Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Věty o alternativě a lineární programování v nekonečněrozměrných prostorech

Disertační práce

Mgr. David Bartl

Školitel: prof. RNDr. Miroslav Maňas, DrSc.

únor 2006

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a že veškerou použitou literaturu jsem uvedl v seznamu literatury.

V Praze dne

Obsah

Úvod

Lineární programování od doby svého prudkého rozvoje v 50. letech 20. století našlo uplatnění v řadě praktických oborů lidské činnosti, především v plánování. Jmenujme například plánování přepravy, plánování výroby, ale také použití v bankovnictví nebo jiných ekonomických oblastech. Není proto překvapivé, že literatury pojednávající o lineárním programování (LP) existuje velké množství. O jeho významu rovněž svědčí fakt, že lineární programování se již několik desetiletí běžně vyučuje na vysokých školách (univerzitách).

Ačkoliv v oblasti lineárního programování bylo dosaženo mnoha podstatných výsledků, v literatuře a obzvláště v univerzitních kursech se stále studuje pouze teorie lineárního programování s konečně mnoha reálnými proměnnými (tj. teorie LP v reálném konečněrozměrném prostoru). Tato práce se známou teorii lineárního programování snaží doplnit tím, že o lineárním programování pojednává v (obecně) nekonečněrozměrných prostorech. To vede k jednotícímu (někdy i zcela novému) pohledu na teorii LP. Předkládaná práce by tak mohla nalézt uplatnění při výuce kursů lineárního programování na univerzitách: jednotný pohled na teorii LP znamená její výrazné zjednodušení, což studentům umožní lepší pochopení probírané látky.

— — —

Je známa celá řada zajímavých, tzv. vět o alternativě, které jsou úzce spjaty se systémy (tj. soustavami) lineárních rovnic a nerovnic. S některými z těchto vět jsem se setkal už během svého studia na univerzitě. Bylo to v různých kursech optimalizace. První větou o alternativě, se kterou jsem se setkal, bylo klasické Farkasovo lemma (někdy nazývané též Farkasova věta); stalo se tak v kursu lineárního programování. Pak jsem se v kursu konvexní optimalizace setkal s Motzkinovou větou a v dalším kursu nelineární optimalizace jsem se setkal s Carverovou větou. Využití bylo ve všech kursech stejné: daná věta o alternativě se upotřebila při formulaci podmínek optimality zkoumané optimalizační úlohy. Již tehdy mě věty o alternativě velmi zaujaly a zkoušel jsem (nepříliš úspěšně) mezi nimi hledat různé souvislosti.

Skutečný podnět, který mě přivedl až k napsání této práce, přišel později. Řízením osudu se na začátku podzimu roku 2000 stalo, že jsem se po delší době setkal se svým přítelem Pavlem Gatnarem, spolužákem z doby studia na univerzitě. Byl to Pavel, kdo zavedl řeč na Farkasovo lemma a ptal se mě, zda si je ještě pamatuji. Přisvědčil jsem a vyslovil Farkasovo lemma – jehož první důkaz byl publikován již před více než sto lety [44] – tak, jak jsem se je naučil v kursu lineárního programování.

Věta 1. Farkasovo lemma v prostoru $\mathbb{R}^n$. *Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je matice typu $m \times n$ a nechť $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ je sloupcový vektor mající n složek. Potom implikace*

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{o} \implies \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq 0$$

platí pro všechna $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{o}\colon\ \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T,$$

přičemž $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$.

V této souvislosti jsem zmínil, že znám i tzv. základní lemma lineární algebry s jeho důkazem, viz [67: lemma A.5].

Věta 2. Základní lemma. *Nechť W je reálný vektorový prostor (třeba i nekonečněrozměrný) a nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \colon W \to \mathbb{R}$ a $\gamma \colon W \to \mathbb{R}$ jsou lineární formy na prostoru W. Potom $\bigcap_{i=1}^m \operatorname{Ker} \alpha_i \subseteq \operatorname{Ker} \gamma$ †, neboli implikace*

$$\alpha_1(x) = 0 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ \alpha_m(x) = 0 \implies \gamma(x) = 0$$

je splněna pro všechny body $x \in W$, právě tehdy, když

$$\exists u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}\colon \ u_1\alpha_1 + \cdots + u_m\alpha_m = \gamma\,.$$

Pavel mi však řekl, že vyslovené základní lemma 2 jej příliš nepřekvapuje, neboť z kursu lineární algebry si pamatuje jeho následující verzi.

Věta 3. Základní lemma v prostoru $\mathbb{R}^n$. *Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je matice typu $m \times n$ a nechť $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ je sloupcový vektor o n složkách. Potom implikace*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \implies \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = 0$$

platí pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m\colon \ \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T.$$

Ihned mě napadlo, že tak jako základní lemma 2 zobecňuje základní lemma 3, tak by i mohlo platit i následující zobecnění Farkasova lemmatu 1.

Věta 4. Farkasovo lemma. *Nechť W je libovolný reálný vektorový prostor a nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \colon W \to \mathbb{R}$ a $\gamma \colon W \to \mathbb{R}$ jsou lineární formy na W. Potom implikace*

$$\alpha_1(x) \le 0 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ \alpha_m(x) \le 0 \implies \gamma(x) \le 0$$

je splněna pro všechna $x \in W$ právě tehdy, když

$$\exists u_1, \ldots, u_m \ge 0\colon \ u_1\alpha_1 + \cdots + u_m\alpha_m = \gamma\,,$$

přičemž $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}$.‡

Ve stejném okamžiku mě také napadlo, že v důkazu Farkasova lemmatu 4 by snad šlo postupovat obdobně jako v důkazu základního lemmatu 2 [67: lemma A.5], resp. důkaz základního lemmatu 2 [67: lemma A.5] by snad stačilo jen vhodně zobecnit.

— — —

Po asi jednom a půl měsíci usilovné práce se mi skutečně podařilo najít vlastní důkaz zobecněného Farkasova lemmatu 4. Tím se ovšem vynořila celá řada dalších otázek.

---

† Symbol „Ker“ označuje jádro lineárního zobrazení, tedy množinu všech prvků, které se zobrazují na nulu. Například $\operatorname{Ker} \gamma = \{\, x \in W;\ \gamma(x) = 0 \,\}$.

‡ Uvedené Farkasovo lemma 4 ve skutečnosti není novým výsledkem. Viz větu [35: Teorém 4 (v § 3 v Části I)], která je dokonce ještě obecnější než právě vyslovené Farkasovo lemma 4: jde o Haarovo zobecnění Farkasova lemmatu, neboli Haarovu větu, viz [77: Teorém 6.1], [69: Teorém 4], [59: výsledek na konci § 2], [60: výsledek na konci § 2]. Anebo viz lemma [22: lemma 2.4 (v hlavě II § 1 na str. 119)], které je také obecnější než zde uvedené Farkasovo lemma 4: lemma [22: lemma 2.4 (v hlavě II § 1 na str. 119)] je totiž formulováno ve vektorovém prostoru nad libovolným lineárně uspořádaným (komutativním) tělesem.

Je všeobecně známo, že pomocí Farkasova lemmatu lze dokázat princip duality pro úlohy lineárního programování. Naskýtá se proto otázka, zda pomocí zobecněného Farkasova lemmatu 4 je možné dokázat také zobecněnou verzi principu duality. Nyní by již šlo o úlohy lineárního programování v nekonečněrozměrných prostorech. Související otázkou je, jaký tvar by úlohy LP v nekonečněrozměrných prostorech vlastně měly mít.

Další otázka souvisí s tzv. větami o alternativě, které souvisí se soustavami lineárních rovnic a nerovnic. Každá z vět o alternativě podává charakteristiku, kdy daná soustava lineárních rovnic a nerovnic určitého typu má nebo nemá řešení. Pro každý typ soustavy se formuluje zvláštní věta. Každou z vět o alternativě je možné formulovat dvěma ekvivalentními způsoby: buď „primární soustava nemá řešení právě tehdy, když duální soustava má řešení“, anebo jako alternativu „buď primární soustava má řešení, anebo duální soustava má řešení, přičemž se nemůže stát, aby primární i duální soustava byly řešitelné obě současně“. Výše uvedená Farkasova lemmata 1 a 4 a základní lemmata 2 a 3 mohou posloužit jako příklady vět o alternativě. Kupříkladu Farkasovo lemma 1 je možné ekvivalentně vyslovit následujícím způsobem: buď soustava $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} > 0$, $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{o}$ má řešení, anebo soustava $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T$, $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{o}$ má řešení. Soustavu nerovnic $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} > 0$, $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{o}$ zde považujeme za soustavu primární, druhou soustavu $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T$, $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{o}$ považujeme za soustavu duální. Jak už zmíněno výše, vět o alternativě je známa celá řada. Přehledy vět o alternativě lze nalézt například v [19] (viz též [82]), [22], [28], [30], [48: Kapitola 2 Sekce 2 a 3], dále v [35] (viz též [37]), [50], [87], s trochou obezřetnosti lze použít také [57].

Je všeobecně známo, že věty o alternativě spolu velice těsně souvisejí. Jakmile se podaří dokázat kteroukoliv z nich, ostatní věty o alternativě již lze pomocí dokázané věty odvodit snadno. Broyden [19: před Definicí 1] uvádí následující velice pěkné (zde volně přeložené) přirovnání: Věty o alternativě jsou jako města na planině vysoko v horách. Cestovat mezi nimi je snadné. Ale je obtížné na tuto planinu vystoupat z okolních nížin.

Kladl jsem si proto otázku zda po zobecnění Farkasova lemmatu (věta 4) lze dokázat také zobecněné varianty známých vět o alternativě.

Prakticky ihned po nalezení důkazu Farkasova lemmatu 4 jsem si kladl ještě jednu zajímavou otázku, jak by Farkasovo lemma (věta 4) vypadalo v případě, že (místo konečného počtu lineárních forem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$) by v něm vystupoval nekonečný počet lineárních funkcionálů α_j, kde $j \in J$, přičemž J je (třeba i nekonečná) indexová množina. Hlavní otázkou bylo, jaký tvar by takové Farkasovo lemma mělo mít.

Další otázky jsou obdobné: zda i po tomto zobecnění Farkasova lemmatu je možné zobecnit také ostatní věty o alternativě.

Velice zajímavou, proto i velice motivující, otázkou pak je, zda lze dokázat princip duality i pro úlohy lineárního programování v nekonečněrozměrných prostorech s nekonečným počtem lineárních omezení. Problémem je, jak by odpovídající duální úloha vlastně měla vypadat.

— — —

K systematickému hledání odpovědí na výše položené otázky jsem se vrátil až po jeden a půlroční přestávce v létě roku 2002 (podrobněji viz odstavec 6.3), kdy se mi podařilo všechny výše položené otázky úspěšně zodpovědět. Tehdy dosažené výsledky se později staly základem první a druhé kapitoly předkládané práce.

Tématem Farkasova lemmatu, dalších vět o alternativě a lineárního programování v nekonečněrozměrných prostorech jsem se od léta 2002 zabýval už soustavně.

K rozvoji dosažených výsledků nemalou měrou přispělo, že v letním semestru ak. roku 2002/2003 jsem měl vést kurs lineárního programování pro studenty. Díky tomu se mi do ruky dostala i velice zajímavě, poutavě a srozumitelně napsaná knížka Joela Franklina [46], kterou jsem při přípravě kursu využil. Po úvodních pojmech a příkladech úloh LP jsem v kursu pokračoval pojmem konvexního polyedru, jeho stěny, vrcholu, hrany apod. a chtěl jsem dospět k základní větě lineárního programování (jestliže daná úloha LP má optimální řešení a její množina přípustných řešení má alespoň jeden vrchol, potom optima se nabývá i v alespoň jednom vrcholu). Pojem konvexního polyedru lze snadno zavést i v nekonečněrozměrném prostoru. Problémem ovšem je, že konvexní polyedr v nekonečněrozměrném prostoru nikdy nemá vrcholy (ledaže by byl popsán nekonečným počtem omezujících podmínek, což nelze). Musel jsem tedy použít jiný přístup, než je ten, který se v literatuře běžně používá, a potřebnou teorii vybudovat od základu znovu. Poté jsem pokračoval principem duality, který už jsem znal. Závěr kursu jsem věnoval simplexové metodě, jejíž popis jsem si osvěžoval z už zmiňované knížky [46: Kapitola I Sekce 4 a 5]. Souběžně se studiem simplexové metody jsem si vždy kladl otázku, čemu ten který její krok odpovídá v úlohách LP v nekonečněrozměrných prostorech, které už jsem znal. Potřebnou analogii se mi podařilo pokaždé najít. Tak jsem (s překvapením) zjistil, že simplexovou metodu je možné použít i k řešení úloh lineárního programování v nekonečněrozměrném prostoru (s konečným počtem lineárních omezení) – byť výsledný algoritmus je spíše abstraktní, což je ovšem dáno použitým abstraktním přístupem k úlohám LP. Tuto skutečnost lze chápat jako potvrzení obdivuhodné geniality simplexové metody i jejího autora George Dantziga, který ji poprvé publikoval již před více než 50 lety [24]. Takto získané výsledky se staly základem třetí, dodatečné kapitoly předkládané práce.

Je všeobecně známo, že v simplexové metodě může dojít k tzv. degeneraci a že simplexová metoda se z tohoto důvodu může i zacyklit. Také je všeobecně známo, že cyklu je možné odpomoci užitím tzv. lexikografické simplexové metody. Vrátil jsem se proto ke známému článku George Dantziga, Alexe Ordena a Philipa Wolfeho [25]. Protože už jsem znal souvislosti mezi simplexovou metodou a úlohami lineárního programování v nekonečněrozměrných prostorech, srovnáním simplexové metody s její lexikografickou verzí [25] jsem mohl odvodit úlohy lexikografického LP v nekonečněrozměrných prostorech, které lexikografická simplexová metoda řeší. Z dřívější znalosti Farkasova lemmatu 4 a jeho vztahu k úlohám lineárního programování v nekonečněrozměrných prostorech jsem mohl zpětně odvodit též lexikografické Farkasovo lemma.

Než lexikografickou verzi Farkasova lemmatu vyslovím, napřed připomenu pojem *lexikografického uspořádání* vektorového prostoru $\mathbb{R}^N$. Nechť $\boldsymbol{u} = (u_j)_{j=1}^N, \boldsymbol{v} = (v_j)_{j=1}^N \in \mathbb{R}^N$ jsou dva sloupcové vektory mající N složek $u_1, \dots, u_N$ a $v_1, \dots, v_N$. Říkáme, že vektor $\boldsymbol{u}$ je *lexikograficky větší* než vektor $\boldsymbol{v}$ a píšeme $\boldsymbol{u} \succ \boldsymbol{v}$ právě tehdy, když existuje vhodný index $N_1 \in \{1, \dots, N\}$ takový, že $u_j = v_j$ pro $j = 1, \dots, N_1 - 1$ a navíc platí $u_{N_1} > v_{N_1}$. Říkáme, že vektor $\boldsymbol{u}$ je *lexikograficky menší* než $\boldsymbol{v}$ a píšeme $\boldsymbol{u} \prec \boldsymbol{v}$ právě tehdy, když $\boldsymbol{v} \succ \boldsymbol{u}$. Říkáme, že vektor $\boldsymbol{u}$ je *lexikograficky větší nebo roven*, resp. *lexikograficky menší nebo roven*, vektoru $\boldsymbol{v}$ a píšeme $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{v}$, resp. $\boldsymbol{u} \preceq \boldsymbol{v}$, právě tehdy, když po řadě $\boldsymbol{u} \succ \boldsymbol{v}$ nebo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, resp. $\boldsymbol{u} \prec \boldsymbol{v}$ nebo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$. Říkáme, že vektor $\boldsymbol{u}$ je *lexikograficky kladný*, resp. *lexikograficky nezáporný*, resp. *lexikograficky nekladný*, resp. *lexikograficky záporný* právě tehdy, když po řadě $\boldsymbol{u} \succ \boldsymbol{o}$, resp. $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$, resp. $\boldsymbol{u} \preceq \boldsymbol{o}$, resp. $\boldsymbol{u} \prec \boldsymbol{o}$, přičemž $\boldsymbol{o}$ značí nulový vektor prostoru $\mathbb{R}^N$, tj. sloupec N nul.

Věta 5. Lexikografické Farkasovo lemma. *Nechť W je libovolný reálný vektorový prostor, nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_m \colon W \to \mathbb{R}$ jsou lineární formy na něm a nechť $\gamma \colon W \to \mathbb{R}^N$ je lineární zobrazení. Prostor $\mathbb{R}^N$ zde uvažujme s lexikografickým uspořádáním. Potom implikace*

$$\alpha_1(x) \le 0 \;\wedge\; \cdots \;\wedge\; \alpha_m(x) \le 0 \implies \gamma(x) \preceq 0$$

platí pro každé $x \in W$ právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m \succeq \boldsymbol{o}\colon\ \boldsymbol{u}_1\alpha_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_m\alpha_m = \gamma\,, \tag{$*$}$$

kde $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m \in \mathbb{R}^N$.

(Rovnice $\boldsymbol{u}_1\alpha_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_m\alpha_m = \gamma$ ve formuli $(*)$ vyjadřuje rovnost dvou zobrazení: pro každé $x \in W$ má platit $\boldsymbol{u}_1\big(\alpha_1(x)\big) + \cdots + \boldsymbol{u}_m\big(\alpha_m(x)\big) = \gamma(x)$. Sloupcové vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ je potřeba vynásobit reálnými čísly po řadě $\alpha_1(x), \dots, \alpha_m(x)$ a obdržené výsledky je třeba sečíst.)

Je zřejmé, že lexikografické Farkasovo lemma 5 zobecňuje Farkasovo lemma 4 – ve větě 5 stačí položit $N = 1$. Poněkud překvapivějším zjištěním však pro mne bylo, že můj původní důkaz Farkasova lemmatu 4 bylo možné použít i v případě lexikografické verze, tedy k důkazu věty 5; v důkazu stačilo provést jen několik formálních úprav.

S odvozením obecnějšího, lexikografického Farkasova lemmatu 5 opět vyvstaly otázky, zda pro úlohy lexikografického lineárního programování v nekonečněrozměrných prostorech také platí princip duality a zda lze odvodit ještě obecnější věty o alternativě. Vyšlo najevo, že pro úlohy lexikografického LP princip duality skutečně platí a že k jeho důkazu mi stačí použít vlastní důkaz principu duality pro úlohy LP v nekonečněrozměrných prostorech s několika formálními úpravami. Pokud jde o ostatní věty o alternativě – jako například o Motzkinovu větu nebo o Carverovu větu, obecně jde o věty, které v této práci nazývám *větami o alternativě prvního druhu* (viz poznámku 5.21) –, už se mi žádného dalšího zobecnění nepodařilo dosáhnout. Stojí za zmínku, že ačkoliv jednu z vět o alternativě prvního druhu (kterou v této práci nazývám lemmatem o základní dualitě v lineárním programování) v důkazu principu duality používám, žádná její „zobecněná“ verze v důkazu lexikografického principu duality není potřeba.

Již dříve, ještě před formulací lexikografického Farkasova lemmatu 5, jsem se pokoušel také o následující úvahu: Důkaz Farkasova lemmatu 4 vychází z důkazu základního lemmatu 2 [67: lemma A.5]. Základní lemma lineární algebry [67: lemma A.5] ovšem platí i v případě, že W je vektorový prostor nad obecným komutativním tělesem F, přičemž $\alpha_1, \dots, \alpha_m \colon W \to F$ a $\gamma \colon W \to F$ jsou lineární formy (speciální volba $F = \mathbb{R}$ pak dává základní lemma 2). Lze obdobným způsobem zobecnit také Farkasovo lemma 4? (Tj., platí Farkasovo lemma také v případě vektorového prostoru W nad obecným tělesem F? Na tělese F by ovšem bylo potřeba uvažovat nějaké vhodné uspořádání. A bude s tímto zobecněním slučitelná i jeho lexikografická verze (věta 5)?)

Teprve setkání s fuzzy lineárním programováním [79], [80] dalo potřebný impuls. Na základě srovnání jednotlivých vazeb, které primární a duální úlohu fuzzy lineárního programování vzájemně propojují, s obdobnými vazbami, které jsou v lexikografickém Farkasově lemmatu 5 jakož i v principu duality pro úlohy lexikografického LP, jsem vyslovil domněnku, že Farkasovo lemma (následně i princip duality) platí také v případě, že ve větě 5 místo prostoru $\mathbb{R}^N$ dosadíme prostor všech fuzzy reálných čísel (s nějakým vhodným, „standardním“ uspořádáním) a místo lexikograficky nezáporných vektorů $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ dosadíme nezáporná fuzzy čísla. Tato domněnka se později (částečně) potvrdila.

Podrobnou revizí svého vlastního důkazu Farkasova lemmatu 4 jsem zjistil, že Farkasovo lemma 5 zůstane v platnosti, i když W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným (ne nutně komutativním (!)) tělesem F a když namísto $\mathbb{R}^N$ dosadíme jakýkoliv lineárně uspořádaný vektorový prostor V nad daným tělesem F. K obdobnému závěru jsem došel také v případě principu duality pro úlohy LP v nekonečněrozměrných prostorech. Tím výsledky obsažené v první (a související třetí) kapitole předkládané práce dostaly tvar, ve kterém jsou uvedeny.

— — —

Lze shrnout, že první a třetí kapitola předkládané práce se odehrává v rámci určeném (1) lineárně uspořádaným (ne nutně komutativním) tělesem F, dále (2) „základním“ nebo „nosným“ vektorovým prostorem W nad tělesem F a (3) lineárně uspořádaným vektorovým prostorem V nad lineárně uspořádaným tělesem F, kde prostor V má význam prostoru „cílových hodnot“.

(Například v lexikografickém Farkasově lemmatu 5 je za lineárně uspořádané těleso F dosazeno těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ s jeho standardním uspořádáním, „základní“ resp. „nosný“ vektorový prostor W je dán a za lineárně uspořádaný vektorový prostor „cílových hodnot“ V je dosazen prostor $\mathbb{R}^N$ s lexikografickým uspořádáním.)

Protože výsledky obsažené ve druhé kapitole od léta 2002 nedoznaly větších změn, druhá kapitola předkládané práce se odehrává jen v rámci jednoho „základního“ reálného vektorového prostoru X – jako kdyby šlo o rámec z první nebo třetí kapitoly určený (1) tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním, dále (2) „základním“ nebo „nosným“ vektorovým prostorem X nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ a (3) aditivní grupou tělesa R se standardním uspořádáním, kterou chápeme jako lineárně uspořádaný vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ a zároveň jako prostor „cílových hodnot“. Metody použité ve druhé kapitole jsou ovšem založeny na prostředcích funkcionální analýzy (jako jsou slabé* topologie apod.) – což je významný rozdíl oproti algebraickým metodám upotřebeným v první a třetí kapitole.

Literatury o lineárních nerovnostech nebo lineárním programování (v konečněrozměrných prostorech ovšem) je celá řada: pomineme-li historické články resp. práce [20], [44], [47], [56], [59], [71], [85], lze uvést například již zmíněné práce [19] (viz též [82]), [28], [30], [48], [50], [87], dále též [46] nebo [76].

Naproti tomu je literatury pojednávající o lineárních nerovnostech nebo lineárním programování v (obecně) nekonečněrozměrných prostorech zřetelný nedostatek. Vím totiž pouze o dvou pracích: jednak je to článek Ky Fana [35] z roku 1956 a jednak je to kniha Sergeje Černikova (Сергея Черникова) [22] z roku 1968.

(O lineárním programování v nekonečněrozměrných prostorech pojednává rovněž kniha [1]. Přístup použitý v knize [1] je ale zcela odlišný od přístupu použitého v této předkládané práci. Literatury, která je založena na podobném přístupu jako kniha [1], je opět celá řada, zde zmiňme alespoň například [83] nebo [34].)

Ky Fan se ve svém článku [35] zabývá soustavami lineárních nerovnic v reálném vektorovém prostoru (tj. v rámci určeném tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním, „základním“ vektorovým prostorem W nad $\mathbb{R}$ a aditivní grupou tělesa $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním coby prostorem „cílových hodnot“).

Sergej Černikov ve své knize [22] jde ještě dále, neboť teorii lineárních nerovnic podrobně rozpracovává ve vektorovém prostoru nad obecným lineárně uspořádaným polem (tj. lineárně uspořádaným komutativním tělesem; na druhou stranu se nezdá, že by komutativitu daného tělesa ve své knize [22] příliš využíval; Černikov ve své knize [22] tedy pracuje v rámci určeném lineárně uspořádaným komutativním tělesem F, dále „základním“ vektorovým prostorem W nad tělesem F a aditivní grupou tělesa F s jeho uspořádáním coby prostorem „cílových hodnot“). Dále se lze v knize [22] setkat s principem duality a další teorií pro úlohy lineárního programování s konečným počtem lineárních omezení ve vektorovém prostoru nad lineárně uspořádaným (komutativním) tělesem [22: hlava VI]. Případ úloh LP s nekonečným počtem podmínek je v knize [22] také stručně popsán [22: hlava VII § 4].

Předkládaná práce (přesněji: první a třetí kapitola předkládané práce) pak známou teorii doplňuje tím, že za prostor „cílových hodnot“ je umožněno dosadit libovolný vektorový prostor V s lineárním uspořádáním, a také tím, že použité lineárně uspořádané tělesem F nemusí být komutativní (viz též odstavec 3.65).

— — —

Jak již výše zmíněno, tématem Farkasova lemmatu, dalších vět o alternativě a lineárního programování v nekonečněrozměrných prostorech jsem se už od léta 2002 zabýval soustavně. Výsledky, kterých jsem od té doby dosáhl, jsem průběžně presentoval na konferencích, viz [4], [5], [6], [7], [9], [12], [13]. Zveřejněny jsou rovněž abstrakty některých presentací, viz [8], [11], [14], viz též článek [10]. Hlavní výsledky první kapitoly předkládané práce jsem odeslal k publikaci [15].

Některé dosažené výsledky (z první a třetí kapitoly) také přednáším studentům v kursu lineárního programování, který na Ostravské univerzitě v Ostravě vedu. Výklad ale neprovádím v plné obecnosti: v kursu LP přednáším teorii lineárního programování v (sice obecně) nekonečněrozměrném prostoru W, ale nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$, a za prostor „cílových hodnot“ V dosazuji aditivní grupu tělesa $\mathbb{R}$, přičemž někdy zmíním i možnost práce s lexikograficky uspořádaným prostorem $\mathbb{R}^N$. Studentům několikrát zdůrazňuji, že za prostor W mohou kdykoliv dosadit konečněrozměrný prostor $\mathbb{R}^n$, čímž dostanou klasickou teorii duality lineárního programování, která je v literatuře běžně uvedena. S navazujícím výkladem simplexové metody je ale trochu potíž: aby studenti mohli bez větších problémů používat množství už existující literatury o simplexové metodě, na přednáškách volím spíše přístup „velké změny v označení“ (podrobněji viz poznámku 15.4), který je mírně odlišný od přístupu, jenž jsem použil v § 15 předkládané práce. Ačkoliv výklad teorie – díky práci v (obecně) nekonečněrozměrném „základním“ reálném vektorovém prostoru W – vedu poněkud abstraktně, početní příklady úloh LP, které mají sloužit k upevnění a procvičení probírané látky, vždy formuluji v konečněrozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$, aby šlo o příklady, které se v kursech lineárního programování obvykle uváděly a uvádějí dosud. Použitý abstraktní přístup v kombinaci s početními příklady v konečněrozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$ by měl studentům umožnit lépe porozumět teorii duality lineárního programování i simplexové metodě.

— — —

Jak z předcházejícího textu vyplynulo, předkládaná práce je rozdělena do tří kapitol.

V první kapitole nejprve zavádím potřebné základní pojmy, na nichž je další část práce postavena. Poté v první kapitole studuji Farkasovo lemma, další věty o alternativě a teorii duality lineárního programování v nekonečněrozměrných prostorech v případě konečného počtu omezujících podmínek. Lze postupovat velmi obecně, uvedená témata proto studuji v rámci určeném (1) lineárně uspořádaným (ne nutně komutativním) tělesem F, dále (2) „základním“ nebo „nosným“ vektorovým prostorem W nad tělesem F a (3) lineárně uspořádaným vektorovým prostorem „cílových hodnot“ V nad lineárně uspořádaným tělesem F.

Ve druhé kapitole studuji tatáž témata – tj. Farkasovo lemma, další věty o alternativě a teorii duality lineárního programování v nekonečněrozměrných prostorech – ale v případě nekonečného počtu omezujících podmínek. Při tom se opírám o prostředky funkcionální analýzy, proto uvedená témata studuji pouze v rámci určeném (1) tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním, dále (2) „základním“ či „nosným“ vektorovým prostorem X nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$, přičemž (3) roli lineárně uspořádaného vektorového prostoru „cílových hodnot“ nad tělesem $\mathbb{R}$ má jeho aditivní grupa se standardním uspořádáním.

Ve třetí kapitole, která doplňuje kapitolu první, se zabývám teorií konvexních polyedrů a simplexovou metodou v nekonečněrozměrných prostorech. (Zmíním též otázku celočíselného lineárního programování v nekonečněrozměrných prostorech.) Opět lze postupovat čistě algebraicky a pracuji ve stejném rámci jako v kapitole první.

Obsah každé kapitoly je blíže rozveden na jejím začátku. Každá z kapitol obsahuje několik paragrafů. Paragrafy se člení na odstavce a některé odstavce se ještě člení na písmena. V odstavci $p.q$, kde p je číslo paragrafu a q je číslo odstavce, jsou některé zvýrazněné rovnice (vztahy, formule apod.) označeny znakem (r), kde r je číslo označované rovnice. Jestliže se na rovnici (r) odkazuji v rámci odstavce $p.q$, kde je uvedena, používám stejný znak (r). Odkazuji-li se však na tutéž rovnici z jiného odstavce, používám úplný znak $p.q.(r)$.

Výsledky dosažené v každém paragrafu jsou stručně shrnuty v jeho závěru. Souvislosti daného výsledku s již existující literaturou, včetně odkazů na literaturu, uvádím vždy na příslušném místě práce, tj. obvykle před (výjimečně za) daným výsledkem, jehož se diskuse nebo odkazy týkají. V seznamu literatury na konci práce jsou jednotlivé prameny označeny znakem $[n]$, kde n je číslo citovaného pramene. Na použitý pramen se pak odkazuji tímtéž znakem $[n]$. Odvolávám-li se na konkrétní část (nebo výsledek apod.) použitého pramene, používám rozšířený odkaz tvaru [n: *část*], kde *část* upřesňuje, o kterou část (výsledek apod.) pramene [n] jde.

O sobě v této práci hovořím ve 3. osobě jednotného čísla jako o „autorovi“. Jinak používám 1. osobu množného čísla ve smyslu „já a čtenář“, například ve spojeních „předpokládejme“, „odvodíme“ apod., což znamená, že „já a čtenář budeme předpokládat“, „já a čtenář odvodíme“ apod.

— — —

Vznik předkládané práce byl umožněn řadou okolností, z nichž lze zmínit jen některé, ale jsem vděčný a děkuji za všechny. Rád bych na tomto místě poděkoval svým rodičům za poskytnutí zázemí, bez kterého by dosažení uvedených výsledků a napsání předkládané práce bylo značně ztíženo. Za zájem o mé výsledky a upozornění na některé odkazy na literaturu děkuji panu doc. Ing. Jiřímu OUTRATOVI, DrSc., panu prof. RNDr. Milanu VLACHOVI, DrSc., a panu prof. RNDr. Karlovi ZIMMERMANNOVI, DrSc. O možných aplikacích v teorii duality fuzzy lineárního programování jsem později diskutoval s panem prof. RNDr. Jaroslavem RAMÍKEM, CSc. Za poskytnutí konzultací týkajících se teorie lineárně uspořádaných těles, lineárně uspořádaných vektorových prostorů a některých algebraických konstrukcí děkuji panu prof. RNDr. Jiřímu MOČKOŘOVI, DrSc. V neposlední řadě děkuji i svému školiteli, panu prof. RNDr. Miroslavu MAŇASOVI, DrSc., za trpělivost a za vedení, které mi během doby mého doktorského studia poskytl.

Kapitola I.

Soustavy lineárních nerovnic a úlohy lineárního programování v případě konečného počtu omezujících podmínek

První tři paragrafy této, první kapitoly, § 1, § 2 a § 3 mají převážně úvodní charakter. Jejich účelem je vytvořit pevný základ pro zbývající část této práce. To v důsledku znamená, že řada výsledků uvedených v prvních třech paragrafech, § 1, § 2 a § 3, je dobře známa. Známé výsledky jsou však uvedeny ve tvaru, který lépe vyhovuje celkovému pojetí této práce. Hlavní výsledky jsou uvedeny až v dalších paragrafech (čtvrtým, § 4, počínaje).

V § 1 zavedeme základní pojmy a označení, která budeme v této práci používat. Jak uvidíme, § 1 má tři části. V jeho první části uvedeme základní definice, které bezprostředně souvisí s pojmy vektorových prostorů a lineárních zobrazení. V jeho prostřední části se zabýváme konstrukcemi, které je možné s vektorovými prostory a lineárními zobrazeními provádět. A v jeho závěrečné části připomeneme pojem soustavy lineárních rovnic a ne-rovnic.

V § 2 vyslovíme základní lemma lineární algebry a uvedeme některé jeho důsledky.

V § 3 zavádíme pojmy, které pro tuto práci mají základní význam. Jde o pojmy lineárně uspořádaného tělesa a lineárně uspořádaného vektorového prostoru. Uvidíme, že § 3 můžeme rozčlenit na čtyři části. V jeho první části zavedeme už zmíněné základní pojmy tělesa a vektorového prostoru s lineárním uspořádáním, uvedeme jejich zcela elementární vlastnosti, načež zavedeme celou řadu dalších souvisejících jednoduchých pojmů a uvedeme další základní vlastnosti. Ve druhé části se budeme věnovat zajímavému příkladu lineárně uspořádaného tělesa, a sice tělesa hyperreálných čísel. Ve třetí části podáme charakteristiku úplného tělesa a ukážeme některé vlastnosti lineárně uspořádaných vektorových prostorů nad úplným tělesem. Při tom se zaměříme na pojem lexikografického uspořádání. V poslední, čtvrté části se budeme zabývat soustavami lineárních rovnic a nerovnic.

V § 4 svoji pozornost obrátíme k Farkasovu lemmatu, ke kterému nejprve uvedeme různé poznámky. Pak vyslovíme a dokážeme zobecněnou variantu Farkasova lemmatu, což je jeden z ústředních výsledků této práce. Zabývat se budeme také lemmatem o základní dualitě v lineárním programování, které je snadným důsledkem Farkasova lemmatu. Stručnou pozornost budeme věnovat i Haarově větě.

V § 5 pomocí dokázaného Farkasova lemmatu odvodíme zobecněné varianty řady dalších známých vět o alternativě a souvisejících výsledků.

V § 6 dokázané Farkasovo lemma použijeme k tomu, abychom získali další ústřední výsledek této práce, a sice zobecněný princip duality pro úlohy lineárního programování v nekonečněrozměrných prostorech s konečným počtem omezujících podmínek.

V § 7 provedeme diskusi výsledků této kapitoly. Naznačíme nejen přínos, ale také další možné směry rozvoje předložené teorie.

V § 8 si budeme klást otázku, zda Farkasovo lemma a princip duality pro úlohy lineárního programování v nekonečněrozměrných prostorech je možné formulovat i v případě nekonečného počtu omezujících podmínek. Smyslem § 8 je tak vytvořit spojovací článek mezi touto a následující kapitolou, kde se Farkasovým lemmatem a principem duality v případě nekonečného počtu omezujících podmínek budeme zabývat.

§ 1 Grupy, tělesa, vektorové prostory a lineární zobrazení

1.1. Definice. Grupa. *Grupou* rozumíme uspořádanou čtveřici $(G, \cdot, {}^{-1}, 1)$ – bývá obvyklé psát jen $G(\cdot, {}^{-1}, 1)$ a hovořit stručně jen o „grupě G“ – kde G, tj. první složka uvedené uspořádané čtveřice, je nějaká množina (tzv. nosná množina grupy G), dále „$\cdot$“ je binární operace na množině G (operace „násobení“), související „${}^{-1}$“ je unární operace na množině G („operace inverzního prvku“) a konečně „1“ je nějaká konstanta patřící do množiny G (tzv. „jednotkový prvek“ či „jednotka“ grupy G) a pro každé tři prvky $a, b, c \in G$ jsou splněny následující tři vlastnosti:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\,,$$
$$a \cdot a^{-1} = 1\,,$$
$$a \cdot 1 = a\,.$$

První vlastnost vyjadřuje *asociativitu* operace „$\cdot$“. Snadno nahlédneme, že pro každý prvek $a \in G$ platí také $a^{-1} \cdot a = 1$ a $1 \cdot a = a$. (Nechť $a^{-1} \cdot a = b$. Násobíme zleva postupně prvkem a a a^{-1}. Dostáváme $1 \cdot a = a \cdot b$ a $a^{-1} \cdot a = a^{-1} \cdot a \cdot b$ neboli $b = b \cdot b$. Nyní násobíme prvkem b^{-1} zprava. Dostaneme $1 = b$. Konečně máme $1 \cdot a = a \cdot a^{-1} \cdot a = a \cdot 1 = a$.) Prvek a^{-1} je tedy prvkem *inverzním* k prvku a a prvek 1 je *neutrálním* prvkem grupy G.

Připomeňme také, že pokud $a \cdot b = 1$, potom $b = a^{-1}$ a $a = b^{-1}$. (Rovnici $a \cdot b = 1$ stačí násobit zleva nebo zprava prvkem a^{-1} nebo b^{-1}.) Odtud plyne, že $1^{-1} = 1$, protože $1 \cdot 1 = 1$. Dále snadno nahlédneme, že $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ a že $(a^{-1})^{-1} = a$. (Protože $(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = 1$ a protože $a \cdot a^{-1} = 1$.)

Poznamenejme, že znak „$\cdot$“ bývá obvyklé vynechávat: namísto „$a \cdot b$“ píšeme stručně jen „ab“. O operaci násobení „$\cdot$“ hovoříme také jako o operaci „součinu“ a jednotce 1 grupy G říkáme také „jednička“. O inverzním prvku a^{-1} k prvku a hovoříme stručně také jako o „inverzi“ k prvku a.

1.2. Definice. Komutativní grupa. Nechť $G(+, -, 0)$ je grupa. Tato grupa je *komutativní* právě tehdy, když každé dva prvky $a, b \in G$ splňují vztah

$$a + b = b + a\,,$$

který vyjadřuje *komutativitu* operace „$+$“. Komutativní grupy se nazývají také *Abelovy grupy* nebo někdy též *abelovské grupy*.

O operaci „$+$“ hovoříme jako o operaci „sčítání“ nebo „součtu“. O operaci „$-$“ hovoříme jako o „operaci opačného prvku“ a o prvku $-a$ hovoříme jako o prvku *opačném* k prvku a. O konstantě 0 hovoříme jako o „nule“ nebo „nulovém prvku“ komutativní grupy G; o ostatních prvcích, které jsou od nulového prvku různé, pak hovoříme jako o „nenulových prvcích“. Poznamenáváme, že namísto zápisu „$a + (-b)$“ se obyčejně píše jen „$a - b$“.

1.3. Definice. Těleso. *Tělesem* rozumíme uspořádanou sedmici $(F, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1)$ – bývá obvyklé psát jen $F(+, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1)$ a hovořit o „tělese F“ – splňující, že $F(+, -, 0)$ je grupa (tzv. *aditivní grupa* tělesa F), klademe-li $F^* = F \setminus \{0\}$, pak $F^*(\cdot', {}^{-1}, 1)$ je také grupa (tzv. *multiplikativní grupa* tělesa F), přičemž binární operace „$\cdot$“ je definována na celé množině F a „$\cdot'$“ označuje její restrikci na množinu F^*, a pro každé tři prvky a, b, $c \in F$ platí

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)\,,$$
$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)\,.$$

Uvedené dva vztahy vyjadřují levou a pravou *distributivitu* operace „$\cdot$“ vůči operaci „$+$“.

Připomeňme, že pro každý prvek $a \in F$ platí $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$. (Máme totiž $0 \cdot a = (0+0) \cdot a = (0 \cdot a) + (0 \cdot a)$. Odtud $0 = 0 \cdot a$. Druhá rovnost se dokáže obdobně.) Platí i následující: $a \cdot b = 0$ právě tehdy, když $a = 0$ nebo $b = 0$. (Jestliže $a \cdot b = 0$ a $a \neq 0$, pak $b = a^{-1} \cdot 0 = 0$.)

Z výše uvedené definice tělesa (protože $1 \in F^* = F \setminus \{0\}$) ihned vyplývá, že $0 \neq 1$. Dále snadno nahlédneme, že operace násobení „$\cdot$" je asociativní, neboli že vztah $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ platí pro každé tři prvky $a, b, c \in F$. (Jsou-li všechny tři prvky nenulové, opřeme se o předpoklad, že $F^*(\cdot, {}^{-1}, 1)$ je grupa. Je-li některý z těchto prvků nulový, potom výsledkem násobení je nula a rovnice je opět splněna.)

Připomeňme také, že $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$. (Platí totiž $\big((-a) \cdot b\big) + \big(a \cdot b\big) = (-a + a) \cdot b = 0 \cdot b = 0$. Odtud $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Druhá rovnice se dokáže obdobně.)

Doplňme, že $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$. (Vzhledem k vlastnostem multiplikativní grupy tělesa F stačí dokázat, že $(-a) \cdot \big(-(a^{-1})\big) = 1$. Ale $(-a) \cdot \big(-(a^{-1})\big) = -\big(-(a \cdot a^{-1})\big) = -(-1) = 1$. Poslední rovnost plyne z vlastností aditivní grupy tělesa F.)

Nyní již snadno dokážeme, že aditivní grupa $F(+, -, 0)$ je komutativní [61: Problém 1.1.18]. (Máme totiž $-(b+a) = -\big(1 \cdot (b+a)\big) = (-1) \cdot (b+a) = \big((-1) \cdot b\big) + \big((-1) \cdot a\big) = -b - a$, tudíž $(a+b) - (b+a) = a + b - b - a = 0$. Odtud $a + b = b + a$.)

Množině F, tj. první složce výše uvedené sedmice, říkáme *nosná množina* tělesa F. Dále používáme terminologii zavedenou již předchozími definicemi 1.1 a 1.2. Terminologie zavedená definicí 1.2 (sčítání, součet, opačný prvek, operace opačného prvku, nula, nulový prvek, nenulový prvek) se vztahuje k aditivní grupě $F(+, -, 0)$ tělesa F. Terminologie zavedená definicí 1.1 (násobení, součin, inverzní prvek, operace inverzního prvku, jednotka, jednotkový prvek, jednička) se vztahuje k multiplikativní grupě $F^*(\cdot, {}^{-1}, 1)$ tělesa F. Tuto terminologii používáme ve vztahu k celému tělesu F. Například o operaci „$\cdot$", kromě toho, že o ní můžeme hovořit jako o násobení v multiplikativní grupě F^*, můžeme hovořit také jako o násobení v tělese F. Apod.

Nadále přijmeme konvenci, že operace násobení „$\cdot$" má přednost před operací sčítání „$+$". Za použití již výše uvedených konvencí (vynechávání znaménka násobení, psaní znaménka minus namísto přičítání opačného prvku) tak kupříkladu namísto „$a + \big(b \cdot (-c)\big)$" můžeme psát jenom „$a - bc$" a podobně.

1.4. Definice. Komutativní těleso. Zmiňme také pojem komutativního a nekomutativního tělesa. Těleso $F(+, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1)$ je *komutativní* právě tehdy, když jeho multiplikativní grupa $F^*(\cdot, {}^{-1}, 1)$ je komutativní. (Vztah $a \cdot b = b \cdot a$ je splněn pro každé dva prvky $a, b \in F$.) Těleso F je *nekomutativní* právě tehdy, když není komutativní. Samotný pojem „těleso" pak zahrnuje těleso komutativní i nekomutativní.

1.5. Definice. Vektorový prostor. Nechť $W(+, -, 0)$ je grupa a nechť $F(+, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1)$ je těleso. (Poznámka: Přestože značení použité pro nulu a pro operace na grupě W a aditivní grupě tělesa F je shodné, obě konstanty i ostatní operace jsou obecně navzájem různé. Označování různých, povahou však obdobných zobrazení či operací shodnými znaménky – například zde v grupě W i v aditivní grupě tělesa F jde o sčítání – je v matematice zcela běžným jevem, na který je třeba si přivyknout. V dalším textu již na tento jev nebudeme znovu upozorňovat.) Dále budiž dáno zobrazení „$*$" definované na kartézském součinu $F \times W$ a jdoucí do W, které každým dvěma prvkům $\lambda \in F$ a $u \in W$ přiřadí prvek $(\lambda * u) \in W$. Grupa W je *vektorovým prostorem* nad tělesem F (vzhledem k zobrazení „$*$") právě tehdy, když zobrazení „$*$" splňuje následující vztahy pro každé $\lambda, \mu \in F$ a $u, v \in W$:

$$\lambda * (u + v) = (\lambda * u) + (\lambda * v)\,,$$
$$(\lambda + \mu) * u = (\lambda * u) + (\mu * u)\,,$$
$$\lambda * (\mu * u) = (\lambda \cdot \mu) * u\,,$$
$$1 * u = u\,.$$

Jsou-li tyto podmínky splněny, hovoříme o „vektorovém prostoru W nad tělesem F vzhledem k zobrazení ‚$*$'“. Je-li zřejmé, jaké zobrazení „$*$“ splňující výše uvedené vztahy máme na mysli, hovoříme stručně jen o „vektorovém prostoru W nad tělesem F“. Je-li k tomu zřejmé také to, s jakým tělesem F pracujeme, stačí hovořit jen o „vektorovém prostoru W“.

O uvedeném zobrazení „$*$“ hovoříme jako o *násobení skalárem* nebo jako o *skalárním násobení.* O prvcích tělesa F tedy hovoříme jako o *skalárech.* O prvcích grupy W pak hovoříme jako o *vektorech.* Množinu W, tj. nosnou množinu grupy $W(+,-,0)$, nazýváme *nosnou množinou* vektorového prostoru W.

Dále používáme terminologii zavedenou již v definicích 1.2 a 1.3: terminologie zavedená definicí 1.2 se vztahuje ke grupě W (ale s tím rozdílem, že namísto o „prvcích“ hovoříme o „vektorech“) a terminologie zavedená definicí 1.3 se vztahuje k tělesu F (avšak s tím rozdílem, že namísto o „prvcích“ hovoříme o „skalárech“). Tuto terminologii pak používáme ve vztahu k celému vektorovému prostoru W nad tělesem F (vzhledem k zobrazení „$*$“). Máme tedy následující pojmy: sčítání nebo součet vektorů ($u+v$ pro $u,v \in W$), opačný vektor ($-u$ k vektoru $u \in W$), operace opačného vektoru, nula (vektorového prostoru W), nulový vektor, nenulový vektor. K tomu máme zejména tyto dva pojmy: nulový skalár (tj. nula tělesa F) a nenulový skalár ($\lambda \in F$ takové, že $\lambda \neq 0$, kde 0 je nula tělesa F). Dodejme, že nulovému vektoru říkáme také *počátek* vektorového prostoru W.

Poznamenejme, že pokud pracujeme s nějakým prostorem (zde pracujeme s prostorem vektorovým), potom jeho prvky často nazýváme *body.* To znamená, že o prvcích vektorového prostoru W – kromě toho, že o nich můžeme hovořit jako o vektorech – můžeme hovořit také jako o *bodech.* Rozhodnutí, zda daný prvek $u \in W$ nazveme „bodem“ vektorového prostoru W anebo jeho „vektorem“, záleží na tom, jak tento prvek zrovna pojímáme: zda spíše konkrétně (geometricky, jako určité místo ve vektorovém prostoru) anebo spíše abstraktně (jako např. veličinu udávající „směr“ a podobně). (Toto pojímání není zcela libovolné, ale formulovat jeho pravidla by bylo být obtížné. Rozhodující je zde zejména cit a různé ustálené zvyklosti.)

Máme-li vektor $u \in W$ a skalár $\lambda \in F$, lze snadno nahlédnout, že $\lambda * u = 0$ právě tehdy, když $\lambda = 0$ nebo $u = 0$. Dále platí, že $(-\lambda) * u = -(\lambda * u) = \lambda * (-u)$ a že grupa W je komutativní [61: Problém 1.1.18]. (Důkazy se provedou obdobně jako v případě analogických tvrzení, se kterými jsme se setkali již v definici 1.3.)

Povšimněme si speciální volby, kterou je možné provést, totiž že za grupu W můžeme dosadit také aditivní grupu tělesa F, přičemž za zobrazení „$*$“ dosadíme operaci násobení „$\cdot$“ tělesa F. Vidíme, že aditivní grupa tělesa F je také vektorovým prostorem nad tělesem F (vzhledem k zobrazení-operaci „$\cdot$“).

Opět přijímáme konvenci, že zobrazení „$*$“ má přednost před sčítáním vektorů. Navíc znak „$*$“ je možné vynechávat. Když například $\lambda, \mu \in F$ a $u, v \in W$, pak za použití všech dosud uvedených konvencí namísto „$u + \big((\lambda \cdot \mu) * (-v)\big)$“ můžeme psát jenom „$u - \lambda\mu v$“ a podobně. Poznamenejme, že vektorovým prostorům se říká také *lineární prostory.*

1.6. Poznámka. Význam prvních definic 1.1, 1.2 a 1.3 je jasný. Na Universu teorie množin jsme zavedli unární predikát „nějaké G (uspořádaná čtveřice) být grupa“ i „…být komutativní grupa“ a unární predikát „nějaké F (uspořádaná sedmice) být těleso“. Poslední definici 1.5 rozumíme tak, že na Universu teorie množin jsme zavedli ternární predikát „nějaké W (grupa), nějaké F (těleso) a nějaké ‚$*$' (zobrazení $*\colon F \times W \to$ $\to W$) být vektorový prostor“.

Kdykoliv hovoříme o vektorovém prostoru, například o vektorovém prostoru W, máme na mysli platnost tohoto ternárního predikátu (pro daný vektorový prostor W). Aby však uvedený predikát byl pravdivý (resp. o jeho pravdivosti vůbec mělo smysl hovořit), musíme do něj, kromě vektorového prostoru W, dosadit také nějaké těleso F a nějaké zobrazení „$*$“. Pracujeme-li tedy s nějakým vektorovým prostorem, pracujeme zároveň s příslušným tělesem F a zobrazením „$*$“, třebaže toto těleso F nebo zobrazení „$*$“ nebude výslovně uvedeno.

(Poznamenejme, že jako alternativní přístup k zavedenému ternárnímu predikátu by bylo možné vektorovým prostorem rozumět uspořádanou trojici $(W, F, *)$, kde W, F a „$*$“ splňují potřebné vlastnosti. Pak bychom měli unární predikát „něco (totiž uspořádaná trojice) být vektorový prostor“. Avšak při pohledu na již existující literaturu (např. [33], [78], [70]) se nezdá, že by tento alternativní přístup byl používán. Při další práci by navíc záhy vyšlo najevo, že ve srovnání s výše uvedeným přístupem (kde pracujeme s ternárním predikátem „být vektorový prostor“) je tento alternativní přístup poněkud těžkopádný. Popsaný alternativní přístup proto nebudeme nikde používat.)

1.7. Poznámka. Dosazení. Ke konci naposledy uvedené definice 1.5 jsme za grupu W a zobrazení „$*$“ dosadili po řadě aditivní grupu tělesa F a operaci „$\cdot$“. Slovní obrat vyhovující schématu „za A dosadíme B“ (případně „jako A zvolme B“ apod.) v této práci použijeme ještě několikrát. Použitím popsaného slovního obratu máme na mysli vyšetřování případu, kdy objekt A je roven objektu B, tedy $A = B$.

1.8. Definice. Levý a pravý vektorový prostor. V předcházející definici 1.5 a související poznámce 1.6 jsme ve skutečnosti zavedli pojem *levého* vektorového prostoru W nad daným tělesem F. (Zavedli jsme ternární predikát „být levý vektorový prostor“.) Zobrazení „$*$“ (s významem podle definice 1.5) totiž bylo definováno na kartézském součinu $F \times W$. Máme-li vektor $u \in W$ a skalár $\lambda \in F$, pak vektor u násobíme skalárem λ zleva („$\lambda * u$“). Z tohoto důvodu o zobrazení „$*$“ hovoříme také jako o *násobení skalárem zleva* nebo jako o *levém skalárním násobení.*

Není-li řečeno jinak, pak pojmem „vektorový prostor“ v této práci máme vždy na mysli levý vektorový prostor nad zadaným tělesem.

Zaveďme nyní pojem pravého vektorového prostoru. Nechť $W(+, -, 0)$ je grupa, nechť $F(+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$ je těleso a nechť „$*$“ je zobrazení definované na kartézském součinu $W \times F$ a jdoucí do W. Toto zobrazení každým dvěma prvkům $u \in W$ a $\lambda \in F$ přiřadí prvek $(u * \lambda) \in W$. Grupa W je *pravým vektorovým prostorem* nad tělesem F (vzhledem k zobrazení „$*$“) právě tehdy, když zobrazení „$*$“ pro každé $\lambda, \mu \in F$ a $u, v \in W$ splňuje:

$$\begin{aligned} (u + v) * \lambda &= (u * \lambda) + (v * \lambda)\,, \\ u * (\lambda + \mu) &= (u * \lambda) + (u * \mu)\,, \\ (u * \lambda) * \mu &= u * (\lambda \cdot \mu)\,, \\ u * 1 &= u\,. \end{aligned}$$

Za uvedených podmínek pak hovoříme o „pravém vektorovém prostoru W nad tělesem F vzhledem k zobrazení ‚$*$‘“, popřípadě jen o „pravém vektorovém prostoru W nad tělesem F“, případně jenom o „pravém vektorovém prostoru W“.

O zobrazení „$*$“ zde hovoříme jako o *násobení skalárem zprava* nebo jako o *pravém skalárním násobení.* Ostatní terminologie (skalár, vektor, nosná množina vektorového prostoru, ..., (ne)nulový vektor, (ne)nulový skalár, počátek, bod) je shodná jako v případě levých vektorových prostorů, viz předcházející definici 1.5.

Povšimněme si, že aditivní grupa tělesa F – kromě toho, že je levým vektorovým prostorem nad tělesem F, viz předcházející definici 1.5 – je současně pravým vektorovým prostorem nad tělesem F (opět vzhledem k zobrazení-operaci „$\cdot$“).

Také při práci s pravými vektorovými prostory přijímáme konvenci, že zobrazení „$*$“ má přednost před sčítáním vektorů a že znak „$*$“ lze vynechávat. Za použití všech dosud uvedených konvencí pak například namísto „$u + \big(v * \big((-\mu) \cdot \lambda\big)\big)$“, kde $u, v \in W$ a $\lambda, \mu \in F$, můžeme psát jenom „$u - v\mu\lambda$“ a podobně.

Obdobně platí také předcházející poznámka 1.6: Touto definicí 1.8 jsme zavedli ternární predikát „nějaké W (grupa), nějaké F (těleso) a nějaké ‚$*$‘ (zobrazení $*\colon W \times$ $\times\, F \to W$) být pravý vektorový prostor“. Hovoříme-li o nějakém pravém vektorovém prostoru W, musíme zároveň mít příslušné těleso F a zobrazení „$*$“ tak, aby tento ternární predikát byl pravdivý, přestože těleso F a zobrazení „$*$“ někdy nebude zmíněno výslovně.

Mohlo by se zdát, že rozdíl mezi levými a pravými vektorovými prostory je jen formální. To je do určité míry pravda. Vlastnosti levých a pravých vektorových prostorů jsou proto obdobné. Jestliže W je pravý vektorový prostor nad tělesem F, potom pro každé $\lambda \in F$ a $u \in W$ například platí, že $u * \lambda = 0$ právě tehdy, když $u = 0$ nebo $\lambda = 0$. Dále platí, že $(-u) * \lambda = -(u * \lambda) = u * (-\lambda)$ a že grupa W je komutativní. (Srovnej obdobná tvrzení v předcházející definici 1.5.) Rozdíl mezi levými a pravými vektorovými prostory je však (někdy) daleko hlubší než jen „pouze formální“. Touto otázkou se budeme podrobněji zabývat v následující úvaze 1.9. Ukážeme, že (některé) vektorové prostory vlastnost „být levý / pravý vektorový prostor“ mají „uloženu“ přímo ve svojí struktuře: je-li nám předložen nějaký (levý nebo pravý) vektorový prostor W nad tělesem F, potom jsme (někdy) schopni bezpečně rozpoznat, zda jde o levý vektorový prostor anebo o pravý vektorový prostor; toto rozlišení provedeme, aniž bychom museli znát, zda příslušné zobrazení „$*$“ je (formálně) definováno na kartézském součinu $F \times W$ anebo $W \times F$. V navazující úvaze 1.10 tuto problematiku ještě doplníme.

1.9. Úvaha. Rozdíl mezi levými a pravými vektorovými prostory. Část I. Nechť $W(+,-,0)$ je (levý nebo pravý) vektorový prostor nad tělesem $F(+,-,\cdot,{}^{-1},0,1)$ a ať znak „$*$“ označuje (levé nebo pravé) skalární násobení. Chceme (jednoznačně!) rozpoznat, zda předložený vektorový prostor W je levý anebo pravý. Toto rozlišení neprovedeme na základě toho, zda zobrazení „$*$“ je (formálně) definováno na kartézském součinu $F \times W$ anebo $W \times F$ – definiční obor zobrazení „$*$“ ostatně ani neznáme, protože v předpokladech je uvedeno, že skalární násobení „$*$“ může být levé nebo pravé. (Jiným problémem je, že množiny W a F si mohou být rovny. V takovém případě, ať už jde o levý anebo o pravý vektorový prostor, si jsou kartézské součiny $F \times W$ a $W \times F$ také rovny.) Ukazuje se, že daleko podstatnější než (formální) definiční obor zobrazení „$*$“ jsou následující dva vztahy, které musí platit pro každé $\lambda, \mu \in F$ a každé $u \in W$ a které připomínají asociativní zákon: $\lambda * (\mu * u) = (\lambda \cdot \mu) * u$ (v případě levého vektorového prostoru) a $(u * \mu) * \lambda = u * (\mu \cdot \lambda)$ (v případě pravého vektorového prostoru).

Předpokládejme, že těleso F není komutativní a že vektorový prostor W není triviální. (Vsuňme definici: Vektorový prostor W je *netriviální* právě tehdy, když obsahuje alespoň jeden nenulový vektor. Vektorový prostor W je *triviální* právě tehdy, když není netriviální. Viz též definici 1.33 dále.) Najdeme tedy dva skaláry $\lambda, \mu \in F$ takové, že $\lambda \cdot \mu \neq \mu \cdot \lambda$. Dále najdeme alespoň jeden nenulový vektor $u \in W$. Nyní nenulový vektor u vynásobme skalárem μ, teprve potom takto získaný vektor vynásobme ještě skalárem λ. Získaný výsledek označme w. (Jestliže skalární násobení „$*$“ je formálně definováno na kartézském součinu $F \times W$, potom máme $w = \lambda * (\mu * u)$. Jestliže skalární násobení „$*$“ je formálně definováno na kartézském součinu $W \times F$, potom máme $w = (u*\mu)*\lambda$.) Výsledek násobení vektoru u skalárem $(\lambda\cdot\mu)$ označme $u_{\lambda\mu}$. Výsledek násobení vektoru u skalárem $(\mu\cdot\lambda)$ označme $u_{\mu\lambda}$. (Jestliže skalární násobení „$*$“ je formálně definováno na kartézském součinu $F \times W$, potom $u_{\lambda\mu} = (\lambda \cdot \mu) * u$ a $u_{\mu\lambda} = (\mu \cdot \lambda) * u$. Jestliže skalární násobení „$*$“ je formálně definováno na kartézském součinu $W \times F$, potom $u_{\lambda\mu} = u*(\lambda\cdot\mu)$ a $u_{\mu\lambda} = u*(\mu\cdot\lambda)$.) Pak nastává právě jeden z následujících dvou případů: (1) Buď $w = u_{\lambda\mu}$. Potom W je levý vektorový prostor. (2) Anebo $w = u_{\mu\lambda}$. Potom W je pravý vektorový prostor. (Alespoň jeden z těchto dvou případů nastat musí, protože W je levý nebo pravý vektorový prostor. Oba případy současně nastat nemohou, protože $\lambda \cdot \mu \neq \mu \cdot \lambda$ a $u \neq 0$.) Tímto způsobem se nám podařilo jednoznačně určit, zda vektorový prostor W je levý anebo pravý.

Vidíme, že netriviální vektorové prostory nad nekomutativními tělesy vlastnost „být levý vektorový prostor“ anebo „být pravý vektorový prostor“ mají „uloženu“ přímo ve svojí struktuře. Abychom poznali, zda takovýto vektorový prostor je levý anebo pravý, není třeba znát, zda skalární násobení „$*$“ je (formálně) definováno jako levé nebo pravé. Nyní naopak ukážeme, že vektorové prostory nad komutativními tělesy a triviální vektorové prostory nad libovolnými tělesy uvedenou vlastnost ve svojí struktuře „uloženu“ nemají.

Předpokládejme tedy, že těleso F je komutativní nebo že vektorový prostor W je triviální (nebo že F je komutativní a W je triviální zároveň). Rozlišíme následující dva případy (přičemž oba mohou nastat i současně, k tomu viz příklad 1.11.b uvedený níže): (1) W je levý vektorový prostor nad tělesem F vzhledem k zobrazení „$*$“ a (2) W je pravý vektorový prostor nad tělesem F vzhledem k zobrazení „$*$“. Uvažujme nejprve případ (1). Zobrazení „$*$“ je tedy definováno na kartézském součinu $F \times W$. Na kartézském součinu $W \times F$ definujme zobrazení „$\circledast$“ jdoucí do W tím, že pro každé $u \in W$ a $\lambda \in F$ položíme $u \circledast \lambda = \lambda * u$. Potom W je pravý vektorový prostor nad tělesem F vzhledem k zobrazení „$\circledast$“. Nyní uvažujme případ (2). Pak zobrazení „$\circledast$“ na kartézském součinu $F \times W$ definujeme předpisem $\lambda \circledast u = u * \lambda$ pro $\lambda \in F$ a $u \in W$. Potom W je levý vektorový prostor nad tělesem F vzhledem k takto zavedenému zobrazení „$\circledast$“.

Vidíme, že u triviálních vektorových prostorů a vektorových prostorů nad komutativními tělesy se rozdíl mezi levými a pravými vektorovými prostory stírá. Ve smyslu konstrukce (zobrazení „$\circledast$“), kterou jsme právě provedli, můžeme říci, že triviální vektorové prostory a vektorové prostory nad komutativními tělesy jsou „levé i pravé zároveň“. Z toho plyne, že triviální vektorové prostory (nad libovolnými tělesy) a vektorové prostory nad komutativními tělesy – na rozdíl od netriviálních vektorových prostorů nad nekomutativními tělesy – vlastnost „být levý / pravý vektorový prostor“ ve svojí struktuře nemají „uloženu“.

1.10. Úvaha. Rozdíl mezi levými a pravými vektorovými prostory. Část II. Navažme na předcházející úvahu 1.9. Nechť $W(+,-,0)$ je (levý nebo pravý) vektorový prostor nad tělesem $F(+,-,\cdot,{}^{-1},0,1)$ a ať znak „$*$“ označuje (levé nebo pravé) skalární násobení. Předpokládejme, že vektorový prostor W je triviální (viz předcházející úvahu 1.9 nebo definici 1.33) nebo že těleso F je komutativní. Opět bychom (a to pokud možno jednoznačně) chtěli poznat, zda W je levý anebo pravý vektorový prostor. Postup uvedený v předcházející úvaze 1.9 ale použít nemůžeme. (Vyšlo by, že W je levý i pravý současně.) Předpokládejme proto – na rozdíl od předcházející úvahy 1.9 – že definiční obor zobrazení „$*$“ je nám znám. Jestliže $W \neq F$, potom takto skutečně můžeme jednoznačně rozlišit, zda předložený vektorový prostor W je levý anebo pravý. (V předcházející úvaze 1.9 jsme sledovali spíše to, zda vlastnost „být levý / pravý vektorový prostor“ bylo možné poznat přímo z vlastní struktury předloženého vektorového prostoru W. V této úvaze 1.10 nám jde o něco jiného. Nyní nás zajímá, zda předložený vektorový prostor W spolu s tělesem F a zobrazením „$*$“ splňuje ternární predikát „být levý vektorový prostor“ anebo „být pravý vektorový prostor“, viz poznámku 1.6 a definici 1.8, případně zda tyto predikáty splňuje oba současně.)

Předpokládejme tedy, že $W \neq F$. Potom nastává právě jeden z následujících dvou případů: (1) Zobrazení „$*$“ je definováno na kartézském součinu $F\times W$, máme $*\colon F\times W \to W$. Potom W je levý vektorový prostor nad tělesem F (vzhledem k zobrazení „$*$“). (2) Zobrazení „$*$“ je definováno na kartézském součinu $W \times F$, máme $*\colon W \times F \to W$. Potom W je pravý vektorový prostor nad tělesem F (vzhledem k zobrazení „$*$“). (Jeden z těchto dvou případů nastat musí, protože W je levý nebo pravý vektorový prostor, tedy je splněna definice 1.5 nebo definice 1.8. Zobrazení „$*$“ tudíž musí být definováno na kartézském součinu $F \times W$ nebo $W \times F$. Protože však $W \neq F$, oba případy současně nastat nemohou.)

Poznamenejme, že pokud by W byl netriviální vektorový prostor nad nekomutativním tělesem F a $W \neq F$, potom bychom mohli použít také metodu uvedenou v první polovině předcházející úvahy 1.9. Metodu právě popsanou v této úvaze 1.10 bychom pak použili pro kontrolu správnosti výsledku.

Zabývejme se nyní případem, kdy $W = F$. Aby nedošlo k nedorozumění, použijeme označení, které jednotlivé operace a konstanty od sebe navzájem odliší: obě operace a konstantu vztahující se ke grupě W označíme pruhem. Pracujeme tedy s (levým nebo pravým) vektorovým prostorem $W(\bar{+}, \bar{-}, \bar{0})$ nad tělesem $F(+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$, přičemž (levé nebo pravé) skalární násobení nadále označujeme znakem „$*$“. Poznamenejme, že z rovnosti $W = F$ plyne, že vektorový prostor W je netriviální. (Z definice 1.3 tělesa vyplývá, že $0 \neq 1$. Takže vektorový prostor W kromě nuly $\bar{0}$ musí obsahovat také alespoň jeden nenulový vektor.) Stále chceme rozpoznat, zda vektorový prostor W je levý anebo pravý. Jestliže těleso F není komutativní, potom můžeme použít metodu popsanou v první polovině předcházející úvahy 1.9. Zbývá tedy vyšetřovat případ, kdy těleso F je komutativní a platí $W = F$. Bylo by zajímavé zjistit, zda i v tomto případě je možné nalézt „jednoduché a efektivní“ metody (jako byly např. ty uvedené v předcházející úvaze 1.9 a této úvaze 1.10 výše), kterými by šlo rozlišit, zda předložený vektorový prostor je levý anebo pravý (nebo levý a pravý současně). To se již zdá být poměrně obtížné. Ukážeme proto jen dva příklady, které se k tomuto případu vztahují.

1.11. Příklady. Navažme na uvedenou úvahu 1.10: Podáme dva příklady vektorových prostorů nad (dokonce komutativním) tělesem takových, že nosné množiny daného prostoru i daného tělesa jsou shodné. V obou příkladech zkoumáme otázku, zda uvedený vektorový prostor je levý anebo pravý (nebo levý a pravý současně).

1.11.a. Nejprve podáme příklad vektorového prostoru W nad komutativním tělesem F (přičemž platí rovnost nosných množin, tedy $W = F$), který je levý a není pravý. To znamená, že tento vektorový prostor W splní podmínky definice 1.5, ale nesplní podmínky definice 1.8. Zkoumaná otázka, zda jde o levý anebo o pravý vektorový prostor, tak v tomto konkrétním případě bude zcela zodpovězena. Položme $W = F = \{0, 1\}$. Za těleso $F(+, -, \cdot, ^{-1}, 0_F, 1_F)$ dosaďme standardní těleso $\mathbb{Z}_2$. Za grupu $W(\bar{+}, \bar{-}, \bar{0})$ dosaďme aditivní grupu $\mathbb{Z}_2$, ale tak, že zaměníme význam „0“ a „1“. Zobrazení $*\colon F \times F \to F$ zavedeme tak, aby již určená grupa $W(\bar{+}, \bar{-}, \bar{0})$ byla levým vektorovým prostorem nad již určeným tělesem F. Máme tedy:

$$W = F = \{0, 1\}\,, \qquad 0_F = 0\,, \qquad 1_F = 1\,, \qquad 1^{-1} = 1\,, \qquad \bar{0} = 1\,,$$

$$-0 = 0\,, \qquad -1 = 1\,, \qquad \bar{-}0 = 0\,, \qquad \bar{-}1 = 1\,,$$

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \bar{+} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} * & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Vidíme, že roli nulového vektoru hraje prvek „1“. Z provedené konstrukce vyplývá, že grupa W je levý vektorový prostor nad tělesem F (vzhledem k zobrazení „$*$“). To můžeme ověřit také mechanickým výpočtem (ověřením všech podmínek definice 1.5). Sestrojený vektorový prostor ale není pravý vektorový prostor. (Zde platí $0 * 1 = 1$. Kdyby mělo jít o pravý vektorový prostor, muselo by pro každé $u \in W$ platit $u * 1 = u$.) Uvedený příklad demonstruje, že i tehdy, když těleso F je komutativní a platí $W = F$, se může stát, že vektorový prostor W je jednoznačně levý a není pravý.

1.11.b. Nyní mějme libovolné těleso $F(+, -, \cdot, ^{-1}, 0_F, 1_F)$. Za grupu $W(\bar{+}, \bar{-}, \bar{0})$ dosaďme aditivní grupu právě daného tělesa F. Potom – jak již víme, viz definice 1.5 a 1.8 – W je levý a současně pravý vektorový prostor nad tělesem F (v obou případech vzhledem k zobrazení-operaci „$\cdot$“). Tento příklad zase demonstruje, že v případě $W = F$ (přičemž nezáleží, zda těleso F je nebo není komutativní) může odpověď na zkoumanou otázku být i ta, že předložený vektorový prostor je levý i pravý současně.

Poznamenejme, že tento příklad je možné částečně obrátit: Jestliže W je levý i pravý vektorový prostor nad týmž tělesem F (a v obou případech vzhledem ke stejnému zobrazení „$*$“), potom nosné množiny grupy W a tělesa F jsou si rovny, tj. $W = F$ (protože zobrazení „$*$“ musí být definováno na kartézském součinu $F \times W$ i $W \times F$).

1.12. Poznámka. Rozdíl mezi levými a pravými vektorovými prostory. Dokončení. Na první pohled by se snad mohlo zdát, že poslední příklad 1.11.b ukazuje na jistý paradox: Na straně jedné jsme v úvaze 1.9 ukázali, že v případě netriviálního vektorového prostoru nad nekomutativním tělesem je možné jednoznačně poznat, zda tento prostor je levý anebo pravý. Na straně druhé jsme v příkladu 1.11.b právě podali příklad netriviálního vektorového prostoru nad nekomutativním tělesem, který je levý i pravý současně. Objasněme, v čem tento zdánlivý rozpor spočívá. Vlastně jde jen o dva různé pohledy na tutéž věc.

V úvaze 1.9 jsme postupovali z hlediska „praktického výpočtu“ respektive z hlediska „každodenní potřeby“. Též můžeme říci, že šlo o hledisko algoritmické. Mějme nějaký vektorový prostor W nad tělesem F, se kterým máme provádět nějaké praktické výpočty (jako například vektory z prostoru W násobit skaláry z tělesa F). Pak ovšem musí být předem jasné, jak (!) tyto operace máme provádět. Nyní již stačí použít postup uvedený v úvaze 1.9. Jestliže předložený vektorový prostor W je netriviální a těleso F je nekomutativní, potom jednoznačně určíme, zda W je levý anebo pravý vektorový prostor. (Toto určení se děje ve smyslu „vhlédnutí do vnitřního výpočetního postupu“, nikoliv ve smyslu formálním, který v této poznámce 1.12 diskutujeme níže.) Podívejme se, co to znamená, když za grupu W dosadíme aditivní grupu nekomutativního tělesa F. Platí tedy $W = F$. Zvolme vektor $u \in W = F$ a zvolme skalár $\lambda \in F = W$. Protože je znám výpočetní postup, víme, jak vektor u vynásobit skalárem λ. Výsledek označme $\tilde{w}$. Nyní uvažujme vektor $u' = \lambda \in W = F$ a skalár $\lambda' = u \in F = W$. Protože je znám výpočetní postup, víme, jak vektor u' a skalár λ' vzájemně vynásobit. (Shodou okolností, vlastně záměrně, zde platí $u = \lambda'$ a $\lambda = u'$.) Výsledek tohoto druhého násobení označme $\tilde{w}'$; rovnost $\tilde{w} = \tilde{w}'$ obecně neplatí. Vidíme, že zde dochází k jakémusi „přisuzování rolí“: jeden a ten samý prvek $u = \lambda'$ jednou považujeme za vektor (je mu přisouzena role vektoru, nikoliv skaláru) a podruhé za skalár (je mu přisouzena role skaláru, nikoliv vektoru). Obdobně v případě prvku $\lambda = u'$.

(Poznamenejme, že v prostředí výpočetní techniky je uvedené „přisuzování rolí“ více než běžné. To ukážeme na příkladu (8-bitového) čísla `$41` = 65 = `%0010 0001`. (Číslo je uvedeno nejprve v soustavě šestnáctkové, potom desítkové, nakonec dvojkové.) Uvedené číslo může mít řadu významů. Například může vyjadřovat velké písmeno „A“ – kupříkladu může jít o součást slova „AHOJ“. Anebo toto číslo může vyjadřovat nějaký počet (např. počet provedených cyklů, počet nějakých věcí apod.) – něčeho je šedesát pět. Případně může jít o číslo, které vyjadřuje nepravdivost / pravdivost nějakých osmi sledovaných veličin: první a šestá veličina má hodnotu „logická pravda“, ostatní veličiny mají hodnotu „logická nepravda“. Uvedené číslo také nemusí znamenat vůbec nic. Například proto, že je součástí 32-bitového čísla `$00 88 41 0C`, které vyjadřuje třeba adresu v paměti počítače, kde je uloženo něco důležitého. Těchto „rolí“ uvedeného čísla může být velmi mnoho.)

Dále poznamenejme, že v klasické predikátové logice popsané „přisuzování rolí“ není možné. Jestliže nějaký prvek u splňuje nějakou vlastnost (predikát), např. „býti vektorem“, a platí $u = \lambda'$, takže λ' i u je jeden a tentýž prvek, potom prvek λ' tuto vlastnost, zde např. „býti vektorem“, také splňuje. Nyní již zdánlivý rozpor, na nějž jsme v příkladu 1.11.b narazili, snadno vysvětlíme.

V úvaze 1.10 a navazujících příkladech 1.11 totiž šlo o hledisko čistě formální, formalistické. Tam jsme v Universu teorie množin „namátkou“ (jen v příkladu 1.11.a zcela konkrétně) volili jakákoliv tři individua (tj. množiny; připomeňme, že uspořádané čtveřice (např. grupy) a sedmice (např. tělesa) jakož i zobrazení jsou jen zvláštními druhy množin, srov. [2: definice I.2.13, I.2.15 a I.4.28]) – označili jsme je znaky W, F a „$*$“ – a ptali jsme se, zda jsou splněny ternární predikáty „být levý vektorový prostor“ a „být pravý vektorový prostor“ (viz poznámku 1.6 a definici 1.8). Na začátku úvahy 1.10 jsme to ostatně výslovně uvedli. Příklad 1.11.b pak ukázal pouze tolik, že vhodnou volbou W, F a „$*$“ (za W a „$*$“ jsme dosadili po řadě aditivní grupu a operaci násobení tělesa F) je možné splnit oba tyto ternární predikáty současně. (Z poznámky na konci příkladu 1.11.b víme, že jsou-li splněny oba tyto predikáty současně, potom nastává případ $W = F$.)

1.13. Po uvedeném zamyšlení nad rozdílem mezi levými a pravými vektorovými prostory se vraťme k zavádění dalších pojmů definicí.

1.14. Definice. Podprostor vektorového prostoru. Nechť $W(+,-,0)$ je (levý) vektorový prostor nad tělesem F vzhledem k zobrazení „$*$“. Podmnožina $W' \subseteq W$ vektorového prostoru W je jeho *(vektorovým) podprostorem* právě tehdy, když je uzavřená na operaci sčítání a na násobení skalárem. Pro každé $u, v \in W'$ a $\lambda \in F$ tedy platí $u + v \in W'$ a $\lambda * u \in W'$. Odtud již plyne, že pro každé $u \in W'$ je také $-u \in W'$ a že $0 \in W'$. Snadno vidíme, že každý vektorový prostor W má dva tzv. *triviální* vektorové podprostory, totiž $\{0\}$ a W. Ostatní jeho podprostory jsou *netriviální*. Podprostor $\{0\}$ je *nulový*, ostatní podprostory jsou *nenulové*, podprostor W je *nevlastní*, ostatní podprostory jsou *vlastní*.

Poznamenejme výslovně, že podprostor W' vektorového prostoru W je jen množina, tj., podprostor W' sám o sobě není vektorovým prostorem nad tělesem F. Vektorovým prostorem se množina W' stane až po zavedení struktury vektorového prostoru (k tomu podrobněji viz následující poznámku 1.15), přičemž tuto strukturu získáme (například resp. nejlépe) přirozeným zúžením struktury původního vektorového prostoru W (viz navazující poznámku 1.16).

Dále poznamenejme, že vektorovým podprostorům se říká také *lineární podprostory*. (Tak jako pro vektorové prostory se někdy používá ekvivalentní název *lineární prostory*).

Tuto definici 1.14 jsme vyslovili pro případ, že vektorový prostor W byl levý vektorový prostor. V případě pravého vektorového prostoru bychom postupovali obdobně.

1.15. Poznámka. Zavedení struktury komutativní grupy, vektorového prostoru. V právě uvedené definici 1.14 jsme uvedli, že podprostor W' se stane vektorovým prostorem až po zavedení struktury (levého) vektorového prostoru na této množině W'. V definici 1.24 na určité množině budeme zavádět strukturu (pravého) vektorového prostoru a v definici 1.38 na určité množině budeme zavádět strukturu komutativní grupy. Objasněme, v čem toto „zavádění struktury“ spočívá.

Nejprve objasníme pojem zavedení struktury komutativní grupy. Budiž dána nějaká množina G. Pak zavedení struktury komutativní grupy na množině G znamená, že na množině G zavedeme binární operaci „$+$“ (zvolíme zobrazení $+\colon G \times G \to G$), zavedeme unární operaci „$-$“ (zvolíme zobrazení $-\colon G \to G$) a zvolíme prvek-konstantu $0 \in G$ tak, že uspořádaná čtveřice $(G, +, -, 0)$ bude komutativní grupa, viz definici 1.2, splní unární predikát „být komutativní grupa“, viz poznámku 1.6. Jakmile je struktura komutativní grupy na množině G zavedena, hovoříme již o „komutativní grupě G“, srov. konvenci zavedenou na začátku definice 1.1.

Nyní objasněme, v čem spočívá zavedení struktury (levého nebo pravého) vektorového prostoru. Budiž dána nějaká množina W. Aby strukturu vektorového prostoru vůbec bylo možné zavést, musí být dáno také nějaké těleso F. Zavedení struktury (levého nebo pravého) vektorového prostoru (nad tělesem F) na množině W znamená, že na W zavedeme strukturu komutativní grupy, viz výše, a že dále zvolíme nějaké zobrazení $*\colon F \times W \to W$ nebo $*\colon W \times F \to W$ (podle toho, zda zavádíme po řadě strukturu levého nebo pravého vektorového prostoru) tak, že grupa W je (levý nebo pravý) vektorový prostor nad tělesem F vzhledem k zobrazení „$*$“. Je tedy splněn ternární predikát „W, F a ‚$*$‘ být levý / pravý vektorový prostor“. Viz definice 1.5 a 1.8. Po zavedení struktury vektorového prostoru již hovoříme stručně jen o „(levém nebo pravém) vektorovém prostoru W“, srov. konvence zavedené definicemi 1.5 a 1.8.

Poznamenejme, že namísto slovního obratu, že „na dané množině zavedeme strukturu. . . “, můžeme říkat, že „danou množinu vybavíme strukturou. . . “ apod.

1.16. Poznámka. Přirozené zúžení struktury vektorového prostoru. Nechť $W(+,-,0)$ je (levý) vektorový prostor nad tělesem $F(+,-,\cdot,^{-1},0,1)$ vzhledem k zobrazení „$*$". Ať množina W' je podprostorem vektorového prostoru W. Obecně lze strukturu (levého) vektorového prostoru nad tělesem F na množině W' zavést (ve smyslu předcházející poznámky 1.15) mnoha způsoby. To znamená, že obecně je mnoho způsobů, kterými lze na množině W' zavést strukturu komutativní grupy – zvolit binární operaci „$+'$", unární operaci „$-'$" a zvolit konstantu, nulový prvek –, a spolu s tím je i mnoho způsobů, jak zvolit (levé) skalární násobení – zobrazení „$*'$". Když strukturu vektorového prostoru na podprostoru W' zavádíme přirozeným zúžením struktury původního vektorového prostoru W, znamená to, že za operace „$+'$" a „$-'$" a za zobrazení „$*'$" volíme příslušné restrikce operací „$+$" a „$-$" a zobrazení „$*$"; za nulový prvek volíme počátek 0 celého vektorového prostoru W. Zobrazení „$+'$" tedy obdržíme ze zobrazení „$+$" zúžením jeho definičního oboru $W \times W$ na množinu $W' \times W'$. Zobrazení „$-'$" získáme ze zobrazení „$-$" zúžením jeho definičního oboru W na množinu W'. A zobrazení „$*'$" obdržíme z levého skalárního násobení „$*$" zúžením jeho definičního oboru $F \times W$ na množinu $F \times W'$. Závěrem vidíme, že popsaným přirozeným zúžením struktury vektorového prostoru W jsme na množině W' zavedli strukturu vektorového prostoru: grupa $W'(+',-',0)$ je levým vektorovým prostorem nad tělesem F vzhledem k zobrazení „$*'$".

V této poznámce 1.16 jsme uvažovali případ, že W byl levý vektorový prostor. Kdyby W byl pravý vektorový prostor, postupovali bychom obdobně.

1.17. Poznámka. Uveďme jednu poznámku k terminologii: nechť W je (levý nebo pravý) vektorový prostor nad tělesem F vzhledem k zobrazení „$*$". Dle definice 1.5 nebo 1.8 o uvedeném zobrazení „$*$" hovoříme jako o (levém nebo pravém) skalárním násobení. To znamená, že namísto slovního obratu „W je (levý / pravý) vektorový prostor nad tělesem F vzhledem k zobrazení ‚$*$'" smíme (ekvivalentně) použít také slovní obrat „W je (levý / pravý) vektorový prostor nad tělesem F vzhledem k (levému / pravému) skalárnímu násobení ‚$*$'".

1.18. Definice. Lineární zobrazení. Nechť $W(+,-,0)$ a $V(+,-,0)$ jsou (levé) vektorové prostory nad tělesem F vzhledem k (levým) skalárním násobením „$*$". (Poznámka: Obecně jde o dva různé vektorové prostory. Jednotlivé operace na nich jsou proto od sebe také navzájem různé, přestože je značíme stejně. Také zobrazení (resp. levá skalární násobení) „$*$", třebaže označená jedním společným znakem, zde máme dvě a obecně jsou od sebe navzájem různá. Srovnej obdobnou poznámku ze začátku definice 1.5.) Nechť $\gamma\colon W \to V$ je nějaké zobrazení. Zobrazení γ je *(levé) lineární zobrazení* (vzhledem ke grupám W a V – které jsou ovšem vektorovými prostory –, tělesu F a oběma zobrazením „$*$") právě tehdy, když pro každé $x, y \in W$ a pro každé (nenulové) $\lambda \in F$ platí, že

$$\gamma(x+y) = \big(\gamma(x)\big) + \big(\gamma(y)\big)\,,$$
$$\gamma(\lambda * x) = \lambda * \big(\gamma(x)\big)\,.$$

Jsou-li tyto podmínky splněny a je-li z kontextu zřejmé, které grupy W a V, které těleso F a která příslušná dvě zobrazení „$*$" máme na mysli, potom hovoříme stručně jen o „(levém) lineárním zobrazení γ".

Uvedené dvě podmínky vyjadřují po řadě *aditivitu* a *homogenitu* lineárního zobrazení γ. Povšimněme si, že z homogenity zobrazení γ vyplývá, že $\gamma(-x) = -\big(\gamma(x)\big)$ pro všechna $x \in W$ a že $\gamma(0) = 0$, tudíž $\gamma(\lambda * x) = \lambda * \big(\gamma(x)\big)$ pro všechna $\lambda \in F$ (i pro $\lambda = 0$) a pro všechna $x \in W$. (Pro důkaz rovnosti $\gamma(-x) = -\big(\gamma(x)\big)$ stačí uvážit $\lambda = -1$. Nyní zvolme $x = 0$ a $\lambda = 1 + 1$. Pak zřejmě $\lambda * x = 0$, tudíž $\gamma(0) = (1+1) * \big(\gamma(0)\big) = \big(1 * (\gamma(0))\big) + \big(1 * (\gamma(0))\big)$. Dostáváme $\gamma(0) = \gamma(0) + \gamma(0)$, odtud $0 = \gamma(0)$. Srov. [65: definice 6.2 (na str. 143)].)

Kdyby W a V byly pravé vektorové prostory, postupovali bychom obdobně a zavedli bychom pojem pravého lineárního zobrazení. (Nechť W a V jsou pravé vektorové prostory. Zobrazení $\gamma\colon W \to V$ je *pravé lineární zobrazení* (vzhledem ke grupám W a V, tělesu F a oběma příslušným zobrazením (pravým skalárním násobením) „$*$") právě tehdy, když pro každé $x, y \in W$ a pro každé $\lambda \in F$ platí $\gamma(x+y) = \big(\gamma(x)\big) + \big(\gamma(y)\big)$ a $\gamma(x * \lambda) = \big(\gamma(x)\big) * \lambda$. Při splnění uvedených podmínek ve stručnosti hovoříme jen o „pravém lineárním zobrazení γ".)

Není-li řečeno jinak, pak pojmem „lineární zobrazení" v této práci máme vždy na mysli levé lineární zobrazení.

Není nijak těžké ověřit, že když W, $\bar{V}$ a V jsou (levé nebo pravé) vektorové prostory a $\bar{\gamma}\colon W \to \bar{V}$ a $f\colon \bar{V} \to V$ jsou (po řadě levá nebo pravá) lineární zobrazení, potom složené zobrazení $\gamma = f \circ \bar{\gamma}$ je (po řadě levé nebo pravé) lineární zobrazení $\gamma\colon W \to V$.

1.19. Poznámka. Uvedenou definicí 1.18 jsme na Universu teorie množin zavedli sexternární predikát „nějaké γ (zobrazení $\gamma\colon W \to V$), nějaké W (grupa), nějaké V (grupa), nějaké F (těleso), nějaké ‚$*$' (zobrazení $*\colon F \times W \to W$) a nějaké další ‚$*$' (zobrazení $*\colon F \times V \to V$) být levé lineární zobrazení".

Aby byl uvedený predikát splněn, je (dle podané definice 1.18 mimo jiné) nutné, aby grupy W a V byly levé vektorové prostory nad tělesem F vzhledem k příslušným zobrazením „$*$" (viz definici 1.5).

Dále jsme v předcházející definici 1.18 obdobným způsobem zavedli také sexternární predikát „nějaké γ ... být pravé lineární zobrazení". Nakonec jsme zavedli sexternární predikát „... být lineární zobrazení", jenž je ovšem pouze zkratkou za již uvedený predikát „... být levé lineární zobrazení".

1.20. Příklady. Uveďme několik příkladů, které objasní, proč je nutné mezi levými a pravými lineárními zobrazeními rozlišovat.

1.20.a. Zvolme libovolné těleso F. Za vektorové prostory W a V dosaďme aditivní grupu tělesa F. Násobení vektoru skalárem je v obou případech dáno operací násobení tělesa F. Jako zobrazení $\gamma\colon W \to V$ (tedy $\gamma\colon F \to F$) zvolme identické zobrazení ($\gamma(x) = x$ pro každé $x \in W = F$). Je zřejmé, že γ je lineární zobrazení, a to současně levé i pravé.

1.20.b. Uvažujme vektorový prostor W nad tělesem F vzhledem k zobrazení „$*$", kde vše je určeno jako v příkladu 1.11.a. Připomeňme, že nosná množina prostoru W i tělesa F je dvouprvková množina $\{0,1\}$, že těleso F je standardní těleso $\mathbb{Z}_2$ a že grupa W je aditivní grupa $\mathbb{Z}_2$ s tím, že význam prvků „0" a „1" je v grupě W zaměněn. Zobrazení $*\colon \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ je pak zavedeno tak, že grupa W je levý vektorový prostor nad tělesem F vzhledem k zobrazení „$*$".

Nechť V je rovno grupě W, takže V je také levý vektorový prostor nad tělesem F. Opět uvažujme identické zobrazení $\gamma\colon W \to V$ (tedy $\gamma\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$, přičemž $\gamma(0) = 0$ a $\gamma(1) = 1$). Zřejmě jde o levé lineární zobrazení. Zobrazení γ nemůže být pravé lineární zobrazení, protože vektorové prostory W a V nejsou pravé.

Nyní za V dosaďme aditivní grupu tělesa F (tedy aditivní grupu $\mathbb{Z}_2$, přičemž prvky „0" a „1" mají svůj obvyklý význam) a znovu uvažujme identické zobrazení $\gamma\colon W \to V$ (tj. $\gamma\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$). Je zřejmé, že zobrazení γ – ačkoliv jde o stále jedno a totéž zobrazení γ – již není lineární zobrazení (a to ani levé ani pravé), protože kdyby γ mělo být (levé nebo pravé) lineární zobrazení, muselo by nulový vektor prostoru W (tedy prvek „1") zobrazit na nulový prvek aditivní grupy tělesa F (tedy prvek „0").

1.20.c. Nakonec uvažujme jakékoliv nekomutativní těleso F. Protože těleso F není komutativní, najdeme dva skaláry $\lambda, \mu \in F$ takové, že $\lambda\mu \neq \mu\lambda$. Za W i V dosaďme aditivní grupu tělesa F. Již víme, že W a V jsou levé i pravé vektorové prostory nad tělesem F (vzhledem k operaci násobení tělesa F). Zobrazení $\gamma\colon W \to V$ (tedy $\gamma\colon F \to F$)

definujme předpisem $\gamma(x) = x\lambda$ pro každé $x \in W = F$ (přičemž skalár λ má výše zavedený význam). Lehce ověříme, že takto zavedené zobrazení γ je levé lineární zobrazení. O pravé lineární zobrazení však nejde: Kdyby γ mělo být pravé lineární zobrazení, pro každé $x \in W = F$ by muselo platit $\gamma(x\mu) = \big(\gamma(x)\big)\mu$ (kde skalár μ má výše zavedený význam). Stačí však zvolit např. $x = 1$ (jednotka tělesa F), abychom viděli, že $\gamma(1\mu) = 1\mu\lambda = \mu\lambda \neq \lambda\mu = 1\lambda\mu = \big(\gamma(1)\big)\mu$.

1.21. Definice. Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení. Nechť W a V jsou (oba levé nebo oba pravé) vektorové prostory nad tělesem F a nechť $\gamma: W \to V$ je (po řadě levé nebo pravé) lineární zobrazení.

Jádro lineárního zobrazení γ označujeme $\operatorname{Ker}\gamma$ a rozumíme jím množinu všech bodů, které se zobrazují na nulový vektor. Platí tedy

$$\operatorname{Ker}\gamma = \big\{\, x \in W \,;\ \gamma(x) = 0 \,\big\}\,,$$

kde 0 je nulový vektor prostoru V. Je zřejmé, že $\operatorname{Ker}\gamma$ je podprostorem vektorového prostoru W. Jádru $\operatorname{Ker}\gamma$ se tak někdy říká *nulový prostor* lineárního zobrazení γ.

Obor hodnot lineárního zobrazení γ označíme $\operatorname{Rng}\gamma$ a klademe

$$\operatorname{Rng}\gamma = \big\{\, u \in V \,;\ \exists x \in W\colon\ \gamma(x) = u \,\big\}\,.$$

Vidíme, že $\operatorname{Rng}\gamma$ je podprostorem vektorového prostoru V. Obor hodnot $\operatorname{Rng}\gamma$ se někdy nazývá *obraz* zobrazení γ. Z tohoto důvodu se značí také $\operatorname{Im}\gamma$.

1.22. Definice. Lineární forma. Nechť W je (levý) vektorový prostor nad tělesem F vzhledem k (levému) skalárnímu násobení „$*$“. Již víme (z definice 1.5), že aditivní grupa tělesa F je také (levým) vektorovým prostorem nad tělesem F. Pak *(levou) lineární formou* na vektorovém prostoru W (přesněji: levou lineární formou vzhledem ke grupě W, tělesu F a zobrazení „$*$“) rozumíme zobrazení $\alpha: W \to F$, které je (levé) lineární zobrazení.

Pojem pravé lineární formy zavedeme obdobně: Nechť W je pravý vektorový prostor nad tělesem F vzhledem k pravému skalárnímu násobení „$*$“. Pak *pravou lineární formou* na (pravém) vektorovém prostoru W (resp. vzhledem ke grupě W, tělesu F a zobrazení „$*$“) rozumíme zobrazení $\alpha: W \to F$, které je pravé lineární zobrazení.

Není-li řečeno jinak, pak pojmem „lineární forma“ v této práci máme na mysli levou lineární formu.

1.23. Poznámka. Právě uvedenou definicí 1.22 jsme na Universu teorie množin zavedli kvaternární predikát „nějaké α (zobrazení $\alpha: W \to F$), nějaké W (grupa), nějaké F (těleso) a nějaké ‚$*$‘ (zobrazení $*: F \times W \to W$) být levá lineární forma“. Dále jsme obdobným způsobem zavedli kvaternární predikát „nějaké α, nějaké W, nějaké F a nějaké ‚$*$‘ být pravá lineární forma“. Nakonec jsme zavedli i kvaternární predikát „... být lineární forma“, který je zkratkou za predikát „... být levá lineární forma“.

Příklad 1.20.c slouží jako příklad levého lineárního zobrazení, které není pravé lineární zobrazení. Zároveň slouží i jako příklad levé lineární formy, která není pravou lineární formou.

1.24. Definice. Algebraický duál. Nechť $W(+,-,0)$ je (levý) vektorový prostor nad tělesem $F(+,-,\cdot,^{-1},0,1)$. *Algebraický duál* vektorového prostoru W označujeme $W^{\#}$ a rozumíme jím množinu všech (levých) lineárních forem na prostoru W. Na množině $W^{\#}$ zavádíme strukturu pravého (!) vektorového prostoru nad tělesem F (viz poznámku 1.15). Nechť $\alpha, \beta \in W^{\#}$ jsou dvě (levé) lineární formy a nechť $\lambda \in F$ je skalár. Formulemi, které budou následovat, zavedeme pojem součtu dvou lineárních forem $\alpha+\beta$, pojem opačné lineární formy $-\alpha$ a pojem nulové lineární formy $o \in W^{\#}$, která hraje roli nulového vektoru prostoru $W^{\#}$. Zavedeme také zobrazení „$*$“ definované na kartézském součinu $W^{\#} \times F$, což bude násobení lineární formy skalárem zprava. Pro každé $\alpha, \beta \in W^{\#}$, pro každé $\lambda \in F$ a pro každé $x \in W$ klademe:

$$(\alpha + \beta)(x) = \big(\alpha(x)\big) + \big(\beta(x)\big)\,,$$
$$(-\alpha)(x) = -\big(\alpha(x)\big)\,,$$
$$o(x) = 0\,,$$
$$(\alpha * \lambda)(x) = \big(\alpha(x)\big) \cdot \lambda\,.$$

Je zřejmé, že zobrazení $\alpha + \beta$, $-\alpha$, o a $\alpha * \lambda$ zavedená výše uvedenými vztahy jsou (levými) lineárními formami na vektorovém prostoru W, jde tedy o prvky množiny $W^{\#}$. Konečně se snadno nahlédne, že množina $W^{\#}$ vybavená binární operací „$+$“, unární operací „$-$“ a konstantou o, tj. grupa $(W^{\#}, +, , -, o)$, je pravý vektorový prostor nad tělesem F vzhledem k zobrazení „$*$“, přičemž „$+$“, „$-$“, o i „$*$“ je určeno výše uvedenými formulemi. Z tohoto důvodu algebraický duál nazýváme také *duálním vektorovým prostorem* vektorového prostoru W.

Ačkoliv algebraický duál $W^{\#}$ je vektorovým prostorem a definice 1.5 nám umožňuje o jeho prvcích hovořit jako o vektorech nebo bodech, nečiníme tak. Bylo by to nepraktické. O prvcích duálu $W^{\#}$ hovoříme (jen) jako o lineárních formách (definovaných na vektorovém prostoru W). K následujícím pojmům pak dospějeme obdobně jako v definici 1.5: sčítání nebo součet lineárních forem, opačná lineární forma, operace opačné lineární formy, nulová lineární forma, nenulová lineární forma.

Kdyby W byl pravý vektorový prostor, postupovali bychom obdobně a na jeho algebraickém duálu $W^{\#}$ bychom zavedli strukturu levého vektorového prostoru nad tělesem F.

Je-li W (levý nebo pravý) vektorový prostor, pak jeho duál $W^{\#}$ je (po řadě pravý nebo levý) vektorový prostor, jehož algebraický duál nazýváme *druhým algebraickým duálem* vektorového prostoru W a značíme jej $W^{\#\#}$. (Druhý algebraický duál $W^{\#\#}$ je opět po řadě levý nebo pravý vektorový prostor nad tělesem F.)

1.25. Definice. Lineární kombinace, lineární obal, lineární nezávislost. Báze. Nechť $W(+, -, 0)$ je (levý) vektorový prostor nad tělesem $F(+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$ vzhledem k (levému) skalárnímu násobení „$*$“.

Nechť m je přirozené číslo (lze zvolit i $m = 0$) a nechť $u_1, \ldots, u_m, u \in W$ jsou (ne nutně navzájem různé) vektory. Vektor u je *lineární kombinací* vektorů $u_1, \ldots, u_m$ právě tehdy, když existují skaláry $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$ takové, že $u = (\lambda_1 * u_1) + \cdots + (\lambda_m * u_m)$. (Jestliže $m = 0$, potom klademe $(\lambda_1 * u_1) + \cdots + (\lambda_m * u_m) = 0$.)

Ať $M \subseteq W$ je nějaká podmnožina vektorového prostoru W. *Lineární obal* množiny M označíme $\operatorname{Lin} M$ a rozumíme jím množinu všech lineárních kombinací prvků množiny M. Platí tedy, že $u \in \operatorname{Lin} M$ právě tehdy, když existuje přirozené číslo m (může být i $m = 0$) a existují vektory $u_1, \ldots, u_m \in M$ tak, že vektor u je lineární kombinací zvolených vektorů $u_1, \ldots, u_m$.

Ihned vidíme, že lineární obal prázdné množiny obsahuje právě nulový vektor. Dále je všeobecně známo, že lineární obal $\operatorname{Lin} M$ kterékoliv množiny $M \subseteq W$ je lineárním podprostorem vektorového prostoru W. Poznamenejme, že lineární obal množiny M se někdy značí $\langle M \rangle$.

Nechť $B \subseteq W$ je libovolná podmnožina vektorového prostoru W. Množina B je *lineárně závislá* právě tehdy, když existuje nenulové přirozené číslo m, existují navzájem různé vektory $u_1, \ldots, u_m \in B$ a existují nenulové skaláry $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$ (pro $i = 1, \ldots$ $\ldots, m$ platí $\lambda_i \neq 0$) takové, že $(\lambda_1 * u_1) + \cdots + (\lambda_m * u_m) = 0$. Množina B je *lineárně nezávislá* právě tehdy, když není lineárně závislá.

Vidíme, že prázdná množina je vždy lineárně nezávislá. Dále vidíme, že když $0 \in B$, potom množina B je lineárně závislá. Konečně snadno nahlédneme, že množina B je lineárně závislá právě tehdy, když existuje přirozené číslo m (lze vzít i $m = 0$), existují vektory $u_1, \dots, u_m \in B$ a existuje vektor $u \in B$ různý od vektorů $u_1, \dots, u_m$ tak, že vektor u je lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_m$ – což znamená, že množina $\{u, u_1, \dots$ $\dots, u_m\}$ je lineárně závislá.

Nechť m je přirozené číslo a nechť $u_1, \dots, u_m \in W$ jsou vektory. Vektory $u_1, \dots, u_m$ jsou *lineárně nezávislé* právě tehdy, když jsou navzájem různé a množina $\{u_1, \dots, u_m\}$ je lineárně nezávislá. (Jestliže je $m = 0$, potom tuto podmínku považujeme za splněnou: je-li $m = 0$, pak vektory $u_1, \dots, u_m$ jsou lineárně nezávislé.) Vektory $u_1, \dots, u_m$ jsou *lineárně závislé* právě tehdy, když nejsou lineárně nezávislé.

Lehce ověříme, že vektory $u_1, \dots, u_m$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existují skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$, které nejsou všechny rovny nule ($\lambda_i \neq 0$ pro alespoň jedno $i = 1, \dots, m$), takové, že $(\lambda_1 * u_1) + \dots + (\lambda_m * u_m) = 0$. (Je-li tato podmínka splněna, potom platí, že přirozené číslo m je nenulové.)

Podmnožina $B \subseteq W$ je *báze* vektorového prostoru W právě tehdy, když je lineárně nezávislá a platí $\operatorname{Lin} B = W$. Ekvivalentně lze říci, že množina B je báze právě tehdy, když je to maximální lineárně nezávislá množina. Dále je lehké nahlédnout, že B je báze právě tehdy, když je to minimální množina taková, že $\operatorname{Lin} B = W$. Pojmy maximality a minimality se vztahují k uspořádání systému všech podmnožin vektorového prostoru W inkluzí (viz též definici 1.27 a příklad 1.29 níže).

Namísto slovního obratu, že množina „B je báze“, můžeme také říci, že množina „B tvoří bázi“ vektorového prostoru W. Poznamenejme, že báze vektorového prostoru se nazývá také jeho *algebraická báze* nebo někdy též jeho *Hamelova báze*.

V případě pravého vektorového prostoru se uvedené pojmy zavedou obdobně.

1.26. Abychom dokázali, že v každém vektorovém prostoru existuje alespoň jedna algebraická báze, musíme předpokládat platnost Hausdorffova-Kuratowského-Zornova principu maximality, který je znám také jako Zornovo lemma [2: odstavec I.7.10]. Je všeobecně známo [2: věta I.7.23], že Zornovo lemma je ekvivalentní s axiomem výběru [2: odstavec I.7.4]. Zornovo lemma 1.31 proto uvedeme bez důkazu. Dříve však připomeňme pojem částečného uspořádání.

1.27. Definice. Relace reflexivní, tranzitivní, antisymetrická. Částečné a lineární uspořádání. Maximální a minimální prvek. Řetězec (shora omezený). Nechť M je nějaká množina a nechť „$\leq$“ je nějaká binární relace. Relace „$\leq$“ je *reflexivní* na M právě tehdy, když pro každé $x \in M$ platí $x \leq x$. Relace „$\leq$“ je *tranzitivní* na M právě tehdy, když pro každé $x, y, z \in M$ splňující $x \leq y$ a $y \leq z$ platí také $x \leq z$. Relace „$\leq$“ je *antisymetrická* na M právě tehdy, když pro každé $x, y \in M$ splňující $x \leq y$ a $y \leq x$ platí $x = y$. Dva prvky x a y jsou relací „$\leq$“ *porovnatelné* (*srovnatelné*) právě tehdy, když $x \leq y$ nebo $y \leq x$. Relace „$\leq$“ je *úplná* (*totální*) na M právě tehdy, když každé dva prvky $x, y \in M$ jsou relací „$\leq$“ porovnatelné. (Jestliže relace „$\leq$“ je na množině M úplná, potom je na M reflexivní.) Relace „$\leq$“ je relací *částečného uspořádání* na M právě tehdy, když relace „$\leq$“ je současně reflexivní, tranzitivní i antisymetrická na M. Relace „$\leq$“ je relací *lineárního uspořádání* (někdy se říká, že „$\leq$“ je relací *úplného* nebo *totálního uspořádání*) na M právě tehdy, když je relací částečného uspořádání na M a každé dva prvky množiny M jsou touto relací porovnatelné.

Když „$\leq$“ je relací částečného uspořádání na množině M, říkáme rovněž, že „množina M je relací ‚$\leq$‘ částečně uspořádána“ nebo že „relace ‚$\leq$‘ částečně uspořádává množinu M“. Jestliže je zřejmé, jakou relaci „$\leq$“ máme na mysli, lze také stručně říkat, že „M je částečně uspořádaná množina“. Obdobné slovní obraty používáme i v případě lineárního (úplného, totálního) uspořádání.

Nechť množina M je částečně uspořádaná relací „$\leq$“. Prvek $a \in M$ je *maximálním prvkem* množiny M právě tehdy, když pro každé $x \in M$ splňující $a \leq x$ platí $a = x$. Prvek $a \in M$ je *minimálním prvkem* množiny M právě tehdy, když pro každé $x \in M$ splňující $x \leq a$ platí $x = a$. Podmnožina $R \subseteq M$ je *řetězec* (vzhlede k relaci „$\leq$“) právě tehdy, když pro libovolné dva prvky $x, y \in R$ platí $x \leq y$ nebo $y \leq x$. Ekvivalentně lze říci, že $R \subseteq M$ je řetězec právě tehdy, když množina R je relací „$\leq$“ uspořádána lineárně. Řetězec R je *shora omezený* (říkáme též, že *má horní mez* nebo *horní závoru*) právě tehdy, když existuje prvek $x \in M$ takový, že pro každé $r \in R$ platí $r \leq x$. Takovýto prvek x pak nazýváme *horní závorou* (*horní mezí*) řetězce R. (Viz též následnou definici 3.69.)

