Posudek vedoucího na disertační práci
T. Salač: **The generalized Dolbeault complex in Clifford analysis.**

Téma dizertační práce T. Salače patří do relativně mladého oboru matematiky, pro který se začal používat název hyperkomplexní (resp. Cliffordova) analýza. Tato část matematiky se věnuje popisu vlastností řešení Dirakovy rovnice, resp. v obecnějším smyslu, popisu vlastností konformně invariantních diferenciálních operátorů a jejich jader. Během posledních 50 let bylo v tomto oboru nashromážděno mnoho podstatných výsledků. Dirakův operátor působí na prostoru funkcí s hodnotami ve spinorové reprezentaci ortogonální grupy.

Právě tak jako je teorie holomorfních funkce více komplexních proměnných více-dimenzionálním zobecněním klasické teorie funkcí jedné komplexní proměnné, je přirozené studovat obdobně funkce několika Cliffordových proměnných se spinorovými hodnotami, které leží v jádru několika Dirakových operátorů. Takovéto funkce se obvykle nazývají monogenní funkce více (Cliffordových) proměnných. Tato zobecněná teorie funkcí je ještě ve svých začátcích. Jeden rys má společný s teorií funkcí více komplexních proměnných. Příslušný systém parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu je přeurčený a je nutné očekávat, stejně jako v teorii funkcí víc komplexních proměnných, věty Hartogsova typu o rozšiřování definičního oboru řešení příslušné soustavy PDR. Podstatnou informaci o těchto problémech v teorii funkcí víc komplexních proměnných přináší Dolbeaultův komplex, který tvoří rezolventu Cauchy-Reimannova operátoru ve více proměnných. Je proto důležité pro analýzu chování monogenních funkcí více proměnných sestrojit rezolventu systému PDR, který tvoří Dirakův operátor v několika proměnných.

Tato problematika není nová. Nejdříve byla řešena v dimenzi 4, kde je často Dirakův operátor nazýván Fueterovým operátorem. První výsledky v dimenzi 4 byly dosaženy v 80. Letech algebraickými metodami (Hilbertova věta o syzygy). Úplný popis rezolventy (a její zobecnění pro variety se zadanou kvaternionovou strukturou) byly však dosaženy až použitím nových a velmi silných metod tzv. parabolické geometrie. Toto nové odvětví matematiky využívá systematicky geometrické, analytické i algebraické metody (zejména teorii reprezentací) a umožňuje jednotný a systematický přístup k mnoha dílčím geometriím. Nejvíce studovaný případ parabolické geometrie je konformní geometrie. Ta je úzce svázána s klasickou Cliffordovou analýzou, která studuje vlastnosti řešení Dirakova operátoru (v jedné proměnné). Systém PDR pro monogenní funkce víc proměnných má velkou grupu symetrie, která odpovídá vhodné parabolické geometrii. V dimenzi 4 je to kvaternionová geometrie, která je (relativně) jednodušší, protože patří mezi tzv. |1|-gradované geometrie. V obecné vyšší dimenzi lze nalézt již jen vhodnou |2|-gradovanou geometrii, která popisuje - po vhodném rozšíření - symetrie soustavy PDR pro monogenní funkce ve víc proměnných.

Algebraické metody, i metody Cliffordovy analýzy vedly k popisu příslušné rezolventy jen pro 2, resp. 3 proměnné. S přibývajícím počtem proměnných složitost rychle narůstala. Použití silných metod, vyvinutých v rámci teorie parabolických geometrií, umožnilo nejprve sestrojit hypotézy o struktuře hledané rezolventy. Jednotlivé ireducibilní komponenty v rezolventě byly popsány pomocí teorie reprezentací. Parabolická rezolventa byla ale popsána pomocí komplexu operátorů definovaných pro funkce, jejichž definiční obor byl větší než ten, který byl používán v Cliffordově analýze. Bylo proto třeba najít redukci parabolické rezolventy. To je hlavní problém, který je v předložené disertaci vyřešen.

Práce má několik částí. Úvodní kapitoly (Kap. 1 - 6) obsahují shrnutí základního rámce celé používané struktury (zejména pak shrnutí základních poznatků o parabolických geometriích). Jádro práce, a nové výsledky, jsou obsaženy v posledních 3 kapitolách. V dizertaci je diskutován pouze stabilní případ (počet proměnných je menší nebo roven poloviční dimenzi). Pro nestabilní případ je tvar rezolventy podstatně složitější, a jak ukazují zatím známé případy, typicky se v ní vyskytují operátory vyššího řádu než dvě.

Kapitola sedmá je věnována operátorům, které se vyskytují v rezolventě pro Diracův operátor pro stabilní případ. Teorie reprezentací umožňuje popsat vektorové prostory, ve kterých nabývají hodnoty jednotlivé funkce v rezolventě, pomocí tzv. Hasseho diagramu, který je definován jako orbita affiní akce příslušné parabolické verze Weylovy grupy na nejvyšší váze spinorového modulu. Z tvaru příslušné orbity je vidět, že se v rezolventě vyskytují jen operátory prvního a druhého řádu. Explicitní popis operátorů prvního řádu je jednoduchý, patří mezi tzv. Steín-Weissovy gradienty. Explicitní konstrukci operátorů druhého řádu je věnována sedmá kapitola. Pomocí tzv. křivých Casimírových operátorů je explicitně popsán tvar všech operátorů druhého řádu, které se vyskytují v příslušné parabolické rezolventě. Pro případ dvou proměnných je na závěr dokázáno, že příslušný komplex v Cliffordově verzi je eliptický. Pro případ tří proměnných je popsán tvar operátorů v rezolventě a je ukázáno, že se shoduje s již existujícími výsledky v tomto případě.

Osmá kapitola je věnována klíčovému problému aplikace metod parabolické geometrie pro sestrojení rezolventy pro Diracův operátor v několika proměnných v Cliffordově analýze. Existence rezolventy v případě parabolické geometrie je použita pro důkaz, že analogický komplex v redukovaném případě Cliffordovy analýzy je opět rezolventa. Úvodní část této kapitoly je věnována popisu odpovídající Penroseovy transformace. Podstatný výsledek je obsažen v sekci 8.5., kde je dokázána věta o trivialitě kohomologických grup na twistorovém prostoru pro dostatečně vysoký řád. Tato informace je klíčová pro důkaz exaktnosti příslušné rezolventz. Zásadní výsledek dizertace je obsažen v sekci 8.6. Je zde ukázán postup, jak použít informaci o exaktnosti rezolventy v parabolickém případě k důkazu rezolventy v redukovaném případě Cliffordovy analýzy.

Poslední kapitola je věnována podrobnějšímu popisu monogenních funkcí více proměnných. Je zde podrobně rozebrán případ dvou proměnných v dimenzi šest. Pro tento případ je popsán kompletní rozklad prostoru monogenních funkcí do ireducibilních částí vzhledem k akci Leviho faktoru příslušné parabolické podalgebry. Je to (v tomto podstatně složitějším případě) analogie rozkladu harmonický funkcí pomocí sférických harmonik.

Práce je dobře zpracována, a obsahuje řadu nových zajímavých a podstatných výsledků. Jsou v ní vyřešeny všechny problémy, které zbývaly ke kompletnímu důkazu existence rezolventy pro Diracův operátor pro více Cliffordových proměnných. Tento problém byl formulován již v 80. letech a teprve nyní je možné jej ve stabilním případě vyřešit. Považuji proto práci za vynikající a navrhuji, aby byla postoupena k obhajobě.

prof. Vladimír Souček
Matematický ústav UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha