Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

Martina Štěpánová

Počátky teorie matic v českých zemích
(a jejich ohlasy)

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí disertační práce: Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecné otázky matematiky a informatiky

Praha 2013

Děkuji doc. RNDr. Jindřichu Bečvářovi, CSc., svému školiteli, za cenné metodické a odborné rady či připomínky, dále za čas, energii a všestrannou pomoc, které mi věnoval po celou dobu mého studia. Ze srdce mu děkuji za lidský přístup a pochopení, za povzbuzení a hledání nových cest v časech, kdy zdálo se, že není již kam jít, a především za sdílení sebemenší radosti, které mi dodávalo sílu do další práce.

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 25. 2. 2013

....

Název práce: Počátky teorie matic v českých zemích (a jejich ohlasy)

Autor: Martina Štěpánová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí disertační práce: Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: V osmdesátých letech 19. století a na počátku let devadesátých publikoval pražský matematik Eduard Weyr důležité výsledky z teorie matic. Jeho práce zůstaly po několik desetiletí jedinými významnými texty z této disciplíny, které vzešly z české matematické komunity. Přestože byl Weyr jedním z mála evropských matematiků, kteří v té době teorii matic znali a rozvíjeli ji, byly jeho výsledky téměř sto let opomíjeny. Eduard Weyr objevil tzv. *Weyrovu charakteristiku*, která je duální posloupností ke známější Segreově charakteristice, a tzv. *typický tvar* matice. Tento kanonický tvar dnes nese Weyrovo jméno. Lze jej pomocí simultánních permutací řádků a sloupců převést na běžně používaný Jordanův kanonický tvar, přičemž v některých matematických otázkách je Weyrův kanonický tvar vhodnější než Jordanův. V posledních letech povědomí o tomto kanonickém tvaru narůstá, v roce 2011 byla publikována monografie, která je věnována právě Weyrovu kanonickému tvaru.

Klíčová slova: teorie matic, historie matematiky, Weyrova charakteristika, Weyrův kanonický tvar

Title: Origins of Matrix Theory in Czech Lands (and the responses to them)

Author: Martina Štěpánová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc., Department of Mathematics Education

Abstract: In the 1880s and early 1890s, the Prague mathematician Eduard Weyr published his important results in matrix theory. His works represented the only significant contribution to matrix theory by Czech mathematicians in many decades that followed. Although Eduard Weyr was one of the few European mathematicians acquainted with matrix theory and working in it at that time, his results did not gain recognition for about a century. Eduard Weyr discovered the *Weyr characteristic*, which is a dual sequence to the better known Segre characteristic, and also the so-called *typical form*. This canonical form of a matrix is nowadays called the *Weyr canonical form*. It is permutationally similar to the commonly used Jordan canonical form of the same matrix and it outperforms the Jordan canonical form in some mathematical situations. The Weyr canonical form has become much better known in the last few years and even a monograph dedicated to this topic was published in 2011.

Keywords: matrix theory, history of mathematics, Weyr characteristic, Weyr canonical form

Obsah

Úvod

Tato disertační práce vznikala během mého doktorského studia na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze v letech 2009 až 2013. Pojednává o prvních výsledcích teorie matic, které byly publikovány představiteli české matematické komunity. Nejvýznamnější z nich pocházejí z osmdesátých let 19. století. Jsou otištěny v pracích pražského matematika Eduarda Weyra (1852–1903), který byl jedním z prvních matematiků evropského kontinentu a jedním z několika málo matematiků na světě, kteří v té době přijali maticovou řeč a významným způsobem přispěli k rozvoji teorie matic. Proto je má disertační práce z velké části věnována právě Weyrovým myšlenkám a postupům a jejich ohlasům ve světě, které v posledních dvou desetiletích začaly výrazně sílit.

První kapitola má přípravný charakter. Je v ní poměrně stručně a přehledně zpracován vznik a vývoj teorie matic ve světě přibližně do třicátých let 20. století, pozornost je věnována i symbolice a terminologii. Výsledky českých matematiků, které jsou popsány v následujících kapitolách, tak mohou být vnímány v kontextu světového vývoje. Důležitým zdrojem pro sepsání této kapitoly byla monografie Jindřicha Bečváře *Z historie lineární algebry* z roku 2007. Podařilo se však najít a zdůraznit některé další zajímavé aspekty vývoje teorie matic a doložit je citáty z původních pramenů.

Vlastní výsledky disertační práce jsou obsaženy v následujících pěti kapitolách.

V úvodu druhé kapitoly jsou nejprve připomenuty první práce z algebry, které byly v 19. století sepsány několika českými matematiky. Podstatnou část této kapitoly však tvoří podrobně komentovaný rozbor maticových výsledků Eduarda Weyra. Největší pozornost je věnována Weyrovu mimořádně zajímavému přístupu k podobnosti matic, jeho úplnému systému invariantů podobnosti, jehož součástí je posloupnost jistých přirozených čísel, která se dnes nazývá *Weyrova charakteristika*, a jeho originálnímu postupu konstrukce tzv. *typického tvaru* matice, který je dnes nazýván *Weyrův kanonický tvar*. Detailně je zde prezentována tzv. *Weyrova teorie charakteristických čísel*, v níž jsou oba výše uvedené pojmy stěžejní. V závěru kapitoly je tato teorie podána jazykem současné lineární algebry, na několika příkladech je ilustrován Weyrův kanonický tvar matice a ukázán jeho vztah k mnohem známějšímu Jordanovu kanonickému tvaru. Práce na partiích věnovaných Weyrovým výsledkům byla inspirována dvěma články Jindřicha Bečváře, které jsou součástí monografie *Eduard Weyr (1852–1903)* z roku 1995.

Třetí kapitola přibližuje práce, které byly sepsány představiteli české matematické komunity v prvních desetiletích 20. století; v uvedeném období však žádný původní výsledek většího významu publikován nebyl. Zvláštní pozornost je věnována textům Bohumila Bydžovského, jehož kniha *Základy teorie determinantů a matic a jich užití* z roku 1930 je jednou z prvních monografií na světě, která má v názvu slovo „matice“. Bydžovského knížka měla velký význam vzdělávací, byla důležitá mimo jiné z hlediska terminologie a symboliky.

Čtvrtá kapitola pojednává o ohlasech na Weyrovu teorii charakteristických čísel pocházejících z kolektivu brněnských matematiků. Věnována je pracím Otakara Borůvky, Miroslava Novotného a Jiřího Čermáka sepsaným především v padesátých letech 20. století. Obsahují zejména postupy, které Weyrovu teorii využívají k řešení soustav diferenciálních a diferenčních rovnic. Podstatná část kapitoly je věnována Borůvkově učebnici *Základy teorie matic* z roku 1971, která je první česky psanou knihou, v níž je podán výklad Weyrovy teorie charakteristických čísel.

V páté kapitole jsou podrobně zpracovány zahraniční ohlasy na Weyrovy výsledky. Během 20. století reagovala řada matematiků téměř výhradně na Weyrovu charakteristiku, tato odezva však nebyla nijak výrazná. Relativně nedávno, zhruba sto let po zveřejnění Weyrových prací, však začalo intenzivní studium souvislostí Weyrovy charakteristiky a několika charakteristik teorie grafů. Článků, které byly této problematice věnovány, vyšlo značné množství, s nevídanou frekvencí byly publikovány především na přelomu osmdesátých a devadesátých let. Vzhledem k této skutečnosti jsou v páté kapitole tyto otázky zpracovány poměrně podrobně, výklad je navíc doplněn řadou ilustrujících příkladů. Podařilo se dohledat i některé starší práce, které Weyrovu charakteristiku obsahují skrytě a jejichž autoři si zmíněné souvislosti uvědomili až dodatečně, po mnoha letech. Velká pozornost je v páté kapitole věnována Weyrovu kanonickému tvaru, neboť o něj ve světě v několika posledních letech silně vzrostl zájem. Dokladem je monografie *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* z roku 2011, kterou sepsali Kevin C. O'Meara, John Clark a Charles Irvin Vinsohaler.

Krátká šestá kapitola velmi stručně přibližuje pozdější odezvu na Weyrovy výsledky, která pochází z české a slovenské komunity.

Disertační práce byla sepsána na základě podrobného studia originálních pramenů. Jejich soupis je uveden v jejím závěru. Celou prací prostupují citace z původních textů, v případě cizojazyčných zdrojů jsou ponechány v originálním tvaru, aby nedošlo k jejich desinterpretaci.

Děkuji svému školiteli, doc. RNDr. Jindřichu Bečvářovi, CSc., za zvolené téma disertace, které mě velmi zaujalo, a za pomoc při jeho zpracovávání. Děkuji všem, kteří se mnou v uplynulých třech letech hovořili či korespondovali o náplni disertace, nabídli mi pomoc a radu, vyjádřili své názory a diskutovali o mých domněnkách. Byli to zejména Frank Jerry Hall, Hans Schneider, Roger Alan Horn a Helene Shapiro. V neposlední řadě patří můj dík též pracovníkům knihoven Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy a Matematického ústavu Akademie věd České republiky v Praze. Děkuji rovněž svým blízkým za povzbuzení a především za trpělivost, kterou se mnou měli během celého mého studia.

Martina Štěpánová

1 Vznik a vývoj teorie matic

Teorie matic je poměrně mladou matematickou disciplínou. Její vznik se datuje do druhé poloviny devatenáctého století, některé dnes běžně používané pojmy se konstituovaly až ve století dvacátém. Podněty, které vedly k jejímu zrodu, přicházely z více směrů, své kořeny mají v dávné minulosti. Pojem *matice* lze totiž nalézt již před dvěma tisíci lety ve staré Číně ve spojitosti s řešením soustav lineárních rovnic.

Abychom mohli výsledky českých matematiků z teorie matic správně umístit do kontextu doby a porovnat je s přístupy a idejemi, které pochází z jiných zemí, věnujme se nejprve vzniku a vývoji maticového počtu ve světě do třicátých let 20. století.

1.1 Řešení soustav lineárních rovnic ve staré Číně

Není překvapivé, že v prehistorii teorie matic hrají důležitou roli soustavy lineárních rovnic. Úlohy, které vedou na takovéto soustavy, byly řešeny již ve starém Egyptě a Mezopotámii před čtyřmi tisíci lety. Ve staré Číně byla před dvěma tisíci lety k řešení úloh vedoucích na soustavy lineárních rovnic s regulární maticí využívána metoda, kterou lze považovat za prvopočátek teorie matic.

Touto metodou byl tzv. algoritmus *fang čcheng*, který je popsán v učebním textu *Matematika v devíti kapitolách* (český přepis názvu je *Tiou čang suan šu*, mezinárodní *Jiu zhang suan shu*) z období dynastie Han. Čísla byla čínskými počtáři zaznamenávána pomocí tyčinek kladených na početní desku, výpočty byly prováděny změnou rozestavění příslušných tyčinek. Koeficienty jednotlivých rovnic byly zaneseny do sloupců zprava doleva, což odpovídá čínskému způsobu psaní. Například nehomogenní soustava pěti rovnic o pěti neznámých byla znázorněna tabulkou o pěti sloupcích a šesti řádcích.

Algoritmus *fang čcheng* je obdobný dnes velmi známé *Gaussově eliminační metodě*, v níž jsou však koeficienty jednotlivých rovnic psány do řádků. Zatímco dnes provádíme tzv. elementární úpravy řádků rozšířené matice soustavy shora dolů, ve staré Číně upravovali sloupce tabulky, kterou dnes nazýváme *matice* (slovo *fang* značí čtvercovou tabulku čísel), zprava doleva. Při provádění tohoto algoritmu objevili tehdejší počtáři záporná čísla, naučili se s nimi pracovat a ve výše zmíněném textu sepsali pravidla pro počítání s kladnými a zápornými čísly.[1]

V zachycení koeficientů soustav lineárních rovnic do obdélníkových schémat a v následných úpravách při metodě *fang čcheng* lze spatřovat nejstarší prvky maticové symboliky a maticové techniky.

Zájemcům o bližší informace o klasickém díle *Matematika v devíti kapitolách* doporučujeme český komentovaný překlad [Hu1] z roku 2008, který napsal Jiří Hudeček a ve kterém je uvedena řada dalších pramenů.

[1] Pro odlišení záporných čísel (*fu*) od kladných čísel (*čžen*, resp. *zheng*) byly používány tyčinky různých barev: černé pro záporná čísla, červené pro kladná čísla. Nebylo-li nutné tyto dvě skupiny čísel rozlišovat, byly tyčinky pravděpodobně neobarvené.

1.2 Determinanty, bilineární a kvadratické formy

Z výše uvedeného by se mohlo zdát, že cesta od metody *fang čcheng* ke vzniku teorie matic již nebyla příliš zdlouhavá a náročná. Opak je však pravdou, neboť teorie matic se nevyvinula přímo ze studia koeficientů soustav lineárních rovnic. Její spletitá pouť za vlastním zrodem a plným uznáním samostatnosti je spjata se vznikem a vývojem jiných disciplín, zejména s teorií determinantů, s teorií bilineárních a kvadratických forem a s teorií invariantů. Úzké propojení teorie matic s teorií determinantů však působilo do jisté míry i negativně, což uvidíme například na konkrétním příkladu nejednotného způsobu násobení matic.

S výrazy, které dnes nazýváme *determinanty*, se můžeme setkat v pracích řady matematiků, kteří k nim dospěli zejména při řešení soustav lineárních rovnic. Vyjádříme-li totiž neznámé například ze soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých pomocí koeficientů těchto rovnic, nutně se objeví výrazy představující determinanty druhého řádu. Tímto způsobem popsal v roce 1539 kořeny nehomogenní soustavy dvou rovnic o dvou neznámých Gerolamo Cardano (1501–1576).

V roce 1683 rozvinul japonský matematik Takakazu Šinsuke Seki Kōwa (1642–1708) v díle *Kai Fukudai no Hō* čínskou metodu *fang čcheng* a formuloval postup pro výpočet řešení soustavy rovnic z jejích koeficientů, které byly zaznamenány v tabulce na početní desce. Přiblížil se tak v určitém smyslu zavedení pojmu determinant.

Za objevitele determinantů je nejčastěji označován německý matematik, filozof a přírodovědec Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), který v roce 1693 při eliminaci n neznámých ze soustavy $n + 1$ nehomogenních lineárních rovnic dospěl k výrazu, který dnes nazýváme *determinant*. Leibniz pomocí tohoto pojmu vyjádřil nutnou podmínku řešitelnosti zmíněné soustavy, tj. nulovost determinantu rozšířené matice uvažované soustavy. Byl zřejmě prvním matematikem, který užíval dvojí indexy. Například ve smyslu dnešního označení koeficientu a_{31} používal symbolu 3_1 nebo zcela jednoduše 31. Leibnizův pojem determinantu ani jeho dvojí indexy se neujaly; tyto ideje se totiž objevily víceméně pouze v jeho korespondenci a publikovány nebyly.

Za zrod teorie determinantů se obvykle považuje zveřejnění Cramerova pravidla v rozsáhlém díle *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* [Cr1] z roku 1750, jehož autorem je švýcarský matematik Gabriel Cramer (1704–1752). Ve zmíněné monografii o algebraických křivkách hledal mimo jiné obecnou rovnici kuželosečky procházející pěti danými body a došel k soustavě pěti lineárních rovnic o pěti neznámých. V závěru knihy se potom těmto soustavám věnoval obecně. Předložil zde obecnou metodu řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic; její kořeny popsal pomocí zlomků, v jejichž čitatelích a jmenovatelích se objevily výrazy, kterým dnes říkáme determinanty.

Na základě dochovaných rukopisů skotského matematika Colina Maclaurina (1698–1746), který studentům poskytoval i své dosud nepublikované texty, se oprávněně domníváme, že mu Cramerovo pravidlo bylo známo již koncem dvacátých let 18. století. Roku 1748, dva roky po Maclaurinově smrti, vyšel jeho významný a oblíbený spis *A treatise of algebra* [Ml1], v němž se vyskytuje pasáž obsahující explicitní vyjádření Cramerova pravidla pro soustavu dvou, resp. tří lineárních rovnic o dvou, resp. třech neznámých a rovněž poznámka o soustavě čtyř rovnic o čtyřech neznámých, a to v podobě, která je shodná s přepisem jeho rukopisu z roku 1729. Colin Maclaurin však pravidlo nepopsal tak přesně jako Cramer; nediskutoval mimo jiné situaci, kdy je matice soustavy singulární, a také nevyjádřil zcela přesně znaménka součinů, z nichž se skládá čitatel zlomku. Na tento nedostatek upozornil v roce 2001 A. A. Kosinski, který považoval za původce nepřesností skutečnost, že Maclaurin nepoužíval indexy.

The rule for forming the products is not difficult to state, especially for the denominator of the ratio, which is the same for all unknowns. The rule for signs, the heart of the matter, is almost impossible to state without an appropriate indexing of unknowns. ... in particular, no notice taken of the possibility that the denominator may vanish, rendering the formulas meaningless.

It would be incorrect to attach much blame to Maclaurin for this muddle. In the middle of the 18th century the solution by elimination of systems of linear equations did not present a problem to which a mathematician of Maclaurin's class would attach much attention. ([Ko1], str. 311)

Naopak exaktní popis, který podal Cramer, způsobil kladné přijetí jeho výsledku širokou matematickou komunitou a připojení přívlastku Cramerovo do názvu pravidla. Bližší informace k diskusi o objeviteli Cramerova pravidla může čtenář nalézt v knize *Z historie lineární algebry* [Be6].

Studium výrazů, které se objevují v čitatelích a jmenovatelích zlomků vyjadřujících neznámé, znamenalo postupný rozvoj teorie determinantů, této problematice se již v 18. století věnovalo několik významných matematiků.

Například francouzský matematik Étienne Bézout (1730–1783) popsal rekurentní i obecný způsob vytváření determinantu. Jednotlivé členy získal permutováním indexů a jejich znaménka určil pomocí počtu transpozic. Obdobnými otázkami jako Bézout se zabýval také francouzský matematik, fyzik a astronom Pierre Simon Laplace (1749–1827); oba matematikové používali k označení determinantu slovo *resultant*. K pojmu *reciprokého determinantu* pak dospěl roku 1773 Joseph Louis Lagrange (1736–1813), matematik, fyzik a astronom italsko-francouzského původu.

Podstatný zlom ve studiu determinantů představoval přístup francouzského matematika Alexandra Théophila Vandermonda (1735–1796), který začal s determinanty pracovat jako se samostatnými matematickými objekty a zavedl první symboliku. Výsledky z této oblasti publikoval v práci *Mémoire sur l'élimination* [Va1] z roku 1772 (čteny však byly v pařížské akademii již na začátku roku 1771). Determinant zapisoval pomocí schématu

$$\begin{array}{c|c|c} \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad \end{array}.$$

Do horní části vepisoval řádkové indexy (které často značil písmeny řecké abecedy), do spodní části potom sloupcové indexy (písmena latinské abecedy). Pomocí tohoto zkráceného zápisu definoval determinanty druhého až šestého řádu a popsal jejich rozvoje.

Je suppose encore le système suivant d'abréviations, & que l'on fasse

$$\frac{\alpha|\beta}{a|b} = \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{a}$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma}{a|b|c} = \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta|\gamma}{b|c} + \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta|\gamma}{c|a} + \frac{\alpha}{c} \cdot \frac{\beta|\gamma}{a|b}$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d} = \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta|\gamma|\delta}{b|c|d} - \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta|\gamma|\delta}{c|d|a} + \frac{\alpha}{c} \cdot \frac{\beta|\gamma|\delta}{d|a|b} - \frac{\alpha}{d} \cdot \frac{\beta|\gamma|\delta}{a|b|c}$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{a|b|c|d|e} = \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{b|c|d|e} + \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{c|d|e|a} + \frac{\alpha}{c} \cdot \frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{d|e|a|b} + \frac{\alpha}{d} \cdot \frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{e|a|b|c} + \frac{\alpha}{e} \cdot \frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{a|b|c|d}$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|b|c|d|e|f} = \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{b|c|d|e|f} - \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{c|d|e|f|a} + \&c.$$

Le symbole $-\!\!+\!\!+\!\!-$ *sert ici de caractéristique.*

Les seules choles à observer font l'ordre des signes, & la loi des permutations entre les lettres a, b, c, d, &c. qui me paroissent suffisamment indiqués cidessus. ([Mu2], díl I., str. 18)

Vidíme, že Vandermonde používal dvojí indexy, které však na rozdíl od Leibnize psal nad sebe. Vztah definující determinant druhého řádu odpovídá dnešnímu vyjádření

$$\frac{\alpha|\beta}{a|b} = \begin{vmatrix} r_{\alpha a} & r_{\alpha b} \\ r_{\beta a} & r_{\beta b} \end{vmatrix} = r_{\alpha a} r_{\beta b} - r_{\alpha b} r_{\beta a}.$$

V uvedené symbolice, která bohužel neumožnovala zápis konkrétního číselného determinantu, formuloval několik dnes běžně užívaných vlastností determinantů (tvrzení o transpozici sloupců, o nulovosti determinantu se shodnými řádky, rozvoj determinantu apod.) a rovněž Cramerovo pravidlo. Vandermonde je zcela oprávněně považován za zakladatele teorie determinantů,[2] bližší informace viz např. [Be6].

Ve všech pracích týkajících se soustav lineárních rovnic a determinantů se objevují postupy, které dnes označujeme jako elementární úpravy matic. Studium soustav lineárních rovnic a následný rozvoj teorie determinantů tak připravovaly vznik teorie matic. Další podněty přicházely při studiu bilineárních a kvadratických forem.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855), německý fyzik, astronom, jeden z největších a nejvšestrannějších matematiků všech dob, ve svém slavném díle *Disquisitiones arithmeticae* [Ga1] z roku 1801 vyšetřoval binární a ternární kvadratické formy. Koeficienty ternární kvadratické formy

$$f(x, x', x'') = axx + a'x'x' + a''x''x'' + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$

uspořádal do obdélníkového schématu, v němž do prvního řádku vepsal koeficienty vyskytující se u druhých mocnin neznámých a do druhého řádku koeficienty u smíšených součinů.

Ita

$$axx + a'x'x' + a''x''x'' + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$

[2] Tento názor zaujímal i Thomas Muir (1844–1934), nejuznávanější znalec a historik teorie determinantů.

erit forma ternaria rite ordinata, cuius indeterminata prima x, secunda x', tertia x", coëfficiens primus a etc., quartus b etc. Sed quoniam ad brevitatem multum conferet, si non semper necesse est, indeterminatas formae ternariae per literas peculiares denotare, eandem formam, quatenus ad indeterminatas non respicimus, etiam hoc modo

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

designabimus. ([Ga1], str. 300)

Vidíme tedy, že se nejednalo o reprezentaci ternární kvadratické formy symetrickou maticí v dnešním smyslu. K uvažované ternární kvadratické formě navíc Gauss přiřadil výraz

$$D = abb + a'b'b' + a''b''b'' - aa'a'' - 2bb'b'',$$

který nazval *determinant.* Dnes hovoříme o *diskriminantu formy* a definujeme jej jako záporně vzatý determinant matice

$$\begin{pmatrix} a, & b'', & b' \\ b'', & a', & b \\ b', & b, & a'' \end{pmatrix}$$

příslušné formy. Pro binární kvadratickou formu $axx+2bxy+cyy$ je tedy tímto „determinantem" číslo $b^2 - ac$.

Gauss dále definoval k formě f *adjungovanou (reciprokou) formu* F se schématem

$$\begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix},$$

jejíž koeficienty jsou (v dnešní řeči) záporně vzaté algebraické doplňky matice formy f, tj.

$$A = bb - a'a'', \quad A' = b'b' - aa'', \quad A'' = b''b'' - aa',$$

$$B = ab - b'b'', \quad B' = a'b' - bb'', \quad B'' = a''b'' - bb',$$

a dále uvedl, že adjungovaná forma k formě F je forma, jejíž koeficienty jsou koeficienty formy f vynásobené diskriminantem D, tj.

$$\begin{pmatrix} aD, & a'D, & a''D \\ bD, & b'D, & b''D \end{pmatrix}.$$

Zabýval se i substitucemi forem, které reprezentoval pomocí čtvercových schémat jejich koeficientů. Jelikož se však již jedná v podstatě o matice používané v souladu s dnešními zvyky, ukážeme některé Gaussovy poznatky z této sféry až v dalším textu. Na tomto místě ještě zmiňme, že Gauss znal pro determinanty druhého a třetího řádu větu o násobení determinantů a rovněž větu o reciprokém determinantu.

V roce 1812 prezentovali své výsledky týkající se determinantů francouzští matematikové Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856) a Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). Prvně jmenovaný matematik vyslovil a dokázal větu o násobení determinantů, která se někdy nazývá Binetova. Matematický svět však více ovlivnil příspěvek Cauchyho,[3] který byl v roce 1815 publikován pod názvem *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment* [Ca1] a ve kterém jsou uvedeny základní vlastnosti determinantů a položeny tak pevné základy teorie determinantů. Cauchy se zabýval tzv. symetrickými funkcemi n proměnných, jejichž hodnota se při permutaci neznámých nemění, a symetrickými alternujícími funkcemi n proměnných, jejichž hodnota při permutaci neznámých mění pouze znaménko v závislosti na počtu transpozic příslušné permutace a jejichž reprezentantem je tedy právě determinant. Zavedl rovněž novou symboliku a terminologii. Uvažoval n různých prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a pomocí součinu jejich vzájemných rozdílů vytvořil symetrickou alternující funkci, která byla determinantem. Reprezentoval ji symbolem $S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3} \ldots a_{n\cdot n})$ a k jejímu pojmenování použil termín „determinant".[4] Byl tak prvním matematikem, který uvedený termín použil v dnešním smyslu, později se však vrátil k pojmenování *resultant.* Cauchy dále uspořádal n^2 prvků vyskytujících se v determinantu do čtvercového schématu, tj. v dnešním smyslu do matice.

... on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction symétrique alternée, qui, au lieu d'être représentée par

$$S(\pm a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots\ldots a_n^n),$$

sera représentée par

$$S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3} \ldots\ldots a_{n\cdot n}),$$

le signe S étant relatif aux premiers indices de chaque lettre. Telle est la forme la plus générale des fonctions que je désignerai dans la suite sous le nom de déterminans. Si l'on suppose succesivement

$$n = 1, \qquad n = 2, \qquad \&c\ldots\ldots,$$

on trouvera

$S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2}) = a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} - a_{2\cdot 1} a_{1\cdot 2},$

$S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3}) = a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3} + a_{2\cdot 1} a_{3\cdot 2} a_{1\cdot 3} + a_{3\cdot 1} a_{1\cdot 2} a_{2\cdot 3} - a_{1\cdot 1} a_{3\cdot 2} a_{2\cdot 3} - a_{3\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{1\cdot 3} - a_{2\cdot 1} a_{1\cdot 2} a_{3\cdot 3}$

&c......

pour les déterminans du second, du troisième ordre, &c...... Les quantités affectées d'indices différens devant être généralement osidérées comme inégales, on

[3] Český matematik František Josef Studnička (1836–1903) označil právě Cauchyho za zakladatele teorie determinantů. Viz [St2].

[4] Písmeno S supluje dnes používaný symbol $\sum$, přičemž Cauchy sčítal pomocí prvních indexů.

voit que le déterminant du second ordre renfermera quatre quantités différentes, savoir,

$$\begin{array}{ll} a_{1\cdot1}, & a_{1\cdot2}, \\ a_{2\cdot1}, & a_{2\cdot2}, \end{array}$$

que le déterminant du troisième ordre en renfermera neuf, savoir,

$$\begin{array}{lll} a_{1\cdot1}, & a_{1\cdot2}, & a_{1\cdot3}, \\ a_{2\cdot1}, & a_{2\cdot2}, & a_{2\cdot3}, \\ a_{3\cdot1}, & a_{3\cdot2}, & a_{3\cdot3}, \end{array}$$

&c......

En général, le déterminant du $n^{\cdot\text{ème}}$ *ordre, ou*

$$S(\pm a_{1\cdot1}a_{2\cdot2}a_{3\cdot3}\ldots\ldots a_{n\cdot n}),$$

renfermera un nombre égal à n^2 *de quantités différentes; qui seront respectivement*

$$(I) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} a_{1\cdot1}, & a_{1\cdot2}, & a_{1\cdot3} & \ldots & a_{1\cdot n}, \\ a_{2\cdot1}, & a_{2\cdot2}, & a_{2\cdot3} & \ldots & a_{2\cdot n}, \\ a_{3\cdot1}, & a_{3\cdot2}, & a_{3\cdot3} & \ldots & a_{3\cdot n}, \\ \&c\ldots\ldots & & & & \\ a_{n\cdot1}, & a_{n\cdot2}, & a_{n\cdot3} & \ldots & a_{n\cdot n}. \end{array} \right.$$

([Ca1], str. 52–53)

Cauchy rovněž zavedl nové termíny (*prvky determinantu*, *řádek*, *sloupec*, *prvky hlavní diagonály* atd.). Stejně jako Binet znal větu o násobení determinantů a formuloval Cramerovo pravidlo. V učebnici *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. Première partie: Analyse algébrique* [Ca2] z roku 1821 použil obdélníkové schéma uspořádané z koeficientů nehomogenní soustavy n lineárních rovnic o n neznámých, tj. rozšířenou matici soustavy.

Německý matematik Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) vydal v roce 1841 tři latinsky psané statě o determinantech. Byly napsány stručně, souhrnně, čitelně a srozumitelně, a proto byly hojně využívány ke studiu. Jejich vydání podstatně přispělo ke zvýšení zájmu o teorii determinantů. V první polovině 19. století se ještě studiem determinantů mnoho matematiků nezabývalo, v polovině 19. století se však teorie determinantů stala jednou z klíčových matematických disciplín, determinanty úspěšně pronikaly do řady matematických oborů. Ve druhé polovině 19. století bylo publikováno v této oblasti mnoho prací, mnohé z nich však již nepřinášely podstatně nové výsledky. Významnější z nich věnovaly pozornost některým speciálním typům determinantů (funkcionálním determinantům v matematické analýze, ortogonálním determinantům v teorii kvadratických forem a v geometrii, Hankelovým determinantům v teorii invariantů a algebraických rovnic atd.) a různým zobecněním (především nekonečným determinantům, kubickým a n-rozměrným determinantům, tzv. permanentům, determinoidům apod.).

Ve druhé polovině 19. století se však o své uznání v matematickém světě zvolna hlásila nová matematická disciplína – teorie matic.

1.3 Lineární transformace a substituce

Velmi podstatné impulsy k situování koeficientů do čtvercových či obdélníkových schémat přicházely z oblasti studia lineárních transformací a substitucí.

Transformacemi kartézských souřadnic, kterým odpovídají ortogonální matice, se zabýval např. švýcarský matematik, fyzik a astronom Leonhard Euler (1707–1783). Tuto problematiku u něho nalezneme například v práci o magických čtvercích z roku 1771 nazvané *Problema algebraicum ab affectiones prorsus singulares memorabile.*

Carl Friedrich Gauss ve výše zmíněné knize *Disquisitiones arithmeticae* z roku 1801 použil k vyjádření lineární substituce

$$\begin{aligned} x &= \alpha y + \beta y' + \gamma y'' \\ x' &= \alpha' y + \beta' y' + \gamma' y'' \\ x'' &= \alpha'' y + \beta'' y' + \gamma'' y'' \end{aligned}$$

čtvercové schéma

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}$$

a přiřadil jí výraz

$$k = \alpha\beta'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' + \gamma\alpha'\beta'' - \gamma\beta'\alpha'' - \alpha\gamma'\beta'' - \beta\alpha'\gamma'',$$

tj. determinant příslušné matice. Uvedl, že mezi (v dnešní řeči) diskriminantem D formy f a diskriminantem E formy g, jež vznikla z formy f uvedenou substitucí, platí vztah $E = kkD$.

Gauss rovněž reprezentoval reciprokou substituci (k substituci výše uvedené) schématem

$$\begin{matrix} \beta'\gamma'' - \beta''\gamma', & \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha', & \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' \\ \beta''\gamma - \beta\gamma'', & \gamma''\alpha - \gamma\alpha'', & \alpha''\beta - \alpha\beta'' \\ \beta\gamma' - \beta'\gamma, & \gamma\alpha' - \gamma'\alpha, & \alpha\beta' - \alpha'\beta \end{matrix} .$$

Substituci vzniklou složením původní a reciproké substituce zapsal pomocí schématu

$$\begin{matrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{matrix} .$$

Zamyslíme-li se nad uvedenými vztahy, usoudíme, že se čtvercovými schématy ještě nebylo manipulováno tak, jak jsme v současnosti zvyklí. Ponecháme-li Gaussovo značení pro reciprokou substituci (v dnešním výkladu by se jednalo o transponovanou reciprokou matici nebo též matici složenou z algebraických doplňků prvků, v níž se algebraický doplněk prvku vyskytuje na stejné pozici jako příslušný prvek), musíme k získání výsledného systému skládat schémata pro nás neobvyklým způsobem. Například prvek na druhém řádku a v prvním sloupci výsledného schématu získáme (v dnešní řeči) vynásobením prvního řádku původní matice s druhým řádkem reciproké matice.

Násobení matic v dnešním smyslu se však v témže díle vyskytuje. Gauss se totiž rovněž zabýval skládáním obecných substitucí, jehož výsledek opět reprezentoval čtvercovým schématem. Na základě níže uvedených ukázek je zřejmé, že zápis skládání substitucí pomocí maticové symboliky ještě nebyl důsledně přijat ani v této Gaussově práci. Při skládání lineárních forem totiž reprezentaci schémata koeficientů nepoužil:

Si forma F formam F' implicat, haec vero formam F" , forma F etiam formam F" implicabit.

Sint indeterminatae formarum F, F', F" respective x, y; x', y'; x", y" transeatque F in F' ponendo

$$x = \alpha x' + \beta y', \qquad y = \gamma x' + \delta y'$$

F' in F" ponendo

$$x' = \alpha' x'' + \beta' y'', \qquad y' = \gamma' x'' + \delta' y''$$

patetque, F in F" transmutatum iri ponendo

$$x = \alpha(\alpha' x'' + \beta' y'') + \beta(\gamma' x'' + \delta' y''), \quad y = \gamma(\alpha' x'' + \beta' y'') + \delta(\gamma' x'' + \delta' y'')$$

sive

$$x = (\alpha\alpha' + \beta\gamma')x'' + (\alpha\beta' + \beta\delta')y'', \quad y = (\gamma\alpha' + \delta\gamma')x'' + (\gamma\beta' + \delta\delta')y''$$

([GaW], díl I., str. 126)

Naopak v jiné části textu dvě substituce reprezentoval odpovídajícími schématy a totéž učinil i s výslednou substitucí:

Si forma ternaria f formam ternariam f' implicat, atque haec formam f": implicabit etiam f ipsam f". Facillime enim perspicietur, si transeat

$$\begin{array}{ccc} f \text{ in } f' \text{ persubstitutionem} & & f' \text{ in } f'' \text{ persubstitutionem} \\ \alpha, \ \beta, \ \gamma & | & \delta, \ \varepsilon, \ \zeta \\ \alpha', \ \beta', \ \gamma' & | & \delta', \ \varepsilon', \ \zeta' \\ \alpha'', \ \beta'', \ \gamma'' & | & \delta'', \ \varepsilon'', \ \zeta'' \end{array}$$

f transmutatum iri per substitutionem

$$\begin{array}{lll} \alpha\delta + \beta\delta' + \gamma\delta'', & \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon' + \gamma\varepsilon'', & \alpha\zeta + \beta\zeta' + \gamma\zeta'' \\ \alpha'\delta + \beta'\delta' + \gamma'\delta'', & \alpha'\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \gamma'\varepsilon'', & \alpha'\zeta + \beta'\zeta' + \gamma'\zeta'' \\ \alpha''\delta + \beta''\delta' + \gamma''\delta'', & \alpha''\varepsilon + \beta''\varepsilon' + \gamma''\varepsilon'', & \alpha''\zeta + \beta''\zeta' + \gamma''\zeta'' \end{array} .$$

([GaW], díl I., str. 304–305)

Porovnáním prvků na všech pozicích zjistíme, že se jedná o maticové násobení v dnešním smyslu.

I přes znalost tohoto maticového vyjádření kompozice dvou substitucí nenalézáme v Gaussově práci maticový zápis transformace kvadratické formy lineární substitucí s příslušným schématem (maticí). Důvod je prostý. Jak již bylo řečeno, autor kvadratickou formu nezapisoval pomocí čtvercové symetrické matice.

Tuto reprezentaci nalezl Gaussův žák, německý matematik Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823–1852). V článku *Neue Theoreme der höheren Arithmetik* [Ei1] z roku 1847 zapsal matici formy f již v dnešním smyslu (*das Formensystem der Form*). Často se však držel značení svého učitele, jehož vliv je čitelný i z následujícího úryvku.

... ist eine ternäre quadratische Form oder schlechthin eine ternäre Form ein Ausdruck von folgender Gestalt:

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx' = f,$$

in welchem die Coëfficienten a, a', a", b, b', b" gegebene, die Grössen x, x', x'' *unbestimmte oder variable ganze Zahlen vorstellen. Die Form*

$$Ax^2 + A'x'^2 + A''x''^2 + 2Bx'x'' + 2B'xx'' + 2B''xx' = F,$$

in welcher

$$\begin{array}{lll} A = b^2 - a'a'', & A' = b'^2 - aa'', & A'' = b''^2 - aa', \\ B = ab - b'b'', & B' = a'b' - bb'', & B'' = a''b'' - bb' \end{array}$$

ist, nennt Gauss die zugeordnete Form der Form f. Die Determinante der Form f ist die Coëfficientenverbindung

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' = D;$$

sie ist zugleich die negative Determinante des linearen Systems

$$\begin{pmatrix} a, & b'', & b' \\ b'', & a', & b \\ b', & b, & a'' \end{pmatrix},$$

welches ich das Formensystem der Form f nenne; das umgekehrte System des Formensystems mit der Determinante des letztern, d. h. mit $-D$, *multiplicirt, liefert das Formensystem der zugeordneten Form; die Determinante der zugeordneten Form ist* $= D^2$, *und die zugeordnete von der zugeordneten* $= Df$, *d. h. sie geht aus f hervor, wenn man alle sechs Coëfficienten mit D multiplicirt. Wenn f durch eine lineare Substitution*

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha' & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix} = S,$$

deren Coëfficienten ganze Zahlen und deren Determinante $= +1$ *ist, in eine andere ternäre Form f' übergeht ...* ([EiW], díl I., str. 483–484)

Eisenstein si dobře uvědomoval výhodu používání čtvercových schémat k zápisu lineárních substitucí, s nimiž pracoval (již od roku 1844) převážně v souvislosti se studiem binárních a ternárních kvadratických a kubických forem.

Substituce nazýval různými termíny (*lineare System*, *Substitution* nebo také *Substitutions-System*) a chápal je již jako samostatné objekty. Často je psal do kulatých závorek a značil čísly nebo písmeny. Maticovou symboliku využíval i pro zápis skládání a invertování substitucí.

1.4 Počátky pojmu a termínu „matice"

Na vznik a vývoj teorie matic měla zásadní vliv dvojice britských matematiků – Arthur Cayley (1821–1895) a James Joseph Sylvester (1814–1897). Vedle své matematické dráhy zastávali oba jistou dobu funkci advokátů, kterou vykonávali dokonce na témže soudním dvoře v Londýně. Seznámili se roku 1850, přes odlišné temperamenty a víru se stali přáteli.

Roku 1841 zavedl Cayley v práci *On a theorem in the geometry of position* [Cy1] dnes používané značení determinantu dvěma svislými čarami umístěnými po stranách čtvercového schématu a uvedl rekurentní vyjádření determinantu pomocí rozvoje podle prvního sloupce. O dva roky později užíval také symbolu dvou dvojitých svislých čar na každé straně schématu, kterým dnes značíme matici. Ve větě o násobení determinantů násobil řádky jedné matice s řádky druhé matice. O další dva roky později násobil matice „po sloupcích". Roku 1855 publikoval práci *Remarques sur la notation des fonctions algébriques* [Cy2], v níž naopak používal značení z roku 1841 (tj. jednoduché svislé čáry) k označení matice, zavedl termín *matrix*, matice využil k vyjádření lineární závislosti dvou skupin veličin, k reprezentaci lineárních forem a k jejich skládání. Matice přitom násobil tak, jak je násobíme dnes. Poukázal na význam tohoto pojmu, psal již o *teorii matic* a vyjádřil své stanovisko, že by měla předcházet teorii determinantů.

... Il faut faire attention, dans la composition des matrices, de combier les lignes de la matrice à gauche avec les colonnes de la matrice à droide; pour former les lignes de la matrice composée. Il y aurait bien des choses à dire sur cette théorie de matrices, laquelle doit, il me semble, précéder la théorie de Déterminants. ([CyP], díl II., str. 187)

Pojem (obdélníkové) matice a termín *matrix* byl zaveden Sylvesterem roku 1850 v článku *Additions to the articles "On a new class of theorems", and "On Pascal's theorem"* [Sy2].[5] Hlavním tématem této práce byly subdeterminanty

[5] V roce 1997 publikoval Richard William Farebrother článek *A. C. Aitken and the Consolation of Matrix Theory* [Fh1], ve kterém se zmínil o původu slova „matrix":

In the sixteenth and seventeenth centuries the word matrix was used to refer to the uterus or womb of a female creature. This usage is most familiar from Tyndale's translation of the Bible into the English language and in the subsequent edition authorized by King James I; for example, see the Book of Exodus, Chapter 13, verse 15 and Chapter 34, verse 19.

In the eighteenth century this usage was extended to geology, pottery, and foundry work. In geology the word matrix refers to the mass of rock in which a fossil or gemstone is embedded, and in pottery and foundrywork it refers to the mold in which the utensil is to be cast.

The modern mathematical use of the word was introduced by Sylvester in 1850 ... ([Fh1], str. 4).

James Joseph Sylvester, autor spisu *The Laws of Verse*, se i v odborných matematických textech často vyjadřoval pomocí neobvyklých, poetických přirovnání. V jednom z nich, v článku *On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadra-*

a jejich nulovost, resp. nenulovost. K pojmu hodnosti, která byla později právě pomocí nulovosti subdeterminantů definována, však Sylvester nedospěl.

For this purpose we must commence, not with a square, but with an oblong arrangement of terms consisting, suppose, of m lines and n columns. This will not in itself represent a determinant, but is, as it were, a Matrix out of which we may form various systems of determinants by fixing upon a number p, and selecting at will p lines and p columns, the squares corresponding to which may be termed determinants of the pth order. ([CyP], díl I., str. 150)

James Joseph Sylvester zapsal determinant pomocí čtvercového schématu již v roce 1840. Tehdy však ještě nepoužil žádných symbolů pro ohraničení tohoto seskupení koeficientů. Rovněž v jeho pozdějších pracích byla terminologie i symbolika ještě značně rozkolísaná. Například determinant značil jak způsobem, který použil Cayley v roce 1841, tak dvouřádkovým schématem evokujícím značení Vandermondeovo. V roce 1853 publikoval jako součást článku *On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the gratest algebraical common measure* [Sy6] slovníček pojmů, v němž matici definoval jako čtvercové či obdélníkové uspořádání prvků do řádků a sloupců. Z následujícího citátu (i z předchozí ukázky) je vidět, že výchozím pojmem byla pro britského matematika matice a že determinant byl tvořen až z dané matice. Zmíněný přístup byl v té době zcela ojedinělý.

Matrix. – A square or rectangular arrangement of terms in lines and columns.
Minor Determinant. – Any determinant retained represented by a square group of terms arbitrarily chosen out of a matrix is a minor determinant thereto. The simple terms of the matrix are the last minors, and of course if the matrix is a square, it will itself in its totality represent a single complete determinant. ([CyP], díl I., str. 583, 585)

V předchozích odstavcích jsme uvedli poměrně podrobně vývoj maticové symboliky, představili jsme různé způsoby násobení matic (používané dokonce týmž autorem) a obeznámili čtenáře s postupným ustalováním pojmu a termínu matice. Dokumentovali jsme tím pomalé utváření základních prostředků sloužících teorii matic. V počátcích byl její vývoj výrazně ovlivňován teorií determinantů, jejíž pozice byla velmi pevná. Většina matematiků, kteří se v té době zabývali tématikou dnes řazenou k lineární algebře, soustředila totiž svůj zájem právě na teorii determinantů.

Nadvládu determinantů lze doložit například nejednotným násobením matic, neboť z hlediska teorie determinantů je ve větě o násobení determinantů (vzhledem k rovnosti determinantů navzájem transponovaných matic) zcela lhostejné, zda násobíme matice „po řádcích“, „po sloupcích“, nebo mezi sebou

---

tic functions [Sy3], použil v souvislosti s pojmem matice, resp. přímo při odvolávání se na vlastní první definici matice také slovo „womb“:

I have in previous papers defined a „Matrix“ as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent; ... ([Sy3], str. 247) násobíme řádky jedné matice se sloupci matice druhé. Problém nejednotného násobení matic se táhne jako Ariadnina nit mnoha matematickými monografiemi, učebnicemi a články až do dvacátých let 20. století. Některé texty obsahující dnes již nepoužívané způsoby násobení matic byly publikovány ještě ve třicátých letech.

Postupné přijímání maticové řeči a symboliky začalo ve větší míře až na přelomu 19. a 20. století.

1.5 Vznik teorie matic

Vznik teorie matic je obvykle datován rokem 1858, kdy byl v časopisu Philosophical Transactions of the Royal Society of London publikován článek Arthura Cayleyho *A memoir on the theory of matrices* [Cy3].

Jako podnět pro zavedení pojmu matice označil A. Cayley zkrácený zápis soustavy lineárních rovnic. Hned v úvodu práce napsal, že pod pojmem matice bude uvažovat, nebude-li blíže určeno, čtvercové schéma nějakých prvků. Matice vnímal jako samostatné objekty, značil je novým způsobem: první řádek ohraničil kulatými závorkami, na něž navazují svislé rovné čáry podél zbývajících řádků.

The term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, e. g.

$$\left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)$$

is said to be a matrix. The notation of such a matrix arises naturally from an abbreviated notation for a set of linear equations, viz. the equations

$$\begin{array}{rcl} X & = & ax+by+cz, \\ Y & = & a'x+b'y+c'z, \\ Z & = & a''x+b''y+c''z, \end{array}$$

may be more simply represented by

$$(X,Y,Z) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)\!\!\left(\begin{array}{ccc} x, & y, & z \end{array}\right),$$

and the consideration of such a system of equations leads to most of the fundamental notions in the theory of matrices. It will be seen that matrices (attending only to those of the same order) comport themselves as single quantities; they can be added, multiplied or compounded together, ...
([Cy3], str. 17, nebo [CyP], díl II., str. 475–476)

Takřka celý text je věnován čtvercovým maticím, obdélníkové (dělené na *široké* a *hluboké*) jsou zmíněny až na posledních třech stránkách. Autor se navíc často omezoval na matice druhého a třetího řádu a stejné restrikce použil i v důkazech.

... The theory of rectangular matrices appears much less important than that of square matrices, and I have not entered into it further than by showing how some of the notions applicable to these may be extended to rectangular matrices.

... the matrices written down at full length will in general be of the order 3, but it is to be understood that the definitions, reasonings, and conclusions apply to matrices of any degree whatever.
([Cy3], str. 18, nebo [CyP], díl II., str. 476)

V práci jsou zavedeny základní maticové operace a ukázány jejich vlastnosti (sčítání motivované sčítáním lineárních substitucí, násobení matice skalárem, distributivní zákon násobení skalárem vzhledem ke sčítání, násobení matic motivované skládáním lineárních substitucí – jednalo se tedy o násobení matic dle dnešních zvyklostí). Představeny byly nulová a jednotková matice, uvedeno tvrzení o existenci netriviálních dělitelů nuly v okruhu čtvercových matic daného řádu, definována mocnina matice, a to včetně nulového a záporného exponentu (inverzní matice, existuje-li, je vyjádřena pomocí determinantu a reciproké matice), popsány některé další speciální typy matic (symetrická, antisymetrická), zavedena transponovaná matice, studovány byly jejich vlastnosti a hledány komutující matice a rovněž matice L, M, pro které platí $LM = -ML$ (tzv. *skew convertible*).

Cayley dále uvažoval takové *skew convertible* matice L, M druhého řádu, pro které je $L^2 = -1, M^2 = -1$ (kde 1 značí jednotkovou matici), a dále matici $N = LM = -ML$. Potom je

$$N^2 = -1, \quad L = MN = -NM, \quad M = NL = -LN.$$

Cayley poznamenal, že tak získal těleso kvaternionů.

Zvolíme-li vhodně matice L, M (čímž je dána i matice N) vyhovující daným vztahům

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

lze každému kvaternionu $a + bi + cj + dk$ přiřadit lineární kombinaci

$$aE + bL + cM + dN,$$

kde E je jednotková matice. Dostaneme tak matici

$$L = \begin{pmatrix} a + d\,\mathrm{i} & b + c\,\mathrm{i} \\ -b + c\,\mathrm{i} & a - d\,\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Popsané zobrazení je izomorfismus mezi tělesem kvaternionů a tělesem komplexních matic druhého řádu výše uvedeného tvaru.

Nejvýznamnějším přínosem Cayleyho článku byla formulace tvrzení, že každá matice je kořenem svého charakteristického polynomu. Dnes je známo pod názvem Cayleyova-Hamiltonova věta, Arthur Cayley ji nazýval *general theorem*, resp. *remarkable theorem*, zapsal ji ve velmi zajímavém tvaru

$$Det.(\widetilde{1} \cdot M - \widetilde{M} \cdot 1) = 0,$$

v němž bychom na první pohled zmíněnou větu těžko identifikovali. Vztah se však objasní, uvážíme-li, že Cayley značil jednotkovou matici 1 a v uvedené rovnici je již za λ dosazena matice M (vlnka označuje veličinu chápanou jako skalár). Větu autor dokázal pouze pro matice druhého řádu a poznamenal, že necítí potřebu větu dokazovat v obecném případě. Použití věty demonstroval na několika příkladech. Například k dané matici M druhého řádu hledal matice M^2 a M^3 nebo matici L, pro kterou platí $L^2 = M$.

Uveďme však, že význam tohoto jedenadvacetistránkového článku je často přeceňován. Ve skutečnosti neměl pro rozvoj teorie matic tak velký vliv; k označení právě této práce za počátek teorie matic zřejmě přispěl jak její název, v němž je použito slovní spojení *theory of matrices*, tak její propagace Sylvesterem, který byl v té době uznávanou autoritou. V článku *Lectures on the principles of universal algebra* [Sy14] z roku 1884 například napsal:

This step was, as far as I know, first made by Cayley in his memoir on Matrices, in the Phil. Trans. 1858, wherein he may be said to have laid the foundation-stone of the science of multiple quantity. That memoir indeed (it seems to me) may with truth be affirmed to have ushered in the reign of Algebra the 2nd; ... ([Sy14], str. 209)

Analýza názorů matematiků a historiků matematiky na otázku zakladatele teorie matic je přehledně zpracována v monografii [Be6]. Význam Cayleyho memoáru je diskutován např. v článcích Thomase Hawkinse *The theory of matrices in the 19th century* [Hw2], *Cauchy and the spectral theory of matrices* [Hw3], *Another look at Cayley and the theory of matrices* [Hw4] a *Weierstrass and the theory of matrices* [Hw5]. Znovu zdůrazněme, že velkým přínosem Cayleyho článku bylo zveřejnění Cayleyovy-Hamiltonovy věty.

Problematika Cayleyovy-Hamiltonovy věty poutala pozornost i jiných matematiků. Již roku 1853 bylo v knize *Lectures on Quaternions* [Ha1] publikováno analogické tvrzení pro kvaterniony. Autorem této monografie je irský matematik, fyzik a astronom William Rowan Hamilton[6] (1805–1865), který tento fakt znal již roku 1846. Právě tato skutečnost dala matematickému výsledku současné jméno. Důkaz věty podalo více matematiků, poměrně často se však jedná o důkazy, které nejsou z dnešního pohledu zcela korektní; připomeňme alespoň jména Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886, důkaz roku 1867) či Georg Ferdinand Frobenius (1849–1917, 1878). Důkaz anglického matematika Arthura Buchheima (1859–1888), který vyšel v krátkém příspěvku roku 1883/1884 v časopisu Messenger of Mathematics, se v mírně pozměněné verzi objevuje dodnes

[6] William Rowan Hamilton je objevitelem kvaternionů. Jejich studiu věnoval značnou část života, publikoval o nich řadu prací. Za všechny jmenujme alespoň dvě rozsáhlé monografie: již zmíněnou *Lectures on Quaternions* a *Elements of Quaternions* [Ha2] publikovanou roku 1866. Pro zajímavost uveďme, že zásadní vztah pro násobení jednotek $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ vyjádřený rovností $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$ napadl W. R. Hamiltona při procházce v Dublinu – ihned jej nožem vyryl do kamene mostu Brougham Bridge.

v učebnicích lineární algebry. Jisté je, že roku 1884 důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty znali[7] čeští matematikové Ludvík Kraus (1857–1885) a Eduard Weyr (1852–1903). V témže roce byl v časopisu Nature otištěn Sylvesterův příspěvek, v němž se o tvrzení píše jako o Cayleyově-Hamiltonově větě.

V závěru této části popišme, do jaké atmosféry se teorie matic zrodila a čím byly její první kroky ovlivněny. Zdůrazněme znovu překvapivou skutečnost, že vznik teorie determinantů předchází zrodu teorii matic o více než jedno století. Morris Kline (1908–1992) v publikaci *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* [Kl1] v roce 1972 napsal:

One could say that the subject of matrices was well developed before it was created. Determinants, ..., were studied from the middle of the eighteenth century onward. A determinant contains an array of numbers and usually one is concerned with the value of that array, given by the definition of the determinant. However, it was apparent from the immense amount of work on determinants that the array itself could be studied and manipulated for many purposes whether or not the value of the determinant came into question. It remained then to recognize that the array as such should be given an identity independent of the determinant. The array itself is called a matrix.

... the idea of a matrix precedes that of a determinant but historically the order was the reverse and this is why the basic properties of matrices were already clear by the time that matrices were introduced. ([Kl1], str. 804–805)

I po vzniku teorie matic však většina matematiků vyjadřovala své výsledky z oblastí, které bychom dnes jednoznačně řadili k této teorii, v řeči bilineárních a kvadratických forem, neboť právě jim a teorii determinantů byla stále věnována značná pozornost. Teorie matic byla do jisté míry přijata britskými a americkými matematiky, na evropském kontinentu se jí však matematikové příliš nevěnovali. Nejvýraznější výjimkou byl pražský matematik Eduard Weyr.[8]

Druhá polovina 19. století je rovněž epochou, ve které se mnoho matematiků usilovně zabývalo otázkami rozšiřování číselných oborů. Studium této problematiky dávalo cenné podněty k rozvoji teorie hyperkomplexních čísel, z níž se ve 20. století zrodila teorie algeber. Matematikové se dále soustředili na vektorový počet, permutace, substituce a transformace, uvědomovali si, že aritmetické operace a jejich vlastnosti mohou být abstrahovány od číselných oborů do mnohem obecnějších sfér. V tomto období se vytvářela řada nových pojmů: *grupa*, *okruh*, *obor integrity*, *těleso* či *vektorový prostor*. Rodila se moderní strukturální algebra.

1.6 Teorie matic v období 1858–1900

Mnohé maticové úvahy druhé poloviny 19. století se kromě snah o důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty stočily k otázce bloků matic, jejich determinantů, tj. subdeterminantů, a k otázce hodnosti (resp. nulity) matice.

[7] Viz 2. kapitola.

[8] Bližší informace o komplikovaném prolínání zmíněných teorií nalezne čtenář v závěru této kapitoly, Weyrovy výsledky pak v kapitole následující.

Roku 1858 publikoval Arthur Cayley vedle slavného memoáru o maticích také práci *A memoir on the automorphic linear transformation of a bipartite quadric function* [Cy4], v níž vyjádřil bilineární formu pomocí matice a studoval její přeměnu určenou jistou lineární transformací. S využitím dnešní terminologie bychom tento problém popsali takto: je-li A matice bilineární formy na prostoru V vzhledem ke dvojici bází G, G' a matice B, resp. C jsou matice přechodu od báze G k bázi H, resp. od báze G' k bázi H', potom matice $B^T AC$ je maticí uvažované formy vzhledem k bázím H a H'.

V pátém svazku *English Cyclopaedia* z roku 1860 vysvětlil Cayley ve svém příspěvku *Mathematics, recent terminology in* [Cy6] několik pojmů a termínů, např. *matice*, *determinant*, *rezultant*, *invariant*, *kovariant*, *lineární transformace* či *grupa*. Po roce 1860 se však maticím věnoval spíše sporadicky. Z jeho publikovaných výsledků zmiňme alespoň tvrzení, že n-tá mocnina matice druhého řádu se dá zapsat jako lineární kombinace uvažované matice a jednotkové matice, z více specializovaných oblastí studia připomeňme problematiku reálných symetrických matic s dvojnásobným nulovým vlastním číslem.

Některé výsledky z teorie matic publikoval i anglický matematik, spisovatel a fotograf Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898), který je známý spíše pod pseudonymem Lewis Carroll jako autor knih *Alenka v říši divů* a *Alenka za zrcadlem*. V díle *Elementary treatise on determinants with their application to simultaneous linear equations and algebraical geometry* [Do1] z roku 1867 definoval *blok matice* a pro čtvercové bloky jejich *minor* (tj. subdeterminant).

If mn quantities be so placed as to form m rows and n columns: they are said to form a Block; and the mn quantities are called the Elements of such a Block. ...

... If, in a given Block, any rows, and as many columns, be selected: the square Block formed of their common Elements is called a Minor of the given Block. ([Do1], str. 6–7)

Zajímavá byla Dodgsonova symbolika, neboť k zápisu prvků determinantu používal dvojice indexů oddělených zpětným lomítkem (např. $1 \setminus 2$) a matice ohraničoval z obou stran svorkami, a také skutečnost, že k vyjádření základních vlastností determinantů využíval bloky matic.

Francouzský matematik Edmond Nicolas Laguerre, kterého jsme již zmínili v souvislosti s důkazem Cayleyovy-Hamiltonovy věty, nazýval matice *lineární systémy* a zapisoval je bez jakýchkoli závorek. V práci *Sur le calcul des systèmes linéaires* [Lr1] z roku 1867 definoval sčítání a násobení matic, skalární, transponované, reciproké, symetrické a antisymetrické matice a zformuloval některé jejich vlastnosti. Zmíněné násobení zavedl již dnešním způsobem.

Multiplication. – Soient deux systèmes de même ordre A et B: si on les compose suivant la règle ordinaire, on obtiendra un troisième système que je définirai comme étant le produit de A par B; si l'on désigne ce système par C, le mode relation ainsi défini sera exprimé par la relation

$$C = AB.$$

Ainsi, si l'on prend

$$A = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \qquad et \qquad B = \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix},$$

on obtiendra

$$C = \begin{matrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{matrix}.$$

L'ordre dans lequel on effectue une multiplication n'est pas, comme on le sait, indifférent, et il faudra toujours bien distinguer l'ordre dans lequel on doit prendre les facteurs. ([LrO], díl I., str. 222)

Později zapisoval maticově i transformaci rovnice plochy třetího stupně.

Roku 1882 vyšel (posmrtně) pětistránkový článek *A fragment on matrices* [Cl1] anglického matematika Williama Kingdona Clifforda (1845–1879), v němž lze při troše dobré vůle nalézt první jiskřičku k budování pojmu hodnost matice. V této stati jsou formulace signalizující pochopení různé „míry singularity" matice. Clifford rozdělil singulární matice třetího řádu na matice *indeterminate in the first degree* (v dnešní řeči matice s hodností dva) a matice *indeterminate in the second degree* (matice s hodností jedna). Zmíněná klasifikace je provedena na základě nulovosti a nenulovosti subdeterminantů.

… An indeterminate matrix (or more definitely, a matrix indeterminate in the first degree) is a matrix the determinant of which vanishes, but for which the first minors do not all of them vanish … A matrix indeterminate in the second degree is a matrix for which all the first minors vanish, or what is the same thing, one for which the second and third rows are mere multiples of the first row. ([ClP], str. 337)

Německý matematik Georg Ferdinand Frobenius, žák Kummera, Kroneckera a Weierstrasse, dlouho odmítal vyjadřovat své myšlenky z teorie matic v její řeči. Až do roku 1896 preferoval formulaci výsledků v řeči bilineárních a kvadratických forem či determinantů. Takto se zachoval také v roce 1879, kdy v článcích *Über homogene totale Differentialgleichungen* [Fr3] a *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten* [Fr4] zavedl pojem hodnost. V prvním textu definoval *hodnost determinantu*, v druhém pak *hodnost obdélníkového schématu*. Jedná se (z dnešního pohledu) o definici hodnosti čtvercové, resp. obdélníkové matice.

Wenn in einer Determinante alle Unterdeterminanten $(m+1)$*ten Grades verschwinden, die* m*ten Grades aber nicht sämmtlich Null sind, so nenne ich* m *den Rang der Determinante.* ([FrA], díl I., str. 435)

Gegeben sei ein endliches System $\mathbb{A}$ *von Grössen* $a_{\alpha\beta}$ $(\alpha = 1, \ldots m;$ $\beta = 1, \ldots n)$*, die nach Zeilen und Colonnen geordnet sind. Wenn in demselben alle Determinanten* $(l+1)$*ten Grades verschwinden, die* l*ten Grades aber nicht sämmtlich Null sind, so heisst* l *den Rang des Systems.* ([FrA], díl I., str. 484)

Pro čtvercové matice lze pojem hodnosti nahradit pojmem *nulita*. Jedná se o rozdíl řádu matice a její hodnosti.

Definici nulity publikoval roku 1882 James Joseph Sylvester v krátké dvoustránkové práci *On the properties of a split matrix* [Sy9]. Zveřejnil dále odhad nulity součinu matic: je větší nebo rovna nulitě každé z matic a menší nebo rovna jejich součtu.

... the nullity of a matrix of the order ω being regarded as unity, when its determinant simply is zero, as 2 when each first minor simply is zero, as 3 when each second minor is zero ... as $(\omega - 1)$ when each quadratic minor is zero and as ω (or absolute) when every elements is zero. ... If any number of matrices of the same order be multiplied together, the nullity of their product is not less than the nullity of any single factor and not greater than the sum of the nullities of all the several factors. ([SyP], díl III., str. 646)

Problematice nulity se věnoval i v dalších letech;[9] uvedené nerovnosti jsou někdy nazývány Sylvesterovy vzorce.

Práce zabývající se hodností, resp. nulitou matic publikoval rovněž německý matematik Leopold Kronecker (1823–1891), a také Eduard Weyr.[10]

Pojem hodnost matice máme dnes neodmyslitelně spjat s otázkou řešitelnosti soustavy lineárních rovnic, resp. s tzv. *Frobeniovou větou.* Z následujících řádků bude evidentní, že přívlastek Frobeniova není zcela adekvátní. Věta je nazývána též Kroneckerova, Kroneckerova-Capelliova apod.

Studium soustav lineárních rovnic bylo „zpomaleno“ Cramerovým pravidlem, které svou oblíbeností a rozšířením způsobilo odklon od zkoumání obecné nehomogenní soustavy rovnic se singulární, resp. obdélníkovou maticí. Pro složitější soustavy však bylo Cramerovo pravidlo zdlouhavé, v některých případech dokonce těžko použitelné. Efektivnější metodu řešení představil Gauss roku 1810 v práci *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis* [Ga2], v níž při výpočtu dráhy planetky Pallas sestavil soustavu dvanácti rovnic o šesti neznámých, provedl eliminaci neznámých a získal ekvivalentní soustavu „v trojúhelníkovém tvaru“. Dnes tento algoritmus nazýváme *Gaussovou eliminační metodou.* Obdobný postup pro soustavu s regulární maticí však byl znám již ve staré Číně dva tisíce let před Gaussem, jak bylo výše uvedeno.

Již jsme viděli, že pojem hodnosti byl zaveden až koncem sedmdesátých let 19. století, a to pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů. I nutnou a postačující podmínku řešitelnosti dané soustavy lineárních rovnic se někteří

[9] Například v práci *On involutants and other allied species of invariants to matrix systems* [Sy11] z roku 1884 definoval nulitu mnohem čitelněji než při jejím zavedení o dva roky dříve:

... the nullity is said to be i when every minor of the order $(\omega - i + 1)$ and consequently of each superior order, is zero. ([SyP], díl IV., str. 133)

V téže práci znovu uvedl také zmíněný odhad (*the law of nullity*), o kterém se vyjádřil takto:

The law of nullity which I am about to enunciate is one of paramount importance in the theory of matrices.

The law is that the nullity of the product of two (and therefore of any number of) matrices cannot be less than the nullity of any factor nor greater than the sum of the nullities of the several factors which make up the product. ([SyP], díl IV., str. 133–134)

Problematiku nulity matice studoval Sylvester i ve svém článku *Sur l'équation en matrices* $px = xq$ [Sy12] z roku 1884.

[10] Bližší informace o Weyrových úvahách z této oblasti nalezne čtenář v 2. kapitole.

matematikové snažili vyjádřit pomocí těchto vlastností. Například ve slavné monografii německého matematika Heinricha Richarda Baltzera (1818–1887) z roku 1857 nazvané *Theorie und Anwendung der Determinanten* [Bz1] je pro homogenní soustavu se čtvercovou maticí řádu n uvedeno, že má-li matice soustavy nenulový subdeterminant řádu k a všechny subdeterminanty vyšších řádu jsou rovny nule, pak má řešení soustavy dimenzi $n - k$.

Irský matematik Henry John Stanley Smith (1826–1883) definoval roku 1861 v práci *On systems of linear indeterminate equations and congruences* [Sm2] pro soustavu lineárních rovnic pojmy *matice soustavy* (*unaugmented array*) a *rozšířená matice soustavy* (*augmented array*).

Charles Lutwidge Dodgson v již zmíněné knize *Elementary treatise on determinants with their application to simultaneous linear equations and algebraical geometry* z roku 1867 označil tytéž pojmy pro soustavu n rovnic o m neznámých termíny *V-Block*, resp. *B-Block*, subdeterminanty těchto matic nejvyššího možného řádu *principal Minors*. Matici, v níž jsou všechny *principal Minors* rovny nule, nazval *evanescent*. Pomocí těchto pojmů pak ve třetí kapitole přehledně zformuloval a dokázal devatenáct tvrzení o řešitelnosti a tvaru množiny všech řešení jednotlivých typů soustav. Ve čtvrté, třístránkové kapitole nazvané *Tests for consistency of equations* pak uvedl shrnutí předcházející kapitoly. Nutnou a postačující podmínku pro řešitelnost nehomogenní soustavy lineárních rovnic zapsal ve tvaru:

> *If there be given n Equations, not all homogenous, containing Variables: a test for their being consistent is that either, first, there is one of them such that, when it is taken along with each of the remaining Equations successively, each pair of Equations, so formed, has its B-Block evanescent; or, secondly there are m of them, where m is one of the number 2.....n, which contain at least m Variables, and have their V-Block not evanescent, and are such that, when they are taken along with each of the remaining Equations successively, each set of Equations, so formed, has its B-Block evanescent.* ([Do1], str. 61)

Dodgson se tak stal zřejmě nejvýraznější osobností pracující na otázce řešitelnosti soustav lineárních rovnic a věta Frobeniova by měla nést spíše jeho jméno. O stručnosti a srozumitelnosti jeho vyjádření však nelze hovořit.

Obdobný přístup k otázce řešitelnosti soustav lineárních rovnic použili mnozí další (Eugene Rouché (1832–1910), Georges Fontené (1848–1923) a další). Výslednou větu formulovali rozsáhle pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů matice a rozšířené matice soustavy. Řeč determinantů přetrvávala v této problematice i v osmdesátých a devadesátých letech 19. století. Vyskytly se však i maticové úpravy ve stylu Gaussova eliminačního algoritmu. Vyjádření hodnosti matice pomocí nezávislosti řádků (sloupců) se stalo více méně záležitostí až 20. století.[11]

Největší posun ve způsobu vyjádření nutné a postačující podmínky řešitelnosti soustav lineárních rovnic bez aparátu teorie determinantů lze najít v pracích dvou italských matematiků. Alfredo Capelli (1855–1910) a Giovanni

[11] Jednou z výjimek je práce Eduarda Weyra *O theorii forem bilinearných* z roku 1889, která je rozebrána v 2. kapitole.

Garbieri (1847–1931) již využili v učebnici *Corso di analisi algebrica, I. Teorie introduttorie* [CG1] z roku 1886 relativně nový pojem hodnost. Ve své knize například prezentovali transformaci soustavy n lineárních rovnic o n neznámých s hodností k na ekvivalentní soustavu k rovnic o n neznámých „trojúhelníkového tvaru". V jejich textu lze nalézt náznak spojitosti mezi lineární závislostí řádků matice a řešitelností soustav lineárních rovnic. I jejich další (již samostatně psané) práce z přelomu osmdesátých a devadesátých let představují krůčky ke změně způsobu vyjadřování.

Moderní formulace podmínky řešitelnosti soustavy lineárních rovnic se vyskytla v Capelliově učebnici pro studenty neapolské univerzity nazvané *Lezioni di algebra complementare, date nell'anno accademico 1888–1889* [Cp1]. V roce 1892 na ni Capelli navázal článkem *Sopra la compatibilità o incompatibilità di più equazioni di primo grado fra più incognite* [Cp2], v němž je zmíněná podmínka zapsána stručně a jasně, a to pomocí hodnosti matice (*caratteristica della matrice*).

Dato un sistema qualunque di m equazioni di 1° *grado con n incognite*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & \alpha_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & \alpha_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & \alpha_m \end{array}$$

affinchè esso sia compatibile con valori finiti delle incognite è necessario e sufficiente che le due matrici

$$(A) \quad \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array} \qquad e \qquad (B) \quad \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \alpha_m \end{array}$$

abbiano la stessa caratteristica. ([Cp2], str. 55)

O množině všech řešení řešitelné soustavy, která má matici o hodnosti h, autor napsal:

... si potranno assegnare ad arbitrio i valori di $n - h$ *incognite (che però non si possono sempre scegliere a piacere) dopodichè i valori delle h rimanenti incognite resteranno perfettamente determinati.* ([Cp2], str. 55)

Jméno Leopolda Kroneckera se někdy v názvu nutné a postačující podmínky řešitelnosti soustavy lineárních rovnic vyskytuje vzhledem k jeho výsledkům souvisejícím se studiem bilineárních a kvadratických forem z šedesátých let a vzhledem k jeho berlínským přednáškám o soustavách lineárních rovnic především z osmdesátých let 19. století.

Georg Ferdinand Frobenius se teorií soustav lineárních rovnic rovněž zabýval. Jeho vyjádření řešitelnosti soustavy jsou však většinou (z dnešního pohledu) značně nesrozumitelná. Stručnou podmínku řešitelnosti vyjádřil, a to v maticové řeči, až začátkem 20. století, kdy již byli někteří matematikové v této problematice mnohem dále. Konkrétněji se problematice řešení soustav zabýval v pracích *Ueber das Pfaffsche problem* [Fr1] z roku 1875 a *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten* [Fr4] z roku 1879. Tvrzení, které bylo později označeno jako Frobeniova věta, se objevilo až roku 1905 v článku *Zur Theorie der linearen Gleichungen* [Fr9] v následujícím znění:

Ist nun r' der Rang der Matrix R
(17.) $\quad a_{\alpha 0}, a_{\alpha 1}, \ldots a_{\alpha n} \qquad \alpha = 1, 2, 3, \ldots$
und r der Matrix B
(18.) $\quad a_{\alpha 1}, \ldots a_{\alpha n},$
... Die Gleichungen (16.) haben also eine Lösung, wenn $r' = r$ ist, aber keine, wenn $r' = r + 1$ ist. ([FrA], díl III., str. 353)

Tuto partii věnovanou teorii matic v prvních desetiletích po jejím vzniku ukončeme přehledem některých názorů historika matematiky Thomase Hawkinse, které stručně a výstižně shrnují nejvýznamnější přínosy jednotlivých matematiků.

When one contemplates the history of matrix theory, the name that immediately comes to mind is that of Arthur Cayley. ... I will begin by indicating several reasons why Cayley's memoir of 1858 does not have the historical significance that the Cayley-as-Founder view suggests.

In the first place, Cayley's celebrated memoir went generally unnoticed, especially outside of England, until the 1880's. ...

Secondly, the ideas Cayley expressed in 1858 were not particularly original. The idea of representing a linear substitution (i.e., a linear transformation) by the square array of its defining coefficients is already found in Gauss's treatment of the arithmetical theory of quadratic forms as presented in his Disquisitiones arithmeticae of 1801. There we also find the idea of composing two linear substitutions to form a third and the idea of representing substitutions by single letters for convenience.

Futhermore Gauss's notational practices were carried one step further by Eisenstein in his efforts to develop further the general theory of forms envisioned by Gauss. Eisenstein observed that if linear substitutions (in any number of variables) are considered as entities and denoted by letters, then they can be added and multiplied much as ordinary numbers, except, as he stressed, the order of multiplication does matter: ...

... during the period when Cayley's 1858 memoir lay unread, two other mathematicians, Laguerre in France and Frobenius in Switzerland, further developed the consequences of the symbolical algebra of linear substitutions in a fashion similar to that taken by Cayley but without a knowledge of Cayley's memoir. Laguerre's work ... suffered the same fate as Cayley's 1858 memoir. Frobenius' work ... was ... more substantial than those by Laguerre and Cayley, ...

There is another reason why the Cayley-as-Founder view of the history of matrix theory is misleading. By focusing, as it does, upon the form of the theory, i.e., the matrix symbolism, it tends to ignore its content: the concepts and theorems that make it a bona fide theory. ... ([Hw2], str. 561–563)

1.7 Kanonické tvary

Pro mnohé čtenáře je jistě překvapivé, že se pojmy *charakteristická rovnice*, *charakteristický* a *minimální polynom*, *vlastní čísla*, *vlastní vektory* či *kanonické tvary* vyskytovaly již delší dobu před vznikem teorie matic. Objevovaly se v řadě výsledků teorie binárních a ternárních kvadratických forem. Počátky této problematiky a její rozvoj jsou úzce spjaty s geometrií a nebeskou mechanikou.

Již francouzský matematik a filozof René Descartes (1596–1650) uvažoval o převádění rovnic kuželoseček a kvadrik na tzv. *kanonické tvary*, které neobsahují smíšené součiny neznámých. Z geometrického hlediska se jedná o otázku transformace kvadratické formy pomocí vhodné rotace v rovině (prostoru) tak, aby osy kuželosečky (kvadriky) byly rovnoběžné s osami souřadnicového systému. Proto je také věta o existenci ortogonální transformace někdy nazývána *větou o hlavních osách*. Termín hlavní osy (*principal axes*) zavedl v šedesátých letech 18. století Leonhard Euler, který se problematikou převedení binární a kvadratické formy na diagonální tvar pomocí změny souřadnicového systému rovněž intenzivně zabýval, např. již v práci *Introductio in analysin infinitorum* [Eu1] z roku 1748. Obdobné otázky studovali i Joseph Louis Lagrange, Carl Friedrich Gauss, Carl Gustav Jacob Jacobi a mnozí další.

Velmi důležitou roli hrála vlastní čísla při studiu pohybu nebeských těles. Základy nebeské mechaniky a další výzkum pohybu planet byly postaveny na zákonech německého matematika a astronoma Johanna Keplera (1571–1630) a na myšlenkách anglického všestranného vědce Isaaca Newtona (1643–1727). Během 18. století se při zpřesňování výpočtů pohybů planet již uvažoval nejen vliv gravitace Slunce, ale i ostatních těles sluneční soustavy. Jejich působení je přímo úměrné hmotnosti a nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti od uvažovaného tělesa a způsobuje odchylky od ideálních elips. Studium těchto dlouhodobých odchýlení bylo ve druhé polovině 18. století častým námětem pro práci matematiků a úzce souviselo s problematikou stability sluneční soustavy. Vzájemné vztahy kosmických těles byly zapisovány pomocí soustav lineárních diferenciálních rovnic s reálnými koeficienty, matice A těchto soustav byly symetrické a důležitou roli hrály jejich tzv. *charakteristické rovnice* tvaru $\det(A-\lambda E) = 0$, kde E je jednotková matice. V nebeské mechanice byla charakteristická rovnice nazývána *sekulární*, neboť se týkala dlouhodobých (stoletých, sekulárních) poruch planetárních pohybů. Zkoumána byla sekulární rovnice takového stupně, který odpovídal počtu v té době známých planet.[12] Další pojmy spojené s touto rovnicí (*charakteristický polynom*, *vlastní čísla* či *vlastní vektory*) byly rovněž studovány již v 18. století.

Mezi nejvýraznější matematiky publikující své výsledky z nebeské mechaniky patřil Joseph Louis Lagrange. Mnoho myšlenek o libracích Měsíce, satelitech Jupitera a pohybech planet sepsal roku 1788 v práci *Méchanique analitique* [Lg1]. Dospěl k závěru, že odchylky drah kosmických těles jsou periodické, a tedy i dlouhodobě ustálené a sluneční soustava nevyžaduje žádného (např. Božího) zásahu.

[12] V pořadí sedmá planeta Uran byla objevena roku 1781, osmá planeta Neptun roku 1846.

V podstatě stejné otázky řešil i Pierre Simon Laplace. Oba matematikové se také zabývali problémem reálnosti a násobnosti vlastních čísel reálné symetrické matice. Tvrzení o jejich reálnosti bylo formulováno opět zcela bez maticového přístupu, a to pouze na základě filozoficko-fyzikálního zdůvodnění, které bylo podepřeno jednak již zmíněnou absencí zásahu Boha a dále stabilitou sluneční soustavy. Komplexní vlastní čísla by signalizovala rozpad solárního systému. Laplaceovou pětidílnou monografií *Traité de Mécanique Céleste* [La1] z let 1799 až 1825 se svým způsobem uzavřela jistá epocha nebeské mechaniky, nastalo období, kdy panovalo přesvědčení, že ze znalosti současného stavu vesmíru lze usuzovat na jeho budoucí i minulé uspořádání (tzv. *mechanický determinismus*).

Tématu vlastních čísel a vlastních vektorů se intenzivně věnovali i Carl Gustav Jacob Jacobi a Augustin-Louis Cauchy. Cauchyho přístup však byl jiný, neboť využil svých znalostí z teorie determinantů, které se usilovně věnoval ve svém předchozím bádání. Roku 1829 se v práci *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes* [Ca3] snažil převést kvadratickou formu n proměnných

$$A_{xx}x^2 + A_{yy}y^2 + A_{zz}z^2 + \dots + 2A_{xy}xy + 2A_{xz}xz + \dots$$

na součet čtverců

$$s_1\xi^2 + s_2\eta^2 + s_3\zeta^2 + \dots$$

Předpokládal transformaci, kterou dnes nazýváme ortogonální. Vyjádřil ji podmínkou

$$x^2 + y^2 + z^2 + \dots = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \dots = 1.$$

Dále zaznamenal schéma

$$\left\{\begin{array}{llll} A_{xx} - s, & A_{xy}, & A_{xz}, & \dots \\ A_{xy}, & A_{yy} - s, & A_{yz}, & \dots \\ A_{xz}, & A_{yz}, & A_{zz} - s, & \dots \\ etc. \ \dots & & & \end{array}\right.$$

a formuloval větu, že výše uvedené koeficienty $s_1, s_2, \dots$ jsou kořeny charakteristické rovnice, kterou dostaneme, položíme-li (v dnešní řeči) determinant uvedené matice $A - sE$ roven nule. Cauchy pomocí determinantů také dokázal velmi důležité tvrzení, že v případě reálné symetrické matice jsou čísla $s_1, s_2, \dots$ reálná a že k vyjádření obecné kvadratické formy součtem čtverců lze dospět právě pomocí ortogonální transformace.

Obecnější tvrzení o reálnosti vlastních čísel hermiteovské matice dokázal roku 1855 francouzský matematik Charles Hermite (1822–1901) v práci *Remarque sur un théorème de M. Cauchy* [Hm1].

James Joseph Sylvester publikoval roku 1852 stať *A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares* [Sy5], v níž vyjádřil zákon setrvačnosti kvadratických forem. Důkaz zákona, který je dnes pojmenován po svém autorovi, však jeho práce neobsahuje.

I may take this occasion to remark, that by whatever linear substitutions, orthogonal or otherwise, a given polynomial be reduced to the form $\sum A_1\zeta^2$, *the number of positive and negative coefficients is invariable: this is easily proved.* ([SyP], díl I., str. 380)

Německý matematik Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) zveřejnil roku 1858 článek o problému současného převedení dvou kvadratických forem na kanonický tvar. Deset let poté, tj. roku 1868, vystavěl v práci *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* [Ws2] svou slavnou teorii elementárních dělitelů,[13] v níž vedle zavedení pojmu elementární dělitel formuloval nutné a postačující podmínky pro podobnost matic, pro diagonalizovatelnost matice a v podstatě dospěl k tzv. *Jordanovu kanonickému tvaru.* Stejně jako v článku z roku 1858 zde řešil otázku převodu dvou kvadratických forem P, Q na součet čtverců, a to i v případě vícenásobných kořenů. Kanonické tvary svazku $pP + qQ$ hledal pouze pro případ existence čísel p, q, pro které $\det(pP + qQ) \neq 0$.

Jak bylo na evropském kontinentě v té době zvykem, Weierstrass své výsledky nevyslovil v řeči matic, ale jazykem bilineárních a kvadratických forem.

Zmíněný převod svazku forem pro situaci, kdy $\det(pP+qQ) = 0$, popsal německý matematik Leopold Kronecker, který na Weierstrassovy výsledky často navazoval (a citoval je). Z jeho prací, které se společnou transformací dvou forem zabývají, jmenujme alespoň *Ueber bilineare Formen* [Kr1] z roku 1866, *Ueber Schaaren quadratischer Formen* [Kr2] z roku 1868 či *Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen* [Kr3] z roku 1874.

S kanonickými tvary matic je neodmyslitelně spjato jméno významného francouzského matematika Jordana. Nositel tohoto jména, Camille Marie Ennemond Jordan (1838–1922), publikoval roku 1870 rozsáhlou a významnou monografii *Traité des substitutions et des équations algébriques* [Jo1], v níž rozvíjel teorii grup a vyložil tzv. Galoisovu teorii. Zabýval se i lineárními substitucemi, zavedl kanonický tvar, jemuž odpovídá matice sestavená z buněk s vlastními čísly na diagonále. Při snaze o nalezení všech lineárních substitucí se stejným kanonickým tvarem dospěl k závěru, že takové dvě substituce A, B splňují vztah $B = P^{-1}AP$, kde P je vhodná substituce. Jeho myšlenky však nebyly vyjádřeny tak jasně jako ideje Weierstrassovy, které byly publikovány o dva roky dříve. Přesto se dnes užívají termíny *Jordanův kanonický tvar*, *Jordanova buňka* a *Jordanova matice.*

Další výraznou osobností zabývající se kanonickými tvary byl Georg Frobenius. Hlavním tématem jeho práce *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* [Fr2] z roku 1878 jsou charakteristická rovnice, minimální polynom, podobnost, elementární dělitelé a příbuzná problematika. Autor zde v souvislosti s bilineárními formami definoval několik pojmů, které jsou dnes zcela běžně používané pro matice.

---

[13] Ideje této teorie lze nalézt již v pracích *On the intersection, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminante coordinates* [Sy1] z roku 1850 a *An enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order* [Sy4] z roku 1851, které napsal James Joseph Sylvester, a ve stati *Report on the theory of numbers* [Sm1] z roku 1861, jejímž autorem je Henry John Stanley Smith.

Následující ukázka dokumentuje, jakým způsobem Frobenius zavedl a zapsal skládání dvou forem $A = \sum a_{ij}x_iy_j$ a $B = \sum b_{i,j}x_iy_j$. Takto zavedená operace je analogií násobení matic $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$.

Sind A und B zwei bilineare Formen der Variabeln $x_1, \ldots x_n; y_1, \ldots y_n$, so ist auch

$$P = \sum_1^n \frac{\partial A}{\partial y_x}\frac{\partial B}{\partial x_x}$$

eine bilineare Form derselben Variabeln. Dieselbe nenne ich aus den Formen A und B (in dieser Reihenfolge) zusammengesetzt. Es werden im Folgenden nur solche Operationen mit bilinearen Formen vorgenommen, bei welchen sie bilineare Formen bleiben. Ich werde z. B. eine Form mit einer Constanten ... multipliciren, zwei Formen addiren, ... Ich werde aber nicht zwei Formen mit einander multipliciren. Aus disem Grunde kann kein Missverständniss entstehen, wenn ich die aus A und B zusammengesetzte Form P mit

$$AB = \sum \frac{\partial A}{\partial y_x}\frac{\partial B}{\partial x_x}$$

bezeichne, und sie das Product der Formen A und B, diese die Factoren von P nenne. ([Fr2], str. 2)

Frobenius zavedl obecný pojem ekvivalence na množině bilineárních forem a hledal vhodné reprezentanty jednotlivých tříd navzájem ekvivalentních forem. Dále se zabýval některými speciálními případy ekvivalence. Vyšel z rovnice $PAQ = B$ a diskutoval případy, kdy $P = Q$, $P = Q^T$ (kongruentní matice nazýval *cogrediente*), $P = Q^{-1}$(podobné matice nazýval *contragrediente*), $B = A$ (bilineární forma transformovaná v sebe samu), nebo situaci, kdy současně $B = A$ a $P = Q^T$. Definoval rovněž svazek forem $rA - B$, kde r je proměnný parametr, ekvivalenci dvou svazků $rA - B$ a $rC - D$ podmínil rovnostmi $PAQ = C, PBQ = D$. Dále uvedl, že formy A a B jsou kongruentní, resp. podobné právě tehdy, když jsou svazky $rA - A^T$ a $rB - B^T$, resp. $rE - A$ a $rE - B$ ekvivalentní. V práci se objevil rovněž rozklad bilineární formy na symetrickou a antisymetrickou část.

Transformacemi bilineárních forem se rovněž zabýval v již zmíněné práci *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten* z roku 1879 a ve dvou dalších statích z roku 1894. I tyto práce psal ještě v řeči forem, své poznatky začal formulovat v maticové řeči až o dva roky později.

V oblasti kanonických tvarů publikoval světově uznávané výsledky (navíc již v řeči matic) Eduard Weyr. O jeho nápadité, moderně pojaté teorii charakteristických čísel, typických tvarů matic a o jeho souboru invariantů podobnosti matic, který se nazývá *Weyrova charakteristika*, pojednává 2. kapitola.

1.8 Změna paradigmatu

Jak již bylo řečeno, první maticové operace prováděli počtáři ve staré Číně a poté následovala přibližně osmnáct století dlouhá etapa, v níž se pravoúhlá schémata prvků v matematice nevyskytovala. V 19. století se matice začaly objevovat v pracích několika málo matematiků, používaná symbolika a terminologie nebyla ustálená a jednotná, u některých autorů kolísala i v jednotlivých konkrétních pracích. Ani po vzniku teorie matic v roce 1858 nedošlo k jejímu rozkvětu, neboť Cayleyův memoár nebyl matematickou komunitou až na výjimky registrován a zrod teorie matic proběhl v době, v níž se algebraici věnovali především teorii determinantů a teorii bilineárních a kvadratických forem. Ačkoliv dnes při výuce matematiky zavádíme nejprve pojem matice a teprve poté pojem determinantu,[14] vývoj šel právě naopak. Zrod teorie determinantů předcházel vzniku teorie matic o více než jedno století. Studium determinantů bylo jednou z klíčových oblastí, které byly nápomocny vzniku teorie matic, a také oborem, s nímž se nově vznikající teorie úzce prolínala. Jistým způsobem však blízká spojitost obou disciplín zpozdila uznání maticového aparátu i přístupu.

Od osmdesátých let 19. století přibližně do třicátých let 20. století proběhl pozvolný přesun pozornosti od teorie determinantů a teorie bilineárních a kvadratických forem k teorii matic. Velmi zajímavě se tento proces promítl do způsobu vyjadřování a argumentace. Přerod se samozřejmě výrazně projevil v používané symbolice a terminologii. Je pozoruhodné, kolik vztahů, vlastností, pojmů a vět, které dnes jednoznačně přiřazujeme k maticím, bylo známo dříve, než matematický svět přijal zápisy pomocí obdélníkových nebo čtvercových schémat. Dlouho známé pojmy se postupně začaly nazývat jiným, dnes používaným maticovým termínem a započalo se na ně také z hlediska teorie matic nahlížet. Pokusme se nyní tuto změnu paradigmatu[15] blíže popsat. Velmi pomalé, dalo by se říci až opatrné přijímání teorie matic je zřetelné z uvedených ukázek, které by měly čtenářům umožnit vnímat nuance ve vyjadřování matematických poznatků jazyky různých disciplín a které dokládají změny v myšlení, chápání a v interpretacích výsledků týkajících se maticové problematiky.

Do roku 1900 využívalo maticovou řeč jen několik málo matematiků, ve větší míře takřka pouze matematikové britští a američtí (James Joseph Sylvester, Arthur Cayley, Arthur Buchheim, Henry Taber (1860–1936), Andrew Russell Forsyth (1856–1942), Thomas Muir, ...). Patřil však k nim český matematik Eduard Weyr. Byl jedním z prvních matematiků, kteří se snažili o propojení teorie bilineárních a kvadratických forem s nově se utvářející teorií matic. Maticový přístup používal již v osmdesátých letech 19. století. Čtyřmi hlavními pilíři maticového přístupu byli tehdy Sylvester, Cayley, Buchheim a Weyr. Talentovaný Buchheim však v roce 1888 ve svých dvaceti devíti letech zemřel.

Mezi autory, v jejichž pracích se vyskytují matice již v osmdesátých letech 19. století, patří (kromě výše jmenovaných) japonský matematik A. Kumamoto a francouzský matematik Georges Édouard-Auguste Brunel (1856–1900). V devadesátých letech se k nim postupně přiřadili především C. H. Chapman,

[14] Determinantem matice A budeme rozumět ...

[15] Slovo *paradigma* se začalo častěji používat po roce 1962, v němž vyšla kniha *The Structure of Scientific Revolutions* (University of Chicago Press) významného myslitele 2. poloviny 20. století Thomase S. Kuhna (1923–1996). Práce vyšla opakovaně (1970, 1996; český překlad: *Struktura vědeckých revolucí*, OIKOYMENH, Praha, 1997). Citujme z encyklopedie možné vymezení slova *paradigma*: ***komplex názorů a koncepcí určujících v určité historické etapě volbu vědecké problematiky a způsob jejího řešení.***

T. B. van Wettum, L. van Elfrinkhof, W. H. Metzler, J. Brill, L. Ravut či J. B. Shaw.[16]

Pro přijetí daného aparátu má vždy velký vliv, zda jej používají uznávané osobnosti oboru. Jedna z největších postav teorie matic, Georg Ferdinand Frobenius, používal po dlouhou dobu řeč determinantů a forem. Teprve ve svém článku *Über vertauschbare Matrizen* [Fr8] z roku 1896 začal své výsledky vyjadřovat maticovou řečí a přijal maticový aparát. Na první straně zmíněné čtrnáctistránkové práce píše:

> *Ich werde mich daher hier der symbolischen Bezeichnung für die Zusammensetzung der Matrizen (Formen) bedienen, die ich in meiner (...) Arbeit Über lineare Substitutionen und bilineare Formen ... auseinandergesetzt habe.* ([Fr8], str. 601)

Nicméně i přes „maticový název" práce se v textu objevují pouze dvě čtvercová schémata a velmi často se mluví o formách (*vertauschbare Formen*). O Cayleyově-Hamiltonově větě je napsáno: *Dieser Fundamentalsatz der Formentheorie ist von Cayley gefunden ...*

Naskýtá se otázka, zda byl Frobenius před rokem 1896 obeznámen například s Cayleyovým *Memoárem* či s jinými texty využívajícími maticovou symboliku. Z citací v jeho článcích je zřejmé, že některé práce psané maticovou řečí znal. Například ve své slavné práci *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* z roku 1878 zmiňuje Cayleyovu práci *Remarques sur la notation des fonctions algébriques* (1855), v níž je matice jedním z klíčových pojmů definovaných hned v úvodu článku a zkrácený zápis soustavy lineárních rovnic s pomocí matice je napsán způsobem velmi blízkým tomu, který Arthur Cayley použil o tři roky později ve svém slavném článku *A memoir on the theory of matrices*. Dle mínění Thomase Hawkinse však přímo *Memoár* Frobeniovi znám nebyl. Svůj názor Hawkins napsal roku 1974 v článku *The theory of matrices in the 19th century*,[17] obdobně se vyjádřil i roku 1977 v článku *Another look at Cayley and the theory of matrices*:

> *Unaware of the memoirs by Cayley and Laguerre, Georg Frobenius also investigate the symbolical algebra of matrices (qua bilinear forms) ...* ([Hw4], str. 96)

Pro ilustraci změny paradigmatu ve Frobeniově vyjadřování uveďme pět náhodně vybraných názvů jeho prací vydaných před rokem 1896 následovaných pěti jeho publikacemi z let pozdějších: *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*, *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten*, *Ueber die Elementarteiler der Determinanten* [Fr5], *Ueber die congredienten Transformationen der bilinearen Formen* [Fr6], *Zur Theorie der Scharen bilinearer Formen* [Fr7] – *Über Matrizen aus positiven Elementen* [Fr11], *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen* [Fr16], *Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen* [Fr13], *Über unitäre Matrizen* [Fr14] a *Über den Rang einer Matrix* [Fr15].

[16] Počet a rozsah publikací jednotlivých autorů je zachycen v bibliografii uvedené v monografii *Lectures on Matrices* [Wd2], kterou vydal roku 1934 Joseph Henry Maclagen Wedderburn, matematik skotského původu.

[17] Viz citace v závěru minulé podkapitoly.

Po přelomu století začala být teorie matic a její symbolika stále více uznávána. Maticový aparát se postupem času konstituoval a začal být využíván stále širším okruhem matematiků, výsledky teorie bilineárních a kvadratických forem byly překládány do řeči matic (především problematika kanonických tvarů, vlastních čísel a vlastních vektorů), teorie matic pronikala do ostatních matematických disciplín i do ostatních vědních oborů.

Fyzika (konkrétněji kvantová mechanika) začala maticovou řeč používat až v polovině dvacátých let 20. století. Důležitým mezníkem bylo vydání práce *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen* [Hb1] (1925), jejímž autorem je německý fyzik Werner Karl Heisenberg (1901–1976). Do roku 1925 byly otázky kvantové mechaniky popsány řečí klasické fyziky, kinematiky a dynamiky. Heisenberg popsal pohyb částic pomocí pozorovatelných fyzikálních veličin, které vyjádřil soubory komplexních čísel závisejících na čase. Dále zavedl násobení těchto souborů, které odpovídá dnešnímu násobení matic.

Jeho matematický aparát zaujal několik dalších fyziků. Za pouhé dva měsíce po zveřejnění Heisenbergovy práce byla připravena k tisku společná práce německých autorů Maxe Borna (1882–1970) a Ernsta Pasquala Wilhelma Jordana (1902–1980) nazvaná *Zur Quantenmechanik* [BJ1]. V ní byl rozšířen Heisenbergův aparát a exaktně popsána maticová mechanika. O další dva měsíce později sepsali Born, Heisenberg a Jordan práci *Zur Quantenmechanik II* [BHJ1], v níž podrobně vyložili základy tehdejší kvantové mechaniky v řeči matic.

Na tyto práce reagoval rakouský fyzik Erwin Schrödinger (1887–1961), jenž roku 1926 publikoval vlnovou rovnici, která dnes nese jeho jméno, a zavedl druhou formu kvantové mechaniky – vlnovou mechaniku (ekvivalentní Heisenbergově maticové mechanice).

V následujících letech maticová řeč pronikala do dalších fyzikálních oborů (např. do atomové teorie) a stala se jazykem stále většího počtu fyziků (Fritz London (1900–1954), Hermann Weyl (1885–1955), John von Neumann (1903–1957), Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) a další).

Změna paradigmatu je zjevná z literatury publikované v popisovaném období. Ve druhé polovině 19. století se v učebnicích, monografiích a encyklopediích s maticemi takřka nesetkáme. Samozřejmě existovaly výjimky, mezi něž patřila například učebnice italského matematika Ernesta Pascala (1865–1940) nazvaná *I determinanti. Teoria ed applicazioni con tutte le più recenti ricerche* [Pa1] (1897). Matice zde prostupují celým textem, ale jsou násobeny „po řádcích", hodnost je stále definována pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů. Matice se vyskytují rovněž v učebnici *Vorlesungen über Algebra* [Ne1] z roku 1896, kterou sepsal německý matematik Eugen Otto Erwin Netto (1848–1919). V tomto textu se nachází zajímavá pasáž, v níž je definována hodnost matice a na následujících řádcích je definována hodnost kvadratické formy pomocí „hodnosti determinantu".

Ist irgend eine Matrix vorgelegt, so sagen wir, dieselbe besitze den Rang r, wenn alle in ihr enthaltenen Determinanten der Ordnung $(r+1)$ verschwinden, dagegen nicht alle der Ordnung r. Das giebt dann für unseren Fall, mit Hinblick auf das soeben Bewiesene: Die Determinanten C und D der ursprünglichen und *der transformirten quadratischen Form haben denselben Rang.*

Hat die Determinante einer quadratischen Form den Rang r, so sagen wir, die Form selbst sei vom Range r. ([Ne1], díl I., str. 185)

Obecně lze říci, že do přelomu století se matice v literatuře vyskytovaly jen místy, a to nejčastěji v souvislosti s jinými pojmy (bilineární forma, lineární transformace, operátor, soustava lineárních rovnic, ...). V první polovině 20. století se situace výrazně změnila. Byly vydány monografie a učebnice již plně věnované teorii matic a psané jejím jazykem.

Cesta teorie matic za samostatností je dobře čitelná i z výskytu pojmu matice v encyklopediích. Ani v německé encyklopedii *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* [EMW1] z let 1898 až 1935 ani ve francouzské encyklopedii *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* [ESM] z let 1904 až 1916 se matice téměř nevyskytují. Stejně je tomu i ve dvou svazcích italského *Repertorio di matematiche superiori* [PaI] Ernesta Pascala z let 1898 a 1900. V druhém, podstatně rozšířeném německém vydání prvního svazku *Repertorium der höheren Mathematik. Algebra, Differential- und Integralrechnung* [PaN] z roku 1910 se již s maticemi setkáváme v celém textu. Objevují se zde v souvislosti s teorií bilineárních a kvadratických forem a jejich transformacemi, s problematikou kanonických tvarů, s ortogonálními substitucemi atd. Je zde i vztah mezi hodností matice a lineární závislostí řádků, resp. sloupců.

První učebnicí, v níž je maticím věnována velká pozornost, je *Introduction to higher algebra* [Bc1] z roku 1907, kterou napsal americký matematik Maxime Bôcher (1867–1918). Úspěch tohoto učebního textu dokládá množství reprintů (z let 1922, 1924, 1933, ..., 1964, 2004) i překlady do němčiny a ruštiny. Pozastavme se nyní u této publikace, která o změně paradigmatu v teorii matic mnohé vypovídá. V druhé kapitole se vyskytuje pasáž, z níž je zjevné, že pojem determinantu byl považován za obecně známý, zatímco pojem matice bylo nutné definovat.

We assume that the reader is familiar with the determinant notation, and will merely recall to him that by a determinant of the nth order

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|$$

we undestand a certain homogeneous polynomial of the nth degree in the n^2 *elements* a_{ij}*. By the side of these determinants it is often desirable to consider the system of the* n^2 *elements arranged in the order in which they stand in the determinant, but not combined into a polynomial. Such a square array of* n^2 *elements we speak of as a matrix. In fact, we will lay down the following somewhat more general definition of this term:*

DEFINITION 1. *A system of mn quantities arranged in a rectangular array of m rows and n columns is called a matrix. If $m = n$, we say that we have a square matrix of order n.* ([Bc1], str. 20–21)

Bôcher dále zdůraznil rozdíl mezi (čtvercovou) maticí a determinantem a poté zavedl pojmy *determinant matice* a *matice determinantu.*

Even when a matrix is square, it must be carefully noticed that it is not a determinant. In fact, a matrix is not a quantity at all, but a system of quantities. This difference between a square matrix and a determinant is clearly brought out if we consider the effect of interchanging columns and rows. This interchange has no effect on a determinant, but gives us a wholly new matrix. ...

Although, as we have pointed out, square matrices and determinants are wholly different things, every determinant determines a square matrix, the matrix of the determinant, and conversely every square matrix determines a determinant, the determinant of the matrix. ([Bc1], str. 21)

Slovo „matice“ se v názvu knihy poprvé objevilo u rozsáhlé třídílné monografie *Matrices and determinoids* [Cu1], kterou sepsal Cuthbert Edmund Cullis (1875?–1954). V tomto díle, jehož jednotlivé svazky vyšly v letech 1913, 1918, 1925, je obsažena celá tehdejší teorie matic a determinantů. Cullisovo rozsáhlé dílo však nemělo velký ohlas, jeho terminologie je poměrně složitá a činila tak práci nepříliš čtivou. Celá teorie je budována obecně pro obdélníkové matice a s nimi spojené *determinoidy.* V díle tak nacházíme například definici inverzní či reciproké matice pro obdélníkovou matici.

Roku 1926 byla vytištěna učebnice *Einführung in die Axiomatik der Algebra* [Bk1] Rudolfa Hanse Heinricha Becka (1876–1942), která dává maticím mnohem větší prostor než determinantům; kapitoly o maticích již předcházejí kapitole o determinantech. Hodnost matice zde není zavedena pomocí determinantů, ale na základě lineární závislosti a nezávislosti.

Je těžko uvěřitelné, že téhož roku, tj. v roce 1926, publikoval italský matematik Salvatore Pincherle (1853–1936) 3. vydání učebnice *Lezioni di algebra complementare* [Pl1], ve kterém jsou zavedeny ještě čtyři druhy násobení matic. Jedno z nich, *moltiplicazione per linee*, je zavedeno takto:

Siano date due matrici rettangolari, di ugual numero m di linee ed n di colonne:

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}, \end{array}\right.$$

e si formi la matrice quadrata degli m^2 elementi:

$$C_{rs} = a_{r1}b_{s1} + a_{r2}b_{s2} + \cdots + a_{rn}b_{sn}$$

$$(r, s = 1, 2, \dots m).$$

([Pl1], část II., str. 72)

Dalším potvrzením skutečnosti, že někteří matematikové maticovou řeč nepřijali ani více než šedesát let po vzniku teorie matic (tj. v době, kdy již někteří autoři matice používali i v dalších disciplínách, a to dokonce aniž by je speciálně definovali) je dvoudílná kniha *Algebra I. Die Grundlagen, Algebra II. Theorie der algebraischen Gleichungen* [Pr2] z roku 1927 německého matematika Oskara Perrona (1880–1975). V druhém vydání prvního dílu z roku 1932 je hodnost matice stále definována takto:

Wenn daher nicht alle Gleichungskoeffizienten $a_{\lambda x}$ *gleich* 0 *sind, so daß zum mindesten die einreihigen Determinanten nicht alle verschwinden, so gibt es eine eindeutig bestimmte positive ganze Zahl* n *derart, daß die Matrix (...) mindestens eine* n*-reihige nicht verschwindende Determinante enthält, aber keine* $(n+1)$*-reihige nicht verschwindende Determinante. Diese Zahl* n*, die offenbar* $\leq k$ *und* $\leq l$ *ist, heißt der Rang der Matrix (...) oder auch der Rang des Gleichungssystems (...). Falls alle Gleichungskoeffizienten* $a_{\lambda x}$ *verschwinden, setzt man den Rang* n *gleich* 0.
([Pr2], I. díl, str. 102, 2. vydání v nezměněném znění: str. 99–100)

Násobení matic je provedeno „po řádcích“ a jeho výsledkem je „determinant“.

Die Produktformel (10) läßt sich wesentlich verallgemeinern. Dazu betrachten wir die beiden Matrizes[18]

$$(17)\qquad A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kl} \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kl} \end{matrix} \right\|$$

mit k *Zeilen und* l *Spalten; die* $2kl$ *Elemente* $a_{x\lambda}, b_{x\lambda}$ *seien zunächst wieder unabhängige Variable. Wird dann analog zu (2)*

$$(18)\qquad a_{\lambda 1}b_{\nu 1} + a_{\lambda 2}b_{\nu 2} + \cdots + a_{\lambda l}b_{\nu l} = c_{\lambda\nu} \qquad (\lambda, \nu = 1, 2, \dots, k)$$

gesetzt, so heißt die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & \dots & c_{kk} \end{vmatrix}$$

das symbolische Produkt der beiden Matrizes A *und* B.
([Pr2], I. díl, str. 115)

Významný přelom v přijímání maticového aparátu nastal i v teorii soustav lineárních rovnic. Otto Schreier (1901–1929) a Emanuel Sperner (1905–1980) definovali v učebnici *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra* [SS1] z roku 1931 hodnost matice bez pomoci determinantů jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců. Nutnou a postačující podmínku řešitelnosti soustavy lineárních rovnic vyjádřili pomocí zachování maximálního počtu nezávislých sloupců i po přidání sloupce pravých stran, tj. zachování hodnosti matice.

[18] V druhém vydání je do této věty vloženo výslovné upozornění na násobení řádků řádky: *Die Produktformel, bei der Zeilen mit Zeilen kombiniert sind, läßt sich wesentlich verallgemeinern.* ([Pr2], I. díl, 2. vydání, str. 113–114) Zbývající text je v 2. vydání až na drobné úpravy (změny v označení indexů) shodný s verzí z 1. vydání.

... Die Gleichungen (1) *sind dann und nur dann in den x_i lösbar, wenn die Maximalzahl linear unabhängiger unter den Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gleich ist der Maximalzahl linear unabhängiger unter den Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$.*

... Man nennt die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer Matrix auch den Rang der Matrix. ... ([SS1], díl I., str. 38)

Na odlišnost pojmů determinant a matice upozorňuje (stejně jako Bôcher) ještě roku 1953 Herbert Pupke v knize *Einführung in die Matrizenrechnung und ihre physikalischen Anwendungen* [Pu1]:

Der Begriff der Matrix unterscheidet sich wesentlich von dem der Determinante: die Determinante ist eine skalare Größe; die Matrix ist dagegen als zusammengesetzte Größe, als komplexe Größe höherer Ordnung oder als System aufzufassen. Im Gegensatz zu der Erklärung der Determinante enthält die Matrix keine Rechenvorschrift, die die Elemente miteinander verknüpft. Ein anderer Unterschied gegenüber der Determinante liegt darin, daß bei einer Matrix $n \neq m$ sein kann. ([Pu1], str. 2)

Postupem času byla teorie matic stále více uznávána, matice pronikaly i do jiných oborů, v řadě publikací byla upevňována maticová terminologie a symbolika. Dá se říci, že po prvních třech desetiletích 20. století se teorie matic osamostatnila, byly vydány úspěšné monografie a učebnice. Z těch nejstarších a nejvýznamnějších jmenujme alespoň tyto:

- Herbert Westren Turnbull (1885–1961): *The Theory of Determinants, Matrices and Invariants* [Tu1], 1928,
- H. W. Turnbull a Alexander Craig Aitken (1895–1967): *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices* [TA1],[19] 1932,
- Cyrus Colton MacDuffee (1895–1961): *The Theory of Matrices* [Mc1], 1933,
- Joseph Henry Maclagen Wedderburn (1882–1948): *Lectures on Matrices* [Wd2], 1934.

Posledně jmenovaný titul, učebnice *Lectures on Matrices*, obsahuje rozsáhlou bibliografii teorie matic. První vydání uvádí celkem 549 prací od roku 1853 do roku 1933.[20] Cenná bibliografická data rovněž obsahuje již zmíněná kniha *The Theory of Matrices*.[21]

Jednou z prvních knih se slovem „matice“ v názvu je rovněž knížka českého matematika Bohumila Bydžovského (1880–1969) *Základy teorie determinantů*

[19] W. W. Ledermann roku 1968 v práci *A. C. Aitken's work in pure mathematics* [Ld1] poznamenal:

With his flair for elegant formalism Aitken was quick to realize the usefulness of matrix algebra as a powerful tool in many branches of mathematics. At a time when matrix techniques were not yet widely known he applied matrix algebra with striking success to certain statistical problems.

His interest in matrices was shared by H. W. Turnbull. Their joint book Canonical Matrices soon became a standard work on the subject. ([Ld1], 164–165).

[20] V seznamu je uvedeno sedm prací, jejichž autorem je Eduard Weyr. Zaznamenány jsou rovněž dvě práce Karla Petra (1868–1950) z roku 1906. Více informací viz 5. kapitola.

[21] I v ní nalézáme jméno Eduarda Weyra, MacDuffee se totiž mimo jiné zabýval i tzv. *Weyrovou charakteristikou.* Více informací viz opět 5. kapitola.

a matic a jich užití [By1] z roku 1930. Je sice věnována spíše determinantům, ale matice se v ní již poměrně podrobně prezentují. Podrobněji se o ní dočteme ve 3. kapitole.

Na závěr kapitoly citujme požadavek, který koncem dvacátých let 20. století údajně vznesl německý matematik Erhard Schmidt (1876–1959) na svého učitele, významného německého matematika Davida Hilberta (1862–1943). Z úryvku je zřetelné, že právě v té době někteří matematikové maticový aparát nejen přijali, ale uvědomili si i jeho výhody oproti jiným přístupům a maticovou terminologii začali propagovat:

„*Nein! Nein! Sagen sie nicht Operator, sagen sie Matrix!*“[22]

Během popsaného období, tj. od počátku 19. století do třicátých let 20. století, se tak zvolna utvářela nová matematická disciplína, jejíž řeč nebyla dlouhou dobu širší světovou matematickou komunitou akceptována. Musela být překonána jakási obava z přijetí nových pojmů, jiné terminologie a symboliky, a vybudovat tak pro další bádání nový, „maticový svět“. Dnes tvoří teorie matic zcela samostatnou a významnou matematickou disciplínu.

[22] Citát je převzat z doslovu (str. 287), který napsal Albrecht Pietsch (nar. 1934) k jedenáctému svazku řady *Teubner-Archiv zur Mathematik*, jejímž hlavním cílem bylo představení významných prací německých matematiků. Uvažovaný svazek vyšel v roce 1989 pod názvem *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*. Obsahuje dvě významné práce Hilberta a Schmidta. Albrecht Pietsch, jenž svazek uspořádal, převzal citát z práce M. Bernkopfa *A history of infinite matrices* (Archive for History of Exact Sciences 4(1968), str. 346).

Doslov do češtiny přeložil a opatřil úvodem Alois Kufner (nar. 1934) – viz Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 39(1994), str. 65–94.

2 Počátky teorie matic v českých zemích, výsledky Eduarda Weyra

Situace v českých zemích odpovídala evropskému vývoji. Čeští matematikové publikovali práce z teorie determinantů výrazně dříve než z maticového počtu, přesto však mezi nimi můžeme nalézt vědce, který pracoval jiným způsobem, než bylo tehdy běžné. Touto výjimkou byl Eduard Weyr (1852–1903), který v době přetrvávajícího užívání řeči determinantů a forem vyjadřoval své výsledky již v řeči matic a snažil se jako jeden z prvních matematiků na evropském kontinentě sjednotit teorii matic s teorií bilineárních a kvadratických forem. Jeho znalost maticového aparátu byla na světové úrovni, k některým otázkám přistupoval velmi originálně, ze zcela jiného, modernějšího pohledu než tehdejší světoví matematici.

2.1 První práce z algebry

Na začátku této části uveďme krátký přehled vývoje algebry v českých zemích, který nám umožní zařadit první české práce s maticovou tematikou mezi ostatní algebraické poznatky české matematické komunity a uvědomit si, na jakých podkladech byla vybudována.

Pomineme-li středověké početnice a některé algebraické výsledky, které byly formulovány v pracích zaměřených na jiné oblasti matematiky,[23] nelze v souvislosti s českými zeměmi až do poloviny 19. století mluvit o dílech, která by se soustavněji věnovala algebře. Tato situace se však ve druhé polovině 19. století začínala měnit.

Vídeňská akademie věd vydala roku 1858[24] práci faráře a suplujícího gymnaziálního profesora Václava Šimerky (1819–1887) *Die Perioden der quadratischen Zahlformen bei negativen Determinante* [Sk1], která byla předtím, zřejmě v jiné podobě, odmítnuta Královskou českou společností nauk. Věnovala se v té době značně studované teorii kvadratických forem. Václav Šimerka v ní zjednodušil a upravil Legendreovu metodu pro skládání dvou kvadratických forem a zkoumal mimo jiné aplikace kvadratických forem k řešení neurčité rovnice

$$ax^2 + bxy + cy^2 = pz^m.$$

Roku 1863 byla v Praze vydána Šimerkova *Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia* [Sk3], k níž autor připojil základní poznatky z diferenciálního a integrálního počtu. Publikace byla schválena ministerstvem jako učebnice

[23] Uveďme například zpřesnění Gaussových důkazů základní věty algebry z roku 1817, které uvedl Bernard Bolzano (1781–1848) v rámci práce věnované teorii řad a teorii funkcí.

[24] Rok 1858 je uveden v poznámce *Život a působení p. Václava Šimerky* [Pk1], kterou roku 1888 publikoval Augustin Pánek (1843–1908), a v článku *Ocenění prací P. Václava Šimerky* [Pz1] z roku 1926, jehož autorem je Václav Petržílka (1905–1976). Kniha *Dějiny exaktních věd v českých zemích* [Nv1], kterou roku 1961 sepsal kolektiv autorů soustředěný kolem Luboše Nového (nar. 1929), však zmiňuje rok 1857, což je rok odmítnutí práce Královskou českou společností nauk.

pro střední školy, zmíněný přehled matematické analýzy byl následujícího roku vydán samostatně pod názvem *Přídavek k algebře pro vyšší gymnázia* [Sk4].

Šimerka byl prvním českým matematikem, který publikoval článek o teorii determinantů. Jde o stať *Bestimmte Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten gelöst mittels der Permutationslehre* [Sk2] vydanou ve Vídni roku 1858, která pojednává o řešení soustavy lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla. Šimerkovy odborné práce však nevzbudily větší pozornost.[25] V jisté míře se na této skutečnosti podílela i jeho izolovanost od matematické komunity, která mu značně komplikovala práci. Augustin Pánek (1843–1908) uvádí v článku *Život a působení p. Václava Šimerky* [Pk1], že se ji zřejmě snažil překonat alespoň svoji oddaností matematice:

> *… lze poznati, s jakou láskou myslitel náš pěstoval královskou vědu mathematickou až do posledního dechu.* ([Pk1], str. 255)

Roku 1870[26] vyšla *Algebra pro střední školy* [Sl1] od Josefa Smolíka[27] (1832–1915) a postupně byly publikovány nové a nové učebnice algebry. Ze sedmdesátých let jmenujme ještě publikaci Františka Josefa Studničky[28] (1836–1903) *Algebra pro vyšší třídy škol středních* [St3] z roku 1877,[29] z osmdesátých let pak učebnici Františka Machovce[30] (1855–1892) *Algebra pro vyšší třídy škol středních* [Mv1] z roku 1886.

Ve druhé polovině 19. století bylo u nás v algebře nejvíce pozornosti věnováno teorii determinantů. Můžeme říci, že se většinou jednalo o kratší práce, které významné původní myšlenky nepřinášely, ale spíše opakovaly výsledky tou dobou již známé v zahraničí, rozvíjely nepodstatná vylepšení teorie či její aplikace v ostatních matematických disciplínách.

Martin Pokorný (1836–1900) vydal roku 1865 knihu *Determinanty a vyšší rovnice* [Py1], která je první česky psanou učebnicí, jež je z velké části věnována nauce o determinantech. O jejím postavení v české matematické literatuře Au-

[25] Určitou výjimkou je spis *Síla přesvědčení* [Sk5]. Jeho německá přepracovaná verze *Die Kraft der Ueberzeugung* byla publikována roku 1883 ve Vídni. Šimerkově článku se věnoval ještě roku 1987 Jiří Fiala (1939–2012) v článku *Síla přesvědčení Václava Šimerky* [Fa1] a také roku 2011 Magdalena Hykšová (nar. 1974) v knize *Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů* [Hy1].

[26] Druhé vydání je z roku 1875.

[27] Josef Smolík byl českým středoškolským učitelem (matematika, fyzika, český jazyk, francouzský jazyk), autorem středoškolských učebnic, archeologem, numismatikem a historikem matematiky, fyziky a astronomie. Bližší informace o životě a díle Josefa Smolíka lze nalézt v monografii *Josef Smolík (1832–1915)* [Bv1], kterou napsala Martina Bečvářová (nar. 1971), a méně podrobněji v kapitole *Středoškolští učitelé* knihy *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918* [Bv2].

[28] František Josef Studnička studoval na filozofické fakultě vídeňské univerzity, byl suplujícím profesorem na německém gymnáziu v Českých Budějovicích, prozatímním honorovaným docentem na polytechnice v Praze, kde se roku 1866 stal řádným profesorem. Stejnou pozici zaujímal od roku 1869 na české polytechnice a roku 1871 na univerzitě v Praze, po jejím rozdělení roku 1882 na české univerzitě. V letech 1882–83 byl děkanem filozofické fakulty a v letech 1888–89 rektorem české univerzity v Praze. Bližší informace viz monografie Martiny Němcové-Bečvářové *František Josef Studnička (1836–1903)* [Nm1] z roku 1998.

[29] Druhé vydání je z roku 1879.

[30] František Machovec byl středoškolským profesorem, v posledním roce svého života přednášel na české stolici deskriptivní geometrie na technice v Praze.

gustin Pánek v pojednání *O životě a činnosti Martina Pokorného* [Pk2] roku 1901 napsal:

Zvláště důležitý a v literatuře naší významný je spis Pokorného Determinanty a vyšší rovnice (1865), jímž nauka o determinantech, tehdy ještě u nás málo známá, uvedena poprvé do české literatury mathematické; v příčině řešení vyšších rovnic nemáme dosud za něj žádné náhrady ([Pk2], str. 84)

Pokorný přeložil též 1. díl učebnice německého matematika Heinricha Richarda Baltzera (1818–1887) *Die Elemente der Mathematik* [Bz2].

V teorii determinantů u nás v 19. století pracovali František Josef Studnička, Karel Zahradník (1848–1916), Eduard Weyr, Matyáš Lerch (1860–1922), Wilhelm Matzka (1798–1891), Ludvík Kraus (1857–1885), Vilém Jung 1857–1908, Matěj Norbert Vaněček (1859–1922), František Hoza (1843–1914), Anton Puchta (1851–1903), Martin Pelnář (2. pol. 19. stol.), O. Ježek (2. pol. 19. stol.) a další.

Nejsoustavněji se této problematice věnoval František Josef Studnička, výrazná osobnost české matematické komunity 2. poloviny 19. století. Svojí neúnavnou prací pro řadu odborných spolků (např. pro Jednotu českých matematiků, Královskou českou společnost nauk), pedagogickou a organizační činností a vydáváním česky psaných učebnic pomáhal velkou měrou k rozkvětu české matematiky.

Teorii determinantů je věnována značná část Studničkových prací. Ani v nich však nenacházíme původní výsledky, ale spíše jen pozměněné postupy a speciální případy v zahraničí známých skutečností. Velkou pozornost Studnička věnoval některým základním poznatkům, např. výpočtům determinantů, typům úprav či Laplaceově větě. Zabýval se nulovostí determinantu v závislosti na vlastnostech příslušné matice, determinanty symetrických, antisymetrických, persymetrických,[31] reciprokých a jiných speciálních matic i různými funkcionálními determinanty.

Značnou pozornost věnoval pojmům *mocninný* a *sestavný determinant.* Mocninným determinantem přitom nazýval determinant tvaru

$$\begin{vmatrix} a_1^{m_1} & a_1^{m_2} & \cdots & a_1^{m_n} \\ a_2^{m_1} & a_2^{m_2} & \cdots & a_2^{m_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^{m_1} & a_n^{m_2} & \cdots & a_n^{m_n} \end{vmatrix},$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou libovolná čísla, $m_1 = 0 < m_2 < \cdots < m_n$ jsou čísla celá. Jedná se tedy o obecněji koncipovaný Vandermondeův determinant, s nímž již pracovali hlavně francouzští matematikové Alexandre Théophile Vandermonde (1735–1796), Pierre Simon Laplace (1749–1827), Étienne Bézout (1730–1783) a jiní. Sestavným (kombinačním) determinantem označoval Studnička determinant uspořádaný ze symetrických funkcí $K_0, K_1, ..., K_n$ vytvořených z prvků

[31] V *persymetrické matici* se rovnají prvky se stejným součtem řádkového a sloupcového indexu.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tyto funkce jsou do řádků v uvedeném pořadí vepsány tak, aby byl každý další řádek „posunut alespoň o jeden prvek doprava“.

Příkladem sestavného determinantu je

$$\begin{vmatrix} K_2 & K_3 & K_4 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & 0 \\ 1 & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ 0 & 0 & 1 & K_1 & K_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & K_1 \end{vmatrix},$$

kde
$K_0 = 1$,
$K_1 = a_1 + a_2 + ... + a_n$,
$K_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_1a_n + a_2a_3 + a_2a_4 + ... + a_{n-1}a_n$,
. . . .
$K_n = a_1a_2a_3 \cdots a_n$.

Studnička také nacházel některé vztahy mezi mocninnými a sestavnými determinanty.

Ve své čtyřicetistránkové práci *A. L. Cauchy als formaler Begründer der Determinanten-Theorie. Eine literarisch-historische Studie* [St2] z poloviny osmdesátých let vyslovil názor, že skutečným zakladatelem teorie determinantů je francouzský matematik Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). Opakovaně se rovněž pozitivně vyjádřil k přijetí determinantů do náplně středoškolské matematiky.

Připomeňme zde ještě některé Studničkovy práce zpracovávající problematiku determinantů: útlá knížka *O determinantech* (1870) [St1], která vyšla téhož roku i rusky pod názvem *Načal'naja osnovanija teorii Determinantov' ili opred'litelej* a o rok později německy pod názvem *Einleitung in die Theorie der Determinanten. Für Studierende an Mittelschulen und technischen Anstalten*, spis *O determinantech mocninných a sestavných* [St4] a učebnice *Úvod do nauky o determinantech* [St5] z roku 1899.

Dle původních plánů mělo být vydáno obsáhlejší dílo *Základové vyšší algebry* Václava Řehořovského (1849–1911) a Eduarda Weyra. Z plánovaných tří svazků však vyšel jediný, jedná se o Řehořovského publikaci *Theorie souměrných funkcí kořenů* [Rh1] z roku 1883.

2.2 Ludvík Kraus

Teorií matic se v našich zemích ve druhé polovině 19. století zabývali jen Eduard Weyr a Ludvík Kraus, jehož předčasná smrt byla velkou ztrátou pro naši matematickou obec.

Ludvík Kraus studoval na pražské univerzitě v období, kdy zde začal přednášet Eduard Weyr. Titul doktora filozofie získal roku 1878. Během svých studijních pobytů absolvoval v Mnichově přednášky Felixe Kleina (1849–1925) a na přelomu sedmdesátých a osmdesátých let poslouchal po čtyři semestry v Berlíně Karla Theodora Wilhelma Weierstrasse (1815–1897) a Leopolda Kroneckera (1823–1891). Weierstrassovy přednášky byly proslulé. Sjížděli se na ně matematikové z celé Evropy, měly značný vliv na rozvoj evropské matematiky.

Roku 1881 se Ludvík Kraus stal soukromým docentem na pražské univerzitě, po jejím rozdělení přednášel čtyři semestry (teorii funkcí a algebru) na univerzitě české. Ve vlasti se snažil zahraniční zkušenosti předávat dál.[32]

Byl to zřejmě právě Kraus, mladší z obou matematiků, který vzbudil Weyrův zájem o maticový počet.[33]

> *... získala tenkráte nového docenta mathematiky L. Krause, vynikajícího to žáka Weierstrassova. S tímto žil Ed. Weyr v poměrech zvláště přátelských a zdá se, že vlivem tohoto mathematika tak záhy zesnulého (v r. 1886)*[34] *sesíleno bylo v Eduardovi přání vniknouti v methody Weierstrassovy.* ([Pe1], str. 461)

Pro zajímavost uveďme pochvalné vyjádření Eduarda Weyra na adresu Ludvíka Krause:

> *... úvahy dra. Krause vynikají takovou přesností a obsahují tolik duchaplných myšlének, že je lze nazvati pravými perlami. ... Hlavním cílem života jeho bylo poznati pravdy mathematické; za tím cílem kráčel neohlížeje se ani po zevní slávě ani po hmotných výhodách, pokládaje je za věc vedlejší. – Rád hovoříval o vědeckých předmětech, překvapoval každého originalností a silou myšlének, a vynikal skromností, jaká vyskytuje se jen u těch, jimž jde v pravdě o věc. ...* ([We7], str. 50, 52)

Podotkněme, že právě na Krausových pracích lze dokumentovat skutečnost, že determinant byl u nás (stejně jako ve světě) pro matematickou komunitu zcela známým pojmem. Kraus jej používal (například pro zápis rovnice křivky) bez jakéhokoli vysvětlení a s determinanty prováděl běžné operace.[35]

Krausovy odborné schopnosti dokumentuje skutečnost, že roku 1884 znal důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty pro matice řádu n. Připomeňme, že toto tvrzení uveřejnil roku 1858 Arthur Cayley v článku *A memoir on the theory of matrices* bez obecného důkazu, o který se poté snažili přední světoví matematikové. Krausův důkaz citoval Eduard Weyr v práci *O základní větě v theorii matric* ([We2], viz dále), autorem publikován nebyl. Ludvík Kraus pracoval pro jednoduchost s maticí řádu tři, v postupu však využil pouze tvrzení platící pro čtvercové matice řádu n, jedná se tedy o důkaz obecný.

---

[32] Na základě svého pobytu v Berlíně napsal Kraus práce *Základové arithmetiky. Dle výkladů prof. Weierstrassa* [Ks1] a *Základové náuky o funkcích racionálných* [Ks2]. Obě pojednání byla publikována v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky, a to v roce 1883, resp. 1885. Seznam Krausovy publikační činnosti je uveden v monografii Bečvář J. a kol.: *Eduard Weyr (1852–1903)* [Be1] z roku 1995 na stranách 53–54.

[33] V roce 1886 publikoval Eduard Weyr v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky článek *Život a působení dra Ludvíka Krause. Nástin životopisný* [We7]. Ten byl v témže roce referován Františkem Josefem Studničkou v časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 18(1886), str. 22.

[34] Karel Petr, autor tohoto výroku, se zde zmýlil. Kraus zemřel již roku 1885.

[35] Viz například práce *Základové náuky o funkcích racionálných* [Ks2] nebo *Příspěvek ku transformaci jedenáctého řádu funkcí elliptických* [Ks3].

Uvažoval matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix}$$

s vlastními čísly μ_1, μ_2, μ_3 a zavedl lineární substituci

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & (a_{11}-\mu_1)x \ + \ a_{12}y \ + \ a_{13}z \\ y_1 & = & a_{21}x \ + \ (a_{22}-\mu_1)y \ + \ a_{23}z \\ z_1 & = & a_{31}x \ + \ a_{32}y \ + \ (a_{33}-\mu_1)z \end{array},$$

kterou označil symbolem

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \end{pmatrix}_{\mu_1}.$$

Obdobně uvažoval substituce

$$\begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}_{\mu_2} \qquad \text{a} \qquad \begin{pmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}_{\mu_3}.$$

Tyto tři substituce složil. Jejich kompozici zapsal jedinou soustavou tří lineárních rovnic, kterou lze v dnešní maticové symbolice vyjádřit vztahem

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = (M-\mu_3 E)(M-\mu_2 E)(M-\mu_1 E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

kde E značí jednotkovou matici. Při označení koeficientů výsledné soustavy tří lineárních rovnic řeckými písmeny α_{ij}, i, $j = 1, 2, 3$, je Cayleyova-Hamiltonova věta ekvivalentní tvrzení, že všechny koeficienty α_{ij} jsou nulové. K důkazu tohoto tvrzení Kraus nejprve zvolil za x, y, z takové hodnoty $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, aby vektor (x, y, z) byl vlastním vektorem matice M příslušným vlastnímu číslu μ_1. Potom je však $x_3 = y_3 = z_3 = 0$, a tedy

$$\alpha_{i1}\bar{x} + \alpha_{i2}\bar{y} + \alpha_{i3}\bar{z} = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Vzhledem k platnosti Laplaceovy věty o rozvoji determinantu dle jakéhokoli řádku a skutečnosti, že μ_1 je vlastní číslo matice M, lze hodnoty $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ položit rovny algebraickým doplňkům $\psi_1(\mu_1)$, $\psi_2(\mu_1)$, $\psi_3(\mu_1)$ prvků prvního řádku determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\mu_1, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}-\mu_1, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}-\mu_1 \end{vmatrix}.$$

Analogicky lze postupovat s vlastním číslem μ_2 (resp. μ_3) a druhým (resp. třetím) řádkem matice M a získat tak další možnou volbu hodnot $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ – trojici algebraických doplňků $\chi_1(\mu_2)$, $\chi_2(\mu_2)$, $\chi_3(\mu_2)$ (resp. $\vartheta_1(\mu_3)$, $\vartheta_2(\mu_3)$, $\vartheta_3(\mu_3)$). Jelikož soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_{i1}\psi_1(\mu_1) & + & \alpha_{i2}\psi_2(\mu_1) & + & \alpha_{i3}\psi_3(\mu_1) & = & 0 \\ \alpha_{i1}\chi_1(\mu_2) & + & \alpha_{i2}\chi_2(\mu_2) & + & \alpha_{i3}\chi_3(\mu_2) & = & 0 \\ \alpha_{i1}\vartheta_1(\mu_3) & + & \alpha_{i2}\vartheta_2(\mu_3) & + & \alpha_{i3}\vartheta_3(\mu_3) & = & 0 \end{array}$$

je homogenní, stačí dokázat, že determinant matice této soustavy se identicky nerovná nule, neboť potom jsou jistě všechny koeficienty α_{ij} nulové. Ludvík Kraus našel jeden případ, kdy je uvedený determinant nenulový; konkrétněji se jedná o diagonální matici s různými prvky na diagonále. Tento jeho poslední krok důkazu však není korektní, svou volbou se v podstatě omezil jen na případ diagonálních matic, jejichž prvky na diagonále (a tedy i vlastní čísla) jsou navzájem různé.

2.3 Eduard Weyr

Eduard Weyr se narodil do rodiny, ve které měl již od dětství příznivé podmínky k budování vztahu k přírodním vědám. Jeho otec František Weyr (1820–1889) byl profesorem matematiky na pražské německé reálce v Mikulandské ulici.[36] Z devíti sourozenců Eduarda Weyra se matematice (především geometrii) věnoval starší bratr Emil (1848–1894), který udržoval kontakty s předními evropskými matematiky a který se již roku 1875 stal řádným profesorem vídeňské univerzity. Ačkoli spolu oba sourozenci sepsali jen jedinou matematickou práci,[37] byla Eduardova profesní cesta starším bratrem značně ovlivněna. V roce 1890 založil Emil Weyr spolu s Gustavem von Escherichem (1849–1935) časopis Monatshefte für Mathematik und Physik.[38] Hned v prvním ročníku v něm Eduard Weyr publikoval své významné výsledky z maticového počtu. K bližšímu vykreslení obrazu Weyrovy rodiny ještě dodejme, že mladší bratr Bedřich (1853–1908) se stal chemikem.

Od roku 1868 studoval Eduard Weyr na pražské polytechnice, na které ho učili např. Jacob Heinrich Karl Durège[39] (1821–1893), Karl Joseph Küpper[40] (1828–1900), Josef Šolín[41] (1841–1912) či František Josef Studnička. Mnohé své znalosti a zkušenosti získal rovněž studiem v zahraničí. V akademickém roce 1872/73 pobýval v Göttingen, kde působili Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833–1872), E. Ch. J. Schering (1833–1897) a E. F. Klinkerfuese (1827–1884),

[36] František Weyr patřil mezi výrazné české středoškolské učitele té doby. Za svou pedagogickou činnost byl uznáván například Jednotou českých mathematiků.

[37] Jedná se o třídílnou učebnici *Základové vyšší geometrie* [WW1], [WW2], [WW3], jejíž jednotlivé díly jsou datovány roky 1871, 1874 a 1878.

[38] Časopis je vydáván i dnes, od roku 1952 pod zkráceným názvem *Monatshefte für Mathematik.*

[39] Německý profesor Jacob Heinrich Karl Durège byl v letech 1857 až 1864 profesorem matematiky na polytechnice v Curychu, poté několik let na pražské technice, odkud přešel v roce 1969 na pražskou (později německou) univerzitu. Hlavními oblastmi jeho odborného zájmu byly především matematická analýza a geometrie.

[40] Karl Joseph Küpper byl německý matematik, jenž od roku 1852 učil na průmyslové škole v Terstu, roku 1867 se stal profesorem deskriptivní geometrie na pražské technice, v období 1869–1900 přednášel na německé technice v Praze.

[41] Josef Šolín byl český matematik a deskriptivní geometr, který se zabýval i pružností, pevností, statikou či stereotomii. Pro uvedené obory se stal spolutvůrcem jejich terminologie.

roku 1873 zde získal titul doktora filozofie. V témže roce odjel Eduard Weyr do Paříže, kde poslouchal přednášky Charlese Hermitea[42] (1822–1901) a Josepha Alfreda Serreta (1819–1885). Během zimního semestru 1885/86 navštěvoval přednášky Leopolda Kroneckera v Berlíně, kde se zúčastnil také přednášek, které vedl Immanuel Lazarus Fuchs (1833–1902). V korespondenci z roku 1885 popisuje příteli Jaroslavu Vrchlickému[43] (1853–1912), který byl v té době tajemníkem české techniky, berlínskou výuku a přijetí tamější odbornou společností, v níž hrály podstatnou roli nejvýraznější světové osobnosti teorie matic, takto:

Budu navštěvovati Kroneckerovy a Fuchsovy přednášky. Tyto dnes započly a mohu říci, že mě to činilo náramnou švandu, když jsem se zase po tolika letech do škamny posadil, zdálo se mi jako bych omládl a smát jsem se musil, když jsem tu mládež pozoroval kterak s pietou však horlivě si zapisovala, … Prof. Fuchs mě po přednášce vyzval, abych se súčastnil v sobotu banketu, který pořádají Weierstrassovi kollegové na počest jeho 70. narozenin v Hôtelu de Rome i pozvání to jsem s radostí přijal a tak zýtra ten zdejší učený svět důkladně okouknu.

Roku 1874 se Eduard Weyr habilitoval na české polytechnice, roku 1876 na pražské univerzitě, kde v té době již rok suploval hodiny bratra Emila po jeho odchodu do Vídně. Od téhož roku byl mimořádným a od roku 1881 řádným profesorem na české technice, od roku 1891 navíc suplujícím profesorem na české univerzitě v Praze. Chystaného jmenování řádným profesorem na české univerzitě v roce 1903 se nedožil.

V obdobích 1884/85 a 1890/91 zaujímal Eduard Weyr na technice funkci rektora. Byl členem řady českých i zahraničních společností, udržoval kontakty s mnoha evropskými matematiky, odmítl několik nabídek profesury na zahraničních univerzitách. Nepřijetí této nabídky z vídeňské univerzity komentoval roku 1890 v Drobných zprávách v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky[44] matematik Josef Beneš[45] (1859–1927) následujícími slovy:

P. prof. Ed. Weyra prosím, by prominul, že jeho jménem krášlím sobě tuto zprávu. Svým dopisem, prof. Escherichovi zaslaným, a zvláště motivem, proč u nás zůstane, uchystal české počtářské rodině roztomilé překvapení. … Shodujíť se všichni v tom, že p. professor dopisem oním přitulil své jméno k našemu kroužku tím těsněji, čím je vlastními pracemi vzdálil do nejpřednějších řad pracovníků světových. (str. 302–303)

Odborné zaměření prací Eduarda Weyra zahrnuje nejen oblasti algebry

[42] Kontakt s Charlesem Hermitem, jedním z nejvýznamnějších matematiků té doby, umožnil vytvoření dalších spojení české matematické komunity se zahraničím. Od doby pobytu Eduarda Weyra ve Francii získávala Jednota českých mathematiků z Paříže časopis *Comptes Rendus*. Byl to právě Charles Hermite, který předkládal Weyrovy práce pařížské akademii.

[43] Jaroslav Vrchlický, vlastním jménem Emil Bohuslav Frída, byl český básník, dramatik a překladatel nominovaný na Nobelovu cenu za literaturu. Byl profesorem srovnávacích literatur na univerzitě, poslancem Panské sněmovny ve Vídni a tajemníkem jak české techniky, tak České akademie věd a umění.

[44] Drobné zprávy. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 19(1890), str. 300–305.

[45] Josef Beneš studoval na české technice a české univerzitě v Praze. Jeho zájmem byla pojistná matematika. Od roku 1890 pracoval v Úrazové pojišťovně dělnické, kde se stal vrchním radou. Od roku 1904 byl soukromým docentem pojistné matematiky na české technice.

(determinanty, matice, kvaterniony), ale výraznou měrou především geometrii a dále potom analýzu. Bližší informace o jeho životě a činnosti uvádí monografie Jindřicha Bečváře (nar. 1947) a kolektivu autorů *Eduard Weyr (1852–1903)* [Be1] z roku 1995, článek Jindřicha Bečváře *Eduard Weyr and Linear Algebra* [Be7] z roku 2010 a práce Karla Petra a Jana Sobotky (1862–1931) *O životě a činnosti Eduarda Weyra* [PS1][46] z roku 1905.

Z prací Eduarda Weyra jsou dnes nejvíce ceněny publikace s maticovou tématikou, zejména jeho výsledek o konvergenci maticové mocninné řady a teorie charakteristických čísel. Dá se říci, že autor žil ve svém maticovém světě, který se stal jakousi malou enklávou na území evropského kontinentu soustředěného v této sféře na teorii determinantů a teorii bilineárních a kvadratických forem.

Do problematiky teorie matic budeme řadit Weyrovy publikace, jejichž chronologický seznam je následující:

- *O základní větě v theorii matric* (1884),
- *Sur la théorie des matrices* (1885),
- *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* (1885),
- *O binarných matricích* (1887),
- *Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices* (1887),
- *O theorii forem bilinearných* (1889),
- *Zur Theorie der bilinearen Formen* (1890),
- *O theorii forem bilinearných* (1901).

Vzhledem k vzájemně jednoznačnému vztahu mezi kvaterniony a čtvercovými maticemi druhého řádu bychom však zřejmě mohli na začátku přehledu uvést i článek

- *Sur la théorie des quaternions* (1884),

který je primárně zaměřen na teorii kvaternionů, nicméně matice se v něm rovněž vyskytují. V textu se pozastavíme rovněž u Weyrova článku

- *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* (1887).

Není sice věnován teorii matic, ale jeho výsledky lze do řeči matic přeložit. To také Weyr v dalších pracích učinil.

Dříve než Eduard Weyr v druhé polovině osmdesátých let 19. století publikoval své nejdůležitější výsledky z teorie matic, resp. tvrzení o konvergenci mocninné řady pro lineární asociativní algebru platící také pro algebru matic, sepsal i jiné práce, které lze zařadit do lineární algebry. Zmiňme krátký článek

[46] Práce [PS1] je složena ze čtyř článků [Pe1], [Pe2], [So1] a [Pe3], z nichž posledně jmenovaný je seznamem publikací Eduarda Weyra. Tento seznam byl po devadesáti letech zkorigován, okomentován a doplněn chybějícími tituly Jindřichem Bečvářem v již zmíněné knize [Be1].

z roku 1880 nazvaný *Verification der Multiplicationsformel für Determinanten* [We1],[47] jehož náplň je evidentní z názvu, a práci *O řešení lineárných rovnic* [We4][48] z roku 1885, která pojednává o řešení homogenních a nehomogenních soustav lineárních rovnic. K dané otázce, kterou bychom dnes řešili spíše pomocí hodností matice soustavy, resp. rozšířené matice soustavy, přistoupil autor v roce 1885 ještě z pohledu teorie determinantů. V řešení tohoto problému se tedy nevymykal postupům svých současníků.[49]

S výjimkou dvou publikací (*O základní větě v theorii matric* a *O theorii forem bilinearných* – verze z roku 1901) byly zmíněné práce referovány v rozsáhlém díle *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*, který je podstatně spojen s Johannem Christianem Poggendorffem (1796–1877).[50]

2.4 Weyrův důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty

- *O základní větě v theorii matric* [We2], 1884

Dne 25. dubna 1884 přednášel Eduard Weyr na zasedání Královské české společnosti nauk. Příspěvek, který byl téhož roku publikován ve *Zprávách o zasedání KČSN*, nazval *O základní větě v theorii matric*. Uvedl zde výše zmíněný důkaz Cayleyovy-Hamiltonovy věty Ludvíka Krause a poté svoji mírně pozměněnou verzi tohoto důkazu.

V úvodu připomněl Cayleyův *Memoár*, z něhož také při argumentaci, proč se důkazu věnoval, citoval:

… toť základní Cayley-em uvedená věta. Důkaz její provádí autor jen v případu $n = 2$ přímou verifikací; toutéž cestou i případ $n = 3$ sám proskoumal a praví „but I have not thought it necessary to undertake the labour of a formal proof of the theorem in the general case of a matrix of any degree.“

Chtíti verifikovati theorem v případu obecném přímým vyčíslením napsaného determinantu by bylo prací nad míru obtížnou a ani mi na mysl nepřišlo, bych ji

[47] Krátká reference od Eugena Otta Erwina Netta viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 13(1881), str. 123. Viz též historický přehled Thomase Muira *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development IV.* [Mu2], str. 5.

[48] Studničkova reference viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 17(1885), str. 64–65, dále viz např. Muir T.: *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development IV.*, str. 100.

[49] Celosvětová situace viz 1. kapitola.

[50] Práce Eduarda Weyra viz Bd. 3, str. 1435–36, a Bd. 4, str. 1623–24.

Zmíněný slovník je velmi rozsáhlou, mnohosvazkovou prací obsahující na více než 20 000 stranách přibližně 30 000 bibliografií doplněných seznamem publikací, ocenění či nekrology. Dílo je i více než sto let po Poggendorffově smrti dále vydáváno jeho následovníky. Základní životní a profesní data J. Ch. Poggendorffa, historie slovníku a přesný přehled informací o jednotlivých svazcích (včetně počtu stránek, vykazovaného období, let vydání nebo počtu obsažených článků) viz článek vydaný k dvoustému výročí Poggendorffova narození: *J. C. Poggendorff, Biographisch-literarisches Handwörterbuch der exakten Naturwissenschaften*, N. T. M. 5(1997), Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

V dalším textu se již o referenci jednotlivých Weyrových prací v tomto obsáhlém díle nebudeme zmiňovat.

podniknul. Měl jsem však za to, že by přece bylo záhodno podati důkaz vytknuté základní věty v případu obecném. ([We2], str. 149)

Čtenářům rovněž připomněl znění samotné věty, kterou zapsal rovností

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - M, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - M, & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} - M \end{vmatrix} = 0,$$

kde

$$M = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\}.$$

je libovolná čtvercová matice stupně n.

Tvrzení jsme zapsali v symbolice, kterou používal Eduard Weyr, tj. svislé čáry pro determinant, resp. složené závorky pro matici. Všimněme si rovněž z dnešního pohledu problematického dosazení matice M do determinantu.

Dále autor zavedl značení

$$\varphi(\mu) = \begin{vmatrix} a_{11} - \mu, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - \mu, & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} - \mu \end{vmatrix},$$

kořeny rovnice $\varphi(\mu) = 0$ označil $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Potom lze Cayleyovu-Hamiltonovu větu ekvivalentně vyjádřit výrokem, že všechny prvky „*determinantu*“ $\Delta_{12\dots n} = \varphi(\mu_n)\varphi(\mu_{n-1})..\varphi(\mu_2)\varphi(\mu_1)$ jsou rovny nule, *neboť pokládáme-li determinant $\varphi(\mu_k)$ za matrix, tu on značí patrně rozdíl $M - \mu_k$, tak že $\Delta_{12\dots n}$ značí pak matrix $(M - \mu_n)..(M - \mu_1)$ t. j. značí levou stranu v rovnosti Cayley-ově.* ([We2], str. 149–150).

Z části citace (*neboť pokládáme-li determinant $\varphi(\mu_k)$ za matrix*) si čtenář může uvědomit existenci stále přetrvávajících nejasných hran v odlišování pojmů „determinant“ a „matice“. Tato nepřesná diverzifikace je evidentní i přímo z důkazu.

Dále Eduard Weyr podotkl na adresu svého přítele následující milá slova:

Hleděl jsem tuto větu obecně dokázati, však se mi to nepodařilo, neboť cesta, která v jednoduchých poměrně případech $n = 2, 3$ vedla k cíli, se v obecném případu stávala neschůdnou. Obrátil jsem se k svému příteli p. Dr. L. Krausovi, priv. docentu na zdejší české universitě, s prosbou, aby se pokusil o důkaz; byl jsem nemálo potěšen, obdržev ihned, čeho jsem si přál. Dovolím si reprodukovati doslovně pěkné úvahy p. dra Krause. ([We2], str. 150).

Následuje Krausův (takřka dvoustránkový) důkaz.[51] Po předložení postupu svého kolegy využil Eduard Weyr Krausovy myšlenky k formulaci své modifikované, mnohem kratší verze důkazu.

[51] Ten byl prezentován v části 2.2.

Uvažoval n hodnot $x_{k1}, \dots, x_{kn}$, pro které platí[52]

$$(M - \mu_k) \cdot \left\{ \begin{array}{llll} x_{k1}, & 0, & \dots, & 0 \\ x_{k2}, & 0, & \dots, & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{kn}, & 0, & \dots, & 0 \end{array} \right\} = 0.$$

Vztah jsme uvedli opět v autorově podání, abychom si uvědomili, že z hlediska dnešního zápisu Weyr „odčítal neodečitatelné“, tj. číslo od „schématu“ čísel. Zápis $M - \mu$ místo $M - \mu E$, kde E značí jednotkovou matici, používal autor běžně i v pozdějších textech. Pod značením μ rozuměl skalární matici určenou hodnotou μ, odůvodnění zkráceného značení podal roku 1887 v práci *O binarných matricích* [We8] (viz později). V dalším textu, nebude-li výslovně řečeno jinak, budeme dle současné symboliky do zápisů doplňovat matici E.

Pro libovolná $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a $r = 1, \dots, n$ dále zavedl hodnoty

$$\xi_r = \lambda_1 x_{1r} + \lambda_2 x_{2r} + \dots + \lambda_n x_{nr}$$

a vypočítal *součin matric*[53]

$$D \begin{pmatrix} \xi_1, & 0, & \dots, & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \xi_n, & 0, & \dots, & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 D \begin{pmatrix} x_{11}, & 0, & \dots, & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{1n}, & 0, & \dots, & 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + \lambda_n D \begin{pmatrix} x_{n1}, & 0, & \dots, & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{nn}, & 0, & \dots, & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 (M - \mu_2 E) \dots (M - \mu_n E) \cdot (M - \mu_1 E) \begin{pmatrix} x_{11}, & 0, & \dots, & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{1n}, & 0, & \dots, & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\dots + \lambda_n (M - \mu_1 E) \dots (M - \mu_{n-1} E) \cdot (M - \mu_n E) \begin{pmatrix} x_{n1}, & 0, & \dots, & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{nn}, & 0, & \dots, & 0 \end{pmatrix}.$$

Znovu poukažme na nedostatečné odlišování pojmů matice a determinant. Zatímco na začátku svého textu Eduard Weyr použil písmeno D pro označení determinantu, v této závěrečné fázi pod symbolem D rozuměl příslušnou matici.

Z vlastností hodnot $x_{k1}, \dots, x_{kn}$ plyne, že výsledná matice je nulová. Jsou-li $\xi_1, \dots, \xi_n$ libovolné, musí být každý prvek matice D (neboli $\varDelta_{12\dots n}$) skutečně roven nule. Možnost volby libovolných hodnot $\xi_1, \dots, \xi_n$ autor dokázal v závěru

[52] Sloupcový vektor se složkami $x_{k1}, \dots, x_{kn}$ je tedy vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu μ_k.

[53] O několik řádků výše autor psal ve zcela analogickém případě o *součinu matrix.* V článku jsou střídavě používány oba termíny. Pojem *matrice* (*matrix*) není v práci nikde zaveden. Vzhledem ke skutečnosti, že se zřejmě jedná o první českou publikovanou práci o maticích, je absence definice překvapivá.

práce. Bohužel se dopustil obdobné chyby jako Ludvík Kraus. Svou konkrétní volbou matice v závěru důkazu jej omezil jen na speciální typ matic. Navíc neřešil případ vícenásobných kořenů.

Weyrův důkaz Cayleyho-Hamiltonovy věty nalezl odezvu v zahraniční literatuře. Je zmíněn již v článku Jamese Josepha Sylvestera *Sur la résolution générale de l'equation linéaire en matrices d'un ordre quelconque* [Sy13] z téhož roku,[54] dále na 71. straně přehledové práce *Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen* [Su1] z roku 1898, jejímž autorem je německý matematik Eduard Study (1862–1930), na stranách 418 a 419 přepracovaného textu *Nombres complexes* [SC1] z roku 1908, který napsali Study a francouzský matematik Elie Joseph Cartan (1869–1951), a také na straně 448 stati *Theorie des formes et des invariants* [MD1] z roku 1907 německo-francouzské dvojice Friedrich Wilhelm Franz Meyer (1856–1934) a Jules Joseph Drach (1871–1949).

Weyrova práce [We2] je referována Františkem Josefem Studničkou v časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.[55]

2.5 Exponenciála a logaritmus

- *Sur la théorie des quaternions* [We3], 1884

Vstupní branou ke zbývajícím pracím s tématikou matic z výše uvedeného chronologického seznamu lze nazvat článek *Sur la théorie des quaternions* z roku 1884. Práce je rozdělena na dvě části, které byly publikovány v 98. ročníku francouzského časopisu Comptes Rendus. Francouzské akademii byly představeny Charlesem Hermitem. V první ještě čtenář žádnou poznámku z maticového počtu nenalezne,[56] v druhé části jsou představeny zajímavé maticové

[54] Konkrétněji se jedná o následující řádky:

C'est dans les Lectures, publiées en 1844, que pour la premiére fois a paru la belle conception de l'équation identique appliquée aux matrices du troisième ordre, enveloppée dans un langage propre à Hamilton, après lui mise à nu par M. Cayley dans un très important Mémoire sur les matrices dans les Philosophical Transactions pour 1857 ou 1858, et étendue par lui aux matrices d'un ordre quelconque, mais sans démonstration; cette démonstration a été donnée plus tard per feu M. Clifford (voir ses oeuvres posthumes), par M. Buchheim dans le Mathematical Messesger (marchant, comme il l'avoue, sur les traces de M. Tait, d'Édimbourg), par M. Ed. Weyr, par nousmême, et probablement par d'autres; mais les quatre méthodes citées plus haut paraissent être tout à fait distinctes l'une de l'autre.
([SyP], díl IV., str. 202)

[55] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 17(1885), str. 107.

[56] V této části předvedl řešení tzv. bilaterální rovnice tvaru $aq^n b + cq^{n-1}d + \ldots + gqh = r$, kde $a, b, c, \ldots$ jsou dané kvaterniony a q hledaný kvaternion. Jedná se zobecnění problému, který vyřešil téhož roku James Joseph Sylvester. Ten snahu a výsledky Eduarda Weyra i dalších matematiků řešících daný problém okomentoval na konci roku 1884 v časopisu Nature pochvalnými slovy (citováno i s dvěma chybami ve jménech, správně je Poincaré a Buchheim):

The subject could not be in better hands. The ball is served, and the most skilful and practised players – tha Cayleys, the Lipschitzes, the Poincarrés, the Weyrs, the Buckheims (and who knows how many more?) – stand round ready to receive it, and keep it flying in the air. ([Sy15], str. 36)

Uvedené výsledky můžeme využít i pro matice druhého řádu, jejich vztah ke kvaternionům výsledky. Hned v úvodu je totiž připomenut (a pomocí konkrétních čtyř matic 1, i, j, k blíže objasněn) vztah mezi kvaternionem $w + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ a maticí druhého řádu

$$\begin{matrix} w + z\sqrt{-1} & x + y\sqrt{-1} \\ -x + y\sqrt{-1} & w - z\sqrt{-1} \end{matrix}\ .$$

Na rozdíl od předchozí práce *O základní větě v theorii matric* z roku 1884 Weyr nepoužil pro označení matice jakékoli znaky ohraničující čtvercové schéma.

Pro matici M druhého řádu definoval matici e^M vztahem:

$$\mathrm{e}^M = \frac{\mathrm{e}^{\mu_1} - \mathrm{e}^{\mu_2}}{\mu_1 - \mu_2} \cdot M + \frac{\mu_1 \cdot \mathrm{e}^{\mu_2} - \mu_2 \cdot \mathrm{e}^{\mu_1}}{\mu_1 - \mu_2} \cdot E,$$

kde μ_1, μ_2 jsou tzv. *racines latentes* matice M. *Latentními kořeny* matice M přitom Weyr rozuměl (v dnešní řeči) její vlastní čísla. Při pojmenování kořenů charakteristické rovnice se v této práci přidržel Sylvesterovy terminologie,[57] později však od tohoto označení ustoupil. Ostatně právě v pasáži věnované zavedení matice e^M se na Sylvestera, resp. na jeho *seconde loi de mouvement algébrique*, který byl uveden téhož roku v Comptes Rendus, Weyr odvolává. Vztah pro e^M je totiž obdobou Sylvesterova výsledku, že každou celistvou nebo lomenou funkci $\varphi(M)$ matice M lze vyjádřit ve tvaru

$$\varphi(M) = \frac{\varphi(\mu_1) - \varphi(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2} \cdot M + \frac{\mu_1 \cdot \varphi(\mu_2) - \mu_2 \cdot \varphi(\mu_1)}{\mu_1 - \mu_2} \cdot E.$$

V případě $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ je $\varphi(M) = \varphi'(\mu) \cdot M + (\varphi(\mu) - \mu\varphi'(\mu))E$.

Dále Eduard Weyr hledal pro libovolnou matici M a příslušnou exponenciální funkci e^M periodu L, tj. matici L, pro kterou platí

$$\mathrm{e}^{M+L} = \mathrm{e}^M.$$

Došel k výsledku, že v obecném případě je periodou skalární matice L určená hodnotou $2k\pi i$, kde k je celé číslo. Uvažujeme-li však pouze tzv. matice komplanární s M, tj. matice ve tvaru $\alpha M + \beta E$, existuje vedle skalární periody $2\pi i$ ještě neskalární perioda

$$2\pi i \cdot \frac{M - \mu_2 E}{\mu_1 - \mu_2}\ .$$

Dále Eduard Weyr poopravil větu o periodách exponenciální funkce definované pro komplementární kvaterniony, kterou uvedl roku 1866 William Rowan Hamilton (1805–1865) v práci *Elements of Quaternions*.

---

v první části práce však ještě zmíněn není.

[57] V článku *On the equation to the secular inequalities in the planetary theory* z roku 1883 Sylvester při zavedení pojmu *latent roots* napsal:

It will be convenient to introduce here a notion (which plays a conspicuous part in my new theory of multiple algebra), viz. that of the latent roots of a matrix – latent in a somewhat similar sense as vapour may be said to be latent in water or smoke in a tobacco-leaf. ([Sy10], str. 267, nebo [SyP], díl IV., str. 110)

V samém závěru článku autor definoval funkci inverzní k funkci e^M, tj. přirozený logaritmus $\log M$ matice M[58] vztahem

$$\mathrm{e}^{\log M} = M,$$

z něhož odvodil ekvivalentní explicitní vyjádření funkce:

$$\log M = \frac{\log \mu_1 - \log \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \cdot M + \frac{\mu_1 \log \mu_2 - \mu_2 \log \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \cdot E + k\omega E + k'\omega',$$

kde ω a ω' značí výše uvedené periody, k a k' jsou celá čísla.

Problematiku matic e^M a $\log M$ studoval Weyr i ve svých později publikovaných spisech *O binarných matricích*, *O theorii forem bilinearných*, *Zur Theorie der bilinearen Formen*, nicméně jejich zavedením v roce 1884 se stal zřejmě prvním matematikem, který s exponenciálou a logaritmem s maticovým argumentem pracoval. I kdybychom mu toto prvenství přiřkli neprávem, jeho zařazení mezi průkopníky je nezpochybnitelné. Americký matematik Cyrus Colton MacDuffee v útlé monografii *The Theory of Matrices* z roku 1933 i Morris Kline mnohem později v díle *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* z roku 1972 uvedli v partiích pojednávajících o historii této problematiky texty pozdější. MacDuffee zmínil (na str. 99) článek *Intégration par séries des équations différentielles linéaires* [Pn1] z roku 1888, který napsal italský matematik Giuseppe Peano (1858–1932) a který je překladem jeho italského originálu *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari* z roku 1887, dále práci Emmanuela Carvalla (1856–1945) *Sur les systèmes linéaires, le calcul des symboles différentiels et leur application à la physique mathématique* [Cv1] z roku 1891 a krátkou poznámku *Note on the representation of orthogonal matrices* [Tb2] Henryho Tabera (1860–1936) z roku 1892. Oba matematikové, MacDuffee i Kline (ten na str. 811), shodně poukázali na text *On the roots of matrices* [Mz1] matematika kanadského původu Williama Henryho Metzlera (1863–1943) z roku 1892. Jedná se o disertační práci,[59] kterou Metzler napsal pod vedením již zmíněného Henryho Tabera a amerického matematika Williama Edwarda Storyho (1850–1930). Metzlerova práce byla publikována v časopisu American Journal of Mathematics. Citujme konkrétní Klinova slova:

In his paper … Metzler introduced transcendental functions of a matrix, writing each as a power series in a matrix. He established series for e^M, e^{-M}, $\log M$, $\sin M$, *and* $\sin^{-1} M$. Thus

$$e^M = \sum_{n=0}^{\infty} M^n/n!$$

([Kl1], str. 811)

---

[58] Přidržíme se autorova značení, tj. funkci přirozený logaritmus matice M budeme značit $\log M$.

[59] Práce byla napsána na Clark University ve Worcesteru ve státě Massachusetts.

Erik Hemmingsen, emeritní profesor na Syracuse University, o Metzlerovi napsal:[60]

William Henry Metzler ... was the one who first pointed out that one could have the transcendental functions of a square matrix simply by substituting it into the appropriate Taylor series.

Pro kvaternion q však byly funkce e^q a $\log q$ studovány již dříve, a to v Hamiltonových monografiích *Lectures on Quaternions* a *Elements of Quaternions* z let 1853 a 1866. Dnes běžně využíváme vzájemně jednoznačný vztah mezi maticemi a homomorfismy, proto na tomto místě uveďme ještě skutečnost, že pro endomorfismus R byl endomorfismus e^R zaveden roku 1888 G. Peanem v knize *Calcolo geometrico* [Pn2] (str. 150) vztahem

$$e^R = 1 + R + \frac{R^2}{2!} + \frac{R^3}{3!} + \dots$$

Autorem reference na Weyrův článek pro časopis Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik[61] je německý matematik Stanislaus Ferdinand Victor Schlegel (1843–1905) působící v Hagenu. Dále viz např. časopis Bulletin des sciences mathématiques.[62]

2.6 Počátky Weyrovy teorie

• *Sur la théorie des matrices* [We5], 1885
• *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* [We6], 1885

V roce 1885 vyšly dva Weyrovy krátké články nazvané *Sur la théorie des matrices* a *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces.* Oba byly opět otištěny ve francouzském časopisu Comptes Rendus a představeny Charlesem Hermitem. Ač jsou datovány do téhož roku a mají obdobnou náplň, použil v nich autor mírně pozměněné pojmenování pro vlastní čísla matice. V prvním z uvedených článků se Eduard Weyr ještě držel plného názvu *latentní kořen*, zatímco v druhém používal již jen označení *kořen.* Výrazným společným znakem obou krátkých prací je to, že v nich autor ve stručnosti prezentoval některé své poznatky, které později plodně rozvinul a použil ve své *teorii charakteristických čísel* a s ní spojené problematice *typických tvarů matic.* Podrobně je vysvětlil především v práci *O theorii forem bilinearných*, resp. v její pozměněné německé verzi *Zur Theorie der bilinearen Formen* (viz dále).

Teorii vystavěl na pojmu *nulita matice.* V té době užívaný pojem nulita matice znamená (pro čtvercovou matici) rozdíl řádu a hodnosti matice. Byl zave-

[60] *Recollections by Erik Hemmingsen*, *The Department of Mathematics until 1960* [online], http://math.syr.edu/DeptRecollections.htm
Úryvek je součástí příspěvku o Katedře matematiky na Syracuse University v New Yorku, na které byl Metzler v období 1895 až 1923 profesorem.

[61] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 16(1884), str. 107.

[62] Bulletin des sciences mathématiques 9(1885), str. 54–55.

den roku 1882 Jamesem Josephem Sylvesterem.[63] Skutečnost, že dnes dáváme přednost pojmu hodnost je logická, neboť tento pojem má obecnější význam (zahrnuje i obdélníkové matice). Pojem nulita však v současné literatuře přeci jen také nalezneme.

V článku *Sur la théorie des matrices* autor nejprve zmínil Arthura Cayleyho a jeho slavnou *l'équation fondamentale* (Cayleyova-Hamiltonova věta) a dále Sylvesterovy *matrice dérogatoires*. (Přívlastek *dérogatoires* užíval James Joseph Sylvester pro matice stupně n, pro které existuje anulující polynom stupně nižšího než n.) Poté přistoupil k prezentaci vlastních výsledků, které uvedl slovy:

Je suis parvenu à établir un théorème qui jette du jour sur ce sujet, et que je me permets de communiquer à l'Académie. ([We5], str. 787)

Pro matici M řádu n zapsal Eduard Weyr rovnici

$$(M-\lambda_1 E)^{s_1-\alpha_1+1}(M-\lambda_2 E)^{s_2-\beta_1+1}\dots(M-\lambda_u E)^{s_u-\upsilon_1+1}=0,$$

kde $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_u$ jsou navzájem různá vlastní čísla matice M, s_1, $s_2,\dots$, s_u jejich násobnosti a $\alpha_1,\beta_1,\dots,\upsilon_1$ nulity matic

$$M-\lambda_1 E,\ M-\lambda_2 E,\ \dots,\quad M-\lambda_u E.$$

Čísla $\alpha_1,\beta_1,\dots,\upsilon_1$ jsou menší než jim příslušná čísla s_1, s_2, $\dots$, s_u, a protože pro každé $i=1$, 2, $\dots$, u je matice $M-\lambda_i E$ singulární, jsou čísla $\alpha_1,\beta_1,\dots,\upsilon_1$ minimálně rovny jedné. Pro případ $\alpha_1=\beta_1=\dots=\upsilon_1=1$ dostáváme anulující polynom stupně n (tj. tvrzení z Cayleyho *Memoáru*), v ostatních případech je však matice M *dérogatoire*. Autor tak odvodil výsledek, že pro danou matici M stupně n existuje anulující polynom stupně menšího než n právě tehdy, když existuje aspoň jedno vlastní číslo λ matice M, pro které je nulita matice $M-\lambda E$ větší než jedna.

Dalším výsledkem článku je tvrzení, že $s_1=\alpha_1$, $s_2=\beta_1,\dots$, $s_u=\upsilon_1$ platí právě tehdy, když lze matici M psát ve tvaru

$$M=A^{-1}M_0A,$$

kde M_0 značí diagonální matici, jejíž hlavní diagonála obsahuje vlastní čísla matice M (v počtu rovném násobnosti daného vlastního čísla), a A je matice, jež má nulitu nula, tj. v dnešní řeči matice M je diagonalizovatelná, právě když se násobnost všech vlastních čísel λ_i rovná nulitě matice $M-\lambda_i E$.

Další uvedené tvrzení je významné, jedná se totiž o Weyrův zápis odhadu nulity součinu dvou matic:

... le degré de nullité d'un produit de matrices est au plus égal à la somme des degrés de nullité des facteurs, et au moins égal au plus petit de ces degrés. ([We5], str. 788)

[63] Zájemce o citaci Sylvesterovy definice nulity (včetně názvu jeho článku) odkazujeme na 1. kapitolu této práce.

Označíme-li nulitu matice zkratkou nul, můžeme slovní vyjádření přepsat do symbolického zápisu

$$\text{nul}\,(M_i) \le \text{nul}\,(M_1 M_2) \le \text{nul}\,(M_1) + \text{nul}\,(M_2), \qquad i = 1, 2.$$

Rovněž tento vztah je úzce spjat s Jamesem Josephem Sylvesterem, který jej představil tři roky před Eduardem Weyrem, tj. roku 1882.[64]

V závěru článku je uvedena věta o neřešitelnosti konkrétní maticové rovnice. Jestliže N je matice s α-násobným vlastním číslem 0 a α_1 je nulita matice N ($\alpha_1 < \alpha$), potom neexistuje matice X, pro kterou by platilo $X^k = N$, kde k je celé číslo větší než $\alpha - \alpha_1$.

Shrnutí Weyrova článku vyšlo v roce 1887 v časopisu Bulletin des Sciences Mathématiques,[65] neobsahovalo však ani zmínku o nutné a postačující podmínce pro diagonalizovatelnost čtvercové matice. V několika souvětích byly hlavní výsledky Weyrovy práce rovněž zapsány berlínským matematikem Eugenem Otto Erwinem Nettem (1848–1919) v referativním časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.[66]

V článku *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* je ihned v úvodu představen nový pojem. Jedná se o *charakteristické číslo* příslušné k vlastnímu číslu matice. Eduard Weyr uvedl, že pro každou komplexní matici M řádu n a její s-násobné vlastní číslo λ existuje přirozené číslo t, pro které je[67]

$$\text{nul}(M - \lambda E) < \text{nul}(M - \lambda E)^2 < \cdots < \text{nul}(M - \lambda E)^t = \text{nul}(M - \lambda E)^{t+1} = \cdots$$

Označíme-li

$$\begin{aligned}
&\text{nul}\,(M - \lambda E) = \eta_1, \\
&\text{nul}\,(M - \lambda E)^2 = \eta_1 + \eta_2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\text{nul}\,(M - \lambda E)^t = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_t,
\end{aligned}$$

potom přirozená čísla $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ nazveme *charakteristická čísla příslušná k vlastnímu číslu λ matice M*. Nejedná se tedy o nic jiného než o přírůstky nulit matic $(M - \lambda E)$, $(M - \lambda E)^2$, …, $(M - \lambda E)^t$.

Pro charakteristická čísla vlastního čísla λ matice platí:

$$\eta_1 \ge \eta_2 \ge \cdots \ge \eta_t, \qquad \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_t = s.$$

Označíme-li počty jednotlivých charakteristických čísel (příslušné ke všem vlastním číslům λ_1, λ_2, …, λ_u matice M) symboly t_1, t_2, …, t_u, potom lze

[64] Sylvesterova originální formulace tvrzení (včetně názvu práce) je obsažena v 1. kapitole.

[65] Bulletin des Sciences Mathématiques 11(1887), Revue des publications académiques et périodiques, str. 158–159.

[66] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 17(1885), str. 109.

[67] Současný český matematik Jiří Holenda ve své knize *O maticích* [Hl1] z roku 2007 nazval toto číslo *vzestup matice*, moderní anglicky psané odborné články často používají termínu *index of a matrix*, pro nilpotentní matici *nilpotency index of a matrix*.

výsledek z článku *Sur la théorie des matrices* o anulujícím polynomu menšího stupně než je řád příslušné matice zpřesnit rovností

$$(M - \lambda_1 E)^{t_1}(M - \lambda_2 E)^{t_2} \dots (M - \lambda_u E)^{t_u} = 0,$$

kde polynom na levé straně má ze všech anulujících polynomů matice M nejmenší stupeň. Jedná se tedy (v dnešní řeči) o minimální polynom matice M.

Eduard Weyr poznamenal, že matice M a N jsou podobné, právě když mají stejná vlastní čísla a k nim příslušná charakteristická čísla. Dále uvedl velmi důležitý poznatek: systém všech vlastních čísel a jim příslušných charakteristických čísel tvoří úplný systém invariantů podobnosti matic a ke každé možné volbě těchto invariantů je přidružena třída podobných matic. Pro soubor všech charakteristických čísel příslušných ke všem vlastním číslům matice A se vžil název *Weyrova charakteristika matice A*. Bereme-li v úvahu pouze charakteristická čísla odpovídající jednomu vlastnímu číslu λ, mluvíme o *Weyrově charakteristice matice A příslušné vlastnímu číslu* λ.

Weyr dále sestrojil konkrétní matici M řádu n mající daná vlastní čísla a charakteristická čísla a k této matici nalezl s využitím vztahu $X = Q^{-1}MQ$ všechny matice X patřící do stejné třídy podobných matic. Přitom matice M má velmi jednoduchý tvar, který Weyr později nazval *typickým tvarem*. Prvky typického tvaru matice jsou pouze vlastní čísla této matice, jedničky a nuly. Až na nepodstatné změny v uspořádání prvků se jedná o Jordanovu matici.

Resumé druhého Weyrova článku vyšlo opět v časopisu Bulletin des Sciences Mathématiques,[68] článek je zmíněn i v časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.[69]

Na konec této partie podotkněme, že z uvedených francouzských článků lze vyčíst pouhé základy Weyrovy teorie. Její přehledné shrnutí bude později formulováno jazykem současné lineární algebry v části 2.11 *Přehled Weyrovy teorie charakteristických čísel.*

2.7 Teorie matic pro českého čtenáře

- *O binarných matricích* [We8], 1887

Zcela jiný charakter než oba francouzské články z roku 1885 má další z Weyrových prací s maticovou tématikou. Spis *O binarných matricích* se odlišuje rozsahem (43 stran), „hustotou“ nových výsledků (v podstatě absentují), podrobným odvozováním a dokazováním poznatků, cílovou skupinou čtenářů i jazykem použitým k výkladu. Text byl otištěn roku 1887 ve Věstníku Královské české společnosti nauk a zřejmě byl primárně určen pro seznámení širší české matematické obce s maticemi a k objasnění jejich vztahu s hyperkomplexními

[68] Bulletin des Sciences Mathématiques 11 (1887), Revue des publications académiques et périodiques, str. 162–163.
[69] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 17(1885), str. 109.

čísly.[70] Jedná se o první český text, v němž jsou od základů a elementárně přestaveny nejdůležitější poznatky teorie matic.

Určitým nedostatkem spisu (pro pochopení maticového aparátu však spíše výhodou) je skutečnost, že teorie je budována pouze pro jisté čtvercové matice. *Binarnými maticemi* totiž autor nazýval matice druhého řádu. Z hyperkomplexních čísel se tedy věnoval kvaternionům, přičemž pod pojmem kvaternion rozuměl kvaternion s komplexními koeficienty,[71] k odlišení kvaternionu s reálnými koeficienty pak používal přívlastku reálný. Pojednání začíná slovy:

V jedné ze svých úvah o matricích „Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton“ … vytknul Sylvester výslovně totožnost theorie binarných matric s theorií kvaternionů; ale již Cayley ve své základní práci v tomto oboru „On the theory of Matrices“, … byl k souvislosti obou theorií poukázal.

Theorie kvaternionů založena Hamiltonem vzhledem k zamýšleným applikacím na úvahách geometrických; avšak nebude zajisté nezajímavo přihlédnouti k ní se stanoviska ryze počtářského, zaujatého v theorii matric.

Následující, arci velice elementarné úvahy obsahují základy theorie binarných matric a tím i základy theorie kvaternionů. ([We8], str. 358)

Matici Eduard Weyr v této práci definoval jako čtvercové schéma sestávající ze čtyř prvků.

Matricí druhého řádu, aneb prostě matricí rozumíme v následujících úvahách soustavu čtyř realných neb komplexních veličin a, b, c, d seřaděných do čtvercového schematu

$$\left\{ \begin{matrix} a, & b \\ c, & d \end{matrix} \right\}. \tag{1}$$

([We8], str. 358)

V celé práci pak používal bez bližšího určení pouze slovo *matrice* k označení matice řádu dva; matice vyššího řádu ani matice obdélníkové se v textu nevyskytují.

Ihned po definici poukázal na vzájemně jednoznačný vztah mezi maticemi a lineárními substitucemi. Této souvislosti potom využíval k některým dalším definicím, které se dnešnímu čtenáři jeví poněkud těžkopádné. Dokumentujme tuto skutečnost na dvou triviálních příkladech z prvního paragrafu nazvaného *Addice a subtrakce*:

Dvě matrice nazýváme rovnými a píšeme

$$\left\{ \begin{matrix} a, & b \\ c, & d \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} a', & b' \\ c', & d' \end{matrix} \right\}$$

[70] Kromě Eduarda Weyra se problematikou hyperkomplexních čísel v českých zemích ve druhé polovině 19. století zabývali August Seydler (1849–1891), Matyáš Lerch (1860–1922), František Josef Studnička a Jan Odstrčil (1837–1888).

[71] Kvaternion s komplexními koeficienty se většinou nazývá *bikvaternion*, přesněji také *hyperbolický bikvaternion*. Pojem bikvaternion byl představen roku 1853 v knize *Lectures on Quaternions*, jejímž autorem je William Rowan Hamilton.

pakli applikovány na dvě libovolné hodnoty x, y podávají tytéž hodnoty ξ, η t. j. pakli

$$ax + by = a'x + b'y, \quad cx + dy = c'x + d'y; \quad \ldots$$

([We8], str. 358–359)

Teprve poté je uvedena „naše definice“, tj. rovnost prvků na odpovídajících pozicích obou matic. Horší čitelnost textu pro současného čtenáře je ještě více evidentní ze zavedení sčítání matic:

Součtem dvou matric M a M' t. j.

$$\left\{ \begin{matrix} a, & b \\ c, & d \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} a', & b' \\ c', & d' \end{matrix} \right\}$$

rozumíme matrici, která applikována na x, y podává hodnoty $\xi+\xi'$, $\eta+\eta'$, pakli dané dvě matrice transformují x, y na ξ, η, resp. na ξ', η'.
([We8], str. 359)

Také v tomto případě však Eduard Weyr uvedl následně součet matic i dle našich zvyklostí.

Vedle sčítání matic zavedl také jejich rozdíl, součin a podíl a uvedl základní poznatky o těchto operacích. Definoval nulovou a jednotkovou matici, pro regulární matici inverzní matici (ve Weyrově terminologii *reciproká matrice*). Kromě již zmíněného 1. paragrafu je úvodní výklad obsahem i 2. paragrafu *Multiplikace*, 3. paragrafu *Divise* a 4. paragrafu *Reciproká matrice.* Zajímavé je, že pro determinant matice Weyr zavedl ještě termín *absolutní hodnota matrice.* Věta o násobení determinantů je tak v této terminologii zapsána v maticové řeči:

… absolutní hodnota součinu libovolného počtu matric rovná se součinu absolutních hodnot jednotlivých faktorů. ([We8], str. 365)

Formulace zvláště tohoto tvrzení pomocí matic byla v době zaměřené na studium determinantů velmi neobvyklá, vždyť i dnes větu vyslovujeme jazykem teorie determinantů.

Zvláštní pozornost věnoval Eduard Weyr skalární matici *čili skalaru.* Uvedl pravidla pro operace s nimi a zdůraznil uzavřenost těchto operací na množině skalárních matic. Skalární matici určenou hodnotou a nejprve označil (a) a poté napsal:

… že počítání se skalarnými mátricemi (a) se řídí těmiže pravidly jako počítání s obyčejnými (realnými neb komplexními) veličinami a. Z této příčiny budeme značiti skalar (a) prostě literou a, majíce však na paměti rozdíl mezi skalarem a a obyčejnou veličinou a. ([We8], str. 366–367)

Zpětně tak odůvodnil svůj (z našeho pohledu nepřesný) zápis skalární matice z předchozích publikací, na který jsme poukázali dříve.

V následujícím, šestém paragrafu *Celistvá a lomená funkce matrice* zavedl Eduard Weyr mocninu matice s celým exponentem a uvedl některé vlastnosti pro násobení mocnin. Celistvou funkcí m-tého stupně matice M rozuměl matici

$$a_0 M^m + a_1 M^{m-1} + \ldots + a_m E,$$

kde $a_0 \neq 0,\ a_1,\ \dots,\ a_m$ jsou čísla, a lomenou funkci matice zavedl jako podíl dvou celistvých funkcí této matice. Na tyto definice navázal sedmý paragraf *Základní rovnice dané matrice a redukce racionalných funkcí.* S využitím Cayleyovy-Hamiltonovy věty autor jednoduše dokázal, že matice M^2, resp. M^3 lze redukovat na lineární funkce matice M, a poté výsledek zobecnil pro libovolnou celistvou a racionální funkci φ. Jinými slovy, že lze psát $\varphi(M) = \alpha M + \beta E$, kde E je jednotková matice a $\alpha,\ \beta$ jsou vhodná čísla. Ta jsou závislá jen na kořenech matice a lze je vyjádřit dle již zmíněného „zákona" (*seconde loi de mouvement algébrique*). V případě různých kořenů matice $\lambda_1,\ \lambda_2$ se jedná o vztahy

$$\alpha = \frac{\varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad \beta = \frac{\lambda_1 \cdot \varphi(\lambda_2) - \lambda_2 \cdot \varphi(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

V případě $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ platí

$$\alpha = \varphi'(\lambda), \qquad \beta = \varphi(\lambda) + \lambda \cdot \varphi'(\lambda).$$

Druhý případ Weyr odvodil položením $\lambda_1 = \lambda_2 + \varepsilon$ a limitním přechodem pro ε blížící se nule. Odvození uskutečnil v osmé části *O kořenech matrice*, jejíž název přesně popisuje, čemu je pasáž věnována. Po definici vlastních čísel[72] matice je odvozena vlastnost, že má-li matice M vlastní čísla $\lambda_1,\ \lambda_2$, má celistvá funkce $\varphi(M)$ vlastní čísla $\varphi(\lambda_1),\ \varphi(\lambda_2)$, resp. lomená funkce $\frac{\varphi(M)}{\varphi_1(M)}$ vlastní čísla $\frac{\varphi(\lambda_1)}{\varphi_1(\lambda_1)},\ \frac{\varphi(\lambda_2)}{\varphi_1(\lambda_2)}$. Následuje text o výše uvedené závislosti skalárů $\alpha,\ \beta$ na vlastních číslech matice.

V devátém paragrafu *Obecná funkce matrice* autor uvedl následující výsledek: jestliže jsou absolutní hodnoty vlastních čísel λ_1, λ_2 matice M menší než je poloměr konvergence řady[73]

$$\varphi(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v, \qquad \text{resp. obecněji} \qquad \varphi(z) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v z^v,$$

potom je definována i matice

$$\varphi(M) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v M^v, \qquad \text{resp.} \qquad \varphi(M) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v M^v,$$

a platí $\varphi(M) = \alpha M + \beta E$, kde se skaláry α, β určí pomocí řady $\varphi(z)$, konkrétněji opět dle Sylvesterova *seconde loi de mouvement algébrique.*

V desátém paragrafu *Typický tvar matrice* se Eduard Weyr zabýval kanonickým (*typickým*) tvarem matice. Uvedl, že každou matici M lze zapsat ve tvaru $M = Q^{-1} M_0 Q$, kde Q je regulární matice a matice M_0 má tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda_1, & 0 \\ 0, & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{jsou-li vlastní čísla } \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ matice } M \text{ různá,}$$

[72] Eduard Weyr v tomto pojednání používá k označení vlastního čísla pouze slovo *kořen.* V definici navíc připomněl, že Sylvester používal pro tento pojem termínu *latentní kořen.*

[73] Případ zahrnující i záporné mocniny platí pouze pro regulární matici.

$$\begin{pmatrix} \lambda, & 0 \\ 0, & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \text{je-li } M \text{ skalární a } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \text{ a konečně}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda, & 0 \\ 1, & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \text{není-li } M \text{ skalární a } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda.$$

Matice M je tedy podobná maticí M_0, která má velmi jednoduchý, *typický* tvar.

V jedenáctém paragrafu dospěl Eduard Weyr pomocí typického tvaru matice k vyjádření maticové mocninné řady, tj. matice $\sum_{v=0}^{\infty} a_v M^v$, *čímž výsledky § 9. na novo potvrzeny.* ([We8], str. 380)

V následující části nazvané *O rovnici nejnižšího stupně* věnoval pozornost minimálnímu polynomu matice M. Došel k výsledku, že pro matici s dvěma různými kořeny λ_1, λ_2 je roven $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ a v případě $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ a současně M je, resp. není skalární matice roven $\lambda - \lambda_0$, resp. $(\lambda - \lambda_0)^2$.

Ve třináctém paragrafu *Řešení algebraické rovnice o skalarných koefficientech* hledal všechny matice M, které splňují vztah

$$M^n + a_1 M^{n-1} + \ldots + a_n E = 0,$$

speciálně pak vztah $M^n = E$.

Eduard Weyr se i v tomto spisu věnoval komplanárním maticím. Připomeňme, že maticí komplanární s maticí M rozuměl každou matici tvaru $\alpha M + \beta E$, kde α, β jsou skaláry. Ukázal, že všechny matice komplanární s určitou maticí M jsou komplanární navzájem a že výsledkem sčítání a násobení komplanárních matic je opět matice komplanární s maticemi, s nimiž operace provádíme. S maticí M je rovněž komplanární matice X, která vyhovuje rovnici

$$X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n E = M.$$

Nalezené skutečnosti shrnul do následující věty:

Matrice komplanarné s danou neskalarnou matricí

$$M = \begin{Bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{Bmatrix}$$

tvoří tedy system, z něhož nevystoupíme, applikujeme-li na jeho matrice základní operace arithmetické, mocnění, odmocňování, a t. d. ([We8], str. 386)

Upozornil rovněž na skutečnost, že v případě navzájem komplanárních matic je jejich násobení komutativní operací.

Náplň patnáctého a šestnáctého paragrafu (*Periody exponentialné funkce*, *Logarithmus matrice*) nejlépe vystihuje Weyrova poznámka pod čarou: *Tento a následující § uveřejnil jsem v podstatě pod názvem „Sur la théorie des quaternions“ v Comtes Rendus ze dne 26. května 1884.* ([We8], str. 387)

Kromě již publikovaných výsledků Eduard Weyr dopsal některé nové poznatky, např. že přirozený logaritmus nulové matice neexistuje nebo že přirozený logaritmus skalární matice je opět skalární maticí, konkrétněji je-li M

skalární matice určená hodnotou λ, platí $\log M = (\log\lambda + 2k\pi\mathrm{i})E$, kde k je celé číslo. K problematice periody exponenciály s maticovým argumentem se autor ještě krátce vrátil na poslední straně svého pojednání.

Vztah mezi maticemi druhého řádu a hyperkomplexními čísly, konkrétněji kvaterniony, popsal v posledních třech paragrafech (*Zavedení čtyr základních matric*, *Hamiltonův system kvaternionů*, *Pokračování*). Vyšel z následujícího poznatku: jsou-li J_1, J_2, J_3, J_4 čtyři lineárně nezávislé matice druhého řádu, potom lze každou matici M druhého řádu psát ve tvaru

$$M = \rho_1 J_1 + \rho_2 J_2 + \rho_3 J_3 + \rho_4 J_4$$

a matice druhého řádu považovat za systém hyperkomplexních čísel se čtyřmi základními jednotkami. Neboli slovy autora platí:

Matrici $\sum \rho_k J_k$ můžeme pokládati za komplexní číslo složené z jednotek J_k pomocí obyčejných kvantit ρ_k. ([We8], str. 393)

Dále je zavedena očekávaným způsobem rovnost dvou hyperkomplexních čísel, jejich součet a rozdíl. Součin je zapsán vztahem

$$\sum_{(k)} \rho_k J_k \sum_{(k)} \rho'_h J_h = \sum_{(k,h)} \rho_k \rho'_h J_k J_h, \qquad k,\, h = 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

Součin $J_k J_h$ lze opět vyjádřit jako lineární kombinaci základních jednotek. Položíme-li

$$J_k J_h = \sum_{(j)} \varepsilon_j^{(k,h)} J_j, \qquad j = 1,\, 2,\, 3,\, 4,$$

lze součin napsat opět ve tvaru patřícího do uvažovaného systému:

$$\sum_{(k)} \rho_k J_k \sum_{(h)} \rho'_h J_h = \sum_{(k,h)} \rho_k \rho'_h \sum_{(j)} \varepsilon_j^{(k,h)} J_j.$$

Koeficienty $\varepsilon_j^{(k,h)}$ uvedené v této rovnosti se dnes nazývají *strukturní konstanty* (bližší vysvětlení viz dále). Eduard Weyr rovněž uvedl některé konkrétní volby základních matic, velmi jednoduchá je následující varianta:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro volbu

$$J_1 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

potom hledal zbývající tři matice tak, aby platilo

$$J_2 J_2 = J_3 J_3 = -J_1, \quad J_2 J_3 = -J_3 J_2 = J_4.$$

Analogicky lze tyto podmínky při záměně značení $J_1,\ J_2,\ J_3,\ J_4$ za symboly $1,\ \mathrm{i},\ \mathrm{j},\ \mathrm{k}$ zapsat známými vztahy

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -1, \quad \mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}.$$

Ukázal, že požadované vztahy splňují matice

$$J_2 = \mathrm{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \mathrm{j} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_4 = \mathrm{k} = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}.$$

Souvislost mezi maticemi druhého řádu a kvaterniony potom vyjádřil následující poznámkou:

Nyní jest patrné, že theorie matric jest totožná s theorií kvaternionů; stačí libovolnou matrici

$$M = \left\{ \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\}$$

uvést do tvaru $w + xi + yj + zk$, *kde* w, x, y, z *jsou skalary, t. j. do tvaru kvaternionu, aby ona shoda byla patrna.* ([We8], str. 397)

Dnes bychom řekli, že každou matici M druhého řádu lze zapsat jako lineární kombinaci čtyř matic, které tvoří bázi vektorového prostoru všech matic druhého řádu. Mezi množinou uspořádaných čtveřic čísel uvažovaného tělesa, která jsou koeficienty uvažované lineární kombinace, a množinou kvaternionů s koeficienty z tohoto tělesa T existuje bijektivní zobrazení.

V závěru práce Eduard Weyr uvedl některá konkrétní tvrzení o kvaternionech, která jsou analogická již zmíněným větám o maticích druhého řádu (součin dvou nenulových kvaternionů může být roven nule; za jistých podmínek reprezentuje mocninná řada $\sum_{-\infty}^{\infty} a_v q^v$ kvaternion apod.) a celou tuto problematiku shrnul v lakonickém konstatování:

Tímto způsobem bychom mohli všecky předcházející výsledky, jichž jsme se o matricích dodělali, přenésti do theorie kvatenionů. ([We8], str. 400)

V roce 1890 vyšla ve Věstníku literárním v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky[74] recenze Weyrových publikací *O theorii forem bilinearných* a *O binarných matricích.* Je podepsána řeckými písmeny $\sigma\alpha$. Práci *O binarných matricích* je věnováno přibližně pět stran obsahujících vesměs stručný výklad poznatků publikovaných v tomto pojednání. V úvodu recenzent poznamenal:

Pro naši literaturu má z jednotlivých těchto prací zvláštní důležitost uvedené shora pojednání o binarných matricích. (str. 318)

Svým názorem tak autor posudku přisoudil větší význam pro českou matematickou komunitu základnímu textu o maticích řádu dva než později vydané knize, v níž jsou předloženy významné výsledky teorie matic včetně dnes ceněné Weyrovy teorie charakteristických čísel. Z hlediska ohlasů ve světě – a také z pohledu dnešního – je pozdější z titulů mnohem významnější (viz dále). Zařadíme-li však práce do kontextu doby, není názor recenzenta tak překvapivý. Pro české matematiky, kteří se (kromě Eduarda Weyra a Ludvíka Krause) teorií matic nezabývali a zřejmě nebyli seznámeni s výsledky Sylvestera a Cayleyho, by skutečně mělo mít elementárním způsobem psané pojednání *O binarných*

[74] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 19(1890), str. 318–328.

matricích větší přínos. V závěru recenze je české matematické komunitě doporučeno studium teorie matic odůvodněné její souvislosti s kvaterniony, kterým naopak u nás pozornost věnována byla:

Z toho vysvitá důležitosť studia matic pro každého, kdo spatřuje v kvaternionech důležitou pomůcku pro studium problémů geometrických a kinetických, s tímto operačním kalkulem se zanáší. (str. 322)

Naděje, které byly recenzentem ve spis vkládány, naplněny nebyly. Ani jeden český matematik se pro studium matic nenadchl, Eduard Weyr tak ještě po dlouhou dobu svého nástupce v českých zemích nenašel.

Ani v zahraničí se spis velké reakce nedočkal, čemuž se nelze divit. Pro britské algebraiky pracující s maticemi byl příliš elementární, pro matematiky tvořící na evropském kontinentě stál vzhledem tehdy přetrvávajícímu zaměření na teorii determinantů zřejmě na okraji zájmů. K těmto skutečnostem navíc musíme přičíst jazykovou bariéru. V 19. ročníku časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik[75] vyšlo jediné, strohé, německy psané souvětí konstatující, že tento Weyrův spis obsahuje základy teorie matic druhého řádu, a tím i s ní spojenou teorii kvaternionů. Autorem je František Josef Studnička. Práce je obsažena v bibliografii knihy *Lectures on matrices*, jež je jednou z prvních monografií věnovaných teorii matic a kterou publikoval roku 1934 Joseph Henry Maclagen Wedderburn.

2.8 Lineární asociativní algebry a algebra matic

• *Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices* [We9], 1887
• *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* [We10], 1887

Kromě spisu *O binarných matricích* publikoval Eduard Weyr roku 1887 také dva francouzsky psané články, jejichž společným tématem je studium lineárních asociativních algeber.

Připomeňme, že lineární asociativní algebrou nad polem T (jehož prvky nazýváme skaláry) rozumíme množinu A se dvěma binárními operacemi, sčítáním „+“ a násobením „∗“, definovanými pro prvky množiny A a dále s násobením „∘“ prvků množiny A prvky tělesa T. Přitom je $(A, +, \circ)$ vektorovým prostorem nad polem T, dále je $(A, +, *)$ asociativním okruhem a obě násobení jsou svázána podmínkou

$$(\alpha \circ a) * b = \alpha \circ (a * b) = a * (\alpha \circ b)$$

pro každé $\alpha \in T$ a a, $b \in A$.

V dalším textu již nebudeme (stejně jako Eduard Weyr a jak je to i dnes zvykem) rozlišovat symbol pro násobení a násobení skalárem a ze zápisů symboly pro jejich označení často zcela vyloučíme. Bázi $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ vektorového prostoru A nazýváme též bází lineární asociativní algebry. Všechny prvky algebry A mají totiž tvar $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j$, kde $\alpha_j \in T$.

[75] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 19(1887), str. 694.

Weyrův třístránkový článek *Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices* byl publikován ve Věstníku Královské české společnosti nauk. Plynule navazuje na myšlenky, které byly uvedeny v závěru pojednání *O binarných matricích.* Máme tím na mysli zejména souvislost mezi maticemi a kvaterniony.

V úvodu Weyr připomněl tento vztah a také jeho obecnější případ:

On sait de quelle manière le système des quaternions de Hamilton peut être réalisé, en prenant pour les quatre unités des matrices (substitutions linéaires) de second ordre convenablement choisies. Plus généralement, si l'on prend m^2 matrices d'ordre m linéairement indépendantes pour des unités d'un système de quantités complexes, l'ensemble de ces quantités sera représenté par toutes les matrices d'ordre m; dans ce système la multiplication sera évidemment associative. ([We9], str. 616)

Uvedl tak svoji motivaci ke studiu problematiky, jež je v článku vyšetřována. Právě uvedené myšlenky ho totiž přirozeně nasměrovaly k položení následující otázky:

„*Un système des quantités complexe à n unités principales et à multiplication associative étant donné, peut on réaliser ce système en substituant aux n unités des matrices convenablement choisies?*“ ([We9], str. 616)

Svými idejemi a jejich zpracováním si Eduard Weyr na otázku odpověděl kladně. Podařilo se mu totiž reprezentovat lineární asociativní algebru v algebře matic. Uvažoval lineárně nezávislé jednotky $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ algebry A (dnes bychom mluvili o bázi lineární asociativní algebry) a prvky algebry A vyjádřil ve tvaru

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n.$$

Jejich součet, rozdíl a součin jsou dány vztahy

$$\sum_{h=1}^{n} \xi_h e_h \pm \sum_{h=1}^{n} \xi'_h e_h = \sum_{h=1}^{n} (\xi_h \pm \xi'_h) e_h,$$

$$(\sum_{h=1}^{n} \xi_h e_h)(\sum_{k=1}^{n} \xi'_k e_k) = \sum_{h,\,k=1}^{n} (\xi_h \xi'_k) e_h e_k,$$

kde součiny jednotek $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ jsou definovány n^2 rovnicemi

$$e_h e_k = \alpha^h_{k1} e_1 + \alpha^h_{k2} e_2 + \ldots + \alpha^h_{kn} e_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha^h_{kj} e_j, \qquad h,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Právě uvedené vztahy jsou dnes nazývány *strukturními vzorci* a tzv. *strukturní konstanty* α^h_{kj} musí být zavedeny takovým způsobem, aby nebyla narušena asociativnost algebry. Protože

$$(e_h e_k) e_l = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha^h_{kj} e_j \right) e_l = \sum_{j=1}^{n} \alpha^h_{kj} \sum_{i=1}^{n} \alpha^j_{li} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha^h_{kj} \alpha^j_{li} \right) e_i$$

a dále

$$e_h(e_k e_l) = e_h \sum_{j=1}^{n} \alpha_{lj}^{k} e_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{lj}^{k} e_h e_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{lj}^{k} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}^{h} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{lj}^{k} \alpha_{ji}^{h} \right) e_i,$$

je podmínkou asociativity rovnost

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^{h} \alpha_{li}^{j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{lj}^{k} \alpha_{ji}^{h}.$$

Eduard Weyr hledal n matic E_1, E_2, ..., E_n řádu n, které by dosadil do uvedených vztahů místo jednotek e_1, e_2, ..., e_n takovým způsobem, aby všechny rovnosti zůstaly zachovány. Položil

$$E_h = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{h} & \alpha_{21}^{h} & \cdots & \alpha_{n1}^{h} \\ \alpha_{12}^{h} & \alpha_{22}^{h} & \cdots & \alpha_{n2}^{h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n}^{h} & \alpha_{2n}^{h} & \cdots & \alpha_{nn}^{h} \end{pmatrix}, \qquad h = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Vzhledem k dalším výpočtům raději upozorněme, že prvky matice E_h jsou v porovnání s obvyklým zápisem indexovány „transponovaně“ (první dolní index značí sloupec matice, druhý dolní index značí řádek matice).

Matice $E_h E_k$ má na místě il prvek

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}^{h} \alpha_{lj}^{k},$$

matice $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^{h} E_j$ má na místě il prvek

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^{h} \alpha_{li}^{j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{lj}^{k} \alpha_{ji}^{h}.$$

Obě matice tedy mají na uvedeném místě stejný prvek. Proto při Weyrově výše uvedené volbě n lineárně nezávislých matic skutečně platí

$$E_h E_k = \alpha_{k1}^{h} E_1 + \alpha_{k2}^{h} E_2 + \ldots + \alpha_{kn}^{h} E_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}^{h} E_j, \qquad h,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Matice E_1, E_2, ..., E_n se násobí stejně jako jednotky e_1, e_2, ..., e_n a existuje tedy zobrazení, které každému prvku $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ asociativní algebry A přiřazuje jeho obraz $\sum_{i=1}^{n} a_i E_i$, tj. prvek algebry čtvercových matic řádu n.

Uveďme však, že tyto poznatky nejsou zcela nové, podobné výsledky publikoval francouzský matematik Jules Henri Poincaré (1854–1912) v práci *Sur les nombres complexes* [Pi1] z roku 1884 a Charles Sanders Peirce[76] (1839–1914).

[76] Charles Sanders Peirce byl synem amerického astronoma, matematika a filozofa Benjamina Peirceho (1809–1880), který vybudoval pojem *lineární asociativní algebra*. Stalo se tak v práci s příznačným názvem *Linear associative algebra. With notes and addenda, by C. S. Peirce, son of the autor* [Pb1], která byla publikována sice až rok po autorově smrti, tj. roku 1881, ale již roku 1870 byla čtena v Americké akademii věd ve Washingtonu. Byl to právě Charles Sanders Peirce, jenž otcovu práci připravil k tisku a dále ji (jak je z názvu patrné) opatřil několika poznámkami.

Krátkou poznámku o Weyrově práci napsal Eugen Netto v časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.[77]

Další reakce na Weyrovu publikaci nalezneme v přehledovém článku *Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen* (1898), který napsal Eduard Study pro vícesvazkové, německé dílo Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, a v jeho přepracované verzi *Nombres complèxes* (1908), kterou napsala autorská dvojice Cartan – Study pro francouzskou Encyclopédie des sciences mathématiques, dále v německy psané publikaci *Repertorium der höheren Mathematik* (1910), což je druhé, rozšířené vydání prvního svazku původně italského díla *Repertorio di matematiche superiori* Ernesta Pascala, či v obsáhlejším článku Thomase Hawkinse *Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory* [Hw1] (1972), který obsahuje rovněž ohlasy na Weyrovy práce *Sur la théorie des quaternions*, *Sur la théorie des matrices* a *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces.*

Druhý z Weyrových článků z roku 1887 věnovaný lineárním asociativním algebrám se nazývá *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales.* V článku se autor o teorii matic vůbec nezmínil, jeho obsah je však do řeči matic přeložitelný. Výsledky, které v této práci odvodil obecně pro lineární asociativní algebru dimenze n, můžeme vyslovit pro algebru matic, jež je příkladem lineární asociativní algebry. „Překlad“ do symboliky a terminologie matic nás však nemusí příliš zaměstnávat, protože jej provedl autor sám. Pro matice řádu dva se tak stalo (jak jsme již viděli) v práci *O binarných matricích*, pro matice řádu n v knížce *O theorii forem bilinearných*, která bude představena později.

V uvedeném článku Eduard Weyr řešil závažný problém, kdy je pro daný prvek x algebry A řadou

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu$$

definován určitý prvek s algebry A. Výsledkem jeho bádání je významná věta, že tento prvek je řadou definovaný právě tehdy, když kořeny minimálního polynomu prvku x leží uvnitř kruhu konvergence mocninné řady

$$\varphi(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \zeta^\nu.$$

Uveďme na tomto místě originální Weyrovu formulaci tohoto tvrzení, abychom doložili skutečnost, že se jedná o větu vyslovenou ve tvaru ekvivalence:

Pour que (2) définisse une quantité complexe, il faut et il suffit que les racines $\mu_1, \ldots, \mu_m$ se trouvent dans le cercle de convergence de la série $\varphi(\zeta)$. ([We10], str. 207)

Ihned na dalších řádcích je však napsána – a to navíc odlišným, méně výrazným fontem – tato poznámka:

[77] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 19(1887), str. 141.

A la vérité, ces racines peuvent même être sur la circonférence de ce cercle, si toutefois la série $\varphi(\zeta)$ et ses dérivées considérées plus bas convergent pour $\zeta = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, comme cela découle immédiatement de la démonstration qu'on va lire. ([We10], str. 207)

Existuje-li prvek s rovný uvažovanému nekonečnému součtu, lze jej vyjádřit jako lineární kombinaci prvků x, x^2, …, x^m, kde $m+1$ je stupeň minimálního polynomu prvku x. Tedy platí rovnost

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu = \bar{\alpha}_m x^m + \bar{\alpha}_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \bar{\alpha}_1 x.$$

Problematiku přitom Eduard Weyr studoval nejprve pro speciální případ, kdy má rovnice

$$\lambda^{m+1} + \gamma_1 \lambda^m + \ldots + \gamma_m \lambda = 0$$

pouze jednoduché kořeny 0, λ_1, λ_2, …, λ_m. Za této podmínky lze koeficienty lineární kombinace vypočítat[78] pomocí tzv. Lagrangeovy formule a je tedy

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu = x \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi(\lambda_k)}{\lambda_k \ P'(\lambda_k)} \cdot \frac{P(x)}{x - \lambda_k},$$

kde $P(x)$ značí součin $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ \ldots\ (x-\lambda_m)$, $P'(x)$ jeho derivaci a konečně

$$\varphi(\lambda_k) = \bar{\alpha}_m \lambda_k^m + \bar{\alpha}_{m-1} \lambda_k^{m-1} + \ldots + \bar{\alpha}_1 \lambda_k.$$

Dále studoval případ, kdy má uvedená rovnice vícenásobné kořeny. Jestliže nekonečný součet existuje, dospěl k vyjádření tohoto součtu pomocí jisté lineární kombinace a ukázal, jak je možno nalézt její koeficienty.

V závěru článku uvažoval lineární asociativní algebru, jež má jednotkový prvek a zároveň pro prvek x existuje prvek inverzní. Za dodržení těchto podmínek studoval obecnější řadu

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu$$

a opět nalezl nutnou a postačující podmínku její konvergence. Při odvozování přitom využil dvojice řad

$$\varphi(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \zeta^\nu \quad \text{a} \quad \psi(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{-\nu} \zeta^{-\nu}$$

a jejich poloměrů konvergence.

---

[78] Prvky x^2, …, x^{m-1} rovněž náleží algebře, a tudíž je lze vyjádřit vztahy

$$x^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{2\nu} e_\nu, \quad x^3 = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{3\nu} e_\nu, \quad \ldots, \quad x^{m-1} = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{(m-1)\nu} e_\nu.$$

Z této soustavy lineárních rovnic pak lze hledané hodnoty nalézt eliminací základních jednotek.

Podrobnější popis Weyrovy práce s maticovou mocninnou řadou (tj. pro případ, kdy lineární asociativní algebrou bude algebra matic) nalezne čtenář v dalším textu při rozboru práce *O theorii forem bilinearných.* Uvědomme si však již nyní, že tyto výsledky mohou být v řeči teorie matic vyloženy mírně pozměněným způsobem, neboť v prostoru všech čtvercových matic řádu n existuje jednotkový prvek (jednotková matice příslušného řádu), což umožňuje zjednodušení některých zápisů.

Výsledky Weyrova článku *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* byly shrnuty na dvou stranách v časopisu Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.[79] Autorem tohoto referátu je významný německý matematik Adolf Hurwitz (1859–1919), který v té době působil v Königsbergu (Královec).

Věta o konvergenci mocninné řady je považována za jeden z nejvýznamnějších výsledků Eduarda Weyra. Tento výsledek pro mocninné řady s maticovým argumentem je však častěji spojován se jménem Kurta Hensela[80] (1861–1941), který se narodil v Königsbergu, avšak od dětství žil, studoval a působil v Německu (Berlín, Bonn, Marburg). V předchozím již bylo zmíněno poněkud rozporuplné znění části věty týkající se vlastních čísel ležících na obvodu kruhu konvergence. Navíc ve Weyrově práci chybí důkaz této části. Věta byla Henselem představena a dokázána v plném znění v článku *Über Potenzreihen von Matrizen* [Hn2] v roce 1926. V úvodu práce Hensel napsal:

Diese Frage hat nun eine sehr schöne und einfache, jedoch nicht vollständige Beantwortung durch einen Satz von E. Weyr gefunden (...); sein Beweis ist aber ziemlich kompliziert und gibt, wie mir scheint, nicht die volle Einsicht in die Natur dieser einfachen Frage.

Ich möchte daher in diesen Zeihlen eine neue und vollständige Beantwortung dieser Frage geben, die aus den Resultaten meiner Abhandlung „Über Körper von Matrizen“ (...) unmittelbar hervorgeht. ([Hn2], str. 107)

Po uvedení svých výsledků ještě na poslední stránce textu zdůraznil:

Nur den ersten Teil dieses allgemeinen Satzes hat E. Weyr in der oben erwähnten Abhandlung aufgestellt und bewiesen. ([Hn2], str. 110)

---

[79] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 19(1887), str. 367–368.

[80] Mezi jeho učiteli nalezneme mnoho známých jmen. Uveďme alespoň Leopolda Kroneckera, Karla Theodora Wilhelma Weierstrasse, Gustava Roberta Kirchhoffa (1824–1887) či Rudolfa Otta Sigismunda Lipschitze (1832–1903). Kurt Hensel byl nejvíce ovlivněn Kroneckerem, u něhož napsal v Berlíně svoji disertační práci *Arithmetische Untersuchungen über Diskriminanten und ihre ausserwesentlichen Teiler* (1884). V dlouhém období 1895 až 1930 vydal rovněž pět svazků Kroneckerových sebraných spisů.

Pro zajímavost zmiňme v krátkosti některé základní údaje o významné Henselově rodině. Mezi předky (o čtyři generace zpět) Kurta Hensela patří filozof Moses Mendelssohn (1729–1786), který byl dědečkem světoznámého hudebního skladatele Felixe Mendelssohna (1809–1847). Fanny Mendelssohn (1805–1847, později Fanny Hensel), sestra Felixe Mendelssohna a babička Kurta Hensela, byla rovněž uznávanou skladatelkou a pianistkou. Ottilie Ernestine, další vnučka Mosese Mendelssohna, si vzala za muže německého matematika Ernsta Eduarda Kummera (1810–1893) a jejich dcera se stala ženou německého matematika Hermanna Amanduse Schwarze (1843–1921).

Obdobný názor vyjádřila i autorská dvojice Herbert Westren Turnbull (1885–1961) a Alexander Craig Aitken(1895–1967) v monografii *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices* z roku 1932:

The theorem on the convergence of a matrix power series is due to Ed. Weyr, ... The full statement for multiple latent roots is to be found in a paper by K. Hensel, ... ([TA1], str. 81)

Stejného názoru byl i Cyrus Colton MacDuffee, který v roce 1933 ve své monografii *The Theory of Matrices* po uvedení věty o konvergenci maticové mocninné řady[81] napsal:

This theorem and proof are due to K. Hensel. E. Weyr had previously proved the theorem for the case where no characteristic root lies on the circle of convergence. ([Mc1], str. 98)

Rovněž američtí matematici Nelson Dunford (1906–1986) a Jacob T. Schwartz (1930–2009) v 1. dílu[82] světoznámé monografie *Linear operators* [DS1] z roku 1958 přisoudili výsledek Henselovi:

A special case of Theorem 1.9 is due to Weyr [...], and in full generality it was proved by Hensel [...]. ([DS1], I. díl, 2. vydání, str. 607)

Weyrův článek *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* je zmíněn i v pracích, které byly publikovány dříve než právě uvedené texty. Jejich autoři však prvenství v publikování tvrzení nikomu nepřisoudili. Příkladem je Eduard Study, který již na přelomu 19. a 20. století v německé encyklopedii matematických věd (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften) napsal:

Ed. Weyr hat die Bedingung dafür angegeben, dass eine Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ convergiert in der die Coefficienten a_ν Gewöhnliche complexe Grössen sind, x aber eine Grösse eines beliebigen Systems bedeutet. Er findet, dass die Wurzeln r_κ der charakteristischen Gleichung (46) *dem Convergenzgebiete der gewöhnlichen Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ angehören müssen.* ([Su1], str. 182)

Další reakce na tento Weyrův článek lze nalézt v práci *Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage* [Sl2],[83] (1922), kterou napsal maďarsko-německý matematik Ludwig Schlesinger (1864–1933). Weyrova publikace je referována rovněž v článku *The equivalence of definitions of a matric function* [Ri1], který roku 1955 publikoval Robert F. Rinehart (?–1985). Detailnější představu o náplni práce poskytne následující citace:

[81] Jedná se o následující řádky:
Theorem 49. The power series $P(A)$ converges if and only if every characteristic root of A lies inside or on the circle of convergence of $P(\lambda)$, and for every ν-fold characteristic root λ_i which lies on the circle of convergence, the $(\nu-1)$-th derivative $P^{(\nu-1)}(\lambda_i)$ converges. ([Mc1], str. 98)

[82] Ve druhém díle je Weyrův článek *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* uveden v seznamu literatury.

[83] Jedná se o třetí vydání práce s originálním názvem *Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln*, která vyšla roku 1900.

As a result there have been proposed in the literature since 1880 eight distinct definitions of a matric function, by Weyr, Sylvester and Buchheim, Giorgi, Cartan, Fantappiè, Cipolla, Schwerdtfeger and Richter. Attention has been given in only a few cases to the equivalence, or non-equivalence, with other definitions, or to what combinatorial propereties of scalar functions were preserved. The casual reader in the field thus gains the impression that a considerable number of essentially distinct extensions of scalar functions to matrices has been achieved.
The principal purposes of this paper are to show that:
(a) All of the definitions except those of Weyr and Cipolla are essentially equivalent.
(b) Weyr's definition is less general than these six, but coincides with them when it is applicable.
(c) ...

The power series definition of a matric function probably occured to a number of mathematicians prior to Sylvester's paper. However, E. Weyr [...], in 1887, appears to have been the first one to give a convergence criterion for a matric power series. The power series definition is a natural extension of polynomial functions of a matrix. ([Ri1], str. 396, 398)

2.9 Matice (a bilineární formy)

- *O theorii forem bilinearných* [We12], 1889
- *Zur Theorie der bilinearen Formen* [We13], 1890
- *O theorii forem bilinearných* [We17], 1901

Ke kompletaci Weyrových publikací o maticích ještě chybí spis *O theorii forem bilinearných* z roku 1889, resp. jeho německy psaná, pozměněná verze *Zur Theorie der bilinearen Formen* z roku následujícího, v nichž jsou mimo jiné podrobně vyloženy výsledky uveřejněné v krátkých, francouzsky psaných článcích z roku 1885 nazvaných *Sur la théorie des matrices* a *Repartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces.* Daná problematika se týká tzv. *Weyrovy teorie charakteristických čísel.* Další drobnou Weyrovu práci nazvanou *O theorii forem bilinearných* můžeme nalézt také ve sborníku 3. sjezdu českých přírodozpytců a lékařů konaného roku 1901 v Praze. Jedná se o krátký text zachycující Weyrův příspěvek, který na sjezdu pronesl.

Vraťme se však nejprve k české, více než stostránkové práci *O theorii forem bilinearných.* Její rukopis byl zaslán k posouzení Královské české společnosti nauk, aspiroval na její jubilejní cenu. Aby byly posudky objektivní, byl odeslán anonymně (pod heslem „Plzeň“). Nicméně z jeho obsahu, návaznosti na jiné práce apod. muselo být členům komise zřejmé, kdo je autorem.[84]

[84] Vzhledem k „anonymitě“ tak můžeme ve spisu nalézt větu, v níž se Eduard Weyr odvolává jmenovitě sám na sebe, aniž by prozradil svou identitu: *Tím dokázány výroky obsažené v práci Ed. Weyra „Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces“, ...* ([We12], str. 60–61)

Posudky vypracovali František Josef Studnička a Josef Šolín. Studnička napsal:

... rukopis mathematický, ..., v němž se na základě některých již známých, namnoze však nových, původních výzkumů podává stručná nauka o jmenovaných formách čili tvarech.

Obsahem svým řadí se spis tento k nejmodernějším vymoženostem vědy mathematické a jest hoden vším právem plného uznání, jakéhož se mu zajisté dostane, až bude uveřejněn.

V celku zasluhuje spis tento plnou měrou, aby cenou jubilejní byl poctěn. ([We12], str. 3)

Z Šolínova posudku vybíráme následující krátké pasáže:

Práce tato, ..., vztahuje se k onomu velezajímavému oddílu vyšší algebry, jenž „operuje operacemi“...

Není pochybnosti, že práce tato, uváděje v theorii matic novou pomůcku, jest plodem samostatného badání spisovatelova; má skutečnou cenu vědeckou a hoví slušnou měrou i ostatním výminkám statutu a regulativu. Proto po mínění nížepsaného práce tato zasluhuje, aby poctěna byla honorářem z jubil. fondu pro vědeckou literaturu českou. ([We12], str. 3, 4)

Návrhy Studničky a Šolína na udělení ceny Weyrovu spisu byly vyslyšeny a byl sepsán „nález“ podepsaný předsedou Královské české společnosti nauk Wácslavem Wladivojem Tomkem[85] (1818–1905) a hlavním tajemníkem společnosti Josefem Kalouskem[86] (1838–1915):

Královská Česká Společnost Náuk ve schůzi dne 8. května 1889 vyslechši posudky zde níže položené, usnesla se jednomyslně, přítomný spis pana professora Eduarda Weyra poctíti honorářem z jubilejního fondu pro vědeckou literaturu českou, a vydati jej nákladem téhož fondu. ([We12], str. 3)

Publikace je autorem uvedena sebevědomými – musíme však uznat, že ne nadnesenými – slovy:

Předním účelem tohoto spisu jest uvedení nové pomůcky do theorie bilinearných forem, t. theorie soustav, hlavně normalných soustav příslušných dané matici.

O plodnosti těchto úvah nechť čtenář sám rozhodne; zde jen tolik podotýkám, že nová methoda stačila m. j. na úplné řešení základního problemu současné transformace dvou bilinearných forem pro případ Weierstrassem řešený ...

Poslední kapitola podává upotřebení v theorii linearných differencialných rovnic; v ní odvozen a do jisté míry doplněn hlavní theorem Fuchsovy proslulé práce ... ([We12], str. 5, 6)

[85] Wácslav Wladivoj Tomek (Ritter von), též Václav Vladivoj rytíř Tomek, byl český historik, politik a pedagog. Po rozdělení University Karlo-Ferdinandovy na univerzitu německou a českou v roce 1882 se stal prvním rektorem české univerzity. Nejvýznamnější jeho publikací je dvanáctisvazkové dílo *Dějepis města Prahy.*

[86] Josef Kalousek byl český historik věnující se českému státnímu právu, docent českých dějin na univerzitě v Praze, první životopisec Františka Palackého. Byl rovněž historiografem Královské české společnosti nauk.

Čtenáře možná překvapilo, že knížku s názvem *O theorii forem bilinearných* řadíme mezi práce z teorie matic. Jeho pochyby snad budou rozptýleny následující citací úvodních řádků první kapitoly, jejíž název *O počítání s maticemi* také mnohé napovídá:

1. Bilinearnou formu

$$\sum_{(h,\,k)} a_{hk} x_h y_k, \qquad (h,\ k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

lze stanoviti soustavou nn koefficientů a_{hk} seřaděných do čtvercového schematu tím spůsobem, že prvek čili element označený symbolem a_{hk} položen do $h^{té}$ řádky a do k^{ho} sloupce; takovou soustavu nn prvků zoveme dle Cayley-e maticí n^{ho} řádu (matrix, matrice) a označujeme symbolem $||a_{hk}||$ anebo stručněji jedinou literou A píšíce

$$A = ||a_{hk}||.$$

([We12], str. 7)

Otázka, jaký důvod vedl autora ke zvolení názvu *O theorii forem bilinearných*, nebude zřejmě nikdy zodpovězena. Možná byla autorova volba snahou o zvětšení zájmu o práci, neboť pojem bilineární forma byl (na rozdíl od pojmu matice) českým matematikům dobře znám a titul spisu tak dával na vědomí, která část matematiky je v něm obsažena. Veškerá problematika však byla vyložena v nové symbolice a terminologii. Celý text je psán řečí matic, termín bilineární forma se v něm takřka nevyskytuje. Kromě již uvedené první definice jej nalezneme pouze na několika místech v jediné (konkrétně jedenácté) kapitole. Nesoulad obsahu práce s jejím názvem komentoval i uznávaný matematik a historik teorie determinantů a matic Thomas Muir v práci *Contributions to the History of Determinants 1900–1920* [Mu3] z roku 1930:

The title of the paper might thus well have been The theory of matrices with an application to bilinear forms and an application to linear differential equations. ([Mu3], str. 3–4)

První řádky spisu *O theorii forem bilinearných* jsme uvedli také kvůli zavedení termínu *matice*, který je zde autorem poprvé použit. V předchozích publikacích Eduard Weyr používal termínů *matrice*, resp. *matrix*, na jejichž totožnost s novým termínem *matice* zde poukázal.[87] V recenzi knihy *O theorii forem bilinearných* publikované roku 1890 v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky[88] se píše:

První z uvedených spisů opírá se o jistý druh operačního kalkulu, o t. zv. theorii matric, čili jak se nyní s upřílišněným purismem říká, matic; ... (str. 318)

Slovo *matrice* pochází z německého *Matrize*, které je však samo adaptací francouzského *matrice*. Toto francouzské slovo pochází z latinského *mātrīx* (kde

[87] V této souvislosti je také zajímavé, že na 97. straně knížky odkazuje Eduard Weyr na svoji studii *O binarných matricích* názvem *O binarných maticích*. Jedná se pouze o tiskovou chybu?

[88] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 19(1890), str. 318–328.

znak ¯ značí délku ve výslovnosti), jež znamená „(zvířecí) matka, děloha" a je odvozené od slova *māter* znamenající „matka". Rovněž český termín *matice* má svůj etymologický původ ve slově *matka*. Jeho první význam ve smyslu „matka šroubu" se používal pod vlivem německého „Schraubenmutter".[89]

Vzhledem k tomu, že kolem roku 1890 nedošlo v českém jazyce k žádné změně odůvodňující vynechání písmene „r" ve slově matrice, a také na základě výše uvedené citace z recenze Weyrova spisu se domníváme, že používání nového termínu matice bylo způsobeno puristickou snahou české matematické obce používat slovo domácí místo slova původu německého, a následkem této změny bylo i výhodné odlišení obou pojmů. Svou roli jistě sehrála i podobnost obou slov, která je však z etymologického hlediska zcela náhodná, neboť původ české přípony „-ice " není totožný s původem cizí přípony „-ice".[90]

V první kapitole této práce jsme podrobněji popsali, jak se světoví matematici přibližně na přelomu 19. a 20. století pomalu odkláněli od řeči teorie determinantů a teorie bilineárních a kvadratických forem a začali dávat přednost symbolice a terminologii teorie matic. Eduard Weyr patřil k prvním matematikům, kteří se snažili o propojení teorie matic a teorie bilineárních forem. Důkazem je mimo jiné právě rozebíraný spis.

Weyrova práce *O theorii forem bilinearných* je rozdělená do třinácti kapitol. V první z nich je zavedena rovnost matic, sčítání, odčítání a násobení matic, zapsány jsou základní vlastnosti těchto operací. Je zde definována nulová, jednotková, skalární a inverzní (*reciproká*) matice a uvedeny některé jejich vlastnosti. Druhá kapitola *O skládání soustav* pojednává především o lineární nezávislosti n-tic (*linearně neodvislých systemů*).

Třetí kapitola je nazvána *O nullitě matic*. V ní Eduard Weyr nejdříve připomněl pojem nulita matice a v té souvislosti zmínil Sylvestera, zcela analogicky učinil totéž i s pojmem hodnost matice a jménem Kroneckera.[91] Oba pojmy zavedl pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů. Nicméně pojem hodnost matice charakterizoval i pomocí maximálního počtu lineárně nezávislých řádků, resp. sloupců matice.

Je-li r největší počet linearně neodvislých systemů, jež lze vybrati z $(x'), \ldots, (x^{(\alpha)})$*, pak jest r hodností napsaného schematu a naopak; podobně platí výrok, že hodnost r napsaného schematu jest maximalní počet linearně neodvislých*

[89] Uvedené etymologické informace jsou převzaty z publikace Rejzek J., *Český etymologický slovník*, Leda, Praha, 2001, str. 368, 1. vydání. Na téže straně čtenář nalezne i etymologii slova matka.

Původ slov matrice, matice, matka viz též:

Machek V., *Etymologický slovník jazyka českého*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1968, 2. opravené a doplněné vydání.

Holub J., Lyer S., *Stručný etymologický slovník jazyka českého se zvláštním zřetelem k slovům kulturním a cizím*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1967, 1. vydání.

[90] Naše domněnky jsou podepřeny názory pana prof. RNDr. Václava Blažka, CSc., z Ústavu jazykovědy Filozofické fakulty Masarykovy univerzity v Brně a dále pana doc. PhDr. Jiřího Rejzka, Ph.D., z Katedry českého jazyka Filozofické fakulty Univerzity Karlovy v Praze, které byly poskytnuty v korespondenci.

[91] Eduard Weyr napsal: *Kronecker praví, že matice A jest hodnosti …* ([We12], str. 20)

Pokud však chtěl připomenout prvního matematika, který pracoval s hodností matice, měl správně zmínit Georga Ferdinanda Frobenia – viz 1. kapitola.

sloupců jeho. ([We12], str. 20)

Tímto vyjádřením na konci osmdesátých let 19. století Eduard Weyr opět předběhl světovou matematiku. Problematika hodnosti matice byla totiž jednou z oblastí, v níž se většina matematiků nejdéle držela řeči determinantů, což navíc komplikovalo i formulování jasné a stručné podmínky pro řešitelnost soustav lineárních rovnic.[92] Právě studium soustav lineárních rovnic je další náplní spisu. Autor zformuloval větu, že pro homogenní soustavu n lineárních rovnic o n neznámých je počet lineárně nezávislých řešení roven nulitě matice soustavy.[93] Uvedl rovněž svůj odhad nulity součinu libovolného počtu matic,[94] tj. že nulita součinu matic je větší nebo rovna nulitě každé matice a zároveň menší nebo rovna součtu nulit jednotlivých matic. Navíc zapsal dva speciální případy, kdy lze nulitu součinu stanovit přesně. V prvním případě uvažujeme dva nesoudělné polynomy φ a ψ. Potom nulita součinu matic $\varphi(M)$ a $\psi(M)$ je rovna součtu nulit těchto matic, tj.

$$\mathrm{nul}\,(\varphi(M).\psi(M)) = \mathrm{nul}\,(\varphi(M)) + \mathrm{nul}\,(\psi(M)).$$

Vztah přitom platí i pro libovolný konečný počet polynomů. Druhý případ je velice triviálně odvoditelný. Pokud matici M s nulitou α násobíme maticemi regulárními (tj. maticemi, jejichž nulita je rovna nule), platí pro nulitu součinu ϖ současně $\alpha \geq \varpi \geq \alpha$, a tedy $\varpi = \alpha$.

Ve čtvrté kapitole *O kořenech matice a jich charakteristických číslech* autor představil charakteristickou rovnici pro matici řádu n ve tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

a rovněž ve tvaru

$$f(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \ldots + c_n = 0.$$

Navíc vyjádřil jednotlivé koeficienty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jako součty všech minorů řádu $n-k$ vzniklých vypuštěním k řádků a k sloupců o stejných indexech. Tyto subdeterminanty dnes nazýváme hlavními. Poté definoval vlastní čísla matice, která nazval *kořeny matice* (a stejně jako ve spisu *O binarných matricích* připomněl Sylvesterův termín *latentní kořeny matice*). Dále dokázal, že jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vlastní čísla matice M, potom $\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \ldots, \varphi(\lambda_n)$ jsou vlastní čísla matice $\varphi(M)$, a pokračoval odvozením důležitého výsledku z oblasti podobnosti matic. Ukázal, že matice M a $P = Q^{-1}MQ$, kde Q je regulární matice, mají stejná vlastní čísla.

[92] Více viz 1. kapitola.

[93] Připomeňme, že výsledek byl pomocí nenulovosti subdeterminantů (tj. v podstatě pomocí hodnosti matice) představen Heinrichem Richardem Baltzerem roku 1857 v monografii *Theorie und Anwendung der Determinanten* – viz 1. kapitola.

[94] V textu Eduard Weyr zmínil Sylvesterův dolní odhad, o horním odhadu tvrdil, že neví, zda jej Sylvester rovněž odvodil (*... jelikož jsem se nemohl dopíditi práce ..., kterou Sylvester ... uvádí.*) ([We12], str. 25)

V závěru kapitoly Eduard Weyr definoval důležitý pojem *charakteristická čísla* příslušná k vlastnímu číslu λ matice M, která zavedl již ve své práci *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* z roku 1885. Definoval je zde nejprve pro matici M o s-násobném vlastním číslu 0 a zopakoval jejich důležité vlastnosti (tvoří nerostoucí posloupnost; jejich součet je roven násobnosti příslušného vlastního čísla 0). Teprve poté uvedl zobecnění, které odvodil elementárním způsobem z prvního případu. Má-li totiž matice M s-násobné vlastní číslo λ, potom matice $M - \lambda E$ má vlastní číslo 0, a to opět s-násobné (z následující ukázky je zřejmé Weyrovo značení, které se mírně odchyluje od našeho, resp. dnes často používaného, přesto však vysvětlení jednotlivých symbolů není třeba, neboť je evidentní z textu):[95]

... tvoříme-li posloupné mocnosti M, M^2, M^3, ..., konečně dojdeme jisté mocnosti M^ϱ, která má nulitu α a že pak vyšší mocnosti mají tutéž nullitu α. Značí-li

$$\alpha_1, \quad \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho = \alpha$$

nullity matic M, M^2, M^3, ..., M^ϱ, platí arci

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \ldots \geq \alpha_\varrho > 0.$$

Má-li matice M α-násobný kořen μ_ϱ, tu má matice $M - \mu_\varrho$ α-násobný kořen 0 *(...). Jsouli pak*

$$\alpha_1, \quad \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho = \alpha$$

nullity matic $M - \mu_\alpha, (M - \mu_\alpha)^2, (M - \mu_\alpha)^3, \ldots, (M - \mu_\alpha)^\varrho$, zovu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ charakteristická čísla náležející ku kořeni μ_α matice M. ([We12], str. 34)

Jak uvidíme v 5. kapitole, tento „přechod“ od obecného vlastního čísla k nulovému a naopak je běžně používán současnou algebraickou komunitou v nejmodernějších monografiích a článcích.

Následující kapitola Weyrovy útlé knihy je nazvána *O základní rovnici matice*. Tímto termínem je myšlena rovnice, kterou autor dříve označoval termínem rovnice nejnižšího stupně. Figuruje v ní tedy minimální polynom. Pasáž je věnována také Cayleyově-Hamiltonově větě, a tedy i vztahům mezi minimálním a charakteristickým polynomem. V této souvislosti je opět zmíněn Sylvesterův termín *matrice dérogatoire*.

V šesté,[96] poměrně obsáhlé kapitole *O normalných soustavách příslušných dané matici* autor zavedl pojem obsažený v jejím názvu. Pro jednoduchost nejdříve definoval normální soustavu příslušnou dané matici M v případě, kdy má matice M nulitu α a $(\alpha + \beta + \gamma)$-násobné vlastní číslo 0, M^2 nulitu $\alpha + \beta$ a M^3 nulitu $\alpha + \beta + \gamma$. Hledal všech $\alpha + \beta + \gamma$ nezávislých řešení

$$u_1, \, u_2, \, \ldots, \, u_{\alpha+\beta+\gamma}$$

[95] Citace je doslovná, je uvedena včetně chybných dolních pravých indexů u vlastního čísla μ v závěru úryvku (místo $M - \mu_\alpha$, $(M - \mu_\alpha)^2$ atd. má správně být $M - \mu_\varrho$, $(M - \mu_\varrho)^2$ atd.) a rovněž včetně tiskové chyby ve slově „jsou-li“.

[96] V textu knihy je tisková chyba, šestá kapitola je označena římskou číslicí V. Číslování obsahu je v pořádku.

rovnice $M^3u = o$. Dospěl k hledaným nezávislým řešením

$$z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_\gamma,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_\beta,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_\alpha,$$

kde

$$y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_\beta,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_\alpha,$$

jsou nezávislými řešeními rovnice $M^2u = o$ a

$$x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_\alpha$$

jsou nezávislými řešeními rovnice $Mu = o$ a vektory jsou svázány vztahy

$$Mz_i = y_i, \qquad My_j = x_j,$$

kde $i = 1, 2, \ldots, \gamma$ a $j = 1, 2, \ldots, \beta$. Uvedených $\alpha + \beta + \gamma$ řešení nazval *normalnými soustavami příslušnými matici M*. Potom tento pojem definoval pro obecnější případ, tj. pro každou matici M o s-násobném nulovém vlastním čísle s charakteristickými čísly $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$. Na konci kapitoly potom pojem normálních soustav matice M mírně modifikoval tím, že jej zavedl pro čtvercovou matici s vlastními čísly $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$, jejichž násobnosti jsou po řadě $s_1, s_2, \ldots, s_u$. Pomohl si přitom opět maticemi $M - \lambda_1 E$, $M - \lambda_2 E, \ldots,$ $M - \lambda_u E$ o nulových vlastních číslech s násobnostmi $s_1, s_2, \ldots, s_u$.

V následující kapitole *O podobných maticích* zavedl pojem podobnosti matic. Vedle tvrzení ze čtvrté kapitoly o totožnosti vlastních čísel navzájem podobných matic uvedl a dokázal, že tato vlastní čísla mají i stejná charakteristická čísla. Na dalších stránkách dokázal i obrácenou větu.[97] Dále uvedl jednoduchý způsob nalezení normálních soustav v matice M, která je podobná matici M', jejíž normální soustavy u známe. Stačí položit $v = Qu$, kde Q je regulární matice, pro kterou $M' = Q^{-1}MQ$. Autor také napsal, jak pro podobné matice M a M' nalézt všechny matice Q vyhovující právě napsanému vztahu.

Rovněž název následující kapitoly *O stanovení všech matic o daných kořenech a charakteristických číslech; typický tvar* čtenáři zřetelně sděluje, jakou problematiku může na příslušných stránkách nalézt. V této části autor ukázal, jak nalézt čtvercovou matici M o daných vlastních a charakteristických číslech, a k nalezené matici M potom další matice hledaných vlastností (tj. matice podobné s maticí M) určil pomocí vztahu $Q^{-1}MQ$. Metoda, kterou při hledání matice M Eduard Weyr použil, vedla ke kanonickému tvaru, který jsme pro matice řádu dva již představili v pasáži věnované spisu *O binarných matricích*. Jedná se o tzv. *typický tvar matice*.

Eduard Weyr nejprve uvažoval jediné vlastní číslo λ_1 matice M násobnosti s_1 o charakteristických číslech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{t_1}$ a hledal čtvercovou matici H řádu s_1, která má rovněž s_1-násobné vlastní číslo λ_1 o uvedených charakteristických číslech.

[97] Připomeňme, že tvrzení, že matice jsou podobné právě tehdy, když mají stejná vlastní čísla a jim příslušná charakteristická čísla, se vyskytuje již ve Weyrově článku *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* z roku 1885.

Postupně konstruoval matice $G_{t_1-1}-\lambda_1 E$, $G_{t_1-2}-\lambda_1 E$, $\ldots$ – smysl tohoto označení se ukázal až v závěru této konstrukce. Nejprve uvažoval čtvercovou matici řádu $(\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1})$

$$G_{t_1-2}-\lambda_1 E = \left(\begin{array}{c|ccc} \multicolumn{1}{c}{\overbrace{\hphantom{G_{t_1-1}-\lambda_1 E}}^{\alpha_{t_1}}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{0 \cdots 0}}^{\alpha_{t_1-1}}} \\ & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{G_{t_1-1}-\lambda_1 E}{C_{t_1-1}} & \vdots & & \vdots \\ & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \Bigg\} \scriptstyle \alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1},$$

kde počet posledních nulových sloupců je α_{t_1-1}, $G_{t_1-1}-\lambda_1 E$ je nulová matice řádu α_{t_1} a C_{t_1-1} je matice typu $\alpha_{t_1-1}\times\alpha_{t_1}$, jejíž prvních α_{t_1} řádků tvoří jednotkovou matici a na zbývajících $\alpha_{t_1-1}-\alpha_{t_1}$ řádcích jsou nuly, tj. matice tvaru

$$C_{t_1-1} = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1\ 0\ \ldots\ 0}}^{\alpha_{t_1}} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \scriptstyle \alpha_{t_1-1}.$$

Uvědomme si, že vždy platí $\alpha_{t_1-1}\geq\alpha_{t_1}$ a že v případě $\alpha_{t_1-1}=\alpha_{t_1}$ neobsahuje matice C_{t_1-1} žádný nulový řádek.

Dále sestrojil čtvercovou matici řádu $(\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\alpha_{t_1-2})$

$$G_{t_1-3}-\lambda_1 E = \left(\begin{array}{c|ccc} \multicolumn{1}{c}{\overbrace{\hphantom{G_{t_1-2}-\lambda_1 E}}^{\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{0 \cdots 0}}^{\alpha_{t_1-2}}} \\ & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{G_{t_1-2}-\lambda_1 E}{C_{t_1-2}} & \vdots & & \vdots \\ & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \Bigg\} \scriptstyle \alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\alpha_{t_1-2},$$

kde počet posledních nulových sloupců je α_{t_1-2} a matice C_{t_1-2} je maticí typu $\alpha_{t_1-2}\times(\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1})$, jejíž prvních α_{t_1} sloupců je nulových a zbývajících α_{t_1-1} sloupců je tvořeno jednotkovou maticí řádu α_{t_1-1}, pod kterou jsou na $\alpha_{t_1-2}-\alpha_{t_1-1}$ řádcích nuly, tj.

$$C_{t_1-2} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\hphantom{0\ 0\ 0}}^{\alpha_{t_1}} & & \overbrace{\hphantom{1\ 0\ 0\ 0}}^{\alpha_{t_1-1}} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots} & \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots} & \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \scriptstyle \alpha_{t_1-2}\ .$$

Takto postupoval dále až obdržel matici

$$G_1-\lambda_1E=\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{array}{c} G_2-\lambda_1E\\ \hline C_2\end{array}}^{\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\ldots+\alpha_3} & \overbrace{\begin{array}{ccc}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{array}}^{\alpha_2}\end{array}\right)\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\ \vdots\\0\end{array}}\right\}\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\ldots+\alpha_2,$$

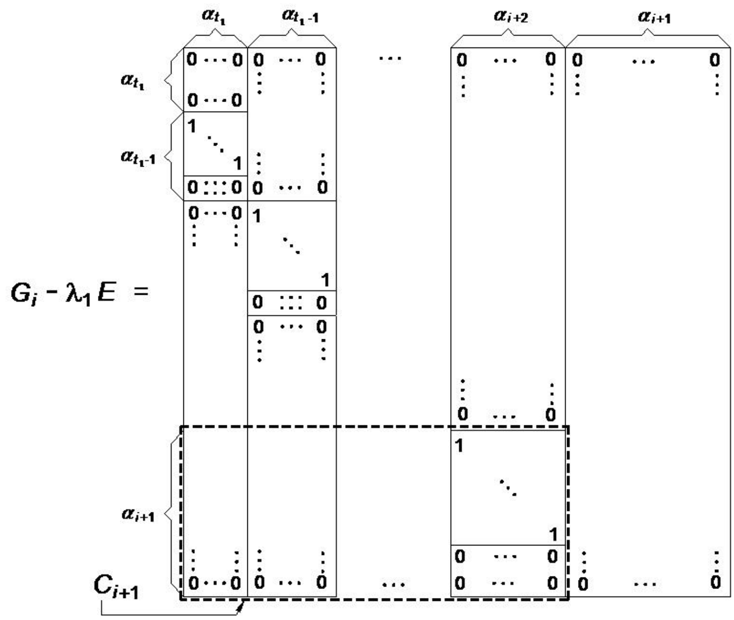
kde matice C_2 typu $\alpha_2\times(\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\ldots+\alpha_3)$ má prvních $\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\ldots+\alpha_4$ sloupců nulových a posledních α_3 sloupců obsahujících jednotkovou matici řádu α_3, až konečně

$$H-\lambda_1E=\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{array}{c} G_1-\lambda_1E\\ \hline C_1\end{array}}^{\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\ldots+\alpha_3+\alpha_2} & \overbrace{\begin{array}{ccc}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{array}}^{\alpha_1}\end{array}\right)\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\ \vdots\\0\end{array}}\right\}\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\ldots+\alpha_1,$$

kde matice C_1 typu $\alpha_1\times(\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\ldots+\alpha_2)$ má prvních $\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\ldots+\alpha_3$ sloupců nulových a posledních α_2 sloupců obsahujících jednotkovou matici řádu α_2.

Vidíme, že Weyrův postup hledání matice H není příliš průhledný; konkrétní příklad ani náznak tvaru výsledné složené matice H autor neuvedl.

Uvědomme si, že při vložení matice C_{i+1} do matice $G_i-\lambda_1E$ posledních α_{i+2} nenulových sloupců matice C_{i+1} přesně „zapadne“ pod posledních α_{i+2} nulových sloupců matice $G_{i+1}-\lambda_1E$. Prvních $\alpha_{t_1}+\alpha_{t_1-1}+\ldots+\alpha_{i+2}$ sloupců matice $G_i-\lambda_1E$ je tedy nenulových. Protože jsou zřejmě i lineárně nezávislé, je nulita matice $G_i-\lambda_1E$ rovna α_{i+1}.



Nulita matice

$$H - \lambda_1 E = G_0 - \lambda_1 E = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{G_1 - \lambda_1 E}{C_1} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{\alpha_1} \end{array} \right)$$

je tedy α_1, proto mezi řádky matic $G_1 - \lambda_1 E$ a C_1 je (v součtu) právě $s_1 - \alpha_1$ lineárně nezávislých vektorů. Z výše uvedeného obrázku lze vyvodit, že

$$(H - \lambda_1 E)^2 = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{(G_1 - \lambda_1 E)^2}{C_1(G_1 - \lambda_1 E)} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{\alpha_1} \end{array} \right).$$

Levá část této matice je tedy součinem matic $G_1 - \lambda_1 E$, resp. matice C_1 s maticí $G_1 - \lambda_1 E$ a tomuto součinu odpovídá vytváření lineárních kombinací řádků matice $G_1 - \lambda_1 E$, přičemž koeficienty těchto lineárních kombinací jsou prvky matic $G_1 - \lambda_1 E$, resp. C_1. Jelikož mezi řádky matic $G_1 - \lambda_1 E$ a C_1 je právě $s_1 - \alpha_1$ lineárně nezávislých vektorů, vytvářejí tyto vektory regulární matici řádu $s_1 - \alpha_1$. Lze dokázat, že za podmínky zmíněné regularity je mezi výslednými vektory levé části matice $(H - \lambda_1 E)^2$ právě tolik lineárně nezávislých vektorů, kolik jich je v $G_1 - \lambda_1 E$, přičemž tato matice má nulitu α_2. Proto

$$\text{nul } (H - \lambda_1 E)^2 = \alpha_1 + \text{nul } (G_1 - \lambda_1 E) = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Dále

$$(H - \lambda_1 E)^3 = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{(G_1 - \lambda_1 E)^3}{C_1(G_1 - \lambda_1 E)^2} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{\alpha_1} \end{array} \right),$$

a proto levá část této matice obsahuje právě tolik lineárně nezávislých vektorů, kolik jich obsahuje matice $(G_1 - \lambda_1 E)^2$ atd.

Postupně dostáváme

$$\begin{array}{lcl} \text{nul } (H - \lambda_1 E) & = & \alpha_1, \\ \text{nul } (H - \lambda_1 E)^2 & = & \alpha_1 + \text{nul } (G_1 - \lambda_1 E) \; = \; \alpha_1 + \alpha_2, \\ \text{nul } (H - \lambda_1 E)^3 & = & \alpha_1 + \text{nul } (G_1 - \lambda_1 E)^2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \text{nul } (G_2 - \lambda_1 E) = \\ & = & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \text{nul } (H - \lambda_1 E)^{t_1} & = & \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{t_1}. \end{array}$$

Matice H tedy má vlastní číslo λ_1 požadované násobnosti a k němu přísluší daná charakteristická čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{t_1}$.

Ukažme Weyrův způsob konstrukce matice H na konkrétním příkladě. Uvažujme čtvercovou matici A řádu 12 s dvěma různými vlastními čísly $\lambda_1 = 2$, resp. $\lambda_2 = -3$ s násobnostmi $s_1 = 7$, resp. $s_2 = 5$. Weyrovy charakteristiky příslušné k těmto vlastním číslům jsou (3, 2, 1, 1), resp. (3, 2). V prvém kroku hledejme matici H řádu 7, která má sedminásobné vlastní číslo 2 a Weyrovu charakteristiku (3, 2, 1, 1) (tedy $t_1 = 4$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 1$). Postupně dostáváme

$$G_2 - 2E = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \cline{1-1} 1 & 0 \end{array}\right),$$

$$G_1 - 2E = \left(\begin{array}{c|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-1} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-2} \multicolumn{1}{c}{0} & 1 & 0 & 0 \\ \multicolumn{1}{c}{0} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$H - 2E = \left(\begin{array}{c|c|cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-1} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-2} \multicolumn{1}{c}{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{1}{c}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-4} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

a proto

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Druhý krok bude následovat po další teoretické partii.

Eduard Weyr rovněž podotkl, že není nutné při konstrukci matice o daných spektrálních vlastnostech nutně používat jedničky:

Tvoříme-li H dle právě vytknutého návodu, klademe-li však do vzorců ... na místo 1 libovolné hodnoty různé od nully, potrvají všechny závěrky ...
([We12], str. 59)

Eduard Weyr dále hledal čtvercovou matici K řádu $(s_1 + s_2)$, která má vlastní čísla λ_1 a λ_2 o násobnostech po řadě s_1 a s_2 a příslušných charakteristických číslech $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{t_1})$ a $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{t_2})$. Použil k tomu výše sestrojenou matici H a obdobný rekurentní postup jako u jediného vlastního čísla. Postupně sestrojil čtvercové matice

$$H_{t_2-1} - \lambda_2 E = \left.\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\dfrac{H-\lambda_2 E}{D_{t_2}}}^{s_1} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{\beta_{t_2}} \end{array}\right)\right\} {\scriptstyle s_1+\beta_{t_2}},$$

$$H_{t_2-2}-\lambda_2E=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{s_1+\beta_{t_2}} & \overbrace{\qquad\quad}^{\beta_{t_2-1}}\end{array}\\ \left(\begin{array}{c|c}\dfrac{H_{t_2-1}-\lambda_2E}{D_{t_2-1}} & \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{matrix}\end{array}\right)\end{array}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\}\,{\scriptstyle s_1+\beta_{t_2}+\beta_{t_2-1}},$$

atd. až

$$H_1-\lambda_2E=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{s_1+\beta_{t_2}+\beta_{t_2-1}+\ldots+\beta_3} & \overbrace{\qquad\quad}^{\beta_2}\end{array}\\ \left(\begin{array}{c|c}\dfrac{H_2-\lambda_2E}{D_2} & \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{matrix}\end{array}\right)\end{array}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\}\,{\scriptstyle s_1+\beta_{t_2}+\beta_{t_2-1}+\ldots+\beta_2},$$

$$K-\lambda_2E=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{s_1+\beta_{t_2}+\beta_{t_2-1}+\ldots+\beta_2} & \overbrace{\qquad\quad}^{\beta_1}\end{array}\\ \left(\begin{array}{c|c}\dfrac{H_1-\lambda_2E}{D_1} & \begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{matrix}\end{array}\right)\end{array}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\}\,{\scriptstyle s_1+\beta_{t_2}+\beta_{t_2-1}+\ldots+\beta_1},$$

kde D_{t_2} je libovolná, pro jednoduchost například nulová matice typu $\beta_{t_2}\times s_1$,

$$D_{t_2-1}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overbrace{\qquad\quad}^{s_1} & \overbrace{\qquad\qquad}^{\beta_{t_2}}\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|cccc}0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\ \cdots\\0\\0\\ \cdots\\0\end{matrix}}\right\}\,{\scriptstyle \beta_{t_2-1}},$$

$$D_{t_2-2}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overbrace{\qquad\quad}^{s_1+\beta_{t_2}} & \overbrace{\qquad\qquad}^{\beta_{t_2-1}}\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|cccc}0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\ \cdots\\0\\0\\ \cdots\\0\end{matrix}}\right\}\,{\scriptstyle \beta_{t_2-2}}$$

atd.

Eduard Weyr dále napsal, že pomocí matice K lze obdobným způsobem nalézt čtvercovou matici L, jejíž řád je $s_1+s_2+s_3$ a jež má vlastní čísla λ_1, λ_2, λ_3 s charakteristickými čísly $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{t_1})$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{t_2})$ a $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{t_3})$ atd. až nakonec čtvercovou matici M řádu $s_1+s_2+\ldots+s_u=n$, která má všech u

požadovaných vlastních čísel s příslušnými charakteristickými čísly. Opět poznamenal, že lze místo jedniček použít jiných nenulových hodnot. Avšak pouze v případě, že použijeme variantu s jedničkami, nazýváme vzniklou matici *typickým tvarem* dané matice nebo jednoduše *typickou maticí* náležející k dané matici.

Dopočítejme typický tvar M matice A, jež má výše požadované vlastnosti ($u = 2$, $t_2 = 2$, $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2$):

$$H_1 + 3E = \left(\begin{array}{ccccccc|cc}
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),$$

$$M + 3E = \left(\begin{array}{ccccccc|cc|ccc}
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{1-7}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{1-9}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),$$

neboli

$$M = \begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3
\end{pmatrix}.$$

Pro každou čtvercovou matici N existuje její *typický tvar* M a platí mezi nimi opět vztah $N = Q^{-1}MQ$. K určení transformační matice lze přitom využít Weyrovy normální soustavy příslušné k matici N.

V závěru kapitoly jsou ještě uvedeny dva speciální případy *typické matice*: má-li matice N řádu n navzájem různá vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, je jejím *typickým tvarem* diagonální matice, jejíž diagonální prvky jsou právě tato vlastní čísla; má-li matice N řádu n vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ s násobnostmi $s_1, s_2, \ldots, s_u$ a navíc

$$\text{nul}\,(M - \lambda_1 E) = s_1,\ \text{nul}\,(M - \lambda_2 E) = s_2, \ldots\ \text{nul}\,(M - \lambda_u E) = s_u,$$

(tj. Weyrova charakteristika každého vlastního čísla obsahuje jediné charakteristické číslo) je její *typický tvar* opět diagonální maticí, jejíž diagonála obsahuje postupně s_1 prvků λ_1, s_2 prvků λ_2 atd. až nakonec s_u prvků λ_u.

Dnes se „typický“ tvar matice nejčastěji nazývá *Weyrův kanonický tvar* a je tvořen mírně pozměněným způsobem (jeho prvky jsou totožné, jsou však uspořádány v jiném pořadí). Tento modifikovaný, moderní tvar čtenář nalezne v části 2.11 *Přehled Weyrovy teorie charakteristických čísel*, kde jsou hlavní výsledky uvedeny přehledně řečí dnešní teorie matic. Zmíněnou partii tak doporučujeme pro studium uvažovaného kanonického tvaru matice v podobě, která je pro dnešního čtenáře lépe přístupná než původní Weyrovo pojetí.

V deváté kapitole *Řešení rovnic o skalarných koefficientech; periodické matice* nalezl autor k danému polynomu f všechny matice, pro které $f(M) = 0$. Dále hledal matice M, pro které je f polynomem minimálním. Také řešil konkrétní případ $f(M) = M^k - E$, neboli rovnici $M^k = E$, kde k je dané přirozené číslo a E je jednotková matice. (Matice splňující vztah $M^k = E$ jsou tzv. periodické matice.) Otázku ještě více specifikoval, když řešil pro matice M různého řádu rovnici $M^2 = E$, kterou studoval již Arthur Cayley. Dalším výsledkem je nalezení matice M, která současně vyhovuje dvěma rovnicím

$$f(M) = 0 \qquad \text{a} \qquad f_1(M) = 0.$$

Jsou-li f a f_1 nesoudělné polynomy, potom taková matice M neexistuje. V opačném případě jsou všechny hledané matice M řešeními rovnice $f_2(M) = 0$, kde f_2 je největší společný dělitel uvažovaných polynomů.

Obsah desáté kapitoly *Stanovení všech matic záměnných s danou maticí* nejlépe charakterizují autorova slova:

Nechť se stanoví všecky matice Q záměnné (convertible, vertauschbar) s danou maticí M t. j. hovící rovnici

$$MQ = QM.$$

([We12], str. 70)

V názvu jedenácté kapitoly *Problem současné transformace dvou bilinearných forem a jiná upotřebení* použil Eduard Weyr teprve podruhé ve své práci termín bilineární forma. Stalo se tak po takřka sedmdesáti stranách od první definice uvedené na počátku celého textu. A v dalších kapitolách se s tímto termínem již nesetkáváme. Na straně 75 je definována matice bilineární formy a uveden vzájemně jednoznačný vztah mezi čtvercovými maticemi a bilineárními formami. Na téže straně je také zavedena matice *konjugovaná čili transponovaná.*[98] V této kapitole autor ukázal, že pomocí charakteristických čísel lze vyřešit i problém, který lze v maticové řeči formulovat takto: jak nalézt nutnou a postačující podmínku pro existenci regulárních matic H, K, pro které je

$$P' = HPK, \qquad\qquad Q' = HQK$$

pro dané matice P, Q, P', Q' řádu n, a metodu k určení transformačních matic $H,\ K$. Tento problém již vyřešili Karl Theodor Wilhelm Weierstrass roku 1868 v práci *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* a Leopold Kronecker v pracích *Ueber Schaaren quadratischer Formen* z roku 1868 a *Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen* z roku 1874. V případě Weierstrasse šlo o vyřešení problému při existenci čísel p, q, pro která je matice $pP + qQ$ regulární. Leopold Kronecker podal výsledek pro zbývající případ, tj. kdy $\det(pP + qQ) = 0$ pro každé $p,\ q$. Eduard Weyr se ve spisu omezil na problém řešený Weierstrassem,[99] který studoval zvlášť pro regulární matici P (a tedy i regulární P') a zvlášť pro případ, kdy jsou matice $P,\ P',\ Q,\ Q'$ singulární. Pro regulární matici P je hledanou podmínkou podobnost matic QP^{-1} a $Q'P'^{-1}$, pro druhou možnost potom podobnost matic QR^{-1} a $Q'R'^{-1}$, kde $R = pP + qQ$ a $R' = pP' + qQ'$. K nalezení transformačních matic opět využil normální soustavy jisté matice.

Dále se autor věnoval kvadratickým formám. Dokázal, že kvadratickou formu n proměnných hodnosti r lze lineární transformací převést na kvadratickou formu r proměnných, nikoli však na formu méně proměnných. Dospěl rovněž k následujícímu výsledku: je-li M čtvercová matice řádu n a $y,\ y',\ z,\ z'$ vektory, pro které platí

$$My^T = y'^T \quad \text{a} \quad M^T z^T = z'^T,$$

potom je splněna rovnost $yz'^T = zy'^T$. (K důkazu postačí dosadit do výsledné rovnosti vektory y' a z'.) Odtud triviálně plyne, že pro symetrickou čtvercovou matici A, která splňuje vztahy

$$Ay^T = y'^T \quad \text{a} \quad Az^T = z'^T,$$

platí opět rovnost $yz'^T = zy'^T$. Tohoto poznatku poté využil k důkazu známé věty, že reálná symetrická matice má reálné kořeny. Důkaz tvrzení však představil již roku 1829 Cauchy.[100] Text pokračuje v obdobném duchu, tj. dokazováním známých a již dokázaných vět. Konkrétně se jedná například o tvrzení,

---

[98] Terminologie zvolená Weyrem v roce 1889 pro dnešní transponovanou matici je poměrně zajímavá, neboť od označení transponovaná se někteří čeští nástupci Eduarda Weyra později odvrátili (viz např. práce Otakara Borůvky ve 4. kapitole), dnes je však opět používáme.

[99] Na tuto skutečnost poukázal Eduard Weyr již v úvodu spisu – viz výše uvedená citace z 5. strany knížky. Na téže straně v poznámce pod čarou také napsal: *V případě, který v této práci nebyl vzat v úvahu, podal řešení Kronecker, ibid. 1868 a 1874.*

[100] Bližší informace viz 1. kapitola. V ní je uveden i název Hermitovy práce obsahující důkaz obecnějšího tvrzení pro hermitovské matice.

že pro s-násobný kořen λ symetrické matice M má matice $M - \lambda E$ nulitu s. Věta byla představena Weierstrassem roku 1858 v práci *Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen* [Ws1].

Před vyslovením a důkazem další věty definoval Eduard Weyr ortogonální matici. V následující citaci si opět všimněme Weyrovy terminologie; připomínáme, že matici konjugovanou dnes nazýváme transponovanou a Weyrovou maticí reciprokou rozumíme matici inverzní. Modulem je míněna absolutní hodnota.

Matice $M = ||a_{hk}||$ se zove orthogonalnou, jestliže její konjugovaná a reciproká matice jsou sobě rovny, ...

Nechtěje se pouštěti do theorie těchto matic, vytknu důkazy jen dvou vět sem náležejících.

První věta pochází od Brioschi-ho a zní v podstatě takto: Moduly kořenů orthogonalné matice o realných elementech se rovnají jednici. ([We12], str. 84)

Jedná se o větu italského matematika Francesca Brioschiho (1824–1897) z práce *Note sur un théorème relatif aux déterminants gauches* [Bs1] z roku 1854.

Druhým z tvrzení o ortogonálních maticích, jež Eduard Weyr v knížce dokázal, je věta Georga Ferdinanda Frobenia (1849–1917) ze slavné práce *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* z roku 1878, která je analogií předchozího Weierstrassova tvrzení: jestliže M je reálná ortogonální matice a λ její s-násobný kořen, potom má matice $M - \lambda E$ nulitu s.

Na závěr je sporem dokázán zákon setrvačnosti (*věta o inertii*) kvadratických forem, který publikoval roku 1852 James Joseph Sylvester v článku *A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares.*[101] Sylvesterův článek však důkaz této věty neobsahuje. Provedli jej již němečtí matematikové Carl Friedrich Gauss (1777–1855) a Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) – první jmenovaný během svých přednášek v akademickém roce 1846/47, druhý potom v roce 1850.

Velmi zajímavá je dvanáctá kapitola *O skalarnych funkcích matice.* Na výsledky v ní obsažené jsme odkazovali již v části věnované Weyrovým poznatkům o lineárních asociativních algebrách. Je v ní totiž „přeložena“ do řeči matic (pro matice řádu n) část teorie lineárních asociativních algeber představená v článku *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* z roku 1887. Na začátku kapitoly je dokázáno, že každou celistvou (a následkem toho i lomenou) funkci matice M stupně alespoň m, kde m značí stupeň minimálního polynomu matice M, lze redukovat na funkci stupně menšího než m. Poté je přistoupeno k řešení stěžejního problému:

Budiž dána obecněji nekonečná řada

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu, \tag{1}$$

a položme si otázku, za jakých výminek tato řada definuje určitou matici. ([We12], str. 89)

[101] Přesnou citaci Sylvesterovy formulace zákona čtenář nalezne v 1. kapitole.

Je-li $\lambda^m + \gamma_1\lambda^{m-1} + \ldots + \gamma_m$ minimální polynom matice M, je

$$M^m + \gamma_1 M^{m-1} + \ldots + \gamma_m = 0,$$

neboli zkráceně $\varphi(M) = 0$, potom s využitím dokázaného výsledku o redukci stupně celistvé funkce matice platí pro každá přirozená čísla s, s'

$$\sum_{\nu=0}^{s} \alpha_\nu M^\nu = \alpha_1^s M^{m-1} + \alpha_2^s M^{m-2} + \ldots + \alpha_m^s E,$$

$$\sum_{\nu=s+1}^{s+s'} \alpha_\nu M^\nu = \beta_1^{s,\,s'} M^{m-1} + \beta_2^{s,\,s'} M^{m-2} + \ldots + \beta_m^{s,\,s'} E.$$

Řadou (1) je definována matice právě tehdy, když pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo p takové, že pro všechna $s > p$ a s' libovolné je $\beta_h^{s,\,s'} < \varepsilon$, $h = 1, 2, \ldots, m$.

Eduard Weyr dospěl při studiu této otázky k následujícímu závěru (při čtení citace výsledku si všimněme logických staveb jednotlivých vět):

Položme

$$f(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \zeta^\nu,$$

značíce literou ζ obyčejnou komplexní hodnotu, která se nalézá uvnitř konvergenčního kruhu napsané mocninové řady. Buďte dále $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ kořeny matice M, t. j. kořeny rovnice

$$\varphi(\mu) = 0. \tag{3}$$

Aby řada (1) definovala určitou matici, jest nutné a stačí, aby kořeny matice M se nalezaly vesměs uvnitř konvergenční kružnice řady $f(\zeta)$.

Vlastně bychom měli říci, že nutno a stačí, aby kořeny matice M se nalezaly uvnitř oné kružnice aneb na jejím obvodu, v posledním případě však s tou výhradou, že pro ony kořeny řada $f(\zeta)$ a její derivace dole uvažované konvergují, jakož z následující úvahy přímo vychází. ([We12], str. 90)

V druhém odstavci citace autor bohužel nesprávně použil větu ve tvaru ekvivalence (*jest nutno a stačí*). Ihned poté však tuto větu popírá (*... aneb na jejím obvodu*), čímž opravil svou chybu z předcházejícího souvětí. Zřejmě právě použití zmíněné chybné ekvivalence způsobilo, že výsledek je většinou připisován německému matematikovi Kurtu Henselovi, který větu o konvergenci maticové mocninné řady dokázal v článku *Über Potenzreihen von Matrizen.* Stalo se tak v roce 1926, tj. až po třiceti sedmi letech. Jak již bylo uvedeno, Kurt Hensel osobně připisuje Eduardu Weyrovi pouze výsledek o vlastních číslech matice ležících uvnitř konvergenční kružnice.

V případě, že řada (1) definuje matici, vyjádřil ji Weyr jako lineární kombinaci matic $M^{m-1}, M^{m-2}, \ldots, M^2, M, E$. Jestliže má minimální polynom matice pouze jednoduché kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, jedná se o lineární kombinaci

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu = \bar{\alpha}_1 M^{m-1} + \bar{\alpha}_2 M^{m-2} + \ldots + \bar{\alpha}_m E,$$

kde

$$\bar{\alpha}_h = \lim_{s\to\infty} \alpha_h^s, \qquad\qquad h = 1, 2, \ldots, m.$$

Analogicky také platí m rovnic

$$f(\lambda_k) = \bar{\alpha}_1\lambda_k^{m-1} + \bar{\alpha}_2\lambda_k^{m-2} + \ldots + \bar{\alpha}_m, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

z nichž autor vypočetl hodnoty $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m$ pomocí Lagrangeovy interpolační formule. Dospěl tak k vyjádření

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu = \sum_{k=1}^{m} \frac{f(\lambda_k)}{P'(\lambda_k)} P_k,$$

kde $P(\lambda)$ značí součin $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_m)$, $P'(\lambda)$ jeho derivaci a P_k součin $(M - \lambda_1 E)(M - \lambda_2 E)\ldots(M - \lambda_m E)$, ve kterém není obsažen činitel $(M - \lambda_k E)$.

Obdobné úvahy provedl Weyr i pro obecnější případ, kdy má minimální polynom matice M s-násobné vlastní číslo 0, s_1-násobné vlastní číslo λ_1, s_2-násobné vlastní číslo λ_2 až s_u-násobné vlastní číslo λ_u. V tomto případě vyčíslil koeficienty $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, ..., $\bar{\alpha}_{m-s}$ z celkem $s + s_1 + \ldots + s_u = m$ podmínek

$$F(\lambda_k) = f(\lambda_k), \quad F'(\lambda_k) = f'(\lambda_k), \quad \ldots, \quad F^{(s_k-1)}(\lambda_k) = f^{(s_k-1)}(\lambda_k),$$

kde $k = 1, 2, \ldots, u$ a

$$F(\lambda) = \bar{\alpha}_1\lambda^{m-1} + \ldots + \bar{\alpha}_{m-s}\lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \ldots + \alpha_0.$$

Dále zobecnil uvedené výsledky pro mocninnou řadu

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu,$$

kde M je regulární matice. Nechť

$$f_1(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \xi^\nu, \qquad\qquad f_2(\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{-\nu}\xi^{-\nu}$$

jsou dvě mocninné řady, kde ξ je komplexní proměnná. Nechť první řada konverguje, je-li $|\xi| < R$, druhá pro $|\xi^{-1}| < R_1^{-1}$ a dále nechť $R > R_1$. Potom řada

$$f(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu \xi^\nu$$

konverguje pro ξ uvnitř mezikruží o poloměrech R a R_1. Aby řada $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu$ definovala určitou matici, musí totéž platit i pro řady

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu \qquad \text{a} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{-\nu} M^{-\nu},$$

což je ekvivalentní podmínce, že pro vlastní čísla matic M a M^{-1} platí $|\lambda_k| < R$ a $|\lambda_k^{-1}| < R_1^{-1}$ neboli $R_1 < |\lambda_k| < R$. Tedy všechna vlastní čísla matice M leží v konvergenčním oboru řady $f(\xi)$, pomocí níž lze definovanou matici opět vyčíslit.

Dosažené výsledky potom Weyr aplikoval na *binarné matice*. Je-li M maticí řádu dva mající dvě různá vlastní čísla λ_1, λ_2 a je-li mocninnou řadou definovaná matice $f(M)$, potom je dána vztahem

$$f(M) = \frac{f(\lambda_1)}{P'(\lambda_1)}P_1 + \frac{f(\lambda_2)}{P'(\lambda_2)}P_2 = \frac{f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}(M - \lambda_2 E) + \frac{f(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}(M - \lambda_1 E) =$$

$$= \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}M + \frac{\lambda_1 f(\lambda_2) - \lambda_2 f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}E.$$

Pro dvojnásobné vlastní číslo λ platí

$$f(M) = f'(\lambda)M + (f(\lambda) - \lambda f'(\lambda))E.$$

Odvozené vztahy použil pro exponenciální funkci a došel tak k formulím, z nichž jedna (pro případ dvou různých vlastních čísel) byla uvedena již roku 1884 v článku *Sur la théorie des quaternions*. Připomeňme, že v této práci byla zapsána na základě Sylvesterova *seconde loi de mouvement algébrique*.

V závěrečných odstavcích kapitoly se z pohledu studované problematiky Weyr blíže věnoval exponenciální funkci a logaritmu s maticovým argumentem. Uvažoval přitom nejen matice řádu dva, ale rovněž řádu n.

Povšimněme si nyní pozměněných formulacích obecnějších výsledků zapsaných ve francouzském článku *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* z roku 1887, které se týkají obecné lineární algebry, a vět platných pro algebru matic řádu n obsažených v právě rozebrané kapitole o dva roky mladší knihy *O theorii forem bilinearných.*

Uvědomme si především, že ve francouzském textu hledal Eduard Weyr součet řady

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu,$$

kde sumarizace začíná indexem $\nu = 1$, zatímco v české knižní verzi studoval sumu

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu,$$

tj. začal sčítat již od $\nu = 0$. V prvním případě nemohl uvažovat člen $\alpha_0 x^0$, neboť jednotkový prvek x^0 nemusí v obecné lineární algebře existovat, zatímco ve druhém případě je M^0 jednotková matice.

Tato změna se samozřejmě projevila v dalším výkladu. Konkrétněji porovnejme například zápis rovnice minimálního stupně, které vyhovuje prvek x lineární asociativní algebry, a obdobný zápis týkající se matice M:

Soit

$$(1) \qquad x^{m+1} + \gamma_1 x^m + \ldots + \gamma_m x = o, \qquad (m \leq n),$$

l'équation de degré minimum satisfaite par x, ... ([We10], str. 206)

Základní rovnice matice M *nechť jest*

$$(2) \qquad M^m + \gamma_1 M^{m-1} + \ldots + \gamma_m = 0$$

čili

$$\varphi(M) = 0.$$

([We12], str. 89) Nutně se tedy musí lišit i zápisy vyjadřující součty řad.

Koeficienty lineární kombinace rovné součtu příslušné mocninné řady jsou pomocí Lagrangeovy formule vyjádřeny takto:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu = x \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi(\lambda_k)}{\lambda_k\, P'(\lambda_k)} \cdot \frac{P(x)}{x - \lambda_k} \qquad \text{ve francouzském článku [We10],}$$

resp. $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu M^\nu = \sum_{k=1}^{m} \frac{f(\lambda_k)}{P'(\lambda_k)} P_k$ v českém spisu [We12].

Zlomek $\frac{P(x)}{x-\lambda_k}$ odpovídá výrazu P_k, zlomek $\frac{\varphi(\lambda_k)}{\lambda_k}$ vynásobený prvkem x (před znakem sumy) je analogií výrazu $f(\lambda_k)$.[102]

Poslední, třináctá kapitola nazvaná *Upotřebení v theorii linearných differencialných rovnic* se věnuje využití typického tvaru matice k řešení problematiky, kterou vytyčil německý matematik Immanuel Lazarus Fuchs roku 1859 v práci *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten* [Fu1]. Eduard Weyr odvodil Fuchsovy výsledky o fundamentálním řešení lineární diferenciální rovnice m-tého řádu

$$y^{(m)} = p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \ldots + p_m y,$$

kde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ jsou funkce komplexní proměnné x, pomocí teorie představené v předchozích kapitolách. Navíc je doplnil jistými novými poznatky.

Některé myšlenky obsažené ve spisu *O theorii forem bilinearných* dnes řadíme mezi nejvýznamnější výsledky Eduarda Weyra. Naskýtá se otázka, zda byly v české matematické komunitě pochopeny již v době vzniku jeho textu. Na následujících řádcích uvedeme některé pasáže z již zmíněné recenze dvou Weyrových prací (*O theorii forem bilinearných*, *O binarných matricích*) uveřejněné roku 1890 v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky[103] a signované $\sigma\alpha$, jejíž slova jsou nejpříhodnější volbou k dokumentaci skutečnosti, že Weyrovy texty již tehdy upoutaly pozornost svojí odbornou úrovní. Musíme však opět

[102] Všechny symboly použité v obou verzích Lagrangeovy formule byly výše představeny a je tedy možno si provést jejich důkladnější porovnání.

[103] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 19(1890), str. 318–328.

konstatovat, že ani poté nebyla teorie matic v českých zemích přijata. V závěru citace jsou slova popisující stav české matematické odborné literatury před přelomem století a naznačující podmínky, ve kterých česká matematické komunita (včetně Eduarda Weyra) tvořila, a problémy, s nimiž se museli matematikové u nás vyrovnat.[104]

Theorie matic vznikla v zemi, v níž se odedávna kalkul s operacemi zvláštní zálibě těší, byvši založena … od Cayleye … U nás zanáší se theorií tou již delší dobu prof. Ed. Weyr; již roku 1884 vydal první, tuším, u věci té pojednání O základní větě v theorii matric … Dalšími studiemi o předmětu tom, hlavně v Comptes rendus uveřejněnými, zjednal nového lesku jmenu svému, v kruzích mathematického světa co nejchvalněji známému. (str. 318)

Důkaz osnován jest na úvahách o soustavách n veličin, a této zcela původní pomůcky užívá autor hojně i na dále, zejména razí sobě zavedením t. zv. normalných soustav dráhu k problému tak obtížnému, jaký řešen v kap. XI.

Není snadno, v stručnosti vyložiti myšlenkový chod k řešení tomu vedoucí; … (str. 323–324)

Autor řeší nyní na základě vymožeností v dřívějších kap. obsažených jediným téměř škrtnutím péra problém, jehož řešení se byl Weierstrass (v pojednání „Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen“ r. 1868) pomocí hlubokých analytických úvah dodělal. (str. 327)

Nechceme-li překročiti meze svého referátu, musíme mlčením pominouti další zajímavá upotřebení theorie matic v oboru vyšší algebry, jež autor podává. (str. 328)

Ref. zúmyslna se obmezil na prosté naznačení obsahu oznámeného spisu, věda, že zde jako všude, kde při složení vědeckého díla bystrost ducha ku klopotné píli se pojí, u výsledku „dílo samo mistra chválí“. Ke konci nemůže však ref. potlačiti přání, jež při čtení oznámeného spisu několikrát se přihlásilo. Kdo nestojí na samých výších algebry, mnohdy bude při studiu téhož spisu ohlížeti se po pomůcce — a bude nucen sáhnouti ku spisům cizojazyčným. Toho by tuším nebylo, kdyby již dokončeno bylo dílo … jež se stane zajisté pevným a trvanlivým základem pro podobné studie monografické v naší chudé literatuře … Základové vyšší algebry od Ed. Weyra a F. Řehořovského. Doufejme, že podmínky vědecké produkce se u nás zlepšily alespoň tou měrou, by vydání podobných spisů nebylo zdržováno tím, že ukládá autorům osobní oběti mnohdy nedostižné. (str. 328)

Vedle této recenze lze komentáře ke knize nalézt i v dalších textech, které byly napsány relativně brzy po vytištění Weyrova spisu. Za všechny zmiňme referativní časopis Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik[105] s obsaženou poznámkou od Františka Josefa Studničky či text od autora podepsaného zkratkou S., který je obsažen v kritických listech Athenaeum.[106]

[104] Připomeňme, že se jedná o recenzi, v níž byl zdůrazněn nový termín „matice“ (*… o t. zv. theorii matric, čili jak se nyní s upřílišněným purismem říká, matic*). V této souvislosti si všimněme, že se autor nepodřídil Weyrově odborné autoritě a používá dále pojem matrice. Lze se tedy domnívat, že termín matice u nás nebyl ihned po prvním výskytu v roce 1889 přijat a teprve po roce 1890 došlo k jeho postupnému akceptování.

[105] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 21(1889), str. 123–124.

[106] Athenaeum 8(1890–91), str. 51–52.

Německy psaná verze *Zur Theorie der bilinearen Formen* knížky *O theorii forem bilinearných* byla publikována roku 1890 ve dvou sešitech časopisu Monatshefte für Mathematik und Physik. Nejedná se o doslovný překlad, ale o mírně upravený text, jehož některé části jsou oproti českému znění rozvinuty a některé naopak zkráceny nebo dokonce vynechány. Neodpovídají si například připojené poznámky pod čarou, číslování odstavců v rámci kapitol apod. Překvapující je změněné značení matic. Od dvojice čar po obou stranách schématu autor přešel k ohraničení pomocí velkých složených závorek. Vrátil se tak ke značení, jež používal v první práci věnované teorii matic. Naopak jsou ponechány názvy kapitol, ale jedna z nich v německé verzi chybí. Bohužel se jedná o kapitolu dvanáctou, v níž Eduard Weyr představil svůj významný poznatek o konvergenci mocninné řady s maticovým argumentem. Můžeme se jen domnívat, zda k tomuto vynechání autor přistoupil vzhledem k publikování obecnějších výsledků v samostatném článku *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales* v roce 1887.

Referát o německé verzi Weyrovy práce napsal pro časopis Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik[107] Friedrich Wilhelm Franz Meyer (1856–1934), který v té době působil na akademii v městě Clausthal-Zellerfeld. Jedná se však pouze o konstatování, že práce *Zur Theorie der bilinearen Formen* je přepis české verze, o níž byla již zpráva v tomtéž časopisu podána; text je referován také ve věstníku Bulletin des sciences mathématiques.[108]

V roce 1901 se v Praze konal 3. sjezd českých přírodozpytců a lékařů. Dne 26. května 1901 na něm vystoupil Eduard Weyr s přednáškou *O theorii forem bilinearných*, která byla později publikována ve sjezdovém věstníku. V příspěvku ukazuje, že jeho pojem normální soustavy příslušné dané matici (resp. bilineární formě) lze využít v otázce současné transformace dvou bilineárních forem P, Q také pro případ, který ve stejnojmenném spisu neřešil, tj. pro případ, v němž se $\det(pP + qQ)$ rovná identicky nule. Připomeňme, že se jedná o problém již vyřešený Leopoldem Kroneckerem.

Weyrova teorie nalezla výjimečnou odezvu po celém světě více než sto let od svého publikování a zájem přetrvává i ve třetím tisíciletí. Reakcím na Weyrovu teorii v zahraničí je věnována samostatná část práce, čtenář je nalezne v dalším textu.

2.10 Matice v dalších Weyrových textech

- *O problému projektivity v jednoduchých útvarech geometrických* [We11], 1889
- *Výklady o mathematice I., II.* [We14], [We15], 1891, 1892
- *O soustavách orthogonálných ploch* [We16], 1896
- *Počet differenciálný* [We18], 1902

Jestliže nahlédneme do Weyrova dvojdílného vysokoškolského textu *Výklady*

[107] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 22(1890), str. 141.
[108] Bulletin des sciences mathématiques 15(1891), str. 97.

o mathematice[109] z let 1891 a 1892, matice v něm nenalezneme. Z lineární algebry jsou zde obsaženy pouze partie o determinantech a soustavách lineárních rovnic.

Kvadratickým formách (a také determinantům) jsou věnovány některé pasáže ve Weyrově[110] knize *Počet differenciálný* z roku 1902.

Matice však nalezneme v některých Weyrových geometrických pracích. Jmenujme například více než dvacetistránkový text *O problému projektivity v jednoduchých útvarech geometrických* z roku 1889 či článek *O soustavách orthogonálných ploch* z roku 1896. Náplň druhé ze zmíněných prací uvádějí tato autorova slova:

> *Některé výsledky, týkající se tří soustav ploch na vzájem kolmých, lze odvoditi za pomocí theorie matic způsobem přehledným a stručným; to ukázati jest účelem následující krátké stati.* ([We16], str. 42)

Poněkud překvapivá je skutečnost, jakým způsobem je v tomto článku zavedena matice. Formulaci *Označíme-li symbolem* a_{hk} *matici, t. j. souhrn členů determinantu* $|a_{hk}|$, ... ([We16], str. 43) dnes považujeme za vágní a nedostatečně exaktní.

2.11 Přehled Weyrovy teorie charakteristických čísel

Následující část je věnována přehlednému shrnutí základních poznatků Weyrovy teorie charakteristických čísel a s ní související otázky speciálního kanonického tvaru matice. Představena je úzká spojitost tohoto tzv. Weyrova kanonického tvaru s běžně používaným Jordanovým kanonickým tvarem, resp. dualita mezi Weyrovou charakteristikou a mnohem známější Segreovou charakteristikou. Účelem dalších odstavců je zpřístupnění uvedené problematiky pro čtenáře, který je zvyklý na výklad řečí dnešní teorie matic.[111] Následující text by měl sloužit také jako místo, kam lze nahlédnout v případě, kdy některé partie psané jiným, starším pojetím nebudou zcela srozumitelné, jako místo, kde hledat pomoc při snaze se v poznatcích lépe zorientovat.

Cílem je rovněž podat tento výklad v ucelené podobě, na jediném místě, neboť většina z reakcí na Weyrovu teorii se zabývá pouze některými jejími výsledky, které jsou čtenáři postupně představovány v průběhu takřka celé disertační práce. Z tohoto důvodu dochází v některých pasážích k duplikaci poznatků (pasáže věnované plně pochopeným pojmům tak čtenář může přeskočit či jen letmo pročíst). Předložený výklad však obsahuje i partie a výsledky, které

[109] Jedná se o litografie, které na základě Weyrových přednášek z let 1890 až 1892 vydal jeho asistent a středoškolský profesor matematiky a deskriptivní geometrie na malostranské reálce Antonín Vaňourek (1866–1932), druhé opravené vydání druhého dílu z roku 1898 potom Emanuel Hlavatý (1872–1947), později profesor na reálce v Pardubicích.

[110] Původnost této Weyrovy učebnice napadl v roce 1902 Jan Vilém Pexider (1874–1914). Uvedl, že se jedná víceméně o překlad některých partií knih, které napsali francouzští matematikové Jules Tannery (1848–1910) a Joseph Alfred Serret (1819–1885) a italský matematik Angelo Genocchi (1817–1889). Pexider se rovněž negativně vyjádřil o odbornosti, přesnosti a tiskové úpravě textu. Více viz článek Jindřicha Bečváře a Luďka Zajíčka (nar. 1947) *Weyrův spor s Pexiderem* [Be4] v monografii *Eduard Weyr (1852–1903)*, str. 143–162.

[111] Místy je připojena interpretace řečí příslušných endomorfismů.

v jiných kapitolách uvedeny nejsou. Jedná se především o zmíněné prolínání Weyrova a Jordanova kanonického tvaru, které zřejmě nebylo v této podobě dosud publikováno.

V následujících odstavcích jsou (až na několik výjimek v poznámkách pod čarou) opomenuty historické souvislosti (např. data publikace výsledků, jména objevitelů pojmů apod.), které čtenář nalezne ve zbývajících kapitolách. Součástí jsou odkazy na alternativní termíny příslušné jednotlivým pojmům, které se během vývoje vyskytly. Věříme, že i tato skutečnost napomáhá k ucelenějšímu obrazu a k rychlejší orientaci čtenáře.

K upevnění pojmů a ilustraci výsledků prostupuje celou touto partií jeden příklad (matice řádu 12), na němž jsou všechna tvrzení ukázána.

Nechť A je v celé této části čtvercová matice řádu n nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$.

1 Definice. Rozdíl řádu a hodnosti $r(A)$ čtvercové matice A nazýváme *nulita matice* A a značíme ji $\operatorname{nul} A$, tj.

$$\operatorname{nul} A = n - r(A).$$

Uvažujme konkrétní s-násobné vlastní číslo λ matice A. Protože je matice $(A - \lambda E)$ singulární, je její nulita větší než 0. Pro libovolné $k = 0, 1, \ldots$ platí

$$\operatorname{nul}(A - \lambda E)^k \leq \operatorname{nul}\,(A - \lambda E)^{k+1},$$

přičemž rovnost

$$\operatorname{nul}(A - \lambda E)^k = \operatorname{nul}(A - \lambda E)^{k+1}$$

nastává, právě když $\operatorname{nul}\,(A - \lambda E)^k = s$. Proto existuje $t \geq 1$, pro které

$$0 < \operatorname{nul}(A-\lambda E) < \operatorname{nul}(A-\lambda E)^2 < \ldots < \operatorname{nul}(A-\lambda E)^t = \operatorname{nul}(A-\lambda E)^{t+1} = \ldots,$$

a

$$s = \operatorname{nul}(A - \lambda E)^t = \operatorname{nul}(A - \lambda E)^{t+1} = \ldots$$

Tyto relace umožňují definovat dva následující pojmy.

2 Definice. Nechť A je komplexní čtvercová matice a λ její vlastní číslo. Potom nejmenší přirození číslo t, pro které

$$\operatorname{nul}(A - \lambda E)^t = \operatorname{nul}(A - \lambda E)^{t+1},$$

se nazývá *index matice* A *příslušný vlastnímu číslu* λ.

3 Definice. Nechť A je komplexní čtvercová matice, λ její vlastní číslo a t index matice A příslušný vlastnímu číslu λ. Potom se přirozená čísla

$$\begin{aligned}
&\eta_1 = \operatorname{nul}(A - \lambda E),\\
&\eta_2 = \operatorname{nul}(A - \lambda E)^2 - \operatorname{nul}(A - \lambda E),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\eta_t = \operatorname{nul}(A - \lambda E)^t - \operatorname{nul}(A - \lambda E)^{t-1}
\end{aligned}$$

nazývají *charakteristická čísla matice A příslušná vlastnímu číslu* λ. Posloupnost $\eta(\lambda) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$ se nazývá *Weyrova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu* λ.

Charakteristická čísla příslušná vlastnímu číslu λ matice A jsou tedy rovna přírůstkům nulit matic

$$E, \quad (A - \lambda E), \quad (A - \lambda E)^2, \quad \ldots, \quad (A - \lambda E)^t,$$

resp. rozdílům hodností dvou po sobě jdoucích matic v posloupnosti

$$E, \quad (A - \lambda E), \quad (A - \lambda E)^2, \quad \ldots, \quad (A - \lambda E)^t.$$

Je-li f endomorfismus vektorového prostoru $\mathbb{C}^n$, jehož maticí vzhledem ke kanonické bázi tohoto prostoru je matice A, a je-li 1_V identita na tomto prostoru, jsou charakteristická čísla rovna také přírůstkům dimenzí jader endomorfismů

$$\operatorname{Ker} 1_V, \quad \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot 1_V), \quad \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot 1_V)^2, \quad \ldots, \quad \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot 1_V)^t,$$

resp. rozdílům dimenzí dvou po sobě jdoucích obrazů endomorfismů v posloupnosti

$$\operatorname{Im} V, \quad \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot 1_V), \quad \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot 1_V)^2, \quad \ldots, \quad \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot 1_V)^t.$$

4 Věta. *Nechť A je komplexní čtvercová matice, λ její s-násobné vlastní číslo a $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ příslušná charakteristická čísla. Potom platí:*

(i) $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \ldots \geq \eta_t > 0$,
(ii) $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_t = s$.

5 Definice. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ jsou navzájem různá vlastní čísla čtvercové komplexní matice A, dále nechť $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{t_1})$ je Weyrova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu λ_1, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{t_2})$ je Weyrova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu λ_2 atd. až $(\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{t_u})$ je Weyrova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu λ_u. Potom soustavu přirozených čísel

$$[(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{t_1}), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{t_2}), \ldots, (\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{t_u})]$$

nazýváme *Weyrova charakteristika matice A.*

6 Věta. *Nechť A je čtvercová komplexní matice řádu n, nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ jsou její navzájem různá vlastní čísla a*

$$[(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{t_1}), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{t_2}), \ldots, (\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{t_u})]$$

je Weyrova charakteristika matice A. Potom součet všech charakteristických čísel Weyrovy charakteristiky matice A je roven řádu n matice A.

Stačí si uvědomit, že součet charakteristických čísel příslušných jednotlivým vlastním číslům je roven násobnosti s_i příslušného vlastního čísla λ_i a součet násobností všech navzájem různých vlastních čísel je roven řádu n matice A, tj.

$$n = \sum_{i=1}^{u} s_i,$$

kde

$$s_1 = \sum_{i=1}^{t_1} \alpha_i, \qquad s_2 = \sum_{i=1}^{t_2} \beta_i, \qquad \dots, \qquad s_u = \sum_{i=1}^{t_u} \upsilon_i.$$

Hluboké výsledky jsou zachyceny ve dvou následujících větách.

7 Věta. *Dvě matice jsou podobné právě tehdy, když mají stejná vlastní čísla a jim příslušné Weyrovy charakteristiky. Vlastní čísla a charakteristická čísla vytvářejí úplný systém invariantů podobnosti matic.*

8 Věta. *Nechť A je čtvercová komplexní matice, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$ jsou její navzájem různá vlastní čísla a $t_1, t_2, \dots, t_u$ po řadě počty jejich charakteristických čísel (neboli indexy matice A příslušné vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$). Potom polynom*

$$(\lambda - \lambda_1)^{t_1} (\lambda - \lambda_2)^{t_2} \ \dots \ (\lambda - \lambda_u)^{t_u}$$

je minimálním polynomem matice A.

Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4 & 4 & 4 & -4 & -1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4 & 4 & 4 & -4 & -1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-6 & 6 & 6 & -6 & 5 & 6 & -5 & -6 & -3 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3
\end{pmatrix}.$$

Její charakteristická rovnice je $(\lambda - 2)^7 (\lambda + 3)^5 = 0$, matice A tedy má sedminásobné vlastní číslo 2 a pětinásobné vlastní číslo -3. Výpočtem zjistíme, že

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & -4 & -1 & -1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & -4 & -1 & -1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 5 & 6 & -5 & -6 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

hodnost r této matice je 9, a proto je její nulita $\operatorname{nul}(A-2E) = 12-9 = 3$. Dále vypočítáme matice $(A-\lambda E)^2$, $(A-\lambda E)^3$, ... a po každém určení vyšší mocniny ihned i jejich hodnosti, resp. nulity. Dostaneme tyto výsledky:

$$\begin{array}{lcllcl} r(A-2E) & = & 9, \qquad & \operatorname{nul}(A-2E) & = & 3, \\ r(A-2E)^2 & = & 7, & \operatorname{nul}(A-2E)^2 & = & 5, \\ r(A-2E)^3 & = & 6, & \operatorname{nul}(A-2E)^3 & = & 6, \\ r(A-2E)^4 & = & 5, & \operatorname{nul}(A-2E)^4 & = & 7, \\ r(A-2E)^5 & = & 5, & \operatorname{nul}(A-2E)^5 & = & 7. \end{array}$$

Protože $\operatorname{nul}(A-2E)^4 = \operatorname{nul}(A-2E)^5$, je zbytečné počítat vyšší mocniny; index t_1 matice A příslušný vlastnímu číslu 2 je 4. Vypočítáme přírůstky nulit mocnin matice $(A-2E)$, čímž získáme charakteristická čísla matice A příslušná vlastnímu číslu 2:

$$\begin{array}{lcl} \alpha_1 & = & \operatorname{nul}(A-2E) = 3, \\ \alpha_2 & = & \operatorname{nul}(A-2E)^2 - \operatorname{nul}(A-2E) = 5-3 = 2, \\ \alpha_3 & = & \operatorname{nul}(A-2E)^3 - \operatorname{nul}(A-2E)^2 = 6-5 = 1, \\ \alpha_4 & = & \operatorname{nul}(A-2E)^4 - \operatorname{nul}(A-2E)^3 = 7-6 = 1. \end{array}$$

Skutečně $3 \geq 2 \geq 1 \geq 1$, $s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 7$. Weyrova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu 2 je (3, 2, 1, 1). Zcela analogicky postupujeme u vlastního čísla -3:

$$A + 3E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 5 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & -4 & -1 & 4 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & -4 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 5 & 6 & -5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$
\begin{array}{rclcrcl}
r(A+3E) & = & 9, & \qquad & \mathrm{nul}\,(A+3E) & = & 3,\\
r(A+3E)^2 & = & 7, & & \mathrm{nul}\,(A+3E)^2 & = & 5,\\
r(A+3E)^3 & = & 7, & & \mathrm{nul}\,(A+3E)^3 & = & 5.
\end{array}
$$

Tedy $t_2 = 2$ a charakteristická čísla matice A příslušná vlastnímu číslu -3 jsou:

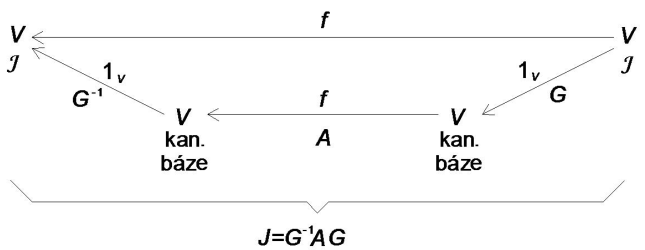
$$
\begin{array}{rcl}
\beta_1 & = & \mathrm{nul}\,(A+3E) = 3,\\
\beta_2 & = & \mathrm{nul}\,(A+3E)^2 - \mathrm{nul}\,(A+3E) = 5 - 3 = 2.
\end{array}
$$

Opět platí: $3 \geq 2$, $s_2 = \beta_1 + \beta_2 = 5$. Weyrova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu -3 je $(3,\, 2)$.

Weyrova charakteristika matice A je $[(3,\, 2,\, 1,\, 1),\ (3,\, 2)]$ a je splněna i rovnost mezi součtem všech jejích charakteristických čísel a řádem matice A: 3+2+1+1+3+2=12.

Minimální polynom matice A je $(\lambda - 2)^4(\lambda + 3)^2$.

Komplexní matici řádu n přiřaďme odpovídající endomorfismus f vektorového prostoru $V = \mathbb{C}^n$, matice A je tedy maticí endomorfismu f vzhledem ke kanonické bázi prostoru V. Uvažujme Jordanův tvar J matice A. Tyto matice jsou podobné, proto existuje regulární matice G, pro kterou platí $J = G^{-1}AG$. Matice G je maticí přechodu od nějaké báze $\mathcal{J} = \{v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_n\}$ ke kanonické bázi prostoru V (1_V značí identitu na prostoru V).



Jordanův kanonický tvar příslušný k výše uvedené matici A má tvar

$$
J = \begin{pmatrix}
\boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{matrix}} & & & & & \\
& \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & & & & \\
& & \boxed{2} & & & \\
& & & \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 \\ & -3 \end{matrix}} & & \\
& & & & \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 \\ & -3 \end{matrix}} & \\
& & & & & \boxed{-3}
\end{pmatrix},
$$

kde jsou na nevyplněných místech nuly. Pro obrazy $f(v_1)$, $f(v_2)$, ..., $f(v_n)$ prvků v_1, v_2, ..., v_n báze $\mathcal{J}$ proto platí

$$\begin{array}{rcl} f(v_1) &=& 2v_1,\\ f(v_2) &=& 2v_2+v_1,\\ f(v_3) &=& 2v_3+v_2,\\ f(v_4) &=& 2v_4+v_3,\\ f(v_5) &=& 2v_5,\\ f(v_6) &=& 2v_6+v_5,\\ f(v_7) &=& 2v_7, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f(v_8) &=& -3v_8,\\ f(v_9) &=& -3v_9+v_8,\\ f(v_{10}) &=& -3v_{10},\\ f(v_{11}) &=& -3v_{11}+v_{10},\\ f(v_{12}) &=& -3v_{12}, \end{array}$$

tj.

$$\begin{array}{rcl} (f-2\cdot 1_V)(v_1) &=& o,\\ (f-2\cdot 1_V)(v_2) &=& v_1,\\ (f-2\cdot 1_V)(v_3) &=& v_2,\\ (f-2\cdot 1_V)(v_4) &=& v_3,\\ (f-2\cdot 1_V)(v_5) &=& o,\\ (f-2\cdot 1_V)(v_6) &=& v_5,\\ (f-2\cdot 1_V)(v_7) &=& o, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (f+3\cdot 1_V)(v_8) &=& o,\\ (f+3\cdot 1_V)(v_9) &=& v_8,\\ (f+3\cdot 1_V)(v_{10}) &=& o,\\ (f+3\cdot 1_V)(v_{11}) &=& v_{10},\\ (f+3\cdot 1_V)(v_{12}) &=& o. \end{array}$$

Vektory v_1, v_5 a v_7 jsou vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 2, vektory v_8, v_{10} a v_{12} jsou vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu -3. Vyjádříme-li vztahy v maticové symbolice, získáme soustavy rovnic, z nichž lze vektory v_1, v_2, ..., v_{12} vypočítat:

$$\begin{array}{rcl} (A-2E)v_1^T &=& o^T,\\ (A-2E)v_2^T &=& v_1^T,\\ (A-2E)v_3^T &=& v_2^T,\\ (A-2E)v_4^T &=& v_3^T,\\ (A-2E)v_5^T &=& o^T,\\ (A-2E)v_6^T &=& v_5^T,\\ (A-2E)v_7^T &=& o^T, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (A+3E)v_8^T &=& o^T,\\ (A+3E)v_9^T &=& v_8^T,\\ (A+3E)v_{10}^T &=& o^T,\\ (A+3E)v_{11}^T &=& v_{10}^T,\\ (A+3E)v_{12}^T &=& o^T. \end{array}$$

Vlastní vektory v_1, v_5, v_7, v_8, v_{10} a v_{12} získáme řešením homogenních soustav, vektor v_2 řešením nehomogení soustavy s maticí $(A-2E)$ a pravou stranou v_1^T, vektor v_3 řešením nehomogení soustavy s maticí $(A-2E)$ a pravou stranou v_2^T atd.

V našem konkrétním příkladě dostáváme:

$$\begin{array}{ll} v_1=(1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0), & v_7=(0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0),\\ v_2=(0,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0), & v_8=(0,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0),\\ v_3=(0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0), & v_9=(0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0),\\ v_4=(0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0), & v_{10}=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0),\\ v_5=(0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0), & v_{11}=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1),\\ v_6=(0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0), & v_{12}=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1). \end{array}$$

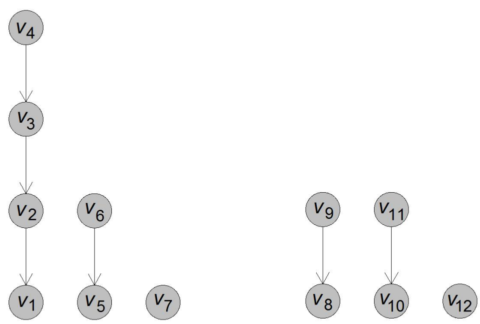
Zapíšeme-li tyto vektory do sloupců matice, získáme právě matici G ze vztahu $J = G^{-1}AG$:

$$G = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}.$$

9 Definice. Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n. Uspořádaná báze vektorového prostoru $V = \mathbb{C}^n$, jejíž prvky (v témže pořadí) tvoří sloupce tranformační matice G při převodu matice A na Jordanův kanonický tvar J, tj. sloupce matice G splňující vztah $J = G^{-1}AG$, se nazývá *Jordanova báze*[112] *prostoru V příslušná k matici A.*

Endomorfismus f, který má vzhledem ke kanonické bázi prostoru V matici A, má vůči Jordanově bázi prostoru V příslušné k matici A Jordanovu matici $J = G^{-1}AG$.

Vraťme se k výsledkům násobení vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_7$, resp. $v_8, v_9, \ldots, v_{12}$ maticí $(A-2E)$, resp. $(A+3E)$ zleva, neboli k obrazům vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_7$, resp. $v_8, v_9, \ldots, v_{12}$ v endomorfismu $(f - 2\cdot 1_V)$, resp. $(f + 3\cdot 1_V)$. Vektor v_4 se zobrazil na vektor v_3, vektor v_3 na vektor v_2, vektor v_2 na vektor v_1 a vektor v_1 na nulový vektor o; vektor v_6 na vektor v_5 a vektor v_5 na nulový vektor o; vektor v_7 na nulový vektor o. Obdobné vazby platí mezi vektory druhé skupiny přináležející vlastnímu číslu -3, tj. mezi vektory $v_8, v_9, \ldots, v_{12}$. Tyto řetězové procesy lze jednoduše zobrazit:

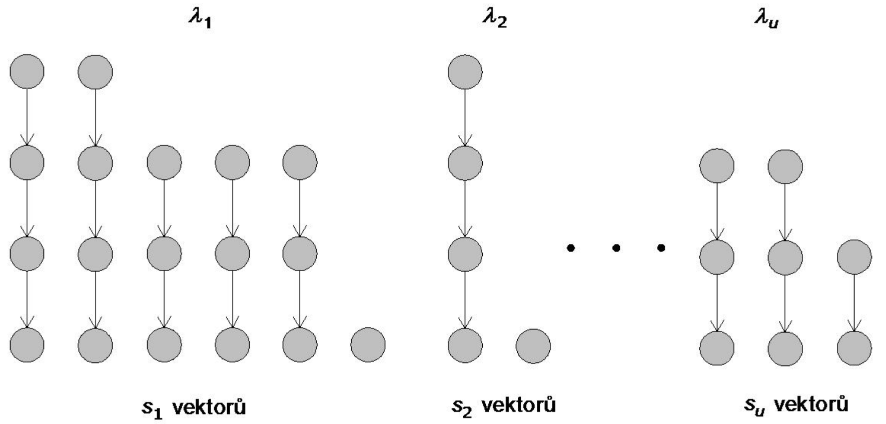


[112] S tímto termínem (*Jordan basis*) se setkáme v současných zahraničních publikacích lineární algebry. Učebnice [Be5] uvádí název Weyrova báze. Jedná se totiž o modifikovanou Weyrovu normální soustavu vektorů. Ponechme termín Weyrova báze pro mírně pozměněný pojem (viz dále).

10 Definice. Nechť A je komplexní čtvercová matice a λ její vlastní číslo. Uspořádaná množina nenulových vektorů $\left\{v^T, (A-\lambda E)v^T, \ldots, (A-\lambda E)^{t-1}v^T\right\}$, kde $(A-\lambda E)^t v^T = o^T$, se nazývá *Jordanův řetízek matice A příslušný vlastnímu číslu λ*.

Sestrojme všechny Jordanovy řetízky příslušné všem různým vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ s násobnostmi $s_1, s_2, \ldots, s_u$ dané čtvercové matice řádu n (viz obrázek).

11 Věta. *Ke každému vlastnímu číslu λ matice A existuje soubor Jordanových řetízků, které obsahují celkem tolik vektorů, kolik je násobnost vlastního čísla λ. Tato množina vektorů je lineárně nezávislá. Sjednocení takovýchto množin pro všechna vlastní čísla matice A je opět lineárně nezávislá množina. Počet jejích prvků je roven řádu matice A.*



12 Věta. *Jordanova báze příslušná k matici A je sjednocením disjunktních Jordanových řetízků přináležejících všem vlastním číslům matice A.*[113]

13 Definice. Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n, dále nechť J je její Jordanův kanonický tvar a λ některé její vlastní číslo. Nerostoucí posloupnost $\xi(\lambda) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)$ sestavená z řádů ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, q$, Jordanových buněk, které se vztahují k vlastnímu číslu λ, se nazývá *Segreova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu λ*.[114]

14 Definice. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ jsou navzájem různá vlastní čísla komplexní čtvercové matice A řádu n, nechť $(\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_{q_1})$ je Segreova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu λ_1, nechť $(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{q_2})$ je Segreova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu λ_2 atd. a $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{q_u})$

[113] Jako sjednocení Jordanových řetízků je Jordanova báze také často definována.

[114] Článek [He4] používá termín *Jordan characteristic*, monografie [OCV1] termín *Jordan structure*.

Segreova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu λ_u. Potom soustava přirozených čísel

$$\xi(A) = [(\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_{q_1}), (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{q_2}), \ldots, (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{q_u})]$$

se nazývá *Segreova charakteristika matice A.*

15 Poznámka. Segreova charakteristika nese jméno italského matematika Corrada Segre[115] (1863–1924).

Vraťme se k výše uvedené matici A řádu 12 a odpovězme na dvě dvojice otázek:

• Jaké jsou Segreovy charakteristiky matice A pro vlastní čísla 2 a -3? Kolik vektorů je na obrázku znázorněno v jednotlivých sloupcích (řetízcích) pro vlastní čísla 2 a -3?

Odpovědi na obě otázky jsou shodné: (4, 2, 1) pro vlastní číslo 2 a (2, 2, 1) pro vlastní číslo -3.

• Jaké jsou Weyrovy charakteristiky matice A příslušné vlastním číslům 2 a -3? Kolik vektorů je na obrázku znázorněno v jednotlivých řádcích (zdola) pro vlastní čísla 2 a -3?

Odpovědi na obě otázky jsou opět totožné: (3, 2, 1, 1) pro vlastní číslo 2 a (3, 2) pro vlastní číslo -3.

Tato shoda není náhodná, platí pro všechny komplexní čtvercové matice. K nalezení souvislostí mezi uvedenými posloupnostmi definujme nové pojmy:

16 Definice. Nechť $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ je nerostoucí posloupnost přirozených čísel. Uvažujme diagram vytvořený z t sloupců teček, z nichž k-tý sloupec má právě α_k teček. První (spodní) tečky všech sloupců jsou umístěny na stejném, posledním řádku, tečky druhé na předposledním řádku atd. Takto sestrojené

---

[115] Segre C., *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* [Sg1]. Charakteristika je v uvedeném Segreově článku zavedena takto (str. 136–137):

Ora il Weierstrass ha dimostrato … che la condizione necessaria e sufficiente perchè si possa effettuare questa trasformazione è che i divisori elementari del determinante $|a_{ik} - \varrho b_{ik}|$ *coincidano con quelli del determinante* $|p_{ik} - \varrho q_{ik}|$. *Dicendo* $e_t, e_t', \ldots, e_t^{(h_t-1)}$ *i gradi (in ordine decrescente di grandezza) dei divisori elementari del determinante* $|a_{ik} - \varrho b_{ik}|$ *corrispondenti ad una stessa radice* ϱ, *e chiamando caratteristica l'insieme di questi gradi così raggruppati:*

$$[(e_1, e_1', \ldots, e_1^{(h_1-1)}), (e_2, e_2', \ldots, e_2^{(h_2-1)}), \ldots, (e_r, e_r', \ldots, e_r^{(h_r-1)})],$$

noi divideremo le omografie in classi a seconda dei loro corrispondenti raggruppamenti dei divisori elementari, vale a dire intenderemo che due omografie siano della stessa classe quando hanno la stessa caratteristica.

Corrado Segre studoval a působil v Turíně. Již od mládí hojně publikoval, po dlouhá léta korespondoval s Felixem Kleinem. Zabýval se především geometrickými invarianty při lineárních transformacích, algebraickými křivkami a plochami. Značnou měrou obnovil v Itálii zájem o geometrii, svým přínosem pro tamější geometrickou školu je řazen za takovou osobnost, kterou byl Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona (1930–1903).

schéma se nazývá *Ferrersův diagram posloupnosti* α. Setkáme se však rovněž s termínem *Youngovo tablo posloupnosti* α.[116]

Ferrersův diagram se velmi často vyskytuje v mírně modifikované formě, kdy jsou místo teček zakreslovány jiné objekty. Používá se rovněž „transponovaná verze" diagramu, kdy jsou tečky (objekty) příslušné prvkům výchozí posloupnosti značeny do řádků, což je vzhledem k vzájemné dualitě dvou určitých posloupností (viz dále) nepodstatná změna.[117]

17 Definice. Posloupnost α^* nazveme *duální* (též *konjugovanou*) *k posloupnosti* α, jestliže její členy značí počty teček v jednotlivých řádcích (čteno odspodu) Ferrersova diagramu posloupnosti α.

18 Věta. *Je-li posloupnost* α^* *duální k posloupnosti* α*, je posloupnost* α *duální k posloupnosti* α^**, tj.* $\alpha = (\alpha^*)^*$.

19 Poznámka. Vzhledem k předchozí větě nazýváme posloupnosti α a α^* *navzájem duální.*

20 Věta. *Weyrova a Segreova charakteristika příslušná k témuž vlastnímu číslu matice jsou navzájem duální posloupnosti.*

---

[116] Norman Macleod Ferrers (1829–1903) byl anglický matematik pocházející z dobře situované rodiny. Postupně vystudoval matematiku v Cambridge, právo v Londýně a teologii v Cambridge. Právu se, na rozdíl od Arthura Cayleyho, nevěnoval, knězem se stal v roce 1860, v jeho kariéře však zvítězila matematika. Působil v Cambridge, v roce 1884/85 byl rektorem. Výsledky spojené s dnes nazývaným Ferrersovým diagramem sám nepublikoval, učinil tak Sylvester, s nímž Ferrers korespondoval, v článku *On Mr Cayley's impromptu demonstration of the rule for determining at sight the degree of any symmetrical function of the roots of an equation expressed in terms of the coefficients* [Sy7] z roku 1853, v němž napsal:

The number of modes of partitioning (n) into (m) parts is equal to the number of modes of partitioning (n) into parts, one of which is always m, and the others (m) or less then (m). This proposition was mentioned to me by Mr N M Ferrers, whose demonstration of it ... is so simple and instructive, that I am sure every logician will be delighted to meet with it here or elsewhere. ([SyP], díl I., str. 597)

Alfred Young (1873–1940) byl anglický matematik, vikář a vynálezce několika přístrojů (elektrický motor k čerpání vody, generátor převádějící mechanickou energii na vysokofrekvenční elektrický proud). Působil např. v Cambridge, z matematiky se zabýval především teorií grup. Pojem dnes nazývaný Youngovo tablo představil v roce 1900.

[117] Vyjadřuje-li počet teček v jednotlivých sloupcích velikosti všech Jordanových buněk (seřazené sestupně) příslušných určitému vlastnímu číslu dané matice, mluvíme též o *Jordanově diagramu* tohoto vlastního čísla. Viz např. [Sc3], str. 172.

Terminologie je v této oblasti značně rozkolísaná. Někteří autoři např. rozlišují mezi Ferrersovým diagramem a Youngovým tablem podle toho, zda ve schématu používáme tečky či čtverečky. Pokud se jedná o pouhé tečky, resp. prázdné čtverečky, mluví se o Ferrersově diagramu, resp. Youngově tablu, v případě nahrazení teček, resp. vyplnění čtverečků konkrétními objekty o *Youngově diagramu.* Někdy se však název Ferrersův diagram používá i pro označení schématu, v němž jsou doplněny místo teček objekty apod. V této práci budeme používat pro všechny zmíněněné varianty termín Ferrersův diagram.

Je-li tedy jedna z nich např. (3, 3, 2, 1, 1), přísluší jí Ferrersův diagram

$$\begin{array}{lllll} \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array},$$

a druhá charakteristika je $(3, 3, 2, 1, 1)^* = (5, 3, 2)$.

Segreovy charakteristiky (4, 2, 1) a (2, 2, 1) příslušné oběma vlastním číslům výše uvedené matice A řádu 12 jsou znázorněny Ferrersovými diagramy

$$\begin{array}{lll} \bullet & & \\ \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \qquad \text{a} \qquad \begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}.$$

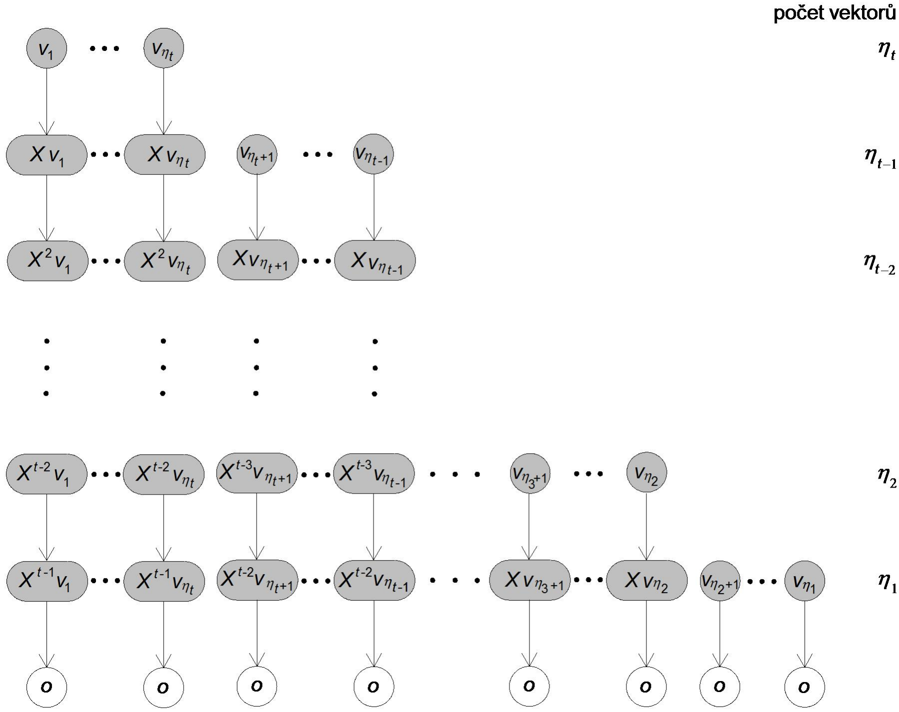
Weyrovy charakteristiky příslušné oběma vlastním číslům odpovídají počtu teček v řádcích (čteno odspodu), jsou proto (3, 2, 1, 1) a (3, 2), což odpovídá vypočítaným hodnotám.

Pomocí této vizuální pomůcky je například zřejmé, že první člen Segreovy, resp. Weyrovy charakteristiky je vždy roven počtu členů charakteristiky Weyrovy, resp. Segreovy. Souvislost mezi pojmy je však mnohem hlubší. Mnoho vztahů lze snadno vyčíst právě z Ferrersových diagramů, které jsou v této problematice neocenitelnou pomůckou. Než znázorníme diagram, v němž zachytíme další duality či souvislosti, podotkněme, že v případě, kdy máme zadanou jednu z charakteristik a potřebujeme pouze rychle získat charakteristiku druhou, lze ji určit i bez tohoto diagramu. První číslo hledané posloupnosti je totiž rovno počtu prvků dané, tj. duální posloupnosti, které jsou větší nebo rovny 1, druhé číslo hledané posloupnosti je rovno počtu prvků dané posloupnosti, které jsou větší nebo rovny 2 atd. Tento postup je výhodný především u charakteristik, kde součet jejích prvků „není malý“ a znázorňování teček by zabralo mnoho času. Je-li například jedna charakteristika (9, 6, 5, 5, 2), je k ní duální charakteristikou posloupnost (5, 5, 4, 4, 4, 2, 1, 1, 1).

21 Definice. Nechť A je komplexní čtvercová matice a λ její vlastní číslo. Nechť v je vektor, pro nějž existuje přirozené číslo k, pro které $(A - \lambda E)^k v^T = o^T$.[118] Potom nejmenší číslo k této vlastnosti nazveme *výše vektoru v příslušná vlastnímu číslu λ matice A.*[119] *Nulovému vektoru přiřazujeme výši* 0.

22 Ferrersův diagram Segreovy (a Weyrovy) charakteristiky příslušné danému vlastnímu číslu. Nechť A je komplexní čtvercová matice, λ její s-násobné vlastní číslo a $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)$ Segreova charakteristika příslušná tomuto vlastnímu číslu. V následujícím Ferrersově diagramu Segreovy charakteristiky jsou zaneseny vektory příslušné Jordanovy báze. Pro jednoduchost značíme $X = A - \lambda E$ a vektory chápeme jako sloupce.

[118] Vektory této vlastnosti tvoří vektorový prostor, který budeme v části 5.3 značit $GKer$.
[119] Používá se též termín *řád vektoru.* Viz např. [Bo8].



V posledním řádku je tedy uvedeno η_1 vektorů, které jsou vlastními vektory příslušnými k vlastnímu číslu λ, nad sebou mají své „vzory“, tj. vektory, které se na ně „zobrazí“ při násobení maticí $X = (A - \lambda E)$ zleva. Celkový počet uvedených nenulových vektorů je roven násobnosti s vlastního čísla λ a tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Vektory vytvářejí Jordanovy řetízky, každý z nich odpovídá právě jedné Jordanově buňce. Výše vektoru stojícího na první pozici shora v každém řetízku (budeme též říkat *délka Jordanova řetízku*) je rovna odpovídajícímu prvku Segreovy charakteristiky (ve stejném pořadí), délka Jordanova řetízku je tedy rovna řádu příslušné Jordanovy buňky Jordanova kanonického tvaru matice A. V diagramu je

η_t	vektorů výše	t,
$\eta_{t-1} - \eta_t$	vektorů výše	$t-1$,
………………		
$\eta_2 - \eta_3$	vektorů výše	2,
$\eta_1 - \eta_2$	vektorů výše	1,

neboli část Jordanova kanonického tvaru J matice A, která přísluší vlastnímu číslu λ, obsahuje právě

η_t	Jordanových buněk řádu	t,
$\eta_{t-1} - \eta_t$	Jordanových buněk řádu	$t-1$,
………………		
$\eta_2 - \eta_3$	Jordanových buněk řádu	2,
$\eta_1 - \eta_2$	Jordanových buněk řádu	1.

Ve Ferrersově diagramu je tedy znázorněno s vektorů

$v_{11},\ \ldots,\ v_{1,\eta_t},$
$v_{21},\ \ldots,\ v_{2,\eta_t},\ v_{2,\eta_t+1},\ \ldots,\ v_{2,\eta_{t-1}},$
$v_{31},\ \ldots,\ v_{3,\eta_t},\ v_{3,\eta_t+1},\ \ldots,\ v_{3,\eta_{t-1}},\ v_{3,\eta_{t-1}+1},\ \ldots,\ v_{3,\eta_{t-2}},$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$v_{t1},\ \ldots,\ v_{t,\eta_t},\ v_{t,\eta_t+1},\ \ldots,\ v_{t,\eta_{t-1}},\ v_{t,\eta_{t-1}+1},\ \ldots,\ v_{t,\eta_{t-2}},\ \ldots,\ v_{t,\eta_1},$

pro které platí vztahy

$$(A-\lambda E)v_{km}^T = v_{k+1,m}^T \quad \text{pro} \ \ k=1,\,2,\,\ldots,\,t-1,\ \ m=1,\,2,\,\ldots,\,\eta_{t-k+1},$$

$$(A-\lambda E)v_{tm}^T = o^T \quad \text{pro} \ \ m=1,\,2,\,\ldots,\,\eta_1.$$

Tyto vztahy jsou ekvivalentní rovnicím

$$Av_{km}^T = \lambda v_{km}^T + v_{k+1,m}^T \quad \text{pro} \ \ k=1,\,2,\,\ldots,\,t-1,\ \ m=1,\,2,\,\ldots,\,\eta_{t-k+1},$$

$$Av_{tm}^T = \lambda v_{tm}^T \quad \text{pro} \ \ m=1,\,2,\,\ldots,\,\eta_1.$$

Odtud je zřejmé, že vektory znázorněné ve stejném sloupci digramu generují podprostor prostoru $V=\mathbb{C}^n$, který je při homomorfismu $f(x)=Ax^T$ invariantní. Dimenze tohoto podprostoru je rovna počtu vektorů v daném sloupci.

Například vektory v prvním sloupci tvoří bázi podprostoru ${}^1V$ dimenze t a platí pro ně vztahy

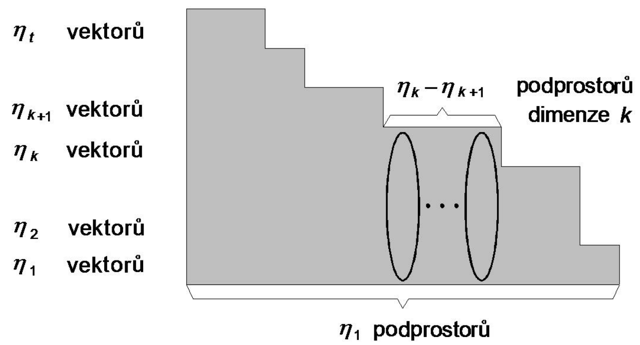
$f(v_{11}) = \lambda v_{11} + v_{21},$
$f(v_{21}) = \lambda v_{21} + v_{31},$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$f(v_{t-1,1}) = \lambda v_{t-1,1} + v_{t1},$
$f(v_{t1}) = \lambda v_{t1}.$

Těchto invariantních podprostorů je stejně mnoho jako sloupců ve schématu, jejich počet je proto roven největšímu z charakteristických čísel příslušných vlastnímu číslu λ matice A. Jsou-li charakteristická čísla $\eta_1,\,\eta_2,\,\ldots,\,\eta_{t_1}$ příslušná vlastnímu číslu λ srovnána podle velikosti, je tímto největším charakteristickým číslem číslo η_1. Mezi η_1 podprostory je přesně[120]

η_t	podprostorů dimenze	t,
$\eta_{t-1}-\eta_t$	podprostorů dimenze	$t-1$,
$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\ldots$
$\eta_2-\eta_3$	podprostorů dimenze	2.
$\eta_1-\eta_2$	podprostorů dimenze	1.

[120] Upozorněme, že v případě $\eta_i=\eta_{i+1}$ podprostory dimenze i chybí.

Pomocí schématického Ferrersova diagramu lze tento výsledek znázornit následujícím obrázkem (velmi obdobným způsobem lze zobrazit počet Jordanových buněk určitého řádu, resp. počet vektorů Jordanovy báze, které mají určitou výši).



Pro výše uvedenou konkrétní matici A a její vlastní číslo 2 existuje

1		Jordanova buňka řádu	4,
	resp.	vektor Jordanovy báze výše	4,
	resp.	invariantní podprostor dimenze	4,
0		Jordanových buněk řádu	3,
	resp.	vektorů Jordanovy báze výše	3,
	resp.	invariantních podprostorů dimenze	3,
1		Jordanova buňka řádu	2,
	resp.	vektor Jordanovy báze výše	2,
	resp.	invariantní podprostor dimenze	2,
1		Jordanova buňka řádu	1,
	resp.	vektor Jordanovy báze výše	1,
	resp.	invariantní podprostor dimenze	1,

pro vlastní číslo -3 existují

2		Jordanovy buňky řádu	2,
	resp.	vektory Jordanovy báze výše	2,
	resp.	invariantní podprostory dimenze	2,
1		Jordanova buňka řádu	1,
	resp.	vektor Jordanovy báze výše	1,
	resp.	invariantní podprostor dimenze	1.

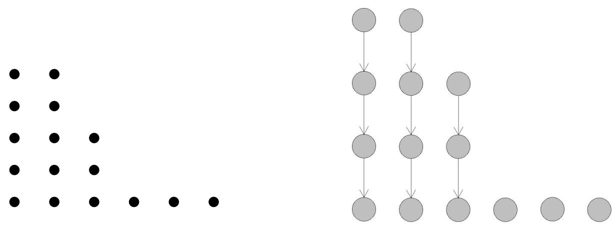
Mezi oběma charakteristikami příslušnými témuž vlastnímu číslu lze tedy snadno přecházet, jejich prvky (nebo rozdíly po sobě jdoucích prvků) udávají další zajímavé vztahy a vlastnosti. Shrňme význam prvků obou charakteristik do tabulky, speciální pozornost věnujme interpretaci prvních prvků obou posloupností.

23 Tabulka. Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n, λ její s-násobné vlastní číslo, $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)$ Segreova, resp. $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$ Weyrova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu λ, nechť Ferrersův diagram Segreovy charakteristiky přísluší vlastnímu číslu λ a jeho tečky odpovídají vektorům, které jsou ve sloupcích Ferrersova diagramu uspořádány tak, aby vytvářely Jordanovy řetízky. Nechť f je endomorfismus vektorového prostoru $\mathbb{C}^n$, jehož maticí vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{C}^n$ je matice A, a konečně 1_V značí identitu na $V = \mathbb{C}^n$. Potom uvedená přirozená čísla mají tyto významy:

ξ_1	• počet prvků Weyrovy charakteristiky • index t matice A příslušný vlastnímu číslu λ • řád největší Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu λ • největší z dimenzí všech invariantních podprostorů generovaných vektory ve sloupcích Ferrersova diagramu • největší z výší všech vektorů obsažených ve Ferrersově diagramu • násobnost λ jako kořene minimálního polynomu matice A • počet řádků Ferrersova diagramu
η_1	• počet prvků Segreovy charakteristiky • $\operatorname{nul}(A - \lambda E)$, neboli $n - r\,(A - \lambda E)$ • $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot 1_V)$, neboli $n - \dim \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot 1_V)$ • počet Jordanových buněk příslušných vlastnímu číslu λ • počet Jordanových řetízků příslušných vlastnímu číslu λ • počet invariantních podprostorů generovaných vektory ve sloupcích Ferrersova diagramu • maximální počet lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu λ • počet sloupců Ferrersova diagramu
ξ_k $k = 1, 2, \ldots, q$	• počet prvků Weyrovy charakteristiky, které jsou větší nebo rovny k
η_k $k = 1, 2, \ldots, t$	• počet prvků Segreovy charakteristiky, které jsou větší nebo rovny k • $\operatorname{nul}(A - \lambda E)^k - \operatorname{nul}(A - \lambda E)^{k-1}$ • $r\,(A - \lambda E)^{k-1} - r\,(A - \lambda E)^k$ • $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot 1_V)^k - \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot 1_V)^{k-1}$, kde $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot 1_V)^0 = 0$ • $\dim \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot 1_V)^{k-1} - \dim \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot 1_V)^k$, kde $\dim \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot 1_V)^0 = n$

$\eta_k - \eta_{k+1}$ $k = 1, 2, \ldots, t$ $\eta_{t+1} = 0$	• počet Jordanových buněk příslušných vlastnímu číslu λ, jejichž řád je k • počet Jordanových řetízků příslušných vlastnímu číslu λ, jejichž délka je k • počet podprostorů generovaných vektory ve sloupcích Ferrersova diagramu, jejichž dimenze je k
s	• součet všech prvků Segreovy charakteristiky • součet všech prvků Weyrovy charakteristiky • stupeň λ jakožto kořene charakteristického polynomu matice A

Uveďme raději ještě výslovně, že Ferrersův diagram Segreovy charakteristiky složený pouze z teček, které značí řády buněk Jordanova kanonického tvaru matice A příslušných vlastnímu číslu λ, a znázornění Jordanových řetízků příslušných vlastnímu číslu λ včetně šipek, které značí násobení vektorů maticí $(A - \lambda E)$ zleva, mají naprosto stejné uspořádání svých objektů.



Uvažujme nyní invariantní podprostory generované všemi vektory jednotlivých Jordanových řetízků příslušných navzájem různým vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ čtvercové komplexní matice A. Jsou-li $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \upsilon_1$ největší charakteristická čísla vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$, je celkový počet těchto invariantních podprostorů $\alpha_1 + \beta_1 + \ldots + \upsilon_1$. Jedná se o podprostory prostoru $V = \mathbb{C}^n$, který je jejich direktním součtem. Báze všech uvažovaných podprostorů tvoří dohromady bázi zmíněného vektorového prostoru. Uvažujme bázi

$$\mathcal{J}' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{s_1};\ b_1, b_2, \ldots, b_{s_2};\ \ldots,\ u_1, u_2, \ldots, u_{s_u}\},$$

kde vektory $a_1, a_2, \ldots, a_{s_1}$ tvoří Jordanovy řetízky příslušné vlastnímu číslu λ_1, vektory $b_1, b_2, \ldots, b_{s_2}$ tvoří Jordanovy řetízky příslušné vlastnímu číslu λ_2 atd. až vektory $u_1, u_2, \ldots, u_{s_u}$ tvoří Jordanovy řetízky příslušné vlastnímu číslu λ_u.

Vyberme si první vlastní číslo λ_1 násobnosti s_1, jehož příslušná Weyrova charakteristika je $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{t_1})$ a jemuž přísluší Jordanova báze $\mathcal{J}_1' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{s_1}\}$. Matice homomorfismu $f(x) = Ax^T$, který je restringován pouze na podprostor ${}^1V$ dimenze t_1 generovaný vektory prvního sloupce Ferrersova diagramu příslušného tomuto vlastnímu číslu, tj. vektory prvního Jordanova řetízku,[121] má vzhledem k bázi $\mathcal{J}_1'$ a bázi $\mathcal{J}'$ tvar

[121] Jedná se tedy o homomorfismus prostoru dimenze t do prostoru dimenze n.

$$J_1' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podobně získáme matice J_2', J_3', $\dots$, J_k', které odpovídají dalším Jordanovým řetízkům, resp. příslušným invariantním podprostorům.

Ke každé komplexní matici A existuje čtvercová matice J' stupně n, kterou lze vyjádřit rovností

$$J' = G'^{-1} A G',$$

kde matice G' je maticí, jejíž sloupce jsou vektory výše uvedené báze $\mathcal{J}'$, matice J' je blokově diagonální matice, přičemž každý z jejích diagonálních bloků přináleží některému vlastnímu číslu λ_i matice A a má tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Matice J' je složena z výše uvedených matic J_1', J_2', $\dots$, J_k', kde k je počet všech Jordanových řetízků ($k = \alpha_1 + \beta_1 + \dots + \upsilon_1$), tj.

$$J' = (J_1', J_2', \dots, J_k').$$

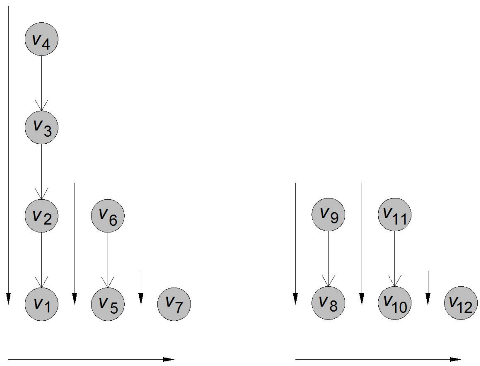
Počet matic J_i příslušných k témuž vlastnímu číslu je roven největšímu z charakteristických čísel patřících k tomuto vlastnímu číslu.

Jedná se tedy skutečně o Jordanův kanonický tvar matice A. Právě uvedená matice má Jordanovy buňky s jedničkami pod diagonálou, často se používá (a my jsme jej také tak dříve zapsali) Jordanův kanonický tvar obsahující Jordanovy buňky s jedničkami nad diagonálou. Rozdíl mezi těmito dvěma způsoby zápisu je minimální, jak nyní ukážeme. Využijeme opět naši konkrétní matici A řádu 12 s vlastními čísly 2 a -3.

Již jsme vypočítali souřadnice dvanácti vektorů, které tvoří Jordanovu bázi $\mathcal{J}$ vektorového prostoru $\mathbb{C}^{12}$. Raději zdůrazněme, že tato báze je uspořádaná. V našem příkladě je

$$\mathcal{J} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}.$$

Jordanovy řetízky příslušné vlastnímu číslu 2 tvoří vektory v_4 až v_1, v_6 až v_5 a samostatný vektor v_7, Jordanovy řetízky příslušné vlastnímu číslu -3 tvoří vektory v_9 až v_8, v_{11} až v_{10} a samostatný vektor v_{12}. Vytvořme nyní novou bázi $\mathcal{J}'$ tak, že provedeme pouze permutaci vektorů v bázi $\mathcal{J}$, přičemž bereme pořadí vektorů v rámci téhož Jordanova řetízku (resp. vektory odpovídající téže Jordanově buňce) v opačném pořadí, sled Jordanových řetízků (resp. Jordanovým buněk) ponecháme, tj. postupujeme zleva doprava:



Takto pozměněná báze je tedy

$$\mathcal{J}' = \left\{ \underbrace{v_4,\, v_3,\, v_2,\, v_1}, \underbrace{v_6,\, v_5}, \underbrace{v_7}, \underbrace{v_9,\, v_8}, \underbrace{v_{11},\, v_{10}}, \underbrace{v_{12}} \right\}.$$

Zdůrazněme, že Jordanovy řetízky se nezměnily (nezměnila se totiž matice A, resp. jí příslušný endomorfismus f), vektor v_4 se i nadále násobením maticí $(A-2E)$ zleva „zobrazí“ na vektor v_3, ten na vektor v_2 atd. Napišme matici $J' = G'^{-1}AG'$ endomorfismu f vzhledem k nové bázi $\mathcal{J}'$ (matice G' je maticí přechodu od báze $\mathcal{J}'$ ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{C}^{12}$). Sestavit matici J' lze i zpaměti, jestliže si uvědomíme, na jakém místě nové báze $\mathcal{J}'$ se nacházejí vektory původní báze $\mathcal{J}$ a také pokud určíme novou pozici obrazů těchto vektorů v endomorfismu f. Nebo lze vektory báze $\mathcal{J}'$ přeznačit, např. $v_4 = v_1'$, $v_3 = v_2'$ atd., neboli

$$\mathcal{J}' = \{v_1', v_2', v_3', v_4', v_5', v_6', v_7', v_8', v_9', v_{10}', v_{11}', v_{12}'\},$$

přepsat vztahy mezi vektory v novém označení

$$\begin{array}{lclclcl}
f(v_1) & = & 2v_1 & = & f(v_4') & = & 2v_4', \\
f(v_2) & = & 2v_2 + v_1 & = & f(v_3') & = & 2v_3' + v_4', \\
f(v_3) & = & 2v_3 + v_2 & = & f(v_2') & = & 2v_2' + v_3', \\
f(v_4) & = & 2v_4 + v_3 & = & f(v_1') & = & 2v_1' + v_2', \\
f(v_5) & = & 2v_5 & = & f(v_6') & = & 2v_6', \\
f(v_6) & = & 2v_6 + v_5 & = & f(v_5') & = & 2v_5' + v_6', \\
f(v_7) & = & 2v_7 & = & f(v_7') & = & 2v_7', \\
 & & & & & & \\
f(v_8) & = & -3v_8 & = & f(v_9') & = & -3v_9', \\
f(v_9) & = & -3v_9 + v_8 & = & f(v_8') & = & -3v_8' + v_9', \\
f(v_{10}) & = & -3v_{10} & = & f(v_{11}') & = & -3'_{11}, \\
f(v_{11}) & = & -3v_{11} + v_{10} & = & f(v_{10}') & = & -3v_{10}' + v_{11}', \\
f(v_{12}) & = & -3v_{12} & = & f(v_{12}') & = & -3v_{12}',
\end{array}$$

a poté je napsání hledané matice J' triviální (na nevyplněných pozicích figurují nuly):

$$J' = \begin{pmatrix}
2 & & & & & & & & & & & \\
1 & 2 & & & & & & & & & & \\
 & 1 & 2 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 2 & & & & & & & & \\
 & & & & 2 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 2 & & & & & & \\
 & & & & & & 2 & & & & & \\
 & & & & & & & -3 & & & & \\
 & & & & & & & 1 & -3 & & & \\
 & & & & & & & & & -3 & & \\
 & & & & & & & & & 1 & -3 & \\
 & & & & & & & & & & & -3
\end{pmatrix}.$$

Dostali jsme tedy druhý z používaných typů Jordanova kanonického tvaru matice A, který je k původnímu Jordanovu tvaru (s jedničkami v linii nad diagonálou) transponovaný, jedničky má v linii pod diagonálou.

24 Věta. *Nechť A je čtvercová komplexní matice řádu n, nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ jsou její navzájem různá vlastní čísla,*

$$\xi(A) = [(\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_{q_1}), (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{q_2}), \ldots, (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{q_u})]$$

je její Segreova charakteristika a

$$\mathcal{J} = \left\{ \underbrace{v_1, \ldots, v_{\iota_1}}, \underbrace{v_{\iota_1+1}, \ldots, v_{\iota_1+\iota_2}}, \ldots, \underbrace{v_{n-\mu_{q_u}+1}, \ldots, v_n} \right\}$$

je Jordanova báze prostoru $\mathbb{C}^n$ příslušná k matici A, uvažujeme-li Jordanův kanonický tvar J, který má Jordanovy buňky tvaru

$$\begin{pmatrix}
\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda
\end{pmatrix}.$$

Potom

$$\mathcal{J}' = \left\{ \underbrace{v_{\iota_1}, \ldots, v_1}, \underbrace{v_{\iota_1+\iota_2}, \ldots, v_{\iota_1+1}}, \ldots, \underbrace{v_n, \ldots, v_{n-\mu_{q_u}+1}} \right\}$$

je Jordanova báze příslušná k matici A, uvažujeme-li Jordanův kanonický tvar J', který má Jordanovy buňky tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Provedeme-li tedy tuto změnu, budou Jordanovy kanonické tvary navzájem transponované.

Provedeme-li permutaci báze $\mathcal{J}$ tak, že ponecháme pořadí vektorů v rámci jednotlivých řetízků, ale změníme pořadí celých skupin vektorů příslušných témuž Jordanovu řetízku (neboli pořadí Jordanových řetízků), dostaneme Jordanův kanonický tvar J'' matice A s pozměněným pořadím Jordanových buněk. Nové pořadí Jordanových buněk přesně odpovídá změnám v pořadí skupin vektorů.

Zcela analogicky výše uvedenému postupu bychom odvodili, že například permutací vektorů báze

$$\mathcal{J} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$$

našeho konkrétního příkladu na bázi

$$\mathcal{J}'' = \left\{ \underbrace{v_5, v_6}, \underbrace{v_1, v_2, v_3, v_4}, \underbrace{v_7}, \underbrace{v_{12}}, \underbrace{v_{10}, v_{11}}, \underbrace{v_8, v_9} \right\}$$

získáme odpovídající Jordanův kanonický tvar J'' matice A v následující podobě (na nevyplněných pozicích jsou opět nuly):

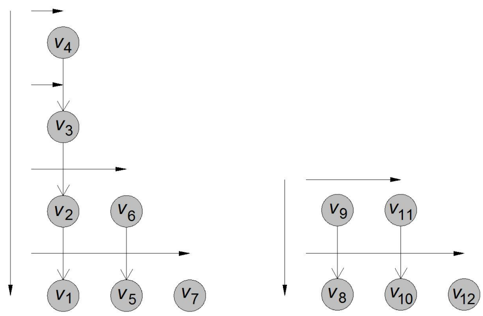
$$J'' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & & & & & & \\ & & & 2 & 1 & & & & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & & & & & \\ & & & & & 2 & & & & & & \\ & & & & & & 2 & & & & & \\ & & & & & & & -3 & & & & \\ & & & & & & & & -3 & 1 & & \\ & & & & & & & & & -3 & & \\ & & & & & & & & & & -3 & 1 \\ & & & & & & & & & & & -3 \end{pmatrix}.$$

V dalším textu, nebude-li řečeno jinak, budeme uvažovat tvar J s jedničkami nad diagonálou a příslušnou (uspořádanou) Jordanovu bázi značit $\mathcal{J}$.

Sestrojme nyní jinou permutaci Jordanovy báze

$$\mathcal{J} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}.$$

Vektory v Jordanových řetízcích budeme uvažovat v takovém pořadí, v jakém se vyskytují ve Ferrersově diagramu v řádcích, a to shora dolů:



Nová báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^{12}$, kterou označíme $\mathcal{W}'$, má tvar

$$\mathcal{W}' = \{v_4, v_3, v_2, v_6, v_1, v_5, v_7, v_9, v_{11}, v_8, v_{10}, v_{12}\}.$$

Napišme opět matici endomorfismu f, tentokrát vzhledem k bázi $\mathcal{W}'$. Pokud přeznačíme vektory této báze následujícím způsobem, tj.

$$\mathcal{W}' = \{w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, w'_5, w'_6, w'_7, w'_8, w'_9, w'_{10}, w'_{11}, w'_{12}\},$$

platí mezi vektory tyto vztahy:

$$\begin{array}{lclclcl}
f(v_1) & = & 2v_1 & = & f(w'_5) & = & 2w'_5, \\
f(v_2) & = & 2v_2 + v_1 & = & f(w'_3) & = & 2w'_3 + w'_5, \\
f(v_3) & = & 2v_3 + v_2 & = & f(w'_2) & = & 2w'_2 + w'_3, \\
f(v_4) & = & 2v_4 + v_3 & = & f(w'_1) & = & 2w'_1 + w'_2, \\
f(v_5) & = & 2v_5 & = & f(w'_6) & = & 2w'_6, \\
f(v_6) & = & 2v_6 + v_5 & = & f(w'_4) & = & 2w'_4 + w'_6, \\
f(v_7) & = & 2v_7 & = & f(w'_7) & = & 2w'_7, \\
f(v_8) & = & -3v_8 & = & f(w'_{10}) & = & -3w'_{10} \\
f(v_9) & = & -3v_9 + v_8 & = & f(w'_8) & = & -3w'_8 + w'_{10}, \\
f(v_{10}) & = & -3v_{10} & = & f(w'_{11}) & = & -3w'_{11}, \\
f(v_{11}) & = & -3v_{11}+v_{10} & = & f(w'_9) & = & -3w'_9+w'_{11}, \\
f(v_{12}) & = & -3v_{12} & = & f(w'_{12}) & = & -3w'_{12},
\end{array}$$

a pomocí nich snadno získáme „nový“ kanonický tvar matice A:

$$
W' = \begin{pmatrix}
\boxed{2} & & & & & & & & & & & \\
1 & 2 & & & & & & & & & & \\
 & 1 & 2 & & & & & & & & & \\
 & & & 2 & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & & & & & \\
 & & & & & & 2 & & & & & \\
 & & & & & & & -3 & & & & \\
 & & & & & & & & -3 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & -3 & & \\
 & & & & & & & & 1 & & -3 & \\
 & & & & & & & & & & & -3
\end{pmatrix}.
$$

Přesně k této matici jsme dospěli, když jsme sestrojovali *typický tvar* matice A rekurentním způsobem, který představil v 19. století Eduard Weyr. Tento tvar budeme nazývat Weyrův kanonický tvar matice, v dnešní době se však spíše používá v mírně pozměněné podobě:

Symbolem ${}_{i\times j}E$, $i \geq j$, označme matici typu $i \times j$, jejíž prvních j řádků vytváří jednotkovou matici a zbývajících $(i-j)$ řádků jsou nulové vektory.

$$
{}_{i\times j}E = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 1 \\
0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0
\end{pmatrix}
\begin{matrix}
\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\.\\0\end{matrix}}\right\} j \\
\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\.\\0\end{matrix}}\right\} i-j
\end{matrix}
$$

25 Definice. Nechť A je čtvercová komplexní matice, λ je její vlastní číslo a $\eta(\lambda) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$ je Weyrova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu λ. Čtvercová skalární matice, jejíž prvky na diagonále jsou λ a jejíž řád je roven některému z charakteristických čísel η_i, se nazývá *Weyrova buňka matice A příslušná vlastnímu číslu λ*. Čtvercová bloková matice, jejíž diagonální bloky jsou všechny Weyrovy buňky příslušné vlastnímu číslu λ po řadě řádu $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$, blokové matice v linii nad diagonálou jsou matice ${}_{\eta_i\times\eta_{i+1}}E$, $i = 1, 2, \ldots, t-1$, a ostatní bloky jsou nulové matice, se nazývá *Weyrův blok příslušný vlastnímu číslu λ*.

Řád Weyrova bloku příslušného vlastnímu číslu λ je roven násobnosti tohoto vlastního čísla.

$$
\begin{pmatrix}
\begin{matrix}\lambda&0&\dots&0\\0&\lambda&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\dots&\lambda\end{matrix} & {}_{\eta_1\times\eta_2}E & O & \dots & O \\
O & \begin{matrix}\lambda&0&\dots&0\\0&\lambda&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\dots&\lambda\end{matrix} & {}_{\eta_2\times\eta_3}E & \dots & O \\
O & O & \begin{matrix}\lambda&0&\dots&0\\0&\lambda&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\dots&\lambda\end{matrix} & \ddots & O \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & {}_{\eta_{t-1}\times\eta_t}E \\
O & O & O & \dots & \begin{matrix}\lambda&0&\dots&0\\0&\lambda&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\dots&\lambda\end{matrix}
\end{pmatrix}
$$

26 Definice. Nechť A je čtvercová komplexní matice. Blokově diagonální matice sestavená z Weyrových bloků příslušných všem vlastním číslům matice A se nazývá *Weyrův kanonický tvar matice* A.

V našem příkladě je Weyrův kanonický tvar následující (nulové prvky jsou opět vynechány):

$$
W = \begin{pmatrix}
2 & & & 1 & & & & & & & & \\
& 2 & & & 1 & & & & & & & \\
& & 2 & & & & & & & & & \\
& & & 2 & & 1 & & & & & & \\
& & & & 2 & & & & & & & \\
& & & & & 2 & 1 & & & & & \\
& & & & & & 2 & & & & & \\
& & & & & & & -3 & & & 1 & \\
& & & & & & & & -3 & & & 1 \\
& & & & & & & & & -3 & & \\
& & & & & & & & & & -3 & \\
& & & & & & & & & & & -3
\end{pmatrix}.
$$

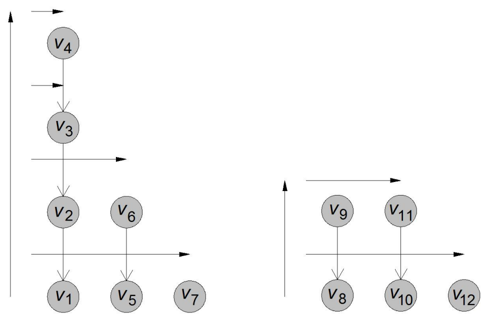
Pozastavme se ještě u dvou speciálních případů. Pokud má matice n-tého řádu n různých vlastních čísel, je Weyrovým kanonickým tvarem diagonální matice s n různými prvky na hlavní diagonále. Je-li pro každé vlastní číslo λ

matice A nulita matice $(A - \lambda E)$ rovna jeho násobnosti, má každý Weyrův blok jedinou Weyrovu buňku (Weyrův blok a Weyrova buňka příslušné témuž vlastnímu číslu matice A splývají) a Weyrův kanonický tvar je opět diagonální maticí, vlastní číslo λ se na diagonále vyskytuje tolikrát, kolik je jeho násobnost.

27 Souvislosti mezi Jordanovým a Weyrovým kanonickým tvarem. Naskýtá se přirozeně otázka, zda i pro Weyrův kanonický tvar existuje báze $\mathcal{W}$ vektorového prostoru $\mathbb{C}^{12}$ taková, že W je maticí endomorfismu f vzhledem k této bázi. Odpověď je kladná. Na následujícím postupu lze vidět blízkou a elegantní propojenost Jordanova a Weyrova kanonického tvaru. K získání báze $\mathcal{W}$ opět postačí pouze permutovat prvky Jordanovy báze

$$\mathcal{J} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}\,;$$

vektory nyní bereme po „řádcích“ Jordanových řetízků, a to odspodu nahoru:



Hledaná báze je

$$\mathcal{W} = \{v_1, v_5, v_7, v_2, v_6, v_3, v_4, v_8, v_{10}, v_{12}, v_9, v_{11}\}\,.$$

Pokud vektory báze přeznačíme na

$$\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}, w_{11}, w_{12}\}\,,$$

platí následující vztahy, z nichž je výše uvedený tvar W matice A zřejmý:

$$\begin{array}{lclclcl}
f(v_1) & = & 2v_1 & = & f(w_1) & = & 2w_1, \\
f(v_2) & = & 2v_2 + v_1 & = & f(w_4) & = & 2w_4 + w_1, \\
f(v_3) & = & 2v_3 + v_2 & = & f(w_6) & = & 2w_6 + w_4, \\
f(v_4) & = & 2v_4 + v_3 & = & f(w_7) & = & 2w_7 + w_6, \\
f(v_5) & = & 2v_5 & = & f(w_2) & = & 2w_2, \\
f(v_6) & = & 2v_6 + v_5 & = & f(w_5) & = & 2w_5 + w_2, \\
f(v_7) & = & 2v_7 & = & f(w_3) & = & 2w_3, \\
 & & & & & & \\
f(v_8) & = & -3v_8 & = & f(w_8) & = & -3w_8, \\
f(v_9) & = & -3v_9 + v_8 & = & f(w_{11}) & = & -3w_{11} + w_8, \\
f(v_{10}) & = & -3v_{10} & = & f(w_9) & = & -3w_9, \\
f(v_{11}) & = & -3v_{11}+v_{10} & = & f(w_{12}) & = & -3w_{12}+w_9, \\
f(v_{12}) & = & -3v_{12} & = & f(w_{10}) & = & -3w_{10}.
\end{array}$$

Z dosud vyřčeného triviálně plynou tvrzení následující věty:

28 Věta. *Ke každé čtvercové matici nad tělesem komplexních čísel existuje Weyrův kanonický tvar. Je určen jednoznačně a je dané maticí podobný.*

29 Poznámka. Opět můžeme pracovat s mírně pozměněnými verzemi Weyrova kanonického tvaru (viz např. originální Weyrův *typický tvar*). Uvědomme si však, že nelze přehazovat Weyrovy buňky, neboť potom by pro matice ${}_{i\times j}E$ nemusela být zachována podmínka $i \geq j$. Přemisťovat lze pouze celé Weyrovy bloky příslušné různým vlastním číslům. Jednoznačnost platí až na pořadí Weyrových bloků. V dalším textu, nebude-li řečeno jinak, budeme pod termínem Weyrův kanonický tvar matice rozumět tvar z výše uvedené definice, nikoli originální tvar Eduarda Weyra.

30 Definice. Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n, W je její Weyrův kanonický tvar. Potom uspořádaná množina vektorů, které tvoří sloupce matice H ze vztahu $W = H^{-1}AH$, se nazývá *Weyrova báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^n$ příslušná k matici A.*

Vztah duality tedy platí nejen mezi Weyrovou a Segreovou charakteristikou, ale i mezi Weyrovou a Jordanovou bází, a tedy i mezi Weyrovým a Jordanovým kanonickým tvarem téže matice. Mezi oběma tvary lze snadno přecházet. Uveďme na jednom místě vizuální srovnání obou kanonických tvarů na výše uvedené matici A řádu 12 (přesněji kvůli úspoře místa jen na části kanonických tvarů příslušné vlastnímu číslu 2), znázorněny jsou i další dvě zmíněné verze obou kanonických tvarů. Konkrétně se jedná o Jordanův kanonický tvar J s jedničkami nad diagonálou, Jordanův kanonický tvar J' s jedničkami pod diagonálou, Weyrův kanonický tvar W s nenulovými bloky nad diagonálou a originální Weyrův kanonický tvar W', který má nenulové bloky pod diagonálou.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix}, \quad J' = \begin{pmatrix} 2 & & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & \\ & 1 & 2 & & & & \\ & & 1 & 2 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & 1 & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix},$$

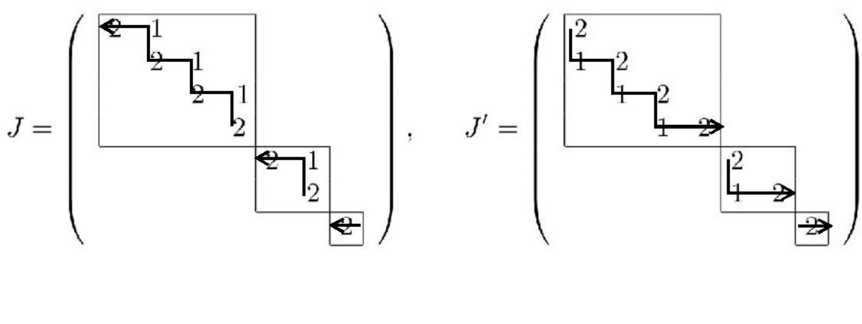
$$W = \begin{pmatrix} 2 & & & 1 & & & \\ & 2 & & & 1 & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & 1 & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix}, \quad W' = \begin{pmatrix} 2 & & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & \\ & 1 & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & 1 & & 2 & & \\ & & & 1 & & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

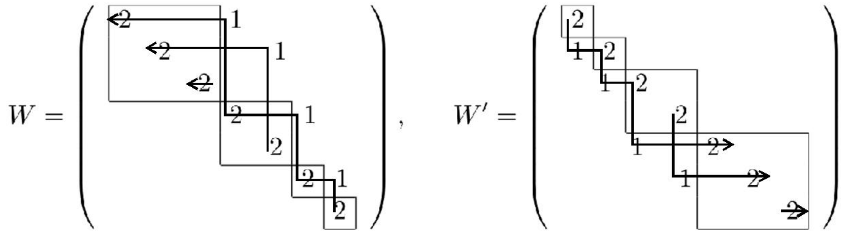
Známe-li Jordanův, resp. Weyrův kanonický tvar matice A a chceme-li zjistit Weyrův, resp. Jordanův kanonický tvar, určíme pouhým pohledem (dle velikosti Jordanových, resp. Weyrových buněk) Segreovu, resp. Weyrovu charakteristiku matice A, dále například pomocí Ferrersových diagramů zjistíme k ní duální charakteristiku (pro jednotlivá vlastní čísla), tj. Weyrovu, resp. Segreovu charakteristiku, a pomocí ní snadno napíšeme Weyrův, resp. Jordanův kanonický tvar matice A.

Můžeme použít i jinou metodu – přechod přes Weyrovu a Jordanovu bázi, tedy způsob, který jsme několikrát demonstrovali, např. při přechodu od Jordanova tvaru na oba typy Weyrova kanonického tvaru. Je-li známým kanonickým tvarem tvar Weyrův, postupujeme zcela analogicky. Princip si krátce shrneme: uvažujme bázi vektorového prostoru a obrazy jejích vektorů což jsou sloupce jednoho z kanonických tvarů (který je maticí endomorfismu f vzhledem k uvažované bázi), vyjádříme vztahy mezi těmito vektory (tj. určíme, který vektor je obrazem či vzorem jiného vektoru při endomorfismu $(f-\lambda\cdot 1_V)$), sestrojíme Jordanovy řetízky, pozměníme pořadí prvků báze daným způsobem a sestrojíme matici endomorfismu f vzhledem k nově uspořádané bázi.

Při hledání vztahů mezi vektory a sestrojování řetízků si můžeme pomoci následující, velmi triviální pomůckou (popíšeme ji pro jednoduchost opět pro část kanonického tvaru příslušnou jedinému vlastnímu číslu, obdobně postupujeme u dalších vlastních čísel), vyhneme se tak zdlouhavému zapisování několika rovností:

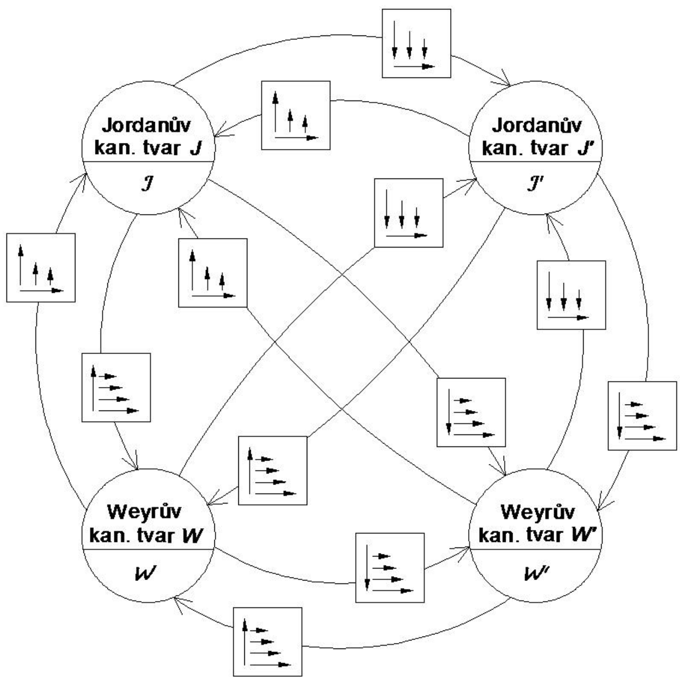
Známe-li kanonický tvar matice s jedničkami pod, resp. nad diagonálou (tj. tvar J', W', resp. J, W), uvažujeme první, resp. poslední prvek hlavní diagonály, v němž započne pomyslná šipka. Posuneme se v témže sloupci dolů, resp. nahoru na místo, kde je prvek 1, odtud se vrátíme po řádku doprava, resp. doleva na hlavní diagonálu a postup opakujeme dokud nejsme ve sloupci bez prvku 1. Poté vezmeme první dosud neprojitý prvek hlavní diagonály odshora, resp. odspodu a algoritmus zopakujeme. Lomené šipky určují pořadí sloupců (vektorů báze), které se nacházejí v témže Jordanově řetízku, směr šipky potom pořadí vektorů v řetízku (sloupcový vektor, v němž šipka začíná, je vektorem s největší výší, sloupcový vektor, v němž šipka končí, je vlastním vektorem). Nakonec řetízky odpovídající šipkám seřadíme podle délky.



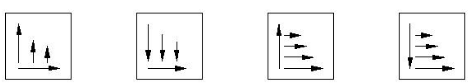


V našem konkrétním příkladě se např. u Weyrova kanonického tvaru W zobrazí při násobení maticí $(A - 2E)$ v pořadí 7. vektor příslušné uspořádáné báze $\mathcal{W}$ na 6. vektor, ten se zobrazí na 4. vektor a ten na 1. vektor; 5. vektor se zobrazí na 2. vektor, 3. vektor je vlastní vektor. Stejně postupujeme pro další typy kanonických tvarů.

Při permutování prvků bází nám může pomoci následující obrázek. Na něm jsou přehledně uvedeny způsoby permutací bází při přechodu mezi kanonickými tvary.



Jsou-li Jordanovy řetízky řazeny (pro jednotlivá vlastní čísla) zleva doprava od nejdelších po nejkratší, potom symboly



schématicky značí uspořádávání vektorů v Jordanových řetízcích při konstrukci příslušné báze. Jedná se po řadě o toto řazení:

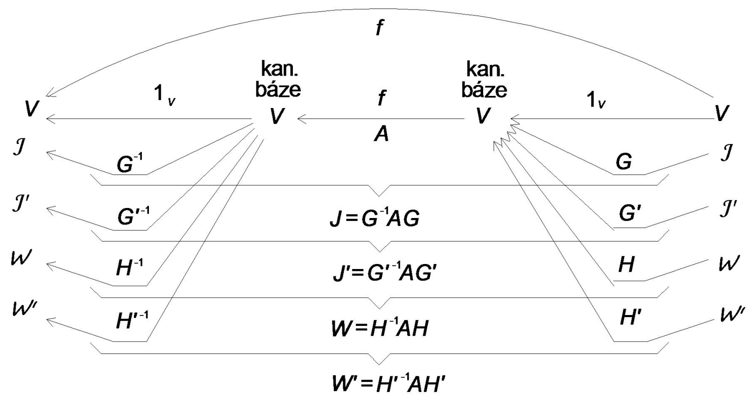
• vektory bereme po jednotlivých řetízcích, v rámci téhož řetízku odspodu nahoru, řetízky zleva doprava,

• vektory bereme po jednotlivých řetízcích, v rámci téhož řetízku shora dolů, řetízky zleva doprava,

• vektory bereme po „řádcích“ řetízků (tj. po vektorech o stejné výši pro jednotlivá vlastní čísla), v rámci téhož „řádku“ zleva doprava, „řádky“ odspodu nahoru,

• vektory bereme po „řádcích“ řetízků (tj. po vektorech o stejné výši pro jednotlivá vlastní čísla), v rámci téhož „řádku“ zleva doprava, „řádky“ shora dolů.

Další, třetí možností přechodu mezi Jordanovým a Weyrovým kanonickým tvarem je metoda využívající skutečnosti, že J, J', W, W' jsou matice navzájem podobné, jsou maticemi téhož endomorfismu f, ale vzhledem k různým bázím vektorového prostoru $V = \mathbb{C}^n$.



Uvažujme permutační matici P, tj. matici, která má v každém řádku a v každém sloupci právě jednou prvek 1 a na ostatních místech nuly. Nechť je její řád totožný s řádem dané matice X řádu n. Násobením matice X permutační maticí P zprava se pouze přemění sloupce matice X, nové pořadí sloupců je určeno rozmístěním jedniček v permutační matici P.[122] Analogicky násobení matice X permutační maticí P zleva se pouze permutují řádky matice. Jelikož je známo, že pro permutační matici P platí $P^{-1} = P^T$, odpovídá součinu $P^{-1}XP = P^TXP$ (nebo též $PXP^{-1} = PXP^T$) simultánní permutace řádků a sloupců matice X (vyměníme-li pořadí k-tého a m-tého sloupce, vyměníme i pořadí k-tého a m-tého řádku a naopak).

Uvažujme dvojici kanonických tvarů matice A, Jordanův kanonický tvar J s odpovídající transformační maticí G a Weyrův kanonický tvar W s odpoví-

[122] Sloupce budou seřazeny v pořadí, které je shodné s pořadím řádků permutační matice, v nichž je prvek 1 v 1., 2. …, n-tém sloupci.

dající transformační maticí H, tj.

$$J = G^{-1}AG, \qquad W = H^{-1}AH.$$

Proto

$$A = GJG^{-1}, \qquad A = HWH^{-1},$$

z čehož plyne rovnost

$$GJG^{-1} = HWH^{-1}.$$

Protože matice G a H se liší pouze pořadím sloupců, je jedna součinem druhé s permutační maticí zprava. Nechť např. $H = GP$. Potom postupně dostaneme

$$\begin{aligned} GJG^{-1} &= GPW(GP)^{-1}, \\ GJG^{-1} &= GPWP^{-1}G^{-1}, \\ J &= PWP^{-1}. \end{aligned}$$

Zcela stejným způsobem bychom dokázali obdobné vztahy mezi všemi různými dvojicemi kanonických tvarů J, J', W, W'. Mezi všemi kanonickými tvary lze tedy přecházet pouhými simultánními permutacemi sloupců a řádků, tyto permutace se přitom přesně shodují s permutacemi vektorů bází $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}'$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}'$ (a ty snadno zjistíme např. pomocí výše uvedeného obrázku).

Ukážeme postup opět na našem konkrétním příkladě. Nechť například známe Weyrův kanonický tvar W matice A, jemu příslušnou bázi

$$\mathcal{W} = \{v_1, v_5, v_7, v_2, v_6, v_3, v_4, v_8, v_{10}, v_{12}, v_9, v_{11}\}$$

a nechť jsme nějakým způsobem určili, že Jordanova báze je

$$\mathcal{J} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}.$$

Vektory báze $\mathcal{J}$ jsou po řadě 1., 4., 6., 7., 2., 5., 3., 8., 11., 9., 12. a 10. vektorem báze W, napíšeme tedy nejprve[123] například matici, jejíž řádky jsou 1., 4., 6., 7., 2., 5., 3., 8., 11., 9., 12. a 10. řádkem Weyrova kanonického tvaru

$$W = \begin{pmatrix}
2 & & & 1 & & & & & & & & \\
& 2 & & & 1 & & & & & & & \\
& & 2 & & & & & & & & & \\
& & & 2 & & 1 & & & & & & \\
& & & & 2 & & & & & & & \\
& & & & & 2 & 1 & & & & & \\
& & & & & & 2 & & & & & \\
& & & & & & & -3 & & & 1 & \\
& & & & & & & & -3 & & & 1 \\
& & & & & & & & & -3 & & \\
& & & & & & & & & & -3 & \\
& & & & & & & & & & & -3
\end{pmatrix},$$

[123] Protože je násobení matic asociativní, je lhostejné, zda nejprve pracujeme s řádky matice (násobení permutační maticí zleva), nebo se sloupci matice (násobení permutační maticí zprava).

tj. matici

$$\begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Nakonec sestavíme matici, jejíž sloupce jsou 1., 4., 6., 7., 2., 5., 3., 8., 11., 9., 12. a 10. sloupcem právě sestavené matice, tedy matici

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|c|cc|cc|c}
2 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & 2 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & 2 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 2 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 2 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & 2 & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & -3 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & -3 & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & -3 & 1 & \\
 & & & & & & & & & & -3 & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & -3
\end{array}\right),$$

což je Jordanův kanonický tvar J matice A.

Vidíme, že problematika souvislostí Jordanova a Weyrova kanonického tvaru je půvabná, poutavá a lze na ni nahlížet z více pohledů, pomocí aparátu několika oblastí lineární algebry.

31 Přechod od obecného vlastního čísla λ k vlastnímu číslu 0. Celý výklad mohl být veden modifikovaným způsobem,[124] který je založen na následující větě.

32 Věta. *Nechť A je čtvercová komplexní matice. Je-li λ_0 jejím s-násobným vlastním číslem, je 0 s-násobným vlastním číslem matice $(A-\lambda_0 E)$. Jordanovy řetízky matice A příslušné k vlastnímu číslu λ_0 se shodují s Jordanovými řetízky matice $(A-\lambda_0 E)$ příslušnými k vlastnímu číslu 0.*

[124] Viz např. [We12], [Bo8] či velké množství zahraničních článků, které jsou uvedeny v části 5.3.

Jestliže má matice A s-násobné vlastní číslo λ_0, je možno její charakteristický polynom $\det(A-\lambda E)$ napsat ve tvaru

$$\det(A-\lambda E)=(\lambda-\lambda_0)^s\cdot g(\lambda),$$

kde $g(\lambda_0)\neq 0$. Charakteristický polynom matice $(A-\lambda_0 E)$ má tedy tvar

$$\det\left((A-\lambda_0 E)-\lambda E\right)=\det\left(A-(\lambda+\lambda_0)E\right)=$$

$$=\left((\lambda+\lambda_0)-\lambda_0\right)^s\cdot g(\lambda+\lambda_0)=\lambda^s\cdot g'(\lambda),$$

kde $g'(0)=g(\lambda_0)\neq 0$. Matice $(A-\lambda_0 E)$ má tedy s-násobné vlastní číslo 0.

K tomuto poznatku lze dospět i jiným způsobem. Rovnosti $J=B^{-1}AB$ a $J-\lambda_0 E=B^{-1}(A-\lambda_0 E)B$ jsou zřejmě ekvivalentní. Z toho plyne, že J je Jordanův kanonický tvar matice A právě tehdy, je-li $(J-\lambda_0 E)$ Jordanův kanonický tvar matice $(A-\lambda_0 E)$. Tedy λ_0 je s-násobným vlastním číslem matice A právě tehdy, je-li λ_0 právě s-krát na diagonále matice J. To nastane právě tehdy, je-li 0 právě s-krát na diagonále matice $(J-\lambda_0 E)$, tj. právě tehdy, je-li 0 s-násobným vlastním číslem matice $(A-\lambda_0 E)$. Matice A a $(A-\lambda_0 E)$ se na Jordanův kanonický tvar J, resp. $J-\lambda_0 E$ transformují stejnou maticí B.

Uvažujme Jordanův řetízek $v_1, v_2, \ldots, v_t$ matice A příslušný k vlastnímu číslu λ_0. Je tedy

$$\begin{array}{lcl} Av_1=\lambda_0 v_1+v_2, & \text{což odpovídá vztahům} & (A-\lambda_0 E)v_1=v_2,\\ Av_2=\lambda_0 v_2+v_3, & & (A-\lambda_0 E)v_2=v_3,\\ \dots\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\\ Av_t=\lambda_0 v_t, & & (A-\lambda_0 E)v_t=o. \end{array}$$

Označme nyní $X=A-\lambda_0 E$. Potom je

$$\begin{array}{lcl} Xv_1=v_2=0v_1+v_2, & \text{neboli} & (X-0E)v_1=v_2,\\ Xv_2=v_3=0v_2+v_3, & & (X-0E)v_2=v_3,\\ \dots\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\\ Xv_t=o=0v_t, & & (X-0E)v_t=o. \end{array}$$

Jordanovy řetízky matice A příslušné k vlastnímu číslu λ_0 jsou tedy shodné s Jordanovými řetízky matice $(A-\lambda_0 E)$ příslušnými k vlastnímu číslu 0.

Uvažujme opět výše uvedenou matici A řádu 12 s vlastními čísly 2 a -3. Jordanův kanonický tvar $(J-2E)$ matice $(A-2E)$ je

$$J-2E=\begin{pmatrix}
0&1&&&&&&&&&&\\
&0&1&&&&&&&&&\\
&&0&1&&&&&&&&\\
&&&0&&&&&&&&\\
&&&&0&1&&&&&&\\
&&&&&0&&&&&&\\
&&&&&&0&&&&&\\
&&&&&&&-5&1&&&\\
&&&&&&&&-5&&&\\
&&&&&&&&&-5&1&\\
&&&&&&&&&&-5&\\
&&&&&&&&&&&-5
\end{pmatrix};$$

odpovídající endomorfismus $g = f - 2 \cdot 1_V$ se chová takto:

$$\begin{array}{rcl}
g(v_1) &=& (f-2\cdot 1_V)(v_1) &=& o,\\
g(v_2) &=& (f-2\cdot 1_V)(v_2) &=& v_1,\\
g(v_3) &=& (f-2\cdot 1_V)(v_3) &=& v_2,\\
g(v_4) &=& (f-2\cdot 1_V)(v_4) &=& v_3,\\
g(v_5) &=& (f-2\cdot 1_V)(v_5) &=& o,\\
g(v_6) &=& (f-2\cdot 1_V)(v_6) &=& v_5,\\
g(v_7) &=& (f-2\cdot 1_V)(v_7) &=& o.
\end{array}$$

Jordanovy řetízky v_4, v_3, v_2, v_1; v_6, v_5, v_7 zůstaly zachovány.

Pro zajímavost se podívejme na obrazy ostatních vektorů. Zde se Jordanovy řetízky porušily.

$$\begin{array}{rcl}
g(v_8) &=& (f-2\cdot 1_V)(v_8) &=& -5v_8,\\
g(v_9) &=& (f-2\cdot 1_V)(v_9) &=& -5v_9+v_8,\\
g(v_{10}) &=& (f-2\cdot 1_V)(v_{10}) &=& -5v_{10},\\
g(v_{11}) &=& (f-2\cdot 1_V)(v_{11}) &=& -5v_{11}+v_{10},\\
g(v_{12}) &=& (f-2\cdot 1_V)(v_{12}) &=& -5v_{12}.
\end{array}$$

Analogicky postupujeme u matice

$$J+3E=\begin{pmatrix}
5&1&&&&&&&&&&\\
&5&1&&&&&&&&&\\
&&5&1&&&&&&&&\\
&&&5&&&&&&&&\\
&&&&5&1&&&&&&\\
&&&&&5&&&&&&\\
&&&&&&5&&&&&\\
&&&&&&&0&1&&&\\
&&&&&&&&0&&&\\
&&&&&&&&&0&1&\\
&&&&&&&&&&0&\\
&&&&&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

a endomorfismu $h = f + 3 \cdot 1_V$ příslušného matici $(A + 3E)$:

$$\begin{array}{lclcl}
h(v_1) & = & (f + 3 \cdot 1_V)(v_1) & = & 5v_1, \\
h(v_2) & = & (f + 3 \cdot 1_V)(v_2) & = & 5v_2 + v_1, \\
h(v_3) & = & (f + 3 \cdot 1_V)(v_3) & = & 5v_3 + v_2, \\
h(v_4) & = & (f + 3 \cdot 1_V)(v_4) & = & 5v_4 + v_3, \\
h(v_5) & = & (f + 3 \cdot 1_V)(v_5) & = & 5v_5, \\
h(v_6) & = & (f + 3 \cdot 1_V)(v_6) & = & 5v_6 + v_5, \\
h(v_7) & = & (f + 3 \cdot 1_V)(v_7) & = & 5v_7, \\
 & & & & \\
h(v_8) & = & (f + 3 \cdot 1_V)(v_8) & = & o, \\
h(v_9) & = & (f + 3 \cdot 1_V)(v_9) & = & v_8, \\
h(v_{10}) & = & (f + 3 \cdot 1_V)(v_{10}) & = & o, \\
h(v_{11}) & = & (f + 3 \cdot 1_V)(v_{11}) & = & v_{10}, \\
h(v_{12}) & = & (f + 3 \cdot 1_V)(v_{12}) & = & o.
\end{array}$$

Jordanovy řetízky v_9, v_8; v_{11}, v_{10}; v_{12} se zachovaly. Předchozí řetízky, které odpovídají vlastnímu číslu 2, se změnily.

Na základě všech těchto shod lze problematiku Weyrovy teorie vyložit na matici A, o níž předpokládáme, že má s-násobné vlastní číslo 0, kde $s \geq 1$. Pro tuto matici se definují potřebné pojmy (např. výše vektoru $v \in V$ jako nejmenší t, pro které $A^t v^T = o^T$ apod.), v jejichž názvech chybí slova „příslušný vlastnímu číslu λ“, a teprve na závěr se pojmy přenesou na obecná vlastní čísla: předpokládá se libovolná čtvercová matice A, její navzájem různá vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ o násobnostech $s_1, s_2, \ldots, s_u$. Potom matice $A - \lambda_1 E$ má s_1-násobné vlastní číslo 0, matice $A - \lambda_2 E$ má s_2-násobné vlastní číslo 0 atd., čímž jsou definované pojmy zobecněny a do termínů se přidají slova „příslušný vlastnímu číslu λ_1, λ_2 atd.“ Místo vyšetřování matice A s vlastními čísly $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ se studují pouze bloky matic $A - \lambda_1 E$, $A - \lambda_2 E$, …, $A - \lambda_u E$, které odpovídají vlastnímu číslu 0.[125]

[125] Více je tento postup naznačen v části 4.2 *Maticový počet a Otakar Borůvka*, zájemce o bližší informace proto odkazujeme na další část disertační práce. Tento postup byl použit i v zahraničí při studiu souvislosti Weyrovy teorie a teorie grafů – viz část 5.4 *Charakteristiky teorie grafů – odborná část.*

3 Ojedinělé práce o maticích po roce 1900

Po zveřejnění Weyrových významných výsledků nastalo v českých zemích čtyřicet let trvající období, v němž nebyly podstatné texty z teorie matic psány. Publikovány byly jen práce psané stále řečí teorie determinantů, případně řečí teorie forem či substitucí.[126] Vzhledem k úzké propojenosti těchto disciplín s teorií matic se poznatky maticového počtu v těchto pracích okrajově také vyskytují. Máme na mysli především články, které publikovali Karel Petr (1868–1950), Václav Simandl (1887–1918), Václav Hruška (1888–1954), Jaroslav Jarušek (1889–?) či Karel Rössler.

Dlouhou etapu, v níž u nás nebyly publikovány významnější texty, které by se podrobněji věnovaly teorii matic, ukončil ve třicátých letech 20. století Weyrův žák Bohumil Bydžovský (1880–1969).

3.1 Maticový počet v pracích Karla Petra

- *Několik poznámek o determinantech* [Pe4], 1906, maď. 1906, něm. 1908
- *Die symmetrischen Zahlensysteme und der Satz von Sturm* [Pe5], 1906
- *O definici determinantu* [Pe6], 1931
- *O racionálném kanonickém tvaru lineární substituce* [Pe7], 1940
- *O Weyrově činnosti v math. analysi a algebře* [Pe2], 1905

Po smrti Františka Josefa Studničky a Eduarda Weyra, dvou významných osobností české matematické komunity druhé poloviny 19. století, začal v roce 1903 vést přednášky z matematiky na filozofické fakultě české univerzity Karel Petr.[127]

Dvě jeho práce týkající se teorie determinantů nalezly odezvu v cizojazyčné literatuře. Jedná se o články z roku 1906 nazvané *Několik poznámek o determinantech* a *Die symmetrischen Zahlensysteme und der Satz von Sturm*. První z nich je zmíněn jak v rozsáhlé Wedderburnově bibliografii, která je součástí jeho monografie *Lectures on Matrices* z roku 1934, tak v historickém pře-

[126] Přechod matematické komunity od teorie determinantů, bilineárních forem a substitucí k teorii matic je popsán v 1. kapitole.

[127] Karel Petr byl posluchačem matematiky a fyziky na české univerzitě, deset let učil na středních školách. Roku 1902 se habilitoval na české vysoké škole technické v Brně, v roce 1903 byla jeho habilitace přenesena na českou univerzitu v Praze. Téhož roku se zde stal mimořádným a roku 1908 řádným profesorem.

Jeho odborná činnost zahrnuje teorii čísel, teorii algebraických forem, teorii determinantů, numerické metody i matematickou analýzu, kterou sepsal do rozsáhlých učebnic.

Karel Petr byl děkanem přírodovědecké fakulty, rektorem Karlovy univerzity, aktivním členem Jednoty a redaktorem matematické části Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Více informací o životě Karla Petra viz např. článek Františka Nušla (1867–1951) a Miloše Kösslera (1884–1961) *Karel Petr* [NK1] nebo rigorózní práce Zdeňky Crkalové *Život a dílo Karla Petra* [Ck1], která byla obhájena v roce 2000 na MFF UK v Praze.

Shnutí odborné práce Karla Petra z období přibližně dvaceti posledních let jeho činnosti, které bylo napsáno ještě v době jeho života, čtenář nalezne v článcích Vladimíra Kořínka (1899–1981) *Stručný přehled vědeckých prací profesora Karla Petra v desítiletí 1928–1938* [Ki1] a *Stručný přehled vědeckých prací profesora Karla Petra v desítiletí 1938–1948* [Ki2].

hledu Thomase Muira *Contributions to the History of Determinants 1900–1920* z roku 1930. Tato Petrova práce byla uveřejněna ještě téhož roku v maďarštině s titulem *Néhány megjegyzés a determinánsok elmeletéhez* a o dva roky později v němčině pod názvem *Einige Bemerkungen über die Determinanten.*[128] Podotkněme ještě, že Karel Petr v textu pojem matice na několika místech použil, ale nikde jej nedefinoval. Druhá z Petrových publikací *Die symmetrischen Zahlensysteme und der Satz von Sturm* je rovněž zmíněna v knize Thomase Muira. Upoutala rovněž pozornost Georga Ferdinanda Frobenia (1849–1917), jednoho z nejvýznamnějších matematiků té doby, který na ni navázal v témže roce článkem *Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen II* [Fr10], v němž se na českého matematika několikrát odvolal.[129]

Slovo matice nalézáme rovněž v Petrově článku *O definici determinantu* z roku 1931. Z následující citace lze vyčíst, že i pro matematiky, kteří se v českých zemích zabývali spíše determinanty než maticemi, začalo „již" být na začátku třicátých let 20. století přirozené definovat determinant pomocí matice, a kopírovali tak světový vývoj. K použité terminologii poznamenejme, že *kvadratickou maticí* Karel Petr rozuměl matici čtvercovou.

Nejběžnější definicí determinantu – jakožto funkce n^2 proměnných sestavených v kvadratickou matici – jest, že se podá jeho explicitní vyjádření pomocí těchto proměnných. ([Pe6], str. 14)

Touto zmínkou však výskyt termínu matice v uvažované práci končí, dále se v ní pracuje vedle determinantů pouze s formami.

Jinak je tomu u Petrova článku *O racionálném kanonickém tvaru lineární substituce* z roku 1940. V něm se současně vyskytují termíny determinant, lineární substituce, transformace, lineární forma, lineární vztah, soustava rovnic či matice. V práci je navíc specifikováno, že koeficienty (substituce, matice atd.) jsou z (číselného, komutativního) tělesa, což nebylo v dosud zmíněných pracích, včetně slavných publikací Eduarda Weyra, uvedeno.

Překvapivé je, že ještě v této práci z roku 1940 používal Karel Petr k označení matice (čtvercového schématu) složené závorky. Determinanty značil dle našich zvyklostí, tj. dvěma dvojicemi svislých čar podél schématu. Rovněž způsobem označení matice symbolem se nelišil od našeho, neboť používal velké písmeno bez závorek či indexů. Avšak v případě, kdy chtěl konkrétněji označit prvky matice, nepsal je do závorek, např. (a_{ik}), ale používal vyjádření *matice čísel a_{ik}*. K označení matice typu $n \times 1$, neboli sloupcového vektoru, používal písmeno značící název matice umístěné do hranatých závorek.

Posledně jmenovaná publikace Karla Petra je zmíněna v knížce *Vectors and Matrices*, kterou roku 1943 publikoval Cyrus Colton MacDuffee (1895–1961).

O teorii matic se hovoří rovněž v Petrově textu, který není jeho odbornou prací, ale spíše historickým pojednáním. V roce 1905, dva roky po smrti Eduarda Weyra, publikoval Karel Petr spolu s Janem Sobotkou (1862–1931) čtveřici

[128] Tyto dvě cizojazyčné verze jsou rovněž uvedeny ve Wedderburnově bibliografii i v Muirově přehledu.

[129] Thomas Muir ve své knize *Contributions to the History of Determinants 1900–1920* o tomto Frobeniově textu napsal:

… paper, known as his second paper on the Law of Inertia, … ([Mu3], str. 142)

článků, která je souhrnně nazvána *O životě a činnosti Eduarda Weyra* [PS1]. Jedním z nich je text nazvaný *O Weyrově činnosti v math. analysi a algebře*, v němž se Karel Petr velkou měrou zabýval maticovým aparátem ve Weyrových pracích.

Z následujícího uryvku je zřejmé, že ani v prvním desetiletí 20. století nebyla teorie matic mezi českou matematickou komunitou příliš rozšířena.

Chtěje … vyložiti výsledky, jichž se v pracích svých v různých oborech dopracoval, započnu přirozeně s tím oborem jejím, jemuž nejvíce pojednání Weyr věnoval a v němž získal si nejvíce zásluh. Jest to nauka o maticích a s touto úzce související theorie systémů komplexních čísel. … vzhledem k tomu, že názvosloví v nauce o maticích není ustáleno a článek tento jest psán pro širší kruh čtenářstva mathematického, vysvětlím v následujícím nejprve co nejstručněji základní definice a pojmy. ([Pe2], str. 468)

Z Petrova pojednání můžeme rovněž vytušit, že stejně jako ve světě[130] nebylo ani u nás násobení matic v prvním desetiletí 20. století triviálním pojmem. V jeho stati bylo zavedeno pomocí složení dvou substitucí a v zápisu jeho vlastností se objevují uvozovky, které naznačují, že násobení matic nebylo tehdy stále ještě zcela přijato:

Toto „násobení“ matic není úkonem záměnným, jest však úkonem associativním. ([Pe2], str. 469)

3.2 Matice a Václav Simandl

- *O zvláštních determinantech* [Si1], 1913
- *Vyčíslení zvláštního determinantu* [Si2], 1915

Václav Simandl[131] publikoval v roce 1913 článek *O zvláštních determinantech.* Vytvářel v něm čtvercové (v jeho terminologii *quadratické*) matice tvaru

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & p_0B_0 & * & * & \cdots & * & * \\ B_0 & A_0 & (p_0-1)B_0 & * & \cdots & * & * \\ * & 2B_0 & A_0 & (p_0-2)B_0 & \cdots & * & * \\ * & * & 3B_0 & A_0 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \cdots & A_0 & B_0 \\ * & * & * & * & \cdots & p_0B_0 & A_0 \end{pmatrix},$$

kde p_0 je určité přirozené číslo, hvězdičky jsou čtvercové nulové matice a A_0, B_0 jsou opět čtvercové matice uvedeného typu, jejichž prvky jsou opět matice téhož

[130] Viz 1. kapitola.

[131] Václav Simandl studoval na české technice a na české univerzitě v Praze. Tři semestry poslouchal významné německé matematiky na univerzitě v Göttingen. V roce 1912 se stal asistentem deskriptivní geometrie na české technice v Brně, v akademickém roce 1915/16 se habilitoval. Vedle studia algebry (především teorie determinantů) se zabýval hlavně projektivní a deskriptivní geometrií.

Více informací o jeho životě a díle viz článek *Za † Dr. Václavem Simandlem* [Ps1], který roku 1919 publikoval Miloslav Pelíšek (1855–1940).

typu, *a tak můžeme stále pokračovati, až přijdeme k maticím, jejichž prvky můžeme již pokládati za prosté prvky.* ([Si1], str. 535)

Upozornil, že speciálním případem determinantů matic uvedeného tvaru jsou tzv. *Cayleyovy-Sylvesterovy determinanty*,[132] které lze zapsat schématem

$$\begin{vmatrix} a & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & p-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & p-2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p & a \end{vmatrix},$$

a také *Puchtovy-Noetherovy determinanty*,[133] které mají tvar

$$C = \begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ B_0 & A_0 \end{vmatrix},$$

kde A_0, B_0 jsou čtvercové matice tvořené stejným způsobem jako matice C. Jejich řád je vždy 2^n, kde $n \in \mathbb{N}$; pro $n = 3$ se jedná o determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & a_6 & a_5 & a_8 & a_7 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 & a_7 & a_8 & a_5 & a_6 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_6 & a_5 & a_8 & a_7 & a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ a_7 & a_8 & a_5 & a_6 & a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Puchtovy-Noetherovy determinanty jsou symetrické podle obou diagonál. Determinanty matic, které Simandl vyšetřoval, se jimi stanou, položíme-li $p_0 = 1$.

[132] Viz práci Arthura Cayleyho *On the determination of the value of a certain determinant* [Cy5] z roku 1858, str. 163, a poznámku Jamese Josepha Sylvestera *Théorème sur les déterminants* [Sy8] z roku 1854, str. 305.

[133] Viz německé vydání knihy Ernesta Pascala *I determinanti* z roku 1897, které vyšlo roku 1900 v překladu Hermanna Leitzmanna pod názvem *Die Determinanten*, str. 80.

Anton Puchta (1851–1903) byl od roku 1874 asistentem a docentem na pražské technice a univerzitě. Po rozdělení univerzity na německou a českou se v roce 1882 stal profesorem matematiky na německé univerzitě v Praze. V pozdějších letech působil na univerzitě v Černovicích. Příslušný výsledek o rozkladu symetrického determinantu na lineární faktory dokázal roku 1878 v práci *Ein Determinantensatz und seine Umkehrung* [Ph1].

Max Noether (1844–1921), otec známé matematičky Emmy Amalie Noether (1882–1935), studoval v Heidelbergu, kde se roku 1870 stal soukromým docentem, o čtyři roky později mimořádným profesorem a roku 1888 řádným profesorem. Patřil mezi nejvýraznější matematiky 19. století, kteří se zabývali algebraickou geometrií. Zmíněný výsledek o symetrických determinantech uvedl o dva roky později než Anton Puchta, a to v práci *Notiz über eine Classe symmetrischer Determinanten* [Nh1].

Václav Simandl se však nevěnoval těmto speciálním typům, ale maticím obecnějším (viz výše uvedená matice A), přičemž na každou nově složenou blokovou matici A_n kladl podmínku vyjádřenou rekurentním vztahem vzhledem k maticím z předchozího „vkládání matic do matice“, tj. každá nově vzniklá bloková matice A_n závisí na maticích A_{n-1} a B_{n-1}, které se vyskytují v blocích na diagonále a v linii bloků těsně nad diagonálou blokové matice A_n, přičemž matice A_0, B_0, A_1, B_1 stojící na počátku tohoto procesu jsou zadané. Dokázal, že takto vzniklé determinanty lze vždy rozložit na lineární faktory a tyto faktory určil.

Podotkněme, že Simandl ohraničoval determinant jednou svislou čarou a matici dvěma svislými čarami na každé straně schématu. Ač se hlavní výsledek práce týká determinantů, je při výkladu překvapivě dávána přednost maticím (ve formě čtvercového schématu je uvedeno dvacet matic a pouhé dva determinanty) a poté je o příslušném determinantu hovořeno jako o determinantu této matice.[134] Spojení *determinant matice* (od matice k determinantu) je dnes zcela běžné. O to více je pozoruhodná skutečnost, že Simandl o dva roky později použil ve svém článku *Vyčíslení zvláštního determinantu* opačný postup (od determinantu k matici). Článek je opět věnován určení hodnoty determinantu matice jistého speciálního tvaru, přesto se autor na řadě míst vyjadřoval, z dnešního pohledu zbytečně, pomocí matic, a to i na místech, v nichž by postačila řeč determinantů. Zcela běžný je zde pojem matice determinantu, v práci se vyskytují formulace následujícího typu:

Abychom dostali hodnotu tohoto determinantu, přeměníme jeho quadratickou matici v jinou matici určitými transformacemi ... ([Si2], str. 43)
Dostane potom náš determinant quadratickou matici tvaru ... ([Si2], str. 44)

Zatímco v článku *O zvláštních determinantech* psal Simandl především o *determinantu matice*, v práci *Vyčíslení zvláštního determinantu* hovořil naopak častěji o *matici determinantu.*

Práce *Vyčíslení zvláštního determinantu* se objevila v Muirově historickém přehledu *Contributions to the History of Determinants 1900–1920*, je v něm však uveden nesprávný rok jejího publikování (1914).

3.3 Zlomky maticového aparátu v dalších pracích

Při studiu Abelových funkcí tří proměnných využíval maticový počet Václav A. Hruška.[135] Objevil se v jeho pojednání *O systémech singulárních relací mezi periodami Abelových funkcí tří proměnných* [Hk1] z roku 1919 a v sérii článků *Redukce svazku bilineárních forem a systému relací mezi periodami nedegene-*

[134] Pouze na dvou místech se mluví o matici determinantu.

[135] Václav A. Hruška po studiu na české technice a univerzitě v Praze získal aprobaci pro výuku matematiky a deskriptivní geometrie na středních školách. Postupně se stal asistentem, soukromým docentem a profesorem české techniky v Praze. Zabýval se především numerickými metodami, stál u počátků Laboratoře matematických strojů, z níž se později stal Výzkumný ústav matematických strojů.

Bližší informace o Václavu Hruškovi viz například články Václava Pleskota (1907–1982) *Zemřel profesor Dr Václav Hruška* [Po1] a *Prof. Dr. Václav Hruška* [Po2].

rovaných singulárních Abelových funkcí tří proměnných [I.], [II.], [III.] ([Hk4], [Hk4], [Hk4]) z roku 1922.

S maticemi okrajově pracoval také Jaroslav Jarušek[136] v článku *O algebraických rovnicích s vícenásobnými kořeny* [Ja1] z roku 1923. Na jediném místě matici použil i o dva roky později v práci *O některých semiinvariantech vyjádřených determinanty* [Ja2].

V roce 1932 publikoval krátkou poznámku *Příspěvek k teorii determinantů* [Rl1] Karel Rössler. V ní zobecnil větu o hodnosti matice z knihy Bohumila Bydžovského *Základy teorie determinantů a matic a jich užití.*[137] Své tvrzení Rössler vyslovil řečí matic, dokázal je pomocí nalezení nenulového subdeterminantu příslušného řádu.

Václav Simandl, Václav Hruška, Jaroslav Jarušek i Karel Rössler používali k ohraničení determinantu jednu svislou čáru a k omezení matice dvě svislé čáry podél každé strany uvažovaného schématu. Karel Petr byl svým zápisem matic do složených závorek v českých zemích v prvních desetiletích 20. století výjimkou, způsobem značení determinantu se však od ostatních nelišil.

Všichni zmínění matematikové používali termín *matice*, upřednostnění tohoto termínu před termínem *matrice* tedy proběhlo paradoxně v době okolo přelomu století, kdy žádné významné práce o maticích v českých zemích vydány nebyly.[138]

3.4 Teorie matic v publikacích Bohumila Bydžovského

- *Základy teorie determinantů a matic a jich užití* [By1], 1930, 1947
- *Sur les matrices orthogonales symétriques* [By2], 1936

Bohumil Bydžovský byl na univerzitě žákem Eduarda Weyra, při studiích se setkal rovněž s Františkem Josefem Studničkou a Karlem Petrem. Především Weyr měl na mladého Bohumila Bydžovského velký vliv a nasměroval jeho pozdější profesní dráhu. Zmínil se o tom Karel Koutský (1897–1964) v článku *Sedmdesátiny prof. Dr Bohumila Bydžovského* [Ky1] z roku 1950:

Po maturitě vstoupil na filosofickou fakultu Karlovy university v Praze (tehdy nazývané Karlo-Ferdinandovou), kde v létech 1898 až 1902 studoval matematiku a fysiku. Jak sám vzpomíná, zabýval se však v prvních dvou létech mnohem více filosofií a dějinami literatury nežli matematikou. Teprve Weyrovy a Koláčkovy přednášky připoutaly jej silněji k matematickému studiu. Zejména Ed. Weyr měl naň velký vliv a prý velmi litoval, že pro nemoc jej nezkoušel.
([Ky1], str. D350)

[136] Jaroslav Jarušek byl středoškolským pedagogem a od akademického roku 1915/16 neplaceným asistentem na *c. k. mathematicko-fysikálním semináři*, který fungoval při filozofické fakultě české univerzity.

[137] Karel Rössler se na knihu odvolává pouze pod názvem *Základy teorie determinantů*, což jsou slova uvedená na obálce 1. vydání Bydžovského knihy. Konkrétně odkazuje na její 52. odstavec, což je část s názvem *Subdeterminanty determinantu hodnosti p* (str. 95–96).

[138] O prvním použití termínu *matice* Eduardem Weyrem se zmiňuje 2. kapitola.

Bohumil Bydžovský působil sedm let jako středoškolský učitel v Kutné Hoře, Praze a Kladně, později se výrazně zapojil do školských reforem. Roku 1909 se habilitoval na české univerzitě v Praze, kde přednášel až do svých sedmdesáti sedmi let. V letech 1911 až 1917 vyučoval i na české technice. V roce 1917 byl na univerzitě jmenován profesorem titulárním, o dva roky později mimořádným a následující rok řádným. Ve školním roce 1930/31 zastával funkci děkana Přírodovědecké fakulty Karlovy univerzity, v roce 1946/47 a 1948 byl rektorem.

Svůj vědecký zájem soustřeďoval především na algebraickou geometrii (s důrazem na teorii rovinných algebraických křivek), analytickou a diferenciální geometrii, teorii nekonečných grup a teorii konfigurací. Je autorem či spoluautorem několika učebnic pro vysoké a střední školy.[139]

V roce 1930 publikoval Bohumil Bydžovský v edici Knihovna spisů matematických a fysikálních[140] knížku *Základy teorie determinantů a matic a jich užití*, jejíž druhé, mírně upravené vydání z roku 1947 nese název *Úvod do teorie determinantů a matic a jich užití*. Je první česky psanou knihou se slovem *matice* v názvu a jednou z nejstarších knih této vlastnosti na světě. První taková kniha vyšla roku 1913.[141] Na straně druhé však podotkněme, že uvedený název 1. vydání je v plném znění uveden až v knize (na titulním listu), na obálce je uveden zkrácený titul *Základy teorie determinantů* a na hřbetu pouze zjednodušený název *Determinanty*.

V předmluvě k prvnímu vydání Bohumil Bydžovský zdůraznil nedávné přijetí teorie matic světovou matematickou komunitou a poukázal na její nesporné výhody:

Od běžných učebnic jednajících o determinantech se liší tato tím, že obsahuje základy počtu maticového; je to odůvodněno velkou důležitostí, které nabyl tento počet v posledních letech svou účinnou a hospodárnou symbolikou. ([By1], předmluva)

Kniha je rozdělena na dvě části: *Teorie determinantů a jich užití* a *Teorie matic a jich užití*. Po nich následuje desetistránkový historický přehled, který je však věnován takřka výhradně teorii determinantů. Jeho součástí je seznam několika učebnic k danému tématu. V historické části se objevuje i jméno Eduarda Weyra, z jeho prací je zmíněn spis *O theorii forem bilinearných*.

Vraťme se však k rozdělení textu na dvě základní části. Přestože autor označil teorii matic za nadřazenou teorii determinantů, první části věnoval 140 stran,

[139] O životě a díle Bohumila Bydžovského bylo publikováno mnoho (jubilejních) článků. Jmenujme alespoň některé z nich: Koutský K., *Sedmdesátiny prof. Dr Bohumila Bydžovského* [Ky1]; Metelka J., *K 80. narozeninám akademika Bohumila Bydžovského* [Mt1]; Bílek J., *Akademik Bohumil Bydžovský osmdesátníkem* [Bi1]; Havlíček K., *Osmdesát pět let akademika Bohumila Bydžovského* [Hv1]; Šindelář K., *Památce akademika Bohumila Bydžovského* [Sd1]; Drábek K., *Sto let od narození akademika Bohumila Bydžovského* [Dr1]. Bohumilu Bydžovskému byly rovněž věnovány disertační práce Ladislavy Francové-Provazníkové *Život a dílo Bohumila Bydžovského (1880–1969)* [Fc1] a Jany Hromadové-Olejníčkové *Vědecké dílo Bohumila Bydžovského* [Hd1]. Obě byly obhájeny na MFF UK v Praze, první v roce 2001, druhá roku 2005.

[140] Konkrétně se jedná o 14. svazek.

[141] Viz 1. kapitola.

druhé pouze 56 stran.[142] Toto dělení však není striktní a dalo by se říci, že není příliš šťastné, jak pochopíme z rozboru obsahu publikace.

Text je stavěn od úplných základů. Ihned na první stránce první části v poznámce pod čarou je například podrobně vysvětleno, jak zapisovat a číst pravé dolní indexy koeficientů soustavy rovnic (tedy posléze i koeficientů prvků determinantů a matic).[143]

Zajímavé je zavedení pojmu determinant. Nejprve je v partii věnované soustavě dvou lineárních rovnic o dvou neznámých definován determinant druhého řádu jako výraz $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, který se při řešení této soustavy vyskytl. Teprve poté je mu přiřazeno čtvercové schéma prvků, tj. matice. Dále je v paragrafu o soustavě tří rovnic o třech neznámých zaveden determinant třetího řádu a teprve poté determinant n-tého řádu (již pomocí matice), a to jako součet $n!$ součinů opatřených znaménkem příslušné permutace.

Právě při obecném zavedení determinantu se v knize poprvé vyskytuje pojem matice, též matrix (již na straně 13). Je zavedena jako soustava mn čísel napsaných v m řádcích a n sloupcích. Její prvky jsou též nazývány elementy matice. Běžně jsou používána slovní spojení *determinant matice* (též *determinant jejích n^2 prvků*) i *matice determinantu.*

Nepříliš ostrou hranici mezi teorií determinantů a teorií matic dokumentuje rovněž skutečnost, že kapitola *Hodnost matice* je již v první části knihy. Tento pojem je definován pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů. V první části knihy je též vyložena teorie soustav lineárních rovnic, v níž je nutná a postačující podmínka řešitelnosti soustavy uvedena sice nejprve v řeči determinantů, ale ihned poté pomocí rovnosti hodností matice soustavy a rozšířené matice soustavy – tzv. Frobeniova věta je vyslovena v podstatě naším současným způsobem. Souhrnně tedy lze říci, že první část sice pojednává primárně o determinantech, ale uvážil-li autor, že je vhodnější v daném místě použít matici, učinil tak. Zcela svobodně přecházel mezi oběma teoriemi a kombinoval je. Někde však mělo toto prolínání i negativní důsledky v podobě občasného „zdvojení pojmů“. Například před již zmíněnou problematikou hodnosti matice definoval Bohumil Bydžovský i pojem *hodnost determinantu*, po zavedení hodnosti pro oba objekty napsal:

Přirovnáme-li definici hodnosti matice k definici hodnosti determinantu, vidíme, že hodnost determinantu je totožná s hodností jeho matice.
([By1], str. 48)

Poznamenejme ještě, že knížka rovněž uvádí vyjádření hodnosti matice pomocí lineární nezávislosti jejích řádků.

Vyjadřování na hranici dvou oborů je ještě více očividné z následujícího úryvku:

---

[142] Počet a čísla stran knihy jsou uvedeny vzhledem k prvnímu vydání.

[143] Z dnešního pohledu se jedná o výklad zcela triviální:

Píšeme a_{11}, a_{12} atd., nikoli $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, atd., což by bylo jasnější, avšak obšírnější; čteme ovšem a jedna jedna, a jedna dvě, atd. Oba indexy oddělujeme čárkou, jen když by jinak mohlo vzniknouti nedorozumění. Tak na př. je třeba psáti $a_{2,\,n-1}$, ježto a_{2n-1} má zřejmě jiný význam. ([By1], str. 1)

Vynecháme-li v matici determinantu řádek a sloupec, jež se kříží v prvku a_{ik}, obdržíme matici, jejíž determinant … ([By1], str. 40)

Pro dnešního čtenáře je zcela nepochopitelné zavedení tzv. *řádkového* (též *skalárního*) *součinu dvou matic*, jehož výsledkem je determinant. („Obyčejné“ násobení matic je definováno v druhé části již dle našich zvyklostí.)

Řádkový součin dvou matic o stejném počtu (m) řádků a stejném počtu (n) sloupců nazýváme determinant stupně m-ho, jehož prvek stojící v i-tém řádku a k-tém sloupci je roven součinu i-ho řádku matice první a k-ho řádku matice druhé. ([By1], str. 102)

Jestliže byl maticového počtu chtivý čtenář při četbě první části *Teorie determinantů a jich užití* příjemně překvapen, bude pro něj druhá část *Teorie matic a jich užití* spíše zklamáním. Nalezne v ní totiž ve značné míře teorii forem, o čemž vypovídají již názvy čtyř jejích kapitol: *1. Počet maticový*, *2. Formy lineární a bilineární*, *3. Formy kvadratické I.* a *4. Formy kvadratické II.* Nicméně 1. kapitola druhé části je plně věnována základům maticového počtu. Bohumil Bydžovský zde zdůraznil výhody chápání matic jako nových objektů:

V úlohách, v nichž vystupují matice, … se mluví o určitém výkonu, jehož předmětem je matice jako celek. Dospíváme tak zvláštního způsobu symbolického počítání maticemi, jímž se důkazy i znění některých vět velmi zjednodušují a jenž obdržel název počtu maticového (počítáme maticemi). ([By1], str. 141)

Následují zmíněné tři kapitoly věnované lineárním, bilineárním a kvadratickým formám a jejich souvislostem s maticemi.

Velmi překvapující je skutečnost, že zatímco matice jsou v první části knihy značeny bez jakýchkoli závorek nebo čar, v druhé znenadání a bez vysvětlení do kulatých závorek. V první části druhého vydání z roku 1947 rovněž nejsou matice ničím ohraničeny, ale ve druhé části jsou omezeny dvěma dvojicemi svislých čar a v poznámce pod čarou je podotknuto, že k označení matice lze použít i kulaté závorky.

Co se týče terminologie, jsou použité výrazy často totožné se současnými termíny, nebo jsou až na výjimky posuny od dnešní řeči natolik malé, že jsou pojmy intuitivně pochopitelné (některé dnes již nepoužívané termíny jsou pouhým důsledkem již zmíněného přecházení mezi teorií determinantů a teorií matic). Bohumil Bydžovský například používal termínů *n-řadový determinant*, *determinant n-tého stupně*, výjimečně i *determinant řádu n* (dnes používáme pouze termín determinant řádu n), *determinat soustavy* (determinant matice soustavy lineárních rovnic), *čtverečná matice* (čtvercová matice), *hlavní prvky matice* (prvky na hlavní diagonále matice), *jednořadový determinant* či opisem také *determinant mající samojediný prvek* (determinant řádu 1), *řady matice* (nadřazený pojem pro řádky a sloupce matice), *rovnoběžné řady matice* (množina některých řádků, nebo množina některých sloupců matice), *dvě řady matice, které nejsou rovnoběžné* (řádek a sloupec matice), *hlavní permutace* (identická permutace), *determinant tvaru diagonálního* (determinant diagonální matice), *souměrná matice* (symetrická matice), *souměrný determinant* (determinant symetrické matice), *resultant* či *eliminant soustavy* (determinat matice, jejímiž prvky jsou koeficienty soustavy $n+1$ lineárních rovnic o n neznámých včetně pravé strany soustavy), *dva přidružené subdeterminanty* (dva subdeterminaty téhož determinantu, přičemž prvky jednoho z nich jsou vzaty ze všech řádků a sloupců, ze kterých nejsou vzaty prvky subdeterminantu druhého), *p-krát vroubený determinant* (determinat, k němuž bylo přidáno pod poslední řádek p řádků a za poslední sloupec p sloupců, prvky v průsečících přidaných, tzv. *vroubících* řádků a sloupců jsou obvykle rovny nule), *sdružená*, výjimečně *transponovaná matice* (transponovaná matice), polosouměrný determinant (determinant antisymetrické matice). *Rovnicí sekulární* autor rozuměl rovnici typu

$$|A + \lambda E| = 0,$$

kde A je symetrická matice a E je jednotková matice. Jedná se tedy v podstatě o charakteristickou rovnici, ale pojem je definován pouze pro matici symetrickou. Kořeny této *sekulární rovnice* jsou čísla opačná k vlastním číslům matice A.

Neustálené byly v době publikování knížky (1. i 2. vydání) pojmy subdeterminant, minor a *doplněk prvku* a_{ij}, který dnes obšírněji nazýváme algebraický doplněk prvku a_{ij}. *Doplněk prvku* a_{ij} definoval Bohumil Bydžovský dle našich zvyklostí. Determinant, který vznikne z daného determinantu řádu n vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce, nazval *subdeterminantem přidruženým prvku* a_{ij} a zároveň v poznámce pod čarou uvedl, že je možné používat i termín minor. Zde však současně upozornil na skutečnost, že někteří autoři termínem minor označují pojem, který on pojmenoval jako doplněk daného prvku. Oba pojmy se tedy pro lichý součet $i + j$ liší ve znaménkách.

Uvážíme-li uvedenou terminologii, není problém s „překladem" Bydžovského textu do současné řeči. Dokumentujme to na konkrétním, dnes notoricky známém tvrzení:

Jsou-li prvky souměrného determinantu vesměs reálné, má příslušná rovnice sekulární všechny kořeny reálné. ([By1], str. 115)

Součástí Bydžovského knížky jsou úlohy uvedené na konci každé kapitoly (cca 20 problémů pro každou z nich). Jedná se o početní příklady, ale i o odvození některých vztahů či důkazové úlohy. Také v samotném výkladu je občas uveden příklad, který je navíc řešený.

V roce 1936 publikoval Bohumil Bydžovský článek *Sur les matrices orthogonales symétriques.* V něm nejprve dokázal, že je-li h hodnost matice $A + E$, kde A je symetrická ortogonální matice řádu n a E jednotková matice stejného řádu, potom hodnost matice $A - E$ je právě $n - h$. Dále dokázal, že násobnost kořene 1 charakteristické rovnice matice A je h a kořene -1 je $n - h$, a proto můžeme tuto charakteristickou rovnici psát ve tvaru[144]

$$(\lambda + 1)^{n-h}(\lambda - 1)^h = 0.$$

[144] Bohumil Bydžovský však uvažoval, stejně jako v knížce z roku 1930, „charakteristickou rovnici" ve tvaru $|A + \lambda E| = 0$ místo dnes používaného tvaru $|A - \lambda E| = 0$. Proto došel k výsledku opticky přesně opačnému: násobnost kořene 1 je $n - h$ a kořene -1 je h. „Charakteristickou rovnici" tak vyjádřil v podobě $(\lambda + 1)^h(\lambda - 1)^{n-h} = 0$.

Autor využil tohoto vztahu a teorie elementárních dělitelů k odvození tvaru čtvercového schématu, kterým je možno reprezentovat každou symetrickou ortogonální matici A. Uvedený tvar, který závisí na hodnosti h matice $A + E$, autor dále upravoval na součin jednodušších matic. Ukázal, že každou takovou matici A lze psát jako součin buď $n - h$ nebo h ortogonálních symetrických matic tvaru $E - 2bb'$, kde b jsou sloupce vhodně zvolené ortogonální matice B (b' značí vektor transponovaný k vektoru b). V případě h součinů dále představil velmi snadný způsob nalezení vektorů $b_i, \ldots, b_h$. Jedná se o vektory, které jsou řešením soustavy rovnic $(A - E)b_i = o$. Protože pro ortogonální symetrickou matici A platí $A = A^T = A^{-1}$, platí rovněž $A^2 = E$. Odtud

$$(A - E)(A + E) = A^2 - E = E - E = O$$

a zmíněné vektory b_i, které jsou řešením soustavy rovnic $(A - E)b_i = o$, jsou lineárními kombinacemi sloupců matice $A + E$.

Bydžovského článek je zmíněn v části *Normalformen von Matrizen* [Pg2] nedokončeného, velkoryse koncipovaného díla *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* Zmíněná stať byla publikována roku 1953, jejím autorem je Günter Pickert (nar. 1917).

3.5 Další matematikové našeho regionu

Významných výsledků v teorii matic dosáhli představitelé židovské komunity, kteří jsou úzce spjati s českými zeměmi. Dodnes jsou známy tzv. *Pickovy matice*, v současných článcích a monografiích publikovaných po celém světě se běžně vyskytuje pojem *Loewnerovy matice.* Oba matematikové, jejichž jména jsou součástí zmíněných termínů, však podstatnou část svého života prožili mimo naše země.

Georg Alexander Pick (1859–1942) se narodil ve Vídni, kde také vystudoval, obhájil svou disertační práci (jedním z posuzovatelů práce byl Emil Weyr) a strávil zde i většinu z posledních patnácti let svého života. V podstatě celé své tvůrčí období však působil v Praze. Charles Loewner (1893–1968), Pickův doktorand, v roce 1939 emigroval do Spojených států amerických.[145]

[145] Zmiňme se podrobněji o obou matematicích.

Georg Alexander Pick publikoval první matematický článek v pouhých sedmnácti letech, v roce 1880 obhájil disertační práci na vídeňské univerzitě, v následujícím roce sepsal i práci habilitační, habilitoval se v roce 1882. Již po doktorátu se stal asistentem Ernesta Macha (1838–1916) na Karlo-Ferdinandově univerzitě v Praze. V roce 1892 byl jmenován řádným profesorem na německé univerzitě v Praze, v roce 1900/1901 zde byl děkanem filozofické fakulty. Penzionován byl v roce 1927, poté odešel zpět do Vídně. Po obsazení Rakouska v roce 1938 se vrátil do Prahy a v roce 1942 zemřel po dvoutýdenním pobytu v Terezíně.

Více o jeho životě a díle viz například článek Ivana Netuky (nar. 1944) *Georg Pick – pražský matematický kolega Alberta Einsteina* [Nu1] z roku 1999.

Charles Loewner se narodil jako Karel Löwner v Lánech nedaleko Prahy. Byl veden k německé výchově a vzdělání, absolvoval nejprve německé gymnázium a poté německou univerzitu v Praze. Disertační práci vedenou Pickem obhájil roku 1917. Do roku 1922 působil na pozici asistenta na německé technice v Praze, poté odešel na univerzitu do Berlína, kde se následujícího roku habilitoval. Roku 1928 přešel do Kolína nad Rýnem, kde byl mimořádným profesorem, v roce 1930 se vrátil do Prahy. V roce 1939 emigroval do zámoří, kde pracoval

V současných pracích je často referována Loewnerova takřka čtyřicestránková práce *Über monotone Matrixfunktionen* [Lo1] z roku 1934, zmiňován je i jeho krátký článek *On totally positive Matrices* [Lo2] z roku 1955. Z Pickových prací z teorie matic uveďme článek z roku 1922 *Über die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen von Schwingungsproblemen* [Pc1].

Poznamenejme ještě, že na celosvětově známé výsledky později navázala Olga Taussky-Todd (1906–1995), která se narodila v Olomouci. Po třech letech se rodina přestěhovala do Vídně, poté do Lince, po vzniku Československa v roce 1918 však ještě rodina formálně patřila k nově vzniklému státu. I Olga Taussky Todd však byla nucena v roce 1934 kontinentální Evropu opustit, působila ve Velké Británii a Spojených státech amerických. Maticemi se začala zabývat až ve čtyřicátých letech 20. století, poslední práci z maticového počtu publikovala ještě počátkem devadesátých let. Patřila mezi přední představitele lineární algebry, rovněž její výsledky jsou stále referovány a zpřesňovány.[146]

na několika univerzitách (např. University of Syracuse New York, Stanford University), roku 1963 byl penzionován.

Do roku 1939 psal své práce německy pod jménem Karl Löwner, poté téměř celé desetiletí nepublikoval a od roku 1948 psal anglicky pod jménem Charles Loewner. Dnes je znám především pod anglickou verzí svého jména.

[146] Životní a profesní dráhu Olgy Taussky-Todd je těžké v krátkosti zachytit, neboť je spletitá (jen během 2. světové války se osmnáctkrát stěhovala). Později žila a pracovala například v Göttingen, v Londýně, kde poznala svého manžela, rovněž známého matematika Johna Todda (1911–2007), dále v Belfastu, Princetonu, Los Angeles či Pasadeně. Publikovala přibližně 250 prací, kromě maticového počtu (matice s dominantní diagonálou, Geršgorinovy kruhy, stabilní matice, matice s vlastností L, Kacovy matice, komutativita matic atd.) se věnovala například asociativním algebrám, teorii grup, numerické analýze či historii matematiky.

O jejím životě a díle bylo publikováno velké množství prací. Za všechny jmenujme její vzpomínku *An autobiographical essay* [Ta3] z roku 1985 nebo milý článek *How I became a torchbearer for matrix theory* [Ta2] z roku 1988, v němž sama sebe označila za *světlonoše teorie matic*. Byly jí věnovány i speciální (dvoj)svazky časopisů Linear and Multilinear Algebra 3(1975), Issue 1/2 [LMA1], Linear Algebra and its Applications 13(1976), Issue 1/2 [LAA1] a Linear Algebra and its Applications 280(1998) [LAA2]. V češtině byly roku 2012 autorkou disertační práce napsány články *(Ne)řád v životě versus řád v maticích* [Sp1] a *Olga Taussky-Todd a otázky Geršgorinových kruhů* [Sp2].

4 Ohlasy na Weyrovu teorii v Brně

Nejvýraznější českou osobností, která se na počátku 20. století zabývala teorií matic, byl Bohumil Bydžovský (1880–1969), jehož práce byly představeny v předcházející kapitole. Ač byl žákem Eduarda Weyra, jeho teorií se příliš nezabýval. Reakce na ni přišly od české matematické komunity se značným zpožděním. Pozornost jí věnovali čeští matematikové pracující v Brně, a to až v padesátých letech 20. století. Snažili se jí zobecnit a aplikovat, především v matematické analýze. Jak uvidíme dále, vůdčí osobností a hybnou silou při rozpracování Weyrovy teorie byl Otakar Borůvka (1899–1995).

4.1 Otakar Borůvka

Otakar Borůvka byl žákem Matyáše Lercha[147] (1860–1922) a Eduarda Čecha[148] (1893–1960), mezi jeho učitele patřili též Elie Joseph Cartan (1869–1951, Paříž) a Wilhelm Blaschke (1885–1962, Hamburk). Borůvkův život je neodmyslitelně spjat s Masarykovou univerzitou a pobočkou Matematického ústavu ČSAV v Brně, kde se stal jednou z nejvýraznějších osobností vědeckého života. Soustředil kolem sebe skupinu vynikajících matematiků. Řadíme ho mezi ty, kteří se zasloužili o rozvoj matematiky v Československu.

Otakar Borůvka je příkladem matematika, který si vážil vzdělání a především těch, kteří ho k němu vedli. Z jeho vzpomínek lze vyčíst poděkování směřované k jeho učitelům, ale zároveň uvědomění si závazku tento dar šířit dále. Byl to především Matyáš Lerch, který mu ukázal cestu k metodám vědeckého výzkumu a o kterém poznamenal: *... byl nejdůležitějším stupínkem na mé cestě po matematickém žebříčku, ... ve vědeckém životě Brna zanechal nejhlubší stopu, která zůstává v nás, jeho žácích, i v našich žácích do budoucna.* ([BKol], str. 50)

[147] Přáním Matyáše Lercha, českého matematika světového jména, bylo stát se středoškolským profesorem matematiky. Splnění tohoto snu však Lerchovi zabránilo postižení dolní končetiny v důsledku úrazu v dětství. Matyáš Lerch tak upnul své usilí k matematice. Po tříletém studiu na české technice studoval matematiku na české univerzitě (u F. J. Studničky) a také v Berlíně (K. T. W. Weierstrass, L. Kronecker, I. L. Fuchs, C. D. T. Runge). V roce 1886 se habilitoval na české technice a zastával zde místo asistenta matematiky. V roce 1896 odešel na místo profesora na univerzitu ve švýcarském Freiburgu, kde zůstal deset let. Během této etapy vyvrcholila jeho odborná činnost, po operaci se zlepšil jeho zdravotní stav. Od roku 1906 působil na české brněnské technice, od roku 1920 na nově založené Masarykově univerzitě, kde se stal prvním profesorem její přírodovědecké fakulty. Podílel se rovněž na založení matematického ústavu. Sepsal řadu článků publikovaných v renomovaných časopisech; jeho práce výrazně ocenil známý francouzský matematik Charles Hermite (1822–1901).

[148] Eduard Čech vystudoval matematiku a deskriptivní geometrii na Filozofické fakultě Karlo-Ferdinandovy univerzity v Praze. Několik let učil na pražských reálkách. Jeho odborné zaměření zahrnovalo především diferenciální geometrii a topologii. Ve školním roce 1921/22 studoval v Itálii (v Turíně). Roku 1922 se habilitoval na pražské univerzitě. Od roku 1923 byl mimořádným, od roku 1928 řádným profesorem Masarykovy univerzity v Brně. Od roku 1946 byl řádným profesorem Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy. Byl prvním ředitelem Badatelského ústavu matematického České akademie věd a umění (1947), jeho pokračovatele Ústředního ústavu matematického (1950), Matematického ústavu ČSAV (1952) i Matematického ústavu Univerzity Karlovy (1956).

Také já jsem brzy ztratil nit, …, a Lerchovy přednášky byly pro mne pravým opakem všech jiných přednášek, jimž jsem dokonale rozuměl. Tak se stalo, že chtěje porozumět Lerchovým přednáškám, studoval jsem hlavně matematiku, která mne nakonec tak poutala, že jsem jí věnoval celý život. Říkávám, že jsem se stal matematikem proto, že jsem matematiku neuměl. ([Bo9] str. 91–99)

O podněcujícím vztahu učitel-student napsal následující řádky:

… moji učitelé – Matyáš Lerch, Ladislav Seifert a Eduard Čech. Dali mi mnoho, a tak i já cítím povinnost co nejvíc z toho předat mladé nadané generaci. Oni vždycky stranili nadaným a pilným, to bylo jejich a posléze i moje krédo: na koně vás posadím, ale jet musíte sami! ([BKol], str. 162–163)

Otakar Borůvka studoval od roku 1918 na České vysoké škole technické v Brně, od roku 1920 pak současně na Přírodovědecké fakultě nově vzniklé Masarykovy univerzity, kam následoval svého učitele Matyáše Lercha. Nedlouho poté se na ústavu matematiky na univerzitě stal asistentem (a od roku 1921 již na technice nestudoval). V roce 1923 obhájil svou disertační práci, roku 1928 se na univerzitě habilitoval. O šest let později se stal mimořádným profesorem Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity. V roce 1939 byl po uzavření českých vysokých škol poslán na dovolenou s čekatelným, po válce byl roku 1946 (se zpětnou platností od roku 1940) jmenován řádným profesorem Masarykovy univerzity, na níž setrval do roku 1970. Téhož roku začal pracovat v nově vzniklém Matematickém ústavu ČSAV v Brně. V roce 1965 založil matematický časopis Archivum Mathematicum.[149]

Odborné zaměření Otakara Borůvky je široké. Zahrnuje především klasickou analýzu, diferenciální geometrii, algebru, teorii diferenciálních rovnic a topologii. Z jeho výsledků je nejznámější algoritmus pro nalezení minimální kostry grafu, který Borůvka publikoval v práci *O jistém problému minimálním* [Bo1] v roce 1926, v době, kdy ještě teorie grafů neexistovala.

Zbývající text této kapitoly pojednává o výsledcích, které publikoval buď Otakar Borůvka nebo jeho žáci, kteří se ve svých pracích na svého učitele odvolávají a zdůrazňují nejen Borůvkovu schopnost motivace k řešení problémů, ale i skutečnost, že to byl právě Otakar Borůvka, který je s problematikou Weyrovy teorie seznámil.

---

[149] O životě a práci Otakara Borůvky byla roku 1996 publikována monografie *Otakar Borůvka* [BKol], která byla sepsána kolektivem osmi autorů. Jedním z nich byla Petra Šarmanová, která napsala disertační práci na téma *Otakar Borůvka a diferenciální rovnice* [Sa1], kterou obhájila roku 1998 na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně.

Vedle těchto obsáhlých publikací existuje i značné množství článků, jmenujme alespoň tyto: Balada F., *Akademik korespond. univ. profesor RNDr. Otakar Borůvka, doktor fyzikálně-matematických věd, dožil se šedesáti let* [Bl1]; Holub M., *Šedesát let prof. O. Borůvky* [Ho1]; Koutský K., *Prof. Otakar Borůvka šedesátníkem a laureátem státní ceny* [Ky2]; Novotný M., Svoboda K., Zlámal M., *K šedesátinám Otakara Borůvky* [NSZ1]; Novotný M., *Borůvka laureátem státní ceny* [No3]; Sekanina M., *Šedesátiny profesora Otakara Borůvky* [Sn1]; Novotný M., *70 let akademika Borůvky* [No4]; Novotný M., *Akademik O. Borůvka sedmdesátiletý* [No5]; Ráb M., *Akademik Otakar Borůvka sedmdesátníkem* [Ra1]; Novotný M., *Otakar Borůvka – význačná osobnost brněnského vědeckého života* [No6]; Vejvodová Z., *75 let akademika Otakara Borůvky* [Ve1]; Greguš M., *Osemdesiat rokov akademika O. Borůvku* [Gr1]; Neuman F., *Akademik Otakar Borůvka pětaosmdesátníkem* [Nn1]; Neuman F., *95 years of Otakar Borůvka* [Nn2].

4.2 Maticový počet a Otakar Borůvka

• *Sur les matrices singulières* [Bo2], 1936
• *Matice* [Bo4], 1947, 1948, 1966
• *Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty* [Bo6], 1954
• *Základy teorie matic* [Bo8], 1971

Borůvkův zvýšený zájem o algebru lze zaznamenat od třicátých let 20. století. Nemáme tím však na mysli pouze algebru lineární.[150] Své zaujetí pro algebru mohl předávat dál, neboť ve třicátých a čtyřicátých letech vyučoval předměty *Determinanty*, *Lineární substituce a bilineární formy*, *Algebra*, *Matice*, *Matematický proseminář (odděl. algebraické)* či *Grupy*.[151]

V roce 1936 vyšla Borůvkova třístránková práce *Sur les matrices singulières*. Byla publikována ve dvou částech, z nichž druhá má pouze několik řádků. V první, stěžejní části není sice jméno Eduarda Weyra zmíněno, v jejím úvodu je však podán výklad jednoho z klíčových vztahů teorie charakteristických čísel.[152] Otakar Borůvka uvažoval nerostoucí posloupnost hodností čtvercových matic X^1, X^2, X^3, … řádu n a ukázal, že existuje matice X^t taková, že matice X^t, X^{t+1}, …, mají stejnou hodnost r a zároveň všechny předcházející matice mají hodnost větší. Číslo t nazval *l'indice de la matrice* X. Vztah sice vyložil pomocí hodností matic, ale ve zbývajících odstavcích dával přednost pojmu *de genre*, přirozenému číslu $n - r$ (nulita matice).

Tato Borůvkova poznámka byla referována roku 1953 Günterem Pickertem v přehledovém článku *Normalformen von Matrizen* úspěšně započatého, ale nedokončeného díla *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* (viz str. 47).

Dva roky po skončení druhé světové války vydal Otakar Borůvka učební text *Matice*. Název těchto skript tak koresponduje se jménem předmětu, který tehdy vyučoval. V následujícím roce vyšlo jejich druhé a v roce 1966 třetí, doplněné vydání. Třetí vydání připravil k tisku Josef Škrášek[153] (1912–1986), který text doplnil řadou příkladů a cvičení. V prvním vydání se totiž vyskytují pouze

---

[150] Známé jsou Borůvkovy výsledky z abstraktní algebry. Viz například jeho monografie *Úvod do teorie grup* [Bo3] z roku 1944, stejnojmenná, ale svým rozsahem takřka dvojnásobná kniha *Úvod doteorie grup* [Bo5] z roku 1952 nebo monografie *Základy teorie grupoidů a grup* [Bo7], která vyšla roku 1962 (existují i vydání v němčině (1960) a v angličtině (1974, 1975, 1976)).

[151] Přehled pedagogické činnosti Otakary Borůvky (včetně roku, semestru a hodinového rozsahu výuky) je zpracován v disertační práci Petry Šarmanové *Otakar Borůvka a diferenciální rovnice*, str. 12–13 a 16–17. Uveďme alespoň, že předmět *Matice* Borůvka vyučoval v zimním semestru akademického roku 1946/47 v rozsahu pěti hodin týdně.

[152] Teprve v dodatečné krátké poznámce, tj. v druhé části práce ([Bo2], str. 762), se Borůvka zmínil o tom, že dokázal větu Eduarda Weyra. Patrně ho na to někdo upozornil.

[153] Josef Škrášek byl další osobností brněnského akademického života. Byl posluchačem České vysoké školy technické v Brně i teologické fakulty v Olomouci. Dále studoval matematiku a deskriptivní geometrii na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně. Na téže fakultě i pracoval, navíc byl výpomocným asistentem na druhém ústavu matematiky na brněnské technice, kde se roku 1961 habilitoval. Téhož roku však odešel na Vyšší vojenské učiliště do Vyškova, kde setrval do roku 1972.

příklady řešené v průběhu výkladu, třetí vydání obsahuje vždy po několika kapitolách soubor příkladů s uvedenými výsledky. Jedná se většinou o početní úkoly, občas též o důkazové úlohy.

Náplň skript není překvapující. Po definici číselného tělesa a matice nad tímto tělesem jsou postupně představeny některé důležité matice, vlastnosti operací maticového počtu, vektory, lineární substituce, funkce s maticovým argumentem, hodnost a nulita matice, charakteristická rovnice matice, charakteristický a minimální polynom. Jsou zavedena Weyrova charakteristická čísla matice a rovněž jeho *soustava normálních vektorů* (dnes tzv. normální soustava vektorů).[154] Představena je rovněž Weierstrassova teorie elementárních dělitelů, na závěr jsou uvedeny některé aplikace studované problematiky.

Porovnáním prvního a třetího vydání skript můžeme nahlédnout, jak se vyvíjela symbolika a česká terminologie teorie matic. Matice jsou v prvním vydání z roku 1947 značeny pomocí schématu ohraničeného kulatými závorkami, ve třetím vydání z roku 1966 však, poněkud překvapivě, závorkami hranatými (včetně označení vektorů). Od Bydžovského monografie[155] z roku 1930 se pozměnila řada termínů; některé názvy se přiblížily k dnes používané terminologii. Příkladem je symetrická matice, která již není nazývána *souměrná*, či čtvercová matice, která pozbyla označení *čtverečná*. V prvním vydání je transponovaná matice nazývána pouze *sdružená*, ve třetím je však již používán současný termín, přívlastek sdružená je zmíněn pouze v definici pojmu jako alternativní možnost. Matice, kterou dnes nazýváme inverzní, je v prvním vydání nazývána pouze *reciproká*, ve třetím vydání se vyskytuje vedle tohoto názvu i dnešní termín. Matice transponovaná k matici, která je složená z algebraických doplňků prvků matice, se v obou vydání nazývá *adjungovaná* i *přidružená*. Rozkolísanost v označení toho pojmu přetrvává do dnešních dní, některá literatura tuto matici nazývá reciprokou.

Zajímavé je pojmenování vlastního čísla matice. V prvním vydání není nijak zvlášť nazýváno, mluví se o něm jako o kořenu charakteristické rovnice matice. Také ve třetím vydání jeho výslovný název chybí, až na jedinou výjimku[156] je do 65. strany, což je již za polovinou textu, stále nazýváno kořenem charakteristické rovnice. Na uvedené straně je v rámci příkladu, ne ve výkladové části skript, zaveden termín charakteristický (vlastní) vektor matice, který se však neshoduje s pojmem, který si pod termínem vlastní vektor představíme dnes, neboť je na něj kladen další požadavek:

Jednotkové vektory x, o nichž se mluví ve větě 9.3 a které tedy splňují vztahy

$$(A - \lambda E)x = 0, \qquad |x| = 1,$$

se obvykle nazývají charakteristické, (popř. vlastní) vektory matice A. Určete je pro matici $A= \dots$ ([Bo4], 3. vydání, str. 65)

V dalších příkladech je vlastní číslo matice znenadání nazýváno charakte-

[154] Připomeňme, že Eduard Weyr v [We12] nazýval tyto vektory *normálnými soustavami matice.*

[155] Viz 3. kapitola.

[156] Na straně 30 je překvapivě nazváno *charakteristickým kořenem.*

ristickým kořenem matice, v následujícím textu potom jak kořenem charakteristické rovnice matice, tak i charakteristickým kořenem matice.

V současných skriptech, která obsahují teorii matic, se příliš často nesetkáme s pojmy *involuční matice* (matice A, pro kterou $A^2 = E$) a *periodická matice* (matice A, pro kterou existuje přirozené číslo k takové, že $A^k = E$), které jsou zmíněny ve třetím vydání Borůvkových skript.

Přibližně před polovinou století přešel Otakar Borůvka ke studiu diferenciálních rovnic, kde plně využil svých algebraických znalostí. Roku 1946/47 založil vědecký seminář věnovaný diferenciálním rovnicím, který vedl až do vysokého věku. Článek *Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty* publikoval roku 1954. Rozdělil jej do čtyř částí. V první uvedl principy jiných způsobů řešení daného problému, Weierstrassovu a Peano-Bakerovu metodu. V další části se pochvalně vyjádřil o Eduardu Weyrovi, o jeho výsledcích v teorii matic a poznamenal, že *... Weyrova práce nenalezla ve světové literatuře ono místo, které jí přináleží.* ([Bo6], str. 152).

O Weyrově teorii otištěné ve spise *O theorii forem bilinearných* Borůvka napsal:[157]

V ní vyvinul originálním a důmyslným způsobem novou theorii matic, která se co do obsažnosti vyrovná proslulé Weierstrassově theorii elementárních dělitelů a co do jednoduchosti a průhlednosti ji předčí. ([Bo6], str. 152)

Třetí, nejobsáhlejší část věnoval Borůvka vysvětlení samotné Weyrovy teorie. Zopakoval především partii věnovanou tzv. *normální soustavě vektorů příslušné ke kořenu* λ matice A řádu n. Vyjádřil ji schématem

$$\begin{array}{l}
a_{11},\ \dots,\ a_{1,\eta_t},\\
a_{21},\ \dots,\ a_{2,\eta_t},\ a_{2,\eta_t+1},\ \dots,\ a_{2,\eta_{t-1}},\\
a_{31},\ \dots,\ a_{3,\eta_t},\ a_{3,\eta_t+1},\ \dots,\ a_{3,\eta_{t-1}},\ a_{3,\eta_{t-1}+1},\ \dots,\ a_{3,\eta_{t-2}},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{t1},\ \dots,\ a_{t,\eta_t},\ a_{t,\eta_t+1},\ \dots,\ a_{t,\eta_{t-1}},\ a_{t,\eta_{t-1}+1},\ \dots,\ a_{t,\eta_{t-2}},\ \dots,\ a_{t,\eta_1},
\end{array}$$

kde pro vektory platí vztahy

$$\begin{array}{rl}
(A-\lambda E)a_{km}^T = a_{k+1,m}^T & \text{pro}\ \ 1 \le k \le t-1,\ m = 1,\dots,\eta_t,\\
& \text{pro}\ \ 2 \le k \le t-1,\ m = \eta_t+1,\dots,\eta_{t-1},\\
& \text{pro}\ \ 3 \le k \le t-1,\ m = \eta_{t-1}+1,\dots,\eta_{t-2},\\
& \text{atd.}\\
(A-\lambda E)a_{tm}^T = o^T & \text{pro}\ \ m = 1,\dots,\eta_1.
\end{array}$$

Použil tedy tzv. Ferrersův diagram.

Ve čtvrté, stěžejní části práce Borůvka dokázal, že integrálem (dnes bychom řekli řešením) soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koefi-

[157] Obdobný citát použil Otakar Borůvka rovněž v předmluvě ke své knize z roku 1971 (viz dále).

cienty $y' = Ay$ jsou vektory tvaru

$$y_{km} = e^{\lambda x} \cdot (a_{km} + \frac{x}{1!} a_{k+1,m} + \ldots + \frac{x^{t-k}}{(t-k)!} a_{tm}),$$

$$\begin{array}{lll} \text{pro} & 1 \leq k \leq t, & m = 1, \ldots, \eta_t, \\ \text{pro} & 2 \leq k \leq t, & m = \eta_t + 1, \ldots, \eta_{t-1}, \\ \text{pro} & 3 \leq k \leq t, & m = \eta_{t-1} + 1, \ldots, \eta_{t-2}, \\ \text{atd.} & & \end{array}$$

Dále napsal, že sestrojíme-li tyto vektory pro každé vlastní číslo matice, obdržíme celkem n nezávislých řešení, tj. fundamentální systém řešení dané soustavy.

Roku 1971 vyšla Borůvkova učebnice *Základy teorie matic*, v níž je Weyrova teorie poprvé zpracována knižně v české verzi. Vznikla přepracováním jeho vysokoškolského textu *Matice*. Hned v počátku podotkněme, že učebnici lze vzhledem k výběru témat doporučit i současným studentům lineární algebry k osvojení základů maticového počtu. Tomu příliš nebrání ani použitý jazyk. Termíny se ve většině případů shodují s těmi, které byly použity ve třetím vydání skript *Matice* z roku 1966 a které používáme i v dnešní době.[158] Stále však přetrvává preference používání termínu *reciproká matice* před názvem *inverzní matice*, nicméně možnost nazývat tuto matici moderním způsobem zde uvedena je. V definici transponované matice zůstal jako alternativní možnost termín *sdružená matice*. Rovněž u *rozměru vektorového prostoru* je uveden i současný termín *dimenze vektorového prostoru*.[159] Nejinak je tomu u *vzájemné* neboli *lineární nezávislosti vektorů*. Matice transponovaná k matici složené z algebraických doplňků je pojmenována *adjungovaná*, čtenáři je nabídnuta možnost ji nazývat i *maticí přidruženou k dané matici*. Upozorněme jen na několik málo termínů, které se dnes již příliš neužívají, které jsou však i tak snadno pochopitelné: *základní* (dnes kanonická, resp. standardní) *báze vektorového prostoru*, *přímý* (direktní) *součin podprostorů*, *(charakteristické) kořeny* neboli *vlastní hodnoty matice* (vlastní čísla matice). Ke kolizi s dnešní terminologií dochází stejně jako v předchozích skriptech u *adjungované/reciproké matice* a rovněž u opačného vektoru k danému vektoru, který je nazýván též *záporným*. Tímto termínem dnes označujeme vektor, jehož všechny složky jsou (reálná) záporná čísla.

Věnujme se nyní náplni učebnice. Jejím rozborem však současně popíšeme i obsah předchozích skript, neboť porovnáním obou uvažovaných publikací zjistíme, že v knižní verzi přibyly oproti třetímu vydání skript pouze dvě kapitoly. Jsou nazvány *Vektorové prostory* a *Použití normálních soustav vektorů k řešení*

[158] Od prvního vydání skript z roku 1947 došlo samozřejmě ke změnám, které spíše než s odborným jazykem souvisí s vývojem českého jazyka. Vedle nuancí typu *orthogonální matice* a *ortogonální matice* se jedná o drobné změny v používání předložek (např. *matice v číselném tělese* v prvním i třetím vydání skript z let 1947 a 1966 versus *matice nad číselným tělesem* v učebnici z roku 1971).

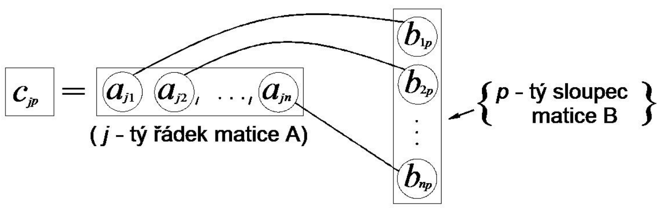
[159] Název *rozměr* (*dimenze*) se v knize vyskytuje v souvislosti s označením počtu prvků báze. Termín *vektorový prostor dimenze n* se neobjevuje, používá se pouze sousloví *n-rozměrný vektorový prostor*.

systémů lineárních homogenních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty.[160] Ve většině případů se shodují i příklady k procvičení a symbolika (např. matice – včetně vektorů – jsou stále ohraničovány hranatými závorkami). Seznam literatury obsahující dvacet položek byl rozšířen o jedinou publikaci.[161]

Podstatnou změnou je tak především šíření povědomí o Eduardu Weyrovi. Ve skriptech je vedle uvedení Weyrovy knihy *O theorii forem bilinearných* v seznamu literatury (a to ve třetím, nikoliv v prvním vydání) Weyrovo jméno zmíněno v jediné vedlejší větě, čímž význam Eduarda Weyra poněkud zapadl. V učebnici je Weyrovi věnován (vedle předmluvy a referencí) samostatný odstavec s upozorněním, že celé následující čtyři kapitoly jsou založeny na jeho teorii.[162]

V učebnici je přehledně představena teorie matic nad číselným tělesem. Tato problematika je náplní stěžejní a v podstatě jedinou. Vektorové prostory jsou studovány v úzké souvislosti s maticemi, teorie determinantů se v knize takřka neobjevuje. Je použita v zásadě pouze k definici hodnosti matice (ihned za ní je však formulována souvislost mezi hodností matice a lineární nezávislostí řádků, resp. sloupců matice) a v některých důkazech.

V úvodu jsou představeny některé speciální typy matic. Zajímavé je, že nulová matice (*matice nula*) je definována zvlášť pro matici typu $m \times n$, navíc bez podmínky $m \neq n$, a zvlášť pro matici čtvercovou. Poté jsou zavedeny základní operace maticového počtu, oproti našim zvyklostem je samostatně definován *skalární součin matice A s číslem r* a *skalární součin čísla r s maticí A*. Pro snazší zapamatování prvků matice $C = AB$ je čtenáři předložena vizuální pomůcka ve formě následujícího schématu:



Po uvedení základních vlastností operací s maticemi následuje samostatná kapitola věnovaná inverzním maticím k matici A. Odděleně jsou zavedeny *matice* $X = A^{-1}$ *reciproké zprava*, pro které platí $AX = E$, kde A je nenulová, ne nutně čtvercová matice, a *matice* $Y = {}^{-1}A$ *reciproké zleva*, které splňují vztah $YA = E$.[163] Pro regulární matici je následně definována matice A^{-1} reciproká neboli inverzní k matici A a ukázány její nejdůležitější vlastnosti. Pro komutující matice A a B, z nichž A je regulární, je zaveden *podíl B/A matice A maticí B* jako matice $A^{-1}B$, resp. BA^{-1}.

[160] Malá část úvodu druhé z jmenovaných kapitol je navíc uvedena v jiné kapitole skript.

[161] Seznam literatury v prvním vydání skript obsahuje pouhé čtyři položky.

[162] V dataci smrti Eduarda Weyra se Otakar Borůvka dopustil v obou publikacích omylu, neboť uvedl rok 1894, který je rokem úmrtí Eduardova bratra Emila.

[163] Požadavek na nenulovost matice A byl doplněn až v erratech.

Následuje partie o vektorových prostorech, jejich lineárních zobrazeních[164] a transformacích vektorů. Tím si autor připravil podklad pro vymezení vektoru x, který se vynásobením maticí zleva transformuje na daný vektor λx, tedy na problematiku charakteristické rovnice matice, jejích vlastních čísel a vlastních vektorů. Poměrně značná pozornost je věnována ortogonálním a unitárním maticím, krátce je zmíněna čtvercová *matice P převádějící matici A v sebe* ($P^T AP = A$). Dále se studuje problematika funkcí s maticovým argumentem. V kapitole o minimálním polynomu matice je zaveden pojem *vzájemné nezávislosti množiny matic* téhož typu, který dnes většinou restringujeme pouze na lineární nezávislost vektorů, je zde formulována a dokázána Cayleyova-Hamiltonova věta.

Učivem o hodnosti a nulitě matice, včetně vět o hodnosti, resp. nulitě součinu dvou matic, připravil Otakar Borůvka čtenáře na následující čtyři kapitoly (17. až 20. z celkových dvaceti čtyř, celkem 31 stran) věnované Weyrově teorii.

Nejdříve uvažoval čtvercovou matici A stupně n, která má 0 za s-násobné vlastní číslo, přičemž $s \geq 1$. Poté dokázal, že 0 je současně s-násobným vlastním číslem matice A^k, $k \in \mathbb{N}$, a že pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí následující vztahy:

(i) $\text{nul } A^k \leq s$,
(ii) $\text{nul } A^k \leq \text{nul } A^{k+1}$
(iii) *jestliže pro určité k platí* $\text{nul}\, A^k = s$, *potom* $s = \text{nul}\, A^k = \text{nul}\, A^{k+1}$
(iv) *jestliže* $A^k < s$, *potom* $\text{nul}\, A^k < \text{nul}\, A^{k+1}$
(v) $\text{nul}\, A^{k+1} - \text{nul}\, A^k \geq \text{nul}\, A^{k+2} - \text{nul}\, A^{k+1}$.

Odsud usoudil, že existuje mocnina t matice A taková, že

$$s = \text{nul } A^t = \text{nul } A^{t+1} = \dots,$$

zatímco nulity matic, které v posloupnosti A, A^2, A^3, ..., A^t předcházejí matici A^t, postupně rostou.

Přehledným zápisem vyjádřil platné vztahy

$$0 < \text{nul } A < \text{nul } A^2 < \cdots < \text{nul } A^t = s = \text{nul } A^{t+1},$$

které umožňují zavést přirozená čísla $\eta_1,\ \eta_2, \dots, \eta_t$ vztahy

$$\eta_1 = \text{nul } A, \quad \eta_2 = \text{nul } A^2 - \text{nul } A, \quad \dots, \quad \eta_t = \text{nul } A^t - \text{nul } A^{t-1}.$$

Tato čísla prozatím nijak nepojmenoval, uvedl však jejich uspořádání:

$$\eta_1 \geq \eta_2 \geq \ldots \geq \eta_t > 0.$$

Teprve nyní definoval charakteristická čísla libovolné čtvercové matice A příslušná obecnému vlastnímu číslu λ. Než tak učinil, připomněl ještě tvrzení, že jestliže λ je s-násobné vlastní číslo matice A, potom 0 je s-násobným vlastním číslem matice $(A - \lambda E)$. Pojmy a vlastnosti definované pro matici A mající alespoň jednoduché vlastní číslo 0 tak přenesl pro matici $(A - \lambda E)$,

[164] Termín *homomorfismus* se v knize neobjevuje, je uvedena alternativa *lineární operátor.*

která také má alespoň jednoduché vlastní číslo 0. V příslušných termínech je však používána matice A, nikoli matice $A - \lambda E$. Například rozdíly nulit matic $(A - \lambda E)$, $(A - \lambda E)^2, \ldots$ nazval *charakteristická čísla matice A příslušná k vlastnímu číslu λ*, což plně odpovídá přímému definování charakteristických čísel bez „přechodu“ od vlastního čísla 0.

Podotkněme, že v obdobném pořadí (od matice A mající s-násobné vlastní číslo 0, přes odvození některých vztahů pro nulity mocnin matice A až k definování charakteristických čísel příslušných obecnému vlastnímu číslu λ) vystavěl své výsledky i Eduard Weyr v knize *O theorii forem bilinearných* z roku 1889. Podal je však tak, že jsou pro dnešního čtenáře těžko pochopitelné. Naproti tomu výklad, který použil Otakar Borůvka je elegantní a prezentovaný v podstatě jazykem současné algebry. Ve svém krátkém článku *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* z roku 1885, který má formu předběžného oznámení výsledků, postupoval Weyr jinak; charakteristická čísla matice A příslušná obecnému vlastnímu číslu λ definoval, jak již bylo řečeno v 2. kapitole, přímo pomocí rozdílů nulit po sobě jdoucích mocnin matice $(A - \lambda E)$, a to ihned v úvodu svého článku.

Otakar Borůvka (stejně jako Eduard Weyr v roce 1889) v učebnici svým dalším odvozováním potvrdil, že polynom

$$(\lambda - \lambda_1)^{t_1}(\lambda - \lambda_2)^{t_2} \; \ldots \; (\lambda - \lambda_u)^{t_u},$$

kde $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_u$ značí různá vlastní čísla matice A a $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_u$ po řadě počty jejich charakteristických čísel, je minimálním polynomem matice A.

Na závěr kapitoly pojmenoval posloupnost čísel

$$[(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{t_1}),\ (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{t_2}),\ \ \ldots,\ (\upsilon_1,\ \upsilon_2,\ \ldots,\ \upsilon_{t_u})]\,,$$

která je složená z uspořádaných posloupností charakteristických čísel příslušných všem navzájem různým vlastním číslům matice A řádu n, *Weyrovou charakteristikou matice A*. Poznamenal, že součet všech charakteristických čísel Weyrovy charakteristiky matice A je roven součtu násobností jednotlivých vlastních čísel.

V úvodu následující kapitoly Otakar Borůvka charakterizoval *vektor řádu k* matice A, $k \geq 1$. Jedná se o vektor, pro nějž platí

$$A^k x^T = o^T, \qquad A^{k-1} x^T \neq o^T.$$

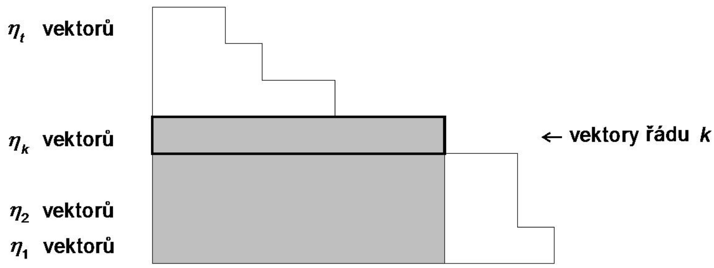
Jedná se tedy o pojem též nazývaný *vektor výše k*.

Další strany autor plně věnoval normální soustavě vektorů matice A. Stále uvažoval čtvercovou matici A řádu n, jež má s-násobné ($s \geq 1$) vlastní číslo 0 a jemu příslušná charakteristická čísla jsou $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$. Tyto pojmy rozšířil pro obecná vlastní čísla matice až v druhé části kapitoly.

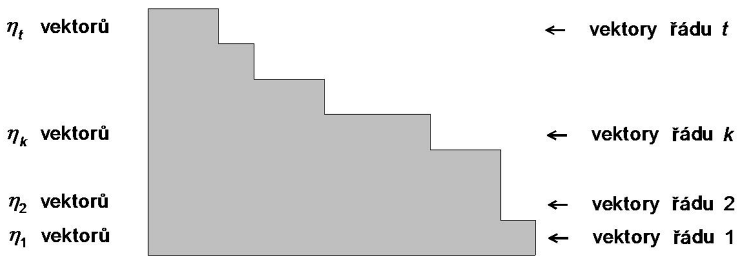
Začal pracovat s malou skupinou vektorů, k nimž postupně přidával další. Nejprve pro $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq t$, dokázal existenci η_k vektorů $x_1, x_2, \ldots, x_{\eta_k}$, pro něž platí

$$\begin{array}{llllll}
1) & x_1^T, & x_2^T, & \ldots, & x_{\eta_k}^T & \text{jsou řádu } k, \\
2) & Ax_1^T, & Ax_2^T, & \ldots, & Ax_{\eta_k}^T & \text{jsou řádu } k-1, \\
\multicolumn{6}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
k) & A^{k-1}x_1^T, & A^{k-1}x_2^T, & \ldots, & A^{k-1}x_{\eta_k}^T & \text{jsou řádu } 1
\end{array}$$

a všechny uvedené vektory jsou lineárně nezávislé. Dokázal tedy existenci $k \cdot \eta_k$ lineárně nezávislých vektorů $x_1, x_2, \ldots, x_{\eta_k}$ řádu k a jejich „obrazů“, násobíme-li vektory $x_1^T, x_2^T, \ldots, x_{\eta_k}^T$ zleva maticí A, a to celkem $(k-1)$-krát. Skupinu těchto vektorů lze v rámci schématicky znázorněného Ferrersova diagramu příslušného vlastnímu číslu 0 zaznamenat takto:



Dále množinu vektorů rozšířil na množinu všech s vektorů *normální soustavy vektorů příslušné k (s-násobnému) vlastnímu číslu* 0 *matice A*.



Poté přistoupil k definici stěžejního pojmu kapitoly, tj. pojmu *normální soustava vektorů* matice A, a to pro libovolnou čtvercovou matici řádu n. V tomto místě opět využil „posunu“ mezi nulovým vlastním číslem matice $A - \lambda_i E$ a obecným vlastním číslem λ_i matice A: nechť všechna navzájem různá vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ a nechť $s_1, s_2, \ldots, s_u$ značí jejich násobnosti. Potom vlastní číslo 0 matice

$$\begin{array}{ll}
A - \lambda_1 E & \text{je } s_1\text{-násobné}, \\
A - \lambda_2 E & \text{je } s_2\text{-násobné}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
A - \lambda_u E & \text{je } s_u\text{-násobné}.
\end{array}$$

Nechť normální soustava vektorů příslušných vlastnímu číslu 0 matice

$$
\begin{array}{ll}
A - \lambda_1 E & \text{je } a_1, a_2, \ldots, a_{s_1}, \\
A - \lambda_2 E & \text{je } b_1, b_2, \ldots, b_{s_2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
A - \lambda_u E & \text{je } u_1, u_2, \ldots, u_{s_u},
\end{array}
$$

potom se soustava všech uvedených vektorů nazývá *normální soustava vektorů matice A*. Borůvka rovněž dokázal, že těchto n vektorů je lineárně nezávislých.

V další partii se blíže věnoval sloupcům Ferrersova diagramu příslušného danému vlastnímu číslu a podprostorům aritmetického vektorového prostoru dimenze n, které jsou generovány vektory v jednotlivých sloupcích schématu.

Protože jsou tyto podprostory invariantní vzhledem k homomorfismu f daného vztahem $f(x) = Ax^T$, mohl Borůvka využít dříve dokázaných výsledků pro podprostory této vlastnosti k odvození tvrzení, že ke každé[165] matici A lze nalézt čtvercovou matici B stupně n, pro kterou platí $B = Q^{-1}AQ$, přičemž sloupce matice Q jsou vektory *normální soustavy vektorů matice A*. Dále se Borůvka věnoval podobě matice B, a dokázal tak existenci Jordanova kanonického tvaru matice A, Jordanovo jméno však na tomto místě nezmínil. Na závěr kapitoly podotkl, že počet diagonálních bloků (dnes bychom řekli Jordanových buněk) příslušných k témuž vlastnímu číslu je roven největšímu z charakteristických čísel matice A patřících k tomuto vlastnímu číslu.

Tím se dostal k námětu kapitoly následující, kterým je podobnost matic. Stejně jako Eduard Weyr se zabýval otázkou invariantů podobnosti matic a popsal způsob, jak z normální soustavy vektorů matice B získat normální soustavu vektorů matice A, jsou-li matice A a B podobné. Představil rovněž problematiku současné transformace dvou párů matic, kterou studoval Eduard Weyr.

Poté následuje kapitola věnovaná soustavám lineárních diferenciálních rovnic, která je takřka kopií čtvrté části Borůvkova článku z roku 1954.[166] Dále je čtenáři předložena (bez důkazů) i Weierstrassova teorie elementárních dělitelů, na ní založený způsob řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a klasifikace regulárních párů matic.

Jedním ze studentů, kteří pod vedením Otakara Borůvky zpracovali své rigorózní práce, byl Miroslav Novotný (nar. 1922).

4.3 Weyrova teorie v pojetí Miroslava Novotného

- *O zobecnění Weyrovy theorie charakteristických čísel* [No1], 1950
- *Abstraktní jádro Weyrovy konstrukce charakteristických čísel matic* [No2], 1953
- *Zaměnitelnost endomorfismů lineárních prostorů* [No7], 1982
- *Mono-unary algebras in the work of Czechoslovak mathematicians* [No8], 1990

Miroslav Novotný byl jednou z vůdčích osobností poválečné brněnské i československé matematiky. Také Novotný spojil nemalou část života s brněnskou

[165] Připomeňme raději, že uvažoval matice nad tělesem komplexních čísel.

[166] Ponechána je struktura článku i značení. Příslušná část knihy je navíc obohacena o konkrétní příklad a jeho řešení.

univerzitou. Řádným profesorem matematiky byl jmenován v roce 1963. V roce 1971 sice univerzitu opustil a stal se členem Matematického ústavu ČSAV v Brně, ale roku 1990 se vrátil zpět. V počátcích své kariéry pracoval rovněž na Vysoké škole technické v Brně a na Vojenské technické akademii v Brně.

Oblast zájmů Miroslava Novotného byla ovlivněna jeho učiteli. Řešil problémy, které přirozeně vyvstaly v kolektivu brněnských matematiků. Zabýval se topologií, zaměnitelnými homomorfismy, úplně i částečně uspořádanými množinami, teorií gramatických kategorií a monounárními algebrami.[167]

Roku 1950 vyšel Novotného článek *O zobecnění Weyrovy theorie charakteristických čísel*, který obsahuje hlavní myšlenky příspěvku předneseného v roce 1949 na společném 3. sjezdu československých a 7. sjezdu polských matematiků v Praze. Dvoustránková poznámka je věnována zobecnění pojmu nulita a charakteristické číslo. Jedná se o stručné nastínění možného, od Weyrova způsobu zcela odlišného přístupu k dané problematice. O Novotného uchopení dané otázky mnohé prozrazuje věta uvedená na začátku textu:

Matici můžeme chápati jako deformaci[168] *vektorového prostoru do sebe.* ([No1], str. 239)

Základní pojmy Weyrovy teorie, např. nulita a charakteristická čísla, jsou zavedeny pomocí pojmů *A-prostor* a *A-kolineace.*

Definici charakteristických čísel lze pak zobecnit tak, že místo vektorového prostoru vezmeme projektivní A-prostor ... a místo jeho deformace do sebe vezmeme A-kolineaci projektivního A-prostoru. ([No1], str. 239)

Písmeno „A" vyskytující se v názvech pojmů odkazuje na německý termín *Abhängigkeitsraum*, konkrétně na publikaci Otto Haupta (1887–1988), Georga Nöbelinga (1907–2008) a Christiana Pauce *Über Abhängigkeitsräume* [HNP1] z roku 1940.

Po krátkém úvodu Novotný přistoupil k definici pojmů. Nechť P je daná množina, v níž ke každé podmnožině N existuje její *uzávěr* $u(N)$, který má následující vlastnosti:[169]

(i) jestliže $N \subseteq P$, potom $N \subseteq u(N)$,
(ii) jestliže $N_1 \subseteq N_2 \subseteq P$, potom $u(N_1) \subseteq u(N_2)$,
(iii) jestliže $N \subseteq P$, potom $u[u(N)] \subseteq u(N)$,
(iv) jestliže $N \subseteq P$, $x_1, x_2 \in P$, $x_1 \notin u(N)$, $x_2 \notin u(N \cup \{x_1\})$, potom $x_1 \notin u(N \cup \{x_2\})$.

[167] Více o životě a díle Miroslava Novotného viz jubilejní článek Vítězslava Nováka *Profesor Miroslav Novotný šedesátiletý* [Na1] z roku 1982 nebo práce Vítězslava Nováka a Bedřicha Půži *K sedmdesátinám prof. RNDr. Miroslava Novotného, DrSc.* [NP1] z roku 1992.

[168] V dnešní terminologii rozumíme deformací endomorfismus, resp. lineární zobrazení, resp. operátor.

[169] Uvedené vlastnosti zapsal Novotný pozměněnou symbolikou. V první řadě používal místo symbolu $\subseteq$ symbol $\subset$. K označení průniku a spojení používal znaky $\cdot$ a $+$. Námi používané symboly $\cap$ a $\cup$ byly ve světě přijaty po 2. světové válce, poprvé se zřejmě v dnešním smyslu objevily v knize *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* [Pn2], kterou roku 1888 publikoval Giuseppe Peano. Více viz např. monografie Jindřicha Bečváře *Z historie lineární algebry* [Be6], str. 369.

Podotkněme, že vzhledem k vlastnosti (i) lze u vlastnosti (iii) přesněji psát $u[u(N)] = u(N)$.

Množina, která se rovná svému uzávěru, se nazývá uzavřená; uzavřené podmnožiny se nazývají podprostory. *Bází* (v tehdejším jazyce *basí*) podmnožiny $N \subseteq P$ autor nazval libovolnou minimální podmnožinu $B \subseteq P$, pro kterou $u(N) = u(B)$.

Dále předpokládal, že

(v) každá podmnožina N množiny P má konečnou bázi.

Za této podmínky zavedl *hodnost* $r(N)$ množiny N jako počet prvků báze. Pomocí hodnosti zformuloval další podmínku:

(vi) pro každé dvě uzavřené množiny N_1, $N_2 \subset P$ je
$r[u(N_1 \cup N_2)] = r(N_1) + r(N_2) - r(N_1 \cap N_2)$.

Množinu P, která splňuje šest uvedených vlastností nazval Novotný *projektivním A-prostorem*, uzavřené spojité zobrazení f tohoto prostoru do téhož podprostoru jeho *endomorfismem*. *Jednoznačným rozkladem prostoru P příslušným k endomorfismu f* rozuměl dvojici podprostorů (neboli uzavřených podmnožin) P_1, P_2, pro které platí

(i) $r(P) = r(P_1) + r(P_2),\ P_1 \cap P_2 = u(\emptyset)$,
(ii) $f(P_1) \subset P_1,\ f(P_2) \subset P_2$,
(iii) pro každé dva prvky x_1, x_2, pro které
$x_1 \in P_1,\ x_2 \in P_2,\ x_1 \notin u(\emptyset),\ x_2 \notin u(\emptyset), f(x_1) \in u(x_1),\ f(x_2) \in u(x_2)$,
a každý prvek $x \in u(\{x_1\} \cup \{x_2\}), x \notin u(x_1), x \notin u(x_2)$,
platí $f(x) \notin u(x)$.

Endomorfismus jistých vlastností je nazýván *silný* a jiných daných vlastností *úplný*, silný a úplný endomorfismus potom *A-kolineace*. Systém všech jednoznačných rozkladů prostoru P příslušných k témuž silnému endomorfismu f určí jistý rozklad prostoru P na podprostory P_1, P_2, …, P_q takové, že

$$r(P) = r(P_1) + r(P_2) + \ldots + r(P_q),$$

$$P_i \cap P_j = u(\emptyset) \quad \text{pro} \quad i \neq j,$$

$$f(P_1) \subset P_1, \quad f(P_2) \subset P_2, \quad \ldots, \quad f(P_q) \subset P_q.$$

Tyto podprostory jsou nazvány *charakteristické*.

Nechť f je A-kolineace projektivního A-prostoru P a N charakteristický podprostor patřící do rozkladu prostoru P, který přísluší A-kolineaci f. Úplnost A-kolineace zajistí existenci alespoň jednoho prvku $x \in N$, $x \notin u(\emptyset)$, takového, že $f(x) \in u(x)$. Množinu všech prvků této vlastnosti označme S_1, dále definujme rekurentně množinu S_k jako množinu všech $x \in N$, pro která

$$x \notin u(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k-1}),$$

$$f(x) \in u(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k-1} \cup \{x\}).$$

Označíme-li

$r(S_1) = \gamma_1,$
$r(S_1 \cup S_2) = \gamma_2,$
$\dots\dots\dots\dots,$
$r(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k) = \gamma_k,$
$\dots\dots\dots\dots,$
$r(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_t) = r(N) = \gamma_t,,$

jsou čísla $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ *nulitami* a čísla

$\eta_1 = \gamma_1,$
$\eta_2 = \gamma_2 - \gamma_1,$
$\dots\dots\dots\dots,$
$\eta_t = \gamma_t - \gamma_{t-1}$

charakteristickými čísly patřícími k charakteristickému podprostoru N.

