\|f\|_p \le 1$, potom $\left\|e^{ik(\cdot)}f(\cdot)\right\|_p \le 1$ a z definice normy lineárního operátoru platí

$$\|S_N[f]\|_p = \left\|e^{-iNx}S'_N[f(\cdot)e^{iN(\cdot)}]\right\|_p = \left\|S'_N[f(\cdot)e^{iN(\cdot)}]\right\|_p \le \|S'_N\|_p.$$

Máme-li naopak $g \in L^p(\mathbb{T}^n)$ splňující $\|g\|_p \le 1$, potom

$$\|S'_N[g]\|_p = \left\|e^{iNx}S_N[g(\cdot)e^{-iN(\cdot)}]\right\|_p \le \|S_N\|_p.$$

Nyní stačí v obou předešlých nerovnostech přejít k supremu přes všechny funkce z $L^p(\mathbb{T})$ s normou nepřesahující 1, čehož vyplyne rovnost $\|S'_N\|_p = \|S_N\|_p$. □

Věta 2.16. *Prostor $L^p(\mathbb{T})$ zaručuje konvergenci v normě, právě když existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro každý trigonometrický polynom Q platí*

$$\|\tilde{Q}\|_p \le C\|Q\|_p. \tag{2.9}$$

Jinými slovy $L^p(\mathbb{T})$ zaručuje konvergenci v normě, právě když je operátor konjugace omezený vzhledem k L^p normě.

Důkaz. Začněme pozorováním. Z definice Rieszovy projekce plyne

$$\begin{aligned}P_+[Q] &= \frac{1}{2}(Q + i\tilde{Q}) - \frac{1}{2}\widehat{Q}(0), \\ \tilde{Q} &= -2iP_+[Q] + iQ - i\widehat{Q}(0),\end{aligned}$$

tudíž omezenost operátoru konjugace je ekvivalentní omezenosti operátoru P_+ (stačí aplikovat normu na obě rovnosti, uvědomit si, že podle definice Fourierova koeficientu a Pozorování 1.13 platí $|\widehat{Q}(0)| \le \frac{1}{2\pi}\|Q\|_1 \le \|Q\|_p$).

Přejděme k důkazu ekvivalence. Zaručuje-li $L^p(\mathbb{T})$ konvergenci v normě, potom dle Věty 2.12 existuje $K > 0$, že pro všechna $N \in \mathbb{N}_0$ je $\|S_N\|_p \le K$. Z části (ii)

Lemmatu 2.15 máme konstantou K stejně omezeny i normy operátorů S'_N. Nechť $Q \in \mathcal{T}(\mathbb{T})$, volme $N \in \mathbb{N}$ tak, aby $\operatorname{sp} Q \subset \{-N, \dots, N\}$. Potom

$$P_+[Q] = \sum_{m=1}^{N} \widehat{Q}(m) e^{imt} = S'_N[Q] - \widehat{Q}(0).$$

Opět použijeme výše uvedený vztah mezi nultým Fourierovým koeficientem a L^p–normou funkce Q a obdržíme

$$\|P_+[Q]\|_p \leq \|S'_N[Q]\|_p + \big\|\widehat{Q}(0)\big\|_p \leq (K + \sqrt[p]{2\pi})\big\|Q\big\|_p.$$

Konstanta K nezávisí na N ani na Q, takže operátor P_+ je omezený. Z pozorování uvedeného v úvodu důkazu vyplývá omezenost operátoru konjugace.

Nechť naopak existuje konstanta C taková, že pro všechny polynomy P platí (2.9). Z úvodního pozorování plyne omezenost Rieszovy projekce. Vezměme $N \in \mathbb{N}_0$, $Q \in \mathcal{T}(\mathbb{T})$ a počítejme

$$\begin{aligned}
S'_N[Q](x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{Q}(m) e^{imx} - \sum_{m=2N+1}^{\infty} \widehat{Q}(m) e^{imx} \\
&= P_+[Q] + \widehat{Q}(0) - \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{Q}(2N+j) e^{i(2N+j)x} \\
&= P_+[Q] + \widehat{Q}(0) - e^{2iNx} \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{Q(\cdot)e^{-2iN(\cdot)}}(j) e^{ijx} \\
&= P_+[Q] + \widehat{Q}(0) - e^{2iNx} P_+\big[Q(\cdot)e^{-2iN(\cdot)}\big].
\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}
\sup_{N\geq 0} \|S'_N(Q)\|_p &\leq \sup_{N\geq 0} \Big(\|P_+[Q]\|_p + \Big\|\widehat{Q}(0)\Big\|_p + \big\|P_+\big[Q(\cdot)e^{-2iN(\cdot)}\big]\big\|_p \Big) \\
&\leq (\|P_+\|_p + \sqrt[p]{2\pi})\, \|Q\|_p + \|P_+\|_p \, \|Q\|_p \leq (2C + \sqrt[p]{2\pi})\, \|Q\|_p\,,
\end{aligned}$$

kde v závěrečném odhadu využíváme též identity (2.8).