Poznamenejme, že pojmy maximality a minimality prvku a pojem omezenosti řetězce shora se zde uvažovaly vzhledem k množině M a relaci „$\leq$“.

1.28. Důležitým příkladem částečně uspořádané množiny je množina (resp. systém množin neboli kolekce množin neboli „množina množin“) uspořádaná inkluzí.

1.29. Příklad. Množina částečně uspořádaná inkluzí. Nechť $\mathfrak{M}$ je kolekce množin, neboli „množina množin“, tj. množina, jejíž prvky jsou množiny. Na množině $\mathfrak{M}$ zavedeme relaci „$\leq$“ (tzn., že „$\leq$“ bude podmnožinou kartézského součinu $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$), která množinu $\mathfrak{M}$ částečně uspořádá. Pro $A, B \in \mathfrak{M}$ položíme $A \leq B$ právě tehdy, když $A \subseteq B$. Je zřejmé, že takto zavedená relace „$\leq$“ je na množině $\mathfrak{M}$ reflexivní, tranzitivní a antisymetrická, jde tedy o relaci částečného uspořádání na $\mathfrak{M}$.

1.30. Poznámka. Mějme množinu M, která je částečně uspořádaná relací „$\leq$“. Povšimněme si, že prázdná množina je řetězcem. Je-li i tento řetězec shora omezený (v množině M a vzhledem k relaci „$\leq$“), znamená to, že množina M je neprázdná.

1.31. Zornovo lemma. *Ať M je libovolná množina, která je částečně uspořádána relací „$\leq$“. Nechť je splněna tzv. Zornova vlastnost: každý řetězec $R \subseteq M$ je shora omezený. Potom v množině M existuje alespoň jeden maximální prvek.*

1.31.a. *Poznámka.* Omezenost řetězce i maximalita prvku se uvažují vzhledem k množině M a relaci „$\leq$“.

1.32. Tvrzení. *Nechť W je (levý nebo pravý) vektorový prostor nad tělesem F. Potom W má alespoň jednu bázi. Jestliže B_1 a B_2 jsou dvě báze vektorového prostoru W, potom obě množiny B_1 a B_2 mají stejnou mohutnost.*

1.32.a. *Náznak důkazu.* Tvrzení, že W má alespoň jednu bázi [78: věta VI.5.3], je snadným důsledkem Zornova lemmatu 1.31. (Pro $A, B \in \mathfrak{M} = \{\, B \subseteq W\,;$ množina B je ve W lineárně nezávislá$\,\}$ položíme „$A \leq B$“ právě tehdy, když $A \subseteq B$. Využijeme faktu, že množina $B \subseteq W$ je báze vektorového prostoru W právě tehdy, když je to maximální lineárně nezávislá množina.)

Jestliže množina B_1 je konečná, pak druhé tvrzení odvodíme velice snadno pomocí známé Steinitzovy věty o výměně [78: věta VI.5.7]. (Je-li $B_1 = \{x_1, \dots, x_m\}$, pak najdeme $y_1 \in B_2$ takové, že $\big(B_2 \setminus \{y_1\}\big) \cup \{x_1\}$ je báze. Atd. Najdeme $y_m \in B_2$ takové, že $\big(B_2 \setminus \{y_1, \dots, y_m\}\big) \cup \{x_1, \dots, x_m\}$ je také báze. Nyní je zřejmé, že $B_2 \setminus \{y_1, \dots, y_m\} = \emptyset$.)

Předpokládejme nyní, že množina B_1 je nekonečná. Každý prvek $x \in B_1$ vyjádříme jako lineární kombinaci konečně mnoha prvků báze B_2; z těchto prvků báze B_2, které jsme při tom právě použili, vytvořme (konečnou) množinu B_x. Nechť $B = \bigcup_{x \in B_1} B_x$ je množina všech použitých prvků množiny B_2. Je zřejmé, že mohutnost množiny B nepřevyšuje mohutnost množiny B_1. (I kdyby pro každé $x \in B_1$ byla mohutnost množiny B_x stejná jako mohutnost množiny B_1 a i kdyby všechny množiny B_x pro $x \in B_1$ byly navzájem disjunktní, pak mohutnost množiny B je rovna mohutnosti B_1. Mohutnost kartézského součinu $B_1 \times B_1$ je totiž stejná jako mohutnost množiny B_1 – viz [2: příklad I.7.15(c)].) Nyní není možné, aby mohutnost množiny B_2 byla větší než mohutnost množiny B_1 (protože množina $B_2 \setminus B$ by byla neprázdná a každý její prvek by bylo možné vyjádřit jako lineární kombinaci prvků množiny B, což by byl spor). $\square$

1.33. Definice. Dimenze. Nechť W je (levý nebo pravý) vektorový prostor nad tělesem F. *Dimenzí* prostoru W rozumíme mohutnost (kterékoliv) jeho algebraické báze. Vektorový prostor, jehož dimenze je rovna nule, je *nulový* nebo též *triviální* (v takovém případě vektorový prostor obsahuje pouze nulový vektor). Vektorový prostor, jehož dimenze je nejvýše jedna, je *cyklický*. (Cyklický vektorový prostor, který je nenulový (není nulový), si můžeme představit jako přímku.)

Vektorový prostor, jehož dimenze je jedna, dvě atd. nebo konečná, je po řadě *jednorozměrný*, *dvojrozměrný* atd. nebo *konečněrozměrný*. Vektorový prostor, jehož dimenze není konečná, je *nekonečněrozměrný*.

Ať $W' \subseteq W$ je podprostor vektorového prostoru W. Chceme-li určit dimenzi tohoto podprostoru W', stačí jej považovat za vektorový prostor nad tělesem F (to lze, viz definici 1.14). Podprostor W' je *nulový* právě tehdy, když jeho dimenze je nulová (v takovém případě je $W' = \{0\}$ a jde o jeden z triviálních podprostorů prostoru W, viz definici 1.14). Podprostor W' je *cyklický* právě tehdy, když dimenze W' je nejvýše jedna. (Cyklický podprostor, který je nenulový, si lze velice názorně představit jako přímku procházející počátkem.)

Podprostor vektorového prostoru, jehož dimenze je jedna, dvě atd. nebo konečná, je po řadě *jednorozměrný*, *dvojrozměrný* atd. nebo *konečněrozměrný*. Podprostor vektorového prostoru, jehož dimenze není konečná, je *nekonečněrozměrný*.

Vektorový prostor je *nenulový* nebo *netriviální* právě tehdy, když není triviální. Podprostor vektorového prostoru je *nenulový* právě tehdy, když není nulový.

Poznamenejme, že pojem triviálního a netriviálního vektorového prostoru jsme (jiným ale ekvivalentním způsobem) zavedli již v úvaze 1.9 výše.

1.34. Dodatkem k pojmům lineárního podprostoru, lineární kombinace a lineárního obalu jsou pojmy afinního podprostoru, afinní kombinace a afinního obalu.

1.35. Definice. Afinní podprostor, afinní kombinace, afinní obal. Nechť $W(+, -, 0)$ je (levý) vektorový prostor nad tělesem $F(+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$ vzhledem k (levému) skalárnímu násobení „$*$“.

Množina $A \subseteq W$ je *afinním podprostorem* vektorového prostoru W právě tehdy, když je neprázdná, $A \neq \emptyset$, a pro každé dva body $x, y \in A$ a každý skalár $\lambda \in F$ platí $(\lambda * x) + \big((1-\lambda) * y\big) \in A$. Povšimněme si, že každá jednobodová množina a také celý prostor W jsou afinními podprostory prostoru W.

Pro libovolný bod $x_0 \in W$ a pro libovolnou množinu $L \subseteq W$ položme $x_0 + L = \{\, x_0 + l \,;\ l \in L \,\}$, takže množina $x_0 + L$ je výsledkem *posunutí* (*translace*) *množiny L o vektor* x_0. Je všeobecně známo, že množina A je afinním podprostorem prostoru W právě tehdy, když existuje bod $x_0 \in W$ a existuje vektorový podprostor L prostoru W tak, že $A = x_0 + L$. Je-li A afinním podprostorem, pak podprostor L určený popsaným způsobem nazýváme *zaměřením* afinního podprostoru A. [65: věta 1.3 a text před větou 1.3 (na str. 11)]. Nyní už je snadné nahlédnout, že když A je afinní podprostor prostoru W, potom A je lineárním podprostorem prostoru W tehdy a jen tehdy, když $0 \in A$.

(Naznačme, proč množina A je afinním podprostorem právě tehdy, když je tvaru $A = x_0 + L$ pro vhodný lineární podprostor L (zaměření afinního podprostoru A) a bod $x_0 \in W$. Body $x, y \in A$ a $a, b \in L$ budiž zvoleny tak, aby $x = x_0 + a$ a $y = x_0 + b$. Pak pro každý skalár $\lambda \in F$ máme

$$(\lambda * x) + \big((1-\lambda) * y\big) = x_0 + (\lambda * a) + \big((1-\lambda) * b\big)\,.$$

Implikace „$\Leftarrow$“ je nyní snadná. Protože L je podprostor, je $(\lambda * a) + \big((1-\lambda) * b\big) \in L$, načež $(\lambda * x) + \big((1-\lambda) * y\big) \in A$. Implikace „$\Rightarrow$“ je také snadná. Máme dokázat, že L je podprostor. Když ve výše uvedeném vztahu položíme $y = x_0$, tedy $b = 0$, vidíme, že

$\lambda * a \in L$ pro každé $\lambda \in F$. Abychom nahlédli, že $a + b \in L$ pro libovolné $a, b \in L$, stačí volit $\lambda = \frac{1}{2}$, tedy $\lambda = (1+1)^{-1}$.)

Nechť m je přirozené číslo a nechť $u_1, \ldots, u_m, u \in W$ jsou (ne nutně navzájem různé) vektory. Vektor u je *afinní kombinací* vektorů $u_1, \ldots, u_m$ právě tehdy, když existují skaláry $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$ takové, že $u = (\lambda_1 * u_1) + \cdots + (\lambda_m * u_m)$ a současně $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$. (Kdyby bylo $m = 0$, položili bychom $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 0$, tudíž $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m \neq 1$.)

Ať $M \subseteq W$ je libovolná podmnožina vektorového prostoru W. *Afinní obal* množiny M označíme $\operatorname{Aff} M$ a rozumíme jím množinu všech afinních kombinací prvků množiny M. Platí tedy, že $u \in \operatorname{Aff} M$ právě tehdy, když existuje přirozené číslo m a existují vektory $u_1, \ldots, u_m \in M$ tak, že vektor u je afinní kombinací zvolených vektorů $u_1, \ldots$ $\ldots, u_m$.

Afinní obal prázdné množiny je zřejmě prázdný, $\operatorname{Aff} \emptyset = \emptyset$. Afinní obal jednoprvkové množiny je roven téže jednoprvkové množině, $\operatorname{Aff}\{x\} = \{x\}$ pro všechna $x \in W$. Když množina $M \subseteq W$ je neprázdná, $M \neq \emptyset$, potom její afinní obal $\operatorname{Aff} M$ je afinním podprostorem prostoru W (tudíž $\operatorname{Aff} M \neq \emptyset$). Nadto pro každou podmnožinu $M \subseteq W$ platí vztah $\operatorname{Lin} M = \operatorname{Aff}\bigl(M \cup \{0\}\bigr)$, kde $\operatorname{Lin} M$ označuje lineární obal množiny M (viz definici 1.25). Jestliže množina $M \subseteq W$ je neprázdná, máme libovolný její prvek $x_0 \in M$, potom platí rovněž vztah $\operatorname{Aff} M = x_0 + \operatorname{Lin}\bigl((-x_0) + M\bigr)$.

Kdyby W byl pravý vektorový prostor, postupovali bychom v této definici 1.35 obdobně.

1.36. Poznámka. Afinní nezávislost a afinní báze. Kromě pojmů afinního podprostoru, afinní kombinace a afinního obalu, které jsme právě uvedenou definicí 1.35 zavedli, je možné zavést také pojem afinní nezávislosti (a závislosti) a pojem afinní báze. Pojem afinní nezávislosti lze nalézt v [65: definice 1.3 (na str. 13)], načež – po jeho zavedení – bychom postupovali zcela obdobně jako v příslušné části definice 1.25. Kromě toho bychom o afinní (ne)závislosti dokázali tvrzení obdobná těm, jež jsme dokazovali o lineární (ne)závislosti v definici 1.25. Uvedené zjištění vlastně není příliš překvapivé, protože pojmy afinní nezávislosti a lineární nezávislosti spolu souvisejí, viz [65: věta 1.6 (na str. 15)]. Z [65: poznámka za větou 1.5 (na str. 15)] vyplývá, že afinní bází se rozumí libovolná (neprázdná) afinně nezávislá množina: když (neprázdná) množina A je afinně nezávislá, potom A je afinní bází afinního podprostoru $\operatorname{Aff} A$. Odtud plyne, že afinní bází celého vektorového prostoru W je množina $A \subseteq W$, která je afinně nezávislá a splňuje vztah $\operatorname{Aff} A = W$.

1.37. Nyní svou pozornost zaměříme na prostor všech lineárních zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory. V několika následujících odstavcích budeme zavádět poněkud méně obvyklé pojmy, které nám umožní na zmíněný prostor lineárních zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory nahlížet jako zobecnění algebraického duálu prvního z nich.

1.38. Definice. Prostor $W_V^{\#}$. Nechť $W(+,-,0)$ a $V(+,-,0)$ jsou (levé) vektorové prostory nad tělesem $F(+,-,\cdot,{}^{-1},0,1)$. Pak symbolem $W_V^{\#}$ označíme množinu všech (levých) lineárních zobrazení $\gamma\colon W \to V$ prostoru W do prostoru V. Formulemi, které budou následovat, na množině $W_V^{\#}$ zavedeme strukturu komutativní grupy (viz poznámku 1.15). Pro libovolná dvě lineární zobrazení $\gamma, \gamma'\colon W \to V$ (je tedy $\gamma, \gamma' \in W_V^{\#}$) zavedeme pojem jejich součtu $\gamma + \gamma'$, pojem opačného zobrazení $-\gamma$ a pojem nulového zobrazení $o\colon W \to V$, které bude prvkem množiny $W_V^{\#}$ a bude hrát roli nulového (neutrálního) prvku komutativní grupy $W_V^{\#}$.

Poznamenejme, že stejného znaku „o“ používáme také k označení nulové lineární formy $o \in W^{\#}$, $o\colon W \to F$. Proto, nevyplývá-li to z kontextu, musíme vždy objasnit, v jakém významu znak „o“ používáme: zda ve významu nulové lineární formy $o \in W^{\#}$, $o\colon W \to F$, anebo ve významu nulového lineárního zobrazení $o \in W_V^{\#}$, $o\colon W \to V$. V této definici 1.38 máme na mysli nulové lineární zobrazení $o \in W_V^{\#}$, $o\colon W \to V$.

Pro každá dvě lineární zobrazení $\gamma, \gamma' \in W_V^{\#}$ a pro každé $x \in W$ klademe:

$$\begin{aligned}(\gamma + \gamma')(x) &= \big(\gamma(x)\big) + \big(\gamma'(x)\big)\,,\\ (-\gamma)(x) &= -\big(\gamma(x)\big)\,,\\ o(x) &= 0\,.\end{aligned}$$

Bez obtíží nahlédneme, že zavedená zobrazení $\gamma + \gamma'$, $-\gamma$ a o jsou levá lineární zobrazení definovaná na vektorovém prostoru W a jdoucí do vektorového prostoru V. Jsou to tedy prvky množiny $W_V^{\#}$. Rovněž je snadné ověřit, že množina $W_V^{\#}$ opatřená binární operací „+“, unární operací „−“ a konstantou o – vše je zavedeno výše uvedenými formulemi – je komutativní grupa. Prvky této komutativní grupy jsou ovšem lineární zobrazení; k následujícím pojmům dospějeme obdobně jako v definici 1.2: sčítání nebo součet lineárních zobrazení, opačné lineární zobrazení, operace opačného lineárního zobrazení, nulové lineární zobrazení, nenulové lineární zobrazení.

Množinu $W_V^{\#}$ vybavenou strukturou komutativní grupy pak v souladu s konvencí uvedenou v definici 1.1 označujeme $W_V^{\#}$ a můžeme hovořit o komutativní grupě $W_V^{\#}$. Raději ale budeme říkat, že $W_V^{\#}$ je *prostor všech lineárních zobrazení mezi vektorovými prostory W a V.* Pro pohodlí často budeme hovořit jen o „prostoru $W_V^{\#}$“. Poznamenejme však rovnou, že prostor $W_V^{\#}$ v obecnosti není (!) vektorovým prostorem nad tělesem F. (Otázkou možnosti zavedení struktury (levého nebo pravého) vektorového prostoru na prostoru $W_V^{\#}$ se budeme zabývat v poznámkách 1.74 a v úvaze 1.75 níže.)

Za vektorový prostor V nyní dosaďme aditivní grupu tělesa F. Vidíme, že prostor $W_F^{\#}$ splývá s algebraickým duálem $W^{\#}$. (Prostor $W_F^{\#}$ je v tomto konkrétním případě (pravým) vektorovým prostorem nad tělesem F, jak z definice 1.24 víme. Pro bližší vysvětlení viz úvahu 1.75.)

Později uvidíme, že prostor $W_V^{\#}$ „přejímá“ některé vlastnosti algebraického duálu $W^{\#}$ v tom smyslu, že mnohá známá tvrzení, v jejichž formulaci vystupuje (jen) algebraický duál $W^{\#}$, zůstanou v platnosti i tehdy, když (některé) výskyty algebraického duálu $W^{\#}$ v jejich formulaci nahradíme prostorem $W_V^{\#}$, přičemž v těchto tvrzeních je nutné provést i některé další formální úpravy jejich znění. (Takovýmito tvrzeními jsou například základní lemma 2.3 nebo Farkasovo lemma 4.15. Viz též poznámku 4.22.a.) Díky tomu lze prostor $W_V^{\#}$ chápat jako zobecnění pojmu algebraického duálu $W^{\#}$. Proto jsme pro něj zvolili označení $W_V^{\#}$, které je blízké označení algebraického duálu $W^{\#}$ prostoru W.

1.39. Definice. Symbol „ι“. Nechť $V(+,-,0)$ je (levý) vektorový prostor nad tělesem $F(+,-,\cdot,^{-1},0,1)$ vzhledem k (levému) skalárnímu násobení „$*$“. Zvolme libovolný vektor $u \in V$ pevně. Povšimněme si, že s každým vektorem $u \in V$ je asociováno jisté zobrazení, totiž násobení tohoto vektoru u skalárem (zleva). Toto zobrazení označíme ιu, máme

$$\iota u \colon F \to V$$

a pro každé $\lambda \in F$ klademe

$$\iota u(\lambda) = \lambda * u\,.$$

(Přijímáme konvenci, že symbol „ι“, řecké písmeno „ijóta“, se k následujícímu znaku váže „velice těsně“, takže namísto „$(\iota u)(\lambda)$“ můžeme psát jednoduše „$\iota u(\lambda)$“. Jestliže znak „$*$“ vynecháme, dostaneme „$\iota u(\lambda) = \lambda u$“. Symbol „$\iota$“ v zápisu „$\iota u$“ proto můžeme chápat jako „abstraktní skalár“, namísto kterého dosazujeme „skutečné skaláry“ $\lambda \in F$, anebo jej můžeme chápat jako „vyhrazené místo“ pro dosazení „skutečného“ skaláru $\lambda \in F$.) Když F ve výše uvedené formuli chápeme jako aditivní grupu tělesa F, a tedy jako (levý) vektorový prostor nad tělesem F, snadno nahlédneme, že zobrazení ιu je (levé) lineární zobrazení.

Dosaďme nyní za vektorový prostor V aditivní grupu tělesa F, která je také (levým) vektorovým prostorem nad tělesem F (viz definice 1.5 a 1.8 a poznámku 1.12). Nechť $u \in V = F$ je vektor z F. V takovémto případě se zobrazení $\iota u: F \to F$ definované předpisem $\iota u(\lambda) = \lambda \cdot u$ nazývá *pravá homotetie vektorového prostoru F určená vektorem u* (srov. [78: bod VI.6.3(v)]). (Jde o homotetii neboli středově stejnolehlé zobrazení, jehož střed je v nule a koeficient je u. Vidíme, že definiční obor i obor hodnot zobrazení $\iota u: F \to F$ jsou totožné.)

Předpokládejme na chvíli, že těleso F je komutativní. Zvolme nějaký skalár $\lambda \in$ $\in F$ pevně a uvažujme zobrazení $f: V \to V$ určené předpisem $f(u) = \lambda * u$ pro každé $u \in V$, kde V je libovolný vektorový prostor nad tělesem F. Snadno ověříme, že jde o lineární zobrazení. Uvedené zobrazení f je *levá homotetie vektorového prostoru V určená skalárem λ*. (Střed tohoto středově stejnolehlého zobrazení je v nule a jeho koeficient je λ. Opět platí, že obor hodnot zobrazení $f: V \to V$ i jeho definiční obor jsou stejné.)

Vraťme se k původnímu zobrazení $\iota u: F \to V$, kde V je jakýkoliv (levý) vektorový prostor nad (ne nutně komutativním) tělesem F a vektor $u \in V$ je zvolen pevně. Pokud V je aditivní grupa tělesa F, potom nejde o nic jiného než o pravou homotetii vektorového prostoru F určenou vektorem u. V obecném případě toto zobrazení $\iota u: F \to V$ budeme nazývat *pravou V-homotetií určenou vektorem u*. Dosadíme-li za V aditivní grupu tělesa F, je zřejmé, že pravá F-homotetie určená vektorem $u \in F$ je přesně totéž co pravá homotetie určená tímto vektorem. Pojem pravé V-homotetie tedy zobecňuje původní pojem pravé homotetie. Některé její základní vlastnosti zůstávají zachovány: platí, že obor hodnot $\operatorname{Rng} \iota u$ zobrazení $\iota u: F \to V$ je vždy cyklickým podprostorem prostoru V. V jedné věci se ale pravá V-homotetie od homotetie v klasickém smyslu výrazně liší: definiční obor a obor hodnot zobrazení $\iota u: F \to V$ jsou obecně různé.

1.40. Poznámka. Nechť $W(+,-,0)$ a $V(+,-,0)$ jsou (levé) vektorové prostory nad tělesem $F(+,-,\cdot,^{-1},0,1)$ a nechť „$*$" je násobení vektorů z prostoru V skalárem (zleva). Zvolme nějaký vektor $u \in V$ – máme tedy i V-homotetii ιu – a uvažujme kteroukoliv lineární formu $\alpha \in W^{\#}$. Je zřejmé, že obě zobrazení, totiž danou lineární formu $\alpha: W \to F$ a uvedenou V-homotetii $\iota u: F \to V$, můžeme složit. Toto složené zobrazení označíme $\iota u\alpha$. Máme

$$\iota u\alpha: W \to V$$

a pro každé $x \in W$ je

$$\iota u\alpha(x) = \big(\alpha(x)\big) * u\,.$$

Platí tedy $\iota u\alpha \in W^{\#}_{V}$.

1.41. Poznámka. Početní pravidla pro symbol „ι". Nechť $V(+,-,0)$ je (levý) vektorový prostor nad tělesem $F(+,-,\cdot,^{-1},0,1)$ vzhledem k zobrazení „$*$". Ať je dán vektor $u \in V$. Z předcházející definice 1.39 víme, že když aditivní grupu tělesa F chápeme jako levý vektorový prostor nad tělesem F, pak zobrazení $\iota u: F \to V$, které je s vektorem u asociováno, je (levé) lineární zobrazení. To znamená, že $\iota u \in F^{\#}_{V}$. (Význam symbolu $F^{\#}_{V}$ je jasný: je to prostor všech lineárních zobrazení definovaných na aditivní grupě tělesa F a jdoucích do vektorového prostoru V, viz definici 1.38.)

Je zřejmé, že pro libovolné dva vektory $u, v \in V$ platí

$$\iota u = \iota v \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad u = v\,. \tag{1}$$

(Implikace „$\Leftarrow$" je triviální. K důkazu implikace „$\Rightarrow$" stačí obě zobrazení ιu a ιv vyhodnotit v jednotce tělesa F. Máme $u = 1 * u = \iota u(1) = \iota v(1) = 1 * v = v$.)

Ať opět $u, v \in V$ jsou dva vektory. Snadno nahlédneme, že

$$\iota(u+v) = (\iota u) + (\iota v)\,, \tag{2}$$

přičemž součet na levé straně uvedené rovnice probíhá ve vektorovém prostoru V, kdežto součet na pravé straně se děje v prostoru $F^{\#}_V$ podle definice 1.38 (tj., jde o součet dvou lineárních zobrazení). (Pro každé $\lambda \in F$ totiž máme $\iota(u+v)(\lambda) = \lambda * (u+v) = (\lambda * u) + (\lambda * v) = \big(\iota u(\lambda)\big) + \big(\iota v(\lambda)\big) = (\iota u + \iota v)(\lambda)$.)

Nyní zvolme vektor $u \in V$ a skalár $\lambda \in F$. Pak zobrazení $\iota\lambda: F \to F$ a $\iota u: F \to V$, jež jsou se skalárem λ a vektorem u asociována, lze složit. Výsledkem je zobrazení $\iota u \iota \lambda: F \to V$. Zajisté platí

$$\iota u \iota \lambda = \iota(\lambda u)\,, \tag{3}$$

kde na levé straně uvedené rovnice stojí zobrazení vzniklé složením zobrazení $\iota\lambda$ a ιu a na její pravé straně stojí zobrazení $\iota(\lambda u): F \to V$ asociované s vektorem $\lambda u = \lambda * u$. (Zvolme $\mu \in F$. Pak máme $\iota u \iota \lambda(\mu) = \iota u\big(\iota\lambda(\mu)\big) = \iota u(\mu \cdot \lambda) = (\mu \cdot \lambda) * u = \mu * (\lambda * u) = \iota(\lambda * u)(\mu)$.)

Nakonec ať $f: V \to V$ je (levé) lineární zobrazení definované na vektorovém prostoru V jdoucí do téhož prostoru V. Budiž dán vektor $u \in V$. Zobrazení $\iota u: F \to V$ a $f: V \to V$ opět můžeme složit, čímž dostaneme lineární zobrazení $f \iota u: F \to V$. Není těžké ověřit, že

$$f \iota u = \iota\big(f(u)\big)\,, \tag{4}$$

kde na levé straně této rovnice stojí zobrazení vzniklé složením zobrazení ιu a f, zatímco na její pravé straně máme zobrazení $\iota\big(f(u)\big): F \to V$ asociované s vektorem $f(u) \in V$. (Pro libovolné $\lambda \in F$ je totiž $f \iota u(\lambda) = f\big(\iota u(\lambda)\big) = f(\lambda * u) = \lambda * \big(f(u)\big) = \iota\big(f(u)\big)(\lambda)$.)

1.42. Definice. V-lineární kombinace. Nechť $W(+,-,0)$ a $V(+,-,0)$ dva (levé) vektorové prostory nad tělesem $F(+,-,\cdot,{}^{-1},0,1)$ a ať znak „$*$" označuje (levé) skalární násobení vektorů z prostoru V. Mějme přirozené číslo m (lze vzít i $m = 0$). Dále mějme (levé) lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m: W \to F$ a (levé) lineární zobrazení $\gamma: W \to V$. (Platí tedy $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in W^{\#}$ a $\gamma \in W^{\#}_V$.) Zobrazení γ je *V-lineární kombinací* zadaných lineárních forem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ právě tehdy, když existují vektory $u_1, \dots, u_m \in V$ takové, že $\gamma = \iota u_1 \alpha_1 + \cdots + \iota u_m \alpha_m$. (Již víme (poznámka 1.40), že $\iota u_i \alpha_i \in W^{\#}_V$ pro $i = 1, \dots, m$. Také víme (definice 1.38), že prostor $W^{\#}_V$ je komutativní grupa. Sčítání se odehrává v tomto prostoru. Jestliže je $m = 0$, potom klademe $\iota u_1 \alpha_1 + \cdots + \iota u_m \alpha_m = o$, kde o je nula z prostoru $W^{\#}_V$.) Pro každé $x \in W$ tedy platí

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= \iota u_1 \alpha_1(x) + \cdots + \iota u_m \alpha_m(x) = \\ &= \big(\alpha_1(x)\big) * u_1 + \cdots + \big(\alpha_m(x)\big) * u_m\,.\end{aligned}$$

Za vektorový prostor V nyní dosaďme aditivní grupu tělesa F. V tomto případě je $\gamma: W \to F$ také (levá) lineární forma. Připomeňme, že algebraický duál $W^{\#}$ je pravý vektorový prostor nad F (definice 1.24). Vidíme, že lineární forma γ je F-lineární kombinací forem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ právě tehdy, když je jejich lineární kombinací (definice 1.25). Pojem V-lineární kombinace tedy zobecňuje pojem lineární kombinace. Opět upozorníme na jeden rozdíl mezi oběma pojmy: Zatímco výsledek lineární kombinace leží ve stejném vektorovém prostoru jako vektory, na něž je tento pojem aplikován – máme-li kupříkladu $x_1, \dots, x_m \in W$, pak $(\lambda_1 * x_1) + \cdots + (\lambda_m * x_m) \in W$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$ jsou libovolné skaláry – v případě V-lineární kombinace tomu tak není. Výsledek V-lineární kombinace forem z prostoru $W^{\#}$ leží v prostoru $W^{\#}_V$.

(Za zmínku stojí ještě jeden rozdíl mezi lineární a V-lineární kombinací. Pojem lineární kombinace lze zavést (definice 1.25) v případě kteréhokoliv vektorového prostoru nad tělesem F. Avšak pojem V-lineární kombinace v obecnosti není možné aplikovat na libovolné vektory: musí jít o lineární formy (nebo o jiná zobrazení jdoucí do F, eventuálně přímo o prvky z F). Jinými slovy, pojem V-lineární kombinace lze zavést jen na algebraickém duálu nějakého vektorového prostoru nad F (případně i na některých dalších typech prostorů).)

1.43. Následující tvrzení 1.44 je snadné. Je ale také velice zajímavé, protože podá charakteristiku lineárních zobrazení γ, která je možné vyjádřit jako V-lineární kombinaci nějakých lineárních forem.

1.44. Tvrzení. *Buďte $W(+,-,0)$ a $V(+,-,0)$ dva vektorové prostory nad tělesem $F(+,-,\cdot,{}^{-1},0,1)$, ať znak „$*$“ označuje skalární násobení vektorů z prostoru V a nechť $\gamma\colon W \to V$ je nějaké lineární zobrazení. Potom následující dva výroky jsou ekvivalentní:*
(1) Existuje přirozené číslo m (lze zvolit i $m = 0$) a existují lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m\colon W \to F$ takové, že zobrazení γ je V-lineární kombinací forem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.
(2) Obor hodnot $\operatorname{Rng}\gamma$ zobrazení γ je konečněrozměrný podprostor vektorového prostoru V.

1.44.a. *Důkaz.* Nechť tedy $\gamma = \iota u_1\alpha_1 + \cdots + \iota u_m\alpha_m$, kde $u_1, \ldots, u_m \in V$ jsou vhodné vektory a $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in W^{\#}$ jsou vhodné lineární formy na vektorovém prostoru W. (Je-li $m = 0$, klademe $\iota u_1\alpha_1 + \cdots + \iota u_m\alpha_m = o$, kde o je nulové lineární zobrazení $o\colon W \to V$.) Pak je zřejmé, že obor hodnot zobrazení γ má konečnou dimenzi (menší nebo rovnu m), protože každý vektor $u \in \operatorname{Rng}\gamma$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $u_1, \ldots, u_m$.

Předpokládejme naopak, že dimenze oboru hodnot zobrazení γ je konečná. Nechť $\{u_1, \ldots, u_m\} \subseteq V$ je báze oboru hodnot $\operatorname{Rng}\gamma$. Každý vektor $u \in \operatorname{Rng}\gamma$ tedy lze jednoznačně (!) vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $u_1, \ldots, u_m$, neboli $u = (\bar\lambda_1 * u_1) + \cdots + (\bar\lambda_m * u_m)$ pro vhodné (a jednoznačně určené) skaláry $\bar\lambda_1, \ldots, \bar\lambda_m \in F$. Na podprostoru $\operatorname{Rng}\gamma$ vektorového prostoru V proto můžeme definovat lineární formy $\lambda_1, \ldots, \lambda_m\colon \operatorname{Rng}\gamma \to F$, které každému vektoru $u \in \operatorname{Rng}\gamma$ přiřadí vhodné skaláry $\bar\lambda_1, \ldots, \bar\lambda_m$ tak, aby platilo $u = \big(\lambda_1(u)\big) * u_1 + \cdots + \big(\lambda_m(u)\big) * u_m$. (Podrobněji viz poznámku 1.72.) Ekvivalentně lze napsat, že $u = \iota u_1\lambda_1(u) + \cdots + \iota u_m\lambda_m(u)$. Složíme-li zobrazení γ s těmito lineárními formami, dostaneme lineární formy $\lambda_1\gamma, \ldots, \lambda_m\gamma$, které jsou definovány na celém vektorovém prostoru W. Nyní vidíme, že $\gamma = \iota u_1\lambda_1\gamma + \cdots + \iota u_m\lambda_m\gamma$. $\square$

1.45. V definici 1.25 jsme nejprve zavedli pojem lineární kombinace vektorů. Pak jsme mohli pokračovat zaváděním pojmů lineárního obalu, lineární nezávislosti a pojmu báze. Nyní jsme v definici 1.42 zavedli pojem V-lineární kombinace lineárních forem (kde V je vektorový prostor nad daným tělesem). Analogie uvedeného pojmu s pojmem lineární kombinace nás vede k zavedení pojmů V-lineárního obalu množiny lineárních forem, V-lineární nezávislosti a pojmu V-báze. Tyto pojmy zavádíme v následující definici 1.46.

1.46. Definice. V-lineární obal, V-lineární nezávislost, V-báze. Ať $W(+,-,0)$ a $V(+,-,0)$ jsou (levé) vektorové prostory nad tělesem $F(+,-,\cdot,{}^{-1},0,1)$.

Zvolme libovolnou množinu $M \subseteq W^{\#}$ lineárních forem definovaných na vektorovém prostoru W. Její *V-lineární obal* označíme $\operatorname{Lin}_V M$ a rozumíme jím množinu všech V-lineárních kombinací prvků z množiny M. Když $\gamma\colon W \to V$ (resp. $\gamma \in W^{\#}_V$) je lineární zobrazení, pak $\gamma \in \operatorname{Lin}_V M$ právě tehdy, když existuje přirozené číslo m (lze zvolit i $m = 0$), existují vektory $u_1, \ldots, u_m \in V$ a existují lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in M$ takové, že $\gamma = \iota u_1\alpha_1 + \cdots + \iota u_m\alpha_m$. (Je-li $m = 0$, klademe $\iota u_1\alpha_1 + \cdots + \iota u_m\alpha_m = o$, kde o je nulové lineární zobrazení $o\colon W \to V$.)

Za vektorový prostor V dosaďme aditivní grupu tělesa F. Zřejmě platí, že F-lineární obal množiny lineárních forem M, tedy $\operatorname{Lin}_F M$, není nic jiného než její lineární obal, totiž $\operatorname{Lin} M$, v klasickém smyslu (definice 1.25). Povšimněme si, že zatímco množina M leží v algebraickém duálu $W^{\#}$, její V-lineární obal obecně leží v prostoru $W^{\#}_V$.