Tato problematika je podrobněji rozvinuta v Novotného práci z roku 1953 nesoucí jméno *Abstraktní jádro Weyrovy konstrukce charakteristických čísel matic.* V její předmluvě Novotný napsal:

Prof. Borůvka mi položil problém, jaká část Weyrovy theorie charakteristických čísel se dá vybudovat v abstraktním prostoru bez zavedení algebraických operací. V této práci se dokazuje, že lineární prostor se dá nahradit t. zv. A-projektivním prostorem a lineární zobrazení t. zv. A-deformací. Tyto dva pojmy postačí k definici charakteristických čísel a tato čísla podrží ty vlastnosti klasické theorie, jež jsou popsány ve větě 1. Na druhé straně se mi nepodařilo nalézti vhodný ekvivalent k pojmu kořen lineárního zobrazení ani zobecnit systémy normálních vektorů. ([No2], str. 41)

Zavedení základních pojmů (A-kolineace, projektivní A-prostor, uzávěr množiny apod.) je provedeno zcela jinou řečí než v článku z roku 1950, v němž se například vůbec nepracuje s pojmy závislost a nezávislost systémů, které patří v druhé práci mezi stěžejní.[170]

A-prostorem se rozumí každá množina P, jejíž každý konečný podsystém $x_1, x_2, \ldots, x_p$ je buď *závislý*, nebo *nezávislý*. Závislý systém se přitom označuje $A[x_1, x_2, \ldots, x_p]$, nezávislý $U[x_1, x_2, \ldots, x_p]$ (volba písmen „A“ a „U“ zřejmě pochází opět z německých termínů *abhängig* a *unabhängig*), číslo p je nazváno *délkou systému* $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Uvedeny jsou následující axiomy závislosti:

(i) *Jestliže* $x_1 = x_2$, *potom* $A[x_1, x_2]$ (axiom K).
(ii) *Jestliže* $A[x_1, x_2, \ldots, x_p]$, *potom* $A[x_1, x_2, \ldots, x_p, y]$ *pro každé* $y \in P$ (axiom I).
(iii) *Jestliže* $U[x_1, x_2, \ldots, x_p]$, $A[x_1, x_2, \ldots, x_p, y]$, $A[x_1, x_2, \ldots, x_p, z]$, *potom* $A[x_1, x_2, \ldots, x_p, y, z]$ (axiom A).

[170] Jedná se o přístup přejatý z již zmíněné publikace *Über Abhängigkeitsräume* z roku 1940, neboť Novotný napsal ([No2], str. 41):
HAUPT, NÖBELING a PAUC označují jako A-prostor množinu P, pro jejíž …
a poté vysvětlil základní pojmy.

A-prostorem *o konečné hodnosti* je nazván A-prostor, jehož nezávislé systémy mají ohraničené délky. Pro $T \subset P$ je definován pojem *hodnosti množiny* T jako maximum délek jejích nezávislých systémů (značí se $R(T)$). Pro nezávislý systém S skládající se z prvků $x_1, x_2, \ldots, x_p$ je zavedena množina $L(S)$ všech prvků $y \in P$ takových, že $A[x_1, x_2, \ldots, x_p, y]$ a je nazvána *podprostorem* (*uzavřenou množinou*) vytvořenou systémem S.

Symbolem $L(T)$ se značí *uzávěr množiny* $T \subset P$, který je tentokrát definován jako průnik všech podprostorů v P obsahující množinu T. *A-projektivním prostorem* se rozumí A-prostor o konečné hodnosti, pro jehož každé dva podprostory T_1, T_2 platí:

$$R(T_1) + R(T_2) = R(T_1 \cup T_2) + R(T_1 \cap T_2).$$

A-endomorfismem A-projektivního prostoru P se rozumí uzavřené, spojité zobrazení $F : P \to P$, tj. endomorfismus, v němž je obrazem uzavřené množiny opět uzavřená množina a platí $F[L(T)] \subset L[F(T)]$, *A-vlastním prvkem* vzhledem k F prvek $x \in P$, pro který platí $R[\{x\}] = 1$ a $F(x) \in L[\{x\}]$. A-endomorfismus jistých vlastností je opět nazván *silným*, resp. *úplným*, silný a úplný endomorfismus *A-deformací*. Poznamenejme ještě, že se v práci objevil analogický termín pro nulitu, a to *defekt*.

Po uvedení potřebných definic přistoupil autor ke konstrukci pojmů, které jsou analogiemi pojmů Eduarda Weyra. Jak uvidíme, postupoval obdobně jako ve svém článku z roku 1950:

Je-li P A-projektivní prostor, F jeho A-deformace, N podprostor speciálních vlastností (tentokrát je nazván *kořenovým podprostorem*), S_1 množina všech A-vlastních prvků v N, potom lze rekurentně definovat množiny S_k jako množiny všech prvků

$$x \in N - L(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k-1}),$$

pro které

$$F(x) \in L[S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k-1} \cup \{x\}].$$

Označíme-li

$R(S_1) = \gamma_1,$
$R(S_1 \cup S_2) = \gamma_2,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots,$
$R(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k) = \gamma_k,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots,$
$R(N) = \gamma_t,$

potom čísla

$\eta_1 = \gamma_1,$
$\eta_2 = \gamma_2 - \gamma_1,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots,$
$\eta_t = \gamma_t - \gamma_{t-1}$

nazveme *A-charakteristickými čísly patřícími k A-kořenovému podprostoru N.* A-charakteristická čísla, která patří ke všem A-kořenovým podprostorům uvažované A-deformace F, se nazývají *A-charakteristická čísla A-deformace F.* Dále jsou v článku zapsány příslušnou řečí vlastnosti čísel $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ dobře známé z Weyrovy teorie, konkrétněji, že součet všech A-charakteristických čísel A-kořenového podprostoru N je roven *hodnosti* tohoto *podprostoru* a celkový součet všech A-charakteristických čísel dané A-deformace F je roven *hodnosti prostoru P.* V závěru práce je dokázána věta, k níž Miroslav Novotný po celý text spěl: A-charakteristická čísla lineárního zobrazení n-rozměrného lineárního prostoru nad tělesem komplexních čísel jsou identická s Weyrovými charakteristickými čísly.

Odkaz na výsledky Eduarda Weyra (i Otakara Borůvky) nalezneme rovněž v Novotného článku *Zaměnitelnost endomorfismů lineárních prostorů* [No7] z roku 1982. Jedná se o převedení problému nalezení všech matic, které komutují s danou čtvercovou maticí, do řeči vektorových prostorů. Jsou zde však uvedeny výsledky úlohy obecnější, v níž se abstrahuje od linearity prostoru i zobrazení: je dána množina a její transformace, úkolem je nalézt všechny transformace, které s ní komutují. Jedná se tedy o problematiku úzce spojenou s monounární algebrou, která je definována jako uspořádaná dvojice $\mathcal{U} = (c_{\mathcal{U}}, o_{\mathcal{U}})$, kde $c_{\mathcal{U}}$ je množina a $o_{\mathcal{U}}$ její transformace. Nepřekvapí nás, že Weyrovy a Borůvkovy práce jsou zmíněny i v přehledové stati *Mono-unary algebras in the work of Czechoslovak mathematicians* [No8], kterou Miroslav Novotný publikoval v roce 1990. Konkrétně se jedná o Weyrův spis *O theorii forem bilinearných* a Borůvkovu knihu *Základy teorie matic*, obě byly uvedeny i v Novotného článku z roku 1982.

4.4 Weyrova teorie v pracích Jiřího Čermáka

- *O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic* [Ce1], 1952
- *O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic* [Ce2], 1953
- *On a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients* [Ce3], 1954
- *O systémech lineárních diferenčních rovnic s periodickými koeficienty* [Ce4], 1954
- *Poznámka o limitním přechodu diferenčních rovnic v rovnice diferenciální* [Ce5], 1956
- *Weyrovy soustavy normálních vektorů a jejich použití v matematické analyse* [Ce6], 1958

Rovněž Jiří Čermák (nar. 1928) patřil k brněnské matematické komunitě. Během studií na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity byl asistentem profesora Josefa Kauckého (1895–1982) na Vysoké škole technické Dr. E. Beneše, pracoval rovněž na Vojenské akademii v Brně.[171] Později přešel do Prahy

[171] Po vzniku Vojenské akademie v Brně roku 1951 přešla část katedry Vysoké školy tech-

do Ústavu jaderného výzkumu, kde pracoval (v oblasti reaktorové fyziky) až do svého penzionování v polovině devadesátých let. V rámci své práce působil rovněž ve Spojeném ústavě jaderných výzkumů v Dubně v tehdejším SSSR.

Weyrově teorii se věnoval ve své doktorské práci *O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic*, kterou obhájil roku 1952, a také ve své disertační práci *Weyrovy soustavy normálních vektorů a jejich použití v matematické analyse* z roku 1958. Mezi obhajobami těchto prací, v letech 1953 až 1956, publikoval čtyři práce o diferenciálních a diferenčních rovnicích, v nichž Weyrovu teorii využil.

První ze svých článků Jiří Čermák nazval stejně jako svoji doktorskou práci, tj. *O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic.* V úvodu zdůraznil, že ho k problematice Weyrovy teorie přivedl Otakar Borůvka. Jeho vliv je v práci snadno čitelný a jeho výsledky hojně využívány.

Idea této metody náleží p. prof. O. Borůvkovi, který ve svých přednáškách na Masarykově universitě podobným způsobem odvodil obecné řešení homogenního systému lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Prof. Borůvka mě také upozornil na Weyrovu theorii a možnosti jejího použití v různých částech matematické analysy. ([Ce2], str. 338)

Novinkou tohoto článku je využití Weyrovy teorie pro řešení soustavy lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty. Cesta Jiřího Čermáka k těmto rovnicím byla opět ovlivněna zkušenějším brněnským kolegou:

Prof. Kaucký obrátil moji pozornost na diferenční počet, což vedlo z mé strany k přenesení výsledků z diferenciálních rovnic na rovnice diferenční.[172]

V uvedeném článku autor nejprve zopakoval poněkud překvapivě i úvodní pojmy teorie matic a dále uvedl základy Weyrovy teorie nutné k dalšímu výkladu. Jako jeden z mála matematiků zaznamenal rovněž způsob sestrojení typického tvaru matice o předepsaných vlastních číslech a příslušných charakteristických číslech. Postupoval, až na mírně pozměněnou symboliku, stejně jako Eduard Weyr. Z použité terminologie podotkněme, že vlastní čísla matice nazýval *charakteristické kořeny matice*, stručněji *kořeny matice*.[173]

Pro s_p-násobné nenulové vlastní číslo λ_p matice A řádu n sestrojil matici

$$\frac{1}{\lambda_p}(A - \lambda_p E)$$

---

nické Dr. E. Beneše na toto nové pracoviště. Zde byl vedoucím (*náčelníkem*) katedry matematiky Josef Kaucký, jeho zástupcem Miroslav Novotný. Po odchodu Novotného na Přírodovědeckou fakultu Masarykovy univerzity roku 1953 po něm převzal funkci zástupce právě Jiří Čermák.

[172] Z korespondence s autorkou této disertační práce (únor 2012).

[173] Jiří Čermák evidentně Weyrovu teorii studoval přímo z Weyrovy knížky *O theorii forem bilinearných.* Nejenže mnohdy použil stejné značení a postupy, ale na jednom místě poukazuje i na konkrétní stranu, kde se Eduard Weyr dopustil chyby. Jmenovanou publikaci spolu s Borůvkovými skripty *Matice* a MacDuffeeho monografií *The Theory of Matrices* doporučil čtenáři ke studiu Weyrovy teorie.

Připomeňme, že Eduard Weyr používal termín *kořen* matice.

a uvedl, že má s_p-násobné vlastní číslo 0. Dle Weyrovy teorie dále platí, že Weyrova charakteristika příslušná k s_p-násobnému vlastnímu číslu 0 matice

$$\frac{1}{\lambda_p}(A-\lambda_p E)$$

je shodná s Weyrovou charakteristikou příslušnou k s_p-násobnému vlastnímu číslu λ_p matice A.

Jiří Čermák se dále zabýval otázkou, jakým způsobem lze z normální soustavy vektorů příslušné nenulovému s_p-násobnému vlastnímu číslu λ_p matice A (neboli k s_p-násobnému nulovému vlastnímu číslu matice $(A-\lambda_p E)$) získat normální soustavu vektorů příslušnou s_p-násobnému vlastnímu číslu 0 matice $\frac{1}{\lambda_p}(A-\lambda_p E)$.

Uvedl následující způsob: v normální soustavě vektorů

$a_{11},\ \ldots,\ a_{1,\eta_{t_p}},$
$a_{21},\ \ldots,\ a_{2,\eta_{t_p}},\ \ a_{2,\eta_{t_p}+1},\ \ldots,\ a_{2,\eta_{t_p-1}},$
$a_{31},\ \ldots,\ a_{3,\,\eta_{t_p}},\ \ a_{3,\eta_{t_p}+1},\ \ldots,\ a_{3,\eta_{t_p-1}},\ \ a_{3,\eta_{t_p-1}+1},\ \ldots,\ a_{3,\eta_{t_p-2}},$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$a_{t_p1},\ \ldots,\ a_{t_p,\eta_{t_p}}, a_{t_p,\eta_{t_p}+1}, \ldots, a_{t_p,\eta_{t_p-1}}, a_{t_p,\eta_{t_p-1}+1}, \ldots, a_{t_p,\eta_{t_p-2}}, \ldots, a_{t_p,\eta_1},$

příslušné nenulovému s_p-násobnému vlastnímu číslu λ_p matice A stačí ponechat první řádek beze změny, vektory ve druhém řádku vynásobit číslem $\frac{1}{\lambda_p}$, vektory ve třetím řádku vynásobit číslem $(\frac{1}{\lambda_p})^2$ atd. až konečně vektory v posledním řádku vynásobit číslem $(\frac{1}{\lambda_p})^{t_p-1}$. Obecně se k-tý řádek násobí číslem $(\frac{1}{\lambda_p})^{k-1}$. Autor tak zavedl nový pojem, *redukovanou normální soustavu vektorů příslušnou ke kořenu λ_p matice A*. Vektor redukované normální soustavy vektorů vyskytující se na stejném místě jako vektor a_{km} příslušné normální soustavy vektorů dále značme d_{km}.

Jiří Čermák opět považoval za zřejmé, že normální redukovaná soustava vektorů příslušná k s_p-násobnému vlastnímu číslu λ_p matice A je normální soustavou vektorů příslušnou k s_p-násobnému vlastnímu číslu 0 matice $\frac{1}{\lambda_p}(A-\lambda_p E)$, pouze konstatoval platnost příslušných vztahů a nezávislost nové soustavy vektorů. Nezávislost vektorů je vzhledem ke konstrukci redukované soustavy vektorů skutečně zřejmá, ukažme ještě, že vektory z prvních t_p-1 řádků se při násobení maticí $\frac{1}{\lambda_p}(A-\lambda_p E)$ zleva zobrazí na vektory, které se ve výše uvedeném schématu nacházejí ihned pod nimi, a při stejné operaci s vektory v posledním řádku získáme vždy nulový vektor:

Pro $1 \leq k \leq t_p-1,\ m = 1, 2, \ldots, \eta_{t_p-k+1}$ platí

$$\frac{1}{\lambda_p}(A-\lambda_p E)d_{km}^T = \frac{1}{\lambda_p}(A-\lambda_p E)\left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^{k-1} a_{km}^T =$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^{k}(A-\lambda_p E)a_{km}^T = \left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^{k} a_{k+1,\,m}^T = d_{k+1,\,m}^T.$$

Rovněž pro $k = t_p,\ m = 1, 2, \ldots, \eta_1$ má redukovaná soustava vektorů požadované vlastnosti, neboť

$$\frac{1}{\lambda_p}(A - \lambda_p E)d_{km}^T = \frac{1}{\lambda_p}(A - \lambda_p E)\left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^{k-1} a_{km}^T =$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^{k} (A - \lambda_p E)a_{km}^T = \left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^{k} o^T = o^T.$$

Pro matici, jejíž vlastní čísla jsou nenulová, utvořil očekávaným způsobem (tj. sestrojením redukované soustavy vektorů pro každé vlastní číslo) soustavu n vektorů, tzv. *redukovanou normální soustavu vektorů příslušnou k matici A*.

S ohledem na snadnější vyjadřování při aplikaci na systém diferenčních rovnic ... jest nově zaveden pojem redukované normální soustavy vektorů matice. ([Ce2], str. 337)

Jedná se o využití Weyrovy teorie při řešení homogenní soustavy lineárních diferenčních rovnic

$$u_i(x+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (*)$$

kde x je nezávisle proměnná, a_{ij} jsou konstanty.

Ukazuji, že obecné řešení zmíněného systému diferenčních rovnic je známo a dá se napsat, což je obzvláště pozoruhodné, explicitními vzorci, jsou-li známy charakteristické kořeny a redukovaná normální soustava vektorů matice koeficientů systému. ([Ce2], str. 338)

K libovolnému vlastnímu číslu λ_p násobnosti s_p stačí sestrojit s_p vektorů

$$u_{km} = \lambda_p^x \Big[d_{km} + \frac{x}{1!} d_{k+1,m} + \frac{x(x-1)}{2!} d_{k+2,m} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-(t_p-k-1))}{(t_p-k)!} d_{t_p,m} \Big]$$

pro $k = 1, 2, \ldots, t_p - 1,\ m = 1, 2, \ldots, \eta_{t_p-k+1}$, a

$$u_{t_p m} = \lambda_p^x \, d_{t_p m} \quad \text{pro} \ \ m = 1, 2, \ldots, \eta_1.$$

Všechny tyto vektory jsou řešením dané soustavy diferenčních rovnic. Sestrojíme-li dle napsaného vzorce $s_1 + s_2 + \ldots + s_u$ vektorů příslušných k vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$, dostaneme fundamentální systém řešení soustavy.

Jiří Čermák dále studoval otázku reálnosti řešení. Nechť koeficiety a_{ij} jsou reálné a nechť A je matice s prvky a_{ij}. Vlastní čísla matice A jsou buď reálná nebo po dvou komplexně sdružená. Jsou-li všechna vlastní čísla matice A reálná, lze k výpočtu řešení soustavy použít redukované normální soustavy reálných vektorů, a tedy i fundamentální systém řešení je reálný. Má-li matice A

komplexně sdružená vlastní čísla, lze dokázat, že k nim existují (redukované) normální soustavy vektorů skládající se z vektorů komplexně sdružených. Odtud vyplývá, že ke každému řešení u_{km}, které je vyjádřené výše uvedenými vzorci a přísluší vlastnímu číslu λ_p, existuje komplexně sdružené řešení $\bar{u}_{km}$, které je sestaveno dle téhož vzorce k vlastnímu číslu $\bar{\lambda}_p$. Vektory

$$^1u_{km} = \frac{1}{2}(u_{km} + \bar{u}_{km}),$$

$$^2u_{km} = \frac{1}{2i}(u_{km} - \bar{u}_{km}),$$

jsou reálné, nezávislé a jsou řešeními uvažované homogenní soustavy lineárních diferenčních rovnic $(*)$. Celkově tak Čermák dospěl k následujícímu závěru: má-li reálná matice A komplexní vlastní čísla, existuje reálný fundamentální systém řešení soustavy rovnic $(*)$, jehož prvky u_{km} lze vyjádřit výše uvedenými explicitními vztahy nebo se skládají z dvojic vektorů $^1u_{km}$ a $^2u_{km}$.

Jedná se tedy o analogii Borůvkova způsobu řešení soustavy diferenciálních rovnic, tentokrát však v explicitních vzorcích nefigurují vektory normální soustavy vektorů, ale vektory její redukované verze.

Jiří Čermák se však soustavě diferenciálních rovnic v této práci také věnoval, pozornost soustředil na soustavu lineárních diferenciálních rovnic, jejíž koeficienty jsou periodické funkce, konkrétně na soustavu

$$x_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\; x_j(t), \qquad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

kde t je reálné a koeficienty $a_{ij}(t)$ jsou definovány na intervalu $(-\infty,\ \infty)$, jsou spojité a periodické s periodou $\omega > 0$.

Matici, jejíž sloupce tvoří fundamentální systém řešení soustavy, nazval jednoduše *fundamentální řešení systému* a označil ji $X(t)$. Ukázal, že je-li $X(t)$ fundamentální řešení dané soustavy, je také $X(t+\omega)$ fundamentální řešení téže soustavy. Musí proto existovat matice P s konstatními koeficienty, pro kterou platí

$$X(t + \omega) = X(t)P$$

a kterou autor nazval *determinující maticí příslušnou fundamentálnímu řešení* $X(t)$. Protože $\det X(t) \neq 0$, existuje $X^{-1}(t)$. Tedy $P = X^{-1}(t)X(t + \omega)$ a $\det P \neq 0$.

Dále uvažoval jiné fundamentální řešení $\tilde{X}(t)$ soustavy, které je dané rovnicí

$$\tilde{X}(t) = X(t)Q,$$

kde Q je libovolná regulární matice. Vynásobením obou stran vztahu

$$X(t + \omega) = X(t)P$$

maticí Q zprava dostaneme

$$X(t + \omega)Q = X(t)PQ,$$

neboli
$$\tilde{X}(t+\omega) = X(t)PQ.$$
Jelikož
$$X(t) = \tilde{X}(t)Q^{-1},$$
platí
$$\tilde{X}(t+\omega) = \tilde{X}(t)Q^{-1}PQ.$$

Autor tak ukázal, že změnou fundamentálního systému se determinující matice P přemění v matici $Q^{-1}PQ$, a proto jsou vlastní čísla a Weyrova charakteristika determinující matice invariantní vzhledem k libovolné změně fundamentálního řešení. Další autorovy ideje jsou založeny na skutečnosti, že lze nalézt takovou matici Q, že matice $W = Q^{-1}PQ$ bude mít Weyrův typický tvar. Uvažujme tedy dále takové fundamentální řešení $X(t)$, že k němu příslušná determinující matice má zmíněný tvar. Dále si uvědomme, že vzhledem k právě formulované větě a platnosti vztahu $\det P \neq 0$ nemá determinující matice W nulové vlastní číslo.

Jiří Čermák nejprve uvažoval speciální případ, v němž je $X(t)$ fundamentálním řešením soustavy, k němuž existuje determinující matice W mající n různých vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, a tedy W je diagonální matice. Vzhledem ke vztahu
$$X(t+\omega) = X(t)W$$
platí pro fundamentální systém
$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$
vztahy
$$x_i^T(t+\omega) = \lambda_i x_i^T(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Zobecněním tohoto tvrzení je případ, v němž má determinující matice vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ o násobnostech $s_1, s_2, \ldots, s_u$ a všechny Weyrovy charakteristiky příslušné k těmto vlastním číslům mají pouze jediné charakteristické číslo. Potom
$$W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ldots & \lambda_2 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_u & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \lambda_u \end{pmatrix},$$

a proto vlastnímu číslu λ_1 přísluší s_1 nezávislých řešení

$$x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, s_1,$$

pro která

$$x_i^T(t+\omega) = \lambda_1 x_i^T(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, s_1,$$

vlastnímu číslu λ_2 přísluší s_2 nezávislých řešení

$$x_{s_1+i}(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, s_2,$$

pro která

$$x_{s_1+i}^T(t+\omega) = \lambda_2 x_{s_1+i}^T(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, s_2,$$

a tak dále, až konečně vlastnímu číslu λ_u přísluší s_u nezávislých řešení

$$x_{s_1+s_2+\ldots+s_{u-1}+i}(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, s_u,$$

pro která

$$x_{s_1+s_2+\ldots+s_{u-1}+i}^T(t+\omega) = \lambda_u x_{s_1+s_2+\ldots+s_{u-1}+i}^T(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, s_u,$$

a všechna uvedená řešení tvoří fundamentální systém řešení dané soustavy diferenciálních rovnic.

Jiří Čermák studoval i nejobecnější případ matice W, v této souvislosti zmínil například problematiku tzv. *Hamburgerových podskupin* skupiny nezávislých řešení soustavy. Počet Hamburgerových podskupin, na něž se rozpadne skupina s_p řešení příslušných s_p-násobnému vlastnímu číslu λ_p, je vždy roven největšímu charakteristickému číslu, které patří uvažovanému vlastnímu číslu λ_p.

V článku tak prezentoval všechny hlavní výsledky tzv. *Floquetovy teorie*, která je však většinou postavena nikoli na Weyrově teorii, ale na Weierstrassově teorii elementárních dělitelů.

Roku 1954 Čermák publikoval článek *On a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients*, jehož stěžejní část je v podstatě anglickou verzí části předchozího článku, která se věnuje řešení homogenní soustavy lineárních diferenčních rovnic. Ve zkrácené podobě je zde rovněž představena Weyrova teorie. Jediným zřetelným rozšířením české verze je tak několik historických poznámek v úvodu práce o řešení homogenních soustav lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty.

V pořadí další Čermákovou prací obdobného charakteru je článek *O systémech lineárních diferenčních rovnic s periodickými koeficienty*, který autor publikoval také v roce 1954. V něm rozšířil výsledky Tomlinsona Forta[174] pojednávající o převedení řešení homogenní lineární diferenční rovnice 2. řádu s periodickými koeficienty na soustavy diferenčních rovnic stejného typu. K odvození výsledků opět použil Weyrovu teorii.

[174] Viz Fortův článek *Finite differences and difference equations in the real domain* [Fo1] z roku 1948.

Na anglicky psanou práci [Ce3] a Borůvkovo pojednání [Bo6] úzce navázal poslední z článků Jiřího Čermáka týkající se řešení soustavy diferenciálních a diferenčních rovnic na podkladě Weyrovy teorie. Byl publikován roku 1956 pod názvem *Poznámka o limitním přechodu diferenčních rovnic v rovnice diferenciální*. Jak název napovídá, hlavní náplní je otázka, zda při jistém limitním přechodu od diferenčních rovnic k diferenciálním se také řešení soustavy diferenčních rovnic transformuje na řešení soustavy rovnic diferenciálních. Jiří Čermák se přitom omezil na homogenní lineární rovnice s konstantními koeficienty.[175] Vyšel ze soustavy diferenčních rovnic a ukázal, že za určitých předpokladů „jeho“ fundamentální řešení diferenčních rovnic při limitním přechodu přejde ve fundamentální řešení diferenciálních rovnic, které odvodil Otakar Borůvka.

Rozlučme se s brněnským kolektivem matematiků citací slov Otakara Borůvky:

Ze svých zkušeností soudím, že právě menší univerzity dávají dobré podmínky k vědeckému rozvoji pracovníků. Nejenom proto, že poměry obvykle na každém pracovníku vyžadují širší výběr přednášek, a tím překážejí přílišné specializaci, ale i tím, že pracovní ovzduší bývá klidnější a lidé si stojí blíže, než tomu bývá ve velkých kolektivech. Právě pro krásné prostředí, které vždycky mezi brněnskými matematiky bylo, jsem nikdy netoužil místo svého působení změnit. ([Bo9], str. 95)

[175] Podobný problém podrobněji studoval Alvin Walter (1898–1967) v práci *Zum Grenzübergange von Differenzengleichungen in Differentialgleichungen* [Wa1] z roku 1926.

5 Reakce na Weyrovu teorii v zahraničí

Ze skutečností uvedených v předchozích kapitolách je nepopiratelné, že Eduard Weyr (1852–1903) byl již ve své době znám zahraniční matematické komunitě. Zvláště hodnotné byly ohlasy na jeho práce od Jamese Josepha Sylvestera (1814–1897), který byl jednou z vůdčích osobností tehdejšího matematického světa.

Josef Beneš okomentoval jedno z Weyrových ocenění od Sylvestera v Drobných zprávách Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky takto:[176]

Chápu se příležitosti, abych širšímu kruhu několika, snad opozdělými, ale okolnostem, tuším, přiměřenými slovy dal zprávu o uznání, jakého se p. professoru dostalo se strany nejpovolanější, od seniora žijících mathematiků, professora geometrie na universitě Oxfordské, Jakuba Josefa Sylvestera, ... (str. 303)

U některých Weyrových prací s maticovým aparátem jsme ve 2. kapitole ihned uvedli reakce (českých i zahraničních matematiků). Výjimkou byly články a knihy, které obsahují Weyrovu teorii charakteristických čísel. U nich byly prozatím zmíněny pouze odezvy uveřejněné v referativních časopisech, které vyšly v brzké době po zveřejnění Weyrových textů. Nyní rozebereme převážně pozdější ohlasy na tyto práce. Jedná se o poměrně rozsáhlý soubor publikací, jehož všechny položky je velmi obtížné zkompletovat.

Věříme, že pro českého čtenáře je potěšující, že mnoho výkladů, zobecnění či použití Weyrovy teorie nalézáme i v nejnovější zahraniční časopisecké i knižní literatuře. V posledních letech došlo k celosvětovému oživení zájmu o Weyrovu teorii, jméno Eduarda Weyra nalézáme v uznávaných časopisech věnujících se lineární algebře a více než sto let po Weyrově smrti je zdůrazňována originalita jeho přístupu. Často je srovnáván jeho typický tvar matice s mnohem rozšířenějším Jordanovým kanonickým tvarem.[177] Nejenže jsou tyto dva pojmy analogiemi, ale některé vlastnosti Weyrova tvaru jej stavějí na pomyslném žebříčku dokonce výše než tvar Jordanův. Začněme však od reakcí mnohem starších, které byly napsány přibližně v prvních třech desetiletích po otištění Weyrovy teorie charakteristických čísel.

5.1 První odezvy po zveřejnění Weyrovy teorie

Nejprve byly publikovány texty reagující na dvě Weyrovy práce *Sur la théorie des matrices* a *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces*, které v roce 1885 představily základy Weyrovy teorie charakteristických čísel. Tyto dva francouzsky psané články jsou zmíněny v souvislosti s kanonickým tvarem matice v poznámce pod čarou v krátkém článku Henryho Tabera

- *On the matrical equation* $\phi\Omega = \Omega\phi$ [Tb1]

z roku 1891. Odkazy na tyto dvě práce můžeme nalézt také v již zmíněné[178] disertační práci Williama Henryho Metzlera (1863–1943)

[176] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 19(1890), str. 300–305.
[177] Stručná historie teorie kanonických tvarů matic viz 1. kapitola.
[178] Viz ohlasy na práce obsahující matice e^M a $\log M$ v 2. kapitole.

• *On the roots of matrices* [Mz1]
z roku 1892, v níž je podán výklad Weyrovy teorie, v přehledu

• *List of writings on the theory of matrices (1857–1893)* [Mu1]
z roku 1898, který napsal Thomas Muir, či v díle Encyclopédie des sciences mathématiques, konkrétně v přehledovém článku

• *Analyse combinatoire et theorie des déterminants* [NV1] (1907)
autorské dvojice Eugen Otto Erwin Netto (1848–1919) a H. Vogt.

Jedny z prvních reakcí, které se váží zejména ke dvěma obsáhlejším publikacím Eduarda Weyra, v nichž je prezentována Weyrova teorie charakteristických čísel, tj. ke knížce *O theorii forem bilinearných* a její německé časopisecké verzi *Zur Theorie der bilinearen Formen*, nalézáme v práci Ludwiga Schlesingera z roku 1895 nazvané

• *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen* [Sl1]
a v jeho pozdějších pracích

• *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen* [Sl3]
z roku 1908 a

• *Bericht über die Entwickelung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865* [Sl4]
z roku 1909, dále v monografii Petera Mutha (1860–1907)

• *Theorie und Anwendung der Elementartheiler* [Mh1][179]
z roku 1899 a ve dvou přehledových textech z Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften vydaných na přelomu 19. a 20. století. Jedná se o příspěvek

• *Invariantentheorie* [My1]
Wilhelma Franze Meyera (1856–1934) a o stať

• *Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen* [Su1],
kterou připravil Eduard Study (1962–1930). Tyto dva články byly přepracovány a podstatně rozšířeny pro francouzské dílo Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Meyerův text byl upraven Julesem Josephem Drachem (1871–1949) a nazván

• *Theorie des formes et des invariants* [MD1].
Studyho část byla přepracována Eliem Josephem Cartanem a publikována pod názvem

• *Nombres complexes* [SC1] (1908).
V obou pracích jsou obsaženy ohlasy na Weyrovu publikaci *Zur Theorie der bilinearen Formen.*

Weyrovo jméno je uvedeno Henry Taberem v souvislosti s charakteristickými čísly v článku

---

[179] Monografie není psána maticovou řečí. Thomas John I'anson Bromwich (1873–1929), anglický matematik, který již na přelomu století maticovou terminologii používal, v recenzi *Muth's Elementartheiler* v roce 1901 napsal:

> *… the author follows Frobenius in preference to Cayley, and introduces a matrix only as a picture (Bild) of the bilinear form.* (str. 314)

Peter Muth je tedy příkladem matematika, který práci psanou maticovým aparátem znal a přesto maticovou řeč odmítal přijmout. V případě jiných matematiků se můžeme pouze domnívat, zda důvodem nepřijetí maticového aparátu byla pouze jeho neznalost, či zásadní odpor.

• *Notes on the theory of bilinear forms* [Tb3],
který byl publikován v roce 1897, Weyrova německy psaná práce z roku 1890 je okrajově zmíněna i v Taberově článku

• *On hypercomplex number systems* [Tb4]
z roku 1904.

V pracích vydaných v prvním desetiletí 20. století můžeme zmínky o Weyrově teorii nalézt v druhém vydání kompendia Ernesta Pascala (1865–1940)

• *Repertorium der höheren Mathematik. I. Analysis, II. Geometrie* [PaN] (1910)[180]
či v padesátistránkovém článku Kurta Hensela (1861–1941)

• *Theorie der Körper von Matrizen* [Hn1],
jenž byl publikován v roce 1904. Kurt Hensel v práci napsal:

Bei dem hier gewählten Eingange ergeben sich die schönen Resultate, welche Eduard Weyr in seiner großen Abhandlung „Zur Theorie der bilinearen Formen"... hergeleitet, aber nicht ohne beträchtliche Schwierigkeiten bewiesen hat, als selbstverständliche Folgerungen ... ([Hn1], str. 116–117)

Weyrův německý text je citován rovněž ve Wedderburnově článku

• *A theorem on finite algebras* [Wd1]
z roku 1905. V souvislosti s problematikou současné transformace dvou bilineárních forem je Weyrovo jméno zmíněno v úvodu článku

• *The reduction of families of bilinear forms* [Hs1],
který byl publikován americkým matematikem Herbertem Edwinem Hawkesem (1872–1943) v roce 1910.

Vedle Sylvestera řadíme mezi nejvýraznější osobnosti teorie matic druhé poloviny 19. století Georga Ferdinanda Frobenia (1849–1917), i když se tento matematik vyjadřování výsledků teorie matic jejím jazykem dlouho bránil.[181] Také Frobenius, stejně jako Sylvester, Weyrovy výsledky znal. Jméno Eduarda Weyra se často vyskytuje ve Frobeniově článku

• *Über den Rang einer Matrix* [Fr15] (1911),
který začíná následujícími slovy upozorňujícími na Weyrův neobvyklý přístup ke studované problematice:

Die Reduktion einer Schar von bilinearen Formen auf die Normalform von Weierstrass hat Eduard Weyr in seiner Abhandlung Zur Theorie der bilinearen Formen, ..., mit Hilfe der Matrizenrechnung ausgeführt. Die invarianten Zahlen, von denen die Normalform abhängt, hat er, ebenso wie Weierstrass, aber auf einem ganz anderen Wege, direkt definiert, nicht, wie Camille Jordan oder Stickelberger, ihre Bedeutung aus der Normalform nachträglich abgelesen. ([Fr15], str. 479)

Dále uvedl Frobenius jméno Eduarda Weyra v souvislosti se vztahy týkajícími se odhadu hodnosti součinu matic, které jsou v článku hojně studovány.

[180] Originální, méně obsáhlá italská verze díla byla publikována pod názvem *Repertorio di matematiche superiori (Definizioni - Formole - Teoremi - Cenni bibliografici). I. Analisi, II. Geometria* [PaI] ve dvou částech v letech 1898 a 1900. První německé vydání, připravené kolektivem autorů pod vedením Paula Epsteina (1871–1939) a Heinricha Emila Timerdinga (1873–1945), vyšlo v letech 1900 a 1902, další části druhého vydání v letech 1922, 1927 a 1929.

[181] Více informací o změně paradigmatu ve Frobeniových pracích viz 1. kapitola.

Jak však víme, Weyr používal místo pojmu hodnost spíše analogický pojem nulita, což Frobenius nezapomněl zdůraznit.

Weyrovu práci *Zur Theorie der bilinearen Formen* znala rovněž americká matematička Olive Clio Hazlett (1890–1974), která na ni odkázala roku 1917 v článku

• *On the theory of associative division algebras* [Ht1].

5.2 Sporadické ohlasy v letech 1920 až 1980

Weyrova teorie charakteristických čísel se po svém zveřejnění velkého zájmu nedočkala. Tato situace zůstala stejná i v dalších desetiletích, v nichž byly Weyrovy výsledky citovány jen výjimečně, k jejich výraznějšímu rozpracování nedošlo.

V roce 1921 Weyrovu teorii charakteristických čísel rozšířil německý matematik Wolfgang Krull (1899–1971) v práci

• *Über Begleitmatrizen und Elementarteilertheorie* [Ku1]

pro matice nad libovolným tělesem. Výklad Weyrovy teorie dále podal německý matematik Julius Wellstein (1888–1978) v textu

• *Über symmetrische, alternierende und orthogonale Normalformen von Matrizen* [Wl1]

z roku 1930. Spis *O theorii forem bilinearných* a jeho německá verze jsou společně rozebrány v Muirově historickém přehledu

• *Contributions to the History of Determinants 1900–1920* [Mu3]

z roku 1930. Ve 2. kapitole již byla uvedena Muirova slova vyjadřující podivení nad názvem, jenž obsahuje termín bilineární forma místo vhodnějšího termínu matice. Rovněž další řádky více než stránkového rozboru zdůrazňují výskyt maticového aparátu (např.: *for the whole of the first ten chapters (...) deal with nothing but matrices: ...* (str. 3)) a dále upozorňují např. na pojem nulity, na nulitu součinu matic, resp. na možnost nulitu součinu v některých případech přesně určit.

Ve třicátých letech se Weyrova charakteristika objevila ve třech monografiích věnovaných teorii matic – všechny již byly zmíněny. První z nich,

• *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices* [TA1],[182]

publikovali v roce 1932 Herbert Westren Turnbull a Alexander Craig Aitken. Velmi stručně a jasně zde definovali Weyrovu charakteristiku:[183]

If the successive differences in nullity (or rank) in the matrix powers $(A - \lambda_i I)^p$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, *are regarded as a partition (called the Weyr characteristic) of the total multiplicity of the latent root* λ_i*, then the conjugate partition is the Segre characteristic associated with* λ_i. ([TA1], str. 80)

Autorem druhé monografie, úsporně napsaného textu

• *The Theory of Matrices* [Mc1],

je Cyrus Colton MacDuffee. Publikoval jej roku 1933 v edici Ergebnisse der

[182] Jak uvidíme později, právě tento text v posledních desetiletích velmi napomohl k podnícení zájmu o Weyrovy výsledky.

[183] Vedle této pasáže zmiňují autoři Weyrovu charakteristiku také na stranách 187 a 188.

Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Zdařile napsaná útlá kniha obsahující značné množství informací je rozdělena do deseti kapitol, v nichž je celkem padesát sedm paragrafů. Čtyřicátý paragraf (str. 73–74) obsažený v šesté kapitole *Similarity* má název *Weyr's characteristic.* Na rozdíl od Eduarda Weyra, který používal termín latentní kořen nebo pouze kořen, nazval MacDuffee kořeny charakteristické rovnice kořeny charakteristickými.[184] Zmíněný paragraf věnoval především zavedení Weyrovy charakteristiky a jejímu vztahu k Segreově charakteristice (zde se odvolává na monografii [TA1], str. 80). V závěru paragrafu je uvedeno tvrzení, že Weyrova charakteristika matice spolu s vlastními čísly tvoří úplný systém invariantů podobných matic. Citovány jsou Weyrovy práce *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a *Zur Theorie der bilinearen Formen.*

Celkem sedm Weyrových prací je uvedeno v bibliografii knihy

- *Lectures on Matrices* [Wd2] (1934)

Josepha Henryho Maclagena Wedderburna (1882–1948).[185]

V roce 1936 publikoval MacDuffee krátký článek

- *On a fundamental theorem in matric theory* [Mc2].

V něm Weyrovu charakteristiku použil (aniž by ji vysvětloval)[186] v důkazu věty o elementárních dělitelích. Rovněž v knize

- *Vectors and Matrices* [Mc3]

z roku 1943,[187] další MacDuffeeho práci, je Weyrově charakteristice věnován samostatný paragraf pojmenovaný *The Weyr characteristic.*

V roce 1936 publikoval americký matematik Merrill Meeks Flood (1908–1991) krátkou poznámku

On the highest common factor of two polynomials [Fl1],

v níž upozorňuje na chybu (konkrétněji na mylný předpoklad), které se dopustil americký matematik William Vann Parker (1901–1987) v článku *The degree of the highest common factor of two polynomials* [Pw1] z roku 1935. Ve své verzi důkazu Flood uvedl, že použil metody Frobenia a Weyra. Konkrétně odkázal na poznatek o nulitě matice, který Weyr uvedl v práci *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* na straně 179.

Weyrově a Segreově charakteristice a jejich dualitě se věnoval Anatolij Ivanovič Mal'cev (1909–1967) ve své známé učebnici

- *Osnovy linejnoj algebry* [Ma1],

jejíž první vydání vyšlo roku 1948.[188]

---

[184] Pojem charakteristický kořen je zaveden již na 22. straně. Na téže straně je v poznámce pod čarou uveden spolu se jménem Sylvestera i termín *latent roots.*

[185] Konkrétněji se jedná o těchto sedm prací: *O základní větě v theorii matric* (1884), *Sur la théorie des matrices* (1885), *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* (1885), *O binarných matricích* (1887), *Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices* (1887), *O theorii forem bilinearných* (1889), *Zur Theorie der bilinearen Formen* (1890).

[186] Autor pouze v poznámce pod čarou uvedl odkaz na 80. stranu práce [TA1].

[187] Kniha byla publikována v dalších vydáních v letech 1947, 1949, 1953, 1961 a 1966.

[188] Postupně vyšlo několik dalších rusky psaných vydání: druhé v roce 1956, třetí v roce 1970 a čtvrté v roce 1975. Kniha byla přeložena do několika cizích jazyků. Anglicky vyšla pod názvem *Foundations of Linear Algebra* v roce 1963, španělsky pod názvem *Fundamentos de algebra lineal* v roce 1970 a italsky pod názvem *Fondamenti di algebra lineare* v roce 1980.

Z cizojazyčných prací z počátku padesátých let 20. století, v nichž lze nalézt reakce na Weyrovy práce *O theorii forem bilinearných* a *Zur Theorie der bilinearen Formen*, jmenujme nejprve knihu

• *Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure* [Zu1]

Rudolfa Zurmühla (1904–1966) z roku 1950, v níž je paragraf *Die Weyrschen Charakteristiken* (str. 212–214),[189] a dále monografii Felikse Ruvimoviče Gantmachera (1908–1964)

• *Teorija matric* [Gn1]

z roku 1953.[190]

Reakci na Weyrův článek *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a také na spis *O theorii forem bilinearných*, resp. na jeho časopiseckou verzi *Zur Theorie der bilinearen Formen* lze nalézt v knize

• *Linear transformations in n-dimensional vector space. An introduction to the theory of Hilbert space* [HG1],

za jejímž vznikem v roce 1951 stojí autorská dvojice Hans Ludwig Hamburger (1889–1956) a Margaret Eleanor Grimshaw (1904–1990).

Dva přehledové články z nedokončené *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* nazvané

• *Lineare Algebra* [Pg1] a

• *Normalformen von Matrizen* [Pg2]

zpracoval na počátku padesátých let 20. století Günter Pickert. V druhém z nich nalezneme Weyrovo jméno (na str. 47) nejprve v souvislosti se zobecněním jednoho jeho výsledku Otakarem Borůvkou[191] v roce 1936 a poté (na str. 57) při zavedení Weyrovy charakteristiky jako duálního pojmu k Segreově charakteristice. Odkaz na konkrétní Weyrovu práci zde uveden není, jedná se opět o odezvy na práce obsahující Weyrovu teorii.

V roce 1953 publikoval Brian E. Mitchell třístránkovou poznámku

• *Normal and diagonalizable matrices* [Mi1],

v níž vyložil vztah mezi normálními a diagonalizovatelnými maticemi a především mezi normálními maticemi a vlastními čísly, resp. vlastními vektory matic A^*A a A^*.[192] V závěru uvedl vzájemně jednoznačné vztahy mezi Weyrovou a Segreovou charakteristikou matice A, nulitami matic $(A - \lambda E)^k$, $k \in \mathbb{N}$, a jistou větou Michaela P. Drazina.[193]

Segreova a Weyrova charakteristika jsou studovány na str. 186 (vydání z roku 1948), resp. 132–133 (1956), resp. 117–118 (1963), resp. 135–136 (1970), resp. 179–180 (1975), resp. 181 (1980).

[189] Jedná se o část podkapitoly *Hauptvektoren. Transformation auf Normalform.* Úvod do problematiky Weyrovy charakteristiky je zachycen již na straně 211, Weyrova charakteristika je zmíněna i na straně 371 (odstavec *Verhalten bei nichtlinearen Elementarteilern* podkapitoly *Systeme linearer Differentialgleichungen*).

[190] Obě knihy vycházely opakovaně (zahrneme-li i vydání Zurmühlova textu s pozměněnými názvy) v průběhu následujících pěti desetiletí. Gantmacherova kniha byla navíc publikována v anglickém, francouzském a německém překladu.

[191] Reakce Otakara Borůvky a dalších brněnských matematiků na Weyrovu teorii charakteristických čísel viz 4. kapitola.

[192] Matici A nazveme normální, platí-li $AA^* = A^*A$, kde A^* je matice konjugovaná, tj. transponovaná a komplexně sdružená k matici A. Součiny se nemusí rovnat matici jednotkové, jak je tomu u unitární matice.

[193] Drazin M. P., *On diagonable and normal matrices* [Dz1], Theorem 1 (i), str. 189:

V knize Roberta McDowella Thralla (nar. 1914) a Leonarda Tornheima (1915–2009)

- *Vector Spaces and Matrices* [TT1]

z roku 1957 není sice zavedena přímo Weyrova charakteristika, ale jsou v ní (na straně 270) definována tzv. *Weyrova čísla* (*Weyr numbers*).

S Weyrovou charakteristikou byl obeznámen rovněž William Grenfell Leavitt (nar. 1916), který tento pojem a termín použil již ve své disertační práci[194]

- *A normal form for matrices whose elements are holomorphic functions* [Le1]

z roku 1947 a potom též v článku

- *Canonical forms for mappings of vector spaces* [Le3]

z roku 1953. V posledně jmenované publikaci je Weyrova charakteristika přiřazena nikoliv k matici, ale k lineárnímu zobrazení (endomorfismu, resp. operátoru).

Let A be a linear mapping of an n-dimensional vector space S over a field F. Define $A^0 = I$ (the identity mapping), and consider the successive powers A^i ($i = 0, 1, \ldots$). If $V \in S$ for which $VA^{i-1} = 0$, then $VA^i = 0$, so that the null space $N(A^{i-1}) \subseteq N(A^i)$. If $\nu(A)$ designates the dimension $d[N(A)]$, this implies that $\nu(A^{i-1}) \leq \nu(A^i)$. Define $\omega_i = \nu(A^i) - \nu(A^{i-1})$. ... For a mapping A, let $F[A]$ be the set of all polynomials in A with coefficients in F. ... let $\alpha \in F[A]$ ... It may be remarked that if $\alpha = A - cI$ is singular (in which case c is called a characteristic value), then the set $\{\omega_i\}$ relative to α is called the Weyr characteristic of A relative to c. ([Le1], str. 75, 76, 79)

Americký matematik Murray Gerstenhaber (nar. 1927) publikoval v roce 1959 takřka čtyřicetistránkové pojednání

- *On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices, III* [Gh1].

V něm jsou citovány Weyrovy práce *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a *Zur Theorie der bilinearen Formen.*[195]

Weyrovu a Segreovu charakteristiku nalézáme i ve dvou pracích Alvina N. Feldzamena. Jsou to články

- *A generalized Weyr characteristic* [Fz1]

z roku 1959 a

- *Semi-similarity invariants for spectral operators on Hilbert space* [Fz2]

z roku 1961. Obě práce mají podobný charakter, věnují se spektrální teorii operátorů na Hilbertových (obecněji Banachových) prostorech.[196] V prvním textu

If A is any given $n \times n$ matrix, then each of the following conditions is necessary and sufficient for the diagonability of A:
(i) For every n-vector ξ, and every scalar λ, $(A - \lambda I)^2 \xi = 0$ implies $(A - \lambda I)\xi = 0$;
(ii) ...

[194] Stejnojmenný desetistránkový Leavittův článek [Le2] vyšel o rok později v časopisu Duke Mathematical Journal.

[195] Odkaz na obě práce je uveden u následujícího poznatku:

LEMMA 1.2. A is similar to B if and only if $\operatorname{rank}(A-\lambda)^k = \operatorname{rank}(B-\lambda)^k$, $k = 1, \ldots, n$, *where λ runs through all proper values of A and B.* ([Gh1], str. 171)

Je zajímavé, že Gerstenhaber ještě v roce 1959 používal zápis $(A-\lambda)^k$ místo korektního $(A-\lambda E)^k$. Nejenže tedy zveřejnil Weyrův výsledek, ale v celé práci užíval Weyrovu, z dnešního hlediska nepřesnou symboliku.

[196] Pětistránková práce *A generalized Weyr characteristic* shrnuje výsledky Feldzamenovy disertační práce zpracované na Yale University pod vedením Nelsona Dunforda. O dva

není zmíněna žádná konkrétní Weyrova práce, v druhém jsou citovány práce *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a *Zur Theorie der bilinearen Formen.* Reference jsou v textu uvedeny v okamžiku, kdy autor zmínil Weyrovo jméno (a s ním i konkrétní práce), aby vysvětlil, po kom je Weyrova charakteristika pojmenována.

V první z Feldzamenových prací jsou čísla odpovídající Weyrovým charakteristickým číslům definována zcela bez výskytu vlastních čísel matice, Weyrova charakteristika je zavedena v kontextu pojmů borelovská množina, borelovská funkce, mohutnost soustavy vektorů, spektrální a normální operátor apod. Teprve poté je poukázáno na rovnost mezi čísly definovanými Feldzamenem a Weyrem. Feldzamenův druhý, takřka padesátistránkový článek je Weyrovou charakteristikou doslova „protkán". Autorův přístup k tomuto pojmu je však od Weyrova postupu opět značně odlišný,[197] přestože tentokrát pracoval (již od prvního odstavce) vedle výše zmíněných pojmů i s vlastním číslem matice. V textu se často poukazuje na úzkou spojitost mezi Weyrovou a Segreovou charakteristikou, z několika výskytů popisu tohoto vztahu v textu vybereme ukázku ihned z úvodu, v níž je T operátor a $u(\lambda_0)$ značí násobnost vlastního čísla λ_0:

... let $\mathcal{W}(\lambda_0, k)$ be the kth integer in the Weyr characteristic of λ_0 for T, and $\mathcal{S}(\lambda_0, k)$ be the number of occurrences of k as an exponent of the elementary divisors of T that contain λ_0 – that is, the number of occurrences of k in the Segre characteristic. Then these are related in a simple manner:

$$\mathcal{S}(\lambda_0, k) = \mathcal{W}(\lambda_0, k) - \mathcal{W}(\lambda_0, k+1),$$

and,

$$\sum_k \mathcal{W}(\lambda_0, k) = \sum_k k\mathcal{S}(\lambda_0, k) = u(\lambda_0).$$

([Fz2], str. 277–278)

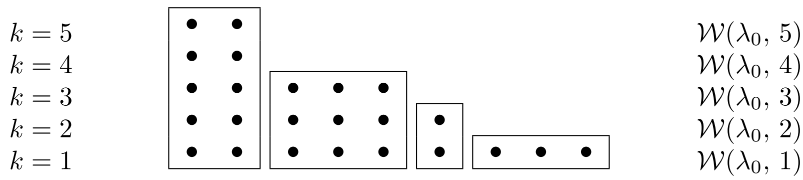
Intepretujme uvedené vztahy pomocí Ferrersova diagramu příslušného vlastnímu číslu λ_0, v němž charakteristické číslo $\mathcal{W}(\lambda_0, 1)$ znázorníme tečkami v prvním řádku odspodu, charakteristické číslo $\mathcal{W}(\lambda_0, 2)$ tečkami v druhém řádku odspodu atd. Uvědomme si, že exponent elementárního dělitele je roven řádu Jordanovy buňky, proto k značí počet teček v jednotlivých sloupcích diagramu a $\mathcal{S}(\lambda_0, k)$ značí počet sloupců, které mají právě k teček. Symbol $\sum_k \mathcal{W}(\lambda_0, k)$ vyjadřuje celkový počet teček Ferrersova diagramu, který je součtem počtu teček v m obdélnících,[198] jejichž „výška" je po řadě 1, 2, ..., m teček a „šířka" po řadě $\mathcal{S}(\lambda_0, 1)$, $\mathcal{S}(\lambda_0, 2)$, ..., $\mathcal{S}(\lambda_0, m)$ teček. Celkový počet teček diagramu je přitom roven násobnosti $u(\lambda_0)$ vlastního čísla λ_0.

roky mladší, mnohem rozsáhlejší článek *Semi-similarity invariants for spectral operators on Hilbert space* naopak doktorskou práci reviduje a rozšiřuje.

[197] *... it is convenient to reclothe the characteristics in more modern garb.* ([Fz2], str. 277)

[198] Přesněji řečeno, obdélníků bude právě m za předpokladu, že existují Jordanovy buňky řádu 1, 2, ..., m. Pokud například pro vlastní číslo λ_0 neexistuje Jordanova buňka řádu k, nebude v diagramu k-tý obdélník uveden a člen $\mathcal{S}(\lambda_0, k)$, a proto také člen $k\mathcal{S}(\lambda_0, k)$, bude roven nule.

Je-li tedy například Weyrovou charakteristikou operátoru T příslušnou vlastnímu číslu λ_0 posloupnost (9, 6, 5, 2, 2), vypadá Ferrersův diagram takto:



Příslušná Segreova charakteristika je (5, 5, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1) a

$$\mathcal{S}(\lambda_0,\,1)=3,\ \mathcal{S}(\lambda_0,\,2)=1,\ \mathcal{S}(\lambda_0,\,3)=3,\ \mathcal{S}(\lambda_0,\,4)=0\ \text{ a }\ \mathcal{S}(\lambda_0,\,5)=2.$$

Proto celkový počet teček (neboli násobnost vlastního čísla), který se rovná součtu teček umístěných v jednotlivých řádcích diagramu, můžeme počítat jako součet $1\cdot 3+2\cdot 1+3\cdot 3+4\cdot 0+5\cdot 2=24$.

Alvin N. Feldzamen vykládá význam symbolů, které se vyskytují v uvedených vztazích, pomocí následujících pojmů:

These functions also have simple spatial interpretations: $\mathcal{W}(\lambda_0,\,k)$ *is the maximum number of linearly independent vectors annihilated by* $(T-\lambda_0 I)^k$ *but not by* $(T-\lambda_0 I)^{k-1}$*, and* $\mathcal{S}(\lambda_0,\,k)$ *is the maximum number of independent* k*-dimensional subspaces completely reducing* T *on which* $T-\lambda_0 I$ *has index* k*.* ([Fz2], str. 278)

Celkově lze říci, že v textu je – co se četnosti týče – dávána přednost charakteristice Weyrově. Zároveň je upozorněno na výhodnost charakteristiky Segreovy:

… the reader, noticing the primacy of the Weyr characteristic in the statements and proofs, may wonder as to the inclusion of the Segre characteristic. It is included because it is readily defined by means of the Weyr characteristic, and because it seems clear that the Weyr characteristic is unsuited to the nonessentially finite case, where the Segre characteristic, defined directly, may succeed. ([Fz2], str. 281)

V obou Feldzamenových pracích jsou pasáže zdůrazňující, že Weyrova charakteristika zavedená pro spektrální operátory na Hilbertových prostorech je invariantem podobnosti, ale ne úplným souborem invariantů. Proto je podobnost zobecněna na tzv. *polo-podobnost* (*semi-similarity*) spektrálních operátorů konečné násobnosti na Hilbertově prostoru, která je rovněž ekvivalencí. Zobecněná Weyrova charakteristika zavedená pro tyto operátory tvoří úplný soubor invariantů polo-podobnosti.

Na Feldzamenovu práci z roku 1961 úzce navázal Lior Tzafriri (1936–2008), profesor působící na univerzitě v Jeruzalémě, článkem

- *Quasi-similarity for spectral operators on Banach spaces* [Tz1]

z roku 1968. Cílem publikace bylo zavést tzv. *kvazi-podobnost* (*quasi-similarity*) pro spektrální operátory na Banachově prostoru, která by pro případ normálních operátorů splývala s běžnou podobností a pro případ spektrálních operátorů konečné násobnosti na Hilbertově prostoru s Feldzamenovou polo-podobností. Stejně jako pro polo-podobnost je Weyrova charakteristika rovněž úplným souborem invariantů kvazi-podobnosti.

Výskyt Weyrovy charakteristiky je v Tzafririho článku opět značný, také tato publikace v seznamu literatury uvádí konkrétní Weyrův text. Jedná se o práci *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* z roku 1885, která je v textu citována, stejně jako ve Feldzamenově publikaci, v místě, kde je vysvětlen výskyt příjmení Weyr v termínu Weyrova charakteristika.

Reakci na články *Sur la théorie des matrices* a *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* lze dále nalézt v souboru článků, které v letech 1962 a 1963 postupně publikoval R. W. Feldman Jr. v časopisu The Mathematical Teacher.[199]

Pojem Weyrova charakteristika zmínil rovněž Shmuel Kantorovitz (nar. 1935) v úvodu článku

- *The semi-simplicity manifold of arbitrary operators* [Kz1]

z roku 1966, Weyrovu charakteristiku však v práci více nestudoval. Tento pojem nalezneme také v poznámce Christophera Williama Davise

- *Elementary divisors of the Stein transformation* $X \to X - CXC^*$ [Da1]

z roku 1974. Jméno Eduarda Weyra se vyskytuje rovněž v krátkém článku

- *Integral invariant functions on the nilpotent elements of a semisimple Lie algebra* [Gg1],

který publikoval Michael A. Gauger v roce 1978.[200]

V tomtéž roce publikovali Robert E. Hartwig (nar. 1941) a Frank Jerry Hall[201] článek

- *Pseudo-similarity for matrices over a field* [HH1].

V něm definovali *pseudo-podobnost* (*pseudo-similarity*) takto: Nechť $\mathcal{R}^{m\times n}$ značí množinu všech matic typu $m \times n$ nad okruhem $\mathcal{R}$ s jednotkovým prvkem, $A \in \mathcal{R}^{m\times m}$ a $B \in \mathcal{R}^{n\times n}$. Řekneme, že *matice A je pseudo-podobná matici B*, jestliže existuje matice $X \in \mathcal{R}^{m\times n}$ a dvě matice X^-, $X^= \in \mathcal{R}^{n\times m}$ takové, že

[199] Jedná se o články [Fe1], [Fe2], [Fe3], [Fe4], [Fe5] a [Fe6].

[200] V práci však Michael A. Gauger necitoval žádnou Weyrovu práci, odkázal pouze na 73. stranu monografie [Mc1], kde je Weyr zmíněn. Autor se na Eduarda Weyra takto zprostředkovaně odvolal u tohoto tvrzení (použil nezvyklého značení matic, které jsou zapsány malými písmeny): *THEOREM 2 (WEYR [3, p. 73]). Let x, y be nilpotent $n \times n$ matrices over any field. Then x and y are similar if and only if* $\operatorname{rank}(x^k) = \operatorname{rank}(y^k)$ *for all* $k \le n$. ([Gg1], str. 162)

[201] Frank Jerry Hall se narodil v Texasu, otec jeho matky žil před svým odchodem do zámoří ve Velkém Újezdě, moravské obci poblíž Olomouce. Vztah k našim zemím je umocněn i tím, že F. J. Hall, R. E. Hartwig a dále Irving J. Katz a Morris Newman publikovali roku 1983 práci *Pseudo-similarity and partial unit regularity* [HHKN1], která navázala na zmíněný článek Halla a Hartwiga, v časopisu Czechoslovak Mathematical Journal. Frank Hall se dobře zná a spolupracuje s českým matematikem Miroslavem Fiedlerem (nar. 1926), jehož odborné zaměření zahrnuje především teorii matic, a Českou republiku poměrně často navštěvuje. V emailové korespondenci s autorkou disertační práce (říjen 2012) napsal: *We have had many large family re-unions. I can say that I am proud of my Moravian heritage.*

platí

$$
\begin{array}{ll}
(1) & X^{-}AX = B, \\
(2) & XBX^{=} = A, \\
(3) & XX^{-}X = X, \\
(4) & XX^{=}X = X.
\end{array}
$$

Matice M, které jsou řešeními rovnice $XMX = X$ pro danou matici X (viz vztahy (3) a (4)), se nazývají *vnitřní inverze* (*inner inverses*) k matici X a obvykle se značí X^{-}, $X^{=}$ atd.

Je-li matice A pseudo-podobná matici B pomocí matice X, platí mimo jiné vztahy

$$X^{-}A^kX = B^k, \qquad XB^kX^{=} = A^k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Důkaz tvrzení není složitý, neobsahuje žádné složité operace, nevyžaduje ani žádnou vyšší znalost lineární algebry. Dosazením rovnosti (1) do rovnosti (2) získáme vztah

$$A = XX^{-}AXX^{=}.$$

Vynásobíme jej zleva maticí XX^{-} a dostaneme

$$XX^{-}A = XX^{-}XX^{-}AXX^{=},$$

neboli

$$XX^{-}A = (XX^{-}X)X^{-}AXX^{=},$$

a odtud s využitím rovnosti (3) platí

$$XX^{-}A = XX^{-}AXX^{=}.$$

Z rovnosti pravých stran posledně a prvně jmenovaného vztahu vyplývá rovnost jejich levých stran, tj. $A = XX^{-}A$. Dále

$$B^2 = (X^{-}AX)(X^{-}AX) = X^{-}A(XX^{-}A)X,$$

a proto

$$B^2 = X^{-}AAX, \quad \text{tj.} \;\; B^2 = X^{-}A^2X.$$

Dokázali jsme, že vztah $X^{-}A^kX = B^k$ platí pro $k = 2$ (platnost pro $k = 1$ je obsažena již v definici pseudo-podobnosti). Dále postupujeme indukcí. Předpokládáme, že platí $X^{-}A^qX = B^q$, a dokážeme platnost vztahu $X^{-}A^{q+1}X = B^{q+1}$. Jelikož

$$B^{q+1} = B^qB = X^{-}A^qXB = X^{-}A^qXX^{-}AX = X^{-}A^q(XX^{-}A)X = X^{-}A^qAX,$$

platí skutečně $B^{q+1} = X^{-}A^{q+1}X$.

Platnost vztahu $XB^kX^{=} = A^k$ lze ověřit obdobně. Dosadíme však rovnost (2) do rovnosti (1) a vzniklý vztah násobíme zprava maticí $X^{=}X$. Dokážeme tak rovnost $B = BX^{=}$, kterou užijeme při následném důkazu indukcí.

V obecném případě z pseudo-podobnosti matice A matici B nevyplývá podobnost matic A a B (matice A, B jsou obecně různých typů). Pokud je však okruh $\mathcal{R}$ polem a matice A, B (a tedy i matice X) mají stejný řád, je matice A pseudo-podobná matici B, právě když jsou podobné.

Pseudopodobnost je tedy zobecněním podobnosti, v uvedeném případě mají matice A a B shodnou Weyrovu charakteristiku příslušnou vlastnímu číslu 0.

5.3 Charakteristiky teorie grafů

Během sedmdesátých let začal publikovat své práce obsahující termín Weyrova charakteristika také Hans Jurgen Schneider[202] (nar. 1927). Zasloužil se velkou měrou o šíření povědomí o Weyrově charakteristice v USA, vznikla kolem něj komunita matematiků, kteří publikovali značné množství článků (nebo disertačních prací) o vztahu Weyrovy charakteristiky a charakteristik teorie grafů. V této partii uvedeme jejich přehled, představíme některé vazby mezi členy zmíněné komunity a popíšeme jejich přístup k dané problematice. V části následující se budeme zabývat odbornou náplní jejich prací.

Hans Schneider byl na University of Edinburgh doktorandem Alexandera Craiga Aitkena, spoluautora jedné z prvních monografií teorie matic z roku 1932 nazvané *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices*, která, jak již bylo uvedeno, obsahuje problematiku Weyrovy charakteristiky a na kterou ostatní matematikové často odkazovali. Hans Schneider má na tuto knihu milou osobní vzpomínku přetrvávající více než šedesát let:

As a student I learned about the Weyr characteristic from the book by Turnbull-Aitken ... (It was in fact the very first math book I bought; probably in 1950, cost GBP 1.) I expect I also heard about the Weyr characteristic in Prof. Aitken's lectures, but this is so long ago that I have no specific recolletion of this.[203]

[202] Hans Schneider se narodil ve Vídni, doktorská studia absolvoval v Edinburghu, dlouhou dobu působil a nyní žije v USA. Jeho kořeny sahají na naše území, neboť se jeho otec narodil v Karviné. Patří mezi nejvýraznější osobnosti současné lineární algebry. V období 1987 až 1996 byl prvním prezidentem nově založené The International Linear Algebra Society (ILAS; v prvních dvou letech působící pod názvem The International Matrix Group), je vedoucím redaktorem časopisu Linear Algebra and its Applications a poradním editorem Electronic Journal of Linear Algebra. Zajímavými způsoby je propojen s několika matematiky, kteří se narodili v českých zemích a kteří pracovali nebo pracují v teorii matic. Nejenže je svou odbornou prací spjat s Eduardem Weyrem, ale byl i blízkým známým celosvětově uznávané algebraičky Olgy Taussky-Todd a také sepsal některé články s českým matematikem Miroslavem Fiedlerem. V roce 1968 patřili Olga Taussky-Todd a Hans Schneider mezi zakládající editory zmíněného časopisu Linear Algebra and its Applications, dnes mezi členy redakční rady tohoto časopisu patří vedle Hanse Schneidera i Miroslav Fiedler.

Každé tři roky je udělováno ocenění *Hans Schneider Prize* za vynikající úspěchy v lineární algebře nebo celoživotní přínos tomuto oboru. V roce 1993 ji získal právě Miroslav Fiedler.

[203] Tento a následující útržek citací Hanse Schneidera pochází z emailové korespondence s autorkou této disertační práce (srpen 2011).

Můžeme se jen domnívat, zda by Hans Schneider věnoval významnou část své odborné práce problematice Weyrovy teorie, pokud by nebyl Aitkenovým studentem. Uveďme pro zajímavost, jak málo stačilo, aby se Schneider Aitkenovým doktorandem nestal. Dále citovaná, dnes již humorná historka je Schneiderovou odpovědí na dotaz ohledně jeho cesty ke kariéře matematika pracujícího v lineární algebře. Otázka byla položena jeho doktorandkou Olgou Holtz během rozhovoru *"Know What You Are Good At, Keep At It, and Keep At It"*, který byl publikován na jaře roku 2012 v časopisu IMAGE (IMAGE 48(2012), str. 6–7).

It was purely accidental. In 1950 I was fired from the Royal Observatory, Edinburgh because I had broken an expensive instrument the first time I used it. This ended my intended career as an astronomer. I was married with one child and the second on its way. My father offered to support me for a Ph.D. I applied to Max Born, then the professor of Applied Mathematics in Edinburgh and one of the founders of quantum theory. But he was about to retire and was taking no more students. So I turned to Prof. A. C. Aitken.

Uvážíme-li, že mezi čtyři nejstarší významné monografie teorie matic řadíme vedle zmíněné

Připojme ještě jeho vzpomínky na počátky odborné práce vztahující se k Weyrovu kanonickému tvaru matice a na seznamování se s tímto tématem:

... It could have been when I was working with Richman on his thesis (ca. 1975) which resulted in our joint 1978 paper. I know I read some of Weyr's great paper then. I consulted Prof. Fiedler and he sent me a Czech version of Weyr's paper which has rested untouched in my files ever since!

Za počátek své práce věnující se výsledkům maticového počtu Eduarda Weyra označil Hans Schneider přibližně polovinu sedmdesátých let. Některé jeho práce ze sedmdesátých, ale i pozdějších let se však velmi výrazně opírají o publikace, které sepsal již v letech padesátých: disertační práci

• *Matrices with non-negative elements* [Sc1]

z roku 1952 a článek

• *The elementary divisors associated with 0, of a singular M-matrix* [Sc2]

z roku 1956.

Ve výše uvedené citaci byla Hansem Schneiderem zmíněna Richmanova disertace a jistý společný článek. Jmenovanou disertací je míněna práce

• *Calculation of the Weyr characteristic from the singular graph of an M-matrix* [Rm1]

z roku 1976 Daniela Jamese Richmana (nar. 1944), Schneiderova studenta na University of Wisconsin, společnou prací z roku 1978 potom často citovaný článek

• *On the singular graph and the Weyr characteristic of an M-matrix* [RS1].

V roce 1978 vyšla obdobně zaměřená Richmanova práce nazvaná

• *The singular graph of lower triangular, nilpotent matrices* [Rm2],

přidruženou tématikou se zabývá i článek

• *Algebraic eigenspaces of non-negative matrices* [Ro1]

z roku 1975, který byl publikován izraelským[204] matematikem Urielem Georgem Rothblumem (1947–2012).

Vztahy mezi Weyrovou charakteristikou a grafem tzv. *M-matice* nebo matice s nezápornými prvky (tzv. nezápornými maticemi)[205] byly součástí dalších Schneiderových pojednání: článku

• *The influence of the marked reduced graph of a nonnegative matrix on the Jordan form and related properties: A survey* [Sc3]

z roku 1986 a jeho prací sepsaných s významným izraelským matematikem

---

knihy Turnbulla a Aitkena [TA1] i MacDuffeeho publikaci [Mc1], je překvapivé, že Schneiderova profesní dráha byla ovlivněna i tímto matematikem – přestože s knihou ani jejím autorem do kontaktu příliš nepřišel.

Your letter motivated me to recheck MacDuffee's book. I do not think I knew of this book as a student. ... BTW, I almost surely owe my presence at U. Wisconsin to MacDuffee. I never got to know him well as he died shortly after I arrived here in 1959. (Z emailové korespondence s autorkou této disertační práce, srpen 2011; v ukázce je zmíněna The University of Wisconsin, kde MacDuffee a Schneider pracovali.)

[204] Uveďme pro zajímavost, že Rothblumovy kořeny sahají do Vídně, z níž jeho rodiče odešli ve třicátých letech 20. století; uprchli před nastupujícím fašismem.

[205] Nezáporným maticím a jejich aplikacím bylo věnováno několik monografií. Pro zájemce zmiňme knihu *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences* [BP1], kterou roku 1994 publikovali Abraham Berman (nar. 1943) a Robert J. Plemmons (nar. 1938).

a politikem Danielem Hershkowitzem[206] (nar. 1953), které jsou nazvány

• *Height bases, level bases, and the equality of the height and the level characteristic of an M-matrix* [HS3][207]

z roku 1989 a

• *Combinatorial bases, derived Jordan sets and the equality of the height and level characteristic of an M-matrix* [HS4][208]

z roku 1991.

Problematika souvislosti Weyrovy charakteristiky s teorií grafů je součástí i následujících publikací: disertační práce Michaela Ezry Sakse

• *Duality Properties of Finite Set Systems* [Ss1]

z roku 1980, pojednání Emdena R. Gansnera

• *Acyclic digraphs, Young tableaux and nilpotent matrices* [Gs1]

z roku 1981 a článků Richarda A. Brualdiho

• *Combinatorial verification of the elementary divisors of tensor products* [Br1] a

• *Combinatorially determined elementary divisors* [Br2]

z let 1985 a 1987. Americký matematik Shmuel Friedland a Daniel Hershkowitz předložili roku 1988 v práci

• *The rank of powers of matrices in a block triangular form* [FH1]

výsledek stanovující dolní hranice nulit mocnin blokově trojúhelníkové matice. Tento odhad byl formulován pomocí součtu nulit mocnin bloků na diagonále. Výsledek byl později využit k odvození významných tvrzení v uvažované problematice (např. vztah tzv. majorizace jisté posloupnosti Weyrovou charakteristikou příslušnou vlastnímu číslu 0).

Ve stejném roce publikovali španělský matematik Rafael Bru a Michael Neumann[209] (1946–2011) článek

• *Nonnegative Jordan bases* [BN1].

Podotkněme na tomto místě důležitou skutečnost, že termín *výšková charakteristika* (*height characteristic*) vyskytující se v titulech některých dosud uvedených článků je název pro část Weyrovy charakteristiky matice A, a sice pro posloupnost charakteristických čísel příslušných k vlastnímu číslu 0. V tehdejších pracích věnovaných uvažované problematice byla pozornost často soustředěna pouze na toto vlastní číslo. Charakteristická čísla matice A jsou nejčastěji

[206] Daniel Hershkowitz je dalším z předních představitelů současné komunity matematiků věnujících se lineární algebře. Mimo jiné je hlavním redaktorem Electronic Journal of Linear Algebra, v letech 2002 až 2008 byl prezidentem The International Linear Algebra Society.

Od konce března 2009 zastává funkci ministra vědy a technologie v izraelské vládě. Ve dnech 17. a 18. května 2012 navštívil spolu s izraelským premiérem Benjaminem Netanjahuem (nar. 1949) a dalšími šesti izraelskými ministry Českou republiku. Při jednání s českým ministrem školství Petrem Fialou (nar. 1964) vytvořili pojetí česko-izraelské spolupráce ve výzkumu a vývoji (především v oblasti programování a neurodegenerativních onemocnění).

[207] Tato práce navazuje na sérii článků [HS1], [HS2], [HRS1] a [HRS2]. V nich ještě přímo Weyrova charakteristika studována nebyla, byly v nich však zavedeny některé důležité pojmy a dokázána tvrzení, na kterých stavěly další texty.

[208] Pojednání navazuje na [HS3], a je tak další součástí série uvedené v předchozí poznámce pod čarou.

[209] Michael Neumann se narodil v Jeruzalémě, studoval v Tel Avivu a v Londýně. Od roku 1985 působil na University of Connecticut.

značena η_i a jsou tedy dána vztahy

$$\eta_k = \operatorname{nul} A^k - \operatorname{nul} A^{k-1}, \quad \text{kde } \operatorname{nul} A^0 = \operatorname{nul} E = 0.$$

Výškovou charakteristikou se rozumí posloupnost $\eta(A) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$, kde index t je největší přirozené číslo, pro které platí $\operatorname{nul} A^t > \operatorname{nul} A^{t-1}$.[210] Souvislost Weyrovy a výškové charakteristiky je často zmíněna na prvních stranách textů, poté se v nich již užívá termín výšková charakteristika.[211]

Pokud autor pracoval s nenulovým vlastním číslem λ, tj. s nulitami matic $(A - \lambda E)^k$, potom Weyrovu charakteristiku příslušnou tomuto vlastnímu číslu zavedl jako Weyrovu charakteristiku matice $(A - \lambda E)$; v jedné z nejnovějších publikací (z roku 2008) je nazvána λ-*height characteristic*.

K volbě termínu *height characteristic* Hans Schneider napsal:[212]

There are two characteristics used in the papers Hershkowitz and I wrote: height and level and we gave them names that suggested and contrasted their functions. Weyr characteristic is a perfectly appropriate name but doesn't hint at its nature. At that time, not too many people might have known what we were talking about.

V několika článcích se po zavedení výškové charakteristiky vyskytuje v malých obměnách následující věta:

We remark that in many references the height characteristic of a matrix A is called the Weyr characteristic of A, e.g. [...]. ([HS4], str. 23)

Uvědomme si, že tato formulace je poněkud matoucí. Weyrovou charakteristikou matice A rozumíme soubor charakteristických čísel příslušných ke všem vlastním číslům, zatímco výšková charakteristika je v uvažovaných textech zavedena pouze pro vlastní číslo 0. Někteří autoři obdobně psali např. o Jordanově

---

210 Krátká rekapitulace Weyrovy charakteristiky příslušné pouze vlastnímu číslu 0 viz dále.

211 Konkrétněji se v pracích, které již byly nebo na následujících stranách budou představeny, termín Weyrova charakteristika vyskytuje v [Rm1], [Rm2], [RS1], [Sc3], [BN1], [HS3], [He1], [HS4], [HS5], [BRS1], [Hg1], [BCT1], [He5], [CC1], [He6], [NM1], [Md1], [ZM1], [NM2], [Tm2], [Tm3], [MM1], z nichž texty [Rm1], [Rm2], [RS1], [Sc3], [BN1], [Hg1] pracují pouze s tímto termínem, a naopak pojednání [HS3], [He1], [HS4], [HS5], [BCT1], [He5], [CC1], [He6], [ZM1], [Tm2], [Tm3], [MM1] zmiňují Weyrovu charakteristiku pouze jako alternativní termín k výškové charakteristice (nejčastěji v úvodu práce či při definici pojmu), poté preferují termín výšková charakteristika. Články [NM1], [MM1] uvádějí v definicích pojmu oba názvy, v samotném textu potom používají (až na jediné uvedení termínu výšková charakteristika) jen symbolický zápis.

Termín Weyrova charakteristika není naopak vůbec zmíněn v pracích [AH1], [He2], [AHK1], [He3], [HS6], [He4], [NS1], [ZT1], [NM2], v nichž jejich autoři používali jen termín výšková charakteristika.

Disertační práce [Sc1] a články [Sc2], [Ro1], [Br1], [FH1] pracují se zcela jinou terminologií, žádná z charakteristik zde není uvedena.

Ve třech článcích jsou v seznamu literatury uvedeny konkrétní práce Eduarda Weyra. V [RS1] jsou to [We6] a [We13]. V referencích jsou uvedeny i další práce našich autorů: rusky psaný článek Karla Čulíka [Ci1] a společná práce Miroslava Fiedlera a Vlastimila Ptáka (1925–1999) [FP1]. V [Rm2] je odkazováno na Weyrův text [We13]. Dalšími z celkem šesti položek v referencích jsou práce Karla Čulíka [Ci1] a Antonína Vrby [Vr1]. V [HS3] je zmíněna Weyrova práce [We13].

212 Z emailové korespondence s autorkou disertační práce (leden 2013).

bázi čtvercové matice řádu n, ale místo n vektorů brali v úvahu pouze ty, které „přísluší" vlastnímu číslu 0. V jednom z článků lze např. nalézt souvětí, v němž je pojem Jordanovy báze současně přiřazen jak matici řádu n, tak vektorovému prostoru (tzv. *generalized nullspace*), jehož dimenze nemusí být rovna n:

Note that in our terminology, a Jordan basis for A is a basis for the generalized nullspace of A. ([HS3], str. 151)

Tento nesoulad si však autoři evidentně uvědomili. Je zajímavé sledovat, jak v pracích, které publikovali titíž matematikové, postupně docházelo právě u pojmu Jordanovy báze ke korekci této nesrovnalosti. Od termínu *Jordanova báze matice A* přešli během dvou let Hans Schneider a Daniel Hershkowitz při označení téhož pojmu k názvu *Jordanova báze $E(A)$*, kde zápis $E(A)$ značí již zmíněný podprostor (*generalized nullspace*) aritmetického vektorového prostoru dimenze n.[213]

Zajímavý je návrat matematiků na sklonku století k pojmu i termínu nulita, přičemž je často zmíněn i jeho význam v řeči vektorových prostorů, tj. dimenze jádra lineárního zobrazení (endomorfismu) příslušného k matici A^k, pro případ nenulového vlastního čísla λ příslušného k matici $(A - \lambda E)^k$.

Z názvů řady článků je zřejmé, že se matematikové v sedmdesátých a osmdesátých letech soustředili především na tzv. M-matice.[214] Po zveřejnění Perronovy-Frobeniovy spektrální teorie (viz Perronova práce *Zur Theorie der Matrices* [Pr1] z roku 1907 a Frobeniův článek *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen* [Fr16] z roku 1912) pro nezáporné matice se pozornost obrátila na studium souvislosti mezi vlastnostmi grafů a obecnými spektrálními vlastnostmi nezáporných matic. Jak ukážeme v následujícím textu, od těchto matic je již blízko k singulárním M-maticím. Teprve zhruba patnáct let před koncem 20. století se začaly studovat zmíněné vztahy pro případ obecných matic nad libovolným polem. Pozdější práce se již většinou věnují maticím obecnějším než jsou M-matice.

Jedná se například o několik Hershkowitzových článků:

- *A majorization relation between the height and the level characteristics* [He1] (1989),
- *Peak characteristic and nonnegative signature* [He2] (1991),
- *The height characteristic of block triangular matrices* [He3] (1992) a
- *The relation between the Jordan structure of a matrix and its graph* [He4] (1993).

Nejinak je tomu u Schneiderovy a Hershkowitzovy společné práce

- *On the existence of matrices with prescribed height and level characteristics* [HS5]

z roku 1991, která se věnuje hledání všech posloupností η a λ, pro něž existuje

[213] Postačí porovnat např. práce [HS3] a [HS4], konkrétně Definition 2.7, str. 151, a Definition 2.9, str. 24.

Podprostor nazývaný *generalized nullspace* budeme značit GKer A, více viz dále.

[214] Termín M-matice poprvé použil Aleksandr Markovič Ostrovskij (1893–1986) v roce 1937 v práci *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale* [Os1]. Vysvětlení pojmu viz dále.

buď M-matice nebo striktně trojúhelníková matice, jejíž výšková charakteristika je η a úrovňová λ.[215]

Na první pohled by se mohlo zdát, že nadvládu výsledků publikovaných komunitou soustředěnou kolem Hanse Schneidera či Daniela Hershkowitze narušil roku 1991 Wenchao Huang svým článkem

- *On the singular graph and Jordan diagram of strictly lower triangular matrices and M-matrices* [Hg1].

Opak je však pravdou, neboť i on byl Schneiderovým doktorandem.[216] Zmíněná publikace navázala především na výsledky výše uvedené práce *On the singular graph and the Weyr characteristic of an M-matrix* publikované Schneiderem a Richmanem.

Tak jako Hans Schneider, i Daniel Hershkowitz šířil povědomí o výškové (Weyrově) charakteristice mezi svými studenty. Jedním z nich byl Nader Agha, s nímž v roce 1990 publikoval článek

- *The relation between the height and level characteristics for a matrix with simple singular vertices* [AH1],

který navázal na zmíněnou práci *On the existence of matrices with prescribed height and level characteristics* a odpověděl na otázku v ní vznesenou.

Je proto zajímavé, že text *The relation between the height and level characteristics for a matrix with simple singular vertices* je datován dřívějším rokem než práce *On the existence of matrices with prescribed height and level characteristics.* Obě publikace tak musely být psány přibližně ve stejné době během intenzivního studia této problematiky skupinou často komunikujících matematiků. V roce 1992 byly výsledky těchto dvou prací zobecněny v textu

- *A solution to an inverse height and level characteristics problem* [AHK1],

přičemž tentokrát byl autorský kolektiv Nader, Hershkowitz rozšířen o dalšího člena z řad Hershkowitzových studentů, o Nataly Kogan.

Další z neuvěřitelné řady příspěvků publikovaných Hansem Schneiderem nebo Danielem Hershkowitzem na přelomu osmdesátých a devadesátých let 20. století je jejich společná, velmi přínosná práce

- *Path coverings of graphs and height characteristics of matrices* [HS6]

z roku 1993, která představila podstatné výsledky studia vztahů mezi Weyrovou charakteristikou příslušnou vlastnímu číslu 0 a pokrýváním grafu vrcholově disjunktními cestami. Obdobnou tematikou se zabývá rozsáhlý článek

- *Paths in directed graphs and spectral properties of matrices* [He5]

Daniela Hershkowitze, který vyšel následujícího roku.

Termín Weyrova charakteristika se vyskytuje i v práci

- *Predecessor property, full combinatorial column rank, and the height characteristic of an M-matrix* [BCT1],

kterou roku 1993 publikovala trojice autorů Rafael Bru, Rafael Cantó a Bit-Shun Tam. Na ni navázalo v roce 1996 pojednání

[215] Vysvětlení pojmů viz dále.

[216] Schneiderův vliv na tuto práci je však diskutabilní, neboť Wenchao Huang obhájil svou disertační práci až v roce 1997. Není tedy jisté, že již byl v roce 1991 Schneiderovým studentem.

• *Singular graph and extension of Jordan chains of an M-matrix* [CC1], jehož tvůrci jsou Rafael Cantó a Joan-Josep Climent. Mezitím byl v roce 1994 uveřejněn článek Michaela Neumanna a Hanse Schneidera

• *Algorithms for computing bases for the Perron eigenspace with prescribed nonnegativity and combinatorial properties* [NS1].

Souvislostmi mezi spektrálními vlastnostmi matice a teoretickými charakteristikami zavedenými řečí teorie grafů se zabývá také článek

• *The combinatorial structure of generalized eigenspaces – from nonnegative matrices to general matrices* [He6]
z roku 1999, pod nímž je autorsky podepsán pouze Hershkowitz. Kromě jeho závěru obsahujícího nové výsledky se jedná o práci přehledovou, snažící se uvést a sumarizovat hlavní myšlenky dosud publikovaných textů obdobné náplně. Začíná u vztahů platících pro M-matice a postupně se dostává k maticím obecným.[217]

Velmi krátká poznámka o výškové charakteristice je i ve více než třicetistránkovém článku

• *On matrices with cyclic structure* [Tm1],
který publikoval v roce 1999 Bit-Shun Tam, profesor působící na taiwanské univerzitě.[218]

V roce 1999 bylo rovněž publikováno takřka třicetistránkové pojednání

• *On the Jordan form of an irreducible matrix with eventually nonnegative powers* [ZT1],
jehož autory jsou Boris G. Zaslavsky a Bit-Shun Tam. Práce se však od předchozích značně liší, přístupem patří spíše k textům nového milenia.

Problematika vztahů mezi charakteristikami grafů a matic je studována i ve třetím tisíciletí, nicméně se většinou vyskytuje v textech, jejichž hlavní náplň je jiná. Stále však pracují s nulitou mocnin matice, některé užívají termín Weyrova charakteristika, většinou však pracují s termínem charakteristika výšková.

Weyrovu charakteristiku zmiňují jako alternativní termín k výškové charakteristice například sedmdesátistránkové pojednání

• *A cone-theoretic approach to the spectral theory of positive linear operators: the finite-dimensional case* [Tm2]
z roku 2001 či více než padesátistránková práce

• *The Perron generalized eigenspace and the spectral cone of a cone-preserving map* [Tm3]
z roku 2004, jejichž autorem je opět Bit-Shun Tam.

[217] Práce je věnována Hansi Schneiderovi (s mírným zpožděním) k jeho významnému životnímu jubileu:

Dedicated to Hans Schneider on the occasion of his 70th birthday with gratitude for fifteen years of fruitful co-operation and friendship. ([He6], str. 173)

[218] Bit-Shun Tam publikoval několik článků, které se přímo Weyrovou charakteristikou nezabývají, a proto je nebudeme zmiňovat. Jedná se však o tematicky velmi příbuzné práce, na něž je odkazováno v mnoha zmíněných Schneiderových a Hershkowitzových článcích. V některých je uvedeno poděkování Bit-Shun Tamovi za pomoc a komentáře. Hans Schneider a Bit-Shun Tam jsou spoluautory několika článků, existuje tzv. *Tamova-Schneiderova věta* o periferním spektru matice (viz [TS1]). Periferním spektrem matice rozumíme soubor všech jejích vlastních čísel, jejichž absolutní hodnota je rovna jejímu spektrálnímu poloměru.

V letech 2002 až 2004 byla spoluautorkou tří článků pracujících s Weyrovou charakteristikou Judith Joanne McDonald, doktorandka Hanse Schneidera na University of Wisconsin. Nejstarší a nejmladší z těchto textů publikovala spolu se Sarah Carnochan Nagvi, ve zbývajícím byl spoluautorem Boris G. Zaslavsky. V chronologickém pořadí se jedná o články

• *The combinatorial structure of eventually nonnegative matrices* [NM1] z roku 2002,

• *A characterization of Jordan canonical forms which are similar to eventually nonnegative matrices with the properties of nonnegative matrices* [ZM1] z roku 2003 a

• *Eventually nonnegative matrices are similar to seminonnegative matrices* [NM2]

z roku 2004. Všechny zmiňují Weyrovu charakteristiku. Ta se vyskytuje i v samostatné práci Judith Joanne McDonald

• *The peripheral spectrum of a nonnegative matrix* [Md1]

z roku 2003.

Judith Joanne McDonald je rovněž spoluautorkou článku

• *Level characteristics corresponding to peripheral eigenvalues of a nonnegative matrix* [MM1].

Publikovala jej roku 2008 spolu s DeAnne M. Morris, která Weyrovu charakteristiku studovala i ve své disertační práci

• *Combinatorial properties of nonnegative and eventually nonnegative matrices* [Mo1]

z téhož roku. Sepsala ji na Washington State University pod vedení Judith Joanne McDonald. Je tak vytvořen sled matematiků a jejich doktorandů A. C. Aitken – H. Schneider – J. J. McDonald – D. M. Morris, kteří s Weyrovou charakteristikou pracovali, používali ve svých pracích přímo tento termín a inspirovali své studenty. Pomyslná štafeta se přitom úspěšně předává již přibližně osmdesát let (práce [TA1] z roku 1932 – článek [MM1] z roku 2008).[219]

Skutečnost, že to byl osobně Hans Schneider, kdo seznámil Judith J. McDonald s touto problematikou, potvrdila sama matematička:[220]

I learned about the Weyr characteristic from Hans Schneider. The student of mine who worked with it also was Diane Morris. She finished a PhD here and Washington State ...

5.4 Charakteristiky teorie grafů – odborná část

Věnujme se nyní odborné náplni výše uvedených prací. Uvedeme základní výsledky o vztazích mezi grafy matice a Weyrovou (výškovou) charakteristikou příslušnou k vlastnímu číslu 0, abychom si udělali bližší představu, jakého typu uvažované myšlenky jsou.

[219] Již jsme viděli, že tato řada pokračovatelů není jediná. Z dosud uvedených je však nejdelší. Později se seznámíme ještě s Helene Shapiro, která se rovněž dozvěděla o Weyrově charakteristice od Hanse Schneidera a která na přelomu tisíciletí podnítila zájem světové algebraické komunity o Weyrovu charakteristiku.

[220] Z emailové korespondence s autorkou disertační práce (únor 2013).

Obecně lze říci, že značná pozornost je v publikacích věnována souvislosti mezi charakteristikami pocházejícími z různých matematických oborů – z teorie grafů a z teorie matic. Jedná se především o vztah mezi úrovňovou charakteristikou (*level characteristic*), jež je zavedena pomocí terminologie grafů pro graf matice, a již zmíněnou výškovou charakteristikou (*height characteristic*), neboli Weyrovou charakteristikou příslušnou vlastnímu číslu 0, která zcela záleží na spektrálních vlastnostech matice. V pozdějších pracích byly s postupným zobecňováním výsledků nacházeny nové a nové posloupnosti související s grafy a nahrazující v dokázaných vztazích úrovňovou charakteristiku.

Jelikož tato problematika nebyla dosud v češtině publikována, je zde na několika místech zavedena nová terminologie. Názvy, jejichž překlad nebyl jednoznačný, jsou uvedeny i v jejich originální anglické podobě, aby si čtenář mohl případně zvolit i svoji verzi českého termínu.

Protože v této části bude většinou studována Weyrova charakteristika příslušná pouze vlastnímu číslu 0, uveďme nyní pro lepší orientaci krátkou rekapitulaci některých dále potřebných pojmů Weyrovy teorie charakteristických čísel přizpůsobených pouze k tomuto vlastnímu číslu. Některé pojmy budeme v této problematice uvažovat v mírně modifikované nebo obecnější podobě (viz dále např. Jordanova báze). Naším cílem je přiblížení se symbolice a terminologii, která byla použita v původních, výše uvedených pracích a která nám usnadní vyjadřování. Z těchto důvodů také přirozeným způsobem přeneseme pojem dimenze jádra endomorfismu na dimenzi jádra příslušné matice.

Budeme se zabývat pouze čtvercovými maticemi (nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). Spektrum matice A budeme značit $\sigma(A)$, spektrální poloměr matice A symbolem $\varrho(A)$, tj. $\varrho(A) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(A)\}$. Charakteristický polynom uvažujeme ve tvaru $\det(\lambda E - A)$ (pokud bychom jej definovali jako $\det(A - \lambda E)$, lišil by se pro matice lichého řádu jen znaménkem). Budeme uvažovat pouze blokové matice, jejichž bloky na diagonále jsou čtvercové.

Jádrem $\operatorname{Ker} A$ *čtvercové matice* A řádu n nazýváme množinu vektorů v, pro něž $Av^T = o^T$. Proto $\operatorname{nul} A = \dim \operatorname{Ker} A$.

Je-li matice A singulární, tj. má-li vlastní číslo 0, uvažujeme posloupnost

$$0 \neq \operatorname{Ker} A \subsetneqq \operatorname{Ker} A^2 \subsetneqq \operatorname{Ker} A^3 \subsetneqq \dots \subsetneqq \operatorname{Ker} A^t = \operatorname{Ker} A^{t+1} = \dots ,$$

kde t je nejmenší přirozené číslo, pro které je $\operatorname{Ker} A^t = \operatorname{Ker} A^{t+1}$.

Zobecněné jádro $\operatorname{GKer} A$ *matice* A řádu n potom definujeme vztahem

$$\operatorname{GKer} A = \operatorname{Ker} A^t.$$

Je zřejmé, že $\operatorname{GKer} A = \operatorname{Ker} A^n$.

Charakteristická čísla příslušná k vlastnímu číslu 0 matice A tedy jsou

$$\begin{aligned}
&\eta_1 = \operatorname{nul} A = \dim \operatorname{Ker} A,\\
&\eta_2 = \operatorname{nul} A^2 - \operatorname{nul} A = \dim \operatorname{Ker} A^2 - \dim \operatorname{Ker} A,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\eta_t = \operatorname{nul} A^t - \operatorname{nul} A^{t-1} = \dim \operatorname{Ker} A^t - \dim \operatorname{Ker} A^{t-1}.
\end{aligned}$$

Weyrova charakteristika příslušná vlastnímu číslu 0 matice A (tj. výšková charakteristika matice A) je $\eta(A) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$ a $\sum_{i=1}^{t} \eta_i = \dim \mathrm{GKer}\, A$ je násobnost vlastního čísla 0. Termínem výšková charakteristika matice A budeme označovat Weyrovu charakteristiku matice A příslušnou vlastnímu číslu 0.

Jordanův řetízek matice A příslušný vlastnímu číslu 0 je uspořádaná množina nenulových vektorů $\left\{v^T, Av^T, \ldots, A^{t-1}v^T\right\}$, kde $A^t v^T = o^T$. Odtud plyne, že $A^{t-1}v^T \in \mathrm{Ker}\, A$, $A^{t-2}v^T \in \mathrm{Ker}\, A^2$ atd.

Jordanovou bází podprostoru $\mathrm{GKer}\, A$ rozumíme bázi složenou z disjunktních Jordanových řetízků matice A. Přitom je zachováno uspořádání každého řetízku. Na pořadí, v němž jsou řetízky složeny do báze, nezáleží. V případě komplexní matice A Jordanova báze podprostoru $\mathrm{GKer}\, A$ vždy existuje.[221]

Nechť v je nenulový vektor patřící $\mathrm{GKer}\, A$ čtvercové matice A. *Výše vektoru* v (*height of* v) je nejmenší přirozené číslo k, pro které $A^k v^T = o^T$.[222] Výše nulového vektoru je nula. Výši vektoru v budeme značit *výše*(v).[223]

Po této úmluvě pokračujme definicemi stěžejních pojmů a formulacemi nejdůležitějších poznatků uvažovaných článků:

1 Definice. *Reducibilní* (*rozložitelnou*) maticí rozumíme čtvercovou matici, kterou lze pomocí simultánních permutací řádků a sloupců, tj. pomocí transformace $P^{-1}AP (= P^T AP)$, kde P je permutační matice, převést na tvar

$$\begin{pmatrix} K & L \\ O & M \end{pmatrix}, \qquad \text{resp. na tvar} \qquad \begin{pmatrix} K & O \\ L & M \end{pmatrix},$$

v němž K a M jsou čtvercové matice (řádu alespoň jedna) a O je nulová matice. V opačném případě nazýváme matici *ireducibilní* (*nerozložitelnou*).

Matice řádu 1 (včetně nulové) považujeme za ireducibilní, matice nulové řádu alespoň dva za reducibilní.

2 Definice. Reálná matice se nazývá *nezáporná*, jsou-li všechny její prvky nezáporná čísla.

3 Definice. Matici A nazveme *Z-maticí*, jestliže existuje nezáporná matice B taková, že $A = kE - B$.

Jedná se tedy o matici A, jejíž prvky neležící na diagonále jsou nekladné, o prvcích na diagonále nepředpokládáme nic.

4 Definice. *M-maticí* rozumíme Z-matici $A = kE - B$, pro kterou $k \geq \varrho(B)$.

[221] Jordanovu bázi $\mathrm{GKer}\, A$ lze zavést i jiným způsobem. Z Jordanovy báze čtvercové matice A, tj. z množiny sloupců matice G, pro kterou $G^{-1}AG$ je Jordanův kanonický tvar matice A, vybereme právě ty vektory, které jsou ve stejném sloupci jako nuly na diagonále v Jordanově kanonickém tvaru (zachováme přitom pořadí vektorů v rámci téže Jordanovy buňky).

[222] Připomeňme, že O. Borůvka nazval v učebnici [Bo8] z roku 1971 tento pojem *řád vektoru*.

[223] Vektor $v \in \mathrm{GKer}\, A$, $v \neq o$, má tedy výši $k > 0$ právě tehdy, když $v \in \mathrm{Ker}\, A^k \setminus \mathrm{Ker}\, A^{k-1}$.

Jelikož bylo dokázáno,[224] že pro čtvercové matice $B = (b_{ij})$ s nezápornými prvky platí $\varrho(B) \geq b_{ii}$ pro všechna i, má M-matice na diagonále nezáporné prvky a na ostatních místech prvky nekladné.[225]

Připomeňme nyní nejdůležitější poznatky Perronovy-Frobeniovy spektrální teorie pro nezáporné matice a jejich modifikaci pro M-matice. Mnohé z vlastností použijeme v dalším textu, speciálně pak tvrzení platné pro ireducibilní matice.

5 Věta. *Nechť A je čtvercová nezáporná matice. Potom spektrální poloměr $\varrho(A)$ je nezáporné vlastní číslo a tomuto číslu odpovídá nezáporný vlastní vektor. Je-li navíc matice A ireducibilní, je $\varrho(A)$ jednoduchým vlastním číslem a složky příslušného vlastního vektoru jsou kladné.*[226]

6 Věta. *Pro singulární M-matici A existuje nezáporný vektor x splňující rovnici $Ax^T = o^T$. Je-li navíc matice A ireducibilní, potom 0 je jednoduchým vlastním číslem matice A a odpovídající vlastní vektor má kladné složky.*

Naskýtá se tedy otázka, proč používáme při zavedení pojmu M-matice na první pohled nepříliš průhledný vztah $A = kE - B$ místo jednoduchého stanovení „znamének prvků“ na diagonále matice a mimo ni. Důvod je následující: uvědomme si, že M-matice A bude singulární, právě když $k = \varrho(B)$. Je známo, že je-li λ s-násobným vlastním číslem matice B, je 0 s-násobným vlastním číslem matice $\lambda E - B$. Autoři proto formulovali uvedenou definici využívající vztah nápadně připomínající tvar charakteristické matice, aby mohli místo studia vlastního čísla $\varrho(B)$ nezáporné matice B ekvivalentně studovat vlastní číslo 0 singulární M-matice $A = \varrho(B)E - B$.

V různých textech se proto často objevují formulace následujícího typu:

It is often convenient to state results on a nonnegative matrix P in terms of the associated singular M-matrix $A = \varrho(P)I - P$. ([Sc3], str. 165)

Formally our results are stated in terms of the eigenvalue 0 of a singular matrix, but this is a technicality, since a scalar matrix may always be added to the original matrix. ([HRS2], str. 10)

Jen na vlastní číslo 0 se v uvažovaných textech matematikové často omezili také u Segreovy charakteristiky $\xi(A)$ matice A. Definovali ji jako nerostoucí posloupnost řádů Jordanových buněk příslušných k vlastnímu číslu 0. Nezřídka

[224] Viz [Ta1].

[225] Často se M-maticemi rozumí pouze třída Z-matic s kladnými diagonálními prvky, výskyt nul na diagonále se nepřipouští. Tedy ve vztahu $A = kE - B$ je $k > \varrho(B)$. Námi definované M-matice jsou poté nazývány *matice třídy* K_0. Matice třídy K_0, která splňuje $k > \varrho(B)$, je tedy nazývána M-maticí (což se nekryje s námi definovanou M-maticí), ale i *matice třídy* K (pojmenované na počet matematika D. M. Koteljanskiho). Jistě $K \subset K_0$. Je-li $k = \varrho(B)$, je k vlastním číslem matice B (viz dále 5 Věta) a M-matice A je singulární. Je-li naopak $k > \varrho(B)$, není k vlastním číslem matice B, a tedy M-matice A je regulární. „Naše“ regulární M-matice proto odpovídají třídě K, singulární pak třídě matic z K_0, které nejsou maticemi třídy K. Viz například [Fi1], str. 107–113, případně anglická verze téže monografie ([Fi1], 2. vyd., str. 129–139).

[226] Pokud budeme uvažovat ireducibilní matici řádu alespoň dva, je $\varrho(A)$ navíc kladným vlastním číslem.

upozorňovali na dualitu mezi výškovou charakteristikou a Segreovou charakteristikou příslušnou vlastnímu číslu 0.[227]

7 Definice. *Grafem matice* $A = (a_{ij})$ řádu n rozumíme orientovaný graf s n vrcholy $1, 2, \dots, n$, v němž existuje orientovaná hrana z vrcholu i do vrcholu j právě tehdy, když $a_{ij} \neq 0$. Graf matice A značíme $G(A)$.

Obdobně definujeme redukovaný graf $R(A)$ *blokové matice.*

8 Definice. *Redukovaným grafem* $R(A)$ *blokové matice* A tvaru

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} \end{pmatrix}$$

rozumíme orientovaný graf s p vrcholy $1, 2, \dots, p$, v němž existuje hrana z i-tého vrcholu do j-tého, právě když $A_{ij} \neq O$.

9 Definice. Nechť A je matice rozdělená na bloky, z nichž diagonální jsou čtvercové. *Vrchol* i redukovaného grafu $R(A)$ se nazývá *singulární*, jestliže A_{ii} je singulární matice.[228] Je-li navíc 0 jednoduchým vlastním číslem matice A_{ii}, potom se vrchol i nazývá *jednoduchý singulární.*

10 Definice. *Cestou* budeme rozumět posloupnost $i_1, i_2, \dots, i_k$ různých vrcholů grafu, ve které jsou každé dva po sobě jdoucí vrcholy spojeny orientovanou hranou, tj. hrany jdou z i_1 do i_2, z i_2 do i_3 atd. až z i_{k-1} do i_k. Cestou rovněž nazýváme posloupnost obsahující jediný vrchol. *Délkou cesty* nazveme počet vrcholů této cesty.[229]

Čtvercová matice řádu n je ireducibilní, právě když je její graf silně souvislý, tj. pro každé dva vrcholy $i, j \in \{1, \dots, n\}$ existuje cesta z i do j, nebo když má graf jediný vrchol.

11 Definice. Uvažujme singulární vrchol i redukovaného grafu $R(A)$ a všechny cesty v $R(A)$ v něm končící. Z těchto cest vyberme takovou cestu, která obsahuje největší počet singulárních vrcholů. *Úrovní* (*level*) *singulárního vrcholu* i redukovaného grafu $R(A)$ potom rozumíme počet singulárních vrcholů na této cestě.

12 Poznámka. Úroveň vrcholu lze definovat pozměněným způsobem. *Singulárním grafem matice* A rozumíme graf obsahující pouze singulární vrcholy

[227] Vztahu duality je věnována pozornost ve 2. kapitole.
[228] Poznamenejme, že v případě matice „rozdělené“ na bloky řádu 1 jsou singulárními vrcholy $R(A)$ právě vrcholy bez smyčky a samozřejmě $R(A) = G(A)$.
[229] Raději zdůrazněme, že cesta (*path*) má různé vrcholy. Obecnější pojem, v němž nemusí být vrcholy nutně různé, se nazývá sled (*walk*).

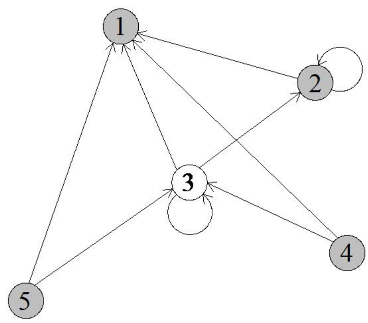
redukovaného grafu $R(A)$, v němž existuje hrana z vrcholu i do vrcholu j právě tehdy, když v $R(A)$ existuje cesta z vrcholu i do vrcholu j. „V řeči singulárního grafu“ lze úroveň singulárního vrcholu redukovaného grafu definovat jako maximální délku cesty singulárního grafu, která končí v tomto vrcholu.

13 Definice. Nechť m je největší z úrovní všech singulárních vrcholů v $R(A)$ matice A. *Úrovňovou charakteristikou* $\lambda(A)$ matice A nazýváme posloupnost $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, kde λ_k je počet singulárních vrcholů grafu $R(A)$ mající úroveň k.

Demonstrujme nové pojmy na konkrétním příkladu. Uvažujme matici

$$A = \left(\begin{array}{c|rr|r|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

rozdělenou na bloky. Singulárními vrcholy, které budeme při zakreslování grafů zvýrazňovat jejich podbarvením, jsou vrcholy číslo 1, 2, 4 a 5. Příslušný redukovaný graf $R(A)$ vypadá takto:



Graf 1

Z cest, které končí ve vrcholu 1, obsahují nejvíce singulárních vrcholů cesty (5, 3, 2, 1) a (4, 3, 2, 1), a to tři. Úroveň vrcholu 1 je tedy tři. Do vrcholu 2 směřují dvě cesty (4, 3, 2) a (5, 3, 2), obě obsahují dva singulární vrcholy, úroveň vrcholu 2 je proto dva. Ve zbývajících singulárních vrcholech 4 a 5 končí pouze cesty jednovrcholové, jejich úroveň je proto jedna. Úrovňová charakteristika $\lambda(A)$ matice A je tedy posloupnost $(2, 1, 1)$.

Speciálním případem blokové matice je tzv. Frobeniův normální tvar.[230]

[230] Upozorněme, že zcela totožný termín se v lineární algebře používá i pro odlišný pojem.

14 Definice. *Frobeniův normální tvar* je bloková matice

$$\begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q1} & A_{q2} & \ldots & A_{qq} \end{pmatrix},$$

v níž jsou diagonální matice A_{ii} čtvercové a ireducibilní.

Je známo, že každou čtvercovou matici lze pomocí simultánních permutací řádků a sloupců převést na Frobeniův normální tvar. Tento tvar existuje – až na nepodstatné změny v uspořádání prvků, které nebudou mít na naše studium vliv – pro danou matici jediný. Konkrétněji, diagonální bloky jsou určeny jednoznačně až na permutaci prvků uvnitř těchto bloků (důsledkem jsou permutace prvků v odpovídajících nediagonálních blocích), Frobeniův normální tvar je poté jednoznačně určen až na uspořádání diagonálních bloků.[231]

Uvědomme si pro další odvozování důležitou skutečnost, že po provedení takovéto transformace se diagonální prvky pouze přemístí v rámci diagonály, nediagonální prvky zůstanou nediagonálními, a proto Frobeniův normální tvar M-matice (a také každý jeho diagonální blok) zůstává M-maticí.

Dle Perronovy-Frobeniovy teorie je 0 jednoduchým vlastním číslem singulární ireducibilní M-matice A, a tedy i každého singulárního bloku, který leží na diagonále Frobeniova normálního tvaru matice A.

Existuje mnoho způsobů, kterými lze dané matici přiřadit blokovou matici tak, aby bloky na diagonále byly čtvercové. V následujících odstavcích věnovaných vztahům mezi charakteristikami budeme vždy předpokládat, že matice A je ve Frobeniově normálním tvaru. A právě tomuto tvaru přiřadíme úrovňovou charakteristiku.

Vedle dvou dosud známých charakteristik, výškové $\eta(A)$ a Segreovy $\xi(A)$, jsme zavedli úrovňovou charakteristiku $\lambda(A)$. Naskýtá se tedy přirozená otázka, zda se úrovňová charakteristika rovná některé ze zbývajících dvou a pokud ne, zda lze mezi těmito charakteristikami nalézt nějaký jiný vztah.

Vyslovme nejprve věty týkající se dvou speciálních případů:

15 Věta. *Nechť A je M-matice. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) $\eta(A) = (t)$,
(ii) $\lambda(A) = (t)$.

[231] Více informací k jednoznačnosti uspořádání diagonálních matic ve Frobeniově normálním tvaru viz [Fi1], str. 70–71.

Z Ferrersova diagramu je zřejmé, že lze vyslovit větu analogickou, v níž budou navzájem ekvivalentní tyto podmínky:

(i') $\xi(A) = (1, 1, ..., 1)$,
(ii) $\lambda(A) = (t)$,

kde počet prvků (jedniček) Segreovy charakteristiky je t.

V tomto speciálním případě, v němž každá cesta redukovaného grafu $R(A)$ obsahuje maximálně jeden singulární vrchol,[232] platí vztah

$$\eta(A) = \lambda(A) = \xi(A)^*.$$

Celkový počet singulárních vrcholů v $R(A)$ je t, což je současně počet buněk (řádu 1) v Jordanově kanonickém tvaru matice příslušných vlastnímu číslu 0, resp. násobnost vlastního čísla 0.

Je zajímavé, že předchozí věta je jedním z výsledků, které byly dokázány již ve Schneiderově disertační práci *Matrices with non-negative elements* z roku 1952 a rovněž v jeho článku *The elementary divisors associated with 0, of a singular M-matrix* z roku 1956. Tehdy však byla vyslovena zcela jinou terminologií, o žádné charakteristice v ní není ani zmínka.[233]

Připomeňme, že ani Hans Schneider si tyto myšlenky automaticky s Weyrovou charakteristikou nespojil, neboť v roce 2011 v korespondenci vzpomínal, že s touto problematikou začal pracovat až kolem roku 1975.

---

[232] Z rovnosti $\lambda(A) = (t)$ totiž plyne, že v $R(A)$ neexistuje cesta z jednoho singulárního vrcholu do jiného.

[233] Pro zájemce uveďme doslovnou citaci věty z práce [Sc2]. Jedná se o formulaci odpovídající ekvivalenci podmínek (i') a (ii):

THEOREM 3. Let $A = [A_{ij}]$, $i, j = 1, \ldots, k$, be a singular M-matrix in standard form. Let S be the set of indices of singular A_{ii}. The elementary divisors associated with the characteristic root 0 are all linear if and only if $R_{\beta\alpha} = 0$ whenever $\alpha, \beta \in S$ and $\alpha \neq \beta$. ([Sc2], str. 114)

Připojme ještě vysvětlení symbolu $R_{\beta\alpha}$:

Let A be a square matrix and let P be the diagonally symmetric partition $[A_{ij}]$, $i, j = 1, ..., k$. For $i, j = 1, ..., k$ we set

$$r_{ij}(A, P) = 0 \quad \textit{if} \quad i \neq j \quad \textit{and} \quad A_{ij} = 0,$$

$$\textit{and} \quad r_{ij}(A, P) = 1 \quad \textit{if} \quad i = j, \quad \textit{or} \quad A_{ij} \neq 0.$$

Where no confusion can arise we shall write r_{ij} for $r_{ij}(A, P)$. Next we set

$$R_{ij}(A, P) = \; \textit{max} \; r_{ih} r_{hl} \ldots r_{nj},$$

the maximum being taken over all sequences $(i, h, \ldots, n, j)$. Again we shall generally write R_{ij} for $R_{ij}(A, P)$. ([Sc2], str. 109)

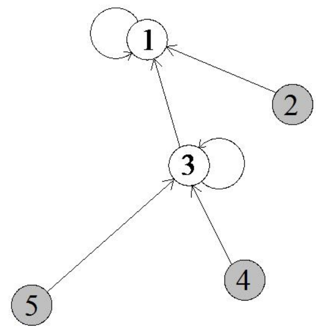
Pro porovnání vývoje terminologie uveďme i o třicet let mladší formulaci této věty týmž autorem:

(6.1) THEOREM [...]. Let A be a M-matrix. Then the following are equivalent:
(a) There Jordan blocks (for the eigenvalue 0) are all of size 1, i.e., the Segré characteristic is $(1, \ldots, 1)$.
(b) No singular vertex in R(A) has access to any other singular vertex, i.e., the singular graph S(A) is trivially ordered. ([Sc3], str. 174)

Ilustrujme tvrzení na příkladě. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d, e, f jsou libovolná kladná čísla. Matice A je M-matice, je ve Frobeniově normálním tvaru, bloky na diagonále jsou řádu 1. Matici A přísluší graf $R(A) = G(A)$



Graf 2

Všechny singulární vrcholy 2, 4, 5 mají úroveň jedna, proto $\lambda(A) = (3)$. Dle uvedené věty ihned víme, že i $\eta(A) = (3)$. Ověřme tuto skutečnost pomocí rozdílů nulit. Protože $\operatorname{nul}(A) = \operatorname{nul}(A^2) = 3$, je skutečně $\eta(A) = (3)$. Celkový počet singulárních vrcholů v $R(A)$ je roven třem. Charakteristický polynom matice A je $\lambda^3(\lambda - a)(\lambda - d)$, tedy 0 je trojnásobným vlastním číslem. Odpovídají mu tři lineárně nezávislé vlastní vektory

$$(0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1),$$

vlastnímu číslu a přísluší vlastní vektor

$$\left(\frac{a(a-d)}{cf}, \frac{-b(a-d)}{cf}, \frac{-a}{f}, \frac{e}{f}, 1\right)$$

a vlastnímu číslu d vlastní vektor

$$\left(0, 0, \frac{-d}{f}, \frac{e}{f}, 1\right).$$

Nalezli jsme pět lineárně nezávislých vlastních vektorů, Jordanův kanonický tvar J má tedy pět Jordanových buněk prvního řádu, z nichž tři odpovídají vlastnímu číslu 0. Tedy

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

a Segreova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu 0 je posloupnost $\xi(A) = (1, 1, 1)$, z čehož plyne $\xi(A)^* = (3)$. Je tedy $\eta(A) = \lambda(A) = \xi(A)^*$.