Spojité operátory S'_N restringované na hustý podprostor $\mathcal{T}(\mathbb{T})$ jsou stejně omezené. Věta 1.7 zaručuje jejich stejnou omezenost na celém $L^p(\mathbb{T})$ (rozšířením restringovaných operátorů na celé $L^p(\mathbb{T})$ již musíme obdržet operátory S'_N). Podle části (ii) Lemmatu 2.15 máme $\|S_N\|_p \leq (2C + \sqrt[p]{2\pi})$, kde C nezávisí na N. Takže podle Věty 2.12 zaručuje $L^p(\mathbb{T})$ konvergenci v normě. $\square$

Postupnými ekvivalencemi jsme tedy převedli otázku konvergence v normě na omezenost operátoru konjugace.

Lemma 2.17. *Nechť $p \in [2, \infty)$ a nechť je operátor konjugace omezený vzhledem k L^p normě. Potom je omezený i vzhledem k normě prostoru L^q, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p a q jsou sdružené exponenty).*

Důkaz. V tomto lemmatu využijeme vlastností duálních operátorů a charakteristiku z Věty 1.4. Buď $L\colon L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ jednoznačně určené spojité rozšíření operátoru konjugace a L' duální operátor k L. Ukážeme, že operátor $-L'$ se shoduje s operátorem konjugace na $\mathcal{T}(\mathbb{T})$. Z Věty 1.6 o duálním operátoru a z omezenosti operátoru L totiž vyplývá omezenost L', a tedy i $-L'$. Tudíž je-li zobrazení $Q \mapsto \tilde{Q}$ restrikcí $-L'$, musí již být omezené vzhledem k L^q normě.

Nechť $Q \in \mathcal{T}(\mathbb{T})$, potom $\tilde{Q}$ a $-L'(Q)$ reprezentují spojité lineární funkcionály na $L^p(\mathbb{T})$. Můžeme použít Větu 1.7 a ověřovat rovnost funkcionálů $\tilde{Q}$ a $-L'(Q)$ pouze na $\mathcal{T}(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$. Zvolme proto $R \in \mathcal{T}(\mathbb{T})$ a počítejme

$$
\begin{aligned}
(L'(Q))(R) = Q(L(R)) = Q(\tilde{R}) &= \int_{\mathbb{T}} Q(t)\Big(-i \sum_{m\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(m)\widehat{R}(m)e^{imt}\Big)\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{T}} \Big(-i \sum_{m\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(m)Q(t)\widehat{R}(m)e^{imt}\Big)\mathrm{d}t \\
&= -i \sum_{m\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(m) \int_{\mathbb{T}} Q(t)\widehat{R}(m)e^{imt}\mathrm{d}t \\
&= -i \sum_{m\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(m) \int_{\mathbb{T}} Q(t)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} R(x)e^{im(t-x)}\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}t \\
&= -i \sum_{m\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(m) \int_{\mathbb{T}} R(x)e^{-imx}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} Q(t)e^{imt}\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}x \\
&= -i \sum_{m\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(m) \int_{\mathbb{T}} R(x)\widehat{Q}(-m)e^{-imx}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{T}} R(x)\Big(-i \sum_{m\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(m)\widehat{Q}(-m)e^{-imx}\Big)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{T}} R(x)\Big(-i \sum_{m\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(-m)\widehat{Q}(m)e^{imx}\Big)\mathrm{d}x \\
&= (-\tilde{Q})(R).
\end{aligned}
$$

Všechny sumy mají pouze konečně mnoho nenulových členů, takže jsme mohli zaměnit sumu a integrál v rovnostech mezi 2. a 3. a mezi 6. a 7. řádkem. Záměna dvou integračních znamení mezi 4. a 5. řádkem plyne z Fubiniovy věty a spojitosti Q a R na kompaktu $\mathbb{T}$. □

Lemma 2.18. *Nechť P je trigonometrický polynom, potom existují trigonometrické polynomy $Q, R\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ splňující $P = Q + iR$.*

Důkaz. Pro libovolné $c \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{T}$, $k \in \mathbb{Z}$ a $c = a + ib$ (a,$b \in \mathbb{R}$) platí

$$
\begin{aligned}
ce^{ikt} &= (a+ib)(\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} + i\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}) \\
&= a\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} - b\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i} + i(a\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i} + b\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}) \\
&= a\cos(kt) - b\sin(kt) + i(a\sin(kt) + b\cos(kt)).
\end{aligned}
$$