Ať $B \subseteq W^{\#}$ je libovolná množina lineárních forem. Množina B je *V-lineárně závislá* právě tehdy, když existuje nenulové přirozené číslo m, existují navzájem různé lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in B$ a existují nenulové vektory $u_1, \ldots, u_m \in V$ (pro $i = 1, \ldots, m$ platí $u_i \neq 0$) tak, že $\iota u_1\alpha_1 + \cdots + \iota u_m\alpha_m = o$, kde o je nulové lineární zobrazení $o\colon W \to V$. Množina B je *V-lineárně nezávislá* právě tehdy, když není V-lineárně závislá.

Lehce nahlédneme, že prázdná množina je vždy V-lineárně nezávislá (bez ohledu na volbu vektorového prostoru V). Povšimněme si, že jakákoliv množina $B \subseteq W^{\#}$ je V-lineárně nezávislá, jestliže vektorový prostor V je triviální.

Nechť m je přirozené číslo a nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in W^{\#}$ jsou lineární formy definované na vektorovém prostoru W. Lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou *V-lineárně nezávislé* právě tehdy, když jsou navzájem různé a množina $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ je V-lineárně nezávislá. (Jestliže $m = 0$, potom tato podmínka je splněna, takže lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, je-li $m = 0$, jsou V-lineárně nezávislé.) Uvedené lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou *V-lineárně závislé* právě tehdy, když nejsou V-lineárně nezávislé.

Není nikterak těžké ověřit, že lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou V-lineárně závislé právě tehdy, když existují vektory $u_1, \dots, u_m \in V$, které nejsou všechny rovny nule ($u_i \neq 0$ pro alespoň jedno $i = 1, \dots, m$), takové, že $\iota u_1 \alpha_1 + \dots + \iota u_m \alpha_m = o$, kde o je nulové lineární zobrazení $o\colon W \to V$. Odtud plyne, že když lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou V-lineárně závislé, potom přirozené číslo m je nenulové a vektorový prostor V je netriviální.

Za vektorový prostor V nyní dosaďme aditivní grupu tělesa F. Ihned vidíme, že množina $B \subseteq W^{\#}$ lineárních forem je F-lineárně nezávislá právě tehdy, když je lineárně nezávislá v původním smyslu (podle definice 1.25). Obdobné tvrzení platí také pro libovolné lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in W^{\#}$. (Viz též poznámku 2.18.)

Konečně o množině $B \subseteq W^{\#}$ lineárních forem řekneme, že je *V-báze* prostoru $W_V^{\#}$ právě tehdy, když je V-lineárně nezávislá a $\mathrm{Lin}_V B = W_V^{\#}$.

1.47. Poznamenejme, že zavedený pojem V-lineární nezávislosti lineárních forem je v jistém smyslu zbytečný. Platí totiž následující tvrzení: lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou V-lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé nebo V je triviální vektorový prostor. Implikace „$\Rightarrow$“ uvedeného tvrzení je snadná a dokážeme ji v následujícím tvrzení 1.48. Implikace „$\Leftarrow$“ je poněkud obtížnější a dokážeme ji až v tvrzení 2.23.

1.48. Tvrzení. *Nechť W a V jsou vektorové prostory nad tělesem F. K tomu mějme přirozené číslo m (i $m = 0$) a lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in W^{\#}$. Jestliže lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou V-lineárně nezávislé, potom jsou lineárně nezávislé nebo vektorový prostor V je triviální.*

1.48.a. *Důkaz.* Důkaz provedeme nepřímo, dokážeme obměnu implikace. Předpokládejme, že lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou lineárně závislé a že vektorový prostor V je netriviální. To znamená, že existují skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$, které nejsou všechny rovny nule ($\lambda_i \neq 0$ pro alespoň jedno $i = 1, \dots, m$; odtud plyne, že přirozené číslo m je nenulové), takové, že $\iota\lambda_1\alpha_1 + \dots + \iota\lambda_m\alpha_m = o$, kde o je nulová lineární forma $o\colon W \to F$. Zvolme nenulový vektor $\varepsilon \in V$. Pro $i = 1, \dots, m$ položme $u_i = \lambda_i\varepsilon$. Vidíme, že $\iota u_i = \iota\varepsilon\iota\lambda_i$ (složení zobrazení $\iota\lambda_i$ a $\iota\varepsilon$) pro $i = 1, \dots, m$. Protože alespoň jeden ze skalárů $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ je nenulový, musí alespoň jeden z vektorů $u_1, \dots, u_m$ být nenulový. Aplikujeme-li zobrazení $\iota\varepsilon\colon F \to V$ na obě strany výše uvedené rovnice, dostáváme $\iota u_1\alpha_1 + \dots + \iota u_m\alpha_m = o$, kde o nyní značí nulové lineární zobrazení $o\colon W \to V$. Vidíme, že lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou V-lineárně závislé. $\square$

1.49. Zajímavá je také otázka existence V-báze. Již víme (tvrzení 1.32), že každý vektorový prostor má alespoň jednu (algebraickou) bázi. Avšak v případě V-bází takové tvrzení obecně neplatí. Platí totiž následující: V-báze prostoru $W_V^{\#}$ existuje právě tehdy, když dimenze alespoň jednoho z prostorů W nebo V je konečná. Důkaz implikace „$\Rightarrow$“ je snadný a podáme jej v následujícím tvrzení 1.50. Implikaci „$\Leftarrow$“ dokážeme až v tvrzení 2.25. (Navíc platí i takovéto tvrzení: Jestliže je splněna (výše uvedená) nutná a postačující podmínka pro existenci V-báze a vektorový prostor V je netriviální, potom množina všech V-bází prostoru $W_V^{\#}$ splývá s množinou všech (algebraických) bází duálu $W^{\#}$. Viz tvrzení 2.27.)

1.50. Tvrzení. *Ať W a V jsou dva vektorové prostory nad tělesem F. Pak platí tato dvě na sebe navazující tvrzení:*

I. *Jestliže prostor $W_V^{\#}$ má alespoň jednu V-bázi, potom obor hodnot* $\operatorname{Rng}\gamma$ *každého zobrazení $\gamma \in W_V^{\#}$ je konečněrozměrný podprostor vektorového prostoru V.*

II. *Jestliže obor hodnot* $\operatorname{Rng}\gamma$ *každého zobrazení $\gamma \in W_V^{\#}$ je konečněrozměrný podprostor vektorového prostoru V, potom dimenze vektorového prostoru W je konečná nebo dimenze vektorového prostoru V je konečná.*

1.50.a. *Důkaz.* I. Tvrzení je snadné. Zvolme libovolné zobrazení $\gamma \in W_V^{\#}$. Podle předpokladu jej můžeme napsat (dokonce jednoznačně) jako V-lineární kombinaci prvků V-báze prostoru $W_V^{\#}$. Mějme tedy přirozené číslo m, vhodné vektory $u_1, \ldots, u_m \in V$ a vhodné lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in W^{\#}$, které patří do V-báze prostoru $W_V^{\#}$, tak, že $\gamma = \iota u_1 \alpha_1 + \cdots + \iota u_m \alpha_m$. Vidíme, že dimenze oboru hodnot $\operatorname{Rng}\gamma$ zobrazení γ nepřevyšuje přirozené číslo m, je tedy konečná.

II. Důkaz provedeme nepřímo. Předpokládejme, že dimenze vektorových prostorů W a V je nekonečná. Ve vektorovém prostoru W tedy najdeme spočetnou a lineárně nezávislou množinu $A = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\} \subseteq W$. Obdobně ve vektorovém prostoru V najdeme spočetnou a lineárně nezávislou množinu $D = \{f_1, f_2, f_3, \ldots\} \subseteq V$. (Předpokládáme, že pro všechna $i, j = 1,\ 2,\ \ldots$ platí $e_i = e_j$ právě tehdy, když $f_i = f_j$. To nastává například tehdy, když vektory $e_1,\ e_2,\ \ldots$ a vektory $f_1,\ f_2,\ \ldots$ jsou navzájem různé.) Lineárně nezávislou množinu A rozšiřme na bázi B (bude platit $A \subseteq B$) celého vektorového prostoru W. To lze provést snadno pomocí Zornova lemmatu 1.31 (obdobně jako v důkazu tvrzení 1.32, viz též [78: věta VI.5.3]). Nyní zavedeme jisté lineární zobrazení $\gamma\colon W \to V$. Lineární zobrazení γ bude jednoznačně určeno tím, že stanovíme jeho hodnoty na prvcích báze B. Pro $i = 1,\ 2,\ \ldots$ položme $\gamma(e_i) = f_i$. Tím je zobrazení γ určeno na $\operatorname{Lin} A$. Pro $x \in \operatorname{Lin}(B \setminus A)$ položíme jednoduše $\gamma(x) = 0$, kde 0 je nulový vektor prostoru V. Tímto je zobrazení γ jednoznačně určeno na celém vektorovém prostoru W. (Jestliže $x \in W$, potom $x = x_A + x_B$ pro vhodné $x_A \in \operatorname{Lin} A$ a vhodné $x_B \in \operatorname{Lin}(A \setminus B)$, načež $\gamma(x) = \gamma(x_A)$.) Vidíme, že dimenze oboru hodnot $\operatorname{Rng}\gamma = \operatorname{Lin} D$ popsaného zobrazení je spočetná, a proto nekonečná. $\square$

1.51. V další části tohoto paragrafu přejdeme k součinům a (vnějším) direktním součtům vektorových prostorů. S těmito pojmy těsně souvisejí dvě operace s lineárními zobrazeními, které zde zavedeme a které nazveme součin lineárních zobrazení a direktní součet lineárních zobrazení.

1.52. Definice. Součin vektorových prostorů. Direktní součet vektorových prostorů. Přirozené projekce. Součin i direktní součet vektorových prostorů zde zavedeme v plné obecnosti, kdy počet daných vektorových prostorů nemusí být konečný (srov. [78: odstavce VI.3.12 až VI.3.14]). Důvod pro tento obecný přístup se vyjasní, jakmile v definici 1.53 zavedeme pojmy součinu a direktního součtu lineárních zobrazení.

Nechť F je těleso. Dále ať J je libovolná neprázdná množina indexů a pro každé $j \in J$ budiž dán nějaký (levý) vektorový prostor $V_j(+,-,0)$ nad tělesem F. (Formálně tomu rozumíme tak, že na množině J je definováno jakési zobrazení V, které každému indexu $j \in V$ přiřadí příslušnou grupu V_j. Toto zobrazení V pak nazýváme *souborem vektorových prostorů* – srov. [2: odstavec I.4.39].) Na kartézských součinech $F \times V_j$ jsou také dána (levá) skalární násobení „$*$“, která jdou do vektorových prostorů V_j pro $j \in J$. Nyní popíšeme konstrukci součinu vektorových prostorů V_j, kde $j \in J$.

Uvažujme množinu všech zobrazení $\boldsymbol{u}\colon J \to \bigcup_{j\in J} V_j$ takových, že $\boldsymbol{u}(j) \in V_j$ pro všechna $j \in J$. Množinu všech takovýchto zobrazení označme $\prod_{j\in J} V_j$. Vidíme, že prvky množiny $\prod_{j\in J} V_j$ jsou selektory na množině $\{\, V_j\ ;\ j \in J \,\}$ tedy kolekci všech nosných množin jednotlivých vektorových prostorů V_j, kde $j \in J$. Abychom zaručili, že popsaná množina $\prod_{j\in J} V_j$ je neprázdná (neboli, že na množině $\{\, V_j\ ;\ j \in J \,\}$ existuje alespoň jeden selektor), je často nutné předpokládat platnost axiomu výběru [2: odstavec I.7.4].

Zde ale V_j jsou vektorové prostory pro $j \in J$, a proto neprázdnost množiny $\prod_{j\in J} V_j$ je možné zaručit i bez předpokladu platnosti axiomu výběru. (!) Stačí si uvědomit, že každý vektorový prostor obsahuje nulový vektor (konstantu); z definice 1.5 (a z poznámky 1.6) vyplývá, že libovolný vektorový prostor W nad tělesem F je grupa, a tedy uspořádaná čtveřice: nosná množina W, binární operace na W (součet vektorů), unární operace na W (opačný vektor) a konstanta na W (nulový vektor). Z každé uspořádané čtveřice je možné konstruktivně vyjmout její čtvrtou složku (nulový vektor daného vektorového prostoru). Následně je možné na množině J konstruktivně zavést zobrazení, které každému prvku $j \in J$ přiřadí nulový vektor prostoru V_j. Vidíme, že množina $\prod_{j\in J} V_j$ obsahuje alespoň zobrazení $\boldsymbol{o}$ takové, že $\boldsymbol{o}(j) = 0 \in V_j$ pro každé $j \in J$.

Zvolme $\boldsymbol{u} \in \prod_{j\in J} V_j$ libovolně. Prvek $\boldsymbol{u}(j) \in V_j$, který je zobrazením $\boldsymbol{u}$ indexu $j \in J$ přiřazen, označujeme stručně u_j. Klademe tedy $u_j = \boldsymbol{u}(j)$ pro každé $j \in J$. O prvku u_j pak hovoříme jako o *j-té složce prvku* (resp. *zobrazení*) $\boldsymbol{u}$. (Prvky množiny $\prod_{j\in J} V_j$ s oblibou označujeme malými tučnými kurzívními písmeny. K označení složek těchto prvků pak použijeme stejné kurzívní (již ne-tučné) písmeno a příslušný index zapíšeme do jeho pravého dolního indexu.) Zobrazení $\boldsymbol{u}$ můžeme zapsat i následujícím způsobem: $(u_j)_{j\in J}$. Platí tedy $\boldsymbol{u} = (u_j)_{j\in J}$. Výhodou tohoto zápisu $(u_j)_{j\in J}$ je, že lépe vyjádří, z jakých složek je zobrazení $\boldsymbol{u}$ složeno. Dodejme, že je velice účelné si představovat, že jednotlivé složky u_j jsou v zápise $(u_j)_{j\in J}$ uspořádány do sloupce. (Jestliže je množina J nekonečná, potom si je třeba představit, že tento sloupec je nekonečně dlouhý.) Z tohoto důvodu o prvcích $\boldsymbol{u} = (u_j)_{j\in J}$ množiny $\prod_{j\in J} V_j$ hovoříme jako o *sloupcích* a o prvcích u_j pro $j \in J$ hovoříme jako o *složkách sloupce* $\boldsymbol{u} = (u_j)_{j\in J}$.

Na právě popsané množině $\prod_{j\in J} V_j$ nyní zavedeme strukturu (levého) vektorového prostoru nad tělesem F. Zvolme libovolné dva sloupce $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \prod_{j\in J} V_j$. Formulemi, které budou následovat, zavedeme pojem součtu dvou sloupců $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, pojem opačného sloupce $-\boldsymbol{u}$ a pojem nulového sloupce $\boldsymbol{o} \in \prod_{j\in J} V_j$, který bude hrát roli počátku prostoru $\prod_{j\in J} V_j$. Na kartézském součinu $F \times \prod_{j\in J} V_j$ také zavedeme zobrazení „$*$" jdoucí do prostoru $\prod_{j\in J} V_j$, které bude mít význam (levého) skalárního násobení. Pro každé $\boldsymbol{u} = (u_j)_{j\in J}$, $\boldsymbol{v} = (v_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} V_j$ a pro každé $\lambda \in F$ klademe

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (u_j)_{j\in J} + (v_j)_{j\in J} = (u_j + v_j)_{j\in J}\,, \\ -\boldsymbol{u} &= -(u_j)_{j\in J} = (-u_j)_{j\in J}\,, \\ \boldsymbol{o} &= (0)_{j\in J}\,, \\ \lambda * \boldsymbol{u} &= \lambda * (u_j)_{j\in J} = (\lambda * u_j)_{j\in J}\,. \end{aligned}$$

To znamená, že $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} = (w_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} V_j$, kde $w_j = u_j + v_j$ (sčítání ve vektorovém prostoru V_j) pro $j \in J$, že $-\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} = (w_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} V_j$, kde $w_j = -u_j$ (operace opačného vektoru ve V_j) pro $j \in J$, že $\boldsymbol{o} = (o_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} V_j$, kde $o_j = 0$ (počátek prostoru V_j) pro $j \in J$, a že $\lambda * \boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} = (w_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} V_j$, kde $w_j = \lambda * u_j$ (skalární násobení v prostoru V_j) pro $j \in J$. Vidíme, že množina $\prod_{j\in J} V_j$ vybavená právě zavedenou binární operací „$+$", unární operací „$-$" a konstantou $\boldsymbol{o}$, tj. grupa $\left(\prod_{j\in J} V_j, +, -, \boldsymbol{o}\right)$, je (levý) vektorový prostor nad tělesem F vzhledem k právě zavedenému zobrazení „$*$", a tento vektorový prostor nazýváme *součinem vektorových prostorů* V_j, kde $j \in J$. (Správnější by bylo hovořit o *součinu souboru V vektorových prostorů*, kde V je zobrazení přiřazující vektorový prostor V_j každému indexu $j \in J$.) Poznamenejme, že součinu (souboru) vektorových prostorů se někdy říká také *produkt (souboru) vektorových prostorů*. Uvedený součin vektorových prostorů V_j, kde $j \in J$, pak v souladu s poznámkou 1.15 značíme stejně jako jeho nosnou množinu, tedy $\prod_{j\in J} V_j$.

V rámci vektorového prostoru $\prod_{j\in J} V_j$ nyní uvažujme jen sloupce $\boldsymbol{u} = (u_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} V_j$ takové, že nerovnost $u_j \neq 0$ (na pravé straně stojí počátek vektorového prostoru V_j) platí jen pro konečně mnoho indexů $j \in J$. Množinu všech takovýchto sloupců označme $\coprod_{j\in J} V_j$. Snadno nahlédneme, že množina $\coprod_{j\in J} V_j$ je vektorovým podprostorem vektorového prostoru $\prod_{j\in J} V_j$. Jestliže tedy množinu $\coprod_{j\in J} V_j$ vybavíme strukturou vektorového prostoru, kterou získáme přirozeným zúžením struktury vektorového prostoru zavedené na množině $\prod_{j\in J} V_j$ – viz poznámku 1.16 –, potom získáme (levý) vektorový prostor nad tělesem F, a tento vektorový prostor nazýváme *(vnějším) direktním součtem vektorových prostorů* V_j, kde $j \in J$. (Opět by bylo přesnější hovořit o *(vnějším) direktním součtu souboru V vektorových prostorů*, kde V je zobrazení přiřazující vektorový prostor V_j každému indexu $j \in J$.) Dodejme, že (vnější) direktní součet (souboru) vektorových prostorů se někdy nazývá také *koprodukt (souboru) vektorových prostorů.*

Kdykoliv pracujeme se součinem $\prod_{j\in J} V_j$ nebo direktním součtem $\coprod_{j\in J} V_j$ vektorových prostorů, pracujeme obyčejně také se zobrazeními, kterým se říká přirozené projekce. Zvolme libovolný index $i \in J$. Pak *i-tá přirozená projekce* je zobrazení, které každému sloupci $\boldsymbol{u} = (u_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} V_j$ (speciálně tedy i každému $\boldsymbol{u} = (u_j)_{j\in J} \in \coprod_{j\in J} V_j$) přiřadí jeho i-tou složku u_i. Je-li $i \in J$, pak i-tou přirozenou projekci označíme p_i. Pro každé $\boldsymbol{u} = (u_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} V_j$ tedy klademe $p_i(\boldsymbol{u}) = u_i$. Je zřejmé, že všechny přirozené projekce p_i, pro všechna $i \in J$, jsou lineární zobrazení; přesněji: Jestliže definičním oborem projekce p_i je celý vektorový prostor $\prod_{j\in J} V_j$, chápeme ji jako zobrazení $p_i\colon \prod_{j\in J} V_j \to V_i$, potom tato projekce p_i je lineární zobrazení (vzhledem ke grupám $\prod_{j\in J} V_j$ a V_i, tělesu F a oběma příslušným skalárním násobením „$*$“). Jestliže definiční obor projekce p_i je jen vektorový prostor $\coprod_{j\in J} V_j$, chápeme ji tedy jako zobrazení $p_i\colon \coprod_{j\in J} V_j \to V_i$, potom tato projekce je také lineární zobrazení (vzhledem ke grupám $\coprod_{j\in J} V_j$ a V_i, tělesu F a oběma příslušným skalárním násobením „$*$“).

Nyní se věnujme speciálnímu případu, kdy indexová množina J je konečná. Nechť m je nenulové přirozené číslo a předpokládejme, že $J = \{1, \dots, m\}$. Potom součin $\prod_{j\in J} V_j$ značíme také $\prod_{i=1}^m V_i$ a direktní součet $\coprod_{j\in J} V_j$ značíme také $\coprod_{i=1}^m V_i$. Za takovýchto předpokladů lze snadno nahlédnout, že platí rovnost $\prod_{j\in J} V_j = \prod_{i=1}^m V_i = \coprod_{i=1}^m V_i = \coprod_{j\in J} V_j$. (Rovnost $\prod_{j\in J} V_j = \coprod_{j\in J} V_j$ je splněna právě tehdy, když mezi všemi vektorovými prostory V_j, kde $j \in J$, najdeme jen konečný počet netriviálních vektorových prostorů. To nastává například tehdy, když indexová množina J je konečná.) Provádíme-li součin konečného souboru vektorových prostorů $V_1, \dots, V_m$, označujeme jej také $V_1 \dot{\times} \cdots \dot{\times} V_m$. Klademe tedy $V_1 \dot{\times} \cdots \dot{\times} V_m = \prod_{i=1}^m V_i$ a platí

$$\prod_{i=1}^{m} V_i = V_1 \dot{\times} \cdots \dot{\times} V_m = \coprod_{i=1}^{m} V_i\,.$$

Máme-li stále $J = \{1, \dots, m\}$, potom každé $\boldsymbol{u} = (u_j)_{j\in J} \in V_1 \dot{\times} \cdots \dot{\times} V_m$ můžeme názorně zapsat jako sloupec

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \tag{1}$$

což vysvětluje, proč o prvcích součinu vektorových prostorů hovoříme jako o sloupcích. Namísto zápisu (1), který je prostorově značně náročný, budeme častěji používat úspornější zápis $(u_i)_{i=1}^m$. Mezi zápis (1) a $(u_i)_{i=1}^m$ tedy můžeme položit znak rovnosti „$=$“; nadto platí $(u_i)_{i=1}^m = (u_j)_{j\in J} = \boldsymbol{u}$.

V této definici 1.52 jsme se zaměřili na případ levých vektorových prostorů V_j nad tělesem F, kde $j \in J$. Všechny zde uvedené pojmy by ovšem bylo možné zavést i v případě, že všechny vektorové prostory V_j by byly pravé vektorové prostory nad tělesem F pro $j \in J$ – postupovali bychom obdobně.

1.53. Definice. Součin lineárních zobrazení. Direktní součet lineárních zobrazení. Nechť W je (levý) vektorový prostor nad tělesem F a nechť J je libovolná neprázdná množina indexů. Pro každé $j \in J$ budiž dán právě jeden (levý) vektorový prostor V_j nad tělesem F a právě jedno lineární zobrazení A_j definované na vektorovém prostoru W a jdoucí do V_j (tedy $A_j\colon W \to V_j$). Pak je možné sestavit součin $\prod_{j\in J} V_j$

vektorových prostorů V_j, kde $j \in J$. Nadto můžeme zavést následující zobrazení: každému $x \in W$ budiž přiřazen sloupec $\boldsymbol{y} = (y_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} V_j$ takový, že $y_j = A_j x$ pro každé $j \in J$. Můžeme tedy napsat, že $\boldsymbol{y} = (A_j x)_{j\in J}$. Právě zavedené zobrazení označíme $\prod_{j\in J} A_j$ a nazveme jej *součinem lineárních zobrazení* A_j, kde $j \in J$, popřípadě *produktem lineárních zobrazení* A_j, kde $j \in J$. (Po formální stránce zde pracujeme se souborem V vektorových prostorů (viz definici 1.52) a se *souborem A lineárních zobrazení.* To znamená, že V a A jsou zobrazení definovaná na indexové množině J, která každému indexu $j \in J$ přiřadí vektorový prostor V_j a lineární zobrazení A_j. Správnější by proto bylo říkat, že zobrazení $\prod_{j\in J} A_j$ je *součinem souboru A lineárních zobrazení* nebo že uvedené zobrazení je *produktem souboru A lineárních zobrazení.*) Snadno nahlédneme, že právě zavedené zobrazení $\prod_{j\in J} A_j \colon W \to \prod_{j\in J} V_j$ je lineární.

Tak jako je účelné si představovat, že jednotlivé složky vektorů z prostoru $\prod_{j\in J} V_j$ jsou uspořádány do sloupce, tak je také účelné si představovat, že součin $\prod_{j\in J} A_j$ zobrazení A_j, kde $j \in J$, vznikl tak, že jednotlivá zobrazení A_j, kde $j \in J$, jsme uspořádali do sloupce. Z tohoto důvodu v této práci budeme součin $\prod_{j\in J} A_j$ mnohem častěji označovat $(A_j)_{j\in J}$. Klademe tedy $(A_j)_{j\in J} = \prod_{j\in J} A_j$. To nám umožní pro každé $x \in W$ napsat velice přirozenou rovnici

$$(A_j)_{j\in J}\,(x) = (A_j x)_{j\in J} \tag{1}$$

vyjadřující, že když do zobrazení $(A_j)_{j\in J} \colon W \to \prod_{j\in J} V_j$ dosadíme vektor $x \in W$, obdržíme sloupec $(A_j x)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} V_j$.

Zmiňme také případ, kdy indexová množina J je konečná. Nechť m je nenulové přirozené číslo a nechť $J = \{1, \dots, m\}$. Pak součin $(A_j)_{j\in J} = \prod_{j\in J} A_j$ můžeme zapsat také

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}, \tag{2}$$

případně úsporněji $(A_i)_{i=1}^m$; rovněž můžeme použít zápis $\prod_{i=1}^m A_i$. Z výše uvedeného zápisu (2) je názorně patrné, že součin $(A_i)_{i=1}^m = (A_j)_{j\in J}$ skutečně vznikl uspořádáním lineárních zobrazení $A_1, \dots, A_m$ do jediného sloupce. Součin lineárních zobrazení $A_1, \dots$ $\dots, A_m$ někdy budeme zapisovat i takto: $A_1 \dot\times \cdots \dot\times A_m$. To všechno znamená, že mezi rovnici $\prod_{j\in J} A_j = (A_j)_{j\in J} = A_1 \dot\times \cdots \dot\times A_m = (A_i)_{i=1}^m = \prod_{i=1}^m A_i$, která platí, a zápis (2) můžeme doplnit ještě jeden znak rovnosti „=“.

Ve druhé části této definice 1.53 přejdeme k definici direktního součtu lineárních zobrazení (s čímž úzce souvisí [78: věta VI.3.15]).

Nechť J je neprázdná indexová množina a nechť W_j jsou (levé) vektorové prostory nad tělesem F pro $j \in J$. Nechť V je další (levý) vektorový prostor nad tělesem F a pro každé $j \in J$ mějme právě jedno lineární zobrazení B_j definované na vektorovém prostoru W_j a jdoucí do vektorového prostoru V (tedy $B_j \colon W_j \to V$ pro $j \in J$). Pak z vektorových prostorů W_j, kde $j \in J$, můžeme sestavit jejich direktní součet $\coprod_{j\in J} W_j$ a na něm zavést zobrazení jdoucí do prostoru V následovně: každému $\boldsymbol{x} = (x_j)_{j\in J} \in \coprod_{j\in J} W_j$ přiřadíme $y = \sum_{j\in J} B_j x_j$. To znamená, že jednotlivé výsledky $B_j x_j$ získané dosazením jednotlivých složek x_j sloupce $\boldsymbol{x}$ do jednotlivých zobrazení B_j pro $j \in J$ sečteme. Všechny výsledky $B_j x_j$ leží ve vektorovém prostoru V pro $j \in J$. Součet tedy provedeme užitím binární operace sčítání, která je na vektorovém prostoru V zavedena. Protože $\boldsymbol{x} = (x_j)_{j\in J} \in \coprod_{j\in J} W_j$, mezi všemi složkami x_j sloupce $\boldsymbol{x}$ najdeme nenulové vektory jen pro konečně mnoho indexů $j \in J$. Výsledky $B_j x_j$ jsou proto různé od počátku vektorového prostoru V jen pro konečně mnoho indexů $j \in J$ a jen těchto konečně mnoho výsledků je třeba sečíst. Protože binární operace součtu vektorů je asociativní a komutativní, nezáleží, v jakém pořadí tyto výsledky sčítáme. Právě popsané zobrazení zavedené na direktním součtu $\coprod_{j\in J} W_j$ a jdoucí do vektorového prostoru V označíme $\coprod_{j\in J} B_j$ a nazveme jej *direktním součtem lineárních zobrazení* B_j, kde $j \in J$, popřípadě *koproduktem lineárních zobrazení* B_j, kde $j \in J$. (Tak jako výše, i zde pracujeme se souborem vektorových prostorů W a lineárních zobrazení B, přičemž W a B jsou zobrazení definovaná na J přiřazující každému indexu $j \in J$ vektorový prostor W_j a lineární zobrazení B_j. Správněji bychom tedy měli říkat, že $\coprod_{j\in J} B_j$ je *direktním součtem souboru* B *lineárních zobrazení* anebo že $\coprod_{j\in J} B_j$ je *koproduktem souboru* B *lineárních zobrazení.*) Není nijak těžké nahlédnout, že právě zavedené zobrazení $\coprod_{j\in J} B_j \colon \coprod_{j\in J} W_j \to V$ je lineární.

V případě direktního součtu $\coprod_{j\in J} B_j$ zobrazení B_j, kde $j \in J$, je účelné si představovat, že uvedený součet vznikl sestavením zmíněných lineárních zobrazení do jediného řádku. Direktní součet $\coprod_{j\in J} B_j$ zobrazení B_j, kde $j \in J$, proto v této práci budeme mnohem častěji označovat $(B_j)^T_{j\in J}$. To znamená, že klademe $(B_j)^T_{j\in J} = \coprod_{j\in J} B_j$. Následně pro každý sloupec $(x_j)_{j\in J} \in \coprod_{j\in J} W_j$ můžeme přirozeně psát

$$(B_j)^T_{j\in J}\,(x_j)_{j\in J} = \sum_{j\in J} B_j x_j\,. \tag{3}$$

Rovnice (3) vyjadřuje, že dosazením sloupce $(x_j)_{j\in J} \in \coprod_{j\in J} W_j$ do lineárního zobrazení $(B_j)^T_{j\in J} \colon \coprod_{j\in J} W_j \to V$ obdržíme součet $\sum_{j\in J} B_j x_j \in V$.

Nakonec se zabývejme případem, kdy indexová množina J je konečná. Nechť m je nenulové přirozené číslo a nechť $J = \{1, \dots, m\}$. Pak direktní součet $(B_j)^T_{j\in J} = \coprod_{j\in J} B_j$ lze zapsat také $\coprod_{i=1}^m B_i$ nebo

$$\begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_m \end{pmatrix}, \tag{4}$$

přičemž můžeme použít i úspornější zápis $((B_i)^m_{i=1})^T$. Zápis (4) názorně vyjadřuje, že direktní součet $((B_i)^m_{i=1})^T$ vznikl sestavením lineárních zobrazení $B_1, \dots, B_m$ do jediného řádku. Direktní součet lineárních zobrazení $B_1, \dots, B_m$ můžeme zapsat i následovně: $B_1 \dotplus \cdots \dotplus B_m$. To znamená, že máme rovnost $\coprod_{j\in J} B_j = (B_j)^T_{j\in J} = B_1 \dotplus \cdots \cdots \dotplus B_m = ((B_i)^m_{i=1})^T = \coprod_{i=1}^m B_i$, přičemž mezi tuto rovnost a zápis (4) můžeme doplnit ještě jeden znak rovnosti „=“.

Součin a direktní součet lineárních zobrazení jsme zde zavedli pro případ, že všechny vektorové prostory jsou levé. Kdybychom pracovali s pravými vektorovými prostory, postupovali bychom obdobně.

1.54. Poznámka. Používané názvosloví (uspořádávání vektorů a lineárních zobrazení do sloupce v definicích 1.52 a 1.53, uspořádávání lineárních zobrazení do řádku v předcházející definici 1.53) je zde záměrně voleno tak, aby připomínalo práci s maticemi. Tomu odpovídá i používané značení (viz zápisy 1.52.(1), 1.53.(2) a 1.53.(4) v definicích 1.52 a 1.53; v definici 1.53 viz též použití znaku „T“ umístěného do pravého horního indexu, který běžně vyjadřuje transponování matice), díky němuž na levé strany rovnic 1.53.(1) a 1.53.(3) můžeme nahlížet jako na běžné násobení matic.

Poznamenejme však rovnou, že s maticemi zde nepracujeme. Maticí typu $m \times \times\, n$, kde m a n jsou nenulová přirozená čísla, se rozumí vhodné zobrazení definované na kartézském součinu $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ – viz [78: definice IV.3.4]. Kdežto my v definicích 1.52 a 1.53 pracujeme (sloupce $(x_j)_{j\in J}$ z prostoru $\prod_{j\in J} W_j$, soubor B zobrazení B_j, kde $j \in J$, apod.) s vhodnými zobrazeními definovanými na indexové množině J, která v obecnosti nemusí mít tvar kartézského součinu. A i kdyby shodou okolností platilo $J = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ pro vhodná nenulová přirozená čísla m a n, pak např. $(B_j)^T_{j\in J}$ si i nadále představujeme spíše jako jeden řádek o mn složkách a např. $(x_j)_{j\in J}$ si i nadále představujeme jako sloupec o mn složkách – a ne jako tabulku o n řádcích a m sloupcích, respektive m řádcích a n sloupcích – tak, aby např. rovnice 1.53.(3) platila.

1.55. Obecnou definici 1.52 nyní použijeme k tomu, abychom zavedli prostory sloupců F^m, V^m a $(W^\#)^m$. Hned potom vyjmenujeme některé významné sloupce z prostorů F^m a V^m.

1.56. Definice. Prostory F^m, V^m a $(W^\#)^m$. Nechť F je těleso a budiž m nenulové přirozené číslo. Pak (podle definice 1.52) máme také prostor $F^m = \prod_{i=1}^m F_i = \coprod_{i=1}^m F_i$, kde F_i je aditivní grupa tělesa F pro každé $i = 1, \ldots, m$. Již víme (definice 1.5 a 1.8), že aditivní grupa tělesa F je levý i pravý vektorový prostor nad tělesem F. V důsledku toho součin F^m – v závislosti na provedené konstrukci – může vyjít jako levý nebo pravý vektorový prostor nad tělesem F. Většinou ale budeme pracovat s levými vektorovými prostory. Na prostoru F^m proto upřednostníme strukturu levého vektorového prostoru.

Prostor F^m je vektorový prostor nad tělesem F a všechny složky každého sloupce z prostoru F^m jsou skaláry, tedy prvky tělesa F. Sloupcům z prostoru F^m proto často říkáme také *sloupcové vektory*.

Na rozdíl od obecného součinu vektorových prostorů (dle definice 1.52) prostor F^m zavádíme i v případě, že $m = 0$. Jestliže $m = 0$, klademe $F^m = \{0\}$, kde na pravé straně stojí jednoprvková množina obsahující (například) nulový prvek tělesa F. Vidíme, že F^0 je triviální vektorový prostor nad tělesem F. V obecném případě snadno nahlédneme, že pro každé přirozené číslo m je dimenze prostoru F^m rovna právě číslu m.