Zabývejme se nyní druhým extrémním případem:

16 Věta. *Nechť A je M-matice. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) $\eta(A) = (1, 1, \ldots, 1)$,
(ii) $\lambda(A) = (1, 1, \ldots, 1)$,

neboli analogicky jsou ekvivalentní podmínky:

(i') $\xi(A) = (t)$,
(ii) $\lambda(A) = (1, 1, \ldots, 1)$,

kde počet prvků (jedniček) charakteristik $\eta(A)$ a $\lambda(A)$ v obou verzích tvrzení je t.[234]

I v tomto speciálním případě, v němž existuje cesta v $R(A)$ obsahující všechny singulární vrcholy grafu, tedy platí

$$\eta(A) = \lambda(A) = \xi(A)^*.$$

K vlastnímu číslu 0 přísluší jediná buňka, jejíž řád je t, a tedy i násobnost tohoto vlastního čísla je t.

Rovněž tato věta je součástí Schneiderovy disertační práce *Matrices with non-negative elements* a jeho článku *The elementary divisors associated with 0, of a singular M-matrix*, které byly publikovány již v padesátých letech.[235]

---

[234] Podotkněme, že Weyrova charakteristika $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$ příslušná určitému vlastnímu číslu, pro jejíž prvky platí $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_t$, se někdy nazývá *homogenní* Weyrova charakteristika tohoto vlastního čísla. Viz např. [OCV1], str. 52.

[235] Citujme opět Schneiderovu formulaci (vyjádření ekvivalence podmínek (i') a (ii)): *THEOREM 5. Let $A = [A_{ij}]$, $i, j = 1, \ldots, k$, be a singular M-matrix in standard form. Let S be the set of indices of singular A_{ii}. There is only one elementary divisor associated with the characteristic root 0 of A if and only if $R_{\beta\alpha} = 1$, whenever $\alpha, \beta \in S$ and $\beta > \alpha$.* ([Sc2], str. 118)

Značný posun v terminologii dokládá formulace stejné věty z Schneiderovy práce publikované o tři desítky let později:

(6.3) THEOREM [...]. Let A be an M-matrix. Then the following are equivalent:
(a) There is at most one Jordan block for the eigenvalue 0, i.e., the Weyr characteristic is $(1, \ldots, 1)$.
(b) The singular graph $S(A)$ is linearly ordered. ([Sc3], str. 175)

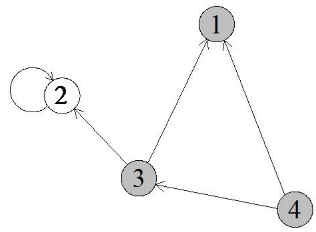
Formulace věty pomocí symbolů R_{ij} viz též [Cs1], Theorem 3, str. 1031.

Ukažme opět výše uvedené souvislosti na konkrétní M-matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 & 0 \\ -d & 0 & -e & 0 \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d, e jsou libovolná kladná čísla. Matice A je ve Frobeniově normálním tvaru, bloky na diagonále mají řád 1.

Redukovaný graf $R(A) = G(A)$ matice A vypadá takto:



Graf 3

Všechny singulární vrcholy 1, 3, 4 leží na jediné cestě a mají po řadě úrovně tři, dva a jedna, proto $\lambda(A) = (1, 1, 1)$. Jelikož je $\mathrm{nul}(A) = 1$, $\mathrm{nul}(A^2) = 2$, $\mathrm{nul}(A^3) = \mathrm{nul}(A^4) = 3$, je $\eta(A) = (1, 1, 1)$. Počet jedniček v obou charakteristikách je tři. Charakteristický polynom matice A je $\lambda^3(\lambda - a)$, násobnost vlastního čísla 0 je tři. Odpovídá mu však jediný vlastní vektor

$$(0, 0, 0, 1),$$

vlastnímu číslu a potom vlastní vektor

$$\left(0, \frac{a^2}{ce}, \frac{-a}{e}, 1\right).$$

Vlastnímu číslu 0 tedy odpovídá Jordanova buňka řádu tři, Jordanův kanonický tvar matice A vypadá takto:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme $\xi(A) = (3)$ a dále $\xi(A)^* = (1, 1, 1)$ a celkově skutečně

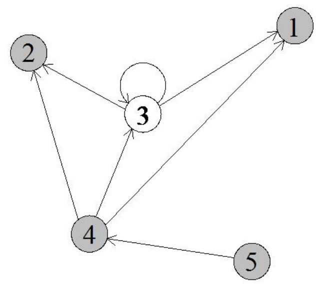
$$\eta(A) = \lambda(A) = \xi(A)^*.$$

Obecně však vztah $\eta(A) = \lambda(A) = \xi(A)^*$ neplatí, jako protipříklad stačí uvést matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & -b & c & 0 & 0 \\ -d & -e & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g & 0 \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d, e, f, g jsou libovolná kladná čísla. Matice A je M-maticí ve Frobeniově normálním tvaru, bloky na diagonále jsou řádu 1.

Matici A odpovídá následující redukovaný graf $R(A) = G(A)$:



Graf 4

Singulárními vrcholy jsou vrcholy 1, 2, 4 a 5, jejich úrovně jsou po řadě tři, tři, dva a jedna, a tedy $\lambda(A) = (1, 1, 2)$.

Vypočítáme matice A^2, A^3, A^4 a dále zjistíme jejich nulity: $\operatorname{nul}(A) = 2$, $\operatorname{nul}(A^2) = 3$, $\operatorname{nul}(A^3) = \operatorname{nul}(A^4) = 4$. Odtud $\eta(A) = (2, 1, 1)$ a charakteristiky $\lambda(A)$ a $\eta(A)$ se nerovnají. V mysli tak zcela přirozeně vyvstává otázka, za jakých podmínek obě charakteristiky splývají, resp. jaký je mezi nimi vztah. Tyto dotazy si položil již Hans Schneider ve své disertaci z roku 1952.[236] Odpovědi byly nalezeny Schneiderem a Hershkowitzem zhruba po třiceti sedmi letech, publikovány byly především v článcích *Height bases, level bases, and the equality of the height and the level characteristics of an M-matrix*, *A majorization relation between the height and the level characteristics* a *Combinatorial bases, derived Jordan sets and the equality of the height and level characteristic of an M-matrix.*

Před vyslovením věty charakterizující situace, v nichž platí $\lambda(A) = \eta(A)$, je nutné definovat ještě několik pojmů.

17 Definice. Nechť $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_t)$ je výšková charakteristika čtvercové matice A. Dimenze $\operatorname{GKer} A$ se tedy rovná součtu $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_t$. Bázi prostoru $\operatorname{GKer} A$ nazveme *výškovou bází* $\operatorname{GKer} A$, jestliže počet prvků báze s výší j je η_j, $j = 1, 2, \ldots, t$.[237]

[236] Viz též Schneiderův článek [Sc3] z roku 1986, Question 6.8 a Question 6.7, str. 176.

[237] Pojem výšková báze, resp. dále uvedený pojem úrovňová báze byl Schneiderem a Hershkowitzem zaveden roku 1989 v [HS3], Definition 3.1, str. 154, resp. Definition 4.23, str. 158.

Pro každou komplexní matici A výšková báze $\mathrm{GKer}\,A$ existuje, neboť Jordanova báze $\mathrm{GKer}\,A$ je bází výškovou. Obrácená věta neplatí.[238]

Výškovou bází je i část Weyrovy normální soustavy zavedené Eduardem Weyrem v 19. století – uvažujeme pouze vektory příslušné k vlastnímu číslu 0.

18 Definice. Nechť A je čtvercová matice řádu n ve Frobeniově normálním tvaru a nechť v je vektor v $\mathrm{GKer}\,A$, který je rozdělen na p částí $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ po stejně velkém počtu složek jako jsou řády bloků $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{pp}$ na diagonále ve Frobeniově normálním tvaru. *Úrovní vektoru* v nazýváme největší úroveň singulárního vrcholu i příslušného grafu $R(A)$ takového, že $v_i \neq o$.[239] Úroveň nulového vektoru je 0.

19 Definice. Nechť $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ je úrovňová charakteristika čtvercové matice A. Bázi prostoru $\mathrm{GKer}\,A$ nazveme *úrovňovou bází* $\mathrm{GKer}\,A$, jestliže počet prvků báze s úrovní j je λ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Dimenze $\mathrm{GKer}\,A$ se tedy rovná i $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m$.[240] Aby úrovňová báze existovala, musí se tato dimenze rovnat počtu singulárních vrcholů grafu $R(A)$, což nastane v případě, že 0 je jednoduchým vlastním číslem každé diagonální matice Frobeniova normálního tvaru. Dle Perronovy-Frobeniovy teorie je pro M-matice tento požadavek splněn. Z tzv. *Nonnegative Basis Theorem*[241] a *Preferred Basis Theorem*[242] plyne, že pro M-matice existuje úrovňová báze $\mathrm{GKer}\,A$, jejíž vektory mají nezáporné složky.[243]

20 Definice. Báze, která je současně výškovou i úrovňovou, se nazývá *výškově-úrovňová* (*height-level basis*).

Je dokázáno, že pro M-matici A výškově-úrovňová báze $\mathrm{GKer}\,A$ vždy existuje.[244]

21 Definice. Vektor $v \in \mathrm{GKer}\,A$, pro který *výše*(v) = *úroveň*(v), se nazývá *vrcholový vektor* (*peak vector*), báze vektorového prostoru $\mathrm{GKer}\,A$ tvořená vrcholovými vektory se nazývá *vrcholová báze* (*peak basis*).

---

[238] Postup konstrukce výškové báze prostoru $\mathrm{GKer}\,A$ z jakékoliv jeho jiné báze je popsán v [HS3], Corollary 5.2, str. 161. Metoda získání Jordanovy báze z báze výškové je uvedena také v [HS3], Algorithm 6.8, str. 163.

Pro nezápornou čtvercovou matici A bylo navíc dokázáno, že v případě existence nezáporné výškové báze $\mathrm{GKer}\,A$ existuje i nezáporná Jordanova báze $\mathrm{GKer}\,A$. Viz [HS3], Proposition 6.9, str. 163.

[239] Pro vektor $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ se množina $\{i \in \{1, 2, \ldots, n\}\,;\ v_i \neq 0\}$ někdy nazývá *support of x*. Viz např. [HS7], str. 6, a [Tm3], str. 382.

[240] Tedy $\dim \mathrm{GKer}\,A = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_t = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m$. Rovnost $\sum_{i=1}^{t} \eta_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ však triviálně plyne i z Ferrersova diagramu, v němž $\dim\,\mathrm{GKer}\,A$ odpovídá počtu teček.

[241] Viz [Ro1], Theorem 3.1, str. 284–285, část (1).

[242] Viz [RS1], Theorem 6.2, str. 229.

[243] Pro obecné matice platí toto tvrzení o existenci úrovňové báze:

Nechť A je blokově diagonální matice se čtvercovými bloky na diagonále a nechť nula je jednoduchým vlastním číslem singulárních bloků na diagonále. Potom existuje úrovňová báze $\mathrm{GKer}\,A$.

[244] Viz [HS3], Corollary 5.6, str. 161.

22 Definice. Nechť A je čtvercová matice řádu n, násobnost vlastního čísla 0 této matice je m a $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ je báze $\operatorname{GKer} A$. *Bázovou maticí příslušnou matici* A budeme rozumět matici B typu $n \times m$, jejíž sloupce jsou vektory $x_1, x_2, \dots, x_m$. Existuje jediná matice C řádu m, která splňuje rovnici $AB = BC$. Tuto matici budeme nazývat *indukovanou k matici* A a v případě nutnosti ji budeme přesněji značit $C(A, \mathcal{B})$.

V textu *Height bases, level bases, and the equality of the height and the level characteristics of an M-matrix* je indukovaným maticím věnován celý paragraf popisující jejich vlastnosti především pro různé speciální typy bází $\mathcal{B}$. Je-li např. $\mathcal{B}$ Jordanova báze $\operatorname{GKer} A$ a $m = n$, je matice $C(A, \mathcal{B})$ Jordanův kanonický tvar matice A. Z dalších vlastností uvedeme alespoň dvě, a to takové, které mají blízký vztah k Weyrově charakteristice příslušné vlastnímu číslu 0, resp. k obecnějším spektrálním vlastnostem matice A: nulity matic A^j a C^j, $j = 1, 2, \dots, t$, kde t je počet prvků výškové charakteristiky, se sobě rovnají, a platí tedy rovněž $\eta(A) = \eta(C)$. Jsou-li $\mathcal{B}$ a $\mathcal{W}$ dvě různé báze prostoru $\operatorname{GKer} A$, potom jsou matice $C(A,\mathcal{B})$ a $C(A,\mathcal{W})$ podobné.[245]

Sestrojme dělení indukované matice C, které bude použito v následující větě. Nechť $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ je úrovňová charakteristika M-matice A a nechť $\mathcal{B}$ je úrovňová báze $\operatorname{GKer} A$. Matici C rozdělme na blokovou matici o $p \times p$ blocích, kde i-tý diagonální blok je čtvercová matice řádu λ_{p+1-i}. Frobeniův normální tvar výsledné matice (s poněkud neobvyklým indexováním)[246] vypadá takto:

$$C = \begin{pmatrix} O & O & \cdots & \cdots & O \\ C_{p-1,\,p} & O & \cdots & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & O & \vdots \\ C_{1\,p} & \cdots & \cdots & C_{1\,2} & O \end{pmatrix}$$

23 Definice. O matici A typu $k \times l$, kde $l \le k$, říkáme, že má *plnou sloupcovou hodnost* (*full column rank*), jestliže je její hodnost rovna l.

Uveďme nyní podmínky, při nichž má M-matice stejnou výškovou a úrovňovou charakteristiku.[247] Nebudou to však zdaleka všechny ekvivalentní podmínky. Článek *Height bases, level bases, and the equality of the height and the level characteristics of an M-matrix* uvádí celkem třináct navzájem ekvivalentních podmínek, práce *Combinatorial bases, derived Jordan sets and the equality of the height and level characteristic of an M-matrix* přidává dalších dvacet tři podmínek, a tak se v ní dokazuje ekvivalence celkem třiceti šesti podmínek.

[245] Ostatní vlastnosti viz [HS3], paragraf *7. Induced matrices*, str. 165–167. Indukovaná matice je v [RS1] nazývána S-maticí.

[246] Podržíme se indexování v článku [RS1], str. 215, [HS3], Observation 7.6, str. 166, nebo také [BCT1], str. 5.

[247] Viz [RS1], Theorem 6.5, str. 231, [HS3], Theorem 8.1, str. 167–168, [HS4], Theorem 6.6, str. 36–37.

Pokud bychom je zde chtěli všechny vypsat, bylo by nutné definovat další pojmy (např. *combinatorial basis*, *T-combinatorial subset*, *fundament of a vector*, *anchored chain*, *preferred basis*, *Jordan basis derived from a given set of vectors* atd.).

24 Věta. *Nechť A je M-matice. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $\eta(A) = \lambda(A)$,

(ii) *pro všechny vektory $x \in \operatorname{GKer} A$ platí výše(v) = úroveň(v),*[248]

(iii) *každá výšková báze $\operatorname{GKer} A$ je bází úrovňovou,*

(iv) *každá úrovňová báze $\operatorname{GKer} A$ je bází výškovou,*

(v) *každá báze $\operatorname{GKer} A$ je bází vrcholovou,*

(vi) *některá výšková báze $\operatorname{GKer} A$ je bází vrcholovou,*

(vii) *existuje nezáporná výšková báze $\operatorname{GKer} A$,*

(viii) *existuje nezáporná výškově-úrovňová báze $\operatorname{GKer} A$,*

(ix) *existuje nezáporná Jordanova báze $\operatorname{GKer}(-A)$,*

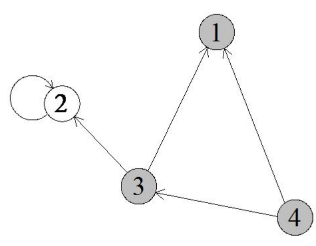
(x) *existuje úrovňová báze $\mathcal{B}$ prostoru $\operatorname{GKer} A$ a příslušná indukovaná matice $C = C(A, \mathcal{B})$ taková, že blokové matice $C_{k,\,k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$, mají plnou sloupcovou hodnost,*

(xi) *pro každou úrovňovou bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\operatorname{GKer} A$ a příslušnou indukovanou matici $C = C(A, \mathcal{B})$ mají blokové matice $C_{k,\,k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$, plnou sloupcovou hodnost.*

Ukažme nyní platnost uvedených jedenácti podmínek na jedné z matic, u které jsme již ověřili rovnost $\eta(A) = \lambda(A)$. Vraťme se k M-matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 & 0 \\ -d & 0 & -e & 0 \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d, e jsou libovolná kladná čísla. Připomeňme, že 0 je trojnásobným vlastním číslem, kterému přísluší jediná Jordanova buňka a jediný (až na nenulový násobek) vlastní vektor $u = (0, 0, 0, 1)$. Redukovaným grafem $R(A)$ matice A je Graf 3



[248] Tj. každý vektor v $\operatorname{GKer} A$ je vrcholový.

Také jsme již ověřili, že $\eta(A) = \lambda(A) = (1,\, 1,\, 1)$ a že dimenze $\operatorname{GKer} A$ je tři.

Pro přirozené číslo $p \geq 3$ se nulity matic A^p a A^{p+1} rovnají a matice A^p má tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^p & 0 & 0 \\ 0 & -a^{p-1}c & 0 & 0 \\ 0 & a^{p-2}ce & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

proto bázi $\operatorname{GKer} A$ tvoří například vektory $u = (0,\, 0,\, 0,\, 1)$, $v = (0,\, 0,\, 1,\, 0)$, $w = (1,\, 0,\, 0,\, 0)$. Protože $Au^T = o^T$, je výše vektoru u rovna 1. Výpočtem zjistíme, že $Av^T \neq o^T$, $A^2u^T = o^T$, proto je výše vektoru v rovna 2. Výše zbývajícího vektoru w je 3, neboť $Aw^T \neq o^T$, $A^2w^T \neq o^T$ a $A^3w^T = o^T$. Počet prvků báze, které mají výši 1, 2, resp. 3, je vždy roven jedné, proto je báze $\{u,\, v,\, w\}$ bází výškovou, která je současně nezáporná. Zjistili jsme, že je splněna podmínka (vii).

Úroveň vektoru u je rovna úrovni vrcholu 4, proto je rovna 1. Úroveň vektoru v se shoduje s úrovní vrcholu 3, která je 2, a konečně úroveň vektoru w je rovna úrovni vrcholu 1, která je 3. Počet prvků báze, které mají úroveň 1, 2, resp. 3, je vždy jedna, proto je tato báze bází úrovňovou, a tedy i nezápornou výškově-úrovňovou a je splněna podmínka (viii).

Protože výše všech tří vektorů u, v, w výškové báze je rovna jejich úrovni, jedná se současně i o bázi vrcholovou a je splněna i podmínka (vi).

Každý vektor x patřící $\operatorname{GKer} A$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze, proto má tvar $x = (k,\, 0,\, l,\, m)$. Abychom určili jeho výšku, zjistíme součiny mocnin matice A a transponovaného vektoru x^T k vektoru x:

$$\begin{aligned} Ax^T &= (0,\, 0,\, -kb,\, -kd - el)^T, \\ A^2x^T &= (0,\, 0,\, 0,\, kbe)^T, \\ A^3x^T &= (0,\, 0,\, 0,\, 0)^T. \end{aligned}$$

Výše vektoru proto závisí na nulovosti či nenulovosti souřadnic k, l, m vektoru x. Je-li

$k = l = m = 0$,		je výše vektoru 0,
$k = l = 0$, $m \neq 0$	(případ zahrnující vektor u),	je výše vektoru 1,
$k = 0$, $l \neq 0$	(případ zahrnující vektor v),	je výše vektoru 2,
$k \neq 0$	(případ zahrnující vektor w),	je výše vektoru 3,

Určeme dále úroveň vektoru x. Je-li

$k = l = m = 0$,		je úroveň vektoru 0,
$k = l = 0$, $m \neq 0$	(případ zahrnující vektor u),	je úroveň vektoru 1,
$k = 0$, $l \neq 0$	(případ zahrnující vektor v),	je úroveň vektoru 2,
$k \neq 0$	(případ zahrnující vektor w),	je úroveň vektoru 3,

Tím jsme dokázali platnost podmínky (ii). Jelikož prvky báze GKer A leží v GKer A, platí triviálně i podmínka (v). Z podmínky (i) vyplývá rovněž platnost podmínek (iii) a (iv).

Nalezneme nezápornou Jordanovu bázi matice

$$-A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & 0 & e & 0 \end{pmatrix}.$$

Její charakteristický polynom je $\lambda^3(\lambda + a)$, tedy 0 je trojnásobným vlastním číslem této matice. Přísluší mu (až na nenulový násobek) jediný vlastní vektor $u = (0,\, 0,\, 0,\, 1)$, proto také jediná Jordanova buňka a „jediný“ Jordanův řetízek. K nezápornému vektoru u budeme hledat nezáporné vektory $\bar{u} = (\bar{u}_1,\, \bar{u}_2,\, \bar{u}_3,\, \bar{u}_4)$ a $\bar{\bar{u}} = (\bar{\bar{u}}_1,\, \bar{\bar{u}}_2,\, \bar{\bar{u}}_3,\, \bar{\bar{u}}_4)$ pomocí vztahů

$$-A\bar{u}^T = u, \qquad -A\bar{\bar{u}}^T = \bar{u}^T.$$

Rovnost $-A\bar{u}^T = u^T$ splňuje vektor, pro jehož souřadnice platí:

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0, \qquad \bar{u}_3 = \frac{1}{e}$$

a $\bar{u}_4$ je libovolné. Pokud by bylo $\bar{u}_4 = 0$, potom při dalším výpočtu zjistíme, že neexistuje žádný nezáporný vektor $\bar{\bar{u}}$, který by splňoval rovnost $-A\bar{\bar{u}}^T = \bar{u}^T$, proto je $\bar{u}_4$ libovolné kladné číslo.[249] Ze vztahu $-A\bar{\bar{u}}^T = \bar{u}^T$ vypočteme, že

$$\bar{\bar{u}}_1 = \frac{1}{be}, \qquad \bar{\bar{u}}_2 = 0, \qquad \bar{\bar{u}}_3 = \frac{be\bar{u}_4 - d}{be^2},$$

$\bar{\bar{u}}_4$ je libovolné – kvůli nezápornosti báze však nezáporné. Zvolíme-li $\bar{u}_4 = \frac{2d}{be}$, je $\bar{\bar{u}}_3 = \frac{d}{be^2}$. Zbývá zvolit $\bar{\bar{u}}_4$, nechť například $\bar{\bar{u}}_4 = 0$. Vektory

$$\bar{\bar{u}} = \left(\frac{1}{be},\, 0,\, \frac{d}{be^2},\, 0\right), \qquad \bar{u} = \left(0,\, 0,\, \frac{1}{e},\, \frac{2d}{be}\right), \qquad u = (0,\, 0,\, 0,\, 1)$$

Jordanova řetízku tvoří nezápornou Jordanovu bázi GKer $(-A)$. Platí tedy i podmínka (ix).

Nalezená báze $\mathcal{B} = \{u,\, v,\, w\}$ prostoru GKer A je bází úrovňovou. Zjistíme, zda splňuje požadavky podmínky (x). Z rovnice $AB = BC$, kde sloupce matice B jsou tvořeny vektory báze $\mathcal{B}$, nalezneme čtvercovou matici C řádu tři: ze vztahu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 & 0 \\ -d & 0 & -e & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{pmatrix},$$

[249] Pokud bychom volili $\bar{u} = \left(0,\, 0,\, \frac{1}{e},\, 0\right)$, bude řešením soustavy rovnic $-A\bar{\bar{u}}^T = \bar{u}^T$ vektor $\bar{\bar{u}} = \left(\frac{1}{be},\, 0,\, -\frac{d}{be^2},\, \bar{\bar{u}}_4\right)$, který nemůže být nezáporným.

resp. z jeho upraveného tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & -e & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_7 & c_8 & c_9 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

zjistíme, že $c_1 = c_4 = c_5 = c_7 = c_8 = c_9 = 0$, $c_2 = -e$, $c_3 = -d$, $c_6 = -b$, a proto

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -e & -d \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pomocí simultánních permutací řádků a sloupců získáme Frobeniův normální tvar

$$\begin{pmatrix} O & O & O \\ C_{23} & O & O \\ C_{13} & C_{12} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ -d & -e & 0 \end{pmatrix},$$

v němž matice $C_{k,\,k+1}$, $k = 1,\, 2$, tj. matice pod bloky na diagonále, mají plnou sloupcovou hodnost. M-matice A proto splňuje podmínku (x).

Pro ověření platnosti podmínky (xi) sestavme co nejobecnější tvar úrovňové báze. Potřebujeme tři vektory, z nichž jeden má úroveň 1 (která se proto musí rovnat úrovni vrcholu 4), druhý má úroveň 2 (která se musí rovnat úrovni vrcholu 3) a třetí má úroveň 3 (která se musí rovnat úrovni vrcholu 1). Takovéto podmínky splňuje trojice vektorů

$$(0,\, p,\, 0,\, q), \quad (0,\, r,\, s,\, t), \quad (u,\, v,\, w,\, z),$$

kde $q \neq 0$, $s \neq 0, u \neq 0$ a p, r, t, v, w, z jsou prozatím libovolná čísla. Jelikož však všechny tři vektory patří $\operatorname{GKer} A$, musí být lineární kombinací vektorů báze $\{(0,\, 0,\, 0,\, 1),\, (0,\, 0,\, 1,\, 0),\, (1,\, 0,\, 0,\, 0)\}$. Proto nutně $p = r = v = 0$, a tím získáme přesnější podobu vektorů úrovňové báze:

$$(0,\, 0,\, 0,\, q), \quad (0,\, 0,\, s,\, t), \quad (u,\, 0,\, w,\, z).$$

Tyto tři vektory jsou při dodržení podmínek kladených na jejich souřadnice jistě lineárně nezávislé, a proto tvoří (úrovňovou) bázi $\operatorname{GKer} A$. Vektory umístíme do sloupců matice B a ze vztahu $AB = BC$ vypočítáme matici C:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 & 0 \\ -d & 0 & -e & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & w \\ q & t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & w \\ q & t & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{pmatrix}.$$

Z rovnosti matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -bu \\ 0 & -es & -du - ew \end{pmatrix}$$

na levé straně rovnosti a matice

$$\begin{pmatrix} uc_7 & uc_8 & uc_9 \\ 0 & 0 & 0 \\ sc_4 + wc_7 & sc_5 + wc_8 & sc_6 + wc_9 \\ qc_1 + tc_4 + zc_7 & qc_2 + tc_5 + zc_8 & qc_3 + tc_6 + zc_9 \end{pmatrix}.$$

na pravé straně rovnosti vypočítáme neznámé $c_1 = c_4 = c_5 = c_7 = c_8 = c_9 = 0$, $c_6 = -\frac{bu}{s}$, $c_2 = -\frac{se}{q}$, $c_3 = \frac{tbu-s(du+we)}{qs}$. Proto matice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{se}{q} & \frac{tbu-s(du+we)}{qs} \\ 0 & 0 & -\frac{bu}{s} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a její Frobeniův normální tvar je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{bu}{s} & 0 & 0 \\ \frac{tbu-s(du+we)}{qs} & -\frac{se}{q} & 0 \end{pmatrix},$$

v němž matice pod blokovými diagonálními maticemi mají plnou sloupcovou hodnost, neboť b, e, q, s, u jsou nenulová čísla. Matice A proto splňuje i podmínku poslední, podmínku (xi).

I v případě, že jsou výšková a úrovňová charakteristika odlišné, lze mezi nimi nalézt určitý vztah. Definujme nejprve nový pojem:

25 Definice. Nechť $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t)$ jsou dvě posloupnosti nezáporných celých čísel, které mají stejný počet prvků. Říkáme, že *posloupnost β majorizuje posloupnost α*, jestliže

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k \le \beta_1 + \ldots + \beta_k$$

pro všechna $k = 1, \ldots, t-1$ a

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_t = \beta_1 + \ldots + \beta_t.$$

Tuto skutečnost značíme $\alpha \preceq \beta$.

Jestliže platí

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \le \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k$$

pro všechna $k = 1, 2, \ldots, t$, potom říkáme, že *posloupnost β silně majorizuje posloupnost α*, a píšeme $\alpha \ll \beta$.

Je-li počet členů posloupnosti β menší než počet členů posloupnosti α a doplníme-li na konec posloupnosti β potřebný počet nul tak, aby byly počty prvků obou posloupností stejné, budeme výslednou posloupnost značit $(\beta, 0)$.[250]

[250] V některých textech se při definici (silné) majorizace jedné posloupnosti druhou uvažují i posloupnosti s různým počtem prvků, z nichž jedna je uvedeným způsobem rozšířena nulami. Viz např. články [He3], Definition 2.3, str. 5, [NM1], str. 256, [AHK1], Notation 2.16, str. 141.

V knize [MO1], str. 7, je definice majorizace také mírně odlišná, na obě posloupnosti α, β je kladen požadavek, aby byly nerostoucí. V článku [AHK1], Notation 2.16, str. 141, je tento požadavek kladen pouze na majorizující řadu.

Nechť α je posloupnost kladných prvků. Symbolem $\hat{\alpha}$ budeme značit posloupnost vzniklou z posloupnosti α přemístěním jejích prvků do nerostoucí posloupnosti.

Nyní můžeme popsat obecný vztah mezi výškovou a úrovňovou charakteristikou M-matice. Důkaz tvrzení je položen na skutečnosti, že pro M-matici A existuje, jak již bylo řečeno, nezáporná úrovňová báze $\operatorname{GKer} A$ a dále že pro nezáporný vektor v náležící $\operatorname{GKer} A$, kde A je M-matice, platí *výše*$(v) =$ *úroveň*(v).[251]

26 Věta. *Pro každou M-matici A platí* $\lambda(A) \preceq \eta(A)$.[252]

Ve výše uvedeném příkladě (před definicí 17), v němž $\lambda(A) = (1, 1, 2)$ a $\eta(A) = (2, 1, 1)$, prvky posloupností splňují vztahy

$$1 \leq 2, \quad 1 + 1 \leq 2 + 1, \quad 1 + 1 + 2 = 2 + 1 + 1,$$

tj. $\lambda(A) \preceq \eta(A)$.

Dle teorie majorizace pro každé dvě nerostoucí posloupnosti nezáporných celých čísel α, β platí, že $\alpha \preceq \beta$ implikuje $\beta^* \preceq \alpha^*$.[253] Triviálním důsledkem posledního tvrzení je tak relace $\eta(A)^* = \xi(A) \preceq \hat{\lambda}(A)^*$. Z prvních členů těchto duálních posloupností dále vyplývá, že největší řád Jordanovy buňky příslušné k vlastnímu číslu 0 matice A je menší nebo roven počtu úrovní v redukovaném grafu $R(A)$.

Tzv. *Index Theorem* vyslovený pro *M-matice* však dokonce tvrdí, že největší řád Jordanovy buňky příslušné k vlastnímu číslu 0 matice A a počet úrovní v $R(A)$ se rovnají. Odtud elegantně vyplývají dvě výše uvedená tvrzení o speciálních případech M-matic, v nichž $\eta(A) = \lambda(A)$, dokázaná Schneiderem již v padesátých letech.

Jméno věty odkazuje na skutečnost, že největší řád Jordanovy buňky příslušné k vlastnímu číslu 0 matice A je roven počtu prvků výškové charakteristiky $\eta(A)$ matice A, tj. indexu matice A. Tvrzení je též nazýváno *Rothblum's Index Theorem*, neboť bylo pro M-matice poprvé dokázáno Urielem Georgem Rothblumem v článku *Algebraic eigenspaces of non-negative matrices* z roku 1975, který je v uvažovaných pracích Schneidera, Hershkowitze a dalších matematiků často citován.[254]

---

[251] Viz [HS3], Corollary 4.11, str. 157.

Pro případ *výše*$(v) =$ *úroveň*$(v) = 1$ byla věta dokázána již v článku *A note on M-matrix equations* [Cs1], který publikoval David Hilding Carlson, další z doktorandů Hanse Schneidera.

Obecněji pro každý vektor $v \in \operatorname{GKer} A$ je *výše*$(v) \leq$ *úroveň*(v). Viz [HS3], Corollary 4.17, str. 158.

[252] Viz [RS1], Corollary 4.5, str. 222 nebo [HS3], Corollary 4.21, str. 158.

[253] Viz [MO1], 1979, str. 174.

[254] Viz [Ro1], Theorem 3.1, část (2), str. 284–285. Viz též [Sc3], Corollary 7.5, str. 177.

Upozorněme, že název *Index Theorem* se používá i pro větu vyslovenou pro jiný typ matic než jsou M-matice, kde platí pouze již zmíněná neostrá nerovnost, a dokonce i pro vyjádření vztahu mezi indexem matice a zcela jiným pojmem než je počet úrovní. Viz např. Theorem 5.9 (The Index Theorem) v [HS4], str. 18.

Vraťme se k relaci majorizace mezi úrovňovou a výškovou charakteristikou. Uvedený vztah lze zpřesnit, neboť platí i v případě, že libovolně permutujeme pořadí prvků posloupnosti $\lambda(A)$. Navíc relace zůstane zachována, rozšíříme-li třídu uvažovaných matic na obecnější případ. Následující větu publikoval Hershkowitz roku 1989 v článku *A majorization relation between the height and the level characteristics*, jehož název říká o náplni mnohé.[255]

27 Věta. *Nechť A je blokově trojúhelníková matice se čtvercovými bloky na diagonále, z nichž ty singulární mají 0 jako jednoduché vlastní číslo. Potom*

$$\hat{\lambda}(A) \preceq \eta(A).$$

Dokázaný vztah majorizace mezi oběma charakteristikami dal v algebraické komunitě zabývající se touto problematikou nové podněty pro studium: Je-li dána výšková charakteristika, jak vypadají všechny možné úrovňové charakteristiky, které s ní mohou být (přes nějakou M-matici) spjaty? Tj. dané výškové charakteritice odpovídá třída navzájem podobných matic, které však nemusí mít stejné úrovňové charakteristiky. A naopak, jaké jsou všechny možné výškové charakteristiky M-matice, známe-li její charakteristiku úrovňovou?[256] Tyto otázky byly zodpovězeny na počátku devadesátých let v článku Schneidera a Hershkowitze *On the existence of matrices with prescribed height and level characterisics* (1991), na který, jak již bylo řečeno, navázaly dva články zobecňující tuto problematiku, které sepsal Hershkowitz a jeho studenti Agha a Kogan. Než odpovíme na obě otázky, je nutné definovat nové pojmy z teorie grafů:

28 Definice. *Acyklickým grafem* rozumíme graf bez cyklů, tj. bez posloupností vrcholů $(u_1, u_2, \ldots, u_m, u_1)$, ve kterých první a poslední vrchol splývají, ostatní vrcholy jsou navzájem různé a v grafu existují hrany (u_1, u_2), (u_2, u_3), $\ldots$, (u_m, u_1). Smyčky acyklický graf obsahovat může.

Uvědomme si, že redukovaný graf $R(A)$ matice ve Frobeniově normálním tvaru (obecněji každé blokově trojúhelníkové matice) je acyklický.

---

[255] Viz [He1], Theorem 3.5, str. 100.

Důkaz tvrzení je položen na větě, která popisuje vztah mezi nulitami mocnin matice A a nulitami mocnin jejích diagonálních bloků, tj. vztah mezi výškovou charakteristikou matice A a výškovými charakteristikami jejích diagonálních bloků, a která byla formulována Shmuelem Friedlandem a Danielem Hershkowitzem v článku *The rank of powers of matrices in a block triangular form* (str. 18):

Nechť A je blokově trojúhelníková matice, která má p čtvercových diagonálních bloků $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{pp}$, a nechť t je přirozené číslo. Vrcholům $1, 2, \ldots, p$ redukovaného grafu $R(A)$ přiřadíme nezáporná celá čísla $k_1, k_2, \ldots, k_p$ tak, aby součet „káček“ podél jednotlivých cest v grafu $R(A)$ nepřevyšoval číslo t. Potom platí

$$n(A^t) \geq \sum_{i=1}^{q} n(A_{ii}^{k_i}).$$

[256] Otázky vyslovil pro M-matice (bez znalosti pojmu majorizace) Hans Schneider již v roce 1986. Viz [Sc3], Question 8.8 a Question 8.9, str. 184.

29 Definice. *Tranzitivním grafem* nazýváme graf, který s každou dvojicí hran určenými vrcholy u_i, u_j a u_j, u_k obsahuje i hranu určenou vrcholy u_i, u_k.[257]

Nyní nám nic nebrání zformulovat slíbená tvrzení, a to nejprve pro striktně trojúhelníkové matice[258] a poté pro matice, jejichž všechny singulární vrcholy jsou jednoduché, tj. pro třídu matic, která zahrnuje jak striktně trojúhelníkové matice, tak M-matice.[259]

30 Věta. *Nechť $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ a $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ jsou dvě posloupnosti přirozených čísel (se stejným počtem prvků) a nechť η je posloupností nerostoucí. Jestliže $\hat{\lambda} \preceq \eta$, potom existuje takový acyklický graf G bez smyček, že pro každou matici A nad libovolným polem, pro kterou $G(A) = G$, je $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$. Graf G může být navíc vybrán tak, aby byl tranzitivní.*

31 Věta. *Nechť $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$ a $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ jsou dvě posloupnosti přirozených čísel a nechť η je posloupností nerostoucí. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *$p = q$ a zároveň $\hat{\lambda} \preceq \eta$,*
(ii) *$p = q$ a zároveň existuje takový tranzitivní acyklický graf G bez smyček, že pro každou matici A nad libovolným polem, pro kterou $G(A) = G$, platí $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$,*
(iii) *$p = q$ a zároveň existuje takový acyklický graf G bez smyček, že pro každou matici A nad libovolným polem, pro kterou $G(A) = G$, platí $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$,*
(iv) *$p = q$ a zároveň existuje striktně (dolní) trojúhelníková matice A, pro kterou platí $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$,*
(v) *existuje striktně (dolní) nezáporná trojúhelníková matice A, pro kterou platí $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$,*
(vi) *existuje M-matice A, pro kterou platí $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$,*
(vii) *$p = q$ a zároveň existuje matice A, jejíž redukovaný graf má všechny singulární vrcholy jednoduché a pro kterou platí $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$.*

Důkaz věty je snadný. Implikace $(i) \Rightarrow (ii)$ plyne z předchozího tvrzení, sled implikací $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (vii)$ je triviální, stejně jako implikace $(iii) \Rightarrow (v)$. Podmínka (vi) vyplývá z podmínky (v), ve které postačí vzít matici opačnou k matici A. Jelikož M-matice má všechny singulární vrcholy jednoduché, je podmínka (vii) důsledkem podmínky (vi). Konečně implikace $(vii) \Rightarrow (i)$ plyne z věty 27.

Dosud jsme se zabývali případem, kdy posloupnosti λ a η měly stejný počet členů. V závěru článku *On the existence of matrices with prescribed height*

[257] První vrchol je vždy vrcholem, z něhož hrana vychází, a druhý vrchol je vrcholem, do něhož hrana směřuje.
[258] Trojúhelníkovou matici nazveme striktně trojúhelníkovou, má-li na hlavní diagonále nuly.
[259] Viz [HS5], Theorem 3.3, str. 110, a [HS5], Theorem 4.1, str. 113.

and level characterisics se autoři krátce zabývali případem, v němž může být počet prvků posloupnosti η menší než posloupnosti λ a zformulovali následující tvrzení:[260]

32 Věta. *Pro matici, jejíž redukovaný graf má všechny singulární vrcholy jednoduché, platí nerovnost*

$$\hat{\lambda}(A) \preceq (\eta(A), 0).$$

Motivováni tímto výsledkem vznesli novou otázku,[261] zda pro posloupnosti $\lambda = (\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_q)$ a $\eta = (\eta_1,\, \eta_2,\, \ldots,\, \eta_p)$ přirozených čísel, kde η je nerostoucí, $p \leq q$ a $\hat{\lambda} \preceq (\eta,\, 0)$, existuje matice A, pro kterou $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$. Odpověď je kladná, tvrzení je dokázáno ve zmíněném pojednání Aghy a Hershkowitze *The relation between the height and level characteristics for a matrix with simple singular vertices*:[262]

33 Věta. *Nechť $\lambda = (\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_q)$ a $\eta = (\eta_1,\, \eta_2,\, \ldots,\, \eta_p)$ jsou dvě posloupnosti přirozených čísel, kde η je nerostoucí a $p \leq q$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *existuje matice A, jejíž redukovaný graf má všechny singulární vrcholy jednoduché a která splňuje vztahy $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$,*

(ii) $\hat{\lambda} \preceq (\eta,\, 0)$ *(nebo $\hat{\lambda} \preceq \eta$, jestliže $p = q$).*

Autorský kolektiv Agha, Hershkowitz a Kogan výsledek zobecnil pro případ, kdy nemusí být všechny singulární vrcholy redukovaného grafu matice A jednoduché, v práci *A solution to an inverse height and level characteristics problem* z roku 1992:[263]

34 Věta. *Nechť $\lambda = (\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_q)$ a $\eta = (\eta_1,\, \eta_2,\, \ldots,\, \eta_p)$ jsou dvě posloupnosti přirozených čísel, kde η je nerostoucí a $p \leq q$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *existuje matice A, která splňuje vztahy $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$,*

(ii) $\hat{\lambda} \ll (\eta,\, 0)$ *(nebo $\hat{\lambda} \ll \eta$, jestliže $p = q$).*

Matice, jejichž graf je acyklický, lze simultánními permutacemi řádků a sloupců převést na dolní (nebo horní) trojúhelníkové matice (v případě acyklického grafu bez smyček na striktně dolní (nebo striktně horní) trojúhelníkové matice). Takovéto matice se nazývají *téměř trojúhelníkové* (*essentially triangular*). Naše další pozornost bude věnována vztahům mezi výškovou charakteristikou a posloupnostmi definovanými řečí teorie grafů právě pro tyto matice. Partii, která

[260] Viz [HS5], Theorem 4.10, str. 116.
[261] Viz [HS5], Question 4.11, str. 116.
[262] Viz [AH1], Corollary 3.5, str. 118.
[263] Viz [AHK1], Theorem 3.9, str. 143.

byla z velké části věnována M-maticím, uzavřeme ještě odpovědí na otázku, zda pro daný graf každá posloupnost, která majorizuje příslušnou úrovňovou charakteristiku, může být výškovou charakteristikou nějaké M-matice A, pro kterou by $G(A) = G$ nebo $R(A) = G$. Odpověď je v obou případech negativní.

Vztah mezi výškovou charakteristikou a vlastnostmi příslušného grafu pro trojúhelníkové matice, podtřídu téměř trojúhelníkových matic, byl pro nilpotentní případ studován Michaelem Ezrou Saksem v disertační práci *Duality Properties of Finite Set Systems* z roku 1980 a o rok později Emdenem R. Gansnerem v článku *Acyclic digraphs, Young tableaux and nilpotent matrices.* Částečné výsledky pro případ ne nutně nilpotentních trojúhelníkových matic publikoval Richard A. Brualdi v pracích *Combinatorial verification of the elementary divisors of tensor products* (1985) a *Combinatorially determined elementary divisors* (1987), kompletní řešení pro trojúhelníkové matice pak bylo představeno opět autorskou dvojicí Hans Schneider a Daniel Hershkowitz v textu *Path coverings of graphs and height characteristics of matrices* z roku 1993. Řada výsledků posledně jmenovaného článku byla odvozena s pomocí tzv. pokrytí grafu cestami.

35 Definice. *Pokrytím grafu G cestami* (*path covering of G*) budeme rozumět takovou množinu cest grafu G, které jsou *disjunktní*, tj. žádné dvě z nich nemají společný vrchol, a každý vrchol grafu G náleží právě jedné z těchto cest.

Pokrývání grafu cestami se stalo v devadesátých letech vyhledávanou oblastí studia, je náplní například takřka třicetistránkové práce *Paths in directed graphs and spectral properties of matrices* publikované Hershkowitzem v roce 1994. V jejím abstraktu na úvodní stránce je napsáno:

Several papers have been devoted to the relationship between the structure of the Jordan blocks associated with the eigenvalue 0 of a matrix and the digraph of the matrix. This problem appears to be strongly linked to a graph theoretic study of paths in digraphs. ([He5], str. 309)

Některé výsledky studia Weyrovy charakteristiky příslušné vlastnímu číslu 0 využívající pokrytí grafu byly vysloveny již před polovinou devadesátých let pro trojúhelníkové matice. Platí však i pro téměř trojúhelníkové matice, proto zde budou vysloveny právě pro tuto obecnější třídu matic.

Pro acyklický graf G, který může obsahovat smyčky, budeme definovat novou posloupnost přirozených čísel.

36 Definice. Symbol $p_k(G)$, $k = 1, 2, \ldots$, nechť značí maximální počet vrcholů bez smyček, které mohou být zahrnuty v k (či méně) vrcholově disjunktních cestách grafu G. Tato množina vrcholů se nazývá *k-cesta* (*k-path*). Položme ještě $p_0(G) = 0$.[264] Dále nechť t je nejmenší počet vrcholově disjunktních cest grafu G, které jsou nutné k pokrytí všech vrcholů grafu G, které nemají smyčky.

[264] V práci [He5] je termín *k-path* definován (navíc pouze pro tranzitivní acyklický graf) jako sjednocení zmíněných disjunktních cest. Viz Definition 4.13, str. 318.

Evidentně je $p_{k-1}(G) < p_k(G)$, pro $1 < k \le t$, a $p_{k-1}(G) = p_k(G)$ pro $k > t$. Pro $k = 1, 2 \ldots, t$ tedy lze definovat přirozená čísla

$$\pi_k(G) = p_k(G) - p_{k-1}(G).$$

Symbolem $\pi(G)$ budeme značit posloupnost[265]

$$(\pi_1(G), \pi_2(G), \ldots, \pi_t(G)).$$

Mezi duální posloupností k právě zavedené posloupnosti $\pi(G)$ a výškovou charakteristikou η existuje pro třídu téměř trojúhelníkových matic vztah majorizace:[266]

37 Věta. *Pro téměř trojúhelníkovou matici A platí vztah*

$$\pi(G(A))^* \preceq \eta(A).$$

Věta byla publikována roku 1993 v pojednání *Path coverings of graphs and height characteristics of matrices* aniž by byl uveden termín výšková charakteristika, neboť byla formulována pro příslušné duální posloupnosti (matice A byla navíc pouze trojúhelníková). Pro téměř trojúhelníkové matice tedy platí relace $\xi(A) \preceq \pi(G(A))$, jejímž triviálním důsledkem je skutečnost, že řád největší Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu 0 je menší nebo roven maximálnímu počtu vrcholů bez smyček, které mohou být pokryty jednou cestou v grafu G.

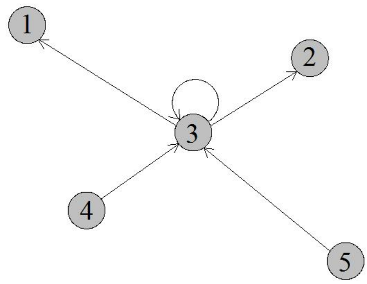
Upozorněme výslovně, že majorizace $\pi(G(A))^* \preceq \eta(A)$ obecně neplatí pro blokově trojúhelníkové matice, které nejsou trojúhelníkové a jejichž diagonální blokové matice jsou čtvercové – graf $G(A)$ bychom nahradili grafem $R(A)$. A to dokonce i v případě, ve kterém by všechny singulární vrcholy byly jednoduché.

Demonstrujme tuto skutečnost opět na konkrétním příkladě. Uvažujme například matici

$$A = \left(\begin{array}{r|r|rr|r|r} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

jejíž redukovaný graf $R(A)$ vypadá takto:

[265] V článku [He5] je tato posloupnost pojmenována *path characteristic*, což je však zcela výjimečné.
[266] Viz [HS6], Theorem 4.8, str. 180.
Tvrzení pro trojúhelníkové matice bez smyček bylo dokázáno již roku 1981 v článku *Acyclic digraphs, Young tableaux and nilpotent matrices* E. R. Gansnera, částečné výsledky pro obecné trojúhelníkové matice byly představeny v pracích *Combinatorial verification of the elementary divisors of tensor products* a *Combinatorially determined elementary divisors*, které roku 1985 a 1987 publikoval R. A. Brualdi.



Graf 5

Jednou cestou pokryjeme maximálně dva vrcholy bez smyček, tj. $p_1(R(A)) = 2$, dvěma vrcholově disjunktními cestami tři vrcholy bez smyček, tj. $p_2(R(A)) = 3$, a konečně třemi vrcholově disjunktními cestami všechny čtyři vrcholy bez smyček, tj. $p_3(R(A)) = 4$. Odtud dostáváme $\pi(R(A)) = (2, 1, 1)$ a z Ferrersova diagramu určíme, že $\pi(R(A))^* = (3, 1)$. Výpočtem zjistíme, že výšková charakteristika $\eta(A) = (2, 2, 1)$, která evidentně posloupnost $\pi(R(A))^*$ nemajorizuje.

Dosud jsme nalezli dvě posloupnosti, které majorizuje výšková charakteristika $\eta(A)$. Jednak charakteristiku $\hat{\lambda}(A)$, je-li A blokově trojúhelníková matice se čtvercovými bloky na diagonále, jejíž graf má jednoduché singulární vrcholy (viz věta 27), jednak posloupnost $\pi(G(A))^*$, je-li matice A téměř trojúhelníková (viz věta 37). Uvědomíme-li si, že každá téměř trojúhelníková matice je zároveň blokově trojúhelníková matice se čtvercovými diagonálními blokovými maticemi (řádu 1), jejíž singulární vrcholy jsou jednoduché, napadne nás přirozeně otázka, zda lze (alespoň) pro tuto třídu matic nalézt vztah majorizace mezi posloupnostmi $\hat{\lambda}(A)$ a $\pi(G(A))^*$. Prozraďme již nyní, že vztah majorizace mezi nimi skutečně platí. Dokonce mezi ně můžeme vsunout posloupnost další, která jednu z nich majorizuje a zároveň je majorizována posloupností druhou. Definujme nyní tuto novou posloupnost.

38 Definice. Nechť G je acyklický graf (který může mít smyčky) a nechť symbol Ω_k značí množinu vrcholů bez smyček grafu G, jejíž žádných $k + 1$ vrcholů neleží na stejné cestě. Množina Ω_k se nazývá *k-systémem* (*k-family*). Symbol $d_k(G)$ značí maximální počet prvků ze všech takových množin Ω_k, $k = 1, 2, \ldots$, a nechť $d_0(G) = 0$.[267] Nechť t značí největší počet vrcholů bez smyček grafu G ležící na téže cestě. Zřejmě $d_{k-1}(G) < d_k(G)$, pro $1 < k \leq t$,

[267] Pro $k = 1$, tj. pro 1-*family*, používali autoři rovněž termín *antichain*. Prvky takovéto množiny, tj. množinu vrcholů grafu G, z nichž žádné dva neleží na téže cestě, nazývali *independent elements*. Viz např. [He5], Definition 3.2, str. 314.

Uvědomme si, že každou částečně uspořádanou množinu lze reprezentovat acyklickým tranzitivním grafem. Největší ze všech k-systémů daného grafu byl v pracích psaných právě řečí uspořádaných množin rovněž označován *spernerovský k-systém* (*Sperner k-family*). Viz např. práce [GK1] a [Ge1]. Příjmení obsažené v termínu odkazuje na výsledky matematika Emanuela Spernera (1905–1980) publikované v roce 1928 v práci *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge* [Sr1].

a $d_{k-1}(G) = d_k(G)$ pro $k > t$. Pro $k = 1, 2 \ldots, t$ označme

$$\delta_k(G) = d_k(G) - d_{k-1}(G).$$

Symbolem $\delta(G)$ budeme značit posloupnost přirozených čísel

$$(\delta_1(G), \delta_2(G), \ldots, \delta_t(G)).$$

Vztah této posloupnosti k posloupnosti $\pi(G)^*$ vyjadřuje následující věta, která byla dokázaná opět v článku *Path coverings of graphs and height characteristics of matrices.*[268]

39 Věta. *Pro každý acyklický graf G, který může obsahovat smyčky, platí relace*

$$\delta(G) \preceq \pi(G)^*.$$

Pozici majoranty posloupnost δ naopak zaujímá v následující větě, jejíž tvrzení je snadno představitelné. Stačí uvážit, že žádné dva vrcholy bez smyček mající stejnou úroveň neleží na téže cestě grafu $G(A)$.

40 Věta. *Každá téměř trojúhelníková matice A splňuje relaci*

$$\hat{\lambda}(A) \preceq \delta(G(A)).$$

Triviálním důsledkem dvou právě vyslovených tvrzení je hledaný vztah mezi posloupnostmi $\hat{\lambda}(A)$ a $\pi(G(A))^*$.

41 Věta. *Pro každou téměř trojúhelníkovou matici A je*

$$\hat{\lambda}(A) \preceq \pi(G(A))^*.$$

K tomu, abychom mohli tvrdit, že posloupnost $\pi(G(A))^*$ se „více blíží“ výškové charakteristice $\eta(A)$ matice A než posloupnost $\hat{\lambda}(A)$, stačí dokázat, že obecně buď $\hat{\lambda}(A) \neq \delta(G(A))$ nebo $\delta(G(A)) \neq \pi(G(A))^*$. Existenci takové matice A doložíme konkrétním příkladem, pro který dokonce platí nerovnosti obě. Než tak učiníme, shrňme výsledky týkající se majorizace posloupností příslušných k téměř trojúhelníkovým maticím do přehledné řady pěti navzájem se majorizujících posloupností, na jejímž konci stojí přibližně sto třicet let známá Weyrova charakteristika příslušná vlastnímu číslu nula, zatímco všechny její předchůdci v této řadě jsou historicky jejími následovníky, a to přibližně o sto let mladšími.

[268] Viz [HS6], Proposition 3.8, str. 177.
Pro případ tranzitivního acyklického grafu platí $\delta(G) = \pi(G)^*$. Viz výsledky publikované roku 1976 C. Greenem v práci *Some partitions associated with a partially ordered set* [Ge1]. Případ netranzitivního acyklického grafu, který neobsahuje smyčky, byl studován v disertační práci M. E. Sakse *Duality properties of finite set systems* z roku 1980 a také v o rok mladší publikaci *Acyclic digraphs, Young tableaux and nilpotent matrices* [Gs1] E. R. Gansnera.

42 Věta. *Každá téměř trojúhelníková matice A splňuje vztahy*

$$\lambda(A) \preceq \hat{\lambda}(A) \preceq \delta(G(A)) \preceq \pi(G(A))^* \preceq \eta(A).$$

Vzpomeňme ještě na třídu M-matic, konkrétně na dva speciální případy, v nichž $\lambda(A) = \eta(A)$. Právě uvedená řada majorizací, v nichž pouze graf $G(A)$ nahradíme redukovaným grafem $R(A)$, zůstává v platnosti, tj. pro M-matici A platí

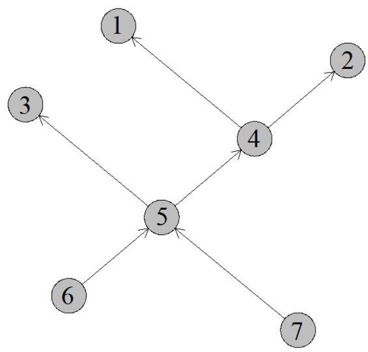
$$\lambda(A) = \hat{\lambda}(A) = \delta(R(A)) = \pi(R(A))^* = \eta(A).$$

Vraťme se ke slíbenému příkladu, v němž pro téměř trojúhelníkovou matici A platí $\hat{\lambda}(A) \neq \delta(G(A))$ a $\delta(G(A)) \neq \pi(G(A))^*$.[269]

Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d, e, f jsou nenulová čísla. Graf $G(A)$ matice A je na následujícím obrázku:



Graf 6

Hledejme postupně posloupnosti příslušné matici A, resp. grafu $G(A)$. Úrovňová charakteristika $\lambda(A) = (2, 1, 2, 2)$, tudíž $\hat{\lambda}(A) = (2, 2, 2, 1)$.

Vrcholy $\{1, 2, 3\}$ bez smyček tvoří 1-systém Ω_1, který neobsahuje dva vrcholy bez smyček ležící na téže cestě a má z množin této vlastnosti největší počet prvků. Ten se rovná třem, tj. $d_1(G) = 3$. Množinou splňující podmínky,

[269] Zadání příkladu je převzato z [He6], Example 5.8, str. 185.

že žádná trojice jejích vrcholů bez smyček neleží na téže cestě a je co největší, je množina $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 6, 7\}$, proto $d_2(G) = 5$. Postupně získáme maximální 3-systém $\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ (nebo také $\Omega_3 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$) a maximální 4-systém $\Omega_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Odtud $d_3(G) = 6$ a $d_4(G) = 7$. Dostáváme posloupnost $\delta(G(A)) = (3, 2, 1, 1)$.[270]

Pouhým pohledem na graf $G(A)$ zjistíme, že $p_1(G(A)) = 4$, $p_2(G(A)) = 5$, $p_3(G(A)) = 6$ a $p_4(G(A)) = 7$. Dostáváme nejprve $\pi(G(A)) = (4, 1, 1, 1)$ a z Ferrersova diagramu dále $\pi(G(A))^* = (4, 1, 1, 1)$.

Vidíme, že nulita matice A je 4. Snadno vypočteme, že s každou vyšší mocninou matice A se její nulita zvýší o jednu, přičemž se tento postup zastaví u matice A^4. Proto má $\eta(A)$ čtyři prvky a $\eta(A) = (4, 1, 1, 1)$. Pro úplnost poznamenejme, že $\xi(A) = \eta(A)^* = (4, 1, 1, 1)$.

V našem konkrétním příkladě má tedy ona řada pěti posloupností tvar

$$(2, 1, 2, 2) \preceq (2, 2, 2, 1) \preceq (3, 2, 1, 1) \preceq (4, 1, 1, 1) \preceq (4, 1, 1, 1),$$

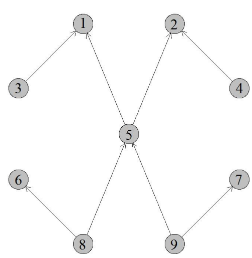
přičemž s výjimkou posledního vztahu se jedná o relace, které nejsou rovnostmi. Vzhledem ke skutečnosti, že v tomto příkladě je počet singulárních vrcholů grafu $G(A)$ roven dimenzi $\operatorname{GKer} A$, mají krajní charakteristiky $\lambda(A)$ a $\eta(A)$, tudíž i posloupnosti mezi ně vložené, stejný součet prvků, a to 7.

Podotkněme pro zajímavost, že v našem příkladě je tento součet navíc roven řádu matice, která je tudíž nilpotentní. Poznamenejme, že matice A je nilpotentní, právě když součet prvků její výškové charakteristiky $\eta(A)$ (tj. také počet teček příslušného Ferrersova diagramu) je roven jejímu řádu.

43 Definice. Nechť $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_u\}$ je pokrytí acyklického grafu G cestami, dále nechť $|P_i|$ značí délku cesty P_i a k je přirozené číslo. Symbolem $|\mathcal{P}|_k$ budeme značit číslo $\sum_{i=1}^{u} \min\{|P_i|, k\}$, které nazveme *$k$-normou pokrytí $\mathcal{P}$* (*k-norm for a path covering $\mathcal{P}$*).

Tak jako lze dualitu dvou posloupností vhodně vizualizovat pomocí Ferrersova diagramu, lze i k-normu ilustrovat schématem, které nám usnadní představu v našich dalších postupech. Uvažujme například pokrytí $\mathcal{P}$ grafu G, které

[270] Upozorněme raději, že koeficienty $\delta_k(G)$ se nemusí rovnat počtu vrcholů přidaných do maximálního $(k-1)$-systému, aby vznikl maximální k-systém. Například pro graf



je maximální 1-systém $\Omega_1 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ a maximální 2-systém $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$. Maximální 2-systém tedy nevznikl přidáváním vrcholů do maximálního 1-systému.

je utvořeno pomocí šesti cest, jejichž délky (co se počtu pokrytých vrcholů týče) jsou 4, 3, 3, 2, 1, 1. Nakresleme diagram o šesti sloupcích, z nichž každý obsahuje tolik hvězdiček, kolik je délka příslušné cesty. Dokresleme nad každý řádek hvězdiček linku:

*					
*	*	*			
*	*	*	*		
*	*	*	*	*	*

Potom k-norma $|P|_k$ pokrytí $\mathcal{P}$ je rovna počtu hvězdiček pod k-tou linkou, počítáme-li linky odspodu. V našem případě tedy $|\mathcal{P}|_1 = 6$, $|\mathcal{P}|_2 = 10$, $|\mathcal{P}|_3 = 13$ a $|\mathcal{P}|_4 = 14$.

Minimální z k-norem pokrytí grafu G přes všechna pokrytí $\mathcal{P}$ označme $f_k(G)$. Bez uvedeného schématu bychom museli při určování $f_k(G)$ uvažovat všechna možná pokrytí grafu G, pro každé z nich hledat k-normu a ze všech k-norem hledat tu nejmenší. Uvážíme-li výše uvedený diagram, stačí si uvědomit, že hvězdiček pod první, druhou, třetí atd. linkou odspodu bude tím méně, čím méně bude jednak sloupců diagramu (tj. cest tvořících pokrytí) a také čím delší cesty se nám postupně podaří sestrojit z vrcholů dosud nepokrytých předchozími cestami. Čtrnáct hvězdiček v námi uvedeném diagramu reprezentujících čtrnáct vrcholů grafu G je tedy vhodnější při hledání čísel $f_k(G)$ seskupit, umožňuje-li to konkrétní graf, do méně než šesti sloupců odpovídající šesti cestám. Předpokládejme, že pokrytí $\mathcal{P}$ grafu G je tvořeno pouhými dvěma cestami P_1, P_2, které pokrývají po řadě osm a šest vrcholů. Předpokládejme dále, že existuje jiné pokrytí $\mathcal{P}'$ tohoto grafu dvěma cestami P_1', P_2', pro něž $|P_1'| = 10$, $|P_2'| = 4$, přičemž 10 je délka nejdelší možné cesty grafu G. Po srovnání obou, resp. všech tří diagramů je zřejmé, že koeficienty $f_k(G)$ budeme určovat pomocí diagramu příslušného pokrytí $\mathcal{P}'$ obsahujícího sloupec odpovídající cestě, která pokrývá deset vrcholů.

*					
*	*	*			
*	*	*	*		
*	*	*	*	*	*

*	
*	
*	*
*	*
*	*
*	*
*	*
*	*

*	
*	
*	
*	
*	
*	
*	*
*	*
*	*
*	*

Z posledního diagramu si též uvědomíme, že k-normu pokrytí grafu je smysluplné hledat pouze pro $k \leq u$, kde u je maximální počet vrcholů grafu G pokrytých jedinou cestou (maximální délka cesty grafu G).

Studujme nyní grafové posloupnosti a jejich souvislosti s výškovou charakteristikou pro tranzitivní acyklický graf. Připomeňme raději, že acyklickému grafu přísluší téměř trojúhelníková matice, a platí pro něj tedy všechny věty představené v předchozí části.

Pro tranzitivní acyklický graf G je 1-norma pokrytí $\mathcal{P}$ rovna počtu cest v $\mathcal{P}$. Proto $f_1(G)$ je rovno minimálnímu počtu disjunktních cest potřebných k pokrytí všech vrcholů grafu G.

O tomto nejmenším počtu cest v tranzitivním acyklickém grafu „mluví“ teorém, který dokázal již roku 1950 v práci *A decomposition theorem for partially ordered sets* [Di1] americký matematik Robert Palmer Dilworth (1914–1993). Dnes jej nazýváme *Dilworthovou větou.*[271]

44 Věta. *Minimální počet cest potřebných k pokrytí všech vrcholů tranzitivního acyklického grafu G je roven maximálnímu počtu prvků 1-systému grafu G.*

Triviálním důsledkem Dilworthovy věty je tak následující tvrzení.

45 Věta. *Pro tranzitivní acyklický graf G platí $f_1(G) = d_1(G)$.*

Publikace Curtise Greeneho, doktoranda Dilwortha, a Daniela J. Kleitmana (nar. 1934), školitele Sakse, *The structure of Sperner k-families* [GK1] z roku 1976 však obsahuje mnohem obecnější výsledek.[272]

46 Věta. *Pro tranzitivní acyklický graf G platí $f_k(G) = d_k(G)$,* pro každé $k \geq 1$.

Pro graf G definujme

$$\varphi_k(G) = f_k(G) - f_{k-1}(G), \quad k = 1, 2, \ldots, u,$$

kde u je délka nejdelší cesty grafu G a $f_0(G) = 0$. Dále definujme posloupnost přirozených čísel

$$\varphi(G) = (\varphi_1(G), \varphi_2(G), \ldots).$$

Představíme-li si příslušný diagram s hvězdičkami a linkami, snadno nahlédneme, že posloupnost $\varphi(G)$ je nerostoucí[273] a koeficienty $\varphi_k(G)$ jsou rovny počtu hvězdiček v k-tém řádku (počítáno odspodu).

Poslední tvrzení lze tedy jednoduše formulovat pomocí dvou posloupností, a to takto:

47 Věta. *Pro tranzitivní acyklický graf G platí $\varphi(G) = \delta(G)$.*

---

[271] Viz [Di1], Theorem 1.1, str. 161.

Práce je psána řečí částečně uspořádaných množin. Dilworth pracoval s částečně uspořádanou množinou P a minimálním počtem uspořádaných množin, jejichž sjednocení je množina P.

[272] Viz [GK1], Theorem 3.11, str. 60.

Pokrytí tranzitivního acyklického grafu, pro které platí rovnost $f_k(G) = d_k(G)$, $k \geq 1$, je např. v článcích [GK1] a [Ge1] nazýváno *k-nasycené* (*k-saturated*).

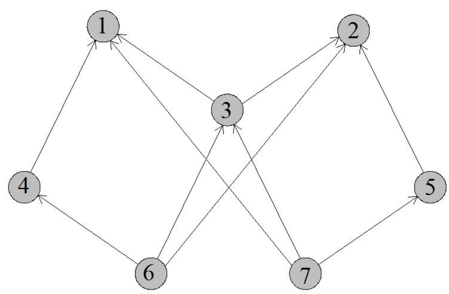
[273] Exaktní důkaz viz [HS6], Proposition 3.4, str. 177.

Jeden z autorů výsledku týkajícího se rovnosti posloupností $\varphi(G)$ a $\delta(G)$, konkrétně Curtis Greene, předložil roku 1976 v článku *Some partitions associated with a partially ordered set* podrobnější větu:[274]

48 Věta. *Pro tranzitivní acyklický graf G platí $\varphi(G) = \delta(G) = \pi(G)^*$.*

Uvědomme si tedy, že v mnoha dříve uvedených vztazích, v nichž výšková charakteristika majorizovala posloupnost $\delta(G)$ či $\pi(G)^*$, jsme pro případ matice, jejíž graf G je acyklický a tranzitivní, mohli tyto posloupnosti nahradit posloupností $\varphi(G)$.

Podotkněme, že článek *Paths in directed graphs and spectral properties of matrices*, v němž čtenář nalezne mnohem podrobnější informace k problematice pokrývání tranzitivního acyklického grafu cestami, několikrát zmiňuje i určenost výškové charakteristiky matice jí příslušnou *nulovou vzorovou maticí*. Této otázce se budeme krátce věnovat později. Nyní ukažme právě vyslovené výsledky pro konkrétní tranzitivní acyklický graf G, který má tento tvar:



Graf 7

Protože počet prvků 1-systému grafu G s největším počtem prvků je tři ($\Omega_1 = \{3, 4, 5\}$), je $d_1(G) = 3$ a graf lze pokrýt třemi cestami. Možností, jak pokrytí sestrojit, existuje více. Najdeme takové, které bude určovat čísla $f_k(G)$. Sestrojme cestu P_1 o co možná největší délce. Tato délka je tři a $P_1 = (6, 4, 1)$ (lze uvažovat i jiné cesty délky tři, např. $(7, 3, 2)$ atd.). Vrcholy nenáležející cestě P_1 pokryjme opět co nejdelší cestou – i tentokrát bude počet pokrytých vrcholů tři. Z více možností nechť například $P_2 = (7, 3, 2)$ a konečně $P_3 = (5)$. Dostáváme tedy $|P_1| = 3$, $|P_2| = 3$, $|P_3| = 1$ a pomocí diagramu

*	*	
*	*	
*	*	*

určíme, že $\varphi(G) = (3, 2, 2)$.

Najděme posloupnost $\delta(G)$. Jednotlivé k-systémy grafu G, které mají nejvíce prvků, jsou $\Omega_1 = \{3, 4, 5\}$, $\Omega_2 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ (nebo $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

[274] Viz [Ge1]. Jedná se o práci, která vyšla nejen ve stejném roce jako článek [GK1], ale dokonce v témže čísle časopisu Journal of Combinatorial Theory.

a $\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, odtud

$$d_1(G) = 3, \quad d_2(G) = 5, \quad d_3(G) = 7$$

a $\delta(G) = (3, 2, 2)$.

Určíme posloupnost $\pi(G)^*$. Pro koeficienty $p_k(G)$ příslušné k-cestám platí

$$p_1(G) = |P_1|\,, \quad p_2(G) = |P_1| + |P_2| \quad \text{a} \quad p_3(G) = |P_1| + |P_2| + |P_3|\,.$$

Není je však nezbytné určovat, neboť hledané rozdíly $\pi_k(G) = p_k(G) - p_{k-1}(G)$ jsou rovny přímo počtům prvků $|P_k|$, proto $\pi(G) = (3, 3, 1)$. Pomocí Ferrersova diagramu dostáváme $\pi(G)^* = (3, 2, 2)$. Skutečně tedy platí

$$\varphi(G) = \delta(G) = \pi(G)^*.$$

Ke grafu G sestrojme matici A, pro kterou $G = G(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f & g & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & j & 0 & k & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d, e, f, g, h, j, k jsou libovolná nenulová čísla. Matice A je téměř trojúhelníková, musí tedy splňovat vztahy (42 Věta)

$$\lambda(A) \preceq \hat{\lambda}(A) \preceq \delta(G(A)) \preceq \pi(G(A))^* \preceq \eta(A).$$

Nalezneme ještě úrovňovou charakteristiku $\lambda(A)$ (a poté $\hat{\lambda}(A)$) a výškovou charakteristiku $\eta(A)$. Stupně vrcholů 1 a 2 jsou rovny třem, stupně vrcholů 3, 4 a 5 jsou rovny dvěma a stupně vrcholů 6 a 7 jsou jedna, proto $\lambda(A) = (2, 3, 2)$ a odtud $\hat{\lambda}(A) = (3, 2, 2)$.

Pro nulity matic A, A^2, A^3 po řadě platí $\operatorname{nul} A = 3$, $\operatorname{nul} A^2 = 5$, $\operatorname{nul} A^3 = 7$, proto $\eta(A) = (3, 2, 2)$. V našem příkladě tedy dostáváme několik posloupností, které se rovnají Weyrově charakteristice příslušné vlastnímu číslu 0, konkrétněji

$$\lambda(A) \preceq \hat{\lambda}(A) = \delta(G(A)) = \pi(G(A))^* = \eta(A).$$

Ohlédneme-li se zpět, vyslovili jsme dosud vztahy majorizace mezi nějakou posloupností a výškovou charakteristikou pro M-matice (vztah $\lambda(A) \preceq \eta(A)$, věta 26), blokově trojúhelníkové matice se čtvercovými bloky na diagonále, jejichž singulární vrcholy grafu $R(A)$ jsou jednoduché (vztah $\hat{\lambda}(A) \preceq \eta(A)$, věta 27), a téměř trojúhelníkové matice (vztah $\pi(G(A))^* \preceq \eta(A)$, věta 37). Všechny jmenované třídy obsahují matice, pro které je 0 jednoduchým vlastním číslem jejich singulárních bloků na diagonále. Vždy se tedy jednalo o matice, které splňovaly podmínku rovnosti součtu prvků úrovňové a výškové charakteristiky. Naopak pro blokově trojúhelníkové matice se čtvercovými bloky na diagonále, z nichž alespoň jeden je singulární maticí s vícenásobným vlastním číslem 0, je počet singulárních vrcholů grafu $R(A)$ menší než je násobnost vlastního čísla 0 matice A (a tedy i dimenze GKer A). V těchto případech je součet prvků úrovňové charakteristiky $\lambda(A)$ menší než součet prvků výškové charakteristiky $\eta(A)$ a vztah „obyčejné“ majorizace mezi těmito posloupnostmi není definován.

Z tohoto důvodu nejprve nalezneme pro obecnou blokově trojúhelníkovou matici se čtvercovými – ne nutně ireducibilními – bloky na diagonále jinou posloupnost, která úrovňovou charakteristiku $\lambda(A)$, resp. $\hat{\lambda}(A)$ ve dvou ze tří jmenovaných vztazích nahradí. Bude se jednat o posloupnost nám již známou, bude však příslušná zcela nově definovaným grafům matice A, které poprvé představil Hershkowitz v roce 1992 v článku *The height characteristic of block triangular matrices.*[275]

Budeme se rovněž zabývat zobecněním v jiném směru, konkrétně zobecněním vztahu $\pi(G(A))^* \preceq \eta(A)$ platného pro graf téměř trojúhelníkové matice na graf obecné matice. V tomto případě nebude nutné zavádět nový graf, neboť graf $G(A)$ matice A je nám dobře známý, ale naopak budeme muset mírně pozměnit definici posloupnosti $\pi(G(A))$ a rovněž vztah majorizace nahradit silnou majorizací.

Zabývejme se nejprve prvním případem. Pro čtvercovou matici A definujme nové grafy.

49 Definice. *Jordanovým grafem* $J(A)$ matice A budeme nazývat graf Jordanova kanonického tvaru matice A.

Nechť $\xi(A) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)$ je Segreova charakteristika příslušná vlastnímu číslu 0 matice A. *Singulárním Jordanovým grafem* $SJ(A)$ matice A budeme rozumět graf obsahující právě q disjunktních cest délky $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q$, jejichž vrcholy neobsahují smyčky, a dále izolované vrcholy, které naopak smyčky obsahují, a jejich počet je roven rozdílu řádu matice A a násobnosti vlastního čísla 0 (neboli rozdílu řádu matice A a dim GKer A).

Jméno grafu odkazuje na skutečnost, že čísla ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, q$, jsou rovna řádům Jordanových buněk příslušných vlastnímu číslu 0 matice A.

Pomocí takto definovaných grafů sestrojme nové grafy pro blokově trojúhelníkovou matici.

Nechť A je blokově trojúhelníková matice A, jejíž všechny diagonální matice $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{pp}$ jsou čtvercové. Sestrojme nejprve p disjunktních grafů $J(A_{11}), J(A_{22}), \ldots, J(A_{pp})$ a dále přidejme do grafu hrany vedoucí ze všech vrcholů grafu $J(A_{ii})$ do všech vrcholů grafu $J(A_{jj})$, kdykoliv $A_{ij} \neq O$, $i \neq j$. Výsledný graf budeme značit $GJ(A)$.

Sestrojme dále p disjunktních grafů $SJ(A_{11}), SJ(A_{22}), \ldots, SJ(A_{pp})$ a přidejme do grafu hrany vedoucí ze všech vrcholů grafu $SJ(A_{ii})$ do všech vrcholů grafu $SJ(A_{jj})$, kdykoliv $A_{ij} \neq O$, $i \neq j$. Takovýto graf budeme symbolicky zapisovat $GSJ(A)$.

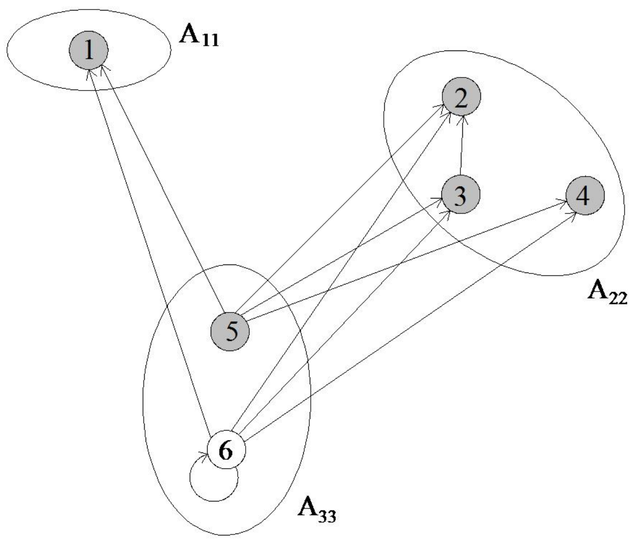
[275] Viz [He3], Definition 3.1 a Definition 3.2, str. 8.

Pro správné pochopení nejsložitějšího grafu $GSJ(A)$ představíme jeho konstrukci na příkladu. Uvažujme matici

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Spektrální vlastnosti matice A_{11} jsou evidentní. Matice A_{22} má trojnásobné vlastní číslo 0, k němuž nalezneme dva vlastní vektory, proto řády Jordanových buněk příslušných tomuto vlastnímu číslu jsou dva a jedna. Vlastními čísly matice A_{33} jsou čísla 0 a 3, řád jediné buňky příslušné vlastnímu číslu 0 je nutně roven jedné.

Graf $GSJ(A)$ matice A je zobrazen na dalším obrázku, na němž jsou ohraničeny jednotlivé grafy $SJ(A_{ii})$ uzavřenými křivkami.



Graf 8

Následující dvě věty dokázal Daniel Hershkowitz v práci *The height characteristic of block triangular matrices* z roku 1992.[276]

50 Věta. *Pro každou blokově trojúhelníkovou matici A se čtvercovými bloky na diagonále je*

$$\pi(GJ(A)) \preceq \eta(A).$$

[276] První věta viz [He3], Theorem 3.5 a Theorem 3.6, str. 9. Druhé tvrzení zobecňuje výsledek publikovaný přibližně ve stejné době v práci [HS6] pro trojúhelníkové matice. Viz [HS6], Theorem 5.11, str. 185.

51 Věta. *Pro každou blokově trojúhelníkovou matici A se čtvercovými bloky na diagonále je*

$$\pi(GSJ(A))^* \preceq \eta(A).$$

O sedm let později bylo v článku *The combinatorial structure of generalized eigenspaces – from nonnegative matrices to general matrices* týmž autorem představeno tvrzení obdobného charakteru.[277]

52 Věta. *Pro každou blokově trojúhelníkovou matici A se čtvercovými bloky na diagonále je*

$$\delta(GSJ(A)) \preceq \eta(A).$$

Uvědomme si, že graf $GSJ(A)$ je definován pro blokově trojúhelníkové matice, a proto neobsahuje kromě smyček jiné cykly. Můžeme tak využít již uvedený vztah $\delta(G) \preceq \pi(G)^*$ platný pro acyklické grafy s povolenou existencí smyček. Pro blokově trojúhelníkovou matici A s čtvercovými bloky na diagonále tedy platí rovněž

$$\delta(GSJ(A)) \preceq \pi(GSJ(A))^*.$$

Jelikož obecně $\delta(GSJ(A)) \neq \pi(GSJ(A))^*$, je starší výsledek ze dvou uvedených tvrzení tím silnějším, posloupnost $\pi(GSJ(A))^*$ je lepším „přiblížením se“ výškové charakteristice matice A. Celkově dostáváme:

53 Věta. *Pro každou blokově trojúhelníkovou matici A se čtvercovými bloky na diagonále je*

$$\delta(GSJ(A)) \preceq \pi(GSJ(A))^* \preceq \eta(A).$$

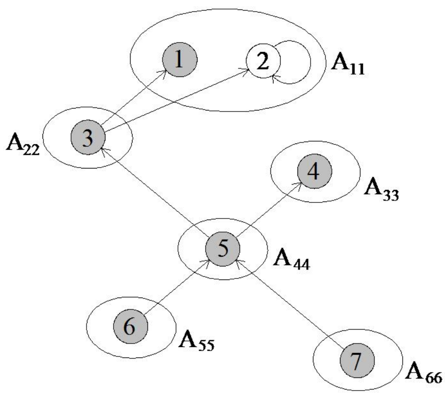
V našem konkrétním příkladě grafu $GSJ(A)$ je $d_1 = 3$ ($\Omega_1 = \{1, 2, 4\}$), poté v každém kroku konstrukce posloupnosti δ přidáváme do množiny Ω_1 jeden vrchol bez smyčky až do vyčerpání všech pěti. Proto $\delta(GSJ(A)) = (3, 1, 1)$. Jedinou cestou pokryjeme maximálně tři vrcholy bez smyček, s každou další vrcholově disjunktní cestou pokryjeme jeden další vrchol bez smyčky, přičemž potřebujeme takovéto cesty tři. Tedy $\pi(GSJ(A)) = (3, 1, 1)$, z čehož vyplývá $\pi(GSJ(A))^* = (3, 1, 1)$. Nulity matic A, A^2, A^3, A^4 jsou po řadě $3, 4, 5, 5$, proto $\eta(A) = (3, 1, 1)$, a vidíme, že všechny tři charakteristiky uvedené v poslední větě mohou být stejné.

Obecně platné nerovnosti mezi posloupnostmi $\delta(GSJ(A))$ a $\pi(GSJ(A))^*$ a také posloupnostmi $\pi(GSJ(A))^*$ a $\eta(A)$ doložíme opět na příkladech. Uvažujme blokově trojúhelníkové matice

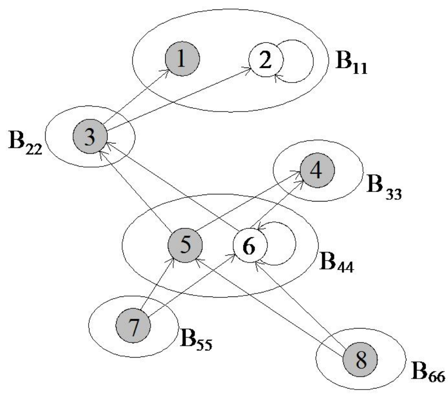
[277] Viz [He6], Theorem 6.9, str. 188.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{a} \quad B = \left(\begin{array}{cc|c|c|cc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Jim příslušné grafy $GSJ(A)$ a $GSJ(B)$ jsou si relativně podobné. Změna nastala u singulárního Jordanova grafu $SJ(A_{44})$; grafy vypadají takto:



Graf 9



Graf 10

Z grafů zjistíme, že posloupnost δ je pro obě matice stejná, a to

$$\delta(GSJ(A)) = \delta(GSJ(B)) = (2,\ 2,\ 1,\ 1).$$

V případě matice A je

$$\pi(GSJ(A)) = (4,\ 1,\ 1), \quad \text{tedy} \quad \pi(GSJ(A))^* = (3,\ 1,\ 1,\ 1).$$

Pro matici B platí $\pi(GSJ(B)) = (4,\ 2)$, neboť můžeme využít i cesty přes vrchol 6. Z Ferrersova diagramu dostáváme

$$\pi(GSJ(B))^* = (2,\ 2,\ 1,\ 1).$$

Pro nulity matic platí

$$\operatorname{nul} A = 3, \quad \operatorname{nul} A^2 = 4, \quad \operatorname{nul} A^3 = 5, \quad \operatorname{nul} A^4 = \operatorname{nul} A^5 = 6,$$

$$\operatorname{nul} B = 3, \quad \operatorname{nul} B^2 = 4, \quad \operatorname{nul} B^3 = 5, \quad \operatorname{nul} B^4 = \operatorname{nul} B^5 = 6,$$

proto $\eta(A) = \eta(B) = (3,\ 1,\ 1,\ 1)$.

V případě matice A tedy $\delta(GSJ(A)) \neq \pi(GSJ(A))^*$, matice B je příkladem matice, pro kterou $\pi(GSJ(B))^* \neq \eta(B)$.

Studujme nyní zobecnění dosud známých výsledků druhým směrem. Víme, že pro acyklické grafy, resp. téměř trojúhelníkové matice platí

$$\pi(G(A))^* \preceq \eta(A).$$

Nyní uvidíme, že pro silnou majorizaci a pozměněnou posloupnost π zůstane vztah v platnosti i pro obecné grafy, resp. obecné matice.

54 Definice. Cestu $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ grafu G nazveme *uzaviratelnou*, jestliže (i_m, i_1) je hrana grafu G. V opačném případě se cesta nazývá *neuzaviratelná*. Cesta obsahující jediný vrchol je uzaviratelná, právě když má tento vrchol smyčku.

Nechť G je graf. Symbolem $\widetilde{p}_k(G)$ označme největší počet vrcholů grafu G, které mohou být pokryty vrcholově disjunktními cestami, přičemž mezi těmito cestami není více neuzaviratelných cest než k.

Dále nechť t je největší přirozené číslo, pro které $\widetilde{p}_t(G) > \widetilde{p}_{t-1}(G)$. Pro $k = 1, 2, \ldots, t$ definujeme

$$\widetilde{\pi}_k = \widetilde{p}_k(G) - \widetilde{p}_{k-1}(G).$$

Uvědomme si, že $\widetilde{p}_0(G)$ je největší počet vrcholů, které mohou být pokryty vrcholově disjunktními uzaviratelnými cestami.

Symbolem $\widetilde{\pi}(G)$ budeme rozumět posloupnost

$$(\widetilde{\pi}_1(G), \widetilde{\pi}_2(G), \ldots, \widetilde{\pi}_t(G)).$$

Jedná se o pouhé zobecnění posloupnosti $\pi(G)$ definované pro acyklický graf (který může obsahovat smyčky) na posloupnost příslušnou obecnému grafu. Je-li graf acyklický, posloupnosti $\pi(G)$ a $\widetilde{\pi}(G)$ splývají.

Následující vztah byl dokázán roku 1993 v práci Daniela Hershkowitze *The relation between the Jordan structure of a matrix and its graph.*[278]

55 Věta. *Každá matice splňuje vztah* $\widetilde{\pi}(G(A))^* \ll \eta(A)$.

Odtud mimo jiné vyplývá, že řád největší Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu 0 je menší nebo roven $\widetilde{\pi}_1(G(A))$. Upozorněme, že symbol $\widetilde{\pi}_1(G(A))$ nemůže být nahrazen symbolem $\widetilde{p}_1(G(A))$, neboť $\widetilde{p}_0(G(A))$ se obecně nerovná nule, jak jsme byli v analogických situacích pro jiné posloupnosti zvyklí.

Očekávaná skutečnost, že vztah $\widetilde{\pi}(G(A))^* \ll \eta(A)$ může přejít v rovnost $\widetilde{\pi}(G(A))^* = \eta(A)$, však platí.

Rok 2000 se stal v této problematice jakýmsi mezníkem. Podstatné vztahy mezi Weyrovou charakteristikou příslušnou vlastnímu číslu 0, obecněji spektrálními vlastnostmi rozličných, avšak v teorii matic často se vyskytujících tříd

[278] Viz [He4], Theorem 4.22, str. 67.

matic a charakteristikami jim příslušných grafů, již byly stanoveny a studium se začalo ubírat trochu jiným směrem. V pracích publikovaných v novém tisíciletí, v nichž se výšková charakteristika vyskytuje (*The combinatorial structure of eventually nonnegative matrices* (2002), *A characterization of Jordan canonical forms which are similar to eventually nonnegative matrices with the properties of nonnegative matrices* (2003), *The peripheral spectrum of a nonnegative matrix* (2003), *Eventually nonnegative matrices are similar to seminonnegative matrices* (2004), *Level characteristics corresponding to peripheral eigenvalues of a nonnegative matrix* (2008) – připomeňme, že spoluautorkou, v jednom případě samostatnou autorkou všech jmenovaných textů je Judith J. McDonald, Schneiderova doktorandka, a pojednání Bit-Shun Tama *The Perron generalized eigenspace and the spectral cone of a cone-preserving map*),[279] již většinou není souvislost s charakteristikami teorie grafů převažující náplní. Ponechme nyní stranou dvě jmenované pulikace B.-S. Tama, které se od ostatních odlišují, a věnujme se zbývajícím článkům.

Práce se zabývají obecněji spektrálními vlastnostmi (např. Jordanově kanonickému tvaru, podobnosti) specifických tříd matic a v rámci jejich studia předkládají některé další vlastnosti související s grafy. Například dříve hojně studovaný problém majorizace se v publikacích vyskytuje pouze ojediněle. Většina z uvažovaných prací má některé navzájem spojující prvky. Věnují se již převážně obecnému vlastnímu číslu, termínem Weyrova charakteristika matice A bez dalšího zpřesnění je však stále myšlena Weyrova charakteristika příslušná vlastnímu číslu 0. Speciální pozornost často věnují souboru vlastních čísel matic, jejichž absolutní hodnota je rovna spektrálnímu poloměru této matice (tzv. *peripheral eigenvalues*).

Although some generalizations have been made with respect to other eigenvalues and general matrices (...), less can be said in the general case. The peripheral spectrum is slightly better behaved than an arbitrary eigenvalue ... ([Md1], str. 217)

Uvedené publikace zavádějí obdobnou skupinu nových pojmů a termínů a používají relativně podobnou symboliku lišící se od té, která byla používána v době nejintenzivnějšího studia, tj. na přelomu osmdesátých a devadesátých let a v první polovině devadesátých let v naprosté většině výše zmíněných publikací a kterou je psán i tento paragraf.

Demonstrujme změnu přístupu na konkrétní ukázce, v níž A je matice řádu n, symbol $\langle n\rangle$ značí množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ a pro její uspořádaný rozklad $\kappa = (K_1, K_2, \ldots, K_k)$ je A_κ matice

[279] Zařazení práce [NM2] z roku 2004 do tohoto seznamu je značně diskutabilní. Článek se na několika málo místech zmiňuje o spektrálních vlastnostech mocnin matice, výšková charakteristika však přímo zmíněna, a tedy ani studována není. O to více je překvapivé zařazení tohoto termínu mezi klíčová slova článku. Podíváme-li se na pracovní, na internetových stránkách dostupnou verzi publikace bez zpracované 4. části (je uveden pouze její nadpis), zjistíme, že výšková charakteristika je jednak v klíčových slovech a je také v práci definována. V publikované verzi potom již její definice není. Můžeme tedy usuzovat, že původně měla být věnována tomuto pojmu větší pozornost (zřejmě v oné 4. části), ale během psaní práce se záměr autorek změnil.

$$A_\kappa = \begin{pmatrix} A_{K_1} & A_{K_1K_2} & \cdots & A_{K_1K_k} \\ A_{K_2K_1} & A_{K_2} & \cdots & A_{K_2K_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{K_kK_1} & A_{K_kK_2} & \cdots & A_{K_k} \end{pmatrix},$$

kde $A_{K_iK_j}$ je submatice matice A, jejíž prvky mají řádkové indexy z množiny K_i a sloupcové z K_j (A_{K_i} je zjednodušený zápis pro případ $i = j$):

Let $\Gamma = (V, E)$ be a graph. If there is a path from a vertex j to a vertex l in Γ, we say that j has access to l. … If j has access to l and l has access to j, we say j and l communicate. The communication relation is an equivalence relation, hence we may partition V into equivalence classes, which we will refer to as the (irreducible) classes of Γ.

Given a matrix A, it is well known that there is an ordered partition $\kappa = (K_1, K_2, \ldots, K_k)$ of $\langle n\rangle$ so that each K_i is a class of $G(A)$ and A_κ is block lower triangular. We say that A_κ is in the Frobenius normal form of A. A class K_j is said to be singular if A_{K_j} is singular, and nonsingular otherwise. ([ZM1], str. 256)

Definované třídy tedy odpovídají vrcholům redukovaného grafu $R(A)$, existence cesty (přístupu) z jednoho vrcholu do druhého v rámci téže třídy zajistí v této definici Frobeniova normálního tvaru ireducibilitu jeho diagonálních čtvercových blokových matic. Uvědomme si, že matice je ireducibilní, jestliže uvažovaná relace indukuje jedinou třídu. Singulárním a regulárním vrcholům tak odpovídají singulární a regulární třídy. Je zajímavé, že úroveň „vrcholu" je definována sice stejně, ale i pro regulární „vrchol", a může se tedy rovnat 0.

Zdálo by se, že s vývojem lineární algebry přešli autoři ve třetím tisíciletí k modernější terminologii, symbolice i přístupu. Tato domněnka je však mylná. Naopak, navrátili se o několik desetiletí zpět, použili prostředky, které můžeme nalézt v několika mnohem starších článcích. Mezi desítkami dosud uvedených prací se totiž některé vymykají právě tím, že používají tuto „staronovou" terminologii. Jedná se především o článek Uriela Georga Rothbluma *Algebraic eigenspaces of non-negative matrices* z roku 1975 a dále například o pojednání Hanse Schneidera *The influence of the marked reduced graph of a nonnegative matrix on the Jordan form and related properties: A survey* z roku 1986 či o práci *On the singular graph and Jordan diagram of strictly lower triangular matrices and M-matrices*, kterou roku 1991 publikoval Wenchao Huang. Schneiderova a Huangova práce však místo termínu *(irreducible) class* používají název *strong component*. Pozorný čtenář, který čte i poznámky pod čarou, si možná vzpomene, že Rothblumova publikace je napsána natolik jiným přístupem, že v něm není výšková charakteristika vůbec uvedena.[280] Pro dokumentaci autorova stylu a návratu algebraiků k jím používané terminologii uveďme Rothblumovu verzi tvrzení o rovnosti úrovňové a výškové charakteristiky M-matice v případě, že mají jediný prvek, tj. $\eta(A) = \lambda(A) = (t)$:

[280] Je však například zaveden pojem úrovně vrcholu (třídy), ale místo termínu *level of a class* autor používal názvu *height of a class*, což bylo zcela výjimečné.

COROLLARY 3.4 (...) The index of a square nonnegative matrix is one if and only if no pair of basic classes are comparable (i.e., no basic class has access to any other basic class). ([Ro1], str. 291)

Uvedené práce se věnují především vlastnostem třídy *posléze nezáporných matic* (*eventually nonnegative matrices*)[281] a její podtřídy *polonezáporných matic* (*seminonnegative matrices*).

56 Definice. Čtvercovou matici A nazveme *posléze nezápornou*, jestliže existuje přirozené číslo m takové, že pro všechna přirozená čísla $g \geq m$ je matice A^g nezáporná. Jestliže matice A^m má pouze kladné prvky, nazveme matici A *posléze kladnou.*

Od zmíněného m tedy posléze nezáporná matice „zdědí" všechny spektrální vlastnosti nezáporné matice, které jsme (s omezením se na spektrální poloměr) studovali pomocí M-matic. Obecně však mají posléze nezáporné matice jiné vlastnosti než ty, které zahrnuje Perronova-Frobeniova teorie platná pro nezáporné matice. Existují například ireducibilní posléze nezáporné matice, pro které je spektrální poloměr násobným vlastním číslem. A dokonce i v případě, že je vlastním číslem jednoduchým, odpovídající vlastní vektor nemusí být kladný. V článku *The combinatorial structure of eventually nonnegative matrices* jsou představeny některé spektrální vlastnosti (včetně výškové charakteristiky) a jejich souvislosti s úrovňovou charakteristikou nezáporné matice, které platí i pro posléze nezápornou matici A. Tvrzení jsou však omezena pouze na posléze nezáporné matice, které nemají vlastní číslo 0 nebo jejichž Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu 0 mají řád 1. Za této podmínky se pro posléze nezáporné matice zachovává například vztah majorizace úrovňové charakteristiky Weyrovou charakteristikou příslušnou spektrálnímu poloměru.[282]

57 Věta. *Nechť A je posléze nezáporná matice, jejíž index příslušný vlastnímu číslu 0 je nanejvýš roven 1. Nechť $\eta(\varrho E - A)$ značí Weyrovu charakteristiku matice A příslušnou spektrálnímu poloměru $\varrho = \varrho(A)$ této matice a $\hat{\lambda}(\varrho E - A)$ úrovňovou charakteristiku matice A příslušnou $\varrho(A)$ uspořádanou v nerostoucí posloupnost. Potom*

$$\hat{\lambda}(\varrho E - A) \preceq \eta(\varrho E - A).$$

K definici polonezáporných matic je nutné nejprve zavést pojem *cyklicky h-rozděleného grafu* a *h-cyklické matice.*

58 Definice. Graf nazveme *cyklicky h-rozděleným* (*cyclically h-partite*), existuje-li rozklad množiny jeho vrcholů do h neprázdných množin $V_1, V_2, \ldots, V_h$ takový, že každá hrana grafu vychází pro nějaké i z V_i a směřuje do V_{i+1}, resp. z V_h do V_1.

59 Definice. Matici A nazveme *h-cyklickou* (*h-cyclic*), jestliže $G(A)$ je cyklicky

[281] Tato třída matic byla poprvé představena roku 1978 Friedlandem v práci *On an inverse problem for nonnegative and eventually nonnegative matrices* [Fd1].
[282] Viz [NM1], Corollary 4.2, str. 263.

h-rozděleným grafem.

Pro matici řádu n tedy existuje takový rozklad $\kappa = (V_1, V_2, \dots, V_h)$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, že

$$A_\kappa = \begin{pmatrix} O & A_{V_1V_2} & O & \cdots & O \\ O & O & A_{V_2V_3} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & A_{V_{h-1}V_h} \\ A_{V_hV_1} & O & O & \cdots & O \end{pmatrix}.$$

Nulové matice ležící na diagonále jsou jistě čtvercové.

60 Definice. Nechť A je posléze nezáporná matice ve Frobeniově normálním tvaru. Matici A nazveme *polonezápornou*, jestliže všechny její blokové matice ležící pod diagonálními blokovými maticemi jsou nezáporné a diagonální bloky jsou nejen čtvercové a ireducibilní, ale splňují rovněž podmínku cykličnosti:[283] každá bloková diagonální matice A_{ii} příslušná vrcholu i je nulová matice řádu 1, nebo existuje přirozené číslo h, že A_{ii} je h-cyklická a matici $(A_{ii})^h$ lze pomocí simultánních permutací řádků a sloupců převést na direktní součet h posléze kladných matic.

Pro polonezáporné matice bylo ukázáno, že splňují mnohé spektrální vlastnosti nezáporných matic. Zachovává se například opět vztah majorizace mezi úrovňovou a Weyrovou charakteristikou příslušnou spektrálnímu poloměru.[284]

61 Věta. *Nechť A je polonezáporná matice a $\varrho = \varrho(A)$ je její spektrální poloměr. Dále nechť $\eta(\varrho E - A)$ je Weyrova charakteristika matice A příslušná $\varrho(A)$ a $\hat{\lambda}(\varrho E - A)$ úrovňová charakteristika matice A příslušná $\varrho(A)$ uspořádaná v nerostoucí posloupnost. Potom*

$$\hat{\lambda}(\varrho E - A) \preceq \eta(\varrho E - A).$$

Často jsou studovány vztahy mezi spektrálními vlastnostmi těchto matic a vlastnostmi diagonálních matic jejich Frobeniova normálního tvaru. Za všechny jmenujme problematiku souvislosti mezi exponentem g matice A^g a koeficientem h diagonálních h-cyklických matic. Uvedeme alespoň jednu větu, která je typickým příkladem „výskytu“ Weyrovy charakteristiky v uvažovaných článcích publikovaných po roce 2000 – Weyrova charakteristika a její souvislost s charakteristikami teorie grafů zde není hlavním problémem, prohlubují se však znalosti vztahů s ní úzce souvisejících.[285]

62 Věta. *Nechť A je polonezáporná matice, pro jejíž spektrální poloměr platí vztah $\varrho = \varrho(A) > 0$. Nechť g je přirozené číslo, pro které $A^g \geq 0$ a které je*

[283] Podmínka byla představena v [ZT1], Theorem 5.1, str. 314–315.
[284] Viz [ZM1], Corollary 3.6, str. 263.
[285] Viz [ZM1], Corollary 3.5, str. 263.

nesoudělné se všemi h, pro něž existuje diagonální bloková čtvercová h-cyklická matice A_{ii} *matice* A*. Jestliže pro spektrální poloměr* $\varrho(A_{ii})$ *matice* A_{ii} *platí* $\varrho(A_{ii}) = \varrho(A)$*, potom vrchol i má v redukovaném grafu* $R(\varrho E - A)$ *stejnou úroveň jako v redukovaném grafu* $R(\varrho^g E - A^g)$*.*

Tvrzení se omezuje jen na některé vrcholy. Častou náplní článků je rozdělování množiny vrcholů stejné úrovně na dvě ne nutně neprázdné množiny (*upper level set* a *lower level set*) podle kritéria, zda se spektrální poloměr diagonální čtvercové matice příslušné vrcholu rovná či nerovná spektrálnímu poloměru matice A. Rovněž toto dělení vrcholů (tříd) lze nalézt již v Rothblumově práci z roku 1975; v jeho terminologii se jedná o množiny nazvané *hlavní třída* (*basic class*) a *vedlejší třída* (*nonbasic class*), které jsou však zavedeny pouze pro nezáporné matice.[286] Ukazuje se, že některé vztahy, které neplatí pro celou matici, jsou zachovány alespoň pro jednu z množin.

Termíny *basic class* a *nonbasis class* (definované pro nezáporné matice)[287] používá práce Bit-Shun Tama *A cone-theoretic approach to the spectral theory of positive linear operators: the finite-dimensional case* z roku 2001. Na Rothbluma se autor přímo odvolal:

The concept of a class was due to Rothblum [...]. We mainly follow his terminology, but sometimes we also borrow from Schneider [...].[288]
([Tm2], online verze, str. 16)

Tamova obsáhlá publikace je prací přehledovou, přináší řadu údajů o relativně mladé historii několika odvětví lineární algebry. Z hlediska vlastností úrovňové a výškové charakteristiky příliš mnoho nových významných výsledků nepřinesla. Stala se však jakousi předzvěstí (např. používanými termíny, novými definicemi již známých pojmů atd.) Tamovy o tři roky mladší práce *The Perron generalized eigenspace and the spectral cone of a cone-preserving map*, která již důležité a ucelené závěry bádání obsahuje. Tento více než padesátistránkový článek z roku 2004 je opět psán řečí tříd, důležité pojmy (např. úrovňovou a výškovou charakteristiku) studuje pro spektrální poloměr nezáporných matic, přičemž nepoužívá ekvivalentních vyjádření pro M-matice, jak bylo zvykem v minulém století.

Z používané terminologie a přístupu je zřejmé, že se autor kromě Rothbluma značně inspiroval také Schneiderovým pojednáním *The influence of the marked reduced graph of a nonnegative matrix on the Jordan form and related properties: A survey* z roku 1986. Bit-Shun Tam například používal pro Ferrersův diagram označení diagram Jordanův. Takřka totožnou definici Jordanova grafu nalezneme ve zmíněném Schneiderově článku. Odstavce obsahující definici tohoto schématu psané Hansem Schneiderem a partie sepsané téměř o dvacet let později Bit-Shun Tamem mají i dále ve velmi podobném znění. V obou textech totiž po zmíněném zavedení Jordanova (Ferrersova) diagramu následuje definice

[286] Viz [Ro1], str. 283.
[287] Uvědomme si, že pro nezápornou matici A z jejího Frobeniova normálního tvaru plyne, že počet hlavních tříd je roven algebraické násobnosti spektrálního poloměru jakožto vlastního čísla matice A a také dimenzi $\mathrm{GKer}\,(\varrho(A)E - A)$.
[288] Vedle Rothblumovy práce [Ro1] je myšlen Schneiderův článek [Sc3].

Weyrovy charakteristiky matice A, která je zavedena jako posloupnost délek – co se počtu teček týče – řádků tohoto diagramu. V Tamově publikaci je navíc na uvažovaném místě zdůrazněno, že Weyrovu charakteristiku lze definovat jako duální posloupnost k Segreově posloupnosti.[289]

Náplní práce je studium vektorového prostoru $\mathrm{GKer}\,(A - \varrho(A)E)$, který je definován pouze pro $A \in \mathcal{P}(K)$ (vysvětlení viz dále) a který je nazván *Perron generalized eigenspace*,[290] dále (mnohostranným) kuželům v prostoru $\mathbb{R}^n$, spektrálním kuželům či zobrazením (maticím), které kužel zachovávají. Mezi maticí a jí příslušným homomorfismem se v práci příliš nerozlišuje:

We use the terms "matrix" and "linear mapping" interchangeably. ([Tm3], str. 379)

Dva paragrafy (z celkových devíti) jsou věnovány rozšíření studia ekvivalentních podmínek rovnosti úrovňové charakteristiky, která je však zavedena novým způsobem, a Weyrovy charakteristiky nezáporné matice A (příslušné spektrálnímu poloměru $\varrho(A)$) pro kužel zachovávající zobrazení a také problematice majorizace dvou zmíněných charakteristik pro lineární zobrazení zachovávající mnohostěnný vlastní kužel.

Konkrétněji publikaci představují slova z jejího abstraktu (nové pojmy, které jsou v něm obsaženy a které je nutné znát pro další výklad, budou vysvětleny v následujících odstavcích):

A unified treatment is offered to reprove known results on the following four highlights of the combinatorial spectral theory of nonnegative matrices, or to extend (or partly extend) the results to the setting of a linear map preserving a polyhedral proper (or proper) cone: the preferred-basis theorem, equivalent conditions for equality of the (graph-theoretic) level characteristic and the (spectral) height characteristic, the majorization relation between the two characteristics, and the relation between the combinatorial properties of a nonnegative matrix and the positivity of the individual entries in its principal components. This is achieved by employing the new concept of spectral cone of a cone-preserving map ... ([Tm3], str. 375)

63 Definice. *Kuželem* rozumíme neprázdnou podmnožinu K vektorového, konečně dimenzionálního prostoru V nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$, která je uzavřena na násobení vektorů z K kladnými skaláry z $\mathbb{R}$, tj. pro všechny vektory $v \in K$ a kladné skaláry $a \in \mathbb{R}$ je $av \in K$. Kužel se nazývá *ostrý*, jestliže $K \cap (-K) = \{0\}$, *konvexní*, jestliže pro všechny vektory $v, w \in K$ a nezáporné skaláry $a, b \in \mathbb{R}$ náleží tomuto kuželu i vektor $av + bw$, *plný*, jestliže $\mathrm{int}\, K \neq \emptyset$, kde $\mathrm{int}\, K$ značí největší otevřenou podmnožinu K, *uzavřený*, je-li uzavřený vzhledem k běžné topologii. Kužel, který je současně ostrý, konvexní, plný a uzavřený, se nazývá *vlastní*.

[289] Stačí porovnat odstavce v [Sc3], str. 172, a [Tm3], str. 381.

[290] Zároveň je upozorněno, že v případě nezáporných matic jiní autoři tento vektorový prostor nazývají též *Perron eigenspace* či *algebraic eigenspace*.

64 Věta. Nechť K je vlastní kužel v $\mathbb{R}^n$ a nechť symbol $\mathcal{P}(K)$ značí množinu všech reálných čtvercových matic A řádu n, pro které $AK \subseteq K$. Matice z množiny $\mathcal{P}(K)$ se nazývají *kužel-zachovávající zobrazení na K* (*cone-preserving maps on K*).

Symbolem K budeme v této části dále značit vlastní kužel v $\mathbb{R}^n$ pro nějaké přirozené číslo n.

65 Definice. Nechť symbol $\geq^K$ značí relaci částečného uspořádání na množině $\mathbb{R}^n$ indukovanou kuželem K, tj. $y \geq^K x$, právě když $y - x \in K$. Nechť relační vztah $x >^K o$ značí současně $x \geq^K o$ a $x \neq o$. Vektor x, pro který platí vztah $x >^K o$, se nazývá *K-polokladný* (*K-semipositive*) a podmnožina (báze) $\mathbb{R}^n$ obsahující pouze K-polokladné vektory se nazývá *K-polokladná.*

66 Definice. Neprázdná podmnožina F vlastního kužele K se nazývá *čelo kužele K* (*face of a cone K*),[291] jestliže F je podkuželem kuželu K a navíc splňuje následující podmínku:

$$(y \geq^K x \geq^K o \quad \wedge \quad y \in F) \quad \Rightarrow \quad x \in F.$$

Uvažujme podmnožinu S kužele K a množinu všech čel kužele K obsahující množinu S. Průnik všech těchto čel je opět čelo kužele K, který budeme značit $\Phi(S)$. Pro $x \in K$ budeme zjednodušeně psát $\Phi(x)$ místo $\Phi(\{x\})$.

67 Definice. Nechť K je vlastní kužel a $x \in K$. Jestliže je vektor x nenulový a $\Phi(x) = \{ax;\ a \geq 0\}$ ($\dim \Phi(x) = 1$), potom čelo $\Phi(x)$ nazýváme *extrémním paprskem* (*extreme ray*). Vlastní kužel, který má konečně mnoho extrémních paprsků, se nazývá *mnohostěnný* (*polyhedral*).[292]

K vyvození podmínek, za kterých se rovná úrovňová charakteristika a Weyrova charakteristika příslušná spektrálnímu poloměru pro kužel-zachovávající matici A, nalezl Bit-Shun Tam nejprve odpovídající pojmy definované novým způsobem.

Nechť K je vlastní kužel a t značí index matice $A-\varrho(A)E$. Potom úrovňovou charakteristiku $\lambda(A)$ definoval autor jako t-tici $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t)$, jejíž prvky λ_k jsou dány vztahy

$$\lambda_1 = \dim [\mathrm{Ker}\,(A - \varrho(A)E) \cap K]$$

a pro $k = 2, 3, \ldots, t$

$$\lambda_k = \dim \left[\mathrm{Ker}\,(A - \varrho(A)E)^k \cap K\right] - \dim \left[\mathrm{Ker}\,(A - \varrho(A)E)^{k-1} \cap K\right],$$

[291] První definice pojmu *face of a cone* pochází od Hanse Schneidera.

[292] Pro zjednodušenou představu mnohostěnného kužele uveďme, že kužel je mnohostěnný, právě když je průnikem konečného počtu poloprostorů. Tento poznatek je uveden například v článku *Theory of cones* (Theorem 1.6, str. 266; Linear Algebra and its Applications 39(1981), 263–291) autora Georga Phillipa Barkera, který problematice kuželů zasvětil značnou část své odborné práce. Seznam další literatury věnované mnohostranným kuželům může čtenář nalézt v tomtéž článku na str. 266.

kde hranaté závorky značí lineární obal množiny vektorů. Je známo, že pro nezáporné matice takto formulovaná definice splývá s obvyklou definicí úrovňové charakteristiky.

Weyrova charakteristika příslušná spektrálnímu poloměru $\varrho(A)$ je nejprve definována jako duální posloupnost k Segreově charakteristice příslušné spektrálnímu polomětu $\varrho(A)$, ihned poté jsou však členy η_k Weyrovy charakteristiky vysvětleny pomocí obvyklých rozdílů dimenzí:

$$\eta_k = \dim \operatorname{Ker}(A - \varrho(A)E)^k - \dim \operatorname{Ker}(A - \varrho(A)E)^{k-1}.$$

Rovněž je pro ně uveden vztah

$$\eta_k = \dim(A - \varrho(A)E)^{k-1} \operatorname{Ker}(A - \varrho(A)E)^k,$$

který je velmi podobný rovnosti, kterou jsou zavedeny prvky nové posloupnosti:

68 Definice. Nechť K je vlastní kužel v $\mathbb{R}^n$ a $A \in \mathcal{P}(K)$. Potom *vrcholovou charakteristikou* $\zeta(A)$ *matice* A rozumíme t-tici $\zeta(A) = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_t)$, kde

$$\zeta_k = \dim(A - \varrho(A)E)^{k-1}(\operatorname{Ker}(A - \varrho(A)E)^k \cap K), \quad k = 1, 2, \ldots, t.$$

Evidentně je vždy $\zeta_k \le \eta_k$, $k = 1, 2, \ldots, t$, lze dokázat, že i $\zeta_k \le \lambda_k$, pro $k = 1, 2, \ldots, t$.