Pro obecný polynom f takto provedeme rozložení každého jeho monočlenu a příslušné reálné polynomy sečteme do polynomů Q a R. □

Věta 2.19. *Buď $k \in \mathbb{N}$. Potom existuje konstanta $C_{2k} > 0$ taková, že pro všechna $P \in \mathcal{T}(\mathbb{T})$ platí*

$$\|\tilde{P}\|_{2k} \leq C_{2k} \|P\|_{2k}.$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že P nabývá pouze reálných hodnot ($P = \overline{P}$) a že navíc platí $\widehat{P}(0) = 0$. Potom

$$\tilde{P}(t) = -i \sum_{m>0} \widehat{P}(m) e^{imt} + i \sum_{m>0} \widehat{P}(-m) e^{-imt},$$

přičemž sumy obsahují pouze konečně mnoho nenulových členů. Počítejme

$$\begin{aligned}
\widehat{P}(-m) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P(t) e^{imt} \mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \overline{P(t) e^{-imt}} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \overline{\int_{\mathbb{T}} P(t) e^{-imt} \mathrm{d}t} = \overline{\widehat{P}(m)}.
\end{aligned}$$

Takže i polynom

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(t) = -i \sum_{m>0} \left(\widehat{P}(m) e^{imt} - \overline{\widehat{P}(m) e^{imt}} \right) &= -i \sum_{m>0} 2i \Im(\widehat{P}(m) e^{imt}) \\
&= 2 \sum_{m>0} \Im(\widehat{P}(m) e^{imt})
\end{aligned}$$

nabývá též pouze reálných hodnot.

Všimněme si, že

$$P(t) + i\tilde{P}(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{P}(m) e^{imt} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(m) \widehat{P}(m) e^{imt} = \sum_{m>0} 2\widehat{P}(m) e^{imt}$$

je polynom obsahující pouze kladné mocniny e^{it}, speciálně tedy $\widehat{P + i\tilde{P}}(0) = 0$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Polynom $(P(t) + i\tilde{P}(t))^{2k}$ též obsahuje pouze kladné mocniny e^{it} (násobíme mezi sebou polynomy s kladnými „frekvencemi“). Z definice nultého Fourierova koeficientu tedy

$$\int_{\mathbb{T}} (P(t) + i\tilde{P}(t))^{2k} \mathrm{d}t = 0.$$

Ekvivalentně podle binomické věty

$$\sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} i^j \int_{\mathbb{T}} P(t)^{2k-j} \tilde{P}(t)^j \mathrm{d}t = 0.$$

Reálná část výrazu vlevo musí být nulová, navíc P i $\tilde{P}$ nabývají pouze reálných hodnot, takže:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{2k}{2j} (-1)^j \int_{\mathbb{T}} P(t)^{2k-2j} \tilde{P}(t)^{2j} \mathrm{d}t = \Re\left(\int_{\mathbb{T}} (P(t) + \tilde{P}(t))^{2k} \mathrm{d}t \right) = 0. \quad (2.10)$$

Jelikož

$$\int_{\mathbb{T}} \tilde{P}^{2k} \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} |\tilde{P}|^{2k} \mathrm{d}t = \left\|\tilde{P}\right\|_{2k}^{2k},$$

tak rovnost (2.10) můžeme napsat ve tvaru

$$(-1)^{k+1} \left\|\tilde{P}\right\|_{2k}^{2k} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k}{2j} (-1)^j \int_{\mathbb{T}} P(t)^{2k-2j} \tilde{P}(t)^{2j} \mathrm{d}t.$$

Potom platí odhad

$$\left\|\tilde{P}\right\|_{2k}^{2k} \leq \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k}{2j} \int_{\mathbb{T}} |P(t)|^{2k-2j} |\tilde{P}(t)|^{2j} \mathrm{d}t \leq \sum_{j=1}^{k} \binom{2k}{2j} \left\|\tilde{P}\right\|_{2k}^{2k-2j} \|P\|_{2k}^{2j},$$

kde poslední nerovnost získáme z Hölderovy nerovnosti pro sdružené exponenty $\frac{2k}{2k-2j}$ a $\frac{2k}{2j}$.

Označme $\rho = \left\|\tilde{P}\right\|_{2k} \cdot \|P\|_{2k}^{-1}$. Předchozí nerovnost pak lze vyjádřit ve tvaru

$$\rho^{2k} \leq \sum_{j=1}^{k} \binom{2k}{2j} \rho^{2k-2j}.$$

Porovnáme-li asymptotické chování pravé a levé strany nerovnosti, když $\rho \to \infty$, nutně již musí být $\rho < C_{2k}$ pro nějakou konstantu $C_{2k} > 0$. Neboli $\left\|\tilde{P}\right\|_{2k} \leq C_{2k} \|P\|_{2k}$ pro $k \in \mathbb{N}$ a speciální polynomy P.