Nechť nyní V je (levý) vektorový prostor nad tělesem F. Budiž dáno libovolné nenulové přirozené číslo m. Máme rovněž (levý) vektorový prostor $V^m = \prod_{i=1}^m V_i = \coprod_{i=1}^m V_i$ nad tělesem F, přičemž jsme položili $V_i = V$ pro $i = 1, \ldots, m$. Protože každá složka každého sloupce z prostoru V^m je vektor z prostoru V, o sloupcích z prostoru V^m můžeme říkat, že jsou to *sloupce vektorů z prostoru* V. Pro $m = 0$ klademe $V^m = \{0\}$, kde $\{0\}$ je jednoprvková množina obsahující (například) nulový vektor prostoru V. Vidíme, že V^0 je rovněž triviální vektorový prostor nad tělesem F.

Nad tělesem F mějme další (levý) vektorový prostor W. Víme (definice 1.24), že jeho algebraický duál $W^\#$, tedy prostor všech lineárních forem definovaných na vektorovém prostoru W, je pravý vektorový prostor nad tělesem F. Pro nenulové přirozené číslo m položíme $(W^\#)^m = \prod_{i=1}^m W_i^\# = \coprod_{i=1}^m W_i^\#$, kde $W_i^\# = W^\#$ pro $i = 1, \ldots, m$. Prostor $(W^\#)^m$ je pravý vektorový prostor nad tělesem F. Jelikož jednotlivé složky sloupců z prostoru $(W^\#)^m$ jsou lineární formy na vektorovém prostoru W, sloupce z prostoru $(W^\#)^m$ můžeme také nazývat *sloupce lineárních forem definovaných na* W. Pro $m = 0$ položíme $(W^\#)^m = \{o\}$, kde o je (například) nulová lineární forma z prostoru $W^\#$. Prostor $(W^\#)^0$ je opět triviální.

1.57. Definice. Některé významné sloupce prostorů F^m a V^m. Nechť F je těleso. Zvolme nenulové přirozené číslo m. Mezi všemi sloupci z prostoru F^m je několik významných sloupcových vektorů: je to nulový sloupcový vektor $\boldsymbol{o} \in F^m$, sloupec jedniček $\boldsymbol{e} \in F^m$ a standardní jednotkové vektory $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m \in F^m$. Nulový sloupcový vektor $\boldsymbol{o} = (o_i)_{i=1}^m$ má všechny složky rovny nule, $o_1 = \cdots = o_m = 0$, kde 0 je nula tělesa F. Můžeme psát $\boldsymbol{o} = (0)_{i=1}^m \in F^m$. Složky sloupce jedniček $\boldsymbol{e} = (e_i)_{i=1}^m$ jsou rovny jedné, tedy $e_1 = \cdots = e_m = 1$, kde 1 je jednotka tělesa F. Lze napsat $\boldsymbol{e} = (1)_{i=1}^m \in F^m$. Konečně sloupcové vektory $\boldsymbol{e}_i$ splňují vlastnost, že jejich i-tá složka je jednotka tělesa F a jejich ostatní složky jsou rovny nule tělesa F pro $i = 1, \ldots, m$. Platí tedy $\boldsymbol{e}_i = (\delta_{ij})_{j=1}^m$, kde δ_{ij} je známý *Kroneckerův symbol* (nazývaný také *Kroneckerovo delta*): $\delta_{ij} = 1$ (jednotka tělesa F) právě tehdy, když $i = j$, a $\delta_{ij} = 0$ (nula tělesa F) právě tehdy, když $i \neq j$, pro $i, j = 1, \ldots, m$.

Povšimněme si, že vektory $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ vytvářejí bázi prostoru F^m: množina $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ je báze, již nazýváme *kanonickou bází* prostoru F^m.

Nechť nyní $m = 0$. Pak F^m je triviální vektorový prostor obsahující pouze svůj počátek. I v tomto případě, kdy $m = 0$, píšeme $\boldsymbol{o} = (0)_{i=1}^m \in F^m$. Vektor $\boldsymbol{o}$ je právě zmíněný počátek triviálního vektorového prostoru F^m. Píšeme rovněž $\boldsymbol{e} = (1)_{i=1}^m \in F^m$. Je zřejmé, že existuje alespoň jedno $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ takové, že $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$ (totiž počátek); rovněž je zřejmé (protože $m = 0$), že pro každý sloupcový vektor $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ platí $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$; na druhou stranu (vlastně ekvivalentně) neexistuje žádné $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ takové, aby $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o}$. Důsledkem je, že v případě $m = 0$ platí $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{o}$.

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem F a ať m je nenulové přirozené číslo. Ze sloupců prostoru V^m je zvláště významný počátek prostoru V^m, tedy sloupec $\boldsymbol{o} \in V^m$ obsahující pouze nulové vektory. Máme $\boldsymbol{o} = (o_i)_{i=1}^m$, kde $o_1 = \cdots = o_m = 0$, přičemž 0 je nulový vektor prostoru V. Opět můžeme psát $\boldsymbol{o} = (0)_{i=1}^m \in V^m$. Nyní předpokládejme, že vektorový prostor V je navíc nenulový. Najdeme tedy nenulový vektor $\varepsilon \in V$. Potom je v prostoru V^m významný také sloupec $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)_{i=1}^m \in V^m$, kde $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_m = \varepsilon$. Máme-li nenulový vektor $\varepsilon \in V$, píšeme rovněž $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon)_{i=1}^m$.

Sloupec $\boldsymbol{\varepsilon}$ v prostoru V^m hraje obdobnou roli jako sloupec $\boldsymbol{e}$ v prostoru F^m. Je zde ale následující rozdíl: Zatímco sloupec jedniček $\boldsymbol{e}$ je v prostoru F^m určen jednoznačně, sloupec $\boldsymbol{\varepsilon}$ je určen volbou nenulového vektoru $\varepsilon \in V$. Volba nenulového vektoru $\varepsilon \in V$ ovšem není jednoznačná – jedinou výjimkou je případ jednorozměrného vektorového prostoru V nad dvouprvkovým tělesem. Vhodných sloupců $\boldsymbol{\varepsilon}$ tedy může být více.

Ať nyní $m = 0$. Pak V^m je triviální vektorový prostor obsahující pouze svůj počátek. Opět však píšeme $\boldsymbol{o} = (0)_{i=1}^m \in V^m$. Povšimněme si, že pro každý sloupec vektorů $\boldsymbol{u} \in V^m$ platí $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ – takže neexistuje žádné $\boldsymbol{u} \in V^m$ takové, aby $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ – a že alespoň jedno $\boldsymbol{u} \in V^m$ takové, že $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, existuje. Je-li vektorový prostor V netriviální, potom můžeme zvolit nenulový vektor $\varepsilon \in V$ a opět píšeme $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon)_{i=1}^m$. V případě, že $m = 0$, však platí $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{o}$, třebaže vektor ε je nenulový.

Povšimněme si, že stejný znak „$\boldsymbol{o}$“ používáme ve dvou různých významech: jednak k označení počátku prostoru F^m a jednak k označení počátku prostoru V^m; v obou případech navíc píšeme stejně $\boldsymbol{o} = (0)_{i=1}^m$. Proto, nevyplývá-li z kontextu, ve kterém z těchto dvou možných významů je znak „$\boldsymbol{o}$“ použit, musíme jeho význam objasnit uvedením vysvětlující poznámky.

1.58. Nyní popíšeme některá lineární zobrazení, jež je možné odvodit ze sloupců prostorů F^m, V^m a $(W^\#)^m$. Při tom použijeme definici 1.53.

1.59. Definice. Lineární zobrazení odvozená ze sloupců prostorů F^m, V^m a $(W^\#)^m$, doplnění k symbolu „ι“. Nechť W je vektorový prostor nad tělesem F. Ať m je nenulové přirozené číslo. Zvolme libovolný sloupec lineárních forem $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \in \in (W^\#)^m$ (používáme značení podle definice 1.52, srov. zápis 1.52.(1)). Máme tedy m lineárních forem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, totiž jednotlivé složky sloupce A, přičemž každá z těchto forem je lineární zobrazení definované na prostoru W a jdoucí do aditivní grupy tělesa F. Takže můžeme sestavit i součin $\prod_{i=1}^m \alpha_i = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ (značení podle definice 1.53, srov. zápis 1.53.(2)) těchto lineárních forem. Toto zobrazení označíme také znakem A. Máme tedy

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} : W \to F^m \qquad \text{a} \qquad Ax = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_m(x) \end{pmatrix}$$

pro každé $x \in W$. Poslední rovnici lze napsat úsporněji: $Ax = (\alpha_i(x))_{i=1}^m$ pro $x \in W$. Poznamenejme, že sloupec lineárních forem $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \in (W^\#)^m$ a lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ jsou – alespoň formálně – dvě zcela odlišné věci, přestože pro obojí používáme stejné označení, totiž $A = (\alpha_i)_{i=1}^m$. Na druhou stranu je zřejmé, že mezi prostorem všech sloupců $(W^\#)^m$ (tj. $(W_F^\#)^m$, protože $W^\# = W_F^\#$ dle definice 1.38) a prostorem všech lineárních zobrazení zavedených na W a jdoucích do F^m (podle definice 1.38 jde o prostor $W_{F^m}^\#$) existuje přirozený a vzájemně jednoznačný vztah. (V definici 1.38 jsme uvedli, že prostor $W_V^\#$, kde V je další vektorový prostor nad tělesem F, je v obecnosti pouze komutativní grupa. Avšak díky právě naznačenému vztahu můžeme na prostoru $W_{F^m}^\#$ zavést dokonce strukturu pravého vektorového prostoru nad tělesem F. K této úvaze se vrátíme v poznámce 1.74.d níže.) Následně, s trochou „licence", je možné sloupec lineárních forem $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \in (W^\#)^m$ a lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \in W^\#_{F^m}$ (tedy $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$) vzájemně ztotožnit.

Nechť nyní $m = 0$. Pak $(W^\#)^m$ je triviální pravý vektorový prostor obsahující pouze svůj počátek. Sloupec $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \in (W^\#)^m$ je tedy právě tento počátek. Ale prostor F^m je také triviální, takže prostor $W^\#_{F^m}$ všech zobrazení definovaných na vektorovém prostoru W a jdoucích do prostoru F^m obsahuje pouze nulové lineární zobrazení. To znamená, že sloupec $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \in (W^\#)^m$ a zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \in W^\#_{F^m}$ (neboli $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$) je možné ztotožnit i tehdy, když $m = 0$. (Nemůžeme avšak, pokud $m = 0$, říkat, že zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m$ je součinem lineárních forem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ podle definice 1.53. Číslo m by muselo být nenulové.)

Ať m je opět nenulové přirozené číslo a F je těleso. Zvolme libovolný sloupcový vektor $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$. Tím máme i jednotlivé skaláry $b_1, \dots, b_m \in F$, totiž jednotlivé složky daného sloupce $\boldsymbol{b}$. Podle definice 1.39 je s každou z těchto složek asociováno jisté levé lineární zobrazení $\iota b_i : F \to F$, což je pravá homotetie aditivní grupy tělesa F (která, dle definic 1.5 a 1.8, je levý vektorový prostor nad tělesem F) určená vektorem b_i pro $i = 1, \dots, m$. A podle definice 1.53 je možné sestavit i součin $(\iota b_i)_{i=1}^m : F \to F^m$ těchto lineárních zobrazení. Pokud stále $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m$, pak uvedené zobrazení $(\iota b_i)_{i=1}^m$ budeme značit také $\iota\boldsymbol{b}$. Klademe tedy $\iota\boldsymbol{b} = (\iota b_i)_{i=1}^m$. Máme

$$\iota\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \iota b_1 \\ \vdots \\ \iota b_m \end{pmatrix} : F \to F^m \qquad \text{a} \qquad \iota\boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} \iota b_1 \\ \vdots \\ \iota b_m \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} \iota b_1(t) \\ \vdots \\ \iota b_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t b_1 \\ \vdots \\ t b_m \end{pmatrix}$$

pro každé $t \in F$. Poslední rovnost lze zapsat i úspornějším způsobem: $\iota\boldsymbol{b}(t) = (t b_i)_{i=1}^m$ pro $t \in F$.

Jestliže $m = 0$, potom F^m je triviální prostor a $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$ je jeho počátek. Takže zobrazení $\iota\boldsymbol{b} = (\iota b_i)_{i=1}^m : F \to F^m$ je nulové lineární zobrazení, které každému skaláru $t \in F$ přiřadí počátek prostoru F^m. (Pokud $m = 0$, zobrazení $\iota\boldsymbol{b} = (\iota b_i)_{i=1}^m$ už není součinem zobrazení $\iota b_1, \dots, b_m$ podle definice 1.53.)

Nakonec m budiž nenulové přirozené číslo a ať V je vektorový prostor nad tělesem F. Zvolme libovolný sloupec vektorů $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$. Tím je dáno rovněž m vektorů $u_1, \dots, u_m \in V$, což jsou složky zvoleného sloupce $\boldsymbol{u}$. Podle definice 1.39 je s každou z těchto složek asociováno určité lineární zobrazení $\iota u_i : F \to V$, totiž pravá V-homotetie vektorového prostoru V určená vektorem u_i pro $i = 1, \dots, m$. Následně tato lineární zobrazení můžeme direktně sečíst podle definice 1.53 a sestavit lineární zobrazení $((\iota u_i)_{i=1}^m)^T : F^m \to V$. Jestliže zvolený sloupec byl $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m$, pak toto lineární zobrazení značíme také $\iota\boldsymbol{u}^T$. Klademe tedy $\iota\boldsymbol{u}^T = ((\iota u_i)_{i=1}^m)^T$ a platí

$$\iota\boldsymbol{u}^T = \begin{pmatrix} \iota u_1 & \cdots & \iota u_m \end{pmatrix} : F^m \to V.$$

Pro každé $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$ dále platí

$$\iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \iota u_1 & \cdots & \iota u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \iota u_1(b_1) + \cdots + \iota u_m(b_m) = b_1 u_1 + \cdots + b_m u_m\,, \quad (1)$$

přičemž sčítání vektorů $b_1 u_1, \dots, b_m u_m$ probíhá ve vektorovém prostoru V.

Jestliže $m = 0$, potom F^m i V^m jsou triviální vektorové prostory. Následně $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$ je počátek vektorového prostoru V^m a $\iota\boldsymbol{u}^T = ((\iota u_i)_{i=1}^m)^T : F^m \to V$ je nulové lineární zobrazení, které (každému i jedinému) počátku $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m$ prostoru F^m přiřadí počátek vektorového prostoru V. To znamená, že výsledkem prázdného součtu na pravé straně rovnice (1) je nula (tj. nulový vektor) prostoru V. (Nejde však o direktní součet podle definice 1.53.)

1.60. Poznámka. Nechť W a V jsou vektorové prostory nad tělesem F. Ať m je nenulové přirozené číslo a ať je dáno nějaké lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$, které vzniklo součinem lineárních forem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ definovaných na vektorovém prostoru W. Dále mějme sloupec vektorů $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$. Potom lineární zobrazení $A: W \to F^m$ a $\iota\boldsymbol{u}^T: F^m \to V$ můžeme složit. Výsledné zobrazení označíme $\iota\boldsymbol{u}^T A$, máme $\iota\boldsymbol{u}^T A: W \to V$ (jde o prvek prostoru $W_V^{\#}$) a platí

$$\iota\boldsymbol{u}^T A = \begin{pmatrix} \iota u_1 & \cdots & \iota u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \iota u_1 \alpha_1 + \cdots + \iota u_m \alpha_m \,. \tag{1}$$

Jednotlivá zobrazení $\iota u_1 \alpha_1, \dots, \iota u_m \alpha_m$, dle poznámky 1.40, jsou prvky prostoru $W_V^{\#}$, a v tomto prostoru je také sčítáme.

Nyní se zabývejme případem, kdy $m = 0$. Jestliže $m = 0$, potom lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ a $\iota\boldsymbol{u}^T = ((\iota u_i)_{i=1}^m)^T : F^m \to V$ jsou nulová a jejich složením je nulové lineární zobrazení $o: W \to V$, které každému vektoru $x \in W$ přiřadí počátek vektorového prostoru V. Výsledkem prázdného součtu na pravé straně rovnice (1) je tedy zmíněné nulové zobrazení $o: W \to V$, které je také prvkem prostoru $W_V^{\#}$.

Prvek vektorového prostoru V, který je libovolnému vektoru $x \in W$ zobrazením $\iota\boldsymbol{u}^T A$ přiřazen, označíme $\iota\boldsymbol{u}^T Ax$. Zřejmě platí $\iota\boldsymbol{u}^T Ax = \big(\alpha_1(x)\big)u_1 + \cdots + \big(\alpha_m(x)\big)u_m$. Jestliže je $m = 0$, potom uvedený součet je prázdný a jeho výsledkem je nulový vektor prostoru V.

1.61. Úvaha. Použití součinu a direktního součtu při konstrukci dalších lineárních zobrazení. Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice reálných čísel typu $m \times n$, kde m a n jsou nenulová přirozená čísla. Potom, jak je všeobecně známo [70: kapitola 5], na tuto matici můžeme současně nahlížet jako na lineární zobrazení, které každé matici reálných čísel $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, která je typu $n \times 1$, přiřadí matici $\boldsymbol{Ax} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ typu $m \times 1$, která je jejich součinem. (Pro definici matice viz [78: definice IV.3.4], srov. definici matice zobrazení v [70: kapitola 5]. Definici součinu matic lze nalézt v [70: kapitola 5] nebo v [78: bod IV.3.4(vi)].) V několika předcházejících definicích jsme se ostatně těmito myšlenkami částečně inspirovali – např. v definici 1.53 jsme lineární zobrazení A_j uspořádávali do sloupce $(A_j)_{j \in J}$ a lineární zobrazení B_j jsme uspořádávali do řádku $(B_j)_{j \in J}^T$, kde index j patří do indexové množiny J. Naskýtá se otázka, zda lineární zobrazení je možné uspořádávat obecně do „obdélníkové tabulky“ (matice). Uvedenou myšlenku v této úvaze 1.61 rozvineme v maximální možné obecnosti.

Mějme dva soubory W a V vektorových prostorů nad jedním společným tělesem F. To znamená, že jsou dány dvě neprázdné indexové množiny J a I, dále že pro každý index $j \in J$ máme právě jeden vektorový prostor W_j nad tělesem F a že rovněž pro každé $i \in I$ máme právě jeden vektorový prostor V_i nad tělesem F. Dále ať pro každé dva indexy $i \in I$ a $j \in J$ je dáno nějaké lineární zobrazení $A_{ij}: W_j \to V_i$. (Máme tedy soubor A lineárních zobrazení, který je definován na kartézském součinu $I \times J$.) Daná zobrazení A_{ij} bychom „chtěli uspořádat do matice“, abychom získali nové lineární zobrazení. Toto nové lineární zobrazení by mělo být zavedeno na součinu $\prod_{j \in J} W_j$ a mělo by jít do součinu $\prod_{i \in I} V_i$. To znamená, že toto nové zobrazení bude sestaveno z mnoha „řádků“. Pro každé $i \in I$ bude platit, že i-tý řádek bude definován na $\prod_{j \in J} W_j$ a půjde do vektorového prostoru V_i. Zmíněnou „matici“ (tj. konstruované nové lineární zobrazení) pak získáme jako součin těchto jednodušších lineárních zobrazení (tj. „řádků“).

Zvolme index $i \in I$ nějakého „řádku“ pevně. Chtěli bychom, aby způsob, jakým toto jednodušší zobrazení („řádek“) zavedeme, připomínal násobení matic. To znamená, že každému sloupci $(x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} W_j$ (značení i terminologie podle definice 1.52) má být přiřazen vektor $\sum_{j \in J} A_{ij} x_j \in V_i$. Naznačený součet se odehrává ve vektorovém prostoru V_i. Avšak má-li být uvedený součet dobře definován, je nutné požadovat, aby obsahoval jen konečný počet nenulových členů. Musíme tedy předpokládat, že pro dané $i \in I$ platí, že zobrazení $A_{ij}: W_j \to V_i$ jsou nenulová jen pro konečně mnoho indexů $j \in J$. Jinými slovy: pro každé $i \in I$ musí být dána konečná podmnožina J'_i množiny J a pro každé $i \in I$ a $j \in J \setminus J'_i$ musí platit, že zobrazení A_{ij} je nulové.

(Alternativně bychom mohli postupovat tak, že nové lineární zobrazení nebudeme definovat na součinu $\prod_{j\in J} W_j$, ale jen na direktním součtu $\coprod_{j\in J} W_j$. Tento přístup by se ale zanedlouho ukázal jako nevyhovující. Nové zobrazení opravdu chceme definovat na součinu $\prod_{j\in J} W_j$. Pro každé $i \in I$ tedy musíme pracovat s konečnou podmnožinou $J'_i \subseteq J$.)

Je-li $i \in I$ zvoleno pevně, pak z lineárních zobrazení A_{ij}, kde $j \in J'_i$, můžeme sestavit jejich direktní součet $\coprod_{j\in J'_i} A_{ij}: \coprod_{j\in J'_i} W_j \to V_i$. Ovšem díky tomu, že množina J'_i je konečná, platí $\coprod_{j\in J'_i} W_j = \prod_{j\in J'_i} W_j$. My ale chceme mít zobrazení, které bude definováno na celém $\prod_{j\in J} W_j$. Proto pro $j \in J'_i$ uvažujme přirozené projekce $p_j: \prod_{j'\in J} W_{j'} \to W_j$ a sestavme jejich součin $\prod_{j\in J'_i} p_j: \prod_{j'\in J} W_{j'} \to \prod_{j\in J'_i} W_j$. Vidíme, že zobrazení $\prod_{j\in J'_i} p_j$ a $\coprod_{j\in J'_i} A_{ij}$ je možné složit. Tím dostáváme zobrazení $\big((\coprod_{j\in J'_i} A_{ij}) \circ (\prod_{j\in J'_i} p_j)\big): \prod_{j\in J} W_j \to V_i$. Nyní již stačí jen sestavit součin těchto zobrazení, čímž dostaneme zobrazení

$$\prod_{i\in I}\Bigg(\Big(\coprod_{j\in J'_i} A_{ij}\Big) \circ \Big(\prod_{j\in J'_i} p_j\Big)\Bigg): \prod_{j\in J} W_j \to \prod_{i\in I} V_i\,. \tag{1}$$

Tímto jsme dosáhli vytčeného cíle: ze zadaných zobrazení $A_{ij}: W_j \to V_i$, kde $i \in I$ a $j \in J'_i$, se nám podařilo sestavit zobrazení definované na celém součinu $\prod_{j\in J} W_j$ a jdoucí do součinu $\prod_{i\in I} V_i$. Pomocí jen trochu jiného značení (zavedeného definicí 1.53, přičemž znak „$\circ$“ tentokrát vynecháme) můžeme uvedené zobrazení zapsat také následovně:

$$\big((A_{ij})^T_{j\in J'_i}\,(p_j)_{j\in J'_i}\big)_{i\in I}: \prod_{j\in J} W_j \to \prod_{i\in I} V_i\,. \tag{2}$$

Zvolme pevně nějaký index $i \in I$ a zabývejme se ještě otázkou, proč jsme potřebovali pracovat s přirozenými projekcemi $p_j: \prod_{j'\in J} W_{j'} \to W_j$ pro $j \in J'_i$. Bylo to proto, že definice 1.53 zavede koprodukt $\coprod_{j\in J} A_{ij}$ lineárních zobrazení A_{ij}, kde $j \in J$, jen na direktním součtu $\coprod_{j\in J} W_j$. Zmíněná definice 1.53 nepamatuje na případ, že by jen konečně mnoho zobrazení A_{ij}, kde $j \in J$, bylo nenulových, takže by koprodukt $\coprod_{j\in J} A_{ij}$ bylo možné zavést na celém $\prod_{j\in J} W_j$ předpisem $\big(\coprod_{j\in J} A_{ij}\big)(x_j)_{j\in J} = \sum_{j\in J} A_{ij}x_j$. Poznamenejme, že uvedený součet se odehrává ve vektorovém prostoru V_i, obsahuje jen konečný počet nenulových členů (protože zobrazení $A_{ij}: W_j \to V_i$ jsou nulová pro $j \in J \setminus J'_i$, kde J'_i je konečná podmnožina množiny J) a jen těchto konečně mnoho nenulových členů je třeba sečíst. Pak bychom na zobrazení (1) resp. (2) skutečně mohli nahlížet tak, že vzniklo sestavením lineárních zobrazení A_{ij} do tabulky („matice“), jejíž řádky jsou indexovány množinou I a sloupce jsou indexovány množinou J. Avšak díky omezením v definici 1.53 toto není možné. Museli jsme si pomoci použitím přirozených projekcí p_j.

1.62. Předcházející úvaha 1.61 byla dosti obecná. V následující definici 1.63 se zaměříme na případ, kdy indexová množina J z úvahy 1.61 je konečná. Vlastně ani nepůjde o definici v pravém slova smyslu, protože žádný nový pojem nezavedeme. Cílem je pouze zavést vhodné označení pro pojem již existující, sestrojený konstrukcí pomocí pojmů definovaných dříve.

1.63. Definice. Použití součinu a direktního součtu při konstrukci dalších lineárních zobrazení. Nechť n je nenulové přirozené číslo a ať I je neprázdná množina indexů. Nechť $W_1, \dots, W_n$ a V_i, kde $i \in I$, jsou vektorové prostory nad tělesem F. Pro $i \in I$ a pro $j = 1, \dots, n$ mějme dána lineární zobrazení $A_{ij}\colon W_j \to V_i$.

Potom můžeme sestavit direktní součet či součin $\coprod_{j=1}^n W_j = \prod_{j=1}^n W_j$ vektorových prostorů $W_1, \dots, W_n$. K tomu, jestliže $i \in I$ je zvoleno pevně, můžeme sestavit také direktní součet $\coprod_{j=1}^n A_{ij}\colon \prod_{j=1}^n W_j \to V_i$. Nyní je možné sestavit součin těchto zobrazení. Dostáváme tak zobrazení

$$\prod_{i\in I}\Bigl(\coprod_{j=1}^{n} A_{ij}\Bigr)\colon \prod_{j=1}^{n} W_j \to \prod_{i\in I} V_i\,. \tag{1}$$

Lze však postupovat i jinak. Můžeme sestavit součin $\prod_{i\in I} V_i$ vektorových prostorů V_i, kde $i \in I$. A když $j = 1, \dots, n$ je zvoleno pevně, můžeme sestavit také součin $\prod_{i\in I} A_{ij}\colon W_j \to \prod_{i\in I} V_i$ lineárních zobrazení A_{ij}, kde $i \in I$. Nakonec sestavíme direktní součet těchto zobrazení, čímž dostaneme zobrazení

$$\coprod_{j=1}^{n}\Bigl(\prod_{i\in I} A_{ij}\Bigr)\colon \prod_{j=1}^{n} W_j \to \prod_{i\in I} V_i\,. \tag{2}$$

Užitím definic 1.52 a 1.53 snadno nahlédneme, že zobrazení (1) a (2) jsou totožná, tedy že platí rovnost

$$\prod_{i\in I}\Bigl(\coprod_{j=1}^{n} A_{ij}\Bigr) = \coprod_{j=1}^{n}\Bigl(\prod_{i\in I} A_{ij}\Bigr). \tag{3}$$

Díky uvedené rovnosti (3) a pomocí značení zavedeného v definici 1.53 můžeme zobrazení (1) a (2) zapsat také kterýmkoliv z následujících způsobů, jež jsou všechny ekvivalentní, a proto mezi nimi píšeme znamení rovnosti „=“:

$$\begin{aligned}\bigl(((A_{ij})_{j=1}^n)^T\bigr)_{i\in I} &= \bigl((\,A_{i1} \quad \cdots \quad A_{in}\,)\bigr)_{i\in I} = \\ &= \bigl(\,(A_{i1})_{i\in I} \quad \cdots \quad (A_{in})_{i\in I}\,\bigr) = \bigl(((A_{ij})_{i\in I})_{j=1}^n\bigr)^T.\end{aligned} \tag{4}$$

To nás motivuje k tomu, abychom pro uvedené zobrazení, které je v rovnici (4) zapsáno čtyřmi různými způsoby, zavedli jedno „společné“ označení.

Máme-li dána lineární zobrazení $A_{ij}\colon W_j \to V_i$, kde W_j a V_i jsou vektorové prostory nad tělesem F, přičemž $j = 1, \dots, n$ a $i \in I$, pak pro zobrazení $\prod_{i\in I}\bigl(\coprod_{j=1}^n A_{ij}\bigr) = \coprod_{j=1}^n\bigl(\prod_{i\in I} A_{ij}\bigr)\colon \prod_{j=1}^n W_j \to \prod_{i\in I} V_i$ budeme používat také následující „jednotné“ označení:

$$(\,A_{i1} \quad \cdots \quad A_{in}\,)_{i\in I}\,. \tag{5}$$

To znamená, že mezi rovnice (3), (4) a označení (5) můžeme doplnit další znaménka rovnosti „=“.

Přejděme nyní k případu, kdy množina indexů I je neprázdná a konečná. Nechť m je nenulové přirozené číslo. Předpokládejme, že $I = \{1, \dots, m\}$. Pak zobrazení (5), tedy zobrazení $\prod_{i=1}^m\bigl(\coprod_{j=1}^n A_{ij}\bigr) = \coprod_{j=1}^n\bigl(\prod_{i=1}^m A_{ij}\bigr)\colon \prod_{j=1}^n W_j \to \prod_{i=1}^m V_i$, můžeme zapsat také následovně:

$$(\,A_{i1} \quad \cdots \quad A_{in}\,)_{i=1}^m\,. \tag{6}$$

Případně můžeme použít velice názorný zápis

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Oba zápisy (7) a (6) vyjadřují jedno a totéž zobrazení (5), přičemž nyní máme $I = \{1, \dots, m\}$. Proto mezi všechny tyto zápisy můžeme položit znaménko rovnosti „=“.

1.64. Zobrazení připomínající diagonální matici. Několikrát se setkáme také s následující situací, kterou nyní popíšeme. Nechť m je přirozené číslo. Pro jednoduchost předpokládejme, že číslo m je nenulové. Budiž dáno lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \colon W \to F^m$, kde W je vektorový prostor nad tělesem F. Uvedené lineární zobrazení vzniklo jako součin lineárních forem $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in W^\#$. Někdy se může stát, že dané zobrazení A nám „nevyhovuje" v tom smyslu, že pocítíme potřebu jednotlivé složky zobrazení A „přeškálovat". Chceme tedy pracovat se zobrazením $(\iota\lambda_i\alpha_i)_{i=1}^m \colon W \to F^m$, kde $\lambda_i \in F$ jsou vhodné skaláry (resp. „škálovací koeficienty") pro $i = 1, \dots, m$. Připomeňme, že zobrazení $\iota\lambda_i \colon F \to F$ je pravá homotetie aditivní grupy tělesa F (viz definici 1.39) a že $\iota\lambda_i\alpha_i$ označuje zobrazení vzniklé složením zobrazení α_i a $\iota\lambda_i$ pro $i = 1, \dots, m$, viz poznámku 1.40.

Je zřejmé, že zobrazení $(\iota\lambda_i\alpha_i)_{i=1}^m$ vzniklo složením zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \colon W \to F^m$ a zobrazení

$$\begin{pmatrix} \iota\lambda_1 & \iota 0 & \cdots & \iota 0 \\ \iota 0 & \iota\lambda_2 & \cdots & \iota 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \iota 0 & \iota 0 & \cdots & \iota\lambda_m \end{pmatrix} \colon F^m \to F^m. \tag{1}$$

Znak 0 zde označuje nulu tělesa F. Můžeme proto napsat rovnici

$$\begin{pmatrix} \iota\lambda_1\alpha_1 \\ \vdots \\ \iota\lambda_m\alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iota\lambda_1 & \cdots & \iota 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iota 0 & \cdots & \iota\lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \tag{2}$$

na jejíž pravé straně stojí zobrazení vzniklé složením zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \colon W \to F^m$ a zobrazení (1).

Poznamenejme, že zobrazení (1) je zapsáno v souladu s definicí 1.63 – srov. zápis 1.63.(7). Níže v definici 1.65 pro zobrazení (1) zavedeme zvláštní označení.

1.65. Definice. Zobrazení $\iota I_{\boldsymbol{\lambda}}$. Nechť m je přirozené číslo (můžeme vzít také $m = 0$). Mějme těleso F a zvolme libovolný sloupcový vektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \in F^m$. Rozlišíme dva případy.

Předpokládejme nejprve, že přirozené číslo m je nenulové. Pro $i, j = 1, \dots, m$ nyní zavedeme m^2 pomocných (levých) lineárních zobrazení $A_{ij} \colon F \to F$. (S aditivní grupou tělesa F zde pracujeme jako s levým vektorovým prostorem.) Položme $A_{ii} = \iota\lambda_i$ pro $i = 1, \dots, m$. K tomu položme $A_{ij} = \iota 0$ pro $i, j = 1, \dots, m$, přičemž $i \neq j$ a znak 0 označuje nulu tělesa F. Pak pro zobrazení $\prod_{i=1}^m \big(\coprod_{j=1}^n A_{ij}\big) = \coprod_{j=1}^n \big(\prod_{i=1}^m A_{ij}\big)$ použijeme označení $\iota I_{\boldsymbol{\lambda}}$. Klademe tedy $\iota I_{\boldsymbol{\lambda}} = \prod_{i=1}^m \big(\coprod_{j=1}^n A_{ij}\big) = \coprod_{j=1}^n \big(\prod_{i=1}^m A_{ij}\big)$. Snadno nahlédneme, že platí rovnost

$$\iota I_{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{pmatrix} \iota\lambda_1 & \cdots & \iota 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iota 0 & \cdots & \iota\lambda_m \end{pmatrix}, \tag{1}$$

přičemž pro zápis zobrazení na pravé straně rovnice (1) jsme použili pravidla zavedená definicí 1.63 – srov. zápis 1.63.(7). Snad již jen pro úplnost dodejme, že právě zavedené zobrazení $\iota I_{\boldsymbol{\lambda}}$ je definováno na celém (levém) vektorovém prostoru F^m, jde do (levého) vektorového prostoru F^m (neboli $\iota I_{\boldsymbol{\lambda}} \colon F^m \to F^m$) a že zavedené $\iota I_{\boldsymbol{\lambda}}$ je levé lineární zobrazení.

(Víme, že aditivní grupa tělesa F je levý i pravý vektorový prostor, viz definice 1.5 a 1.8. Konstrukci prostoru F^m, viz definici 1.56, provedeme tak, aby tento prostor vyšel jako levý vektorový prostor nad tělesem F.)

Nyní předpokládejme, že platí $m = 0$. Pak F^m je triviální vektorový prostor a $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \in F^m$ je nulový vektor (tj. počátek prostoru F^m). Je-li $m = 0$, pak

$\iota I_{\boldsymbol{\lambda}}$ označuje (jediné) nulové lineární zobrazení na prostoru F^m, tedy $\iota I_{\boldsymbol{\lambda}}\colon F^m \to F^m$. Jedinečnost tohoto zobrazení spočívá v tom, že na triviálním vektorovém prostoru F^m žádné jiné zobrazení neexistuje. Přestože $m = 0$, pro zobrazení $\iota I_{\boldsymbol{\lambda}}$ můžeme použít také následující zápis:

$$\begin{pmatrix} \iota\lambda_1 & \cdots & \iota 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iota 0 & \cdots & \iota\lambda_m \end{pmatrix}. \tag{2}$$

To znamená, že mezi právě popsané nulové lineární zobrazení $\iota I_{\boldsymbol{\lambda}}$ a zobrazení vyjádřené zápisem (2) můžeme položit znamení rovnosti „=“. Poznamenejme ale, že zápis (2) není zápisem podle definice 1.63, protože v definici 1.63 se požaduje, aby přirozená čísla m a n (značení podle definice 1.63) byla nenulová. Význam zápisu (2) pro případ $m = 0$ je zaveden výhradně touto definicí 1.65.