Výška vektoru je definována způsobem analogickým tomu, který byl použit v publikacích v předcházejícím století. Avšak byl zaveden pouze pro matici $A \in \mathcal{P}(K)$ a pro spektrální poloměr, tj. výška vektoru $v \in \operatorname{Ker}(A - \varrho(A)E)^n$, $A \in \mathcal{P}(K)$, je nejmenší přirozené číslo, pro které $(A - \varrho(A)E)^k v = o$. Rovněž vrcholový vektor a úroveň vektoru je definována obdobně (k určení úrovně třídy však počítáme maximální počet hlavních tříd a ne počet singulárních vrcholů na všech „cestách“, které končí v této třídě). Oba jmenované pojmy jsou zavedeny pouze pro nezáporné matice. Také pojmy úrovňová, výšková a výškovo-úrovňová báze jsou definovány analogicky. Nejinak je tomu u Jordanova řetízku matice $A \in \mathcal{P}(K)$, který je definován pro spektrální poloměr $\varrho(A)$ jako posloupnost k nenulových vektorů

$$x,\ (A - \varrho(A)E)x, \ldots,\ (A - \varrho(A)E)^{k-1}x$$

takových, že $(A - \varrho(A)E)^k x = 0$. Jordanova báze prostoru $\operatorname{Ker}(A - \varrho(A)E)^n$ je báze tohoto prostoru složená z Jordanových řetízků.[293]

69 Definice. Nechť K je vlastní kužel, $A \in \mathcal{P}(K)$. *Spektrálním kuželem matice* A (*pro kužel* K *a příslušný spektrální poloměr* $\varrho(A)$) nazveme množinu

$$C(A, K) = \left\{ v \in K,\ (A - \varrho(A)E)^j v \in K \text{ pro všechna přirozená čísla } j \right\}.$$

[293] Je zajímavé, že báze tohoto prostoru je svým názvem opět přiřazena celé matici, originální termín Bit-Shun Tama zní *Jordan basis for A*. Viz [Tm3], str. 381.

Nyní uvedeme pět podmínek ekvivalentních rovnosti úrovňové a výškové charakteristiky kužel-zachovávající matice A. Jsou analogií třiceti pěti podmínek formulovaných v roce 1991 Hansem Schneiderem a Danielem Hershkowitzem pro M-matice.[294]

70 Věta. *Nechť K je vlastní kužel, $A \in \mathcal{P}(K)$ a nechť t značí řád největší Jordanovy buňky příslušné spektrálnímu poloměru $\varrho(A)$. Uvažujme následující podmínky:*

(i) $\eta(A) = \lambda(A)$,

(ii) $\eta(A) = \zeta(A)$,

(iii) *každý vektor z* $Ker\,(A - \varrho(A)E)^n$ *je vrcholový,*

(iv) $\mathrm{Ker}\,(A - \varrho(A)E)^k$ *obsahuje K-polokladnou bázi pro každé* $k = 1, 2, \ldots, t$,

(v) *existuje K-polokladná výšková báze* $Ker\,(A - \varrho(A)E)^n$,

(vi) *existuje K-polokladná výškovo-úrovňová báze* $Ker\,((A - \varrho(A)E)^n)$,

(vii) *existuje K-polokladná Jordanova báze* $Ker\,(A - \varrho(A)E)^n$,

(viii) $\mathrm{Ker}\,(A - \varrho(A)E)^k \cap C(A, K)$ je plný kužel v $\mathrm{Ker}\,(A - \varrho(A)E)^k$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, t$,

(ix) $\eta_k = \dim\,(A - \varrho(A)E)^{k-1}[\mathrm{Ker}\,(A - \varrho(A)E)^k \cap C(A, K)]$ *pro každé* $k = 1, 2, \ldots, t$.

Podmínky (i)–(vi) *jsou navzájem ekvivalentní. Rovněž podmínky* (vii)–(ix) *jsou navzájem ekvivalentní. Navíc z podmínky* (vii) *plyne podmínka* (i). *Jestliže je navíc kužel K mnohostěnný, jsou všechny uvedené podmínky* (i)–(ix) *navzájem ekvivalentní.*

Zabývejme se nyní otázkou, zda i pro kužel-zachovávající matice existuje vztah majorizace mezi úrovňovou a výškovou charakteristikou.[295] Bit-Shun Tam přitom v definici majorizace připouští možnost přidání nul ke kratší ze dvou posloupností.

71 Věta. *Nechť K je mnohostěnný vlastní kužel a $A \in \mathcal{P}(K)$. Potom*

$$\hat{\lambda}(A) \preceq \eta(A).$$

Zdůrazněme, že požadavek mnohostěnnosti kužele je nutný. Pokud bychom chtěli zachovat platnost vztahu pro kužel, který je pouze vlastní, museli bychom dodat další dvě podmínky.[296]

[294] Viz [Tm3], Theorem 5.9, str. 407. Některé z podmínek však byly Bit-Shun Tamovi známy již roku 2001.

[295] Viz [Tm3], Theorem 7.2, str. 419.

[296] Zájemce o tyto podmínky odkazujeme na Remark 7.5 na str. 420 práce [Tm3].

5.5 Určenost Weyrovy charakteristiky vzorovou maticí

Nulová vzorová matice (*zero pattern matrix*, též jen *zero pattern*) je matice, jejíž prvky náležejí množině $\{0, *\}$, *znaménková vzorová matice* (*sign pattern matrix*; též pouze *sign pattern*) je maticí, která obsahuje pouze prvky z množiny $\{0, +, -\}$. Každé matici nad libovolným polem $\mathcal{F}$ můžeme jednoznačně přiřadit nulovou vzorovou matici, nahradíme-li její nenulové prvky hvězdičkami, a každé reálné matici jedinou znaménkovou vzorovou matici, kterou obdržíme záměnou kladných prvků plusy a záporných prvků minusy.

Uvažujme matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d jsou libovolná kladná čísla. Jim příslušné nulové vzorové matice jsou

$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B_N = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a znaménkové vzorové matice

$$A_Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B_Z = \begin{pmatrix} 0 & + & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weyrova charakteristika příslušná vlastnímu číslu 0 matice A je $\eta(A) = (1,\, 1,\, 1)$. Jsme schopni ji určit i bez bez znalosti konkrétních hodnot parametrů a, b, c, d a dokonce pouze na základě znalosti nulovosti či nenulovosti jejích prvků, tj. z její nulové vzorové matice A_N. Při určování Weyrovy charakteristiky příslušné vlastnímu číslu 0 matice B zjistíme, že charakteristika záleží na hodnotách parametrů a, b, c, d. Je-li $a/c = b/d$, je $\eta(B) = (3,\, 1)$, není-li $a/c = b/d$, je $\eta(B) = (2,\, 2)$. Weyrovu charakteristiku $\eta(B)$ tedy z nulové vzorové matice B_N neurčíme a nenalezneme ji ani s pomocí znaménkové vzorové matice B_Z, protože musíme znát vztah poměrů a/c, b/d parametrů a, b, c, d.

Problematika stanovení Weyrovy charakteristiky jejími vzorovými maticemi je obsažena v práci

- *Ranks of zero patterns and sign patterns* [HS7],

kterou roku 1993 publikovali Hershkowitz a Schneider, a v článku *Paths in directed graphs and spectral properties of matrices*, který roku 1994 publikoval Hershkowitz a který již byl zmíněn v minulém paragrafu.[297] Druhá z jmeno-

[297] Článek [HS7] obsahuje pouze termín výšková charakteristika, práce [He5] zmiňuje jednou termín Weyrova charakteristika, jinak používá termínu výšková charakteristika. V obou případech je pojmem výšková charakteristika (bez dalšího zpřesnění) myšlena Weyrova charakteristika příslušná vlastnímu číslu 0.

Práce [HS7] několikrát zmiňuje (i v seznamu literatury) článek K. Čulíka [Ci1].

vaných publikací má uvedenou problematiku jako hlavní náplň. Studuje souvislosti hodnosti matice a tvaru její nulové vzorové matice, hodnosti matice a tvaru její znaménkové vzorové matice, hodnosti mocnin A^k, $k \in \mathbb{N}$, a tvaru nulové vzorové matice A_N matice A. Odsud je vyvozena věta podávající postačující podmínky, za kterých mají čtvercové matice s totožnou nulovou vzorovou maticí stejnou výškovou charakteristiku:[298]

Nechť $\mathcal{F}$ je pole alespoň o třech prvcích a nechť P je čtvercová nulová vzorová matice řádu n, jejíž graf $G(P)$ splňuje následující podmínku: jestliže z orientovaného grafu $G(P)$ dostaneme odstraněním šipek na hranách graf neorientovaný, vznikne graf neobsahující cyklus (výskyt smyček je povolen).[299] Potom všechny matice nad $\mathcal{F}$, kterým přísluší nulová vzorová matice P, mají tutéž výškovou charakteristiku.

Uvědomme si nyní dodatečně, že v případech, v nichž mají diagonální čtvercové matice Frobeniova normálního tvaru řád 1 a 2, jsme úrovňovou charakteristiku matice schopni určit pouze na základě nulové (tedy i znaménkové) vzorové matice. Pro jisté matice jsme tedy mohli problematiku předešlého odstavce, zvláště pojmy definované pro graf $G(A)$ matice A a nikoliv pro její redukovaný graf $R(A)$, studovat pouze na základě příslušné nulové vzorové matice A_N.

5.6 Reakce na Weyrovy výsledky v období 1980 až 1999

Vraťme se nyní zpět do osmdesátých let 20. století a pokračujme v představování dalších reakcí jednotlivých autorů na výsledky Eduarda Weyra. V této době docházelo k odklonění od čistě algebraické interpretace Weyrovy charakteristiky, případně k „roztříštění“ této problematiky do poměrně úzce zaměřených oblastí. Weyrova charakteristika se tak v jednotlivých pracích objevuje vedle natolik speciálních pojmů jako jsou například *Hopf algebras*, *feedback set of (A, B)*, *Brunovsky numbers* atd. Není proto možné čtenáře detailně seznámit s konkrétními výsledky řady prací, resp. s postavením Weyrových výsledků v jednotlivých disciplínách, neboť každá z uvažovaných problematik předpokládá rozsáhlé studium. U nejčastěji studovaných oblastí však jejich základní podstatu načrtneme.

V roce 1980 publikoval Wolfgang Brandenbusch v krátké poznámce

• *Die Anzahl linear unabhängiger Matrizen X, die mit einer bestimmten Matrix A kommutieren, ausgedrückt in den Weyrschen Charakteristiken* [Bb1]

velmi jednoduchý vztah mezi počtem lineárně nezávislých matic, které komutují s danou čtvercovou maticí A nad libovolným polem $\mathcal{F}$, a její Weyrovou charakteristikou. Tento poznatek využila o pět let později María Asunción Beitia v článku

• *Matrices which commute with a given matrix upon a subspace* [Bt1].

Uveďme důležité tvrzení z této práce, v němž $C(A)$ značí množinu všech čtvercových matic X nad libovolným polem $\mathcal{F}$, které komutují s maticí A:

[298] Viz [HS7], Theorem 6.15, str. 19.

[299] V textu [HS7] je tento typ grafu nazván *strongly triangular graph*, obdobným termínem *triangular graph* je myšlen orientovaný graf bez cyklů (smyčky jsou povoleny).

In terms of the Weyr characteristic of the matrix A:

$$[(m_{11},\, m_{12},\, \ldots,\, m_{1t_1}),\ \ldots,\ (m_{r1},\, m_{r2},\, \ldots,\, m_{rt_r})]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dim C(A) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{t_k} m_{ki}^2.$$

([Bt1], str. 168)

Počet lineárně nezávislých matic komutujících s danou maticí, který určil Brandenbusch, je tedy roven součtu čtverců všech charakteristických čísel příslušných všem různým vlastním číslům matice A.

Jak uvidíme dále, María Asunción Beitia využila Weyrovu charakteristiku ve více svých textech, na řadě z nich spolupracoval Ion Zaballa. Ten roku 1983, ještě samostatně, napsal článek

• *Inequalities for the Weyr characteristic of modules* [Za1].

V témže roce publikoval německý matematik Max Koecher (1924–1990) knihu

• *Lineare Algebra und analytische Geometrie* [Ke1].

V ní citoval Frobeniovu práci *Über den Rang einer Matrix*, ve které, jak bylo výše napsáno, byl Weyr často citován. Koecher zmínil tzv. *Weyrovy-Frobeniovy nerovnosti*, což je název pro meze nulity součinu dvou matic.

Na Weyrovy výsledky zareagovala i řecká škola, konkrétně Nicos Karcanias, Grigoris Kalogeropoulos a Panayiotis J. Psarrakos.[300] Tito matematikové publikovali během takřka dvaceti let následující čtyři články, které na sebe postupně odkazují. Nejprve v roce 1986 napsali Nicos Karcanias a Grigoris Kalogeropoulos práci

• *On the Segré, Weyr characteristics of right (left) regular pencils* [KK1],

o rok později publikoval Karcanias text

• *On the characteristic, Weyr sequences, the Kronecker invariants and canonical form of a singular pencil* [Ka1].

V roce 1995 vyšla práce

• *The prime and generalized nullspaces of right regular pencils* [KK2],

na níž se opět podílela autorská dvojice Karcanias – Kalogeropoulos, na článku

• *On the computation of the Jordan canonical form of regular matrix polynomials* [KPK1]

z roku 2004 spolupracovali všichni tři jmenovaní. Zjednodušeně lze říci, že se uvedené práce zabývají rozšířením problematiky Segreovy a Weyrovy charakteristiky, které jsou přirozeně přidružené k mnohokrát studovanému svazku matic $A-sE$ (resp. $sE-A$), na obecnější svazky matic, např. na svazek matic $sF-G$, kde matice F a G nemusí být čtvercové.

Právě toto zobecnění na svazek matic je jedním z výrazných proudů studia Weyrovy charakteristiky na přelomu 20. a 21. století.

[300] První jmenovaný působí v Londýně, další dva v Aténách.

V pojednání

• *Extensions of Jordan bases for invariant subspaces of a matrix* [BRS1]

z roku 1991 využili Rafael Bru, Leiba Rodman[301] (nar. 1949) a Hans Schneider Weyrovu charakteristiku k alternativnímu vyjádření vlastnosti nilpotentní matice, k němuž dospěli v jiné terminologii:

Nechť A je nilpotentní matice, $\mathcal{R}(A)$ značí množinu všech lineárních kombinací jejích sloupců a t je řád její největší Jordanovy buňky. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\operatorname{Ker}(A^{t-1}) \subset \mathcal{R}(A)$,

(ii) *pro členy Weyrovy charakteristiky* $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$ *platí* $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_t$,

(iii) *řády všech Jordanových buněk jsou stejné (rovny t).*

Jedná se tedy o nilpotentní matici, jejíž Ferrersův diagram je tvořen tečkami seskupenými do obdélníku.

V roce 1989 vyšla v časopisu Linear Algebra and its Applications práce

• *Perturbation of linear control systems* [GHZ1],

kterou publikovali matematikové působící na univerzitě Universidad del País Vasco: Juan Miguel Gracia, Inmaculada de Hoyos a již zmíněný Ion Zaballa. V ní je Weyrova charakteristika jedním z klíčových pojmů.[302] Jmenovaní matematikové později publikovali větší počet článků s obdobnou tématikou, tento kolektiv autorů rozšířila Beitia, později také Francisco Enrique Velasco. I ti patří do kolektivu matematiků uvažované univerzity.

Například v roce 1994 vyšly (opět v časopisu Linear Algebra and its Applications) články

• *Invariants of the block tensor product* [BZ1],

který napsali María Asunción Beitia a Ion Zaballa,

• *Local behavior of Sylvester matrix equations related to block similarity* [BG1],

který publikovali Maria Asunción Beitia a Juan Miguel Gracia, a

• *Similarity and block similarity* [Za2]

Iona Zabally.

Uveďme, že z odkazů a rovněž z korespondence s autorkou disertační práce[303] vyplynulo, že španělská škola čerpala základní poznatky o Weyrově charakteristice především ze španělského vydání již zmíněné Mal'cevovy knihy *Osnovy linejnoj algebry.*

Náplň posledních čtyř jmenovaných článků je dalším výrazným směrem, kterým se ubíralo studium problematiky využívající Weyrovu charakteristiku. Udělejme si proto alespoň přibližnou představu o jejich tématice z následujících definic a tvrzení. Uvedené termíny se navíc vyskytují v názvech článků publikovaných mnohem později. Jak uvidíme, jedná se o celou řadu prací, které studují problematiku úzce spojenou s teorií řízení.

[301] Leiba Rodman je americký matematik, který se narodil v Litvě.

[302] Zdůrazněme, že se ve třicetistránkovém textu termín Weyrova charakteristika vyskytuje více než čtyřicetkrát.

[303] Viz dále.

Nechť $A = (a_{ij})$ je komplexní matice typu $n \times m$ a B je komplexní matice typu $p \times q$. Potom *Kroneckerovým součinem* matic A a B, který budeme značit $A \otimes B$, rozumíme matici

$$A \otimes B = (a_{ij}B)$$

typu $np \times mq$.

Nechť $\mathcal{F}$ je libovolné pole, $A \in \mathcal{F}^{n\times n}$ a $B \in \mathcal{F}^{n\times m}$. Pro uspořádanou dvojici matic A a B budeme symbolem $(A,\, B)$ přirozeně rozumět jak podmnožinu kartézského součinu $\mathcal{F}^{n\times n} \times \mathcal{F}^{n\times m}$, tak matici typu $n \times (n+m)$, jejíž jediný řádek bloků je tvořen dvěma bloky A a B (v tomto pořadí). Zcela analogicky budeme vnímat obdobný symbol s trojicí matic atd.

Nechť $\mathcal{F}$ je libovolné pole a nechť dále

$$(A_1, B_1) \in \mathcal{F}^{n_1\times n_1} \times \mathcal{F}^{n_1\times m_1}, \quad (A_2, B_2) \in \mathcal{F}^{n_2\times n_2} \times \mathcal{F}^{n_2\times m_2}.$$

Potom *blokovým Kroneckerovým součinem* matic $(A_1,\, B_1)$ a $(A_2,\, B_2)$, který budeme značit $(A_1, B_1) \otimes^b (A_2, B_2)$, rozumíme matici

$$(A_1 \otimes A_2,\, (A_1 \otimes B_2,\, B_1 \otimes A_2,\, B_1 \otimes B_2)) \\ \in \mathcal{F}^{n_1n_2\times n_1n_2} \times \mathcal{F}^{n_1n_2\times(n_1m_2+m_1n_2+m_1m_2)}.$$

Takto zavedený součin dvou dvojic matic je velmi výhodný, zachovává totiž tzv. blokovou podobnost.[304]

Nechť $(A,\, B)$ a $(\bar{A},\, \bar{B}) \in \mathcal{F}^{n\times n} \times \mathcal{F}^{n\times m}$. Říkáme, že tyto dvojice matic jsou *blokově podobné*, jestliže existují invertibilní matice $P \in \mathcal{F}^{n\times n}$ a $Q \in \mathcal{F}^{m\times m}$ a dále matice $R \in \mathcal{F}^{m\times n}$, pro které

$$P^{-1}(\bar{A},\, \bar{B}) \begin{pmatrix} P & O \\ R & Q \end{pmatrix} = (A,\, B).$$

Vedle termínu *blokově podobné* (*block similar*) se pro tento vztah často užívá též název *zpětnovazebně ekvivalentní* (*feedback equivalent*). Právě pod tímto termínem byl pojem poprvé zaveden v literatuře, konkrétně v článku *A classification of linear controllable systems* [Bu1] z roku 1970. Jedná se o často citovanou práci z teorie řízení, kterou publikoval slovenský matematik Pavol Brunovský (nar. 1934) v časopisu Kybernetika.[305]

---

304 Citujme zajímavé vyjádření k definici součinu dvojice matic:

Given two such matrices $[A_1,\, B_1]$, $[A_2,\, B_2] \in \mathcal{F}^{n\times(n+m)}$, we can form the Kronecker or direct product of them, $[A_1,\, B_1] \otimes [A_2,\, B_2]$. Of course this matrix is rectangular with more columns than rows, but in general there is not a pair of matrices associated to this matrix that can be easily identified in terms of the components A_1, A_2, B_1, and B_2. For instance,

$$[A_1,\, B_1] \otimes [A_2,\, B_2] \neq [A_1 \otimes A_2,\, A_1 \otimes B_2,\, B_1 \otimes A_2,\, B_1 \otimes B_2],$$

althought these two matrices are permutationally similar. However, the equality between these two matrices seems to be what one wants for such a product. We will show that this must be the appropriate definition of the direct product of matrix pairs. ([BZ1], str. 590)

305 Práce [Bu1] používá rovněž zkrácený termín *F-equivalent*, článek [GHZ1] *Γ-equivalent.*

Uveďme jinou, pro někoho možná průhlednější definici blokové podobnosti převzatou z reference článku [BG1], kterou napsal Leiba Rodman pro Zentralblatt (Zbl 0797.15011):

Relace blokové podobnosti dvojic matic je relací ekvivalence. Formulujme již zmíněnou vlastnost součinu $\otimes^b$:

Nechť (A_1, B_1) *a* $(\bar{A}_1, \bar{B}_1) \in \mathcal{F}^{n_1 \times n_1} \times \mathcal{F}^{n_1 \times m_1}$ *jsou blokově podobné dvojice matic a nechť také* (A_2, B_2) *a* $(\bar{A}_2, \bar{B}_2) \in \mathcal{F}^{n_2 \times n_2} \times \mathcal{F}^{n_2 \times m_2}$ *jsou blokově podobné dvojice matic. Potom také matice*

$$(A_1, B_1) \otimes^b (A_2, B_2) \quad \text{a} \quad (\bar{A}_1, \bar{B}_1) \otimes^b (\bar{A}_2, \bar{B}_2)$$

jsou blokově podobné.

Nechť $(A, B) \in \mathcal{F}^{n \times n} \times \mathcal{F}^{n \times m}$. Potom *r-čísly* nebo též *Brunovského čísly*[306] dvojice matic (A, B) jsou čísla $r_1, r_2, \ldots, r_n$ definovaná pomocí hodností vztahy

$$\begin{aligned} r_1 &= r(B), \\ r_i &= r(S_{i-1}(A, B)) - r(S_{i-2}(A, B)), \qquad i = 2, 3, \ldots, n, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} S_i(A, B) &= (B, AB, A^2B, \ldots, A^iB), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ S_0(A, B) &= B. \end{aligned}$$

Lze dokázat, že

$$m \geq r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_n \geq 0.$$

Prvky duální posloupnosti $(k_1, k_2, \ldots)$ k posloupnosti $(r_1, r_2, \ldots)$ Brunovského čísel jsou tzv. *indexy řiditelnosti* (*controllability indices*).

Dvojice matic (A, B) je tzv. *řiditelná* (též *plně řiditelná*), právě když

$$r\left(S_{n-1}(A, B)\right) = n.$$

Matice

$$S_{n-1}(A, B) = (B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B) \in \mathcal{F}^{n \times nm}$$

je nazývána *matice řiditelnosti* dvojice matic (A, B). Dvojice matic (A, B) je tedy *řiditelná*, právě když má její matice řiditelnosti hodnost n (její řádky jsou lineárně nezávislé vektory).

Two rectangular block complex matrices $[A, B]$ *and* $[A', B']$*, where* A *and* A' *are* $n \times n$ *and* B *and* B' *are* $n \times m$*, are called block similar if* $[AX + BY, BZ] = [XA', XB']$ *for some matrices* X, Y, Z *with invertible* X a Z.

Někomu bude možná ještě bližší následující možnost zavedení blokové podobnosti dvojic matic. Jedná se o způsob z uvedených nejstarší; následující úryvek je ze zmíněné Brunovského práce [Bu1] z roku 1970:

... the question ... asks, whether for given systems $\langle A, B \rangle$, $\langle A', B' \rangle$ *there are matrices* $C(m \times n)$, $Q(m \times n)$, $D(m \times m)$, C, D *being nonsingular, such that*

$$A' = C^{-1}(A + BQ)C, \qquad B' = C^{-1}BD. \tag{3}$$

If the answer is positive, we shall say that $\langle A, B \rangle$ *and* $\langle A', B' \rangle$ *are feedback (or, briefly, F-) equivalent.* ([Bu1], str. 174)

V hlavním textu jsme použili definici dle matematiků, jejichž práce právě rozebíráme.

[306] Tato čísla byla poprvé zavedena ve zmíněném Brunovského článku [Bu1].

Vzhledem k platnosti vztahu

$$r\left(S_{i-1}(A,\,B)\right) = r_i + r\left(S_{i-2}(A,\,B)\right), \qquad i = 2,\,3,\,\ldots,\,n,$$

lze podmínku

$$r\left(S_{n-1}(A,\,B)\right) = n$$

nahradit rovností

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = n.$$

Nechť je dále $\mathcal{F}$ polem komplexních čísel, tj. $\mathcal{F} = \mathbb{C}$. Rozšiřme dobře známé pojmy pro čtvercovou matici na dvojici matic, která není řiditelná.

Nechť $(A,\,B)$ není řiditelná. Potom se komplexní číslo λ nazývá *vlastní číslo dvojice matic* $(A,\,B)$, jestliže existuje nenulový vektor $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ takový, že $B^T x = o$ a $A^T x = \lambda x$.

Nechť λ je vlastní číslo dvojice matic $(A,\,B) \in \mathcal{F}^{n\times n} \times \mathcal{F}^{n\times m}$. Potom posloupnost čísel $\eta(\lambda) = (\eta_1,\,\eta_2,\,\ldots)$, která splňují rovnosti

$$\sum_{i=1}^{k} \eta_i = n - r\left((\lambda E - A)^k,\,B,\,AB,\,\ldots,\,A^{k-1}B\right), \quad k = 1,\,2,\,\ldots,$$

se nazývá *Weyrova charakteristika dvojice matic* $(A,\,B)$ *příslušná vlastnímu číslu* λ.

Pro její prvky η_i tedy platí:

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= n - r\left((\lambda E - A),\,B\right),\\
\eta_2 &= r\left((\lambda E - A),\,B\right) - r\left((\lambda E - A)^2,\,B,\,AB\right),\\
\eta_3 &= r\left((\lambda E - A)^2,\,B,\,AB\right) - r\left((\lambda E - A)^3,\,B,\,AB,\,A^2B\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\eta_i &= r\left((\lambda E - A)^{i-1},\,B,\,AB,\,\ldots,\,A^{i-2}\right) - r\left((\lambda E - A)^i,\,B,\,AB,\,\ldots,\,A^{i-1}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Duální posloupnost k Weyrově charakteristice dvojice matic $(A,\,B)$ příslušné vlastnímu číslu λ se nazývá *Segreova charakteristika dvojice matic* $(A,\,B)$ *příslušná vlastnímu číslu* λ.

Nechť $\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots,\lambda_u$ jsou všechna navzájem různá vlastní čísla dvojice matic $(A,\,B)$. Posloupnost

$$[\eta(\lambda_1),\,\eta(\lambda_2),\,\ldots,\,\eta(\lambda_u)],$$

kde $\eta(\lambda_i)$, $i = 1,\,2,\,\ldots,\,u$, značí *Weyrovu charakteristiku dvojice matic* $(A,\,B)$ *příslušnou vlastnímu číslu* λ_i, nazýváme *Weyrovou charakteristikou dvojice matic* $(A,\,B)$.

Posloupnost

$$[\xi(\lambda_1),\,\xi(\lambda_2),\,\ldots,\,\xi(\lambda_u)],$$

kde $\xi(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, u$, značí *Segreovu charakteristiku dvojice matic* (A, B) *příslušnou vlastnímu číslu* λ_i, nazýváme *Segreovou charakteristikou dvojice matic* (A, B).

Tak jako v úplném systému invariantů podobnosti čtvercových matic vystupují Weyrovy charakteristiky těchto matic, jsou součástí úplného systému blokové podobnosti dvojic matic Weyrovy charakteristiky příslušné těmto dvojicím:

Úplný systém invariantů blokové podobnosti je tvořen r-čísly (nebo indexy řiditelnosti), vlastními čísly a Weyrovou (nebo Segreovou) charakteristikou dvojice matic (A, B).

V článku [BG1] se jeho autoři v závěru krátce věnovali i Brandenbuschově rovnosti mezi počtem lineárně nezávislých matic komutujících s danou maticí a Weyrovou charakteristikou matice. Ptali se, kdy je počet těchto matic minimální, neboli kdy je minimální součet

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{t_k} m_{ki}^2.$$

Odpověď je triviální:

It is clear that the minimum of (...) is equal to n, since $\sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{t_k} m_{ki} = n$ *and* $m_{ki} \geq 1$ *for* $i = 1, \ldots, t_k$, $k = 1, \ldots, r$*; hence, this minimum is attained if and only if* $m_{ki} = 1$ *for* $i = 1, \ldots, t_k$, $k = 1, \ldots, r$ *– that is to say, when A is nonderogatory.* ([BG1], str. 277)

Z ukázky je zřejmé, že i před koncem 20. století se pro matici užíval přívlastek *derogatory* (resp. jeho negace *nonderogatory*). Občas se vyskytuje i v současné odborné literatuře. Připomeňme, že termín *dérogatoire* pochází od Jamese Josepha Sylvestera a byl používán i Eduardem Weyrem.

Vraťme se ještě krátce ke zmíněnému výsledku: počet lineárně nezávislých matic komutujících s danou maticí stupně n je tedy minimální, právě když pro danou matici neexistuje anulující polynom stupně menšího než n (neboli minimální a charakteristický polynom matice jsou totožné).

V roce 1994 publikovali Lindsay N. Childs a Karl Zimmermann obsáhlejší článek

- *Congruence-torsion subgroups of dimension one formal groups* [CZ1],

v němž jsou definovány tzv. *Weyrovy invarianty* a studovány tzv. *Hopfovy algebry* s danými Weyrovými invarianty. Rozdíly dvou po sobě jdoucích Weyrových invariantů seřazených sestupně (tj. rozdíly dvou po sobě jdoucích charakteristických čísel) jsou identifikovány s tzv. *Ulmovými invarianty*[307] speciálních typů grup.

K použité terminologii Lindsay N. Childs napsal:[308]

In fact, when we wrote the "Congruence-torsion subgroups" paper and I called the dimensions g_r *of* $(p^{r-1}G)/(p^rG)$ *the Weyr invariants of the p-group G, the*

[307] Viz Kaplansky I., *Infinite Abelian Group*, Michigan Press, Ann Arbor, 1969, str. 27.
[308] Z emailové korespondence s autorkou disertační práce (únor 2013).

referee of the paper complained about the terminology and suggested we not call the g_r by that name. I ignored the referee's suggestion, ...

Američtí matematikové James W. Demmel a Alan Edelman vyšetřovali v článku

• *The dimension of matrices (matrix pencils) with given Jordan (Kronecker) canonical forms* [DE1]
z roku 1995 dvě množiny. První z nich,

$$\left\{Q^{-1}AQ;\ \det Q \neq 0\right\},$$

byla množina všech matic, které jsou podobné dané čtvercové matici A. Jinými slovy se jedná o množinu matic, které mají stejný Jordanův kanonický tvar. V jednom z jejich algoritmů se vyskytla čísla, která jsou charakteristickými čísly matice A. Zcela analogicky studovali obecnější případ pro svazek matic $A-\lambda B$, kde A, B jsou matice typu $m\times n$. Tento svazek násobili zprava a zleva regulárními čtvercovými maticemi vhodného řádu, tj.

$$\left\{Q^{-1}(A-\lambda B)R;\ \det Q\cdot\det R \neq 0\right\},$$

a tato druhá studovaná množina je množinou všech svazků matic, které mají stejný Kroneckerův kanonický tvar. Je zajímavé, že v článku autoři zavedli nulitu i pro obdélníkovou matici A typu $m \times n$. Rozlišovali mezi řádkovou nulitou $m - r(A)$ a sloupcovou nulitou $n - r(A)$.

Weyrova charakteristika je rovněž několikrát zmíněna ve více než čtyřicetistránkovém pojednání

• *Sylvester matrix equation for matrix pencils* [BG2],
které roku 1996 publikovali María Asunción Beitia a Juan-Miguel Gracia, okrajově také v práci

• *Black box interpolation. II. The one variable derogatory case* [MH1] z roku 1996, kterou napsali Vaidyanath Mani a Robert E. Hartwig. V pojednání

• *The algebraic structure of pencils and block Toeplitz matrices* [Bd1]
z roku 1998 studoval Daniel L. Boley mimo jiné vztahy mezi některými posloupnostmi, především mezi Weyrovou charakteristikou, posloupností tzv. Kroneckerových indexů a nerostoucí nebo neklesající posloupností tzv. Jordanových indexů. Neklesající posloupnost Jordanových indexů je přitom Segreova charakteristika matice.

Weyrovu charakteristiku nalezneme rovněž v článku

• *The contragredient equivalence: Application to solve some matrix systems* [RG1],
z roku 1999. V něm se jeho autoři Pedro Marín Rubió a Josep Gelonch zabývali studiem matic A a B, pro které existují oba součiny AB i BA. Tato problematika je poměrně hojně studována již od poloviny století, kdy americký matematik Harley Flanders (nar. 1925) našel[309] vztah mezi elementárními děliteli matic AB a BA a také nutnou a postačující podmínku, aby pro dané

[309] Flanders H., *Elementary divisors of AB and BA*, Proceedings of the American Mathematical Society 2(1951), 871–874.

čtvercové matice X a Y existovaly matice A, B takové, že $X = AB$ a $Y = BA$ (tzv. *Flandersova věta*). Jak uvidíme dále, práce s Weyrovou charakteristikou, které se zabývají maticemi AB a BA, jsou publikovány i v moderní lineární algebře.

V roce 1999 vyšel také další článek pocházející ze španělské školy, a sice text

• *Stable subspaces of matrix pairs* [Vl1]
Francisca E. Velasca.

Rok 1999 se stal v jistém smyslu významným milníkem v historii Weyrovy charakteristiky. V tomto roce totiž publikovala přehledný, dodnes často citovaný článek americká matematička Helene Shapiro. Nazvala jej jednoduše

• *The Weyr characteristic* [Sh2]
a publikovala v časopisu The American Mathematical Monthly. Nabídku k otištění tohoto textu dostala od Rogera Horna, který byl editorem zmíněného časopisu a který později rozpracoval výsledky Eduarda Weyra v monografii *Matrix Analysis* (viz dále).

Helene Shapiro se o Weyrově charakteristice poprvé dozvěděla od Hanse Schneidera v roce 1980, když po získání doktorátu pobývala na univerzitě ve Wisconsinu.[310] Vedli zde spolu kurz teorie matic.

Než se dostaneme k tomuto článku, uveďme, že Weyrova charakteristika a tzv. *speciální Weyrova charakteristika* jsou hojně zmíněny v rozsáhlém článku Helene Shapiro, který vyšel již dříve. Bylo to v roce 1991, kdy byl publikován přehledový, takřka sedmdesátistránkový text

• *A survey of canonical forms and invariants for unitary similarity* [Sh1],
který je věnován, jak název napovídá, unitární podobnosti matic. Matice A a B jsou unitárně podobné, jestliže existuje unitární matice U, pro kterou platí rovnost $U^*AU = B$. Pro každou unitární matici U je $U^* = U^{-1}$, jedná se tedy, dle očekávání, o speciální druh podobnosti. Práce je bohatá na historické poznámky o výsledcích týkajících se kanonických tvarů matic především po roce 1950, v jejím závěru je seznam literatury čítající 136 položek. Mezi nimi jsou Weyrovy práce *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a *Theorie der bilinearen Formen.*

K porovnání ohlasů na oba články Helene Shapiro napsala:[311]

The 1991 article appeared in Linear Algebra and Its Applications, a journal for specialists in linear algebra. It is not primarily an article about the Weyr characteristic, but about unitary similarity. The article is long and the details are quite technical – indeed, I have forgotten a lot of this myself. Also, more has been done in the field since then, so the 1991 article is now a bit out-of-date as far as giving current results and recent references. The 1999 article appeared in the American Mathematical Monthly, aimed at a general mathematical audience. It is also an article specifically about the Weyr characteristic. Since the

[310] Její osobní vzpomínky na první seznámení se s výsledky Eduarda Weyra viz dále.
Zajímavé je, že byla doktorandkou Olgy Taussky Todd na California Institute of Technology. Doktorské studium absolvovala v roce 1979 prací *Unitary block diagonalization and the characteristic polynomial of a pencil generated by Hermitian matrices*.
[311] Z emailové korespondence s autorkou této disertační práce (leden 2013).

Weyr characteristic and canonical form are missing from many linear algebra textbooks, someone who needs a reference does not the number of choices we have for most standard linear algebra material.

Citujme ještě jiná slova Helene Shapiro, tentokrát z úvodu článku *The Weyr characteristic.* K otázce znalosti výsledků Eduarda Weyra napsala toto:

The Jordan canonical form is a well-known and standard topic in linear algebra. It is thoroughly covered in many texts on linear algebra and abstract algebra. The purpose of this article is to publicize a different approach to the canonical form problem introduced by Eduard Weyr in 1885 … Several older books … mention Weyr characteristics but it does not appear in recent linear algebra texts. The basic idea of Weyr's approach is useful in several areas, such as describing algorithms for computing the Jordan form in a stable manner … and in developing canonical forms for matrices under unitary similarity …, but Weyr's papers are rarely referenced and the sequence of numbers we call the Weyr characteristic is not named. Thus, while Weyr's work seems to be little known, his basic idea has been rediscovered and used several times. ([Sh2], str. 919)

V úvodu své práce rovněž stručně popsala její náplň:

In this paper we define the Weyr characteristic and discuss its connection with so-called "staircase" forms used in numerical linear algebra to determine the Jordan form in a stable manner. There is a simple relationship between the Weyr characteristic and the better known Segre characteristic, which is associated with the Jordan canonical form. This relationship leads to a quick derivation of Weyr's canonical form from the Jordan canonical form; we also present a proof that is independent of the Jordan canonical form, as Weyr did in his original paper. ([Sh2], str. 919)

Povšimněme si, že autorka nazvala kanonický tvar po Eduardu Weyrovi. Zřejmě se tak stalo poprvé v historii a tento název v následujících letech začali používat i ostatní algebraici.

Práce *The Weyr characteristic* představuje základy Weyrovy teorie a ukazuje postup konstrukce Weyrova kanonického tvaru (bez znalosti Jordanova kanonického tvaru), jehož princip je založen především na následujícím poznatku (přesněji na jeho opakovaném použití):

Nechť

$$A = \begin{pmatrix} O_{11} & A_{12} \\ O_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

je nenulová čtvercová nilpotentní matice řádu n, jejíž Weyrova charakteristika je $\eta(A) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$ a řád jejího bloku O_{11} je η_1. Potom platí

$$\eta(A_{22}) = (\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_t).$$

Editoři vkládali do článku Helene Shapiro naděje na rozšíření Weyrových výsledků v rámci širší matematické komunity. Na internetových stránkách časopisu The American Mathematical Monthly je u tohoto článku uvedeno:

We hope this article will make Weyr's work better known to a wider audience.

Toto očekávání bylo naplněno. V monografii *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* (viz dále) z roku 2011 je napsáno:

The first popular account of the Weyr characteristic and Weyr form was in 1999, when Shapiro wrote an article "The Weyr Characteristic" for the American Mathematical Monthly. There she described the Weyr canonical form under that very name. So historically, perhaps Shapiro gets the credit for finally nailing the correct term for this particular canonical form. ([OCV1], str. 81)

V poznámce pod čarou je navíc doplněno:

This publication has a very large readership across a broad spectrum of people interested in mathematics generally, and so it presents an ideal forum for promoting concepts with widespread applications. ([OCV1], str. 81)

Zároveň je zde však vyjádřena pochybnost, zda nemohl být článek lépe propagován svým názvem. Následující ukázka je potvrzením skutečnosti, že ještě před koncem tisíciletí byla Weyrova charakteristika poměrně neznámým pojmem:

It is a pity that the title of her article did not also draw attention to a matrix canonical form that is related to the Jordan form. That may well have helped others to come to know the Weyr form. ([OCV1], str. 81)

V seznamu literatury jsou uvedeny pouze dvě Weyrovy práce: *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a *Zur Theorie der bilinearen Formen.*[312]

5.7 Nejnovější ohlasy

Zdůrazněme, že dosud uvedené zahraniční ohlasy na výsledky Eduarda Weyra jsou (s výjimkou článku Helene Shapiro) reakcemi pouze na Weyrovu charakteristiku, nikoli na Weyrův kanonický tvar. Ten v literatuře odkazován nebyl. Teprve na přelomu tisíciletí začal být dáván do blízké souvislosti s nulitami mocnin matice $(A - \lambda E)$ a Weyrovou charakteristikou.

Jedná se rovněž o období, kdy se Weyrovy originální práce začínají častěji objevovat v seznamech literatury jednotlivých publikací a rovněž Weyrova charakteristika je definována přímo pomocí rozdílů nulit, nikoli jako duální posloupnost k Segreově charakteristice.

Již v roce 1983 publikoval matematik Genrich Ruvimovič Belitskij[313] třináctistránkový text v ruštině, který obsahuje algoritmus pro současnou transformaci m-tice komplexních matic na kanonický tvar pomocí téže podobnosti. V tomto algoritmu hraje podstatnou roli Weyrův kanonický tvar. Belitskij však

[312] Helene Shapiro uvedla právě tyto dvě práce zřejmě z toho důvodu, že je měla fyzicky k dispozici – viz dále její vzpomínky.

[313] Genrich R. Belitskij emigroval roku 1991 z Ukrajiny, dnes působí v Izraeli.

nepoužíval tento název, ale termín *modified Jordan form*. Algoritmus natolik zaujal ukrajinského matematika Vladimira V. Sergejčuka (nar. 1949), že autorovi doporučil, aby publikoval článek znovu v detailnější podobě. Tato propracovanější verze (32 stran) vyšla v angličtině pod mírně pozměněným názvem[314]

• *Normal forms in matrix spaces* [Bj2]

v roce 2000 a stala se značně citovanou prací. V druhém, přepracovaném vydání monografie *Matrix Analysis* [HJ1] (viz dále) z roku 2013 je napsáno:

The Weyr form (in its standard partition) was rediscovered by G. Belitskii, whose motivation was to find a canonical form for similarity with the property that every matrix commuting with it is block upper triangular. ([HJ1], str. 215)

Belitskij si byl již roku 1983 vědom toho, že mezi Weyrovým a Jordanovým kanonickým tvarem lze přecházet pomocí simultánních permutací řádků a sloupců. Byl zřejmě prvním, kdo publikoval větu vymezující matice, které komutují s daným Weyrovým tvarem matice majícím jediné vlastní číslo. Překvapivě je tato vlastnost podmíněna pouze jednoduchým vztahem mezi bloky komutující matice:

Nechť W je Weyrův blok řádu n příslušný některému vlastnímu číslu, jehož příslušná Weyrova charakteristika je $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$, kde $t \geq 2$. *Nechť*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \ldots & A_{tt} \end{pmatrix}$$

je bloková matice řádu n, jejíž bloky A_{ij} jsou typu $\eta_i \times \eta_j$ (řádky, resp. sloupce matice A jsou rozděleny do t skupin po řadě o $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ řádcích, resp. sloupcích). Potom $WA = AW$, právě když A je horní blokově trojúhelníková matice, pro jejíž bloky platí

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{i+1,\,j+1} & * \\ O & * \end{pmatrix}, \quad \text{pro} \quad 1 \leq i \leq j \leq t-1,$$

kde na místě $*$ jsou matice o libovolných prvcích (pro $\eta_j = \eta_{j+1}$ nejsou v bloku A_{ij} tyto matice obsaženy; analogicky pro $\eta_i = \eta_{i+1}$ nejsou v bloku A_{ij} obsaženy poslední řádky začínající nulami).

Každá matice komutující s Weyrovým tvarem je tedy horní (blokově) trojúhelníková.

Uvedený algoritmus rozvinul v roce 2000 již zmíněný Vladimir Sergejčuk v padesátistránkovém pojednání

• *Canonical matrices for linear matrix problems* [Se1].

A tento algoritmus rovněž použil k řešení mnoha problémů teorie matic, včetně současného převedení dvojice čtvercových matic A a B téhož řádu na kanonické tvary $G^{-1}AG$ a $G^{-1}BG$.

[314] Verze z roku 1983 je odkazována pod názvem *Normal forms in a space of matrices* [Bj1].

Citujme jedno z hodnocení Sergejčukovy práce:

It is an impressive piece of work. ([OCV1], str. 81)

Také Sergejčuk pracoval s Weyrovým kanonickým tvarem již dříve, aniž by pro jeho pojmenování používal „historicky správný“ termín. Nazýval jej *reordered Jordan matrix* nebo *modified Jordan matrix* – druhý ze zmíněných termínů se vyskytuje například v práci

• *Littlewood's algorithm and quaternion matrices* [MS1],
na které spolupracoval Dennis I. Merino, doktorand Rogera Alana Horna.

Teprve v práci z roku 2000, v níž opakovaně zdůraznil souvislost tohoto kanonického tvaru s Weyrovou charakteristikou, uvedl Weyrovo příjmení v názvu kanonického tvaru. Ihned v úvodu článku napsal:

... for every Jordan matrix J we construct a matrix $J^{\#} = P^{-1}JP$ (P is a permutation matrix) ... Following Shapiro ..., we call $J^{\#}$ a Weyr matrix since its form is determined by the set of its Weyr characteristic ...
([Se1], online verze, str. 4)

V článku je přibližně čtyřstránková pasáž nazvaná *Weyr matrices*, v níž znovu zdůvodnil důvod své terminologie. Weyrovu charakteristiku zavedl stejně jako Eduard Weyr v 19. století:

The matrix W is named a "Weyr matrix" since $(m_{i1}, m_{i2}, \ldots, m_{ik})$ is the Weyr characteristic of W (and of every matrix that is similar to W) for λ_i. ... the Weyr characteristic of a square matrix A for an eigenvalue λ is the descreasing list $(m_1, m_2, \ldots)$, where $m_i := rank(A-\lambda I)^{i-1} - rank(A-\lambda I)^i$.
([Se1], online verze, str. 7)

Na přelomu století byla Weyrova charakteristika známa i matematikům působícím ve Švédsku. Máme na mysli poměrně uzavřenou společnost odborníků na Umeå University, výjimečně rozšířenou o již zmíněného Alana Edelmana. Sepsali větší počet značně specializovaných prací, v nichž figuruje Weyrova charakteristika především jako invariant podobnosti matic a je většinou definována jako duální posloupnost k Segreově charakteristice. Z těchto prací jmenujme následující:

• *A geometric approach to perturbation theory of matrices and matrix pencils. Part II: A stratification-enhanced staircase algorithm* [EEK1]
z roku 1999, kterou publikovali Alan Edelman, Erik Elmroth a Bo Kågström,

• *Stratification of controllability and observability pairs. Theory and use in applications* [EJK1]
z roku 2009, na níž spolupracovali Erik Elmroth, Stefan Johansson a Bo Kågström,

• *Tools for control system design – stratification of matrix pairs and periodic Riccati differential equation solvers* [Jh1]
z roku 2009, což je disertační práce Stefana Johanssona sepsaná pod vedením Bo Kågströma, a text

• *StratiGraph tool: matrix stratifications in control applications* [KJJ1],
který publikovali roku 2012 Bo Kågström, Stefan Johansson a Pedher Jo-

hansson.[315]

V uvedených pracích se relativně často vyskytují dva nové pojmy zavedené pomocí Weyrovy charakteristiky, a to tzv. *bundle*, resp. „*be in the same bundle*“. Termín s doslovným překladem „*být ve stejném ranci*“ označuje vlastnost matic, které mají stejnou Weyrovu charakteristiku, ale dílčí Weyrovy charakteristiky jednotlivých matic mohou náležet rozdílným vlastním číslům. Exaktněji řečeno, označíme-li $\eta(\lambda_1)$, $\eta(\lambda_2)$, $\ldots$, $\eta(\lambda_u)$ Weyrovy charakteristiky příslušné všem navzájem různým vlastním číslům λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_u čtvercové matice A a analogicky $\eta(\mu_1)$, $\eta(\mu_2)$, $\ldots$, $\eta(\mu_u)$ Weyrovy charakteristiky příslušné všem navzájem různým vlastním číslům μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_u čtvercové matice B, potom matice A a B „jsou ve stejném ranci“, jestliže vhodně zvolenou permutací charakteristik $\eta(\lambda_1)$, $\eta(\lambda_2)$, $\ldots$, $\eta(\lambda_u)$ získáme posloupnost $\eta(\mu_1)$, $\eta(\mu_2)$, $\ldots$, $\eta(\mu_u)$. Jedná se tedy o matice, které mají „stejný“ Jordanův tvar až na prvky na diagonále.

Pozastavme se ještě krátce u výše uvedené práce *A geometric approach to perturbation theory of matrices and matrix pencils. Part II: A stratification-enhanced staircase algorithm.* V ní se totiž objevují i pojmy z teorie grafů a vztah, který je obdobný pojmu majorizace posloupnosti. Zde se píše o tzv. *pokrytí rozdělení*.[316] Rozdělení $\kappa = (k_1, k_2, \ldots)$ přirozeného čísla n pokrývá rozdělení $\mu = (m_1, m_2, \ldots)$ téhož čísla n, právě když $k_1 + k_2 + \ldots \geq m_1 + m_2 + \ldots$, $\kappa \neq \mu$ a neexistuje pokrytí téhož čísla n, které by pokrývalo rozdělení μ a zároveň bylo pokrýváno rozdělením κ.[317]

---

[315] Jedná se o část publikace, která vznikla na základě workshopu konaného v kanadském městě Banff již v roce 2010.

[316] Rozdělením přirozeného čísla n rozumíme posloupnost $(k_1, k_2, \ldots)$ takových přirozených čísel, že $k_1 + k_2 + \ldots = n$ a $k_1 \geq k_2 \geq \ldots$

[317] Tento pojem je ilustrován pomocí pohybu mincí.

> *A partition κ_1 covers κ_2 if κ_2 may be obtained from κ_1 by moving a coin rightward one column, or downward one row, so long as the partition remains monotonic … Or equivalently, κ_1 covers κ_2 if κ_1 may be obtained from κ_2 by moving a coin leftward one column, or upward one row, and keeping the monotonicity of the partition. We call these moves a minimum rightward and a minimum leftward coin move, respectively.* ([EEK1], str. 672)

Obrázkem jsou také znázorněny duální (konjugovaná) rozdělení. V článku jsou konkrétně uvedeny následující obrázky ([EEK1], str. 673):

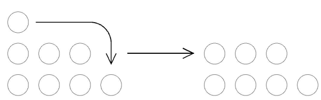


FIG. 2.2. *"Coin move" illustrates that* (3, 2, 2, 1) *covers* (2, 2, 2, 2).

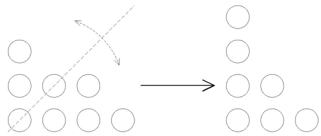


FIG. 2.3. *Transposing illustrates that* (3, 2, 2, 1) *and* (4, 3, 1) *are conjugate partitions.*

Podrobně studovaná majorizace různých posloupností Weyrovou charakteristikou lze tedy znázornit obdobně, připouštíme však možnost posunutí více mincí z téhož sloupce a také triviální případ, kdy žádnou minci nepřesouváme.

Weyrovu charakteristiku v textu a Weyrovu práci *Zur Theorie der bilinearen Formen* v seznamu literatury uvádí článek

• *On the change of the Jordan form under the transition from the adjacency matrix of a vertex-transitive digraph to its principal submatrix of co-order one* [Sv1]

z roku 2005, který napsal Sergej V. Savčenko.

Ani v novém století neutichla publikační činnost již několikrát zmíněného španělského kolektivu. V roce 2006 vyšla práce

• *Stability of controlled invariant subspaces* [GV1],

která však Weyrovu charakteristiku uvádí pouze v přehledu dosud známých dílčích výsledků. Napsali ji společně Juan-Miguel Gracia a Francisco E. Velasco. Trojice autorů Mária Asunción Beitia, Inmaculada de Hoyos a Ion Zaballa publikovala trojici článků s velmi podobnými názvy

• *The change of the Jordan structure under one row perturbations* [BHZ1],

• *The change of similarity invariants under row perturbations: Generic cases* [BHZ2],

• *The change of similarity invariants under row perturbations* [BHZ3].

První práce je z roku 2005, další dvě z roku 2008. Autoři se v nich zabývali změnami Jordanových tvarů, Weyrových charakteristik a dalších invariantů podobnosti při „malém" pozměnění (perturbaci) prvků jednoho či více řádků dané matice. Pracovali tak například s pojmy *okolí spektra matice*, *norma rozdílu dvou matic* apod.

Problematika perturbací tehdy patřila k časté náplni článků, které zmiňují Weyrovu charakteristiku.[318] Na jednu práci z uvedené trojice, konkrétně na práci *The change of the Jordan structure under one row perturbations*, navázali roku 2007 pojednáním

• *The change of feedback invariants under one row perturbation* [DSt1]

Marija Dodig a Marko Stošić, matematikové působící v Portugalsku. Název práce říká mnohé, jedná se o zobecnění výsledků pro obdélníkové matice.

Velmi podstatnou roli v šíření Weyrova kanonického tvaru mezi algebraickou komunitou hrála (a stále hraje) dvojice matematiků Kevin C. O'Meara a Charles Irvin Vinsonhaler (nar. 1942).[319] Na Weyrův kanonický tvar výrazně upozornili roku 2006 v článku

• *On approximately simultaneously diagonalizable matrices* [OV1],

v němž jej však nazvali *H-tvarem*, obdobně Weyrovu charakteristiku pro určité vlastní číslo pojmenovali *H-blokovou strukturou* s tímto vlastním číslem, Weyrův blok nazvali *základní H-maticí*, místo Segreovy charakteristiky používali termín *Jordanova struktura*. Písmeno „H" značí „husky" na počest spojení

[318] Za jedny z výchozích prací této problematiky jsou často uváděny články Markus A. S., Parilis E. È, *The change of the Jordan structure of a matrix under small perturbatios*, Linear Algebra and its Applications 54(1983), 139–152; den Boer H., Thijsee G. Ph. A., *Semi-stability of sums of partial multiplicities under additive perturbations*, Integral Equations Operator Theory 3(1980), 23–42. V nich byly studovány vlastnosti matic, kterým byly „mírně" pozměněny (obecně) všechny prvky.

[319] Tito matematikové zastávají pozice na více univerzitách v různých státech světa, především v USA a na Novém Zélandě.

s University of Connecticut.[320] V práci zavedli *H-tvar* v souvislosti se studiem vlastnosti skupiny matic, tzv. *přibližné současné diagonalizovatelnosti.*

Normou $\|A\|$ čtvercové komplexní matice $A = (a_{ij})$ rozuměli[321] reálné číslo $\|A\| = \sqrt{\sum |a_{ij}|^2}$. Čtvercové matice $B_1, B_2, \ldots, B_k$ řádu n (obecně nad polem) se nazývají *současně diagonalizovatelné*, jestliže existuje invertibilní matice C taková, že matice

$$C^{-1}B_1C, \quad C^{-1}B_2C, \quad \ldots, \quad C^{-1}B_kC$$

jsou diagonální. Komplexní čtvercové matice $A_1, A_2, \ldots, A_k$ řádu n se nazývají *přibližně současně diagonalizovatelné*,[322] jestliže pro libovolné reálné číslo $\varepsilon > 0$ existují matice $B_1, B_2, \ldots, B_k$, které jsou současně diagonalizovatelné a platí

$$\|B_i - A_i\| < \varepsilon \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Již padesát let před publikováním této práce byla známa jedna významná vlastnost přibližně současně diagonalizovatelných matic.[323]

Každá dvojice komplexních komutujících matic řádu n je přibližně současně diagonalizovatelná.

V článku O'Meary a Vinsonhalera (str. 42) je dokázáno toto tvrzení:

Jestliže $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou přibližně současně diagonalizovatelné, potom $A_iA_j = A_jA_i$ pro všechna i, j.

Vlastnost množiny matic *býti přibližně současně diagonalizovatelnými* tedy implikuje komutativitu této skupiny matic. A tato komutativita úzce souvisí s převodem matic na horní trojúhelníkové matice. V teorii matic je dobře známo, že každou konečnou množinu komutujících matic lze pomocí současné podobné transformace převést na horní trojúhelníkový tvar.[324] Zde se ukazuje výhoda Weyrova kanonického tvaru oproti tvaru Jordanovu, Weyrův tvar má totiž následující vlastnost:

Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou navzájem komutující matice řádu n nad algebraicky uzavřeným polem. Potom existuje invertibilní matice C taková, že

[320] Pes husky byl studenty zvolen roku 1934 maskotem této university. Jeho jméno je Jonathan na počest Jonathana Trumbulla (1710–1785), amerického revolucionáře z Války za nezávislost (1775–1783). Od roku 1995 je v univerzitním kampusu socha tohoto maskota, pohlazení po čumáčku je symbolem štěstí.

Více o tradicích této školy viz http://www.uconn.edu/history/traditions/index.php

[321] Lze však použít i jinou normu, která splňuje následující podmínky: $\|XY\| \leq c\,\|X\|\,\|Y\|$, kde c je konstanta, a $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$, např. $\|A\| = \max\{|a_{ij}|\}$.

[322] V literatuře se tato vlastnost běžně značí zkratkou ASD z anglického *approximately simultaneously diagonalizable.*

[323] Viz Motzkin T., Taussky O., *Pairs of matrices with property L. II*, Transactions of the American Mathematical Society 80(1955), 387–401, Theorem 5, str. 397.

Je rovněž známo, že tři komutující matice, z nichž jedna je tzv. 2-regulární, jsou též přibližně současně diagonalizovatelné. Čtvercová matice je přitom l-regulární, jestliže v jejím Jordanově kanonickém tvaru náleží k témuž číslu maximálně l Jordanových buněk. V případě uvedeného tvrzení jsou tedy prostory generované vlastními vektory pro všechna vlastní čísla dimenze maximálně 2.

[324] Viz [HJ1], Theorem 2.3.3., str. 81 v prvním, resp. str. 103 ve druhém vydání.

$C^{-1}A_1C$ je Weyrův kanonický tvar matice A_1 a současně matice

$$C^{-1}A_2C,\ C^{-1}A_3C,\ \ldots,\ C^{-1}A_kC$$

jsou horní trojúhelníkové.

Díky této vlastnosti byl Weyrův kanonický tvar v práci zaveden.

Unfortunately, the most well-known standard form, the Jordan form, is not compatible with retaining upper triangularity in commuting matrices. To help circumvent this problem, we define a new standard form, the H-form, for an $n \times n$ matrix over an algebraically closed field, that allows us to assume all commuting matrices are also upper triangular. ([OV1], str. 48)

Práce se takřka na jedenácti stranách věnuje přímo Weyrovu kanonickému tvaru a jeho vlastnostem; tím se řadí mezi nejvýraznější časopiseckou literaturu věnovanou Weyrovým výsledkům.

Další z prací, kde vystupuje Weyrův kanonický tvar pod jiným jménem, je text z roku 2008 nazvaný

• *The commutator algebra of a nilpotent matrix and an application to the theory of commutative Artinian algebras* [HW2],

který napsali japonští matematikové Tadahito Harima a Junzo Watanabe. Pro jeho označení používali termín *Jordan second canonical form* (pro Jordanův kanonický tvar uvedli i alternativní název *Jordan first canonical form*).

Lze však uvést i jejich starší pojednání

• *The finite free extension of Artinian K-algebras with the strong Lefschetz property* [HW1]

z roku 2003. Zde však pracovali s modifikací Weyrova kanonického tvaru, který i zde nazývali *Jordan second canonical form.* Weyrovy buňky umístili do Weyrových bloků od nejmenších po největší, tedy způsobem, který použil již Eduard Weyr v 19. století, ale nenulové bloky s jednotkovými maticemi psali nad diagonálu. Z dnes nejčastěji používaného Weyrova kanonického tvaru jej dostaneme transponováním podle vedlejší diagonály, příkladem Weyrova bloku v jejich pojetí je matice

$$W'' = \left(\begin{array}{c|c|cc|ccc}
\lambda & 1 & & & & & \\ \hline
 & \lambda & & 1 & & & \\ \hline
 & & \lambda & & & 1 & \\
 & & & \lambda & & & 1 \\ \hline
 & & & & \lambda & & \\
 & & & & & \lambda & \\
 & & & & & & \lambda
\end{array}\right).$$

I zde byl tento tvar použit vzhledem ke svým výhodnějším vlastnostem v porovnání s Jordanovým kanonickým tvarem.

Also we introduce the "Jordan second canonical form" of a nilpotent matrix. This is essentially the same as the usual Jordan decomposition, but as one will see it it easier to deal with in the theory of Artinian algebras. ([HW1], str. 121)

Zajímavým způsobem přistoupili roku 2009 k Weyrově charakteristice Lev Glebsky a Luis Manuel Rivera, matematikové působící v Mexiku, v práci

• *On low rank perturbations of complex matrices and some discrete metric spaces* [GR1].

Definovali ji jako funkci.

Let $\eta_m(A,\,\lambda)$ *denote the number of* λ*-Jordan blocks in* A *of size greater or equal than* m $(m \in \mathbb{Z}^+)$:

$$\eta_m(A,\,\lambda) = \dim \operatorname{Ker}\,(\lambda E - A)^m - \dim \operatorname{Ker}\,(\lambda E - A)^{m-1}.$$

The function $\eta_{(\cdot)}(A,\,\cdot) : \ \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{C} \to \mathbb{N}$ *is called the Weyr characteristic of the matrix* A. ([GR1], str. 304)

Jsou zde rovněž zavedeny tzv. *prostory* $\Im_n$ *Weyrových charakteristik*: prostor $\Im_n$ je prostor funkcí $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{C} \to \mathbb{N}$, $(i,\,\lambda) \to \eta_i(\lambda)$ takové, že

(i) $\eta_i(\lambda) \neq 0$ pro konečně mnoho $(i,\,\lambda)$ a $\sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \sum_{i\in\mathbb{Z}^+} \eta_i(\lambda) = n$,

(ii) $\eta_i(\lambda) \geq \eta_{i+1}(\lambda)$.

V práci je také definována metrika na $\Im_n$ vztahem

$$d(\eta,\,\mu) = \max_{(i,\,\lambda)} \left\{ |\eta_i(\lambda) - \mu_i(\lambda)| \right\}.$$

Takto zavedená metrika je použitelná i pro dva prvky z různých prostorů Weyrových charakteristik (pro různé n). V práci jsou formulovány některé její vlastnosti.

V seznamu literatury je uvedena Weyrova práce *Zur Theorie der bilinearen Formen*. Je zajímavé, že na tuto práci (a také na práci Helene Shapiro *The Weyr characteristic*) je odkazováno při zavedení Segreovy charakteristiky matice příslušné danému vlastnímu číslu.

Velmi okrajově je Weyrův kanonický tvar a Weyrova charakteristika zmíněna v práci

• *Matrices that are self-congruent only via matrices of determinant one* [GHS1],

kterou v roce 2009 publikovali ukrajinská matematička Tatjana G. Gerasimova, Roger A. Horn a Vladimir V. Sergejčuk. V tomtéž roce vyšel v čínštině článek, jehož anglické shrnutí nese název

• *The centralizer of matrices* [Zh1][325]

a jehož autorem je Chao Zhang. Termín *centralizer* se používá pro označení množiny všech matic komutujících s danou maticí řádu n. Článek se věnuje explicitnímu určení dimenze tohoto podprostoru vektorového prostoru všech matic řádu n, tedy problematice, které se věnoval již Brandenbusch v roce 1980.

Američtí matematikové Ross Adams Lippert (nar. 1971), jehož školitelem byl Alan Edelman, a proslulý Gilbert Strang (nar. 1934) publikovali v roce 2009 efektní článek

[325] Originální, obšírný titul práce v čínštině obsahuje přímo příjmení Weyr.

• *The Jordan Forms of AB and BA* [LS1],
v němž se zabývali výsledkem již zmíněného Harleye Flanderse, který byl dokázán v jeho krátkém článku *Elementary divisor of AB and BA*.

Uvažujme čtvercové komplexní matice A a B téhož řádu a nechť A je invertibilní. Potom $AB = ABAA^{-1}$ a vzhledem k asociativitě násobení matic platí $AB = A(BA)A^{-1}$. Matice AB a BA jsou tedy podobné, proto mají stejná vlastní čísla, stejný Jordanův kanonický tvar, stejné řády Jordanových buněk atd. Zcela analogicky lze postupovat, jestliže bude invertibilní matice B. Jak se však změní řády Jordanových buněk, jestliže budou obě matice (nad algebraicky uzavřeným polem) čtvercové singulární nebo budou obdélníkové? Odpověď je překvapivě jednoduchá: pro nenulová vlastní čísla zůstanou Jordanovy buňky nezměněny, pro vlastní číslo 0 se řády Jordanových buněk zvětší nebo zmenší maximálně o 1. Pro důkaz je podstatná platnost nerovnosti

$$\eta_i(BA) \geq \eta_{i+1}(AB),$$

kde $\eta_i(X)$ značí i-té číslo Weyrovy charakteristiky matice X příslušné vlastnímu číslu $\lambda = 0$, a analogicky (po obrácení pořadí matic a posunu indexů) platnost nerovnosti

$$\eta_{i-1}(AB) \geq \eta_i(BA).$$

Tohoto vztahu využil již Flanders, ale ve zcela jiné řeči, Weyrova charakteristika se v jeho poznámce vůbec nevyskytla. Naopak Lippert a Strang využili Weyrovu charakteristiku (především její duality k Segreově charakteristice) k elegantnímu důkazu změny řádu Jordanových buněk příslušných vlastnímu číslu 0.

Pohlížejme nyní – pro zjednodušení vyjádření – na Weyrovu a Segreovu charakteristiku jako na nekonečné posloupnosti, v nichž po konečném počtu přirozených čísel následují nuly. Formulujme přehledně dosud vyřčené.

Nechť $\mathcal{F}$ je algebraicky uzavřené pole. Nechť $A \in \mathcal{F}^{n\times m}$ a $B \in \mathcal{F}^{m\times n}$ jsou matice nad tímto polem. Řády Jordanových buněk příslušných nenulovému vlastnímu číslu λ matic AB a BA jsou stejné, neboli

$$\eta_i(AB - \lambda E) = \eta_i(BA - \lambda E) \qquad \textit{pro} \ \ \lambda \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Pro charakteristická čísla příslušná vlastnímu číslu $\lambda = 0$ matic AB a BA platí

$$\eta_{i-1}(AB) \geq \eta_i(BA) \geq \eta_{i+1}(AB) \qquad \begin{array}{ll} \textit{pro} \ \ i = 2, 3, \ldots & \textit{v první nerovnosti,} \\ \textit{pro} \ \ i = 1, 2, \ldots & \textit{v druhé nerovnosti,} \end{array}$$

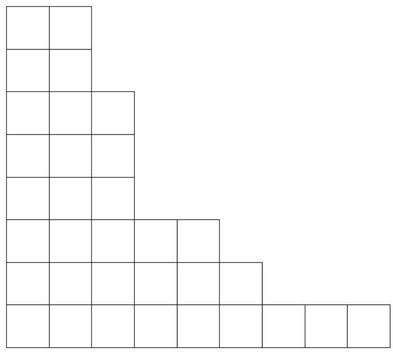
což je ekvivalentní vyjádření

$$|\xi_i(AB) - \xi_i(BA)| \leq 1 \qquad \textit{pro } i = 1, 2, \ldots,$$

kde $\xi_i(X)$ značí i-tý člen Segreovy charakteristiky matice X příslušné vlastnímu číslu $\lambda = 0$.

Ilustrujme („a dokažme“)[326] zmíněnou ekvivalenci na konkrétním příkladu pomocí Ferrersových diagramů charakteristik příslušných vlastnímu číslu 0 matic AB a BA. Toto zakreslení provedli i autoři článku, použili však Ferrersovy diagramy v mírně pozměněné podobě (prvky Segreovy charakteristiky značili do řádků, největší prvek na horní řádek, nejmenší nenulový prvek na spodní řádek).

Nechť Segreova charakteristika matice AB příslušná vlastnímu číslu 0 je $(8, 8, 6, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots)$. Příslušný Ferrersův diagram vypadá takto:



Odtud snadno zjistíme, že Weyrova charakteristika matice AB příslušná vlastnímu číslu 0 je $(9, 6, 5, 3, 3, 3, 2, 2, 0, 0, \ldots)$.

Meze pro charakteristická čísla matice BA příslušná vlastnímu číslu 0 jsou tedy dány nerovnostmi

$$\begin{array}{rl}
\eta_1(BA) \geq 6 \qquad & 3 \geq \eta_7(BA) \geq 2 \\
9 \geq \eta_2(BA) \geq 5 \qquad & 2 \geq \eta_8(BA) \geq 0 \\
6 \geq \eta_3(BA) \geq 3 \qquad & 2 \geq \eta_9(BA) \geq 0 \\
5 \geq \eta_4(BA) \geq 3 \qquad & 0 \geq \eta_{10}(BA) \geq 0 \\
3 \geq \eta_5(BA) \geq 3 \qquad & 0 \geq \eta_{11}(BA) \geq 0 \\
3 \geq \eta_6(BA) \geq 2 \qquad & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

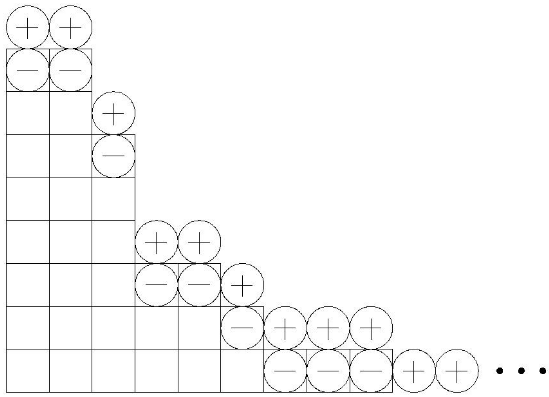
Označme tato rozmezí do Ferrersova diagramu Segreovy charakteristiky matice AB, tj. přidejme $(+)$ nebo odeberme $(-)$ příslušný počet prvků v řádcích diagramu. Získáme tak „přibližný“ tvar Ferrersova diagramu Segreovy charakteristiky matice BA.

[326] Zájemce o exaktní důkaz odkazujeme přímo do článku (str. 286), je zde uveden dokonce pro následující obecnější případ:

Nechť $(p_1, p_2, \ldots)$ a $(q_1, q_2, \ldots)$ jsou dvě nerostoucí posloupnosti přirozených čísel nebo nul, nechť $(p'_1, p'_2, \ldots)$ a $(q'_1, q'_2, \ldots)$ jsou posloupnosti k nim duální a nechť $d \in \mathbb{N}$. Potom

$$q'_i \geq q_{i+d} \ \text{ a } \ q_i \geq q'_{i+d}, \ \textit{právě když} \ |p_i - p'_i| \leq d, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Pro $d = 1$ dostáváme námi uvedenou ekvivalenci.



Podívejme se však především na změny, které nastaly ve sloupcích diagramů. Vidíme, že se každý sloupec zvětšil, nebo zmenšil maximálně o jeden prvek. Řády Jordanových buněk matice BA příslušných vlastnímu číslu 0 se tedy vzhledem k řádům Jordanových buněk matice AB příslušných témuž vlastnímu číslu zvětšily, nebo zmenšily maximálně o 1.

Upozorněme, že se může zvětšit, nebo zmenšit počet sloupců diagramu. Nové sloupce však nemohou mít více než jeden prvek. Mohou tedy přibýt nové Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu 0. Nejedná se proto nutně jen o „přelévání" řádů buněk mezi již existujícími, což lze dokumentovat i na konkrétním, velmi jednoduchém příkladu. Je-li

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

potom

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jordanův kanonický tvar matice AB má Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu 0 dvě (řádu 2 a 1), Jordanův kanonický tvar matice BA má tyto buňky tři (všechny řádu 1).

Ross A. Lippert publikoval následujícího roku práci

• *Fixing multiple eigenvalues by a minimal perturbation* [Li1],

jejíž hlavní náplň je, velmi zhruba řečeno, následující: nechť je dána matice M řádu n a navzájem různá čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$, $u \leq n$. Hledáme „co nejmenší změnu" $\triangle M$ matice M takovou, aby měla matice $(M - \triangle M)$ předepsaná vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$.

Rovněž v tomto textu je samostatná pasáž věnovaná Weyrově charakteristice:

This article proceeds with a short section of notation, followed by a review of the Weyr characteristic, which provides a compact formulation of the previous results which suggest their generalization ... ([Li1], str. 1786)

Ve zmíněné partii potom čteme:

The Weyr characteristic is a combinatorial structure for describing the canonical form of a matrix. Readers are no doubt familiar with the Jordan canonical form, where the combinatorial structure is a multiset of block orders ... for each $\lambda \in \mathbb{C}$. ([Li1], str. 1788)

The power of the Weyr characteristic is its ability to describe structured eigenvalues in a way that makes it easy to talk about the relative genericity of different structures ... ([Li1], str. 1789)

Několikrát je zmíněn termín *Weyrův kanonický tvar* – zřejmě po vzoru Helene Shapiro, jejíž práce z roku 1999 je zde citována. Mezi položkami literatury nalezneme i práci Charlese Loewnera *Über monotone Matrixfunktionen* z roku 1934.

V roce 2010 vyšla další z prací věnovaných perturbacím, která se tentokrát zabývá maticemi s pozměněnými prvky v posledních několika sloupcích. Jedná se o článek

• *The change of feedback invariants under column perturbations: particular cases* [BCHP1].

Mezi nám známá jména autorů María Asunción Beitia a Inmaculada de Hoyos přibyla jména nová: Albert Compta a Marta Peña.

V práci

• *Block triangular miniversal deformations of matrices and matrix pencils* [KS1],

kterou napsala ukrajinská dvojice matematiků Lena Klimenko a Vladimir Sergejčuk, opět nalézáme termín *Weyrův kanonický tvar*. Na více místech můžeme číst pasáže, které zdůrazňují důležitou vlastnost tohoto tvaru: všechny matice s ním komutující jsou blokově trojúhelníkové. Pro českou matematiku je také potěšující, že i v této publikaci nalézáme citaci konkrétní Weyrovy práce, tentokrát článku *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces*.

Prostor pro publikaci výsledků spojených s Eduardem Weyrem poskytl jediný svazek časopisu Linear Algebra and its Applications z roku 2012, konkrétně svazek číslo 436. V něm postupně vyšly tři články zmiňující Weyra, jejichž autoři působí ve zcela odlišných destinacích, čemuž se však vzhledem k dnešním komunikačním technologiím, mezinárodním konferencím, celosvětové spolupráci, výměnným pobytům apod. nelze divit. Každopádně lze soudit, že povědomí o Weyrových výsledcích se dostává stále k více jednotlivcům po celém světě.

• *On commuting matrices in max algebra and in classical nonnegative algebra* [KSS1],

první ze zmíněných prací, napsali Richardo D. Katz, Hans Schneider a Sergej Sergeev.[327] Weyrovo pojednání *Zur Theorie der bilinearen Formen* citovali

[327] Zde se například jedná o spolupráci matematiků, kteří pracují po řadě na univerzitách v Argentině, USA a Spojeném království.

v přehledu historie studia komutativity komplexních matic, a to opět díky blízkému vztahu Weyrova kanonického tvaru a množiny navzájem komutujících matic.

S novým termínem *Weyr array* se setkáme v druhé z prací, v článku

• *A parametrization of matrix conjugacy orbit sets as unions of affine planes* [Dg1],

kterou napsal litevský matematik Peteris Daugulis. Nejedná se však o nic jiného než o Weyrovu charakteristiku matice.

Poslední z příspěvků má název

• *Remarks on the classification of a pair of commuting semilinear operators* [DHKS1].

Vznikla ve spolupráci matematiků z Brazílie, USA a Ukrajiny, jejími autory jsou Debora Duarte de Oliveira, Roger Alan Horn, Tatjana Klimčuk a Vladimir V. Sergejčuk.

5.8 Historické články

Výsledky Eduarda Weyra nalezly odezvu nejen v odborných časopisech, jeho pracemi se zabývali i historikové matematiky.

V průběhu sedmdesátých let publikoval několik článků týkajících se historie algebry Thomas Hawkins. Práce

• *Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory* [Hw1]

z roku 1972 již byla zmíněna v druhé kapitole, neboť v ní jsou odkazy na Weyrovu práci o teorii determinantů a na jeden z Weyrových článků věnovaný lineárním asociativním algebrám. Hawkinsův článek však obsahuje i ohlasy na Weyrovy krátké, francouzsky psané texty *Sur la théorie des matrices* a *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* z roku 1885, které mají charakter předběžného oznámení výsledků Weyrovy teorie. Oba tyto články jsou citovány i v Hawkinsových pracích z roku 1977 nazvaných

• *Another Look at Cayley and the Theory of Matrices* [Hw4],

resp.

• *Weierstrass and the Theory of Matrices* [Hw5],

v nichž jsou dále referovány i Weyrovy rozsáhlé práce přinášející podrobný výklad jeho teorie charakteristických čísel – *Zur Theorie der bilinearen Formen*, resp. v druhém článku *O theorii forem bilinearných* i *Zur Theorie der bilinearen Formen.* Z prvního Hawkinsonova článku z roku 1977 je převzata následující citace, jejíž závěr poodkrývá skutečnost, jaké výsledky mohly pražskému matematikovi posloužit jako inspirace při budování jeho teorie. Jak však již víme, Eduard Weyr se o výsledky svých současníků příliš neopíral a vydal se svou vlastní originální cestou:

Some of the defects in the papers of Cayley and Sylvester, including their treatment of Cayley's theorem on commuting matrices, were remedied by E. Weyr [1885a, 1885b, 1890], A. Buchheim [...] and H. Taber [...], all of whom employed theorems on canonical matrix forms. Buchheim and Taber used the Jordan canonical form, which Buchheim learned from his study of Jordan's Traité des *substitutions [...] and Taber learned through Buchheim's papers. Weyr devised his own theory of canonical matrix forms based upon Sylvester's concept of the nullity of a matrix. When Weyr wrote [1890] he was acquainted with Weierstrass' theory of elementary divisors and Frobenius' paper [1878], but it is unclear wheather he was acquainted with them when he wrote his notes of 1885.* ([Hw4], str. 107)

Na Weyrovo pojednání *Zur Theorie der bilinearen Formen* reagoval i nizozemský matematik Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996) v knize

• *A history of algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether* [Wn1],

kterou publikoval roku 1985.

V roce 2006 absolvoval v Paříži svá doktorská studia Frédéric Brechenmacher (nar. 1971) disertační prací *A history of the Jordan canonical form theorem.* Vzhledem k názvu, a tedy i náplni práce není překvapivé, že byl obeznámen s Weyrovými výsledky, k čemuž zřejmě pomohla i skutečnost, že některé práce byly Weyrem psány ve francouzštině.

Jeho historické články jsou často charakterizovány značným rozsahem, velkým množstvím citací původních děl, vloženými grafy, schématy a tabulkami, které jsou většinou umístěny na konci práce.

V roce obhajoby Brechenmacher publikoval sedmdesátistránkovou práci

• *Les matrices: formes de représentation et pratiques opératoires (1850–1930)* [Bm1].

Ihned v jejím úvodu jsou pro srovnání uvedeny originální definice z prací Sylvestera, Cayleyho a Weyra. Text práce je dělen do tří větších celků, ty dále do dvou či tří sekcí. Z celkových osmi jsou výsledkům Eduarda Weyra věnovány dvě části. První z nich (přibližně třístránková) je nazvána *La formation des "espèces de matrices" d'Eduard Weyr.* Věnována je oběma Weyrovým francouzsky psaným statím z roku 1885 a je psána formou citací útržků těchto prací a jejich komentářů. V úvodu je zdůrazněno Weyrovo ojedinělé přijetí teorie matic a také jeho vztah k výsledkům Jamese Josepha Sylvestera:

Sur le continent, le premier mathématicien à employer la notion de matrice en référence à Cayley est un géomètre de Prague dénommé Eduard Weyr ... Les premiers travaux de Weyr sur les matrices sont inspirés des publications faites par Sylvester ... entre 1882 et 1885 ...

... c'est surtout la notion de matrice dérogatoire de Sylvester qui va inspirer les travaux du géomètre de Prague par un rapprochement avec le problème de la caractérisation des substitutions semblables. ([Bm1], online verze, str. 29)

Druhá z uvažovaných částí (přibližně čtyřstránková) má název *La rencontre de la théorie des formes bilinéaires et de la théorie des matrices.* Je věnována Weyrově práci *Zur Theorie der bilinearen Formen* z roku 1890, česká verze zmíněna není. Citace z německé práce jsou Brechenmacherem interpretovány v jeho francouzském překladu. Citujme opět část úvodu této partie:

Le mémoire intitulé "Sur les formes bilinéaires", publié par Weyr dans le premier numéro des Monasberichte für Mathematik und Physik, a pour objet de réorganiser la théorie des formes bilinéaires par la notion "plus abstraite" de matrice ... ([Bm1], online verze, str. 33)

V seznamu literatury je uvedeno šest Weyrových publikací.[328] Teprve po uvedení bibliografických informací je do práce vloženo 15 samostatných listů, z nichž každý shrnuje formou tabulek, grafů apod. určitou problematiku. Tři z nich mají úzkou spojitost s Eduardem Weyrem. V pořadí osmý list, nazvaný *Quelques éléments biographiques sur Eduard Weyr*, je věnován stručnému představení jeho života, v pořadí jedenáctý a dvanáctý list, nazvané *Comparaison du calcul des matrices de Weyr et de la théorie des matrices de Cayley* a *Comparaisons entre Weyr et Cayley*, se zabývají porovnáním Weyrova a Cayleyova přístupu k definici matice a k maticovým operacím. To vše je zachyceno ve dvou sloupcích, levý je věnovaný Cayleymu a pravý Weyrovi.

Na základě Brechenmacherovy disertační práce bylo roku 2008 publikováno pojednání

• *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870–1930)* [Bm2].

Zde není Weyrovi věnováno příliš prostoru, citována je pouze Weyrova práce *Zur Theorie der bilinearen Formen.*

Poslední z prací Frédérica Brechenmachera, kterou zmíníme, je

• *Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques* [Bm3].

V ní je popsán vývoj komunity zabývající se teorií matic od jejích izolovaných výsledků až k jednotné symbolice. Součástí tohoto pojednání jsou opět dodatky. Upozorněme, že jsou zde uvedeny zajímavé sloupcové diagramy (každý sloupec pro období pěti let v celkovém časovém rozmezí od roku 1871 do roku 2000), které znázorňují počet publikací, v nichž se vyskytuje termín matice, počet publikací s termínem matice v názvu apod. V seznamu literatury je obsažena Weyrova práce *Zur Theorie der bilinearen Formen* a rovněž monografie Jindřicha Bečváře (a kol.) *Eduard Weyr (1852–1903)* – viz dále.

5.9 Monografie z let 2011 a 2013

V roce 2011 vyšla monografie, která je věnována Weyrovu kanonickému tvaru a která má Weyrovo jméno přímo v názvu. Jmenuje se

• *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* [OCV1].

Původně zamýšlený název knihy mající čtyři sta stran, *The Weyr Form: A Useful Alternative to the Jordan Canonical Form*, upozorňoval na českého matematika ještě více. Změněn byl na návrh dvou recenzentů, kteří doporučili modifikovat titul tak, aby lépe vyjadřoval širší náplň knihy. Nahlédneme-li do její verze před oponentským řízením[329] a současně do publikovaného provedení, zjistíme, že názvy kapitol a podkapitol zůstaly nezměněny, kniha byla (vedle změny názvu) pouze nově rozdělena na dvě části.

Než se dostaneme k rozboru knihy, nemůžeme opomenout její autory. Monografii napsali Kevin C. O'Meara, John Clark a Charles Irvin Vinsohaler. Připomeňme, že O'Meara a Vinsonhaler jsou autoři článku, v němž Weyrův

[328] Konkrétně se jedná o práce [We3], [We5], [We6], [We9], [We10] a [We13].

[329] Děkujeme panu profesoru Miroslavu Fiedlerovi za laskavé zapůjčení předběžné verze knihy z roku 2010, která ještě nese původní název.

kanonický tvar nazývali *H-form.* V názvu knihy, k radosti české matematiky, však použili pro tento kanonický tvar termín odkazující na Eduarda Weyra.[330]

Kniha je psána uvolněným stylem, z něhož je znát potěšení autorů z tématu. Výklad je však veden zcela exaktně, je použita přesná matematická terminologie. Monografii zlidšťují poznámky nejrůznějšího druhu uvedené v předmluvě knihy, v úvodech k jednotlivým kapitolám či v poznámkách pod čarou.[331] Uveďme například věty z poděkování autorů:

First and foremost, I'm most grateful to Kevin and Chuck for inviting me on board the good ship Weyr form. ([OCV1], str. xxii, J. Clark)

The biggest thanks goes to my family ... They happily adopted a new member into the family, "the book". ([OCV1], str. xxii, K. O'Meara)

Autoři se nevyhýbali ani použití rčení, aforismů, idiomů. Předmluva knihy začíná následujícími slovy, která vyjadřují jakýsi dluh vůči výsledkům Eduarda Weyra:

"Old habits die hard." This maxim may help explain why the Weyr form has been almost completely overshadowed by its cousin, the Jordan canonical form. Most have never even heard of the Weyr form, a matrix canonical form discovered by the Czech mathematician Eduard Weyr in 1885. in the 2007 edition of the Handbook of Linear Algebra, a 1,400-page, authoritative reference on linear algebra matters, there is not a single mention of the Weyr form (or its associated Weyr characteristic). But this canonical form is as useful as the Jordan form, ... Our book is in part an attempt to remedy this unfortunate situation of a grossly underutilized mathematical tool, by making the Weyr form more accessible to those who use linear algebra at its higher level. Of course, that class includes most mathematicians, and many others as well in the sciences, biosciences, and engineering. And we hope our book also helps popularize the Weyr form by demonstrating its topical relevance, to both "pure" and "applied" mathematics. We believe the applications to be interesting and surprising. ([OCV1], str. xi)

Ukázka zároveň nastínila obsah monografie. Přesnější představu umožňují následující odstavce uvedené na zadní straně desek, které velmi výstižně náplň knihy vystihují.

... Discovered by Eduard Weyr in 1885, the Weyr form outperforms the Jordan form in a number of mathematical situations, yet it remains somewhat of a mystery, even to many who are skilled in linear algebra.

---

[330] I v letech, v nichž monografie vznikala, byli autoři spojeni s The University of Connecticut, se školou mající za maskota huskyho. O jejich působišti je těžké rozhodnout. O tom svědčí i skutečnost, že v pracovní verzi z roku 2010 je u O'Mearyho uvedeno místo *Brisbane, Australia*, u Clarka *The University of Otago, New Zealand* a u Vinsonhalera *The University of Connecticut, Storrs, USA*, zatímco na obalu knihy je údaj následující: *Kevin C. O'Meara ... based mostly at the University of Canterbury, New Zealand, but with many visits to the University of Connecticut, USA.* Z poděkování uvnitř monografie pochopíme, že se matematikové velmi často setkávali a pobývali na více univerzitách po světě. Pro zajímavost podotkněme, že na jedné z těchto univerzit, konkrétně na The University of Otago, studoval A. C. Aitken.

[331] Na začátku knihy je přibližně dvoustránková pasáž nazvaná *Our style*, v níž autoři „obhajují“ volbu svého slohu.

Written in an engaging style, this book presents various advanced topics in linear algebra linked through the Weyr form. Kevin O'Meara, John Clark, and Charles Vinsonhaler develop the Weyr form from scratch and include an algorithm for computing it. A fascinating duality exists between the Weyr form and the Jordan form. Developing an understanding of both forms will allow students and researchers to exploit the mathematical capabilities of each in varying situations.

Weaving together ideas and applications from various mathematical disciplines, Advanced Topics in Linear Algebra is much more than a derivation of the Weyr form. It presents novel applications of linear algebra, such as matrix commutativity problems, approximate simultaneous diagonalization, and algebraic geometry, with the latter two having topical connections to phylogenetic invariants in biomathematics and multivariate interpolation. Among the related mathematical disciplines from which the book draws ideas are commutative and noncommutative ring theory, module theory, field theory, topology, and algebraic geometry. Numerous examples and current open problems are included, increasing the book's utility as a graduate text or as a reference for mathematicians and researches in linear algebra.

Práce je rozdělená na dvě části srovnatelné rozsahem. První se nazývá *The Weyr Form and Its Properties*, druhá *Applications of the Weyr Form*.

První část obsahuje čtyři kapitoly, jejichž názvy jsou

1 Background Linear Algebra,
2 The Weyr Form,
3 Centralizers,
4 The Module Setting.

Druhá část obsahuje tři kapitoly nesoucí názvy

5 Gerstenhaber's Theorem,
6 Approximate Simultaneous Diagonalization,
7 Algebraic Varieties.

V závěru každé ze sedmi kapitol je partie věnovaná životu některého z matematiků nebo dvojice matematiků, kteří hráli podstatnou roli v dané problematice. Jedná se o následující biografické poznámky:

Biographical Notes on Jordan and Sylvester,
Biographical Note on Weyr,
Biographical Note on Frobenius,
Biographical Note on Von Neumann,
Biographical Notes on Cayley and Hamilton,
Biographical Notes on Motzkin and Taussky,
Biographical Notes on Hilbert and Noether.

Další historické poznámky jsou občas vloženy i uvnitř kapitol. K historii matematiky autoři napsali:

It is easy to forget that mathematics has been, and continues to be, developed by real people, each generation building on the work of the previous – not tearing it down to start again, as happens in many others disciplines. ([OCV1], str. xiv)

Vraťme se k jednotlivým kapitolám první části, která obsahuje především představení Weyrova tvaru a jeho vlastností, zejména ke kapitole druhé, věnované takřka výhradně Weyrovu kanonickému tvaru.

První kapitola sumarizuje některé důležité pojmy lineární algebry, které budou v textu používány, a představuje symboliku a terminologii používanou v knize. Začíná u triviálních pojmů (algebraicky uzavřené pole, hodnost, nulita a jádro lineární transformace), pokračuje přes pojmy spjaté se spektrálními vlastnostmi matice (vlastní číslo, vlastní vektor, charakteristická rovnice, Cayleyova-Hamiltonova věta apod.). Dále je věnována pozornost blokovým maticím, blokově trojúhelníkovým maticím, podobnosti matic, diagonalizovatelnosti matice či nilpotentním maticím. Další strany jsou o známém Jordanově kanonickém tvaru; upozorněme, že Jordanova buňka je nazývána *basic Jordan matrix*, Segreova charakteristika *Jordan structure*.

Druhá kapitola je plně věnována Weyrovu kanonickému tvaru.

Here enters the principal actor ... the form has been rediscovered periodically, under various names .... authors attempted to convey their enthusiasm for the form to others, but the Weyr form has never really caught on. ([OCV1], str. 44)

V úvodu kapitoly se autoři zamýšlejí nad tím, proč byl Weyrův tvar dosud přehlížen a proč je mnohem méně známý než Jordanův kanonický tvar. Uvádějí i banální důvod: Jordanův tvar je „hezčí“. Domnívají se rovněž, že matematikové, kteří přišli do styku s Weyrovým kanonickým tvarem pouze povrchně, mohli usoudit, že se jedná až na simultánní permutace řádků a sloupců o Jordanův kanonický tvar, takže se není nutné nový tvar učit. Autoři však upozorňují, že se při bližším studiu ukáže, že pro řešení některých problémů má Weyrův tvar vhodnější vlastnosti než tvar Jordanův.

Autoři ukázali, že Jordanův kanonický tvar a Weyrův kanonický tvar (který prozatím exaktně nedefinovali) jsou maticemi téhož endomorfismu, ale vzhledem k různě uspořádaným bázím. Poté zavedli Weyrův blok příslušný vlastnímu číslu λ, který nazvali *basic Weyr matrix with eigenvalue* λ. Nerostoucí posloupnost řádů bloků na diagonále této matice, tj. Weyrovu charakteristiku matice příslušnou vlastnímu číslu λ, pojmenovali *Weyr structure of a matrix associated with* λ.

Teprve po definici Weyrova kanonického tvaru, který nazvali zkráceně *Weyr form* nebo též *Weyr matrix*, a také po partii věnované jednoznačnosti Weyrova kanonického tvaru, překvapivě zavedli i pojem *Weyr characteristic of A associated with the eigenvalue* λ jako nekonečnou posloupnost $(\eta_1, \eta_2, \ldots)$, kde

$$\eta_i = \operatorname{nul}(A - \lambda E)^i - \operatorname{nul}(A - \lambda E)^{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Poté napsali, že v jejich terminologii je posloupnost počátečních nenulových prvků Weyrovy charakteristiky dané matice příslušná vlastnímu číslu λ totožná s Weyrovou strukturou této matice příslušnou stejnému vlastnímu číslu. Ke zvolené terminologii (v poznámce pod čarou) poznamenali:

The corresponding Jordan form term is historically referred to as the Segre characteristic, with no mention of Jordan. For the sake of consistency, we choose "Jordan structure" over "Segre characteristic," and "Weyr structure" over "Weyr characteristic." ([OCV1], str. 61)

V textu jsou občas používány obě varianty, převažuje však posloupnost konečná, tedy Weyrova struktura. Příkladem zdvojení formulace je tvrzení, že dvě matice nad algebraicky uzavřeným polem jsou podobné právě tehdy, když mají stejná vlastní čísla a stejnou Weyrovu charakteristiku – nebo v závorce Weyrovu strukturu – příslušnou těmto vlastním číslům.

Další stránky knihy jsou věnovány půvabné vlastnosti Jordanova a Weyrova kanonického tvaru nilpotentní matice, která se týká násobení obecnou maticí. V textu se s nilpotentní maticí pracuje velmi často, využívá se rozklad aritmetického vektorového prostoru dimenze n na invariantní podprostory a „posunů“ od nenulových vlastních čísel na nulové vlastní číslo.

Uvědomme si, že nilpotentní matice má jediné vlastní číslo 0.[332] Vynásobme matici B zprava Jordanovým kanonickým tvarem J nilpotentní matice A, který má jedinou buňku příslušnou vlastnímu číslu 0 (matici B volíme v následujícím příkladě libovolně, řád matic nechť je například čtyři):

$$BJ = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & e & f & g \\ 0 & i & j & k \\ 0 & m & n & o \end{pmatrix}.$$

Jestliže výslednou matici opět vynásobíme maticí J zprava, dostaneme matici

$$BJ^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & e & f & g \\ 0 & i & j & k \\ 0 & m & n & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & m & n \end{pmatrix},$$

atd. až konečně

$$BJ^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Násobení Jordanovou buňkou příslušnou vlastnímu číslu 0 zprava tedy posouvá sloupce matice B doprava, v jednotlivých součinech přibude jeden, a to první nulový sloupec a současně je poslední sloupec „smazán“.

[332] Vlastní číslo λ matice A splňuje rovnici $\lambda v^T = Av^T$ pro nenulový vektor v. Protože $A^k v^T = \lambda^k v^T$ a pro nilpotentní matici existuje t takové, že $A^t = O$, plyne z rovnosti $o^T = A^t v^T = \lambda^t v^T$, že $\lambda = 0$. (Pro matici nad algebraicky uzavřeným polem platí i věta obrácená.)

Zcela analogicky funguje násobení uvedenou maticí zleva, tentokrát se posouvají řádky odspodu nahoru, přibude poslední nulový řádek a vymizí první řádek:

$$JB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opětovným násobením výsledného součinu maticí J zleva dojde ke stejným změnám, matice $J^4B = J^5B = \ldots$ budou nulové.

Uvážíme-li případ $B = J$, budou mít matice J, J^2 a J^3 tvary

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a matice $J^4 = J^5 = \ldots$ budou nulové. Dochází tedy k „vysouvání nenulové diagonály“ k pravému hornímu rohu schématu.

Je přirozené se dále ptát, zda obdoba těchto jednoduchých a efektních vlastností platí i pro Weyrův kanonický tvar příslušný nilpotentní matici.

Nechť W je Weyrův kanonický tvar příslušný nilpotentní matici A, jejíž Weyrova charakteristika je $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$, a B je bloková matice téhož řádu, jejíž bloky na diagonále jsou čtvercové matice řádu $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ (tj. B je rozdělena na bloky stejně jako Weyrův kanonický tvar W matice A). Vynásobme matici B maticí W zprava (prvky matice B jsou v následujícím příkladu opět libovolné, řády matic B a W jsou sedm, Weyrova charakteristika matice A je $(4, 2, 1)$):

$$BW = \left(\begin{array}{cccc|cc|c} a & b & c & d & \bar{a} & \bar{b} & \breve{a} \\ e & f & g & h & \bar{c} & \bar{d} & \breve{b} \\ k & l & m & n & \bar{e} & \bar{f} & \check{c} \\ o & p & q & r & \bar{g} & \bar{h} & \check{d} \\ \hline \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} & \tilde{d} & s & t & \bar{k} \\ \tilde{e} & \tilde{f} & \tilde{g} & \tilde{h} & u & v & \bar{l} \\ \hline \hat{a} & \hat{b} & \hat{c} & \hat{d} & \tilde{k} & \tilde{l} & w \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & \bar{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & f & \bar{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & l & \bar{e} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & o & p & \bar{g} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{a} & \tilde{b} & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{e} & \tilde{f} & u \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{a} & \hat{b} & \tilde{k} \end{array}\right).$$

Dalším násobení maticí W zprava vypočítáme, že

$$
BW^2 = \left(\begin{array}{cccc|cc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & o \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{a} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{e} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{a}
\end{array}\right)
$$

a BW^3 je nulová matice.

Při násobení maticí W zprava dochází opět k vysouvání sloupců, tentokrát o celé bloky (tj. postupně o η_1, η_2, ... sloupců). Vynuluje se postupně prvních η_1, $\eta_1 + \eta_2$, ... sloupců, stejný počet sloupců matice B „zmizí" – nejedná se však nutně o poslední sloupce celé matice, ale o poslední sloupce jednotlivých bloků (při $\eta_i > \eta_{i+1}$ je z bloků B_{ki}, $k = 1, 2, \ldots, t$, kde t je index matice B příslušný vlastnímu číslu 0, smazáno posledních $\eta_i - \eta_{i+1}$ sloupců).

Analogicky funguje násobení Weyrovým tvarem zleva, dochází k posunu celých řad bloků vzhůru (jelikož přesouváme bloky o nižším či stejném počtu řádků do bloků s vyšším či stejným počtem řádků, dochází k doplňování nulových řádků do jednotlivých řad bloků):

$$
WB = \left(\begin{array}{cccc|cc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{cccc|cc|c}
a & b & c & d & \bar{a} & \bar{b} & \breve{a} \\
e & f & g & h & \bar{c} & \bar{d} & \breve{b} \\
k & l & m & n & \bar{e} & \bar{f} & \check{c} \\
o & p & q & r & \bar{g} & \bar{h} & \check{d} \\
\hline
\tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} & \tilde{d} & s & t & \bar{k} \\
\tilde{e} & \tilde{f} & \tilde{g} & \tilde{h} & u & v & \bar{l} \\
\hline
\hat{a} & \hat{b} & \hat{c} & \hat{d} & \tilde{k} & \tilde{l} & w
\end{array}\right) =
$$

$$
= \left(\begin{array}{cccc|cc|c}
\tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} & \tilde{d} & s & t & \bar{k} \\
\tilde{e} & \tilde{f} & \tilde{g} & \tilde{h} & u & v & \bar{l} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\hat{a} & \hat{b} & \hat{c} & \hat{d} & \tilde{k} & \tilde{l} & w \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),
$$

$$
W^2B = \left(\begin{array}{cccc|cc|c}
\hat{a} & \hat{b} & \hat{c} & \hat{d} & \tilde{k} & \tilde{l} & w \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),
$$

matice W^3B je nulová. Pro $B = W$ je

$$W^2 = \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

matice W^3 je nulová. Při zvyšování mocnin Weyrova kanonického tvaru W se posunuje „diagonála nenulových bloků" k pravému hornímu rohu schématu.

Zdá se, že Weyrův kanonický tvar je jakousi „blokovou variantou" Jordanova kanonického tvaru. Dalším příkladem vlastnosti, která platí pro Jordanův kanonický tvar a současně „v blokové verzi" pro Weyrův kanonický tvar, je tvar matic, které komutují s těmito kanonickými tvary. Množina všech matic B, které komutují s danou maticí A, se nazývá *centralizátor* matice A; v monografii je jí věnována samostatná třetí kapitola. Již ve druhé kapitole jsou čtenáři představeny její základní vlastnosti, především pro případ, kdy je danou maticí Jordanova buňka nebo Weyrův blok.

Množina všech matic, které komutují s danou Jordanovou buňkou, je množina horních trojúhelníkových matic příslušného řádu, jejichž prvky ležící v téže linii rovnoběžné s hlavní diagonálou jsou shodné, tj. množina matic tvaru

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \dots & & & \\ & a & b & c & \dots & & \\ & & a & b & c & \dots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Již dříve (u výsledků, které publikoval G. R. Belitskij) jsme představili tvar matic, které komutují s Weyrovým blokem příslušným k jistému vlastnímu číslu. Připomeňme, že se jedná o blokové matice tvaru

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{i+1,\,j+1} & * \\ O & * \end{pmatrix}, \qquad \text{pro} \quad 1 \leq i \leq j \leq t-1,$$

kde na místě $*$ jsou matice o libovolných prvcích. Pokud by charakteristická čísla příslušná k témuž vlastnímu číslu byla shodná, bylo by $A_{ij} = A_{i+1,\,j+1}$, $1 \leq i \leq j \leq t-1$, tedy bloky v téže linii rovnoběžné s hlavní diagonálou bloků jsou shodné.

Následující strany knihy jsou věnovány souvislostem mezi komutativitou konečné množiny matic a jejich současným převedením na trojúhelníkový tvar. Nejprve je uvedeno obecnější tvrzení, že pro množinu $A_1, A_2, \dots, A_k$ navzájem komutujících matic nad algebraicky uzavřeným polem existuje matice C taková, že matice $C^{-1}A_iC$, $i = 1, 2, \dots, k$, jsou horní trojúhelníkové. Poté je formulována věta, kterou jsme již zmínili, že existuje taková matice C, že matice $C^{-1}A_1C$ má Weyrův kanonický tvar a matice $C^{-1}A_iC$, $i = 2, 3, \ldots, k$, jsou horní trojúhelníkové. Skutečnost, že tuto vlastnost nemá Jordanův kanonický tvar, je doložena konkrétním příkladem (na dvojici komutujících matic).

Další partie pojednává o dualitě mezi Jordanovým a Weyrovým kanonickým tvarem.

The duality enables one to mentally flip back and forth between the two forms and decide which form may be the better in a particular circumstance (e.g., notationally or computationally). ([OCV1] str. 74)

Po jejím skončení se v monografii nachází přibližně dvoustránková pasáž věnovaná historii Weyrova kanonického tvaru (zmíněny jsou jména Weyr, Belitskij, Shapiro, Sergejčuk, v souvislosti s použitím jiného termínu opět Belitskij a Sergejčuk a dále O'Meara, Vinsonhaler, Watanabe a Harima).

V posledním paragrafu druhé kapitoly je představen algoritmus pro výpočet Weyrova kanonického tvaru pro nilpotentní matici (bez znalosti Jordanova kanonického tvaru) a ten je demonstrován na dvou konkrétních příkladech.

Poslední částí druhé, z hlediska české matematiky zřejmě nejzajímavější kapitoly je již zmíněná bibliografická poznámka. V kapitole nazvané *The Weyr Form* byla volba matematika, kterému bude věnována pozornost, zřejmá. Jedná se o stručný životopis Eduarda Weyra (str. 94–95). Je uvedeno místo a den jeho narození, zmíněn jeho bratr Emil, pobyty v Göttingen a v Paříži, originalita jeho přístupu k maticovému aparátu na evropském kontinentu, jeho další odborné zaměření (projektivní a diferenciální geometrie) a v závěru místo a datum jeho úmrtí. Z konkrétních Weyrových prací, v nichž se objevil Weyrův kanonický tvar, jsou uvedeny práce *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a *Zur Theorie der bilinearen Formen.*

The latter paper is a wonderful piece of mathematics for its time, modern and clear even by today's standards. It is arguably the first paper in linear algebra, as distinct from matrix theory. It is interesting that Weyr cites the work of Frobenius, Sylvester, Cauchy, and Hermite in canonical forms but never mentions Jordan in this context! ... So, was Weyr aware of the Jordan form? ... Jordan's result appeared in the ... language of permutation group theory and did not evolve into the canonical matrix form of choice until the 1930s. In the meantime, Weyr's form sank into obscurity. It would appear that Weyr himself never really appreciated the utility of his own form in commutativity problems, ... ([OCV1], str. 95)

Rovněž v bibliografii knihy jsou, poněkud překvapivě, uvedeny pouze tyto dvě práce. K ospravedlnění autorů však uveďme, že kniha je věnována především Weyrovu kanonické tvaru, nikoliv obecně rozpracování Weyrovy teorie charakteristických čísel. V druhém Weyrově francouzsky psaném článku z roku 1885 Weyrův *typický tvar* uveden nebyl. Proč nebyl zmíněn český spis *O theorii forem bilinearných* se můžeme jen domnívat. Zřejmě nás napadne, že důvodem je jazyková bariéra. Nicméně podotkněme, že u některých jiných matematiků, kteří publikovali své výsledky např. nejprve ve svém rodném jazyce a až poté např. v angličtině, autoři monografie alespoň zmiňují i původní verzi práce. Je tedy možné, že česky psaný spis neznali.

Třetí kapitola, nazvaná *Centralizers*, se do hloubky věnuje množině všech matic komutujících s Jordanovým a především s Weyrovým kanonickým tvarem. Začíná studiem vlastností množiny $\mathcal{C}(A)$ všech matic komutujících s libovolnou danou čtvercovou maticí A řádu n nad algebraicky uzavřeným polem. Tato množina tvoří podalgebru prostoru všech čtvercových matic řádu n. Dimenze tohoto podprostoru lze vyjádřit, jak již bylo řečeno, jako součet čtverců všech charakteristických čísel, která přísluší ke všem vlastním číslům matice A. Monografie pracuje opět pouze s nilpotentní maticí. Dimenze prostoru všech matic komutující s danou nilpotentní maticí A je tedy

$$\dim \mathcal{C}(A) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_t^2,$$

kde $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$ je Weyrova charakteristika matice A (příslušná jedinému vlastnímu číslu 0). Monografie uvádí také výpočet této dimenze s pomocí prvků Segreovy charakteristiky $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)$, neboli tzv. Frobeniovu formuli:

$$\dim \mathcal{C}(A) = \xi_1 + 3\xi_2 + 5\xi_3 + \ldots + (2k-1)\xi_k + \ldots + (2q-1)\xi_q.$$

Rovnost

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_t^2 = \xi_1 + 3\xi_2 + 5\xi_3 + \ldots + (2k-1)\xi_k + \ldots + (2q-1)\xi_q$$

platí obecně pro jakékoli duální posloupnosti $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)$ a $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$.

Je-li tedy například Weyrova charakteristika dané matice příslušná nulovému vlastnímu číslu (5, 2, 2, 1), je odpovídající Segreova charakteristika (4, 3, 1, 1, 1) a[333]

$$\dim \mathcal{C} = 5^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 = 4 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 34.$$

Při studiu prostoru $\mathcal{C}(W)$ a $\mathcal{C}(J)$, kde W, resp. J značí Weyrův, resp. Jordanův kanonický tvar matice, jsou opět vyzdvihovány některé kvalitnější vlastnosti prvně jmenovaného tvaru.

The Weyr form is superior to the Jordan form when it comes to centralizers. ([OCV1], str. 96)

Již v druhé kapitole přitom bylo k této otázce napsáno:[334]

If the authors had to pick out just one feature of the Weyr form that makes it so useful for our later applications, better than the Jordan form, they would go for the description of the centralizer of a nilpotent Weyr matrix.
([OCV1], str. 66)

---

[333] Vzhledem k vzájemné dualitě posloupností platí i rovnost

$$4^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 28 = 5 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1.$$

Nevyjadřuje již však dimenzi $\mathcal{C}(A)$.

[334] V recenzi knihy v Zentralblattu (Zbl 1235.15013, John D. Dixon) je rovněž stručně napsáno:

Part I of this book is an elementary introduction to the Weyr form, its elementary properties, and advocacy for the benefits of this form vis-à-vis the Jordan form.

Čtvrtá kapitola *The Module Setting* je z velké části věnována teorií modulů, která je zde vybudována od svých základů. V její poslední třetině je dán Weyrův kanonický tvar do souvislosti s tzv. von Neumannovými regulárnímu okruhy. Okruh $\mathcal{R}$ se nazývá *von Neumannův regulární*, jestliže ke každému jeho prvku $a \in \mathcal{R}$ existuje prvek $b \in \mathcal{R}$ takový, že $a = aba$.

Druhá část knihy je věnována aplikacím Weyrova kanonického tvaru. Na jejím počátku je napsáno:

The time has come to put the Weyr form to work. ([OCV1], str. 201)

V páté kapitole knihy, nazvané *Gerstenhaber's Theorem*, je využit Weyrův kanonický tvar k důkazu tzv. Gerstenhaberovy věty. Uvažujme pole $\mathcal{F}$ a prostor všech čtvercových matic řádu n nad tímto polem. Z Cayleyovy-Hamiltonovy věty plyne, že podalgebra $\mathcal{F}[A]$ generovaná jedinou maticí A může mít dimenzi nejvýše n. Podprostor $\mathcal{F}[A, B]$ generovaný dvěma maticemi A, B může mít, při vhodné volbě matic A a B, dimenzi n^2. Murray Gerstenhaber dokázal roku 1961 v článku *On dominance and varieties of commuting matrices* [Gh2], že pokud požadujeme, aby matice A a B byly komutující, potom tato dimenze opět nepřevýší n. Gerstenhaber (následován dalšími matematiky) dokázal toto tvrzení prostředky algebraické geometrie. Začátkem devadesátých let 20. století byl tento poznatek dokázán v řeči lineární algebry v článku *Vector bases for two commuting matrices*, který napsali José Barría a Paul Richard Halmos (1916–2006), a v pojednání *Two-generated commutative matrix subalgebras*, který publikovali Thomas J. Laffey a Susan Lazarus.[335] Autoři monografie zjednodušili důkaz dvojice Barría–Halmos, který využíval Jordanův kanonický tvar, tím, že vedle tohoto tvaru využili i Weyrův kanonický tvar.

V šesté kapitole se autoři věnují přibližně současně diagonalizovatelným maticím. Rozpracovali zde výsledky, které O'Meara a Vinsonhaler předložili v roce 2006 v článku *On approximately simultaneously diagonalizable matrices* (viz výše). V úvodu kapitoly popisují, jak se k problematice Weyrova kanonického tvaru dostali. Překvapivým počátečním impulsem byl problém řešený fylogenetiky. Při studiu tzv. fylogenetických invariantů v biomatematice, konkrétně v práci *Phylogenetic invariants for the general Markov model of sequence mutation*,[336] jejímiž autory jsou Elizabeth S. Allman a John A. Rhodes, bylo nutné řešit otázku, kdy je konečná skupina komutujících matic přibližně současně diagonalizovatelná. Na základě studia tohoto problému zavedli O'Meara a Vinsonhaler pojem *H-form* a sepsali jmenovaný článek z roku 2006, v němž „znovuobjevili" Weyrův kanonický tvar. Po pěti letech mu věnovali uvažovanou monografii.

Součástí této kapitoly je také osmistránková pasáž pojednávající o fylogenetice. S jejím napsáním pomohla Elizabeth Allman.

[335] Barría J., Halmos S., *Vector bases for two commuting matrices*, Linear and Multilinear Algebra 27(1990), 147–157. Laffey T. J., Lazarus S., *Two-generated commutative matrix subalgebras*, Linear Algebra and its Applications 147(1991), 249–273.

[336] Allman E. S., Rhodes J. A., *Phylogenetic invariants for the general Markov model of sequence mutation*, Mathematical Biosciences 186(2003), 113–144. K autorům se tato problematika dostala s pomocí význačného fylogenetika Mika Steela.

Poslední kapitola propojuje studovanou problematiku s algebraickou geometrií.

But what has algebraic geometry got to do with our linear algebra problems? Quite a lot, as it turns out, because the ASD (approximate simultaneous diagonalization) question for k commuting $n \times n$ matrices over $\mathbb{C}$ .... is equivalent to the irreducibility of a certain affine variety of matrices over $\mathbb{C}$.
([OCV1], str. 309)

Monografie *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* se nestala pouze jednou v řadě mnoha knih věnovaných lineární algebře. Evidentně nezůstala bez povšimnutí, povědomí o její existenci se rychle rozšířilo mezi algebraickou komunitou.[337]

Připojme hodnocení monografie Rogera Horna, kterému je v práci věnováno poděkování za cenné připomínky během vzniku publikace:[338]

That book is the best publicity for Weyr's ideas that has ever been published.