Postupně tento výsledek zobecníme pro libovolný trigonometrický polynom P. Nejprve si uvědomme, že když $\widehat{P}(0) \neq 0$, tak přechodem k polynomu $P_0 = P - \widehat{P}(0)$ obdržíme odhad

$$\left\|\tilde{P}\right\|_{2k} = \left\|\tilde{P_0}\right\|_{2k} \leq C_{2k} \|P_0\|_{2k} \leq C_{2k} \left(\|P\|_{2k} + \left\|\widehat{P}(0)\right\|_{2k}\right) \leq (1 + 2\pi) C_{2k} \|P\|_{2k},$$

neboť $|\widehat{P}(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \|P\|_1 \leq \|P\|_{2k}$ (používáme Pozorování 1.11 a 1.13). Pokud P je obecný trigonometrický polynom, potom dle Lemmatu 2.18 existují reálné trigonometrické polynomy Q, R takové, že $P = Q + iR$. Z linearity operátoru konjugace dostáváme $\tilde{P} = \tilde{Q} + i\tilde{R}$. Dále platí

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{P}\right\|_{2k} &\leq \left\|\tilde{Q}\right\|_{2k} + \left\|\tilde{R}\right\|_{2k} \\ &\leq (1 + 2\pi) C_{2k} \left\|Q\right\|_{2k} + (1 + 2\pi) C_{2k} \left\|R\right\|_{2k} \leq (2 + 4\pi) C_{2k} \left\|P\right\|_{2k}, \end{aligned}$$

přičemž první nerovnost je trojúhelníková, druhá plyne z předešlých odhadů a poslední z následujícího pozorování:

$$\begin{aligned} \left\|P\right\|_{2k}^{2k} &= \int_{\mathbb{T}} |P(t)|^{2k} \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} |Q(t) + iR(t)|^{2k} \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{T}} \left(|Q(t)|^2 + |R(t)|^2\right)^k \mathrm{d}t \geq \|Q\|_{2k}^{2k} + \|R\|_{2k}^{2k}. \end{aligned}$$

□

Důsledek 2.20. *Nechť $p \in (1, +\infty)$, potom prostor $L^p(\mathbb{T})$ zaručuje konvergenci v normě.*

Důkaz. Dle Vět 2.16 a 2.19 zaručuje $L^{2k}(\mathbb{T})$ konvergenci v normě pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Podle Věty 2.12 existuje konstanta C_{2k}, že pro všechna $f \in L^{2k}(\mathbb{T})$ a $N \in \mathbb{N}$ platí

$$\|S_N(f)\|_{2k} \le C_{2k} \|f\|_{2k} .$$

Speciálně tato nerovnost platí pro všechny jednoduché funkce.

Je-li $p \in (2, \infty) \setminus \{2k \colon k \in \mathbb{N}\}$, potom existuje $k \in \mathbb{N}$, pro které platí $2k < p < 2k + 2$. Volme $N \in \mathbb{N}$ a aplikujme Větu 1.8 s trojicí koeficientů $2k < p < 2k + 2$ a s restrikcí operátoru S_N na podprostor jednoduchých funkcí. Jelikož pro hraniční koeficienty jsme již odhad odvodili (nezávisle na N), tak existuje konstanta C_p též nezávislá na N, že pro všechny jednoduché funkce s platí

$$\|S_N(s)\|_p \le C_p \|s\|_p . \tag{2.11}$$

Množina jednoduchých funkcí tvoří hustý podprostor $L^p(\mathbb{T})$. Díky jednoznačnosti spojitého rozšíření operátoru (Věta 1.7) obdržíme nerovnost (2.11) i pro ostatní funkce z $L^p(\mathbb{T})$. Takže dle Věty 2.12 zaručuje $L^p(\mathbb{T})$ konvergenci v normě, přičemž máme toto tvrzení dokázané již pro $p \in [2, \infty)$.

Je-li $p \in (1, 2)$, použijeme předchozího výsledku pro sdružený koeficient $q = \frac{p}{p-1} > 2$. Dále z Věty 2.16 vyplývá omezenost operátoru konjugace vzhledem k L^q normě. Využitím duality (Lemmatu 2.17) získáme omezenost operátoru konjugace i vzhledem k L^p normě. Znovu aplikujeme Větu 2.16, čímž získáme dokazované tvrzení pro koeficient p ze zbylého intervalu. □

2.4 Konvergence Fourierových řad v $L^p(\mathbb{T}^n)$, $p \neq 1$

Nyní již můžeme zobecnit hlavní výsledek této práce i na funkce z $L^p(\mathbb{T}^n)$. Velmi důležitou roli hraje fakt, že uvažujeme čtvercové částečné součty. To nám totiž umožní uplatnit matematickou indukci.

Věta 2.21. *Nechť $p \in (1, \infty)$ a $n \in \mathbb{N}$, potom prostor $L^p(\mathbb{T}^n)$ zaručuje konvergenci v normě.*

Důkaz. Jak jsme se již zmínili, povedeme důkaz matematickou indukcí. Předchozí Důsledek 2.20 nám poslouží jako důkaz indukčního předpokladu pro $n = 1$. Nechť tvrzení platí pro všechna přirozená čísla menší než $n + 1$. Vzhledem k hustotě goniometrických polynomů v prostoru $L^p(\mathbb{T}^n)$ a k Větám 1.7 a 2.12 nám stačí nalézt konstantu $K > 0$, takovou, že pro všechna $N \in \mathbb{N}$ a všechny $P \in \mathcal{T}(\mathbb{T}^{n+1})$ platí

$$\left\| S_{(n+1,N)}[P] \right\|_p \le K \|P\|_p . \tag{2.12}$$

Nechť $N \in \mathbb{N}$ a $P \in \mathcal{T}(\mathbb{T}^n)$, pak

$$P(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{m} \in \operatorname{sp} P} e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}} \widehat{P}(\boldsymbol{m}).$$

Označme si

$$Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{(m_1,\dots,m_n) \in \mathbb{Z}^n} \sum_{|m_{n+1}| \le N} e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}} \widehat{P}(\boldsymbol{m})$$

N-tý částečný součet P vzhledem k poslední proměnné (připomeňme, že existuje pouze konečně mnoho nenulových členů této sumy).

Pro pevné $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^n$ označme $P_{(x_1,\dots,x_n)}$ polynom daný předpisem $x_{n+1} \mapsto P(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$. Pak z definice Q dostáváme vyjádření N–tého částečného součtu polynomu $P_{(x_1,\dots,x_n)}$ v bodě x_{n+1}:

$$\begin{aligned} S_{(1,N)}[P_{(x_1,\dots,x_n)}](x_{n+1}) &= (D_{(1,N)} * P_{(x_1,\dots,x_n)})(x_{n+1}) \\ &= Q(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Pro $x_{n+1} \in \mathbb{T}$ označme $Q_{x_{n+1}}$ polynom $(x_1, \dots, x_n) \mapsto Q(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$. Potom pro všechna $x_j \in \mathbb{T}$, $j = 1, \dots, n+1$, platí rovnost

$$(S_{(n+1,N)}[P])(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (S_{(n,N)}[Q_{x_{n+1}}])(x_1, \dots, x_n), \tag{2.14}$$

která též vyplývá z toho, že Q je N–tým částečným součtem P vzhledem k poslední proměnné.

Z indukčního předpokladu plyne existence konstant K_1 a K_n příslušících dimenzi 1 a n, které vyhovují nerovnosti (2.7). Celkem

$$\begin{aligned} &\left\|S_{(n+1,N)}[P]\right\|^p_{L^p(\mathbb{T}^{n+1})} = \int_{\mathbb{T}^{n+1}} \left|(S_{(n+1,N)}[P])(\boldsymbol{x})\right|^p \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}^n} \left|(S_{(n,N)}[Q_{x_{n+1}}])(x_1, \dots, x_n)\right|^p \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{T}} \left\|S_{(n,N)}[Q_{x_{n+1}}]\right\|^p_{L^p(\mathbb{T}^n)} \mathrm{d}x_{n+1} \\ &\le K_n^p \int_{\mathbb{T}} \left\|Q_{x_{n+1}}\right\|^p_{L^p(\mathbb{T}^n)} \mathrm{d}x_{n+1} \\ &= K_n^p \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}^n} |Q_{x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)|^p \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_{n+1} \\ &= K_n^p \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}} \left|S_{(1,N)}[P_{(x_1,\dots,x_n)}](x_{n+1})\right|^p \mathrm{d}x_{n+1} \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) \\ &= K_n^p \int_{\mathbb{T}^n} \left\|S_{(1,N)}[P_{(x_1,\dots,x_n)}]\right\|^p_{L^p(\mathbb{T})} \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) \\ &\le K_n^p K_1^p \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}} |P_{(x_1,\dots,x_n)}(x_{n+1})|^p \mathrm{d}x_{n+1} \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) \\ &= K_n^p K_1^p \left\|P\right\|^p_{L^p(\mathbb{T}^{n+1})}, \end{aligned}$$

kde jsme využili

- měřitelnost funkcí P, Q, $P_{(x_1,\dots,x_n)}$, $Q_{x_{n+1}}$, jež plyne ze spojitosti těchto funkcí,
- rovnosti (2.14) při přechodu mezi 1. a 2. řádkem,
- indukční předpoklad pro dimenzi n mezi 4. a 5. řádkem,
- rovnosti (2.13) a Fubiniovu větu (lze použít díky omezenosti P a Q) mezi 5. a 6. řádkem,
- indukční předpoklad pro dimenzi 1 mezi 7. a 8. řádkem.