1.66. Poznámka. Značení zavedené v předcházejících definicích 1.63 a 1.65 je záměrně voleno tak, aby připomínalo práci s maticemi – viz zápisy 1.63.(7) a 1.65.(1) v uvedených definicích a viz též rovnici 1.64.(2) v odstavci 1.64.

Zopakujme však (jak jsme uvedli již v poznámce 1.54), že s maticemi zde nepracujeme. Pracujeme pouze s lineárními zobrazeními, přičemž některá lineární zobrazení sestrojujeme jako součin nebo direktní součet jiných lineárních zobrazení. Operace součinu a direktního součtu lineárních zobrazení byly popsány v definici 1.53.

1.67. Ve výše uvedené definici 1.52 jsme zavedli pojem (vnějšího) direktního součtu vektorových prostorů. V následující definici 1.68 zavedeme „jakoby obdobný“ pojem (vnitřního) direktního součtu vektorových podprostorů. Vztah mezi oběma pojmy vysvětlíme v níže uvedeném tvrzení 1.70. Jednoduchému tvrzení 1.70 bude předcházet definice 1.69, ve které zavedeme veskrze užitečný pojem izomorfismu vektorových prostorů.

1.68. Definice. Direktní součet podprostorů. Nechť W je (levý nebo pravý) vektorový prostor nad tělesem F. Dále mějme indexovou množinu J (smíme vzít i $J = \emptyset$) a pro každý index $j \in J$ budiž dán právě jeden podprostor W'_j vektorového prostoru W. (To znamená, že na indexové množině J je definováno jisté zobrazení $\tilde{W}'$, které každému indexu $j \in J$ přiřadí vektorový podprostor W'_j. O tomto zobrazení pak hovoříme jako o *souboru vektorových podprostorů*.) K tomu ať W' je další vektorový podprostor vektorového prostoru W. Vektorový podprostor W' je *(vnitřním) direktním součtem vektorových podprostorů* W'_j, kde $j \in J$, (resp. *(vnitřním) direktním součtem souboru* $\tilde{W}'$ *vektorových podprostorů*) právě tehdy, když ke každému $u \in W'$ existuje právě jedno přirozené číslo n (může být i $n = 0$), existují jednoznačně určené a navzájem různé indexy $j_1, \ldots, j_n \in J$ a existují jednoznačně určené nenulové vektory $u_1 \in W'_{j_1}, \ldots, u_n \in W'_{j_n}$ tak, že $u = u_1 + \cdots + u_n$. (Jestliže je $n = 0$, potom uvedený součet je prázdný a jeho výsledkem je nulový vektor prostoru W.) Skutečnost, že podprostor W' je (vnitřním) direktním součtem podprostorů W'_j, kde $j \in J$, zapisujeme $W' = \bigoplus_{j\in J} W'_j$. Jestliže m je nenulové přirozené číslo a platí $J = \{1, \ldots, m\}$, potom skutečnost, že W' je (vnitřním) direktním součtem podprostorů W'_j, kde $j \in J = \{1, \ldots, m\}$, zapisujeme také $W' = \bigoplus_{i=1}^m W'_i$. Máme-li dán konečný soubor vektorových podprostorů $W'_1, \ldots, W'_m$ vektorového prostoru W a podprostor W' je jejich direktním součtem, píšeme také $W' = W'_1 \oplus \cdots \oplus W'_m$.

1.69. Definice. Izomorfismus vektorových prostorů. Nechť W_1 a W_2 jsou dva (oba levé nebo oba pravé) vektorové prostory nad tělesem F. Prostory W_1 a W_2 jsou *izomorfní* právě tehdy, když existuje (po řadě levé nebo pravé) lineární zobrazení $f\colon W_1 \to W_2$, které je navíc bijektivní (tj. vzájemně jednoznačné, tj. prosté a *na*).

Uvedené lineární zobrazení f, které dosvědčuje, že vektorové prostory W_1 a W_2 jsou izomorfní, nazýváme *izomorfismem* těchto prostorů W_1 a W_2.

Poměrně lehce ověříme, že když W_1 a W_2 jsou izomorfní, potom W_2 a W_1 jsou izomorfní. (Jestliže $f\colon W_1 \to W_2$ je izomorfismus vektorových prostorů W_1 a W_2, potom inverzní zobrazení $f^{-1}\colon W_2 \to W_1$ je izomorfismus prostorů W_2 a W_1. Bijektivita inverze f^{-1} je zřejmá. Zbývá ověřit, že zobrazení f^{-1} je také lineární. Nechť jsou dány libovolné dva vektory $\bar{u}, \bar{v} \in W_2$ a je dán libovolný skalár $\lambda \in F$. Položme $u = f^{-1}(\bar{u})$ a $v = f^{-1}(\bar{v})$. Máme dokázat, že $f^{-1}(\bar{u} + \bar{v}) = f^{-1}(\bar{u}) + f^{-1}(\bar{v})$. Víme však, že $f(u) + f(v) = f(u + v)$. Odtud $f^{-1}(\bar{u} + \bar{v}) = f^{-1}\big(f(u) + f(v)\big) = f^{-1}\big(f(u + v)\big) = u + v = f^{-1}(\bar{u}) + f^{-1}(\bar{v})$. Obdobně máme dokázat, že $f^{-1}(\lambda\bar{u}) = \lambda f^{-1}(\bar{u})$ – předpokládejme například, že prostory W_1 a W_2 jsou levé. Víme však, že $\lambda f(u) = f(\lambda u)$. A odtud $f^{-1}(\lambda\bar{u}) = f^{-1}\big(\lambda f(u)\big) = f^{-1}\big(f(\lambda u)\big) = \lambda u = \lambda f^{-1}(\bar{u})$.)

Dále je triviální nahlédnout, že když W_1 a W_2 jsou izomorfní a W_2 a W_3 jsou izomorfní (kde W_3 je další (po řadě levý nebo pravý) vektorový prostor nad tělesem F), potom W_1 a W_3 jsou izomorfní. (Izomorfismy $f\colon W_1 \to W_2$ a $g\colon W_2 \to W_3$ stačí složit.)

Konečně je triviální nahlédnout, že každý vektorový prostor W_1 nad tělesem F je izomorfní sám se sebou. (Stačí uvažovat např. identické zobrazení $I\colon W_1 \to W_1$, kde $I(x) = x$ pro každé $x \in W_1$.)

1.70. Tvrzení. *Nechť V je (levý) vektorový prostor nad tělesem F a nechť B je libovolná jeho báze. Pak máme následující dvě tvrzení:*

I. *Platí*

$$V = \bigoplus_{v \in B} \{\, \lambda v\, ;\ \lambda \in F \,\}\,. \tag{1}$$

II. *Položíme-li*

$$\bar{V} = \coprod_{v \in B} F_v\,, \tag{2}$$

kde F_v je aditivní grupa tělesa F pro všechna $v \in B$, potom (levé) vektorové prostory V a $\bar{V}$ jsou izomorfní.

1.70.a. *Poznámka.* Obdobné (resp. obdobná) tvrzení platí i v případě, že vektorový prostor V je pravý; také důkaz se provede obdobně. V rovnici (1) je ovšem třeba vektor v násobit skalárem λ zprava.

Z definic 1.5 a 1.8 víme, že aditivní grupa tělesa F je levý i pravý vektorový prostor nad F. Na koproduktu (2), viz definici 1.52, zavádíme strukturu levého nebo pravého vektorového prostoru nad F, a to podle toho, zda V je po řadě levý nebo pravý vektorový prostor nad F. Jestliže báze B je prázdná, potom klademe $\coprod_{v \in B} F_v = \{0\}$, kde 0 je například nula tělesa F, takže (2) je triviální vektorový prostor, srov. definici 1.56.

1.70.b. *Důkaz.* I. Tvrzení (tj. vztah (1)) je přímým důsledkem definice báze a definice vnitřního direktního součtu (definice 1.25 a 1.68).

II. Platnost tvrzení je zřejmá, jestliže báze B je prázdná. Jestliže báze B je neprázdná, potom platnost tvrzení dokážeme tím, že sestrojíme izomorfismus $f\colon \bar{V} \to V$ (dle předpokladu např. levých) vektorových prostorů $\bar{V}$ a V. Připomeňme, že pro každé $v \in B$ máme také (levé) lineární zobrazení $\iota v\colon F \to V$, viz definici 1.39. Můžeme tedy sestrojit direktní součet těchto zobrazení $\coprod_{v \in B} \iota v\colon \coprod_{v \in B} F_v \to V$, viz definici 1.53. Tento direktní součet je hledaným zobrazením f. Položíme tedy

$$f = \coprod_{v \in B} \iota v\,. \tag{3}$$

Následně pro každý sloupec $(\bar{\lambda}_v)_{v \in B} \in \bar{V} = \coprod_{v \in B} F_v$ platí

$$f\big((\bar{\lambda}_v)_{v \in B}\big) = (\iota v)^T_{v \in B}\, (\bar{\lambda}_v)_{v \in B} = \sum_{v \in B} \iota v(\bar{\lambda}_v)\,. \tag{4}$$

(Připomeňme, že dle definice 1.53 je $(\iota v)^T_{v\in B}$ jen jiné označení koproduktu $\coprod_{v\in B}\iota v$. Poznamenejme, že $\iota v(\bar{\lambda}_v) = \lambda_v v$ pro $v \in B$, viz definici 1.39. V součtu na pravé straně uvedené rovnice (4) sčítáme jen konečně mnoho nenulových členů, podrobněji viz definici 1.53.) Je zřejmé, že zobrazení f má všechny potřebné vlastnosti: jakožto direktní součet lineárních zobrazení je lineární a z vlastností báze B vyplývá, že je také prosté a *na*. Zobrazení f je tedy hledaným izomorfismem vektorových prostorů $\bar{V}$ a V. □

1.71. Pomocí izomorfismu f, který jsme vztahem 1.70.(3) v důkazu 1.70.b právě zavedli, lze sestrojit další zobrazení. Tomu věnujeme celou následující poznámku 1.72. Zobrazení, která v následující poznámce 1.72 sestrojíme, jsme potřebovali již v důkazu tvrzení 1.44 a budeme je potřebovat ještě několikrát.

1.72. Poznámka. Nechť B je libovolná báze (levého) vektorového prostoru V nad tělesem F. Předpokládejme, že báze B je neprázdná a položme $\bar{V} = \coprod_{v\in B} F_v$, kde F_v je aditivní grupa tělesa F pro $v \in B$. Aditivní grupa tělesa F je levý i pravý vektorový prostor, ale na prostoru $\bar{V}$ zavedeme strukturu levého vektorového prostoru nad tělesem F. Spolu s koproduktem $\bar{V}$ máme také přirozené projekce $p_v\colon \bar{V} \to F$ pro $v \in B$, viz definici 1.52. Dle části II. naposledy uvedeného tvrzení 1.70 víme, že vektorové prostory $\bar{V}$ a V jsou izomorfní: v důkazu 1.70.b jsme mezi oběma prostory $\bar{V}$ a V zavedli izomorfismus $f\colon \bar{V} \to V$. Uvažujme jeho inverzi $f^{-1}\colon V \to \bar{V}$. Nyní je zřejmé, že uvedenou inverzi $f^{-1}\colon V \to \bar{V}$ a přirozené projekce $p_v\colon \bar{V} \to F$, kde $v \in B$, je možné složit. Výsledná zobrazení označme λ_v, klademe tedy $\lambda_v = p_v \circ f^{-1}$ pro $v \in B$. Protože jsme skládali lineární zobrazení, zobrazení $\lambda_v\colon V \to F$ jsou také lineární pro $v \in B$. Nyní můžeme sestrojit součin těchto zobrazení $\prod_{v\in B}\lambda_v\colon V \to \prod_{v\in B} F_v$. Připomeňme, že F_v je aditivní grupa tělesa F pro všechna $v \in B$. Nedá příliš mnoho práce nahlédnout, že

$$\prod_{v\in B}\lambda_v = \prod_{v\in B}(p_v \circ f^{-1}) = \Big(\prod_{v\in B} p_v\Big) \circ f^{-1}.$$

Jenomže zobrazení $\prod_{v\in B} p_v$ je zřejmě identita na prostoru $\prod_{v\in B} F_v$, tedy i na jeho podprostoru $\bar{V} = \coprod_{v\in B} F_v$, jenž je oborem hodnot zobrazení $f^{-1}\colon V \to \bar{V}$. Dostáváme tedy

$$f^{-1} = \prod_{v\in B}\lambda_v\,. \tag{1}$$

Tato rovnice (1) dává předpis pro zobrazení inverzní k zadanému zobrazení 1.70.(3), tedy $f = \coprod_{v\in B}\iota v$. Poznamenejme ovšem, že zobrazení λ_v, která stojí na pravé straně rovnice (1), jsme napřed zavedli právě s použitím inverze f^{-1}.

Složením obou zobrazení f a f^{-1} dostaneme samozřejmě identitu na prostoru V. Přesto však může být užitečné si toto složení rozepsat pro libovolné $u \in V$:

$$(f \circ f^{-1})(u) = (\iota v)^T_{v\in B}\,(\lambda_v)_{v\in B}\,(u) = \sum_{v\in B}\iota v\lambda_v(u)\,. \tag{2}$$

(Připomeňme, že $(\iota v)^T_{v\in B}$ a $(\lambda_v)_{v\in B}$ jsou jen jiná označení pro zobrazení $\coprod_{v\in B}\iota v$ a $\prod_{v\in B}\lambda_v$, viz definici 1.53, tedy zobrazení f a f^{-1} určená vztahy 1.70.(3) a (1). Poznamenejme, že $\iota v\lambda_v(u) = \big(\lambda_v(u)\big)v$ pro $v \in B$, viz poznámku 1.40. Dodejme, že součet na pravé straně rovnice (2) se odehrává ve vektorovém prostoru V a že sčítáme jen konečně mnoho nenulových členů. Jde o důsledek toho, že v bodě $u \in V$ vyhodnocujeme složené zobrazení $f \circ f^{-1}$, přičemž obor hodnot zobrazení f^{-1} je roven $\coprod_{v\in B} F_v$. Od nuly je proto různých jen konečně mnoho složek sloupce $(\lambda_v(u))_{v\in B}$.)

Jestliže báze B je prázdná, potom vektorový prostor V je triviální a žádná zobrazení λ_v, kde $v \in B$, nesestrojujeme.

1.73. Vraťme se k prostoru $W_V^{\#}$, viz definici 1.38, kde W a V jsou vektorové prostory nad tělesem F. Ve zmíněné definici 1.38 jsme uvedli, že strukturu (levého ani pravého) vektorového prostoru na prostoru $W_V^{\#}$ v obecném případě nezavádíme. V některých případech však strukturu (levého nebo pravého) vektorového prostoru na prostoru $W_V^{\#}$ můžeme přece jen zavést. Tomu se budeme věnovat v následujících poznámkách 1.74 a dále uvedené úvaze 1.75.

1.74. Poznámky. Problém možnosti zavedení struktury (levého nebo pravého) vektorového prostoru na prostoru $W_V^{\#}$. Nechť W a V jsou (levé) vektorové prostory nad tělesem F. Z definice 1.38 víme, že prostor $W_V^{\#}$ je komutativní grupa.

1.74.a. Předpokládejme na chvíli, že těleso F je komutativní. Potom na prostoru $W_V^{\#}$ lze velice přirozeně zavést (poznámka 1.15) i strukturu (levého) vektorového prostoru nad tělesem F. Na kartézském součinu $F \times W_V^{\#}$ totiž můžeme definovat zobrazení „$*$“ jdoucí do prostoru $W_V^{\#}$ tím, že pro každé $\lambda \in F$, pro každé $\gamma \in W_V^{\#}$ a pro každé $x \in W$ položíme

$$(\lambda * \gamma)(x) = \lambda * \big(\gamma(x)\big)\,, \tag{1}$$

kde znak „$*$“ na pravé straně této rovnice (1) označuje násobení skalárem příslušné k vektorovému prostoru V. Poměrně lehce se ověří, že zavedené zobrazení „$*$“ má všechny vlastnosti (levého) skalárního násobení. Je-li tedy těleso F komutativní, potom $W_V^{\#}$ je (levým) vektorovým prostorem nad tělesem F (vzhledem k právě zavedenému zobrazení „$*$“). Poznamenejme, že předpoklad komutativity tělesa F je zde podstatný. Jestliže těleso F není komutativní, potom zobrazení $\lambda * \gamma$ dané předpisem (1) pro každé $x \in W$ (pro vhodnou volbu $\lambda \in F$ a $\gamma \in W_V^{\#}$) nemusí být lineární.

1.74.b. Stále předpokládejme, že těleso F je komutativní. V definici 1.38 jsme zmínili, že prostor $W_F^{\#}$ je totožný s algebraickým duálem $W^{\#}$. K tomu z definice 1.24 víme, že algebraický duál $W^{\#}$ je pravým vektorovým prostorem nad tělesem F. Při letmém pohledu (vzhledem k předcházející poznámce 1.74.a) se tedy může zdát, že jsme dospěli k rozporu – duál $W^{\#}$ je jednak levým a jednak pravým vektorovým prostorem. Pro vysvětlení se však stačí odvolat na úvahu 1.9, kde jsme uvedli, že vektorové prostory nad komutativními tělesy svoji vlastnost „být levý vektorový prostor“ nebo „být pravý vektorový prostor“ ve své struktuře nemají „uloženu“. Je-li tedy těleso F komutativní, potom podle úvahy 1.9 na duálu $W^{\#}$ můžeme stejně dobře zavést i strukturu levého vektorového prostoru. Tím je zdánlivý rozpor vysvětlen.

1.74.c. Poznamenejme, možná překvapivě, že strukturu levého nebo pravého vektorového prostoru je možné na prostoru $W_V^{\#}$ zavést vždy – i tehdy, když těleso F není komutativní. To dokládají následující dvě poznámky 1.74.d a 1.74.e.

1.74.d. V definici 1.59 jsme naznačili, že na prostoru $W_{F^m}^{\#}$, tj. na prostoru $W_V^{\#}$, kde $V = F^m$ a m je přirozené číslo, lze snadno zavést strukturu pravého vektorového prostoru nad tělesem F. (Prostor $W_{F^m}^{\#}$ lze vlastně považovat za součin $(W^{\#})^m$, kde algebraický duál $W^{\#}$ je pravý vektorový prostor nad F.) Zcela obdobným způsobem je možné zavést strukturu pravého vektorového prostoru také na prostoru $W_V^{\#}$, jestliže $V = \coprod_{j\in J} F_j$, kde J je neprázdná indexová množina a F_j je aditivní grupa tělesa F pro $j \in J$. (Prostor $W_V^{\#}$ ztotožníme s koproduktem $\coprod_{j\in J} W^{\#}_j$, kde $W^{\#}_j$ je algebraický duál $W^{\#}$ pro $j \in J$. Pro možnost srovnání s následující poznámkou 1.74.e uveďme, že algebraický duál $W^{\#}$ splývá s prostorem $W_F^{\#}$.)

Nakonec, jestliže V je obecný (netriviální) vektorový prostor nad tělesem F, použijeme část II. tvrzení 1.70. Vektorový prostor V totiž dle tvrzení 1.32 má alespoň jednu bázi B. (Použili jsme axiom výběru resp. Zornovo lemma 1.31, které je s axiomem výběru ekvivalentní.) Z části II. tvrzení 1.70 pak vyplývá, že prostory V a $\bar{V} = \coprod_{v\in B} F_v$, kde F_v je aditivní grupa tělesa F pro $v \in B$, jsou izomorfní. Potom prostory $W_V^{\#}$ a $W_{\bar{V}}^{\#}$

můžeme ztotožnit, načež můžeme ztotožnit i prostory $W^{\#}_{\bar{V}}$ a $\coprod_{v\in B} W^{\#}{}_v$, kde $W^{\#}{}_v$ je algebraický duál $W^{\#}$ (splývající s prostorem $W^{\#}_F$) pro $v \in B$. Tímto způsobem můžeme strukturu pravého vektorového prostoru zavést i na obecném prostoru $W^{\#}_V$.

Záhy však zjistíme, že výsledná struktura pravého vektorového prostoru na obecném prostoru $W^{\#}_V$ je závislá na počáteční volbě báze B prostoru V, jestliže těleso F není komutativní. (Různé volby báze B mohou vést k různým strukturám.) Provedením příslušných výpočtů lze ale dokázat, že všechny tyto struktury jsou navzájem izomorfní. Jestliže těleso F naopak je komutativní, potom výsledná struktura pravého vektorového prostoru na prostoru $W^{\#}_V$ na počáteční volbě báze B nezávisí (všechny struktury se shodují) a výsledná struktura se (ve smyslu úvahy 1.9) dokonce „shoduje“ se strukturou levého vektorového prostoru, kterou jsme na prostoru $W^{\#}_V$ zavedli už výše uvedenou poznámkou 1.74.a.

Podrobné výpočty jsou značně rozsáhlé, proto je zde neuvádíme. Dodejme, že v této poznámce 1.74.d jsme dosud vylučovali případ, kdy prostor V je nulový. Je-li ale prostor V nulový, potom prostor $W^{\#}_V$ obsahuje jen nulové lineární zobrazení $o: W \to V$, načež na prostoru $W^{\#}_V$ snadno zavedeme strukturu (triviálního) pravého vektorového prostoru.

1.74.e. Na prostoru $W^{\#}_V$ lze zavést také strukturu levého vektorového prostoru nad tělesem F – přitom nepředpokládáme, že by těleso F mělo být komutativní. Inspirací je nám pravidlo 1.41.(3) z poznámky 1.41, tedy vztah $\iota u \iota \lambda = \iota(\lambda u)$, který platí pro všechna $\lambda \in F$ a všechna $u \in V$. Uvedený vztah totiž můžeme chápat jako definici levého skalárního násobení příslušného k prostoru $F^{\#}_V$: skaláru $\lambda \in F$ a zobrazení $\iota u \in F^{\#}_V$, kde $u \in V$, přiřadíme zobrazení $\iota(\lambda u) \in F^{\#}_V$. Tím jsme na prostoru $F^{\#}_V$ právě zavedli strukturu levého vektorového prostoru nad tělesem F.

(Povšimněme si, že zatímco v předcházející poznámce 1.74.d jsme vycházeli z prostoru $W^{\#}_F$, zde vycházíme z prostoru $F^{\#}_V$. Za pozornost dále stojí, že levý vektorový prostor $F^{\#}_V$ je izomorfní s prostorem V. Izomorfismem, který tuto skutečnost dosvědčí, je například zobrazení $f: V \to F^{\#}_V$ dané předpisem $f(u) = \iota u$ pro každé $u \in V$.)

Strukturu levého vektorového prostoru lze nyní snadno zavést i na prostoru $W^{\#}_V$, jestliže $W = \coprod_{j\in J} F_j$, kde J je neprázdná indexová množina a F_j je aditivní grupa tělesa F pro $j \in J$. (Prostor $W^{\#}_V$ ztotožníme s prostorem $\coprod_{j\in J} F^{\#}_{Vj}$, kde $F^{\#}_{Vj}$ je levý vektorový prostor $F^{\#}_V$ pro $j \in J$.)

Když W je obecný (netriviální) vektorový prostor, opět využijeme toho, že prostor W má alespoň jednu bázi B, jak z tvrzení 1.32 víme. (Přitom předpokládáme platnost Zornova lemmatu 1.31.) Část II. tvrzení 1.70 pak dává, že prostory W a $\bar{W} = \coprod_{y\in B} F_y$, kde F_y je aditivní grupa tělesa F pro $y \in B$, jsou izomorfní. Nyní postupně ztotožníme prostory $W^{\#}_V$ a $\bar{W}^{\#}_V$ a prostory $\bar{W}^{\#}_V$ a $\coprod_{y\in B} F^{\#}_{Vy}$, kde $F^{\#}_{Vy}$ je levý vektorový prostor $F^{\#}_V$ pro $y \in B$. Tímto způsobem lze strukturu levého vektorového prostoru zavést na libovolném prostoru $W^{\#}_V$ i v případě, že těleso F není komutativní.

Opět zjistíme, že výsledná struktura levého vektorového prostoru na obecném prostoru $W^{\#}_V$ je závislá na počáteční volbě báze B prostoru W, jestliže těleso F není komutativní. K tomu je opět možné dokázat, že všechny struktury, které různými volbami báze B získáme, jsou navzájem izomorfní. Navíc i nyní platí, že když těleso F komutativní je, potom výsledná struktura levého vektorového prostoru na prostoru $W^{\#}_V$ na počáteční volbě báze B nezávisí a získaná struktura se shoduje se strukturou levého vektorového prostoru zavedenou už výše uvedenou poznámkou 1.74.a.

Potřebné výpočty jsou jistou obdobou výpočtů z předcházející poznámky 1.74.d a ani tentokrát je pro jejich rozsáhlost neuvádíme. Zbývá poznamenat, že když vektorový prostor W je nulový, potom prostor $W^{\#}_V$ obsahuje pouze nulové lineární zobrazení $o: W \to V$, tudíž nečiní problém na prostoru $W^{\#}_V$ zavést strukturu (triviálního) levého vektorového prostoru nad tělesem F.

1.75. Úvaha. Problém možnosti zavedení struktury (levého nebo pravého) vektorového prostoru na prostoru $W_V^\#$. Závěr. Uvedené poslední dvě poznámky 1.74.d a 1.74.e mají poměrně značný filosofický dopad, jímž se v této úvaze 1.75 budeme zabývat.

Předpokládejme na chvíli, že bychom si byli vědomi pouze poznámky 1.74.d o možnosti zavést strukturu pravého vektorového prostoru na prostoru $W_V^\#$, kde W a V jsou (levé) vektorové prostory nad tělesem F, zatímco o možnosti zavést strukturu levého vektorového prostoru na prostoru $W_V^\#$ podle poznámky 1.74.e bychom nevěděli. Pak strukturu pravého vektorového prostoru bychom na prostoru $W_V^\#$ nepochybně zavedli a prostor $W_V^\#$ bychom považovali za pravý vektorový prostor. Případná nejednoznačnost výsledné struktury by nás příliš netrápila, protože víme, že všechny struktury pravého vektorového prostoru na $W_V^\#$ jsou navzájem izomorfní.

(Zcela analogicky, kdybychom věděli pouze o možnosti zavést strukturu levého vektorového prostoru na $W_V^\#$ podle poznámky 1.74.e a o možnosti zavést strukturu pravého vektorového prostoru na $W_V^\#$ dle poznámky 1.74.d bychom nevěděli, pak na $W_V^\#$ bychom zavedli strukturu levého vektorového prostoru a prostor $W_V^\#$ bychom považovali za levý vektorový prostor.)

Avšak současná znalost obou poznámek 1.74.d a 1.74.e nás vede k zamyšlení nad smysluplností konstrukcí, které jsme v těchto poznámkách popsali. Obě konstrukce, popsané v poznámkách 1.74.d a 1.74.e, jsou totiž přibližně stejně složité a do určité míry jsou také symetrické (resp. analogické). Máme-li pak dán obecný prostor $W_V^\#$ a chceme-li na daném prostoru $W_V^\#$ zavést strukturu (levého nebo pravého) vektorového prostoru, potom je zcela nejasné, kterou z obou popsaných konstrukcí bychom vlastně měli upřednostnit. To nás (alespoň prozatím) opravňuje k závěru, že strukturu (levého ani pravého) vektorového prostoru je lepší na prostoru $W_V^\#$ vůbec nezavádět. (Výjimkou je samozřejmě případ, kdy těleso F je komutativní. Potom zavedení struktury vektorového prostoru na prostoru $W_V^\#$ je velmi přirozené, viz poznámku 1.74.a, a ke stejnému výsledku vedou rovněž obě konstrukce z poznámek 1.74.d a 1.74.e.)

Zaměřme nyní svoji pozornost na algebraický duál $W^\#$, tedy prostor $W_F^\#$, jak z definice 1.38 víme. Pomocí poznámek 1.74.d a 1.74.e si snadno uvědomíme, že na prostoru $W_F^\#$ lze zavést řadu struktur levých vektorových prostorů a také řadu struktur pravých vektorových prostorů. (Předpokládáme, že těleso F není komutativní. Víme, že jednotlivé struktury levých vektorových prostorů, které lze zavést, jsou ovšem navzájem izomorfní. Rovněž všechny struktury pravých vektorových prostorů jsou vzájemně izomorfní.) V definici 1.24 jsme se ale „rozhodli“, že na prostoru $W_F^\#$ resp. $W^\#$ zavedeme právě strukturu pravého vektorového prostoru, a to jedním zcela konkrétním způsobem. To si vzhledem k výše uvedenému závěru žádá vysvětlení.

Z definice 1.5 víme, že aditivní grupu tělesa F můžeme považovat za levý vektorový prostor nad tělesem F. Tento prostor F má celou řadu bází: každá jednoprvková množina $B = \{\lambda\}$ je bází prostoru F pro libovolný nenulový skalár $\lambda \in F$. Pomocí poznámky 1.74.d pak na prostoru $W_F^\#$ můžeme zavádět různé struktury pravého vektorového prostoru (v závislosti na volbě báze B prostoru F; všechny výsledné struktury jsou ale izomorfní). Mezi všemi bázemi prostoru F však je jen jedna jediná báze „kanonická“. Je to množina $B = \{1\}$ obsahující jednotku tělesa F, srov. definici 1.57. Nyní si povšimneme, že výsledná struktura pravého vektorového prostoru zavedená na prostoru $W_F^\#$ vzhledem ke kanonické bázi $B = \{1\}$ prostoru F užitím poznámky 1.74.d je přesně táž, jako struktura pravého vektorového prostoru zavedená na prostoru $W_F^\#$, tedy $W^\#$, definicí 1.24.

Jednoduchost a přirozenost, s níž je struktura pravého vektorového prostoru definicí 1.24 na prostoru $W_F^\#$ zavedena, souvislost s kanonickou bází prostoru F a platnost některých tvrzení (např. níže uvedeného základního lemmatu 2.3, kde zobrazení γ při volbě $V = F$ není nic jiného než lineární kombinace lineárních forem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$) nás přesvědčují, že prostor $W_V^{\#}$, tedy algebraický duál $W^{\#}$, tvoří určitou výjimku z výše uvedeného závěru a že struktura pravého vektorového prostoru je definicí 1.24 na algebraickém duálu $W^{\#}$ zavedena důvodně.

1.76. V závěrečné části tohoto paragrafu připomeneme pojem soustav lineárních rovnic a ne-rovnic.

1.77. Definice. Soustavy lineárních rovnic a ne-rovnic. Nechť W je vektorový prostor nad tělesem F.

Nechť $\alpha \in W^{\#}$ je lineární forma ($\alpha: W \to F$) na vektorovém prostoru W. Zvolme libovolný skalár $b \in F$. Pak $\alpha(x) = b$ je *lineární rovnice*, ve které $x \in W$ je *neznámá* (resp. *proměnná*). Každé $x \in W$, které tuto rovnici $\alpha(x) = b$ splňuje, pak nazveme jejím *řešením.* Rovnice $\alpha(x) = b$ *má řešení* právě tehdy, když existuje alespoň jedno takové $x \in W$. Rovnice $\alpha(x) = b$ *nemá řešení* právě tehdy, když žádné takové $x \in W$ neexistuje.

Nechť $\alpha \in W^{\#}$ a $b \in F$. Pak $\alpha(x) \neq b$ je *lineární ne-rovnice*, kde $x \in W$ je proměnná. Pojmy „řešení", „mít řešení" a „nemít řešení" se zde zavedou obdobně. To znamená, že $x \in W$ je *řešením* uvedené ne-rovnice právě tehdy, když $\alpha(x) \neq b$. Uvedená ne-rovnice *má řešení* právě tehdy, když existuje alespoň jedno takové $x \in W$. V opačném případě uvedená ne-rovnice *nemá řešení.*

Lehce ověříme, že bod $x \in W$ je řešením lineární rovnice $\alpha(x) = b$ právě tehdy, když není řešením lineární ne-rovnice $\alpha(x) \neq b$. Uveďme ještě dvě snadná pozorování. Předpokládejme nejprve, že $\alpha \in W^{\#}$ je nenulová lineární forma. (Jestliže taková lineární forma existuje, pak vektorový prostor W je netriviální.) Potom lineární rovnice $\alpha(x) = b$ má alespoň jedno řešení pro každou pravou stranu $b \in F$; také lineární ne-rovnice $\alpha(x) \neq$ $\neq b$ má alespoň jedno řešení pro každou pravou stranu $b \in F$. Nechť nyní $\alpha = o \in W^{\#}$ je nulová lineární forma. Potom rovnice $\alpha(x) = b$ má alespoň jedno řešení právě tehdy, když $b = 0$ – kde 0 je nula tělesa F – což nastává právě tehdy, když ne-rovnice $\alpha(x) \neq b$ nemá ani jedno řešení.

Nechť m je přirozené číslo (lze položit i $m = 0$). Nechť dále $A: W \to F^m$ je lineární zobrazení jdoucí z vektorového prostoru W do vektorového prostoru F^m, kde na prostoru F^m je zavedena struktura levého vektorového prostoru nad tělesem F, viz definici 1.56. Konečně ať $\boldsymbol{b} \in F^m$ je libovolný sloupcový vektor. Potom $Ax = \boldsymbol{b}$ je *soustava lineárních rovnic*, ve které $x \in W$ je neznámá. Každé $x \in W$, pro které platí uvedený vztah $Ax = \boldsymbol{b}$, nazýváme jejím *řešením.* Soustava lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ *má řešení* právě tehdy, když existuje alespoň jedno $x \in W$ vyhovující uvedenému vztahu. V opačném případě říkáme, že daná soustava *nemá řešení.* Dále říkáme, že soustava lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ je *prázdná* právě tehdy, když $m = 0$.

Je-li $m = 0$, potom F^m je triviální vektorový prostor a $A: W \to F^m$ je nulové zobrazení. Vidíme, že prázdná soustava $Ax = \boldsymbol{b}$ má vždy alespoň jedno řešení. Dokonce platí, že každé $x \in W$ je řešením prázdné soustavy $Ax = \boldsymbol{b}$. (To vše plyne ihned z definic 1.56, 1.57 a 1.59.)

Máme-li stále přirozené číslo m, lineární zobrazení $A: W \to F^m$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$, potom $Ax \neq \boldsymbol{b}$ je *soustava lineárních ne-rovnic*, ve které $x \in W$ je neznámá. Bod $x \in W$ je *řešením* soustavy lineárních ne-rovnic $Ax \neq \boldsymbol{b}$ právě tehdy, když pro něj platí uvedený vztah. Soustava $Ax \neq \boldsymbol{b}$ *má řešení* právě tehdy, když existuje alespoň jedno takové $x \in W$. V opačném případě říkáme, že soustava lineárních ne-rovnic $Ax \neq \boldsymbol{b}$ *nemá řešení.* Říkáme, že soustava $Ax \neq \boldsymbol{b}$ je *prázdná* právě tehdy, když $m = 0$.

Z uvedené definice ihned vyplývá, že bod $x \in W$ je řešením soustavy lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ právě tehdy, když není řešením soustavy lineárních ne-rovnic $Ax \neq \boldsymbol{b}$. Důsledkem je, že, pokud $m = 0$, žádné $x \in W$ není řešením prázdné soustavy lineárních ne-rovnic $Ax \neq \boldsymbol{b}$. Jinými slovy, prázdná soustava lineárních ne-rovnic nemá řešení.