Na počátku roku 2013 bylo publikováno druhé vydání monografie *Matrix Analysis*, kterou napsali Roger A. Horn a Charles R. Johnson. Jedná se o značně přepracovanou verzi prvního vydání z roku 1985.[339]

Nahlédneme-li do prvního vydání, s Weyrovou charakteristikou či Weyrovým kanonickým tvarem se v něm nesetkáme. Roger Horn, hlavní autor práce, totiž tehdy Weyrovy výsledky neznal:[340]

I did not know about Weyr or his characteristic in the early 1980s, when I worked on the first edition of Matrix Analysis. I had learned nothing about him or his work as a student. I think I first became aware of Weyr and his work through correspondence with Vladimir Sergeichuk in Kiev, starting in the early 1990's. I shared my version of the history of the Weyr form with Kevin O'Meara, who incorporated them into historical remarks on pp. 80–82 of his new book ...

V druhém vydání však je situace zcela odlišná:

When I rewrote the sections of Chapter 3 dealing with the canonical forms for similarity, I recast the exposition in terms of the Weyr characteristic. This is a big change from the first edition, and I hope that readers will find it a clearer way to understand the basic similarity invariants of complex matrices.

Jedná se o přeformulování výsledků o kanonických tvarech s využitím poznatků Weyrovy teorie charakteristických čísel. Sami autoři v předmluvě k druhému vydání uvádějí, že 3. kapitola obsahuje z šedesáti procent novou látku. Uveďme pro srovnání název 3. kapitoly a jejích podkapitol v prvním vydání

[337] Soudíme tak na základě emailové korespondence autorky disertační práce, která proběhla přibližně rok po zveřejnění knihy a v níž řada matematiků tuto monografii zmínila. V následujícím roce ji již nacházíme v seznamech pramenů nejnovějších odborných článků.

[338] Z emailové korespondence s autorkou této disertační práce (říjen 2012).

[339] Kniha byla roku 1989 publikována v ruštině pod názvem *Matričnyj analiz.*

Děkujeme Rogeru Hornovi, který autorce této disertační práce poskytl již v říjnu roku 2012 kopii třetí, z hlediska Weyrových výsledků stěžejní kapitoly připravovaného druhého vydání.

[340] Z emailové korespondence s autorkou disertační práce (říjen 2012). Totéž platí i pro úryvek následující.

a v druhém, takřka o třicet let mladším vydání:

3 Canonical forms
3.0 Introduction
3.1 The Jordan canonical form: a proof
3.2 The Jordan canonical form: some observations and applications
3.3 Polynomials and matrices: the minimal polynomial
3.4 Other canonical forms and factorizations
3.5 Triangular factorizations

3 Canonical Forms for Similarity and Triangular Factorizations
3.0 Introduction
3.1 The Jordan canonical form theorem
3.2 Consequences for the Jordan canonical form
3.3 The minimal polynomial and the companion matrix
3.4 The real Jordan and Weyr canonical forms
3.5 Triangular factorizations and canonical forms

Weyrova charakteristika je přitom zavedena již v podkapitole 3.1, a to pomocí rozdílu hodností (nikoli nulit) matic $(A-\lambda E)^k$ a $(A-\lambda E)^{k-1}$. K terminologii poznamenejme, že monografie používá v podstatě „naše" termíny: *Weyr characteristic*, *Weyr block* či *Weyr canonical form*. Weyrova matice, která je podobná dané matici je poté nazvána Weyrovým kanonickým tvarem této matice.

Zdůrazněny jsou opět dvě specifické vlastnosti Weyrova kanonického tvaru: jednak jednoduchý tvar matic, které s ním komutují, a dále existence invertibilní matice, která převádí podobnou transformací konečnou množinu navzájem komutujících matic na horní blokově trojúhelníkové matice, z nichž jedna je ve Weyrově kanonickém tvaru.

Součástí 3. kapitoly je i doporučená literatury pro další četbu. Zmíněny jsou opět nám známá jména: Weyr, Shapiro, O'Meara, Clark, Vinsonhaler, Belitskij, Sergejčuk. V souvislosti s větou o převodu matice na horní trojúhelníkovou matici pomocí podobné transformace je zmíněn článek *On unitary equivalence*, který napsal britský matematik Dudley Ernest Littlewood[341] (1903–1979). Z Weyrových prací jsou opět zmíněny pouze *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a *Zur Theorie der bilinearen Formen*, v seznamu literatury na konci knihy dokonce žádná Weyrova práce uvedena není.

Roger Horn je však s existencí českého spisu i druhého francouzsky psaného článku z roku 1885 obeznámen.[342]

Yes, I knew about the Czech language predecessor of the famous German Weyr paper, but of course I could not read it. I have copies of the two Comptes Rendus Paris announcements in my files ...

[341] Littlewood D. E., *On unitary equivalence*, Journal of the London Mathematical Society 28(1953), str. 314–322.
[342] Z emailové korespondence s autorkou disertační práce (říjen 2012).

Podotkněme, že kniha obsahuje řadu otázek určených k zamyšlení nad tématem a že se Weyrova charakteristika výjimečně vyskytuje i mimo třetí kapitolu.

Již první vydání knihy řadíme mezi význačné publikace lineární algebry. Patří mezi často citované monografie, je používána na školách. Uveďme odpověď Franka Jerry Halla[343] na otázku, zda je Weyrova charakteristika vyučována na univerzitách v Americe.

Ne, ne ... nyní však máme druhé vydání Hornovy a Johnsonovy knihy, která je používána v mnoha školách, takže nyní vyučována bude.

Dá se tedy očekávat další prohloubení povědomí o Weyrových výsledcích mezi studenty a následkem toho i v širší matematické komunitě.

Na závěr uveďme pro českého čtenáře milou skutečnost. Monografie *Matrix Analysis* má „české kořeny“, oba autoři jsou doktorandy v českých zemích narozených matematiků. Školitelem Rogera Horna byl Charles Loewner, školitelkou Charlese Johnsona byla Olga Taussky-Todd.

5.10 Z korespondence se zahraničím

Nechme nyní vyprávět hlavní aktéry příběhu, kteří v zahraničí Weyrovu teorii charakteristických čísel propagují. Jejich slovy připomeňme některé mezníky v její dosavadní historii. Následující úryvky pocházejí z emailové korespondence s autorkou této disertační práce z přelomu let 2012 a 2013. Jsou ponechány v originálním znění (s případnými jazykovými prohřešky); u autorů, jejichž rodný jazyk není angličtina, prosíme o přihlédnutí k této skutečnosti.[344]

Následující citace dokládají, že Weyrovy výsledky byly po více než sto let opomíjeny, někde takřka zapomenuty. Dokonce i autoři, kteří s nimi pracovali, neměli možnost se blíže seznámit s Weyrovými originálními texty a získat alespoň základní povědomí o historii příslušných pojmů. Pouze někteří z níže uvedených matematiků se o Weyrově teorii dozvěděli během kurzů na univerzitách, znalost této problematiky byla většinou předávána ústně mezi jednotlivci nebo studována z několika málo prací, které Weyrovy výsledky obsahují. Bude proto zajímavé sledovat, jaký osud je čeká v dalších letech, v období následujícím po vydání významných monografií *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* a *Matrix Analysis*, které Weyrovy výsledky propagují.

Víme, že podstatným zlomem pro šíření Weyrovy charakteristiky bylo zveřejnění článku *The Weyr characteristic* v roce 1999, který napsala Helene Shapiro a za jehož zrodem stál Roger Horn:

After I learned about Weyr from Sergeichuk, I became editor of the American Mathematical Monthly. One of my editorial projects was to find someone to write a paper about the Weyr form, and eventually Helene Shapiro took on the

[343] Z osobního rozhovoru s autorkou disetační práce (prosinec 2012); citát je uveden v autorčině překladu z angličtiny. Děkujeme F. J. Hallovi za upozornění na připravované nové vydání uvažované monografie a zprostředkování kontaktu s jejím autorem R. Hornem.

[344] Připomeňme, že krátké pasáže z dopisů od některých autorů (Hans Schneider, Roger A. Horn, Helene Shapiro, Judith J. McDonald, Lindsay N. Childs, Frank J. Hall) již byly citovány v předcházejících částech 5. kapitoly.

task. Her expository paper appeared in the Monthly in 1999, and I think it was widely read and appreciated.

* * *

Roger Horn však rovněž podnítil vznik dřívější práce Helene Shapiro, jak lze vyčíst z jejích vzpomínek na odbornou práci v problematice Weyrovy teorie:

Here is an account of how I learned of the Weyr characteristic and Weyr canoncial form. I learned nothing about this in my undergraduate mathematics courses, which included two in linear algebra, taught by Daniel Finkbeiner. We learned about the Jordan canonical form and the Segre characteristic. I also have no memory of encountering the Weyr characteristic and normal form as a graduate student at Caltech. I don't think Olga Taussky ever mentioned it to me, either in her matrix theory course or in our meetings when I was her Ph.D. student. I also have no memory of seeing the Weyr characteristic and normal form in the year long matrix theory course I took with Herbert Ryser at Caltech. I think the Weyr canonical form is still not well known to most mathematicians – most learn about the Jordan canonical form at some point in their courses, but not about the Weyr form. I suspect it might be better known among those who focus on numerical linear algebra; perhaps it is taught in those courses.

I finished my doctoral work at Caltech in May of 1979 and then spent a year at the University of Wisconsin, Madison, where Hans Schneider and I co-taught a graduate matrix theory course. That's where I first learned of the Weyr form and heard the term "Weyr characteristic" – when Hans Schneider was teaching his part of the course. I think he mentioned the book by Turnbull and Aitken (published in 1932)...

I don't think I thought about the Weyr theory for about a decade. Then Roger Horn asked me to write a survey article on canonical forms under unitary similarity for a special "canonical forms" issue he was organizing for LAA (Linear Algebra and Its Applications). I think we were at a SIAM conference at the time (possibly May, 1988, but I'm not sure), and I asked several people for information and references. What I found surprising was that each person I asked referred me to work by different authors. I began to collect papers on the subject and trace back the references for these papers, and found that some of the key ideas had been re-discovered several times and that some of the earlier works did not always appear in the references of more recent papers. The key idea for these canonical forms was to use the dimensions of the null spaces of increasing powers of a nilpotent matrix (or, equivalently, dimensions of the range spaces) – and I remembered that I had seen this in Hans Schneider's course and that he had called it the Weyr characteristic. My guess is that I probably then looked this up in Turnbull and Aitken, or maybe in MacDuffee's book, and then obtained copies of the two Weyr papers listed (References 131, 132) in my 1991 survey article.

Then, sometime in the 1990's I again saw Roger Horn at a conference – at the time, he was the editor of the American Mathematical Monthly and asked me if I was interested in submitting something ... I wanted to do an article on the Weyr characteristic. I had seen it used as the basis of algorithms in *numerical linear algebra, but did not see it referred to by the name "Weyr characteristic." I felt it should be better known by name, and I wanted to write an article presenting the basic results and pointing out that this approach went back to Weyr. Since I had never learned about the Weyr approach in my undergraduate or graduate courses, I figured it would be new information for most readers of the Monthly, and yet the mathematical level was accessible to an undergraduate audience.*

I did not know that Eduard Weyr was Czech ... The two Weyr papers I had were in French and German. In fact I am not even certain how to correctly pronounce the name "Weyr" – I once asked Hans Schneider and, at the time, he wasn't sure either. He did say that the pronunciation would depend on the nationality, but at the time he didn't know that. (I'm pretty sure this discussion about how to pronounce "Weyr" took place at the ILAS (International Linear Algebra Society) meeting in March, 1992, at the University of West Florida (Pensacola, Florida). So please tell us!!

I suspect the reason the Weyr characteristic has become better known in the past 25 years is because of its role in computational linear algebra. It is calculated from the dimensions of the null spaces of powers of a matrix; this can be computed directly in a numerically stable way. Once you have the Weyr characteristic, the Segre characteristic is easily found from the conjugate partition.

The Segre characteristic, which gives the sizes of the blocks of the Jordan canonical form, comes from the dimensions of the cyclic sub-modules in the structure theorem for modules over Euclidean domains. So the Jordan normal form and Segre characteristic fit naturally into an abstract algebra course, as an application of the structure theorem for finitely generated modules over a Euclidean domain.

Most introductory linear algebra courses in this country do not get far enough to present either of these canonical forms, and most undergraduate math majors do not take a second course in linear algebra. However, the undergraduate math major usually includes some abstract algebra courses, and the Jordan canonical form may be included there.

* * *

Skutečnost, že Weyrova charakteristika není běžnou součástí kurzů lineární algebry a že se k ní matematikové většinou dostávají samostudiem, potvrdil také Lindsay N. Childs. Také on napsal svůj názor na rozšíření Weyrových výsledků.

I learned the terminology of Weyr characteristic from books on matrix theory by C. C. MacDuffee (The Theory of Matrices, 1933, Vectors and Matrices, 1943) ... which I read as an undergraduate student in 1962 at Wesleyan University in Connecticut, USA. Wesleyan was a small college (800 students) and didn't have a course in linear algebra and matrix theory that covered the Jordan and rational canonical forms. So I learned it on my own from those books and from H. Schwertfeger, Introduction to Linear Algebra and the Theory of Matrices, 1950 (in which Weyr's name does not appear).

When I went Cornell Univ. for my Ph. D., I relearned the theory out of Hoffman and Kunze, Linear Algebra (1961), which also does not mention Weyr. Hoffman and Kunze's book remains the standard textbook in many US universities for linear algebra courses that present the Jordan and rational canonical form theory. I've taught that course from Hoffman and Kunze maybe ten times ...

No one else I knew at Wesleyan knew, or at least talked about, canonical forms for matrices, and mathematicians and students of mathematics who learned their linear algebra from Hoffman and Kunze would not have heard of Weyr ...

I just browsed through my collection of books on linear algebra and couldn't find a reference to Weyr in any of them ... If he had a hand in the development of the rational canonical form for matrices, then his work was important. But I can't find any reference to Weyr in comprehensive books in English on history of mathematics. They seem to credit Cauchy ..., Jordan ... and especially Frobenius ... for the development of the the canonical form theory of matrices.

* * *

V obdobném duchu se vyjádřil i Ross Lippert, autor článků *The Jordan forms of AB and BA* a *Fixing multiple eigenvalues by a minimal perturbation.*

First, let me say that I did not know that Weyr was Czech or any of the history of the characteristic, although I had judged that it was a 19th century result ... I did not receive any training in the Weyr characteristic. Unfortunately it is not taught. On the other hand, the Jordan form, which is taught, is something most people do not pay much attention to. The term "Segre characteristic" is not even mentioned.

I, for one, did not pay much attention to non-diagonalizable systems until my advisor (Alan Edelman) got me onto them in graduate school, as he was working with Bo Kagstrom and Eric Elmroth on such problems. I thought at the time, as I do now, that the Weyr characteristic was somewhat easier to understand, as it can be described purely in the context of the ranks (or nullities, equivalently) of powers of matrices. It is quite easy to deduce its properties by considering such things. I recall receiving this description from Alan and thinking "oh, this is what all that Jordan stuff was about". As you see in my AB∼BA paper, the theorems are all based on deductions from powers of AB and BA, which result in assertions about the Weyr characteristic, which I then translate, via auxiliary lemmas into more familiar Jordan/Segre terms. An earlier paper by Flanders, who originally solved the problem, also reasons it out by matrix powers, but Flanders has to struggle somewhat more because his lack of Weyr characteristic knowledge forces him to have to take bigger steps in reasoning ...

I didn't read the original paper until much later (mostly out of curiosity). Helene Shapiro's article is really a very nice introduction to it. I'm glad it exists, since it gave me a convenient citation for my papers ...

... mathematicians who aren't working in my area ... certainly do not know anything about Weyr. ... my co-author on the AB∼BA paper, Gil Strang ...

posed the problem to me, and I think, learned something about how useful the Weyr characteristic was in the process of writing the paper. I believe he did know the Weyr characteristic before we started working on the paper, but had never seen it in action, and he's a leading expert in linear algebra.

* * *

Podstatnou roli pro rozšíření Weyrova kanonického tvaru hrál Genrich Belitskij, který jej použil při převodu konečné množiny matic na kanonický tvar.

The Weyr normal form is very important for the construction of the algorithm. Indeed nobody introduced me to the Weyr theory. I rediscovered it as understood properties I needed (the Jordan n. f. does not satisfy them).

* * *

Ideje Genricha Belitskiho úspěšně rozšířil Vladimir Sergejčuk, který jako jeden z prvních matematiků použil v termínu označujícím uvažovaný kanonický tvar Weyrovo jméno.

Genrich Belitskii constructed an algorithm that reduces a pair of matrices to canonical form. He used a matrix (which I later called "Weyr's matrix") that is permutationaly similar to a Jordan matrix and such that all matrices commuting with it are block triangular. My first paper about Belitskii's algorithm is Classification of pairs of linear operators in a four-dimensional vector space (with D.V. Galinskii) ..., 1993,[345] *in which I used Weyr's matrices of size* 4×4 *but I did not call them "Weyr's matrices".*

In later versions I used the term "Weyr's matrices". (I decided to call the matrices from Belitskii's algorithm by Weyr's matrix since they can be defined via the Weyr characteristic. I did not know that they appeared in Weyr's papers. I read about the Weyr characteristic in one of the books on matrix theory) ... When I introduced the term "Weyr's matrices" I did not know anything about Weyr; I knew only Weyr's characteristic.

* * *

Když jsme požádali o informace o Weyrově kanonickém tvaru Junza Watanabeho, který jej spolu se spoluautorem Harimou označoval termínem *second Jordan canonical form*, neuvědomili jsme si, že by zmínění autoři ani dnes, kdy jsou jejich práce citovány v monografii věnované Weyrovu kanonickému tvaru, nemuseli své ideje s českým matematikem spojit. Odpověď potvrdila příslovečnou japonskou zdvořilost.

Thank you for your interest in our paper. I am afraid ... you have confused Hermann Weyl with Eduard Weyr. H. Weyl was ... Perhaps I could tell something about H. Weyl's work but I did not know the name Weyr upto now. I am sorry about that.

[345] Bohužel se nepodařilo tuto práci získat. Informace nejsou potvrzeny ani z nepřímých zdrojů, proto tato práce není v předchozím textu uvedena.

Po omluvě a vysvětlení nedorozumění přišla tato odpověď.

I was very much surprised to read your second mail. It is a very pleasant surprise. I did not realized you were talking about the "second Jordan canonical form". I "discovered" it myself, but I am not surprised if someone had discovered or used it before.

* * *

Své víceméně náhodné setkání s Weyrovou charakteristikou potvrdili i mexičtí matematikové, po řadě Luis Manuel Rivera a Lev Glebsky.

I found the information about the Weyr characteristic by myself. I do not remember exactly, but seems that was in an unexpected way (when I was loking information about the Segre characteristic).

I don't remember exactly who introduced me the Weyr characteristic. Probably it was pointed out to me by R. A. Horn, or I read about it in an article ...

* * *

Daniel Boley, jenž v článku *The algebraic structure of pencils and block Toeplitz matrices* (1998) porovnával několik různých posloupností (Weyrovu a Segreovu charakteristiku, posloupnost Kroneckerových indexů atd.), napsal:

It has been a long time since I looked at those algebraic indices, and my interest was in attempting to expose the relationship between those different indices as special cases of algebraic objects in their own right. I was also interested in how the indices changes upon small perturbations to the matrices, leading to the interest in majorization of sequences. It is interesting that these different indices were developed independently by different mathematicians and that it took a long while to see their relationships.

* * *

Alan Edelman je další z těch, které ovlivnila Helene Shapiro:

I admit that I was using the concept for a little while before I stumbled on Helene Shapiro's very nice paper, and that is when I started to use the term Weyr characteristic in my own work. In fact, I think years ago I heard Helene Shapiro speak — and that was when I learned the term.

... I was delighted to find out that these numbers associated with matrices did indeed have a name!

* * *

Rovněž Erik Elmroth, zástupce švédské školy, používal Weyrovu charakteristiku aniž by s ní byl hlouběji seznámen.

I must admit that I have not studied Weyr's work in much detail although the Weyr characteristics was very central to our work. I'm not sure how I was first introduced to the Weyr characteristics. It may have been through the collaboration with Alan Edelman ... but it may also have been through literature before that. I know I normally cite C. C. Mac Duffee "The theory of matrices", *1956, but this is probably not where I first found them. (Are they mentioned in the Gantmacher books? If so, this is probably where I first learned about them as this was very close to my starting point for this problem ...)*

* * *

Navzájem pobdobné, avšak oproti zprávám z jiných zemí odlišné odpovědi napsali španělští matematikové (M. A. Beitia, J. M. Gracia, I. de Hoyos, F. E. Velasco, A. Compta).

In my research group it is very well known, since it allows us to work with ranks of matrices and this is very useful in perturbation theory.

I know that the Weyr characteristic is named after Eduard Weyr ... (I. de Hoyos)

In addition, at least at my university, and I know of other Spanish mathematicians, the Weyr characteristic is well known. (F. E. Velasco)

In our group we use this characteristic very much ... (M. A. Beitia)

Tito (a někteří další) matematikové tvoří ustálenou skupinu, která Weyrovu charakteristiku běžně používá. Stěžejními osobnostmi jsou Juan Miguel Gracia, který je zakladatelem této Linear Algebra Group, a jeho žák Ion Zaballa. Sám Gracia, který Weyrovu charakteristiku poprvé studoval v roce 1972 ze španělského vydání *Fundamentos de Algebra Lineal* Mal'cevovy knihy *Osnovy linejnoj algebry*, napsal, že vděčí svému studentovi za osvětlení důležitosti Weyrovy charakteristiky. Inmaculada de Hoyos byla s touto charakteristikou obeznámena v roce 1984, kdy započala pod vedením dvou zmíněných profesorů svá doktorská studia. Rovněž Alberta Comptu uvedl do problematiky Ion Zaballa. Mariá A. Beitia uvedla, že se poprvé o Weyrově charakteristice dozvěděla z článku Wolfganga Brandenbusche, i ona zmiňuje svůj výzkum v rámci Linear Algebra Group.

* * *

Z oslovených matematiků nikdo, až na jednu výjimku, nenapsal, že by poznatky Weyrovy teorie charakteristických čísel učil, či alespoň zmínil ve svých kurzech. Zmíněnou výjimkou je Judith J. McDonald. Ani ona ji však neprobírá detailně.

I only teach it informally to my graduate students who work in nonnegative matrix theory.

* * *

Pouze čas tedy ukáže, zda se pro českou matematiku příznivá prognóza Franka J. Halla, že Weyrova teorie bude v zámoří vyučována, naplní. Citujme rovněž jeho slova o současné situaci v Americe:

Unfortunately, it seems that the Weyr characteristic has not been in many books on linear algebra in America.

... I think that Hans Schneider has promoted Weyr here ... also ... Helene Shapiro ... I agree that it should become more common place here.

Není jediným, kdo si myslí, že by se uvažovaná problematika měla více rozšířit mezi matematickou komunitou. Zmiňme ještě jeho odpověď na otázku, která mu byla položena během rozhovoru (prosinec 2012) a která mířila na jeho osobní názor na Weyrovy výsledky. Frank J. Hall mlčky vzal do ruky tužku a na papír napsal velkými tiskacími písmeny *GREAT!!*.

* * *

Tím se přirozeně dostáváme k názorům matematiků na odbornou práci Eduarda Weyra. Zde je několik z nich:

I surely consider Weyr's paper a very important event in matrix theory.[346]

(Hans Schneider)

He was a pioneer in the modern theory of matrices, whose work is not as well known in our textbooks as it should be ...

Weyr's 1890 paper in vol. 1 of Monatsheft Math. Physik ... is astonishingly modern in its notation and spirit. It could be read and understood by any (German-speaking) student today who has had a first course in linear algebra. In contrast, the 1870 book of C. Jordan ... that contains his eponymous canonical form is unintelligible to a modern reader; no one thinks of linear algebra in terms of "substitutions" any more. I hope that the second edition of Matrix Analysis will help many students and researchers to learn a little about this great man's contributions to mathematics.

(Roger A. Horn)

I am glad to hear that the Weyr characteristic is trending up. It should.

(Ross Lippert)

Having tried to do research mathematics for 50 years now, I sometimes wonder how good, or lucky, a mathematician has to be to be remembered years after his research years are over. Part of "lucky" is to have a theorem, or a concept, named after you, like "Weyr characteristic", or "Grothendieck group", or "Hilbert-Speiser Theorem". If you are extraordinarily lucky (and good!), your name might become an adjective that is written without a capital letter, like "noetherian", or "abelian". Weyr seems to have had some luck. With you writing about him, he seems to have even more good fortune!

(Lindsay N. Childs)

[346] Tento citát pochází již ze srpna 2011.

6 Střípky z pozdějších ohlasů v našich zemích

Po ohlasech od brněnských matematiků se již v českých zemích nevytvořil obdobný kolektiv, který by Weyrovu teorii (či jiné výsledky z období počátků teorie matic v českých zemích) blíže studoval, rozvíjel nebo využíval v aplikacích. Další reakce na Weyrovy výsledky přicházely izolovaně. Nejvýraznější vzešly od Jindřicha Bečváře; první z jeho prací týkajících se Eduarda Weyra byla publikována v polovině devadesátých let 20. století.

Vraťme se však nejdříve o několik desetiletí do minulosti. V roce 1970, tj. v době, kdy se schylovalo k vydání Borůvkovy učebnice *Základy teorie matic*, prvního česky psaného knižního zpracování Weyrových výsledků, publikovala Jana Tvrdá článek

• *Vznik teorie matic* [Tv1],

v němž regovala na Weyrův práci *O theorii forem bilinearných.* O rok poději vyšel jeho anglický překlad pod názvem *On the origin of the theory of matrices.*

Budeme-li uvažovat i slovenské matematiky, nemůžeme opomenout několik prací Jozefa Moravčíka (1934–2005) a jeho spoluautorů. V nich došlo k odchýlení od algebraické podstaty problematiky a k využití Weyrovy teorie v matematické analýze.

V osmdesátých letech, konkrétně v roce 1986, publikovali Jozef Moravčík a Sim Borisovič Norkin rusky psanou práci, jejíž název v angličtině je

• *Weyr's theory and linear systems with a constant matrix* [MN1].

Spolupráce těchto matematiků vyústila v roce 1993 v práci

• *Sistemy s posledejstviem i teorija Vejra* [MN2].

Typickým znakem uvedených Moravčíkových prací je využití Weyrovy teorie k řešení diferenciálních nebo diferenčních rovnic. Nejinak je tomu u společné poznámky Janky Feťkové, Pavola Marušiaka (1935–2000) a Jozefa Moravčíka nazvané

• *Autonomous systems of difference equation and Weyr's theory of matrices* [FMM1],

která byla publikována roku 1999, a také u Moravčíkova článku

• *Autonomous delay difference systems and Weyr's theory of matrices* [Mr1]

z téhož roku.

6.1 Eduard Weyr a historie matematiky

Přibližně v polovině devadesátých let 20. století začala vycházet edice Dějiny matematiky věnovaná mimo jiné význačným osobnostem české matematické komunity a vývoji jednotlivých matematických disciplín. Jejím druhým svazkem, který vyšel roku 1995, je monografie

• *Eduard Weyr (1852–1903)* [Be1].

Sepsali ji Jindřich Bečvář, Josef Daneš, Jaroslav Fuka, Zbyněk Nádeník a Luděk Zajíček, převažující část knihy je však prací prvního jmenovaného. Jindřich Bečvář je autorem jak dvou biografických částí věnovaných Weyrově rodině a Eduardu Weyrovi samotnému, tak dvou příspěvků, které se zabývají Weyrovými idejemi v lineární algebře. Než se s nimi blíže seznámíme, podotkněme, že kniha obsahuje rovněž články věnované geometrickým pracím Eduarda Weyra (Z. Nádeník), jeho výsledkům z analýzy (J. Daneš, J. Fuka) a Weyrově sporu s Janem Vilémem Pexiderem o původnosti Weyrovy knihy *Počet differenciálný* (J. Bečvář, L. Zajíček).

Zmíněné dva příspěvky věnované lineární algebře se nazývají

- *Eduard Weyr, lineární algebra a teorie hyperkomplexních čísel* [Be2] a
- *Weyrova teorie charakteristických čísel* [Be3].

V prvním z nich se autor, jak název napovídá, věnoval Weyrovým textům, které obsahují problematiku lineární algebry či přesahují do teorie hyperkomplexních čísel. Jedná se o práce *Verification der Multiplicationsformel für Determinante*, *O základní větě v theorii matric*, *Sur la théorie des quaternions*, *O řešení lineárných rovnic*, *Sur la théorie des matrices*, *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces*, *O binarných matricích*, *Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices*, *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales*, *O theorii forem bilinearných* (1889 i 1901) a *Zur Theorie der bilinearen Formen.*

Weyrovy myšlenky a poznatky prezentované v jednotlivých jeho pracích jsou zasazeny do historického kontextu a konfrontovány s výsledky tehdejší světové vědy.

Představeny jsou všechny podstatnější ideje Eduarda Weyra. Od věty o násobení determinantů, důkazu Cayleyovy-Hamiltonovy věty, zavedení matic e^M a $\log M$, studia soustav lineárních rovnic až k významným poznatkům souvisejícím s teorií matic, včetně studia lineárních asociativních algeber a hyperkomplexních čísel. Z výsledků obsahujících aparát teorie matic jmenujme souvislost stupně minimálního polynom matice A a nulity matice $A - \lambda E$, odhady nulity součinu dvou matic, charakteristická čísla matice, *typický tvar* matice, úplný systém invariantů podobnosti matic, vztah matic druhého řádu ke kvaternionům, strukturní vzorce a strukturní konstanty lineární algebry, reprezentace lineární asociativní algebry v algebře matic či konvergenci maticové mocninné řady. Po tomto rozboru (přibližně 19 stran) následují poznámky k textu (6 stran). Mnohé z nich obsahují citace knižních pramenů, domácí i zahraniční reakce na studované Weyrovy práce apod.

Na tento článek plynule navázal příspěvek následující. V devítistránkovém textu nazvaném *Weyrova teorie charakteristických čísel* přeformuloval Jindřich Bečvář v té době přibližně sto let starou teorii do moderní řeči vektorových prostorů a homomorfismů, včetně použití adekvátní současné terminologie. Upozorněme, že v termínu označujícím pojem charakteristické číslo, který není běžnou součástí základní teorie matic, a tudíž ani její terminologie, zdůraznil Jindřich Bečvář jméno matematika, který tento pojem zavedl. Nazval jej *Weyrovo charakteristické číslo*.

Ve výkladu Weyrovy teorie charakteristických čísel použil především pojmů dimenze jádra endomorfismu, báze vektorového (pod)prostoru, vzory a obrazy vektorů v endomorfismu, direktní rozklad prostoru na podprostory invariantní vůči endomorfismu apod.

V obdobném duchu tuto teorii představil i v kapitole *Weyrova teorie charakteristických čísel*, která je součástí jeho učebnice

• *Lineární algebra* [Be5]
z roku 2000.[347] V ní navíc doplnil několik řešených příkladů na upevnění základních pojmů.

V kurzech, které Jindřich Bečvář vede pro učitelské studium matematiky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze, však Weyrova teorie vyučována není.

V roce 2007 publikoval Jindřich Bečvář obsáhlou knihu (více než 500 stran) věnovanou historii lineární algebry v celosvětovém měřítku. Nazval ji jednoduše

• *Z historie lineární algebry* [Be6].

Vzhledem k významnosti výsledků Eduarda Weyra není překvapivé, že také v této monografii autor hodnotil Weyrovy myšlenky a jejich postavení v kontextu světové matematiky. Studoval je v kapitolách *IV. Matice*, *V. Kanonické tvary*, *VI. Komplexní a hyperkomplexní čísla, lineární algebry* a *VII. Soustavy lineárních rovnic (pokračování).*

Snad právě díky této monografii, v níž se Weyrovo jméno objevuje vedle jmen největších osobností světové matematiky všech dob, vyniká hodnota jeho výsledků. Uvědomme si navíc, že ve své době byl vnímán především jako geometr.

Vzhledem k rozmanitosti Weyrovy odborné činnosti a aktivity pro českou matematickou obec nás nepřekvapí, že jeho jméno nalézáme v řadě dalších svazků zmíněné edice Historie matematiky. Z nich jmenujme především monografii Martiny Bečvářové

• *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918* [Bv2],
která byla publikována v roce 2008.

6.2 Historie české lineární algebry v zahraničí

Propagaci českých výsledků z lineární algebry v současné světové komunitě algebraiků zajistily dva články, které byly publikovány v časopisu IMAGE, což je bulletin International Linear Algebra Society. V roce 2008 vyšel článek Miroslava Fiedlera

• *The development of linear algebra in Czechia* [Fi2],
který má obecnější charakter, neboť se věnuje výsledkům všech oblastí lineární algebry, a to navíc v plném časovém rozsahu sahajícím až do současnosti. Počátky teorie matic jsou, zcela očekávaně, nastíněny v úvodu Fiedlerova článku. Zdůrazněny jsou jména Eduard Weyr a Charles Loewner, okrajově jsou zmíněni rovněž Ludvík Kraus a Georg Pick.

Mezi dále uvedenými jmény (I. Babuška, M. Fiedler, J. Mařík, O. Pokorná, V. Pták, J. Rohn, Z. Vavřín atd.) nalezneme mnoho postav české teorie matic.

V zahraničí je povědomí i o česky psané Bečvářově monografii o Eduardu Weyrovi, český jazyk však k podněcování zájmu o Weyrovy práce příliš nepřispívá. Kniha však přesto pozornost vzbudila, a tak již několikrát zmíněný Roger A. Horn kontaktoval před několika lety jejího autora:[348]

[347] Další vydání jsou z roku 2002, 2005 a 2010.
[348] Z emailové korespondence s autorkou disertační práce (říjen 2012).

After learning about his book, we invited Becvar to write a short piece about Weyr for IMAGE, the newsletter of the International Linear Algebra Society.

Nabídka byla akceptována, a tak vznikl text nazvaný

• *Eduard Weyr and Linear Algebra* [Be7],

který byl otištěn v IMAGE roku 2010. Jedná se o ucelený přehled o Weyrově původu, studiích, zahraničních pobytech, profesním životě a samozřejmě jeho odborné práci. Zdůrazněno je jeho brzké přijetí jazyka teorie matic a aktuálnost jeho výsledků.

6.3 Studentské práce

Kromě textu, jehož řádky jsou právě čteny a který se začíná pomalu uzavírat, byla nedávno sepsána jiná disertační práce obsahující Weyrovu teorii. Autorem je Jaroslav Klimek, absolvent doktorského studia na Vysokém učení technickém v Brně. Jeho práce nese název

• *Řešení diferenčních rovnic a jejich vztah s transformací Z* [Kk2],

jedna z jejích čtyř částí je věnována využití Weyrovy teorie charakteristických čísel k řešení soustavy diferenčních rovnic. Zmíněny jsou zde i postupy Jiřího Čermáka.

Dříve než autor přistoupil v roce 2011 k její obhajobě, představil roku 2007 možnosti využití Weyrovy teorie k řešení homogenní soustavy lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty v článku

• *An algorithm for the construction of the fundamental system of solutions for the linear discrete systems with constant coefficients* [Kk1].

Seznam literatury tohoto článku má pouze tři položky, po řadě se jedná o Weyrovu knížku *O theorii forem bilinearných*, Borůvkovu práci *Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty* a Čermákův článek *On a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients.* Symbolicky tak zachycuje předávání významných výsledků Eduarda Weyra v české komunitě v období trvajícím více než jedno století.

Připomeňme ještě, že roku 1976 sepsal Karel Barták, student Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, pod vedením Luboše Nového (nar. 1929) diplomovou práci

• *O teorii bilineárních forem Eduarda Weyra* [Ba1].

Věnována je výhradně Weyrovu spisu *O theorii forem bilinearných* a jeho německé verzi. Snaží se Weyrovy výsledky zařadit do světového kontextu.

Závěr

Zmapování vývoje teorie matic u nás a jeho zařazení do světového kontextu považuji za mimořádně zajímavé. Pochopení historie matematiky je důležité jak pro vlastní matematický výzkum, tak pro vyučování matematice na vysoké škole. V tomto smyslu cítím po sepsání disertace pevnější základ pro svou další odbornou i pedagogickou práci.

Během doktorského studia jsem se seznámila s několika tématy, kterým bych se ráda v nejbližší době intenzivně věnovala a které s mou disertační prací bezprostředně souvisejí.

V první řadě zvažuji sepsání jednoho či dvou článků, které by shrnuly nejdůležitější výsledky disertace, a jejich publikování v některém zahraničním časopisu. Rovněž bych ráda upravila svoji disertaci podle připomínek oponentů, dle námětů vzešlých v diskusi od členů komise pro obhajoby disertačních prací a podle připomínek vznesených členy redakční rady edice Dějiny matematiky a připravila ji k otištění.

Ráda bych pokračovala ve studiu daného tématu a zpracovala přínos našich matematiků k teorii matic ve druhé polovině 20. století (Miroslav Fiedler, Vlastimil Pták,[349] Olga Pokorná, Jiří Rohn, Zdeněk Vavřín atd.).

Pozornost by zasluhovaly i některé práce matematiků, kteří žili před válkou na našem území, ale do české matematické komunity nepatřili (Georg Alexander Pick, Charles Loewner).

Dalším tématem, které výhledově plánuji zpracovat, je přínos olomoucké rodačky Olgy Taussky-Todd k teorii matic. Její životní osudy a dílo jsou pozoruhodné, vzpomínky jejích kolegů svědčí o mimořádných rysech této osobnosti. Považuji za přínosné navázání kontaktu s její doktorandkou Helene Shapiro.

Problematiku vztahů matic a grafů a jejich charakteristik bych ráda sepsala v uceleném pojednání ve zcela moderní řeči. Matematika by zde výrazně dominovala, historie by byla potlačena na stručné poznámky pod čarou.

[349] Na téma mé disertační práce přirozeně navazuje článek *Eine Bemerkung zur Jordanschen Normalform von Matrizen* [Pt1], který napsal Vlastimil Pták v roce 1956 a který našel ohlasy ještě na přelomu tisíciletí.

Seznam použité literatury

[AH1] Agha N., Hershkowitz D., *The relation between the height and level characteristics for a matrix with simple singular vertices*, Linear Algebra and its Applications 142(1990), 113–119.

[AHK1] Agha N., Hershkowitz D., Kogan N., *A solution to an inverse height and level characteristics problem*, Linear and Multilinear Algebra 31(1992), 139–146.

[Bl1] Balada F., *Akademik korespond. univ. profesor RNDr. Otakar Borůvka, doktor fyzikálně-matematických věd, dožil se šedesáti let*, Matematika ve škole 9(1959), 324–328.

[Bz1] Baltzer R., *Theorie und Anwendung der Determinanten. Mit Beziehung auf die Originalquellen dargestellt*, S. Hirzel, Leipzig, 1857, 2. vydání: 1864, 3. vydání: 1870, 4. vydání: 1875, 5. vydání: 1881; francouzsky (přeložil Hoüel G.-J.): Paris, 1861.

[Bz2] Baltzer R., *Die Elemente der Mathematik. Erster Band. Gemeine Arithmetik, Allgemeine Arithmetik, Algebra. Siebente verbesserte und vermehrte Auflage*, S. Hirzel, Leipzig, 1885.

[Ba1] Barták K., *O teorii bilineárních forem Eduarda Weyra*, diplomová práce, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze, 1976.

[BKol] Barvínek E., Fuchs E., Neuman F., Půža B., Svoboda K., Šarmanová P., Šik F., Třešňák Z., *Otakar Borůvka*, Nadace Universitas Masarykiana v Brně, Edice osobnosti, 1996.

[Bk1] Beck H., *Einführung in die Axiomatik der Algebra*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, Leipzig, 1926.

[Be1] Bečvář J. a kol., *Eduard Weyr (1852–1903)*, edice Dějiny matematiky, 2. svazek, Prometheus, Praha, 1995.

[Be2] Bečvář J., *Eduard Weyr, lineární algebra a teorie hyperkomplexních čísel*, in Bečvář J. a kol.: *Eduard Weyr (1852–1903)*, edice Dějiny matematiky, 2. svazek, Prometheus, Praha, 1995, 91–119.

[Be3] Bečvář J., *Weyrova teorie charakteristických čísel*, in Bečvář J. a kol.: *Eduard Weyr (1852–1903)*, edice Dějiny matematiky, 2. svazek, Prometheus, Praha, 1995, 121–127.

[Be4] Bečvář J., Zajíček L., *Weyrův spor s Pexiderem*, in Bečvář J. a kol.: *Eduard Weyr (1852–1903)*, edice Dějiny matematiky, 2. svazek, Prometheus, Praha, 1995, 143–162.

[Be5] Bečvář J., *Lineární algebra*, Matfyzpress, Praha, 2000, 2. vydání: 2002, 3. vydání: 2005, 4. vydání: 2010.

[Be6] Bečvář J., *Z historie lineární algebry*, edice Dějiny matematiky, 35. svazek, Matfyzpress, Praha, 2007.

[Be7] Bečvář J., *Eduard Weyr and Linear Algebra*, IMAGE 44(2010), 20–21.

[Bv1] Bečvářová M., *Josef Smolík (1832–1915)*, Nakladatelství ČVUT, Praha, 2007.

[Bv2] Bečvářová M., *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*, edice Dějiny matematiky, 34. svazek, Matfyzpress, Praha, 2008.

[Bt1] Beitia, M. A., *Matrices which commute with a given matrix upon a subspace*, Portugaliae Mathematica 43(1985/86), 167–178.

[BCHP1] Beitia M. A., Compta A., de Hoyos I., Peña M., *The change of feedback invariants under column perturbations: particular cases*, Linear and Multilinear Algebra 58(2010), 45–59.

[BHZ1] Beitia M. A., de Hoyos I., Zaballa I., *The change of the Jordan structure under one row perturbations*, Linear Algebra and its Applications 401(2005), 119–134.

[BHZ2] Beitia M. A., de Hoyos I., Zaballa I., *The change of similarity invariants under row perturbations: Generic cases*, Linear Algebra and its Applications 429(2008), 482–496.

[BHZ3] Beitia M. A., de Hoyos I., Zaballa I., *The change of similarity invariants under row perturbations*, Linear Algebra and its Applications 429(2008), 1302–1333.

[BG1] Beitia M. A., Gracia J.-M., *Local behavior of Sylvester matrix equations related to block similarity*, Linear Algebra and its Applications 199(1994), 253–279.

[BG2] Beitia M. A., Gracia J.-M., *Sylvester matrix equation for matrix pencils*, Linear Algebra and its Applications 232(1996), 155–197.

[BZ1] Beitia M. A., Zaballa I., *Invariants of the block tensor product*, Linear Algebra and its Applications 197/198(1994), 589–622.

[Bj1] Belitskij G., [*Normal forms in a space of matrices*], in Machrenko V. A. (ed.): *Analysis in Infinite-Dimensional Spaces and Operator Theory*, Naukova Dumka, Kiev, 1983, 3–15 [v ruštině].

[Bj2] Belitskij G., *Normal forms in matrix spaces*, Integral Equations and Operator Theory 38(2000), 251–283 [rozšířená anglická verze předcházející položky].

[BP1] Berman A., Plemmons R. J., *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Classics in Applied Mathematics. 9. Philadelphia, SIAM, 1994.

[Bd1] Boley D. L., *The algebraic structure of pencils and block Toeplitz matrices*, Linear Algebra and its Applications 279(1998), 255–279.

[BJ1] Born M., Jordan P., *Zur Quantenmechanik*, Zeitschrift für Physik 34(1925), 858–888, také in Born M.: Ausgewählte Abhandlungen II., 124–154; také in *Dokumente der Naturwissenschaft, Abt. Physik* 2(1962), 46–76; také in van der Waerden B. L. (ed.): *Sources of Quantum Mechanics*, Dover, New York, 1968, 277–306; rusky: Uspechi fizičeskich nauk 122(1977), 586–611.

[BHJ1] Born M., Heisenberg W., Jordan P., *Zur Quantenmechanik II.*, Zeitschrift für Physik 35(1926), 557–615, také in M. Born: Ausgewählte Abhandlungen II., 155–213; také in *Dokumente der Naturwissenschaft, Abt. Physik* 2(1962), 77–135; také in van der Waerden B. L.: *Sources of Quantum Mechanics*, North-Holland, Amsterdam, 1967, 321–386.

[Bc1] Bôcher M., *Introduction to higher algebra*, The Macmillan Company, New York, 1907, 2. vydání: 1922, další vydání: 1924, 1933, 1938, 1949; Dover, New York, 1964, 2004; německy (přeložil Beck H.): *Einführung in die höhere Algebra*, Teubner, Leipzig, Berlin, 1910, 2. vydání: 1925, dotisk: 1932, 16. tisk: 1952; rusky: *Vvedenie v vysšuju algebru*, ONTI, Moskva, Leningrad, 1933.

[Bi1] Bílek J., *Akademik Bohumil Bydžovský osmdesátníkem*, Časopis pro pěstování matematiky 85(1960), 226–227.

[Bo1] Borůvka O., *O jistém problému minimálním*, Práce Moravské přírodovědecké společnosti, sv. III, spis 3, 1926, 37–58.

[Bo2] Borůvka O., *Sur les matrices singulières*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 203(1936), 600–602, 762.

[Bo3] Borůvka O., *Úvod do teorie grup*, Královská česká společnost nauk, Praha, 1944.

[Bo4] Borůvka O., *Matice* (skripta), Brno, 1947, 2. vydání 1948, 3. doplněné vydání (k tisku připravil Škrášek J.): Vyšší vojenské učiliště hrdiny SSSR kapitána Otakara Jaroše, Vyškov na Moravě, 1966.

[Bo5] Borůvka O., *Úvod do teorie grup*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.

[Bo6] Borůvka O., *Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty*, Časopis pro pěstování matematiky 79(1954), 151–155.

[Bo7] Borůvka O., *Základy teorie grupoidů a grup*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1962; německy: *Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie*, Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 46, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960; anglicky (z německého originálu přeložila Borůvková M.): *Foundations of the theory of grupoids and groups*, Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 46, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1974, 2. vydání: Birkhäuser Verlag, Basel, 1975, 3. vydání: Wiley, New York, 1976.

[Bo8] Borůvka O., *Základy teorie matic*, Academia, Praha, 1971.

[Bo9] Borůvka O., *Několik vzpomínek na matematický život v Brně*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 22(1977), 91–99.

[Bb1] Brandenbusch W., *Die Anzahl linear unabhängiger Matrizen X, die mit einer bestimmten Matrix A kommutieren, ausgedrückt in den Weyrschen Charakteristiken*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 60(1980), 205.

[Bm1] Brechenmacher F., *Les matrices: formes de représentation et pratiques opératoires (1850–1930)*, CultureMATH-Site expert ENS Ulm/DESCO-20/12/2006;
online: http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Brechenmacher/Brechenmacher06.pdf

[Bm2] Brechenmacher F., *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870–1930)*, Revue d'Histoire des Mathématiques 2, 13(2008), 187–257.

[Bm3] Brechenmacher F., *Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques*, in Brian É. (ed.): Histoire sociale des mathématiques. Revue de synthèse 131(2010), 569–603.

[Bs1] Brioschi F., *Note sur un théorème relatif aux déterminants gauches*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1. série, 19(1854) 253–256.

[BCT1] Bru R., Cantó R., Tam B.-S., *Predecessor property, full combinatorial column rank, and the height characteristic of an M-matrix*, Linear Algebra and its Applications 183(1993), 1–22.

[BN1] Bru R., Neumann M., *Nonnegative Jordan bases*, Linear and Multilinear Algebra 23(1988), 95–109.

[BRS1] Bru R., Rodman L., Schneider H., *Extensions of Jordan bases for invariant subspaces of a matrix*, Linear Algebra and its Applications 150(1991), 209–225.

[Br1] Brualdi R. A., *Combinatorial verification of the elementary divisors of tensor products*, Linear Algebra and its Applications 71(1985), 31–47.

[Br2] Brualdi R. A., *Combinatorially determined elementary divisors*, Congressus Numerantium 58(1987), 193–216.

[Bu1] Brunovský P., *A classification of linear controllable systems*, Kybernetika 3(1970), 173–188.

[By1] Bydžovský B., *Základy teorie determinantů a matic a jich užití*, JČMF, Praha, 1930, 2. vydání: *Úvod do teorie determinantů a matic a jich užití*, JČMF, Praha, 1947.

[By2] Bydžovský B., *Sur les matrices orthogonales symétriques*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 65(1936), 189–194.

[CC1] Cantó R., Climent J.-J., *Singular graph and extension of Jordan chains of an M-matrix*, Linear Algebra and its Applications 241–243(1996), 167–189.

[CG1] Capelli A., Garbieri G., *Corso di analisi algebrica, I. Teorie introduttorie*, Sacchetto, Padova, 1886.

[Cp1] Capelli A., *Lezioni di algebra complementare, date nell'anno accademico 1888–1889*, Napoli, 1888–1889.

[Cp2] Capelli A., *Sopra la compatibilità o incompatibilità di più equazioni di primo grado fra più incognite*, Rivista di Matematica 2(1892), 54–58.

[Cs1] Carlson D. H., *A note on M-matrix equations*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 11(1963), 1027–1033.

[Cv1] Carvallo E., *Sur les systèmes linéaires, le calcul des symboles différentiels et leur application à la physique mathématique*, Monatshefte für Mathematik und Physik 2(1891), 177–216, 225–266, 311–330.

[Ca1] Cauchy A. L., *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment*, Journal de l'École Polytechnique 10(1815), 29–112, Oeuvres (2) I., 91–169.

[Ca2] Cauchy A. L., *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. Première partie: Analyse algébrique*, de Bure, Paris, 1821, Oeuvres (2) III.

[Ca3] Cauchy A. L., *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes*, Exercices de Mathématiques (Anciens Exercices) 4(1829), 140–160, Oeuvres (2) IX., 174–195.

[Cy1] Cayley A., *On a theorem in the geometry of position*, Cambridge Mathematical Journal 2(1841), 267–271, Papers I., 1–4.

[Cy2] Cayley A., *Remarques sur la notation des fonctions algébriques*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 50(1855), 282–285, jedná se o část práce *Sept différentes mémoires d'analyse* otištěné na stranách 277–317; Papers II., 185–188.

[Cy3] Cayley A., *A memoir on the theory of matrices*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London 148(1858), 17–37, Papers II., 475–496.

[Cy4] Cayley A., *A memoir on the automorphic linear transformation of a bipartite quadric function*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London 148(1858), 39–46, Papers II., 497–505.

[Cy5] Cayley A., *On the determination of the value of a certain determinant*, Quarterly Mathematical Journal 2(1858), 163–166, Papers III., 120–123.

[Cy6] Cayley A., *Mathematics, recent terminology in*, English Cyclopaedia V(1860), 534–542, Papers IV., 594–608.

[Cl1] Clifford W. K., *A fragment on matrices*, Papers, 1882, 337–341.

[Cr1] Cramer G., *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Chez les Freres Cramer & Cl. Philibert, Geneve, 1750.

[Ck1] Crkalová Z., *Život a dílo Karla Petra*, disertační práce, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, Praha, 2000.

[Cu1] Cullis C. E., *Matrices and Determinoids I, II, III*, Cambridge University Press, Cambridge, 1913, 1918, 1925 [podrobné recenze Cullisovy monografie: J. B. Shaw: *Matrices and determinoids*, Bulletin of the American Mathematical Society 26(1920), 224–233; J. B. Shaw: *Cullis on matrices*, Bulletin of the American Mathematical Society 33(1927), 618–621].

[Ce1] Čermák J., *O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic*, doktorská práce (RNDr.), Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, Brno, 1952.

[Ce2] Čermák J., *O použití Weyrovy theorie matic k řešení homogenních systémů lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic*, Práce moravskoslezské akademie věd přírodních 25(1953), spis 12, sešit 6, 337–356.

[Ce3] Čermák J., *On a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients*, Annales Polonici Mathematici 1(1954), 195–202.

[Ce4] Čermák J., *O systémech lineárních diferenčních rovnic s periodickými koeficienty*, Časopis pro pěstování matematiky 79(1954), 141–150.

[Ce5] Čermák J., *Poznámka o limitním přechodu diferenčních rovnic v rovnice diferenciální*, Časopis pro pěstování matematiky 81(1956), 224–228.

[Ce6] Čermák J., *Weyrovy soustavy normálních vektorů a jejich použití v matematické analyse*, disertační práce, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, Brno, 1958.

[Ci1] Čulík K., *Absoljutnyj rang kvadratnoj matricy*, Časopis pro pěstování matematiky 85(1960), 457–464.

[Dg1] Daugulis P., *A parametrization of matrix conjugacy orbit sets as unions of affine planes*, Linear Algebra and its Applications 436(2012), 709–721.

[Da1] Davis Ch. W., *Elementary divisors of the Stein transformation* $X \to X - CXC^*$, SIAM Journal on Applied Mathematics 27(1974), 492–494.

[DE1] Demmel J. W., Edelman A., *The dimension of matrices (matrix pencils) with given Jordan (Kronecker) canonical forms*, Linear Algebra and its Applications 230(1995), 61–87.

[DHKS1] de Oliveira D. D., Horn R. A., Klimchuk T., Sergeichuk V. V., *Remarks on the classification of a pair of commuting semilinear operators*, Linear Algebra and its Applications 436(2012), 3362–3372.

[Di1] Dilworth R. P., *A decomposition theorem for partially ordered sets*, The Annals of Mathematics 51(1950), 161–166.

[Do1] Dodgson C. L., *Elementary treatise on determinants with their application to simultaneous linear equations and algebraical geometry*, MacMillan and Co., London, 1867.

[DSt1] Dodig M., Stošić M., *The change of feedback invariants under one row perturbation*, Linear Algebra and its Applications 422(2007), 582–603.

[Dr1] Drábek K., *Sto let od narození akademika Bohumila Bydžovského*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 25(1980), 283–284.

[Dz1] Drazin M. P., *On diagonable and normal matrices*, Quarterly Journal of Mathematics 2(1951), 189–198.

[DS1] Dunford N., Schwartz J. T., *Linear operators I., II., III.*, Interscience Publishers, New York, 1958, 1963, 1971, *I. General theory*, *II. Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space*, *III. Spectral operators*, 2. vydání dílu I.: 1964; rusky: 1962, 1966, 1974.

[EEK1] Edelman A., Elmroth E., Kågström B., *A geometric approach to perturbation theory of matrices and matrix pencils. Part II: A stratification-enhanced staircase algorithm*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 20(1999), 667–699.

[Ei1] Eisenstein G., *Neue Theoreme der höheren Arithmetik*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 35(1847), 117–136, Abhandlungen, 177–196, Werke I., 483–502.

[EJK1] Elmroth E., Johansson S., Kågström B., *Stratification of controllability and observability pairs. Theory and use in applications*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 31(2009), 203–226.

[Eu1] Euler L., *Introductio in analysin infinitorum I, II*, Lausanne, 1748, Opera (1) VIII.–IX.; francouzsky: *Introduction à l'analyse infinitésimale*, Paris, 1796; rusky: *Vvedenie v analiz beskonečnych*, Fizmatgiz, Moskva, 1961; anglicky: *Introduction to analysis of the infinite*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[Fh1] Farebrother R. W., *A. C. Aitken and the Consolation of Matrix Theory*, Linear Algebra and its Applications 264(1997), 3–12.

[FMM1] Feťková J., Marušiak P., Moravčík J., *Autonomous systems of difference equation and Weyr's theory of matrices*, 3rd Scientific Conference Faculty of Mechanical Engineering University of Žilina, Žilina, 1997, 15–18.

[Fe1] Feldman R. W., Jr., *I. Arthur Cayley – founder of matrix theory*, The Mathematics Teacher 55(1962), 482–484.

[Fe2] Feldman R. W., Jr., *II. Basic properties*, The Mathematics Teacher 55(1962), 589–590.

[Fe3] Feldman R. W., Jr., *III. The characteristic equation; minimal polynomials*, The Mathematics Teacher 55(1962), 657–659.

[Fe4] Feldman R. W., Jr., *IV. The "transposed" or "conjugate" matrix; orthogonal matrices*, The Mathematics Teacher 56(1963), 37–38.

[Fe5] Feldman R. W., Jr., *V. Matric equations*, The Mathematics Teacher 56(1963), 101–102.

[Fe6] Feldman R. W., Jr., *VI. Similar and congruent matrices; nullity, vacuity, and rank*, The Mathematics Teacher 56(1963), 163–164.

[Fz1] Feldzamen A. N., *A generalized Weyr characteristic*, Bulletin of The American Mathematical Society 65(1959), 79–84.

[Fz2] Feldzamen A. N., *Semi-similarity invariants for spectral operators on Hilbert space*, Transactions of The American Mathematical Society 100(1961), 277—324.

[Fa1] Fiala J., *Síla přesvědčení Václava Šimerky*, in Pátý L. (ed.): Jubilejní almanach, JČSMF, Praha, 1987, 97–106.

[Fi1] Fiedler M., *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1981; anglicky: *Special Matrices and Their Applications in Numerical Mathematics*, 1. vydání: Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986, 2. vydání: Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2008.

[Fi2] Fiedler M., *The development of linear algebra in Czechia*, IMAGE 41(2008), 18–20.

[FP1] Fiedler M., Pták V., *On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors*, Czechoslovak Mathematical Journal 12(1962), 382–400.

[Fl1] Flood M. M., *On the highest common factor of two polynomials*, The American Mathematical Monthly 43(1936), 562–563.

[Fo1] Fort T., *Finite differences and difference equations in the real domain*, Clarendon Press, Oxford, Oxford University Press, London, 1948.

[Fc1] Francová-Provazníková L., *Život a dílo Bohumila Bydžovského (1880–1969)*, disertační práce, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, Praha, 2001.

[Fd1] Friedland S., *On an inverse problem for nonnegative and eventually nonnegative matrices*, Israel Journal of Mathematics 29(1978), 43–60.

[FH1] Friedland S., Hershkowitz D., *The rank of powers of matrices in a block triangular form*, Linear Algebra and its Applications 107(1988), 17–22.

[Fr1] Frobenius G., *Ueber das Pfaffsche problem*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 82(1875), 230–315, Abhandlungen I., 249–334.

[Fr2] Frobenius G., *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 84(1878), 1–63, Abhandlungen I., 343–405.

[Fr3] Frobenius G., *Ueber homogene totale Differentialgleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 86(1879), 1–19, Abhandlungen I., 435–453.

[Fr4] Frobenius G., *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 86(1879), 146–208, Abhandlungen I., 482–544.

[Fr5] Frobenius G., *Ueber die Elementarteiler der Determinanten*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1894, 7–20, Abhandlungen II., 577–590.

[Fr6] Frobenius G., *Ueber die congredienten Transformationen der bilinearen Formen*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1896, 7–16.

[Fr7] Frobenius G., *Zur Theorie der Scharen bilinearer Formen*, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 41, Teil 2, 1896, 20–23.

[Fr8] Frobenius G., *Über vertauschbare Matrizen*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1896, 601–614, Abhandlungen II., 705–718.

[Fr9] Frobenius G., *Zur Theorie der linearen Gleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 129(1905), 175–180, Abhandlungen III., 349–354.

[Fr10] Frobenius G., *Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen II*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1906, 657–663, Abhandlungen III., 387–393.

[Fr11] Frobenius G., *Über Matrizen aus positiven Elementen*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1908, 471–476, Abhandlungen III., 404–409.

[Fr12] Frobenius G., *Über Matrizen aus positiven Elementen II*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1909, 514–518, Abhandlungen III., 410–414.

[Fr13] Frobenius G., *Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1910, 3–15, Abhandlungen III., 415–427.

[Fr14] Frobenius G., *Über unitäre Matrizen*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1911, 373–378.

[Fr15] Frobenius G., *Über den Rang einer Matrix*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1911, 20–29, 128–129, Abhandlungen III., 479–490.

[Fr16] Frobenius G., *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1912, 456–477, Abhandlungen III., 546–567.

[Fu1] Fuchs I. L., *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 66(1866), 121–160.

[Gn1] Gantmacher F. R., *Teorija matric*, Moskva, 1953, 2. vydání: Nauka, Moskva, 1966, 1967; anglicky: *The Theory of Matrices I., II.*, Chelsea Publishing Co., New York, 1959, 1987, 1989, 1998; německy: *Matrizenrechnung I., II.*, 1953, 1956, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958, 1959, další vydání: 1965, 1966; *Matrizentheorie*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986; francouzsky: 1966.

[Gs1] Gansner E. R., *Acyclic digraphs, Young tableaux and nilpotent matrices*, SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods 2(1981), 429–440.

[Gg1] Gauger M. A., *Integral invariant functions on the nilpotent elements of a semisimple Lie algebra*, Proceedings of the American Mathematical Society 68(1978), 161–164.

[Ga1] Gauss C. F., *Disquisitiones arithmeticae*, Gerhard Fleischer, Leipzig, 1801, Werke I, 1–478; anglicky: Yale University Press, New Haven, Conn., 1966; německy: *Untersuchungen über höhere Arithmetik*, Springer, Berlin, 1889; reprint: Chelsea, 1965; francouzsky: *Recherches arithmétiques*, A. Blanchard, Paris, 1807; rusky: *Trudy po teorii čisel*, Izdatel'stvo Akademii nauk SSSR, Moskva, 1959.

[Ga2] Gauss C. F., *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809*, Memoir presented to Royal Society of Sciences, 25 November 1810, Göttingen, 1, 1810, Werke VI., 3–24; Anzeigen: Werke VI., 61–64; francouzsky: in Bertrand J. (ed.): *Méthodes des moindres carrés*, Paris, 1855.

[GHS1] Gerasimova T. G., Horn R. A., Sergeichuk V. V., *Matrices that are self-congruent only via matrices of determinant one*, Linear Algebra and its Applications 431(2009), 1620–1632.

[Gh1] Gerstenhaber M., *On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices. III.*, The Annals of Mathematics, Second Series, 70(1959), 167–205.

[Gh2] Gerstenhaber M., *On dominance and varieties of commuting matrices*, The Annals of Mathematics, Second Series, 73(1961), 324–348.

[GR1] Glebsky L., Rivera L. M., *On low rank perturbations of complex matrices and some discrete metric spaces*, Electronic Journal of Linear Algebra 18(2009), 302–316.

[GHZ1] Gracia J.-M., de Hoyos I., Zaballa I., *Perturbation of linear control systems*, Linear Algebra and its Applications 121(1989), 353–383.

[GV1] Gracia J.-M., Velasco F. E., *Stability of controlled invariant subspaces*, Linear Algebra and its Applications 418(2006), 416–434.

[Ge1] Greene C., *Some partitions associated with a partially ordered set*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 20(1976), 69–79.

[GK1] Greene C., Kleitman D. J., *The structure of Sperner k-families*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 20(1976), 41–68.

[Gr1] Greguš M., *Osemdesiat rokov akademika O. Borůvku*, prosloveno na semináři o matematike, Súlov 3.–5. V. 1979.

[HH1] Hall F. J., Hartwig R. E., *Pseudo-similarity for matrices over a field*, Proceedings of the American Mathematical Society 71(1978), 6–10.

[HHKN1] Hall F. J., Hartwig R. E., Katz I. J., Newman M., *Pseudo-similarity and partial unit regularity*, Czechoslovak Mathematical Journal 33(108)(1983).

[HG1] Hamburger H. L., Grimshaw M. E., *Linear transformations in n-dimensional vector space. An introduction to the theory of Hilbert space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1951.

[Ha1] Hamilton W. R., *Lectures on Quaternions*, Hodges and Smith, Dublin, 1853.

[Ha2] Hamilton W. R., *Elements of Quaternions I., II.*, Longmans, Green & Co., London, 1866, 2. vydání: Longmans, Green & Co., London, 1899, 1901; reprint: Chelsea Publishing Co., New York, 1969; německy (přeložil Glan P.): *Elemente der Quaternionen*, J. A. Barth, Leipzig, 1882, 1884.

[HW1] Harima T., Watanabe J., *The finite free extension of Artinian K-algebras with the strong Lefschetz property*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova 110(2003), 119–146.

[HW2] Harima T., Watanabe J., *The commutator algebra of a nilpotent matrix and an application to the theory of commutative Artinian algebras*, Journal of Mathematics 319(2008), 2545–2570.

[HNP1] Haupt, O., Nöbeling G., Pauc Ch., *Über Abhängigkeitsräume*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 182(1940), 193–217.

[Hv1] Havlíček K., *Osmdesát pět let akademika Bohumila Bydžovského*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 10(1965), 103–104.

[Hs1] Hawkes H. E., *The reduction of families of bilinear forms*, American Journal of Mathematics 32(1910), 101–114.

[Hw1] Hawkins T., *Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory*, Archive for History of Exact Sciences 8(1972), 243–287.

[Hw2] Hawkins T., *The theory of matrices in the 19th century*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver 1974, Vol. 2, 1975, 561–570.

[Hw3] Hawkins T., *Cauchy and the spectral theory of matrices*, Historia Mathematica 2(1975), 1–29.

[Hw4] Hawkins T., *Another look at Cayley and the theory of matrices*, Archives Internationales d'Histoire des Sciences 27(100)(1977), 82–112.

[Hw5] Hawkins T., *Weierstrass and the theory of matrices*, Archive for History of Exact Sciences 17(1977), 119–163.

[Ht1] Hazlett O. C., *On the theory of associative division algebras*, Transactions of the American Mathematical Society 18(1917), 167–176.

[Hb1] Heisenberg W., *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*, Zeitschrift für Physik 33(1925), 879–893, také in *Dokumente der Naturwissenschaft, Abt. Physik* 2(1962), 31–45; také in van der Waerden B. L. (ed.), *Sources of Quantum Mechanics*, Dover, New York, 1968, 261–276; rusky: Uspechi fizičeskich nauk 122(1977), 574–586; viz Science Abstracts – A. Physics 29(1926), 14; viz Physikalische Berichte 8(1927), 1205.

[Hn1] Hensel K., *Theorie der Körper von Matrizen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 127(1904), 116–166.

[Hn2] Hensel K., *Über Potenzreihen von Matrizen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 155(1926), 107–110.

[Hm1] Hermite C., *Remarque sur un théorème de M. Cauchy*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 41(1855), 181–183, Oeuvres I., 479–481.

[He1] Hershkowitz D., *A majorization relation between the height and the level characteristics*, Linear Algebra and its Applications 125(1989), 97–101.

[He2] Hershkowitz D., *Peak characteristic and nonnegative signature*, Linear Algebra and its Applications 147(1991), 55–73.

[He3] Hershkowitz D., *The height characteristic of block triangular matrices*, Linear Algebra and its Applications 167(1992), 3–15.

[He4] Hershkowitz D., *The relation between the Jordan structure of a matrix and its graph*, Linear Algebra and its Applications 184(1993), 55–69.

[He5] Hershkowitz D., *Paths in directed graphs and spectral properties of matrices*, Linear Algebra and its Applications 212/213(1994), 309–337.

[He6] Hershkowitz D., *The combinatorial structure of generalized eigenspaces – from nonnegative matrices to general matrices*, Linear Algebra and its Applications 302/303(1999), 173–191.

[HRS1] Hershkowitz D., Rothblum U. G., Schneider H., *Characterizations and classifications of M-Matrices using generalized nullspaces*, Linear Algebra and its Applications 109(1988), 59–69.

[HRS2] Hershkowitz D., Rothblum U. G., Schneider H., *The combinatorial structure of the generalized nullspace of a block triangular matrix*, Linear Algebra and its Applications 116(1989), 9–26.

[HS1] Hershkowitz D., Schneider H., *On the generalized nullspace of M-matrices and Z-matrices*, Linear Algebra and its Applications 106(1988), 5–23.

[HS2] Hershkowitz D., Schneider H., *Solutions of Z-matrix equations*, Linear Algebra and its Applications 106(1988), 25–38.

[HS3] Hershkowitz D., Schneider H., *Height bases, level bases, and the equality of the height and the level characteristics of an M-matrix*, Linear and Multilinear Algebra 25(1989), 149–171.

[HS4] Hershkowitz D., Schneider H., *Combinatorial bases, derived Jordan sets and the equality of the height and level characteristic of an M-matrix*, Linear and Multilinear Algebra 29(1991), 21–42.

[HS5] Hershkowitz D., Schneider H., *On the existence of matrices with prescribed height and level characterisics*, Israel Journal of Mathematics 75(1991), 105–117.

[HS6] Hershkowitz D., Schneider H., *Path coverings of graphs and height characteristics of matrices*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 59(1993), 172–187.

[HS7] Hershkowitz D., Schneider H., *Ranks of zero patterns and sign patterns*, Linear and Multilinear Algebra 34(1993), 3–19.

[Hl1] Holenda J., *O maticích*, Vydavatelský servis, Plzeň, 2007.

[Ho1] Holub M., *Šedesát let prof. O. Borůvky*, Vesmír 38(1959), 203.

[HJ1] Horn R. A., Johnson Ch. R., *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985; reprint: 1990, 2. (upravené) vydání: Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[Hd1] Hromadová-Olejníčková J., *Vědecké dílo Bohumila Bydžovského*, disertační práce, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, Praha, 2005.

[Hk1] Hruška V. A., *O systémech singulárních relací mezi periodami Abelových funkcí tří proměnných*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 48(1919), 43–56.

[Hk2] Hruška V. A., *Redukce svazku bilineárních forem a systému relací mezi periodami nedegenerovaných singulárních Abelových funkcí tří proměnných [I.]*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 51(1922), 6–16.

[Hk3] Hruška V. A., *Redukce svazku bilineárních forem a systému relací mezi periodami nedegenerovaných singulárních Abelových funkcí tří proměnných [II.]*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 51(1922), 86–97.

[Hk4] Hruška V. A., *Redukce svazku bilineárních forem a systému relací mezi periodami nedegenerovaných singulárních Abelových funkcí tří proměnných [III.]*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 51(1922), 167–178.

[Hg1] Huang W., *On the singular graph and Jordan diagram of strictly lower triangular matrices and M-matrices*, Linear Algebra and its Applications 143(1991), 145–169.

[Hu1] Hudeček J., *Matematika v devíti kapitolách*, edice Dějiny matematiky, 37. svazek, Matfyzpress, Praha, 2008.

[Hy1] Hykšová M., *Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů*, edice Dějiny matematiky, 51. svazek, Matfyzpress, Praha, 2011.

[CZ1] Childs L. N., Zimmermann K., *Congruence-torsion subgroups of dimension one formal groups*, Journal of Algebra 170(1994), 929–955.

[Ja1] Jarušek J., *O algebraických rovnicích s vícenásobnými kořeny*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 52(1923), 329–336.

[Ja2] Jarušek J., *O některých semiinvariantech vyjádřených determinanty*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 54(1925), 114–124.

[Jh1] Johansson S., *Tools for control system design – stratification of matrix pairs and periodic Riccati differential equation solvers*, Ph.D. Thesis, Umeå University, 2009.

[Jo1] Jordan C., *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1870.

[KPK1] Kalogeropoulos G., Psarrakos P., Karcanias N., *On the computation of the Jordan canonical form of regular matrix polynomials*, Linear Algebra and its Applications 385(2004), 117–130.

[Kz1] Kantorovitz S., *The semi-simplicity manifold of arbitrary operators*, Transactions of The American Mathematical Society 123(1966), 241–252.

[Ka1] Karcanias N., *On the characteristic, Weyr sequences, the Kronecker invariants and canonical form of a singular pencil*, Proceedings of the 10th IFAC World Congress, session 14.15, Munich, 1987, 109–114.

[KK1] Karcanias N., Kalogeropoulos G., *On the Segré, Weyr characteristics of right (left) regular pencils*, International Journal of Control 44(1986), 991–1015.

[KK2] Karcanias N., Kalogeropoulos G., *The prime and generalized null-spaces of right regular pencils*, Circuits Systems and Signal Process 14(1995), 495–524.

[KSS1] Katz R. D., Schneider H., Sergeev S., *On commuting matrices in max algebra and in classical nonnegative algebra*, Linear Algebra and its Applications 436(2012), 276–292.

[KJJ1] Kågström B., Johansson S., Johansson V., *StratiGraph tool: matrix stratifications in control applications*, in Biegler L. T., Campbell S. L., Mehrmann V.: *Control and optimization with differential-algebraic constraints. Selected papers based on tah presentations at the workshop, Banff, Canada, October 24–29, 2010*, Advances in Design and Control 23, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012, 79–103.

[Kk1] Klimek J., *An algorithm for the construction of the fundamental system of solutions for the linear discrete systems with constant coefficients*, Tatra Mountains Mathematical Publications 38(2007), 101–109.

[Kk2] Klimek J., *Řešení diferenčních rovnic a jejich vztah s transformací Z*, disertační práce, Vysoké učení technické, Brno, 2011.

[Kl1] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972, článek *Determinants and matrices*, 795–812.

[KS1] Klimenko L., Sergeichuk V. V., *Block triangular miniversal deformations of matrices and matrix pencils*, in Olshevsky V., Tyrtyshnikov E. (eds.): *Matrix Methods: Theory, Algorithms and Applications*, World Scientific Publishing Co. Pte, Ltd., Hackensack, NJ, 2010, 69–84.

[Ke1] Koecher M., *Lineare Algebra and analytische Geometrie*, Grundwissen Mathematik, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 2. vydání: 1985, 3. vydání: 1992, 4. vydání: 1997.

[Ki1] Kořínek V., *Stručný přehled vědeckých prací profesora Karla Petra v desítiletí 1928–1938*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 67(1938), D245–D253.

[Ki2] Kořínek V., *Stručný přehled vědeckých prací profesora Karla Petra v desítiletí 1938–1948*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 73(1948), D9–D18.

[Ko1] Kosinski A. A., *Cramer's rule is due to Cramer*, Mathematics Magazine 74(2001), 310–312.

[Ky1] Koutský K., *Sedmdesátiny prof. Dr Bohumila Bydžovského*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 75(1950), D349–D357.

[Ky2] Koutský K., *Prof. Otakar Borůvka šedesátníkem a laureátem státní ceny*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 4(1959), 730–733.

[Ks1] Kraus L., *Základové arithmetiky. Dle výkladů prof. Weierstrassa*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 12(1883), 153–184, 232–264.

[Ks2] Kraus L., *Základové náuky o funkcích racionálných*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 14(1885), 49–66.

[Ks3] Kraus L., *Příspěvek ku transformaci jedenáctého řádu funkcí elliptických*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 15(1886), 52–61.

[Kr1] Kronecker L., *Ueber bilineare Formen*, Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866, 597–612, také in Journal für die reine und angewandte Mathematik 68(1868), 273–285, Werke I., 145–162.

[Kr2] Kronecker L., *Ueber Schaaren quadratischer Formen*, Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868, 339–346, Werke I., 165–174.

[Kr3] Kronecker L., *Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen*, Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1874, 59–76, 149–156, 206–232, Werke I., 349–413.

[Ku1] Krull W., *Über Begleitmatrizen und Elementarteilertheorie*, Dissertation, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 1921.

[Lg1] Lagrange J. L., *Méchanique analitique I, II*, Chez la Veuve Desaint, Ve Courcier, Paris, 1788; reprint: Édition Jacques Gabay, Sceaux, 1989; Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1889, A. Blanchard, Paris, 1965; 2. vydání: 1811–1815, 3. vydání: 1853; Oeuvres XI., 369–444; anglicky: *Analytical Mechanics*, 1997; rusky: *Analitičeskaja mechanika*, Moskva, Leningrad, Gostechizdat, 1950; německy (přeložil Servus H.): *Analytische Mechanik*, J. Springer, Berlin, 1887.

[Lr1] Laguerre E., *Sur le calcul des systèmes linéaires, extrait d'une lettre adressée à M. Hermite*, Journal de l'École Polytechnique 62(1867), 215–264, Oeuvres I., 221–267.

[La1] Laplace P. S., *Traité de Mécanique Céleste I.–V.*, J. B. M. Duprat, Paris, 1799–1825, 2. vydání: 1829–1882; Oeuvres I.–V.; anglicky: *Celestial Mechanics*, 1829–1839; německy (přeložil Burckhardt J. C.): *Mechanik des Himmels*, Berlin, 1800–1802; rusky: *Izloženie sistemy mira*, 1982.

[Le1] Leavitt W. G., *A normal form for matrices whose elements are holomorphic functions*, Ph.D. dissertation, University of Wisconsin, 1947.

[Le2] Leavitt W. G., *A normal form for matrices whose elements are holomorphic functions*, Duke Mathematical Journal 15(1948), 463–472.

[Le3] Leavitt W. G., *Canonical forms for mappings of vector spaces*, The American Mathematical Monthly 60(1953), 75–79.

[Ld1] Ledermann W. W., *A. C. Aitken's work in pure mathematics*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 16(1968), 162–165.

[Li1] Lippert R. A., *Fixing multiple eigenvalues by a minimal perturbation*, Linear Algebra and its Applications 432(2010), 1785–1817.

[LS1] Lippert R. A., Strang G., *The Jordan forms of AB and BA*, Electronic Journal of Linear Algebra 18(2009), 281–288.

[Lo1] Löwner K., *Über monotone Matrixfunktionen*, Mathematische Zeitschrift 38(1934), 177–216.

[Lo2] Loewner Ch., *On totally positive Matrices*, Mathematische Zeitschrift 63(1955), 338–340.

[Mc1] MacDuffee C. C., *The Theory of Matrices*, Springer, Berlin, 1933; reprinty: Chelsea, New York, 1946, 1959; Dover, Mineola, New York, 2004.

[Mc2] MacDuffee C. C., *On a fundamental theorem in matric theory*, American Journal of Mathematics 58(1936), 504–506.

[Mc3] MacDuffee C. C., *Vectors and Matrices*, Mathematical Association of America, Ithaca, New York, 1943, 2. vydání: 1947, 3. vydání: 1949, 4. vydání: 1953, 5. vydání: 1961, 6. vydání: 1966.

[Ml1] Maclaurin C., *A treatise of algebra in three parts*, London, 1748, 4. vydání: London, 1788, 6. vydání: London, 1796; francouzsky (přeložil Le Cozic): *Traité d'algebra*, Paris, 1753.

[Mv1] Machovec F., *Algebra pro vyšší třídy škol středních*, F. Tempský, Praha, 1886 [odlišné verze pro reálky a pro gymnázia, 2. vydání pro reálky 1887, 2. vydání pro gymnázia 1888].

[Ma1] Mal'cev A. I., *Osnovy linejnoj algebry*, GITTL, Moskva, 1948, 2. vydání: GITTL, Moskva, Leningrad, 1956, 3. vydání: Moskva, Leningrad, 1970, 4. vydání: Nauka, Moskva, 1975; anglicky: *Foundations of Linear Algebra*, W. H. Freeman and Company, San Francisco and London, 1963; italsky: *Fondamenti di algebra lineare*, Mir, Moskva, Editori Riuniti, Roma, 1980; španělsky: *Fundamentos de Algebra Lineal*, Siglo XXI Editores, México, 1970.

[MH1] Mani V., Hartwig R. E., *Black box interpolation. II. The one variable derogatory case*, Linear Algebra and its Applications 249(1996), 229–253.

[MO1] Marshall A. W., Olkin I., *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press, New York, 1979.

[Md1] McDonald J. J., *The peripheral spectrum of a nonnegative matrix*, Linear Algebra and its Applications 363(2003), 217–235.

[MM1] McDonald J. J., Morris D. M., *Level characteristics corresponding to peripheral eigenvalues of a nonnegative matrix*, Linear Algebra and its Applications 429(2008), 1719–1729.

[MS1] Merino D. I., Sergeichuk V. V., *Littlewood's algorithm and quaternion matrices*, Linear Algebra and its Applications 298(1999), 193–208.

[Mt1] Metelka J., *K 80. narozeninám akademika Bohumila Bydžovského*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 5(1960), 603–612.

[Mz1] Metzler W. H., *On the roots of matrices*, American Journal of Mathematics 14(1892), 326–377.

[My1] Meyer F. W. F., *Invariantentheorie*, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Teubner, Leipzig, I.1, 1899, 320–403.

[MD1] Meyer F. W. F., Drach J., *Theorie des formes et des invariants*, Encyclopédie des sciences mathématiques, I.2, Paris, Leipzig, 1907, 386–520.

[Mi1] Mitchell B. E., *Normal and diagonalizable matrices*, The American Mathematical Monthly 60(1953), 94–96.

[MN1] Moravčík J., Norkin S. B., [*Weyr's theory and linear systems with a constant matrix*], [Studies in the theory of differential equations], Moskovskij avto-dorožnyj institut, 1986, 41–50 [v ruštině].

[MN2] Moravčík J., Norkin S. B., *Sistemy s posledejstviem i teorija Vejra*, Práce a Štúdie Vysokej Školy Dopravy Spojov v Žilině. Séria matematicko-fyzikálna 9(1993), 121–142.

[Mr1] Moravčík J., *Autonomous delay difference systems and Weyr's theory of matrices*, in Marušiak P. (eds.): Proceedings of the international scientific conference of mathematics, Žilina University Publisher, Žilina, 1999, 203–208.

[Mo1] Morris D. M., *Combinatorial properties of nonnegative and eventually nonnegative matrices*, Ph.D. Thesis, Washington University, 2008.

[Mu1] Muir T., *List of writings on the theory of matrices (1857–1893)*, American Journal of Mathematics 20(1898), 225–228.

[Mu2] Muir T., *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development I., II., III., IV.*, Macmillan & Co., London, 1906 (část vyšla již 1890), 1911, 1920, 1923; reprint: Dover Publications, Inc., New York, 1960.

[Mu3] Muir T., *Contributions to the History of Determinants 1900–1920*, Blackie & Son Ltd., London and Glasgow, 1930; reprint: Dover, New York, 1960.

[Mh1] Muth P., *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*, B. G. Teubner, Leipzig, 1899.

[NM1] Naqvi S. C., McDonald J. J., *The combinatorial structure of eventually nonnegative matrices*, The Electronic Journal of Linear Algebra 9(2002), 255–269.

[NM2] Naqvi S. C., McDonald J. J., *Eventually nonnegative matrices are similar to seminonnegative matrices*, Linear Algebra and its Applications 381(2004), 245–258.

[Ne1] Netto E., *Vorlesungen über Algebra I., II.*, Teubner, Leipzig, 1896, 1900.

[NV1] Netto E., Vogt H., *Analyse combinatoire et theorie des déterminants*, Encyclopédie des sciences mathématiques, I.1, Paris, Leipzig, 1907, 63–132.

[Nu1] Netuka I., *Georg Pick – pražský matematický kolega Alberta Einsteina*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 44(1999), 227–232.

[Nn1] Neuman F., *Akademik Otakar Borůvka pětaosmdesátníkem*, Časopis pro pěstování matematiky 109(1984), 217–220.

[Nn2] Neuman F., *95 years of Otakar Borůvka*, Mathematica Bohemica 119(1994), 97–99.

[NS1] Neumann M., Schneider H., *Algorithms for computing bases for the Perron eigenspace with prescribed nonnegativity and combinatorial properties*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 15(1994), 578–591.

[Nm1] Němcová M., *František Josef Studnička (1836–1903)*, edice Dějiny matematiky, 10. svazek, Prometheus, Praha, 1998.

[Nh1] Noether M., *Notiz über eine Classe symmetrischer Determinanten*, Mathematische Annalen 16(1880), 551–556.

[Na1] Novák V., *Profesor Miroslav Novotný šedesátiletý*, Časopis pro pěstování matematiky 107(1982), 208–217.

[NP1] Novák V., Půža B., *K sedmdesátinám prof. RNDr. Miroslava Novotného, DrSc.*, Mathematica Bohemica 117(1992), 325–329.

[No1] Novotný M., *O zobecnění Weyrovy theorie charakteristických čísel matic*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 74(1950), 239–241.

[No2] Novotný M., *Abstraktní jádro Weyrovy konstrukce charakteristických čísel matic*, Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, řada A7, číslo 344, 1953, 41–51.

[No3] Novotný M., *Borůvka laureátem státní ceny*, Věda a život, 1959.

[No4] Novotný M., *70 let akademika Borůvky*, Universitas 2/1969, 115–116.

[No5] Novotný M., *Akademik O. Borůvka sedmdesátiletý*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 14(1969), 198–199.

[No6] Novotný M., *Otakar Borůvka – význačná osobnost brněnského vědeckého života*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 19(1974), 146–150.

[No7] Novotný M., *Zaměnitelnost endomorfismů lineárních prostorů*, Časopis pro pěstování matematiky 107(1982), 124–138.

[No8] Novotný M., *Mono-unary algebras in the work of Czechoslovak mathematicians*, Archivum Mathematicum 26(1990), 155–164.

[NSZ1] Novotný M., Svoboda K., Zlámal M., *K šedesátinám Otakara Borůvky*, Časopis pro pěstování matematiky 84(1959), 236–250.

[Nv1] Nový L. a kol., *Dějiny exaktních věd v českých zemích*, Československá akademie věd, Praha, 1961.

[NK1] Nušl F., Kössler M., *Karel Petr*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 57(1928), 169–182.

[OV1] O'Meara K. C., Vinsonhaler Ch. I., *On approximately simultaneously diagonalizable matrices*, Linear Algebra and its Applications 412(2006), 39–74.

[OCV1] O'Meara K. C., Clark J., Vinsonhaler C. I., *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form*, Oxford University Press, New York, Oxford, 2011.

[Os1] Ostrowski A. M., *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale*, Commentarii Mathematici Helvetici 10(1937), 69–96.

[Pk1] Pánek A., *Život a působení p. Václava Šimerky*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 17(1888), 253–256.

[Pk2] Pánek A., *O životě a činnosti Martina Pokorného*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 30(1901), 81–100.

[Pw1] Parker W. V., *The degree of the highest common factor of two polynomials*, The American Mathematical Monthly 42(1935), 164–166.

[Pa1] Pascal E., *I determinanti. Teoria ed applicazioni con tutte le più recenti ricerche*, Milano, Ulrico Hoepli, 1897, 2. vydání: 1923; německy (přeložil Leitzmann H.): *Die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die neueren Forschungen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1900, další vydání: Nabu Press, 2010.

[Pn1] Peano G., *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari*, Atti della Accademia delle Scienze di Torino 22(1887), 437–446; francouzsky: *Intégration par séries des équations différentielles linéaires*, Mathematische Annalen 32(1888), 450–456.

[Pn2] Peano G., *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Bocca, Torino, 1888; pouze nultá kapitola otištěna v Opera II, 3–19; anglicky (přeložil Kannenberg L. C.): *Geometric Calculus. According to the Ausdehnungslehre of H. Grassmann*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2000.

[Pb1] Peirce B., *Linear associative algebra. With notes and addenda, by C. S. Peirce, son of the autor*, American Journal of Mathematics 4(1881), 97–229.

[Ps1] Pelíšek M., *Za † Dr. Václavem Simandlem*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 48(1919), 203–206.

[Pr1] Perron O., *Zur Theorie der Matrices*, Mathematische Annalen 64(1907), 248–263.

[Pr2] Perron O., *Algebra I. Die Grundlagen, Algebra II. Theorie der algebraischen Gleichungen*, Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig, 1927, 2. vydání: 1932, 1933, 3. vydání: 1951.

[PS1] Petr K., Sobotka J., *O životě a činnosti Eduarda Weyra*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 34(1905), 456–516.

[Pe1] Petr K., *O životě Eduarda Weyra*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 34(1905), 457–467. Součást článku *O životě a činnosti Eduarda Weyra.*

[Pe2] Petr K., *O Weyrově činnosti v math. analysi a algebře*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 34(1905), 468–489. Součást článku *O životě a činnosti Eduarda Weyra.*

[Pe3] Petr K., *Chronologický seznam publikací Ed. Weyra*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 34(1905), 509–516. Součást článku *O životě a činnosti Eduarda Weyra.*

[Pe4] Petr K., *Několik poznámek o determinantech*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 35(1906), 311–321; maďarsky: *Néhány megjegyzés a determinánsok elmeletéhez*, Mathematikai és physikai Lapok 15(1906), 353–365; německy: *Einige Bemerkungen über die Determinanten*, Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn 25(1908), 95–105.

[Pe5] Petr K., *Die symmetrischen Zahlensysteme und der Satz von Sturm*, Bulletin international de l'Acadèmie des Sciences de Bohême 11(1906), 14–34; česky: *O symmetrických soustavách čísel a větě Sturmově*, Rozpravy České akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění v Praze 15, třída 2, 1–19.

[Pe6] Petr K., *O definici determinantu*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 60(1931), 201–213.

[Pe7] Petr K., *O racionálném kanonickém tvaru lineární substituce*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 69(1940), 9–22.

[Pz1] Petržílka V., *Ocenění prací P. Václava Šimerky*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 55(1926), 352–360.

[Pc1] Pick G., *Über die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen von Schwingungsproblemen*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 2(1922), 353–357.

[Pg1] Pickert G., *Lineare Algebra*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, I.1, Heft 3, Teil 1, Leipzig, 1953, 1–43.

[Pg2] Pickert G., *Normalformen von Matrizen*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, I.1, Heft 3, Teil 1, Leipzig, 1953, 44–72.

[Pl1] Pincherle S., *Lezioni di algebra complementare. I. Analisi algebrica, II. Teoria delle equazioni*, Zanichelli, Bologna, 1906, 1908, 2. vydání: 1920, 1921, 3. vydání: 1924, 1926.

[Po1] Pleskot V., *Zemřel profesor Dr Václav Hruška*, Časopis pro pěstování matematiky 79(1954), 375–378.

[Po2] Pleskot V., *Prof. Dr. Václav Hruška*, Stroje na zpracování informací 3(1955), 9–14.

[Pi1] Poincaré H., *Sur les nombres complexes*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 99(1884), 740–742, Oeuvres V., 77–79.

[Py1] Pokorný M., *Determinanty a vyšší rovnice*, Praha, 1865.

[Pt1] Pták V., *Eine Bemerkung zur Jordanschen Normalform von Matrizen*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) 17(1956), 190–194.

[Ph1] Puchta A., *Ein Determinantensatz und seine Umkehrung*, Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien 38(1878), 215–221.

[Pu1] Pupke H., *Einführung in die Matrizenrechnung und ihre physikalischen Anwendungen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1953.

[Ra1] Ráb M.: *Akademik Otakar Borůvka sedmdesátníkem*, Časopis pro pěstování matematiky 94(1969), 244–247.

[Rm1] Richman D. J., *Calculation of the Weyr characteristic from the singular graph of an M-matrix*, Ph.D. Thesis, Madison, University of Wisconsin, 1976.

[Rm2] Richman D. J., *The singular graph of lower triangular, nilpotent matrices*, Linear and Multilinear Albebra 6(1978), 37–49.

[RS1] Richman D. J., Schneider H., *On the singular graph and the Weyr characteristic of an M-matrix*, Aequationes Mathematicae 17(1978), 208–234.

[Ri1] Rinehart R. F., *The equivalence of definitions of a matric function*, The American Mathematical Monthly 62(1955), 395–414.

[Ro1] Rothblum U. G., *Algebraic eigenspaces of non-negative matrices*, Linear Algebra and its Applications 12(1975), 281–292.

[Rl1] Rössler K., *Příspěvek k teorii determinantů*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 61(1932), 229–230.

[RG1] Rubió P., Gelonch J., *The contragredient equivalence: Application to solve some matrix systems*, Linear Algebra and its Applications 290(1999), 145–166.

[Rh1] Řehořovský V., *Theorie souměrných funkcí kořenů*, nákladem vlastním, v komisi Fr. Řivnáče, Praha, 1883.

[Ss1] Saks E. M., *Duality properties of finite set systems*, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1980.

[Sv1] Savchenko S. V., *On the change of the Jordan form under the transition from the adjacency matrix of a vertex-transitive digraph to its principal submatrix of co-order one*, Linear Algebra and its Applications 394(2005), 225–235.

[Sg1] Segre C., *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei III, 19(1884), 127–148.

[Sn1] Sekanina M., *Šedesátiny profesora Otakara Borůvky*, Rozhledy matematicko-fyzikální 37(1959), 280–281.

[Se1] Sergeichuk V. V., *Canonical matrices for linear matrix problems*, Linear Algebra and its Applications 317(2000), 53–102;
online: http://arxiv.org/pdf/0709.2485.pdf

[SS1] Schreier O., Sperner E., *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra I., II.*, Hamburger mathematischen Einzelschriften, 10. Heft, 19. Heft, Teubner, Leipzig, Berlin, 1931, 1935; rusky (přeložil Ol'šanskij G.): *Vvedenie v linejnuju algebru v geometričeskom izloženii*, ONTI, Moskva, Leningrad, 1934; anglicky (přeložil Davis M., Hausner H.): *Introduction to modern algebra and matrix theory*, Chelsea Publishing Co., New York, 1951, další vydání: 1955, 1959.

[Sh1] Shapiro H., *A survey of canonical forms and invariants for unitary similarity*, Linear Algebra and its Applications 147(1991), 101–167.

[Sh2] Shapiro H., *The Weyr characteristic*, The American Mathematical Monthly 106(1999), 919–929.

[Sc1] Schneider H., *Matrices with non-negative elements*, Ph.D. Thesis, University of Edinburgh, 1952.

[Sc2] Schneider H., *The elementary divisors associated with* 0*, of a singular M-matrix*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 10(1956), 108–122.

[Sc3] Schneider H., *The influence of the marked reduced graph of a nonnegative matrix on the Jordan form and related properties: A survey*, Linear Algebra and its Applications 84(1986), 161–189.

[Sl1] Schlesinger L., *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Leipzig, 1895.

[Sl2] Schlesinger L., *Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln*, Leipzig 1900, 2. vydání: 1904; 3. vydání: *Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage*, Berlin-Leipzig, 1922.

[Sl3] Schlesinger L., *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*, Leipzig-Berlin, 1908.

[Sl4] Schlesinger L., *Bericht über die Entwickelung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 18(1909), 133–266.

[Si1] Simandl V., *O zvláštních determinantech*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 42(1913), 534–545.

[Si2] Simandl V., *Vyčíslení zvláštního determinantu*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 44(1915), 43–46.

[Sm1] Smith H. J. S., *Report on the theory of numbers I.–VI.*, Report of the British Association, 1859, 228–267, 1860, 120–169, 1861, 292–340, 1862, 503–526, 1863, 768–786, 1865, 322–375, Papers I., 38–364.

[Sm2] Smith H. J. S., *On systems of linear indeterminate equations and congruences*, The Philosophical Transactions of the Royal Society of London 151(1861), 293–326, Papers I., 367–409.

[Sl1] Smolík J., *Algebra pro střední školy*, nákladem kněhkupectví I. L. Kober, Praha, 1870, 2. vydání: 1875.

[So1] Sobotka J., *O Weyrově činnosti v geometrii*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 34(1905), 490–509. Součást článku *O životě a činnosti Eduarda Weyra.*

[Sr1] Sperner E., *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge*, Mathematische Zeitschrift 27(1928), 544–548.

[St1] Studnička F. J., *O determinantech*, tiskem dra Edv. Grégra, nákladem spisovatelovým, Praha, 1870; rusky: *Načal'naja osnovanija teorii Determinantov' ili opred'litelej*, v' tipograf'i i izdan'emť Dra. Ed. Gregra, Praga, 1870; německy: *Einleitung in die Theorie der Determinanten. Für Studierende an Mittelschulen und technischen Anstalten*, J. G. Calve'sche k. k. Univ.-Buchhandlung, Druck von Heinr. Mercy, Prag, 1871.

[St2] Studnička F. J., *A.-L. Cauchy als formaler Begründer der Determinanten-Theorie. Eine literarisch-historische Studie*, Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, VI. Folge, 8(1875–1876).

[St3] Studnička F. J., *Algebra pro vyšší třídy škol středních*, tiskem Dra Ed. Grégra, nákladem spisovatelovým, Praha, 1877, 2. vydání: 1879; německy: 1878.

[St4] Studnička F. J., *O determinantech mocninných a sestavných*, Spisův poctěných jubilejní cenou královské české Společnosti nauk číslo IX, nákladem jubilejního fondu královské české Společnosti nauk, tiskem Dra Ed. Grégra, Praha, 1897.

[St5] Studnička F. J., *Úvod do nauky o determinantech*, Sborník Jednoty českých mathematiků v Praze, č. III., nákladem Jednoty českých mathematiků, knihtiskárna B. Stýbla, Praha, 1899.

[Su1] Study E., *Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen*, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, I.1, 1898, 147–183.

[SC1] Study E., Cartan E. J., *Nombres complexes*, Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, 1.1.3, 1908, 329–468.

[Sy1] Sylvester J. J., *On the intersection, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminante coordinates*, Cambridge and Dublin Mathematical Journal 5(1850), 262–282, Papers I., 119–137.

[Sy2] Sylvester J. J., *Additions to the articles "On a new class of theorems", and "On Pascal's Theorem"*, Philosophical Magazine 37(1850), 363–370, Papers I., 145–151.

[Sy3] Sylvester J. J., *On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions*, Philosophical Magazine 1(1851), 295–305, Papers I., 241–250.

[Sy4] Sylvester J. J., *An enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order*, Philosophical Magazine 1(1851), 119–140, Papers I., 219–240.

[Sy5] Sylvester J. J., *A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares*, Philosophical Magazine 4(1852), 138–142, Papers I., 378–381.

[Sy6] Sylvester J. J., *On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the gratest algebraical common measure*, The Philosophical Transactions of the Royal Society of London 143(1853), 407–548, Papers I., 429–586.

[Sy7] Sylvester J. J., *On Mr Cayley's impromptu demonstration of the rule for determining at sight the degree of any symmetrical function of the roots of an equation expressed in terms of the coefficients*, Philosophical Magazine 5(1853), 199–202, Papers I., 595–598.

[Sy8] Sylvester J. J., *Théorème sur les déterminants*, Nouvelles Annales de Mathématiques 13(1854), 305, Papers II., 28.

[Sy9] Sylvester J. J., *On the properties of a split matrix*, Johns Hopkins University Circulars 1(1882), 210–211, Papers III., 645–646.

[Sy10] Sylvester J. J., *On the equation to the secular inequalities in the planetary theory*, Philosophical Magazine 16(1883), 267–269, Papers IV., 110–111.

[Sy11] Sylvester J. J., *On involutants and other allied species of invariants to matrix systems*, Johns Hopkins University Circulars 3(1884), 9–12, 34–35, Papers IV., 133–145.

[Sy12] Sylvester J. J., *Sur l'équation en matrices px=xq*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 99(1884), 67–71, 115–116, Papers IV., 176–180.

[Sy13] Sylvester J. J., *Sur la résolution générale de l'equation linéaire en matrices d'un ordre quelconque*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 99(1884), 409–412, 432–436, Papers IV., 199–205.

[Sy14] Sylvester J. J., *Lectures on the principles of universal algebra*, American Journal of Mathematics 6(1884), 270–286, Papers IV., 208–224.

[Sy15] Sylvester J. J., *The genesis of an idea, or story of a discovery relating to equations in multiple quantity*, Nature 31(1884/85), 35–36.

[Sa1] Šarmanová P., *Otakar Borůvka a diferenciální rovnice*, disertační práce, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně, 1998.

[Sk1] Šimerka V., *Die Perioden der quadratischen Zahlformen bei negativen Determinante*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe (Wien) 31, 1858, 33–67.

[Sk2] Šimerka V., *Bestimmte Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten gelöst mittels der Permutationslehre*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe 33(1858), 277–281. Jedná se o první část práce *Lösung zweier Arten von Gleichungen*, 277–284.

[Sk3] Šimerka V., *Algebra čili Počtářství obecné pro vyšší gymnasia*, Edv. Grégr, Praha, 1863, 2. vydání: 1868, 3. vydání: 1874.

[Sk4] Šimerka V., *Přídavek k Algebře pro vyšší gymnásia*, Dr. E. Grégr, Praha, 1864.

[Sk5] Šimerka V., *Síla přesvědčení*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 11(1882), 75–111, německá přepracovaná verze: *Die Kraft der Ueberzeugung*, Vídeň, 1883.

[Sd1] Šindelář K. *Památce akademika Bohumila Bydžovského*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky 95(1970), 100–113.

[Sp1] Štěpánová M., *(Ne)řád v životě versus řád v maticích*, in Benediktová Větrovcová M. (ed.): 13. ročník Výjezdního interdisciplinárního semináře v Nečtinech (DVD), Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2012, 83–97.

[Sp2] Štěpánová M., *Olga Taussky-Todd a otázky Geršgorinových kruhů*, in Bečvář J., Bečvářová M. (ed.): 33. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2012, 259–268.

[Tb1] Taber H., *On the matrical equation $\phi\Omega = \Omega\phi$*, Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences 26(1890/1891), 64–66.

[Tb2] Taber H., *Note on the representation of orthogonal matrices*, Proceedings of the American Academy of Arts and Letters 27(1892), 163–164.

[Tb3] Taber H., *Notes on the theory of bilinear forms*, Bulletin of the American Mathematical Society 3(1897), 156–164.

[Tb4] Taber H., *On hypercomplex number systems*, Transactions of the American Mathematical Society 5(1904), 509–548.

[Tm1] Tam B.-S., *On matrices with cyclic structure*, Linear Algebra and its Applications 302/303(1999), 377–410.

[Tm2] Tam B.-S., *A cone-theoretic approach to the spectral theory of positive linear operators: the finite-dimensional case*, Taiwanese Journal of Mathematics 5(2001), 207–277;
online viz http://journal.taiwanmathsoc.org.tw/index.php/TJM/article/view/224/1037

[Tm3] Tam B.-S., *The Perron generalized eigenspace and the spectral cone of a cone-preserving map*, Linear Algebra and its Applications 393(2004), 375–429.

[TS1] Tam B.-S., Schneider H., *On the core of a cone-preserving map*, Transactions of the American Mathematical Society 343(1994), 479–524.

[Ta1] Taussky-Todd O., *Bounds for the characteristic roots of matrices II.*, Journal of Research of the National Bureau of Standards 46(1951), 124–125.

[Ta2] Taussky-Todd O., *How I became a torchbearer for matrix theory*, The American Mathematical Monthly 95(1988), 801–812.

[Ta3] Taussky-Todd O.: *An autobiographical essay*, in Alberts D. J., Alexanderson G. L. (eds.): Mathematical People, Profiles and Interviews, A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 2008, 320–350, viz též Birkhäuser, Boston, Cambridge, Massachusetts, 1985, 309–336.

[TT1] Thrall R. M., Tornheim L., *Vector Spaces and Matrices*, John Wiley & Sons, New York, Inc.; Chapman & Hall, London, Ltd., 1957.

[Tu1] Turnbull H. W., *The Theory of Determinants, Matrices and Invariants*, Blackie & Son, Ltd., London, Glasgow, 1928, další vydání: Dover 1945, 1948, 1950, 1960.

[TA1] Turnbull H. W., Aitken A. C., *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices*, Blackie & Son, Ltd., London, Glasgow, Bombay, 1932, další vydání: 1945, 1948, 1950, 1952; reprint: Dover, New York, 1961, 2005.

[Tv1] Tvrdá J., *Vznik teorie matic*, Dějiny věd a techniky 3(1970), 11–23; anglicky: *On the origin of the theory of matrices*, Acta Historiae Rerum Naturalium Necnon Technicarum 5(1971), 335–354.

[Tz1] Tzafriri L., *Quasi-similarity for spectral operators on Banach spaces*, Pacific Journal of Mathematics 25(1968), 197–217.

[Va1] Vandermonde A. T., *Mémoire sur l'élimination*, Mémoires de l'Académie Paris, Histoire de l'Académie royale des Sciences, 1772, II. Partie, 516–532; německy: *Abhandlung über die Elimination*, Abhandlungen, 87–104.

[Ve1] Vejvodová Z., *75 let akademika Otakara Borůvky*, Vesmír 53(1974), 186.

[Vl1] Velasco F. E., *Stable subspaces of matrix pairs*, Linear Algebra and its Applications 301(1999), 15–49.

[Vr1] Vrba A., *An application of Halls' theorems to matrices*, Časopis pro pěstování matematiky 98(1973), 288–291.

[Wn1] Waerden B. L. van der, *A history of algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

[Wa1] Walter A., *Zum Grenzübergange von Differenzengleichungen in Differentialgleichungen*, Mathematische Annalen 95(1926), 257–266.

[Wd1] Wedderburn J. H. M., *A theorem on finite algebras*, Transactions of the American Mathematical Society 6(1905), 349–352.

[Wd2] Wedderburn J. H. M., *Lectures on Matrices*, American Mathematical Society, New York, 1934; reprinty: Lithoprinters Ann Arbor, Michigan, U.S.A., 1949; AMS Press, Providence, 1960; Dover, New York, 1964, další reprinty: 1977, 2002, 2008.

[Ws1] Weierstrass K., *Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen*, Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1858, 207–220, Werke I., 233–246.

[Ws2] Weierstrass K., *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*, Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868, 310–338, Werke II., 19–44.

[Wl1] Wellstein J., *Über symmetrische, alternierende und orthogonale Normalformen von Matrizen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 163(1930), 166–182.

[We1] Weyr Ed., *Verification der Multiplicationsformel für Determinante*, Zprávy o zasedání Královské české Společnosti nauk, 1880, 55–56.

[We2] Weyr Ed., *O základní větě v theorii matric*, Zprávy o zasedání Královské české Společnosti nauk, 1884, 148–152.

[We3] Weyr Ed., *Sur la théorie des quaternions*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie des Sciences 98(1884), 906–907, 1320–1323.

[We4] Weyr Ed., *O řešení lineárných rovnic*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 14(1885), 101–110, 149–159.

[We5] Weyr Ed., *Sur la théorie des matrices*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 100(1885), 787–789.

[We6] Weyr Ed., *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 100(1885), 966–969.

[We7] Weyr Ed., *Život a působení dra Ludvíka Krause. Nástin životopisný*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 15(1886), 49–52.

[We8] Weyr Ed., *O binarných matricích*, Věstník Královské české Společnosti nauk, třída mathematicko-přírodovědná, 1887, č. 18, 358–400.

[We9] Weyr Ed., *Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices*, Věstník Královské české Společnosti nauk, třída mathematicko-přírodovědná, č. 41, 1887, 616–618.

[We10] Weyr Ed., *Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales*, Bulletin des Sciences Mathématiques 11(1887), 205–215.

[We11] Weyr Ed., *O problému projektivity v jednoduchých útvarech geometrických*, Věstník Královské české Společnosti nauk, třída mathematicko-přírodovědná, 1889, II. díl, č. 15, 163–187.

[We12] Weyr Ed., *O theorii forem bilinearných*, Spisův poctěných jubilejní cenou Královské české společnosti nauk v Praze č. II, Praha, 1889.

[We13] Weyr Ed., *Zur Theorie der bilinearen Formen*, Monatshefte für Mathematik und Physik 1(1890), 163–200, 201–236.

[We14] Weyr Ed., *Výklady o mathematice I.*, Dle přednášek prof. Eduarda Weyra. Vydal em. assist. prof. A. Vaňourek, 1891; existují další dvě vydání.

[We15] Weyr Ed., *Výklady o mathematice II.*, Dle přednášek prof. Eduarda Weyra. Vydal A. Vaňourek, 1892, 2. (opravené) vydání: vydal Em. Hlavatý, 1898.

[We16] Weyr Ed., *O soustavách orthogonálných ploch*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 25(1896), 42–46, 103–109.

[We17] Weyr Ed., *O theorii forem bilinearných*, Věstník III. sjezdu přírodozpytců a lékařů v Praze, 1901, 164–167.

[We18] Weyr Ed., *Počet differenciálný*, Sborník Jednoty Českých Mathematiků č. 5, Praha, 1902.

[WW1] Weyr Ed., Weyr Em., *Základové vyšší geometrie. Díl I. Theorie promítavých útvarů prvořadých*, Živa. Sborník vědecký Musea království Českého, č. VIII, Praha, 1871.

[WW2] Weyr Ed., Weyr Em., *Základové vyšší geometrie. Díl II. Theorie křivek stupně druhého*, Živa. Sborník vědecký Musea království Českého, č. XI, Praha, 1874.

[WW3] Weyr Ed., Weyr Em., *Základové vyšší geometrie. Díl III. O přímočarých plochách druhého stupně a o vztahu kollineárném a reciprokém základních útvarů druhořadých a třetiřadých*, Živa. Sborník vědecký Musea království Českého, č. XII, Praha, 1878.

[Za1] Zaballa I., *Inequalities for the Weyr characteristic of modules*, Algebra lineal y aplicaciones, Universidad del País Vasco, 1984, 432–442.

[Za2] Zaballa I., *Similarity and block similarity*, Linear Algebra and its Applications 212/213(1994), 461–485.

[ZM1] Zaslavsky B. G., McDonald J. J., *A characterization of Jordan canonical forms which are similar to eventually nonnegative matrices with the properties of nonnegative matrices*, Linear Algebra and its Applications 372(2003), 253–285.

[ZT1] Zaslavsky B. G., Tam B. S., *On the Jordan form of an irreducible matrix with eventually nonnegative powers*, Linear Algebra and its Applications 302–303(1999), 303–330.

[Zh1] Zhang Ch., [*The centralizer of matrices*], Journal of Hubei University, Natural Science Edition 31(2009), 325–328, 331 [v čínštině].

[Zu1] Zurmühl R., *Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1950, 2. vydání: 1958, 3. vydání: *Matrizen und ihre technischen Anwendungen*, 1961, 4. vydání: 1964, 5. vydání: *Matrizen und ihre Anwendungen für angewandte Mathematiker, Physiker und Ingenieure, I. Grundlagen, II. Numerische Methoden*, 1984, 1986, 6. vydání: *Matrizen und ihre Anwendungen. I. Grundlagen. Für Ingenieure, Physiker und angewandte Mathematiker*, 1992, 7. vydání: 1997.

[LMA1] Linear and Multilinear Algebra 3(1975), Issue 1/2, speciální dvojsvazek věnovaný Olze Taussky-Todd.

[LAA1] Linear Algebra and its Applications 13(1976), Issue 1/2, speciální dvojsvazek věnovaný Olze Taussky-Todd.

[LAA2] Linear Algebra and its Applications 280(1998), speciální svazek věnovaný Olze Taussky-Todd.

SEBRANÉ A VYBRANÉ SPISY, ENCYKLOPEDIE

[CaO] Cauchy A. L., *Oeuvres complètes I.–XXVII.*, Académie des sciences, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1882–1974; reprint: 1995.

[CyP] Cayley A., *The Collected Mathematical Papers I.–XIV.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1889–1898; reprint: Johnson Reprint Corporation, New York, London, 1963.

[ClP] Clifford W. K., *Mathematical Papers*, Macmillan and Co., London; reprint: Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, 1968.

[EiA] Eisenstein G., *Mathematische Abhandlungen. Besonders aus dem Gebiete der höheren Arithmetik und der elliptischen Funktionen. Mit einer Vorrede von C. F. Gauss*, G. Reimer, Berlin; reprint: Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1967.

[EiW] Eisenstein G., *Mathematische Werke I.–II.*, Chelsea Publishing Company, New York, 1975; reprint: 1989.

[EiW] Euler L., *Opera omnia (1). Opera mathematica I.–XXIX.*, Teubner, Leipzig, Berlin, Zürich, 1911–1956.

[FrA] Frobenius G., *Gesammelte Abhandlungen I.–III.*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968.

[GaW] Gauss C. F., *Werke I.–XII.*, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Dieterich and Teubner, Göttingen, Berlin, 1863–1929.

[HmO] Hermite C., *Oeuvres I.–IV.*, Gauthier-Villars, Paris, 1905–1917.

[KrW] Kronecker L., *Werke I.–V.*, Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, B. G. Teubner, Leipzig, 1895, 1897, 1899 a 1931, 1929, 1930; reprint: Chelsea Publishing Company, New York, 1968.

[LgO] Lagrange J. L., *Oeuvres complètes I.–XIV.*, Gauthier-Villars, Paris, 1867–1892.

[LrO] Laguerre E., *Ouvres I.–II.*, Gauthier-Villars, Paris, 1895; reprint: Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, 1972.

[LaO] Laplace P. S., *Oeuvres completes I.–XIV.*, Gauthier-Villars, Paris, 1878–1912.

[PiO] Poincaré H., *Oeuvres I.–XI.*, Gauthier-Villars, Paris, 1916–1956.

[SmP] Smith H. J. S., *The Collected Mathematical Papers I.–II.*, Clarendon Press, Oxford, 1894.

[SyP] Sylvester J. J., *The Collected Mathematical Papers I.–IV.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1904–1912; reprint: Chelsea Publishing Company, New York, 1973.

[VaA] Vandermonde A. T., *Abhandlungen aus der reinen Mathematik*, J. Springer, Berlin, 1888.

[WsM] Weierstrass K., *Mathematische Werke I.–VII.*, Mayer & Müller, Berlin, 1894–1927; reprint: Olm & Johnson, Hildesheim, New York, 1967.

[EMW1] *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, B. G. Teubner, Leipzig, 1898–1935.

[EMW2] *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1950–1958.

[ESM] *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Gauthier-Villars, Paris, Teubner, Leipzig, 1904–1916; reprint: Gabay, 1992.

[PaI] Pascal E., *Repertorio di matematiche superiori (Definizioni – Formole – Teoremi – Cenni bibliografici). I. Analisi, II. Geometria*, Ulrico Hoepli, Milano, 1898, 1900.

[PaN] Pascal E., *Repertorium der höheren Mathematik. I. Analysis, II. Geometrie*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1900, 1902, německý překlad předchozí položky (přeložil kolektiv pod vedením Epsteina P. a Timerdinga H. E.), 2. vydání: I.1 1910, I.2 1927, I.3 1929, II.1 1910, II.2. 1922.