Konstanty K_1 a K_n nezávisejí na výběru polynomu P ani přirozeného čísla N a zároveň platí (2.12) pro $K = K_1 K_n$. □

2.5 Otázka konvergence Fourierových řad v prostoru $L^1(\mathbb{T}^n)$

V tomto oddíle se zaměříme na řešení vybraných cvičení z knihy [1] (oddílu 3.5), jež se vážou ke zkoumané problematice.

Dosud jsme se vyhýbali případu, kdy $p = 1$. Z následujícího pozorování vyplyne, že normy jednotlivých operátorů $S_N\colon L^1(\mathbb{T}^n) \to L^1(\mathbb{T}^n)$ je možné zdola odhadnout prvky posloupnosti jdoucí k nekonečnu. Proto neexistuje konstanta, jež by čísla $\|S_N\|_1$ shora omezovala, a tedy podle Věty 2.12 existuje funkce $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, pro níž neplatí (2.6).

Pozorování 2.22. Nechť $M, N \in \mathbb{N}$. Podle Pozorování 2.4 splňuje $F_{(n,M)}$ (dále jen F_M) rovnost $\|F_M\|_1 = (2\pi)^n$, a tedy dle definice normy operátoru plyne odhad

$$\|S_N\|_1 \geq \left\| S_N \left[\frac{1}{(2\pi)^n} F_M \right] \right\|_1 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|D_N * F_M\|_1 .$$

Využitím trojúhelníkové nerovnosti a Důsledku 2.8

$$\Big| \|D_N * F_M\|_1 - \|D_N\|_1 \Big| \leq \|D_N * F_M - D_N\|_1 \to 0, \ M \to \infty,$$

tudíž

$$\|S_N\|_1 \geq \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{M\to\infty} \|D_N * F_M\|_1 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|D_N\|_1 .$$

Podle identity (2.1), Fubiniovy věty a Příkladu 2.6 platí

$$\begin{aligned} \left\|D_{(n,N)}\right\|_1 &= \int_{\mathbb{T}} \cdots \int_{\mathbb{T}} |D_{(1,N)}(x_1)| \cdots |D_{(1,N)}(x_n)| \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= \left\|D_{(1,N)}\right\|_1^n \geq \left(\frac{8}{\pi} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \right)^n \to \infty, \ N \to \infty. \end{aligned}$$

V dalším příkladě dokonce zkonstruujeme takovou funkci g, jejíž částečné součty jdou v normě prostoru $L^1(\mathbb{T})$ do nekonečna. Z toho poté již snadno plyne divergence posloupnosti $\{\|S_N[g] - g\|_1\}_{N=1}^{\infty}$.

Nejprve ovšem uvedeme pomocné tvrzení.

Lemma 2.23.

(i) *Buďte $M, N \in \mathbb{N}$, F_M a D_N jednorozměrná jádra, potom*

$$(D_N * F_M)(x) = \begin{cases} F_M(x) & \text{pro } M \leq N, \\ F_N(x) + \frac{M-N}{(M+1)(N+1)} \sum_{|k|\leq N} |k| e^{ikx} & \text{pro } M > N. \end{cases}$$

(ii) *Pro dostatečně velká $N \in \mathbb{N}$ platí*

$$\left\| \sum_{|k|\leq N} |k| e^{ikx} \right\|_1 \geq \frac{4}{\pi} N \log N. \tag{2.15}$$

Důkaz. Začneme důkazem části (i). Je-li $M \leq N$, potom zřejmě

$$(D_N * F_M)(x) = S_N[F_M](x) = F_M(x).$$

Pokud $M > N$, tak z definice Fejérova jádra

$$\begin{aligned}
(D_N * F_M)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} D_N(x-t) \frac{1}{M+1} \sum_{j=0}^{M} D_j(t) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{M+1} \sum_{j=0}^{M} (D_N * D_j)(x) \\
&= \frac{1}{M+1} \sum_{j=0}^{N} (D_N * D_j)(x) + \frac{M-N}{M+1} D_N(x) \\
&= \frac{N+1}{M+1} F_N(x) + \frac{M-N}{M+1} D_N(x) \\
&= \frac{M+1+N-M}{M+1} F_N(x) + \frac{M-N}{M+1} D_N(x) \\
&= F_N(x) + \frac{M-N}{(M+1)(N+1)} \left((N+1) D_N(x) - \sum_{j=0}^{N} D_j(x) \right).
\end{aligned}$$

Všimněme si, že

$$\sum_{j=0}^{N} \sum_{k=-j}^{j} e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} \sum_{j=0}^{N-|k|} e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} (N+1-|k|) e^{ikx},$$

z čehož plyne

$$\begin{aligned}
(N+1) D_N(x) - \sum_{j=0}^{N} D_j(x) &= \sum_{k=-N}^{N} (N+1) e^{ikx} - \sum_{k=-N}^{N} (N+1-|k|) e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-N}^{N} |k| e^{ikx}.
\end{aligned}$$

Dohromady tedy dostáváme

$$(D_N * F_M)(x) = F_N(x) + \frac{M-N}{(M+1)(N+1)} \sum_{k=-N}^{N} |k| e^{ikx}.$$

Dále dokážeme (ii). Podle předešlé části platí pro všechna $x \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=-N}^{N} |k| e^{ikx} \right| &= \left| (N+1)\big(D_N(x) - F_N(x)\big) \right| \\
&\geq (N+1)|D_N(x)| - (N+1)|F_N(x)|,
\end{aligned}$$

tudíž

$$\int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{|k|\le N} |k| e^{ikx} \right| \mathrm{d}x \ge (N+1) \int_{\mathbb{T}} |D_N(x)| \mathrm{d}x - (N+1) \int_{\mathbb{T}} |F_N(x)| \mathrm{d}x$$
$$= (N+1) \|D_N\|_1 - (N+1) \|F_N\|_1 .$$

Podle Příkladu 2.6 tedy

$$\left\| \sum_{|k|\le N} |k| e^{ikx} \right\|_1 \ge \frac{8(N+1)}{\pi} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} - 2\pi(N+1) \ge \frac{8(N+1)}{\pi} \log N - 2\pi(N+1)$$
$$= \frac{8}{\pi} N \log N - 2\pi(N+1),$$

kde ve druhé nerovnosti využíváme známý dolní odhad N–tého částečného součtu harmonické řady. Pro dostatečně velká N již musí platit nerovnost (2.15).

□

Příklad 2.24. V Pozorování 2.22 jsme viděli, že pro dostatečně velká M jsou hodnoty $\|D_N * F_M\|_1$ blízko $\|D_N\|_1$. Nabízí se tedy za vhodného kandidáta na funkci g vzít řadu Fejérových jader (dostatečně rychle rostoucích řádů), která budeme regulovat koeficienty tak, aby g byla třídy L^1 a zároveň, aby posloupnost norem částečných součtů divergovala. Ukážeme si, že funkce definována předpisem

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} F_{N_j}(x),$$

kde $N_j = 2^{2^{2^j}}$, splňuje výše uvedené požadavky.

Z Pozorování 2.4 plyne, že suma vpravo konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{T}\setminus\{0\}$, tedy skoro všude vzhledem k Lebesgueově míře. Všude, kde je definovaná, nabývá g nezáporných reálných hodnot (což také vyplývá z Pozorování 2.4), a proto použitím Leviho věty dostaneme:

$$\int_{\mathbb{T}} |g(x)| \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{T}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} F_{N_j}(x) \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \int_{\mathbb{T}} F_{N_j}(x) \mathrm{d}x$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \left\| F_{N_j} \right\|_1 = 2\pi.$$

Takže $g \in L^1(\mathbb{T})$.

Zdola budeme odhadovat normy částečných součtů. Nechť $N \in \mathbb{N}$ je dostatečně velké, aby platila část (ii) Lemmatu 2.23. Všimněme si, že

$$S_N[g](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} D_N(x-t) \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} F_{N_j}(t) \mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} (D_N * F_{N_j})(x),$$

kde poslední rovnost plyne z Lebesgueovy věty o záměně sumy a integrálu, jelikož pro všechna $x, t \in \mathbb{T}$, $K \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \sum_{j=0}^{K} 2^{-j} D_N(x-t) F_{N_j}(t) \right| \le \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} |D_N(x-t)| |F_{N_j}(t)| \le (2N+1) g(t)$$

a funkce vpravo, jak jsme již ukázali, je integrovatelná majoranta.

Nechť $\kappa \in \mathbb{N}$ je nejmenší takové, že $N_\kappa > N$. Potom dle Lemmatu 2.23 (i)

$$\begin{aligned} S_N[g](x) = &\sum_{j=0}^{\kappa-1} 2^{-j} F_j(x) + \sum_{j=\kappa}^{\infty} 2^{-j} F_N(x) \\ &+ \sum_{j=\kappa}^{\infty} 2^{-j} \frac{N_j - N}{(N_j+1)(N+1)} \sum_{|k| \le N} |k| e^{ikx}. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} \|S_N[g]\|_1 \geq &\left\| \sum_{j=\kappa}^{\infty} 2^{-j} \frac{N_j - N}{(N_j+1)(N+1)} \sum_{|k| \le N} |k| e^{ikx} \right\|_1 - \left\| \sum_{j=0}^{\kappa-1} 2^{-j} F_j(x) \right\|_1 \\ &- \left\| \sum_{j=\kappa}^{\infty} 2^{-j} F_N(x) \right\|_1, \end{aligned}$$

přičemž si uvědomme, že člen $\sum_{j=\kappa}^{\infty} 2^{-j} \frac{N_j - N}{(N_j+1)(N+1)}$ je pouze multiplikativní konstantou. Z obdobných úvah jako při výpočtu normy funkce g plyne existence konstanty $L > 0$ nezávislé na N splňující

$$\left\| \sum_{j=0}^{\kappa-1} 2^{-j} F_j(x) \right\|_1 + \left\| \sum_{j=\kappa}^{\infty} 2^{-j} F_N(x) \right\|_1 \le L.$$

V následujících odhadech použijeme druhou část Lemmatu 2.23.

$$\begin{aligned} \|S_N[g]\|_1 &\geq \sum_{j=\kappa}^{\infty} 2^{-j} \frac{N_j - N}{(N_j+1)(N+1)} \left\| \sum_{|k| \le N} |k| e^{ikx} \right\|_1 - L \\ &\geq \frac{4}{\pi} \frac{N}{N+1} \log N \sum_{j=\kappa}^{\infty} 2^{-j} \frac{N_j - N}{N_j + 1} - L \\ &\geq \frac{4}{\pi} \frac{N}{N+1} \log N \sum_{j=\kappa+1}^{\infty} 2^{-j} \frac{N_j - N}{N_j + 1} - L. \end{aligned}$$

Pro všechna $j \geq \kappa + 1$ platí $N_j = 2^{2^{2^j}} \geq 2^{2^{2 \cdot 2^\kappa}} \geq 2 \cdot 2^{2^{2^\kappa}} \geq 2N_\kappa \geq 2N$, tudíž pro ta samá j platí $N_j - N \geq \frac{1}{2} N_j$. Navíc $N_j + 1 \le 2N_j$, takže dohromady

$$\frac{N_j - N}{N_j + 1} \geq \frac{\frac{1}{2} N_j}{2N_j} \geq \frac{1}{4}.$$

Tudíž

$$\|S_N[g]\|_1 \geq \frac{1}{\pi} \frac{N}{N+1} \log N \sum_{j=\kappa+1}^{\infty} 2^{-j} - L = \frac{1}{\pi} \frac{N}{N+1} \frac{\log N}{2^\kappa} - L.$$

Z definice κ plyne nerovnost

$$2^{2^{2^{\kappa-1}}} = N_{\kappa-1} \le N.$$

Pro $N > 2$ můžeme dvakrát aplikovat rostoucí funkci logaritmus na obě strany nerovnosti, kterou následně snadno upravíme do tvaru

$$2^{\kappa} \leq \frac{2 \log \frac{\log N}{\log 2}}{\log 2},$$

takže konečně

$$\|S_N[g]\|_1 \geq \frac{\log 2}{2\pi} \frac{N}{N+1} \frac{\log N}{\log \frac{\log N}{\log 2}} - L.$$

Posloupnost vpravo roste nade všechny meze (vidíme navíc, proč bylo třeba volit tak rychle rostoucí posloupnost $\{N_j\}$), a tedy

$$\lim_{N \to \infty} \|S_N[g]\|_1 = \infty.$$

Z toho již plyne, že Fourierova řada funkce g nekonverguje v normě prostoru L^1 k funkci g. Kdyby tomu tak bylo, potom by platilo

$$\limsup_{N \to \infty} \|S_N[g]\|_1 \leq \lim_{N \to \infty} \|S_N[g] - g\|_1 + \lim_{N \to \infty} \|g\|_1 = \|g\|_1 ,$$

což je spor s neomezeností částečných součtů.

Obdobná funkce, a to $\tilde{g}(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1)$, nám poslouží k vyloučení konvergence v normě $L^1(\mathbb{T}^n)$, stačí si totiž rozmyslet, že

$$\left\|S_{(n,N)}[\tilde{g}]\right\|_1 = (2\pi)^{n-1} \left\|S_{(1,N)}[g]\right\|_1 .$$

Literatura

[1] Grafakos Loukas, *Classical Fourier Analysis.* Springer, 2nd edition, 2008.

[2] Katznelson Yitzhak, *An Introduction to Harmonic Analysis.* Cambridge University Press, 3rd edition, 2004.

[3] Rudin Walter, *Analýza v reálném a komplexním oboru.* Academia, Praha, 2. vydání, 2003.

[4] Lukeš Jaroslav, *Zápisky z funkcionální analýzy.* Karolinum, Praha, 1. vydání, 2002.