Pojem soustavy lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ v určitém smyslu zobecňuje pojem lineární rovnice $\alpha(x) = b$. Obdobně pojem soustavy lineárních ne-rovnic $Ax \neq \boldsymbol{b}$ je zobecněním pojmu lineární ne-rovnice. V obou případech totiž stačí položit $m = 1$ a uvažovat lineární zobrazení $A = (\alpha)_{i=1}^{1}: W \to F^1$, které vzniklo součinem jediné lineární formy α (viz definici 1.53), a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} = (b)_{i=1}^{1} \in F^1$. Poznamenejme však, že z formálního hlediska prostor F^1 (viz definici 1.56) není totéž, co aditivní grupa tělesa F. Prostor F^1 a aditivní grupa tělesa F jsou samozřejmě izomorfní, například přirozená projekce $p_1: F^1 \to F$ (viz definici 1.52) je lineární a bijektivní, je proto hledaným izomorfismem.

Poznamenejme, že namísto slovního obratu „x je řešením" rovnice $\alpha(x) = b$, ne-rovnice $\alpha(x) \neq b$, soustavy rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ nebo soustavy ne-rovnic $Ax \neq \boldsymbol{b}$ lze použít rovněž několik jiných obratů: x *řeší* nebo x *splňuje* nebo x *vyhovuje* rovnici $\alpha(x) = b$, ne-rovnici $\alpha(x) \neq b$, soustavu rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ nebo soustavu ne-rovnic $Ax \neq \boldsymbol{b}$. O dané soustavě $Ax = \boldsymbol{b}$ nebo $Ax \neq \boldsymbol{b}$, která má resp. nemá řešení, rovněž říkáme, že po řadě *je*space resp. *není řešitelná* (*je neřešitelná*). Někteří autoři řešitelné resp. neřešitelné soustavy nazývají také po řadě *konzistentní* resp. *nekonzistentní* (nebo *inkonzistentní*).

1.78. Poznámka. Nechť W je vektorový prostor nad tělesem F. Budiž dáno přirozené číslo m (lze zvolit i $m = 0$). Mějme lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^{m} \in W_{F^m}^{\#}$ (tedy $A = (\alpha_i)_{i=1}^{m}: W \to F^m$, viz definici 1.59) a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^{m} \in F^m$. Potom soustavu lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ lze chápat také jako následující konjunkci výroků:

$$\alpha_1(x) = b_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ \alpha_m(x) = b_m \,. \tag{1}$$

Obdobně soustava lineárních ne-rovnic $Ax \neq \boldsymbol{b}$ vlastně vyjadřuje následující disjunkci výroků:

$$\alpha_1(x) \neq b_1 \ \vee \ \cdots \ \vee \ \alpha_m(x) \neq b_m \,. \tag{2}$$

Jestliže $m = 0$, potom soustava lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ je prázdná. Rovněž konjunkce (1) je prázdná. Prázdnou konjunkci však obvykle považujeme za pravdivou – konjunkce (1) je pravdivá pro každé $x \in W$. To znamená, že řešením prázdné soustavy lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ je každý bod $x \in W$. Obdobně, je-li $m = 0$, je prázdná také soustava lineárních ne-rovnic $Ax \neq \boldsymbol{b}$ i disjunkce (2). Avšak prázdnou disjunkci bývá obvyklé považovat za nepravdivou. To znamená, že disjunkce (2) není splněna pro žádné $x \in W$. Takže prázdná soustava lineárních ne-rovnic $Ax \neq \boldsymbol{b}$ nemá ani jedno řešení. Oba tyto závěry jsou ve shodě s uvedenou definicí 1.77.

1.79. Uveďme ještě jednu poznámku, která s předcházející poznámkou 1.78 souvisí.

1.80. Poznámka. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem F. Nechť m je přirozené číslo (může být i $m = 0$). Ptejme se, zda existuje alespoň jedno $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^{m} \in V^m$ takové, že $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ resp. $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$, kde $\boldsymbol{o} = (0)_{i=1}^{m} \in V^m$ je sloupec nulových vektorů prostoru V (v případě $m = 0$ je to počátek prostoru V^0, viz definice 1.56 a 1.57). Povšimněme si, že podmínka $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ resp. $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ je vlastně také jistým druhem (poměrně jednoduché ovšem) soustavy lineárních rovnic resp. ne-rovnic. První podmínka ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$), obdobně jako v předcházející poznámce 1.78, je ekvivalentní konjunkci

$$u_1 = 0 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ u_m = 0$$

a druhá podmínka ($\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$) je ekvivalentní disjunkci

$$u_1 \neq 0 \ \vee \ \cdots \ \vee \ u_m \neq 0 \,,$$

kde 0 je nula vektorového prostoru V.

Odpověď na první otázku (zda existuje $\boldsymbol{u} \in V^m$ takové, že $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$) je zřejmě vždy kladná – řešením je právě počátek prostoru V^m. Odpověď na druhou otázku (zda existuje $\boldsymbol{u} \in V^m$ takové, že $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$) je kladná právě tehdy, když vektorový prostor V^m je netriviální, a to nastává právě tehdy, když přirozené číslo m je nenulové a vektorový prostor V je netriviální.

Poznamenejme, že aditivní grupa tělesa F je rovněž vektorovým prostorem nad tělesem F. K obdobným výsledkům proto dospějeme i tehdy, když za vektorový prostor V dosadíme aditivní grupu tělesa F a pracujeme s prostorem F^m.

1.81. K soustavám lineárních rovnic a ne-rovnic se ještě vrátíme na konci § 3.

1.82. Dosažené výsledky. Zavedli jsme základní pojmy, které dále v této práci budeme používat. Obsah celého tohoto paragrafu, § 1, lze považovat za více či méně standardní. Proto při jeho psaní bylo přihlédnuto k již existující literatuře, jmenovitě [2], [45], [78], [33], částečně také k [70]. Snad jen pojmy V-homotetie, V-lineární kombinace, V-lineárního obalu, V-lineární závislosti a nezávislosti a V-báze, zavedené definicemi 1.39, 1.42 a 1.46, mohou působit poněkud netradičně. V úvahách 1.9 a 1.10 a poznámce 1.12 jsme studovali rozdíly mezi levými a pravými vektorovými prostory. V poznámce 1.74 a navazující úvaze 1.75 jsme se pak věnovali otázce, zda na prostoru $W_V^\#$ je možné zavést strukturu levého nebo pravého vektorového prostoru.

1.83. Poznámka. Nadále se již výhradně přidržíme konvencí zavedených definicemi 1.8 a 1.18, takže pojmy „vektorový prostor" a „lineární zobrazení" budeme vždy mít na mysli po řadě levý vektorový prostor a levé lineární zobrazení a na tuto skutečnost už nebudeme zvláště upozorňovat. Máme-li přirozené číslo m a těleso F, potom prostor F^m zkonstruujeme tak, abychom na něm obdrželi strukturu levého vektorového prostoru nad tělesem F, viz definici 1.56.

§ 2 Základní lemma

2.1. Níže vyslovíme základní lemma lineární algebry, totiž lemma 2.3. Jak uvidíme, ze základního lemmatu 2.3 vycházejí prakticky všechny významnější výsledky, které v dalších paragrafech této kapitoly uvedeme. Důkaz 2.3.c základního lemmatu 2.3, který podáme, je silně založen na důkazu převzatém z [67: lemma A.5].

2.2. Poznámka. V základním lemmatu 2.3 se setkáme s vektorovým prostorem W, který má význam „základního" či „nosného" vektorového prostoru. Dále v něm vystupuje vektorový prostor V, který hraje roli prostoru „cílových hodnot". Oba prostory W a V jsou nad společným tělesem F. Stojí za pozornost, že v lemmatu 2.3 se nepožaduje, aby těleso F bylo komutativní.

Jako jedna z možných voleb vektorového prostoru V se nabízí prostor F^N, kde N je přirozené číslo. Speciální volbou je pak možnost za V dosadit aditivní grupu tělesa F, tj. volba $V = F$. V takovém případě se lineární zobrazení $\gamma\colon W \to V$ stává lineární formou na prostoru W – jako ostatní lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, které v lemmatu 2.3 vystupují.

Položíme-li navíc $F = \mathbb{R}$ (těleso reálných čísel), přičemž V je stále aditivní grupa tělesa F (tedy $V = \mathbb{R}$), potom lemma 2.3 se redukuje na základní lemma 2, které jsme uvedli v úvodní kapitole této práce. Položíme-li nadto $W = \mathbb{R}^n$, kde n je nenulové přirozené číslo, a přirozené číslo m je také nenulové, dostáváme základní lemma 3.

2.3. Základní lemma. *Mějme dva vektorové prostory W a V nad tělesem F. Mějme také přirozené číslo m (lze položit i $m = 0$). Nechť $A = (\alpha_i)_{i=1}^m\colon W \to F^m$ je lineární zobrazení, které vzniklo součinem lineárních forem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ definovaných na vektorovém prostoru W. Konečně ať $\gamma\colon W \to V$ je další lineární zobrazení.*

Potom $\operatorname{Ker} A = \bigcap_{i=1}^m \operatorname{Ker} \alpha_i \subseteq \operatorname{Ker} \gamma$, tzn., že implikace „$Ax = \boldsymbol{o} \Rightarrow \gamma(x) = 0$" či

$$\alpha_1(x) = 0 \wedge \cdots \wedge \alpha_m(x) = 0 \implies \gamma(x) = 0 \tag{1}$$

platí pro každé $x \in W$, právě tehdy, když

$$\exists u_1, \dots, u_m \in V\colon\ \iota u_1 \alpha_1 + \cdots + \iota u_m \alpha_m = \gamma\,, \tag{2}$$

tzn., že pro vhodné $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$ platí $\iota \boldsymbol{u}^T A = \gamma$.

2.3.a. *Poznámka.* Podmínka (1) říká, že „bloková soustava rovnic a ne-rovnic“ $Ax = \boldsymbol{o}$, $\gamma(x) \neq 0$ nemá řešení. (Pojem blokové soustavy zavedeme až v definici 3.122. Poznamenejme, že „soustava“ $Ax = \boldsymbol{o}$, $\gamma(x) \neq 0$ není blokovou soustavou podle definice 3.122, protože v obecnosti máme $\gamma\colon W \to V$ a nikoliv $\gamma\colon W \to F$ popř. $\gamma\colon W \to F^N$ pro vhodné přirozené číslo N.) Podmínka (2) vyjadřuje, že zobrazení γ je V-lineární kombinací forem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, leží v jejich V-lineárním obalu, viz definice 1.42 a 1.46.

2.3.b. *Poznámka.* Upřesněme, že zobrazení A není součinem lineárních forem $\alpha_1, \dots$ $\dots, \alpha_m$, když $m = 0$. Aby šlo o součin, číslo m by muselo být nenulové, viz definici 1.53. V případě $m = 0$ je význam zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m\colon W \to F^m$ zaveden definicí 1.59.

2.3.c. *Důkaz.* Implikace „$\Leftarrow$“ uvedeného tvrzení je triviální: jestliže $\iota\boldsymbol{u}^T A = \gamma$ pro vhodné $\boldsymbol{u} \in V^m$ a současně je dáno $x \in W$ takové, že $Ax = \boldsymbol{o}$, potom zřejmě $\gamma(x) = \iota\boldsymbol{u}^T Ax = 0$. Implikaci „$\Rightarrow$“ dokážeme matematickou indukcí. Platnost dokazovaného tvrzení nejprve ověříme pro $m = 0$. V takovém případě je $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \in (W^\#)^m$ nulové lineární zobrazení (viz definici 1.59), takže předpoklad na levé straně implikace (1) je pravdivý pro každé $x \in W$. (Respektive konjunkce na levé straně implikace (1) je prázdná, a proto vždy pravdivá – srov. poznámku 1.78.) Z toho vyplývá, že zobrazení $\gamma\colon W \to V$ musí být nulové. Formule (2) je tudíž pravdivá – stačí zvolit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} = (0)_{i=1}^m \in V^m$. (Poznamenejme, že vektorový prostor V^m je triviální, protože $m = 0$. Takže kromě jeho počátku v něm jiný bod ani nenajdeme.)

Nyní předpokládejme, že přirozené číslo m je nenulové, tedy $m > 0$. Dále předpokládejme, že dokazované tvrzení (implikace „$\Rightarrow$“) je pravdivé pro $m-1$. Dokazované tvrzení je tudíž pravdivé i ve speciálním případě, kdy pro $m - 1$ v něm za vektorový prostor V dosadíme aditivní grupu tělesa F. Implikaci „$\Rightarrow$“ chceme dokázat pro číslo m. Předpokládejme, že lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, jichž je lineární zobrazení A součinem, jsou lineárně nezávislé. (Kdyby například $\alpha_m = \iota\lambda_1\alpha_1 + \dots + \iota\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}$ pro vhodná $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$, potom $\bigcap_{i=1}^{m-1} \operatorname{Ker}\alpha_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}\alpha_i \subseteq \operatorname{Ker}\gamma$, načež stačí položit $u_m = 0 \in V$ a ostatní $u_1, \dots, u_{m-1} \in V$ určit užitím indukčního předpokladu. Poznamenejme, že tato úvaha je správná i pro $m = 1$. Přitom se odvoláváme na definici 1.25. Využíváme také pozorování, že lineární kombinace lineárních forem $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ je totéž jako jejich F-lineární kombinace, viz definici 1.42.)

Podle indukčního indukční předpokladu pro $m - 1$, který za dodatečného předpokladu $V = F$ použijeme na lineárně nezávislé formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, existuje m bodů $x_1, \dots, x_m \in W$ takových, že pro všechna $i, j = 1, \dots, m$ platí $\alpha_i(x_j) = 0$ právě tehdy, když $i \neq j$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\alpha_i(x_i) = 1$ pro $i = 1, \dots, m$ (jinak stačí položit $x_i := (\alpha_i(x_i))^{-1}x_i$). Pro $i = 1, \dots, m$ konečně položme $u_i = \gamma(x_i)$.

Nyní zvolme libovolný bod $x \in W$. Je zřejmé, že $x - \big(\alpha_1(x)\big)x_1 - \dots - \big(\alpha_m(x)\big)x_m \in \operatorname{Ker}\alpha_i$ pro každé $i = 1, \dots, m$. Tudíž, podle předpokladu (1), platí $\gamma\big(x - \big(\alpha_1(x)\big)x_1 - \dots - \big(\alpha_m(x)\big)x_m\big) = 0$. Z toho vyplývá, že pro každé $x \in W$ platí rovnost $\gamma(x) = \big(\alpha_1(x)\big)\gamma(x_1) + \dots + \big(\alpha_m(x)\big)\gamma(x_m) = \iota u_1\alpha_1(x) + \dots + \iota u_m\alpha_m(x)$. Tím je tvrzení dokázáno. $\square$

2.4. Poznámka. V důkazu 2.3.c základního lemmatu 2.3 jsme viděli, že podstatná je především jeho implikace „$\Rightarrow$“ (protože implikace „$\Leftarrow$“ je triviální). Povšimněme si, že zmíněná netriviální implikace „$\Rightarrow$“ základního lemmatu 2.3 dává následující komutativní diagram:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\gamma"'] & F^m \arrow[dl, dashed, "\iota\boldsymbol{u}^T"] \\ V & \end{tikzcd}$$

Jestliže daná zobrazení $A\colon W \to F^m$ a $\gamma\colon W \to V$ splňují určité vlastnosti (implikaci 2.3.(1) pro každé $x \in W$), potom existuje zobrazení $\iota\boldsymbol{u}^T\colon F^m \to V$ tak, že uvedený diagram komutuje.

2.5. Zmiňme také Fredholmovu větu, která je snadným důsledkem uvedeného základního lemmatu 2.3. Níže uvedená Fredholmova věta 2.11, kromě již uvedeného základního lemmatu 2.3, je jedním z prvních příkladů tzv. vět o alternativě, které v této práci uvedeme. Objasnění pojmu „věty o alternativě“ lze najít v úvodní kapitole této práce. Fredholmova věta charakterizuje případ, kdy (primární) soustava lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ nemá řešení.

2.6. Poznámka. Fredholmova věta v prostoru $\mathbb{R}^n$. V literatuře ([46: Kapitola I Sekce 7 Příklad 4 (na str. 57)], [57], [67: poznámka 5.27]) se obvykle setkáváme s následující formulací Fredholmovy věty:

Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je matice typu $m \times n$, kde m a n jsou nenulová přirozená čísla, a nechť $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ je m-složkový sloupec (matice typu $m \times 1$). Potom soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ nemá řešení ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$) právě tehdy, když existuje m-složkový sloupec $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ takový, že $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{o}^T$ a $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \neq 0$, kde $\boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^n$ je n-složkový nulový sloupec.

Abychom obdrželi uvedené tvrzení, v níže uvedené Fredholmově větě 2.11 za těleso F stačí dosadit těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ a za vektorový prostor W stačí dosadit konečněrozměrný vektorový prostor $\mathbb{R}^n$. Jestliže ve větě 2.11 položíme jen $F = \mathbb{R}$ a vektorový prostor W ponecháme „volně“, potom dostaneme formulaci Fredholmovy věty pro případ (obecně) nekonečněrozměrného vektorového prostoru W nad tělesem reálných čísel. Níže uvedená Fredholmova věta 2.11 je formulována ještě obecněji, protože umožňuje práci v (obecně) nekonečněrozměrném vektorovém prostoru W nad libovolným tělesem F, které může nebo nemusí být komutativní.

2.7. Než Fredholmovu větu 2.11 vyslovíme, uveďme několik tvrzení, která s Fredholmovou větou z právě uvedené poznámky 2.6 souvisejí.

2.8. Poznámka. Několik souvislostí kolem Fredholmovy věty. Fredholmovu větu uvedenou v předcházející poznámce 2.6 je možné formulovat i následujícím jediným vzorcem [16], [70: vztah (6.16) (v kapitole 6 na str. 79)]:

$$\operatorname{Col} \boldsymbol{A} = \left(\operatorname{Null} \boldsymbol{A}^T\right)^{\perp}, \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{A}$ má stejný význam jako v tvrzení v poznámce 2.6, $\operatorname{Col} \boldsymbol{A} = \{\, \boldsymbol{Ax} \,;\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\}$ je *sloupcový prostor* matice $\boldsymbol{A}$ – tj. prostor generovaný sloupci matice $\boldsymbol{A}$, vlastně je to obor hodnot – a $\operatorname{Null} \boldsymbol{A}^T = \{\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \,;\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o} \,\}$ je *nulový prostor* matice $\boldsymbol{A}^T$, tedy matice transponované k matici $\boldsymbol{A}$. Vlastně je to její jádro. Znak „$\perp$“ označuje ortogonální doplněk dané množiny v prostoru $\mathbb{R}^m$, když jej vybavíme klasickou eukleidovskou normou (a od ní odvozeným skalárním součinem). Nahlédněme platnost uvedené rovnice (1):

Kdy platí $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Col} \boldsymbol{A}$? Právě tehdy, když rovnice $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má řešení. To nastává právě tehdy, když pro každé $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ splňující $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{o}^T$ (takže $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Null} \boldsymbol{A}^T$) platí $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} = 0$. To ekvivalentně znamená, že $\boldsymbol{b} \in (\operatorname{Null} \boldsymbol{A}^T)^{\perp}$.

Nechť $\boldsymbol{A}$ stále označuje matici typu $m \times n$, jako výše. Vztah (1) zřejmě zůstane v platnosti, jestliže do něj dosadíme matici k $\boldsymbol{A}$ transponovanou. Tím dostáváme následující dva vztahy (vztah vpravo jen opakuje vztah (1)):

$$\operatorname{Col} \boldsymbol{A}^T = (\operatorname{Null} \boldsymbol{A})^{\perp} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{Col} \boldsymbol{A} = \left(\operatorname{Null} \boldsymbol{A}^T\right)^{\perp}. \tag{2}$$

Obě uvedené rovnice (2) jsou ekvivalentní v tom smyslu, že jedna snadno plyne z druhé přechodem k transponované matici. Obě tyto rovnice (2) jsou jen jinou formulací Fredholmovy věty z poznámky 2.6.

Rovnice (2) již připomínají druhou Fredholmovu větu [67: věta 5.26]:
Nechť K je kompaktní operátor na Banachově prostoru X. Potom

$$\operatorname{Rng}(K' - I') = \big(\operatorname{Ker}(K - I)\big)^{\perp} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{Rng}(K - I) = {}^{\perp}\big(\operatorname{Ker}(K' - I')\big)\,,$$

kde I je identické zobrazení na prostoru X, znak „$'$“ označuje banachovsky adjungované zobrazení a znak „$\perp$“ zde označuje anihilátor.

Uvedená druhá Fredholmova věta je sice formulována pro (obecně) nekonečněrozměrný vektorový prostor X, avšak předpokládá se, že tento prostor je vybaven normou a že v metrice indukované touto normou je úplný. Dále vidíme, že druhá Fredholmova věta zobecňuje Fredholmovu větu z předcházející poznámky 2.6 jen tehdy, když matice $\boldsymbol{A}$ je čtvercová (abychom měli operátor na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$).

Původní Fredholmův výsledek lze nalézt v jeho článku [47: tvrzení na konci subsekce 9 (v § 2)].

Konečně poznamenejme, že větou, která s Fredholmovou větou z poznámky 2.6 souvisí, je také věta Frobeniova [70: sekce 6.3]:

Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a nechť $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, kde m a n jsou nenulová přirozená čísla. Potom soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má řešení ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$) právě tehdy, když hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je rovna hodnosti rozšířené matice $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$.

2.9. Poznámka. V odstavci 2.5 jsme naznačili, že Fredholmova věta 2.11 udává nutnou a postačující podmínku pro to, aby soustava lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ neměla řešení. Poznamenejme, že některé velice jednoduché situace, kdy tato soustava má nebo nemá řešení, jsme popsali již v definici 1.77.

2.10. Nyní už vyslovme a dokažme (zobecněnou) Fredholmovu větu.

2.11. Fredholmova věta. *Nechť W je vektorový prostor nad tělesem F. Dále ať m je přirozené číslo (lze zvolit i $m = 0$). Budiž dáno lineární zobrazení $A\colon W \to F^m$ a mějme sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$. Potom soustava lineárních rovnic*

$$Ax = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

nemá řešení právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{\lambda} \in F^m\colon\ \iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o \ \wedge\ \iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b} \neq 0\,, \tag{2}$$

kde o je nulová lineární forma $o\colon W \to F$ a 0 je nula tělesa F.

2.11.a. *Poznámka.* Ve formulaci základního lemmatu 2.3 vystupuje prostor „cílových hodnot“ V, avšak ve formulaci uvedené Fredholmovy věty 2.11 jej nenacházíme. Platí ale následující tvrzení:

Nechť W, F, m, A, $\boldsymbol{b}$ má stejný význam jako ve větě 2.11 a nechť V je libovolný další vektorový prostor nad F, který je netriviální. Potom soustava rovnic (1) nemá řešení právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{u} \in V^m\colon\ \iota\boldsymbol{u}^T A = o \ \wedge\ \iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \neq 0\,, \tag{3}$$

kde o je nulové lineární zobrazení $o\colon W \to V$ a 0 je počátek vektorového prostoru V.

Složením s Fredholmovou větou 2.11 dostáváme následující tvrzení: výroky (2), (3) a „soustava (1) nemá řešení“ jsou ekvivalentní.

Důkaz uvedeného tvrzení je vcelku snadný. Platí-li (3), potom soustava $Ax = \boldsymbol{b}$ nemůže mít řešení. Jestliže soustava $Ax = \boldsymbol{b}$ nemá řešení, potom – podle Fredholmovy věty 2.11, jejíž důkaz 2.11.b viz níže – platí (2). K uzavření „okruhu“ zbývá dokázat, že z platnosti (2) plyne (3). Ale to už je snadné: Nechť $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \in F^m$ je sloupcový vektor, který dosvědčuje platnost (2). Vektorový prostor V je netriviální, tudíž existuje nenulový vektor $\varepsilon \in V$. Nakonec stačí uvážit sloupec vektorů $\boldsymbol{u} = (\lambda_i\varepsilon)_{i=1}^m \in V^m$ – vlastně jsme na levou i pravou stranu rovnosti a ne-rovnosti v (2) aplikovali zobrazení $\iota\varepsilon$. Tím je tvrzení dokázáno.

Uvedené tvrzení, totiž ekvivalence podmínek (2) a (3), je zajímavé, protože dimenze vektorového prostoru V v obecnosti může být i větší než 1.

Poznamenejme, že předpoklad o netriviálnosti vektorového prostoru V je podstatný. V opačném případě by uvedené tvrzení, tj. podmínka (3), nic necharakterizovalo: kdyby byl V triviální, potom nerovnost $\iota \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} \neq 0$ by nikdy neplatila (načež každá soustava $Ax = \boldsymbol{b}$ by vyšla jako řešitelná – a to je samozřejmě nesprávné tvrzení).

2.11.b. *Důkaz.* Soustava rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ nemá řešení právě tehdy, když implikace

$$(\,A \quad -\iota\boldsymbol{b}\,)\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = Ax - \iota\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{o} \implies (\,o \quad \iota 1\,)\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = o(x) + \iota 1(t) = t = 0\,, \tag{4}$$

kde $\boldsymbol{o} = (0)_{i=1}^m \in F^m$ a 1 je jednotka tělesa F, platí pro všechna $\binom{x}{t} \in W \dot{\times} F$. (Kdyby $t \neq 0$, potom bod $t^{-1}x$ by byl řešením soustavy $Ax = \boldsymbol{b}$. Na levé straně uvedené implikace (4) máme zobrazení $(\,A \quad -\iota\boldsymbol{b}\,)\colon W \dot{\times} F \to F^m$, které vzniklo direktním součtem (viz definici 1.53) lineárních zobrazení A a $-\iota\boldsymbol{b}$. Na její pravé straně máme lineární formu $(\,o \quad \iota 1\,)\colon W \dot{\times} F \to F$, která vznikla direktním součtem lineárních forem o a $\iota 1$.) Základní lemma 2.3 (použité pro případ $V = F$) dává, že implikace (4) platí pro každé $\binom{x}{t} \in W \dot{\times} F$ právě tehdy, když existuje $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ takové, že $\iota\boldsymbol{\lambda}^T(\,A \quad -\iota\boldsymbol{b}\,) = (\,o \quad \iota 1\,)$. Snadno nahlédneme, že uvedená rovnost je splněna právě tehdy, když $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o$ a současně $(\iota\boldsymbol{\lambda}^T)(-\iota\boldsymbol{b}) = \iota 1$. (Na levé straně poslední rovnice stojí zobrazení vzniklé složením zobrazení $\iota\boldsymbol{\lambda}^T$ a $-\iota\boldsymbol{b}$.)

Ve druhé rovnici za symbol „ι“ dosaďme skalár $-1 \in F$. Na levé straně dostáváme: $(\iota\boldsymbol{\lambda}^T)(-\iota\boldsymbol{b})(-1) = (\iota\boldsymbol{\lambda}^T)\big((-\iota\boldsymbol{b})(-1)\big) = (\iota\boldsymbol{\lambda}^T)(\boldsymbol{b}) = \iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b}$. Dosazením na pravé straně dostáváme: $(\iota 1)(-1) = -1 \cdot 1 = -1$. Vidíme, že rovnice $(\iota\boldsymbol{\lambda}^T)(-\iota\boldsymbol{b}) = \iota 1$ platí právě tehdy, když $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b} = -1$. Dále platí $-1 \neq 0$.

Na druhou stranu, máme-li $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \in F^m$ takové, že $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o$ a současně $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b} \neq 0$, potom není problém toto $\boldsymbol{\lambda}$ „přeškálovat“ tak, aby $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o$ a $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b} = -1$. (Stačí položit $\boldsymbol{\lambda} := (-\lambda_i(\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b})^{-1})_{i=1}^m \in F^m$.) □

2.11.c. *Poznámka.* Jestliže $m = 0$, potom prostor F^m je triviální a soustava rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ má vždy řešení (např. $x = 0 \in W$). Podaný důkaz 2.11.b je ale korektní i v případě, že $m = 0$.

2.12. Poznámka. Obměna Fredholmovy věty. Může stát za povšimnutí, že pouhou obměnou ekvivalence z Fredholmovy věty 2.11 dostáváme tvrzení připomínající základní lemma 2.3: Implikace „$\iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o \;\Rightarrow\; \iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b} = 0$“ platí pro všechna $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ právě tehdy, když existuje $x \in W$ splňující $Ax = \boldsymbol{b}$.

2.13. Na Fredholmovu větu navazuje Fredholmova alternativa, jíž se nyní budeme zabývat.

2.14. Poznámka. Fredholmova alternativa. Jak jsme v poznámkách 2.6 a 2.8 a větě 2.11 viděli, Fredholmova věta dává odpověď na otázku, kdy daná soustava lineárních rovnic $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ – kde pro jednoduchost $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je matice a m a n jsou nenulová přirozená čísla – pro předem pevně zvolenou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ nemá řešení ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$). Negací uvedené charakterizující podmínky obdržíme odpověď na otázku, kdy soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ pro danou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ má řešení.

Fredholmova alternativa [67: poznámka 5.27] naproti tomu odpovídá na otázku, kdy daná soustava lineárních rovnic $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ – kde nyní $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je čtvercová matice a n je nenulové přirozené číslo – má řešení ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$) pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$:

Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde n je nenulové přirozené číslo. Potom soustava lineárních rovnic $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má řešení ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$) pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když soustava lineárních rovnic $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$, kde $\boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^n$ je nulový vektor, má pouze triviální (tj. nulové) řešení.

Poznamenejme, že pokud soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$ má pouze triviální řešení, znamená to, že sloupce matice $\boldsymbol{A}$ jsou ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ lineárně nezávislé. Odtud pak plyne [70: „druhý způsob“ na začátku kapitoly 6 (na str. 79)], že také řádky matice $\boldsymbol{A}$ (po jejich transponování) jsou ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ lineárně nezávislé. Poznamenejme dále, že soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má řešení pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když zobrazení zavedené předpisem $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{Ax}$ pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je *na*, a že soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$ má pouze triviální řešení právě tehdy, když zmíněné zobrazení je prosté.

Tím jsme se dosti přiblížili obecné Fredholmově alternativě [67: věta 5.24]:

Nechť K je kompaktní operátor na Banachově prostoru X. Potom operátor $K - I$ je prostý právě tehdy, když je na, přičemž I je identické zobrazení na prostoru X.

Původní formulaci Fredholmovy alternativy lze nalézt v [47: teorém uprostřed subsekce 9 (v § 2)].

2.15. Následující lemma 2.16 je sice triviální, ale je výsledkem samostatného významu.

2.16. Lemma. *Nechť W je vektorový prostor nad tělesem F. Ať m je přirozené číslo (lze zvolit i $m = 0$) a nechť $A\colon W \to F^m$ je lineární zobrazení. Potom soustava lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ má řešení pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in F^m$ právě tehdy, když (volněji řečeno) každá ze soustav $Ax = \boldsymbol{e}_1, \dots, Ax = \boldsymbol{e}_m$ má řešení. Přesněji:*

Soustava lineárních rovnic

$$Ax = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

má řešení pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in F^m$ právě tehdy, když

$$\big(\exists x_1 \in W\colon\ Ax_1 = \boldsymbol{e}_1\big) \ \wedge\ \cdots\ \wedge\ \big(\exists x_m \in W\colon\ Ax_m = \boldsymbol{e}_m\big)\,. \tag{2}$$

Připomeňme, že sloupcový vektor $\boldsymbol{e}_i \in F^m$ má jednotku tělesa F na i-tém místě a nuly tělesa F jinde pro $i = 1, \dots, m$.

2.16.a. *Poznámka.* Vektory $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ byly zavedeny definicí 1.57 (jen) v případě $m \neq 0$. Jestliže $m = 0$, potom sloupcové vektory $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ vůbec nepotřebujeme, protože konjunkce (2) je prázdná. Není tedy na závadu, že v případě $m = 0$ tyto vektory nemáme zavedeny. Níže podaný důkaz 2.16.b bude korektní i v případě $m = 0$, protože konjunkce výroků, kde vektory $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ vystupují, budou prázdné.

2.16.b. *Důkaz.* Jestliže soustava $Ax = \boldsymbol{b}$ má řešení pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in F^m$, musí mít řešení i pro volbu $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ (pro každou z těchto voleb zvlášť).

Jestliže naopak máme bod $x_1 \in W$ splňující $Ax_1 = \boldsymbol{e}_1$ a zároveň … a zároveň máme bod $x_m \in W$ splňující $Ax_m = \boldsymbol{e}_m$ a libovolné $\boldsymbol{b} \in F^m$ je dáno, potom zřejmě $x = b_1x_1 + \cdots + b_mx_m$ je řešením soustavy $Ax = \boldsymbol{b}$ pro zvolené $\boldsymbol{b}$.

(Jestliže je $m = 0$, potom klademe $b_1x_1 + \cdots + b_mx_m = 0$, kde 0 je nula prostoru W. V následujícím odůvodníme, proč bod x řeší soustavu $Ax = \boldsymbol{b}$. Jelikož máme $Ax_i = \boldsymbol{e}_i$, platí $\iota(Ax_i) = \iota\boldsymbol{e}_i$ (rovnost zobrazení), a tudíž $\iota(Ax_i)(b_i) = \iota\boldsymbol{e}_i(b_i)$, to vše pro $i = 1, \dots, m$. Sečtením levých stran získaných rovnic dostáváme $\iota(Ax_1)(b_1) + \cdots + \iota(Ax_m)(b_m) = b_1Ax_1 + \cdots + b_mAx_m = A(b_1x_1 + \cdots + b_mx_m) = Ax$. Sečtením pravých stran máme $\iota\boldsymbol{e}_1(b_1) + \cdots + \iota\boldsymbol{e}_m(b_m) = \boldsymbol{b}$. Tedy $Ax = \boldsymbol{b}$.) □

2.17. Následující poznámku 2.18 budeme potřebovat pro důkaz „Fredholmovy alternativy“ 2.20.

2.18. Poznámka. V-lineární, F-lineární a lineární nezávislost lineárních forem. Nechť W a V jsou vektorové prostory nad tělesem F a nechť m je přirozené číslo (lze vzít i $m = 0$). Ať $A = (\alpha_i)_{i=1}^m\colon W \to F^m$ je lineární zobrazení, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou lineární formy definované na vektorovém prostoru W (viz definici 1.59).

Z definice 1.46, při použití definice 1.59, ihned vyplývá, že lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou V-lineárně nezávislé právě tehdy, když pro každý sloupec vektorů $\boldsymbol{u} =$

$= (u_i)_{i=1}^m \in V^m$ platí: jestliže $\iota \boldsymbol{u}^T A = \iota u_1 \alpha_1 + \cdots + \iota u_m \alpha_m = o$, potom $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, kde $\boldsymbol{o} \in V^m$ je sloupec nulových vektorů prostoru V (viz definici 1.57) a znak o označuje nulové lineární zobrazení $o\colon W \to V$. Vlastně jde jen o obměnu tvrzení, které jsme uvedli už v definici 1.46.

Je samozřejmé, že $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ právě tehdy, když $u_i = 0$ pro $i = 1, \ldots, m$, kde 0 je nulový vektor prostoru V. Jinými slovy, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ právě tehdy, když $u_1 = \iota \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{e}_1 = 0$ a současně … a současně $u_m = \iota \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{e}_m = 0$. (Jestliže $m = 0$, potom poslední konjunkce je prázdná (a tedy pravdivá, což souhlasí s tím, že $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, protože vektorový prostor V^m je triviální). Proto nevadí, že vektory $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ nejsou zavedeny, když $m = 0$, viz definici 1.57.)

Speciální volbou je, když za vektorový prostor V dosadíme aditivní grupu tělesa F.

Lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou tedy F-lineárně nezávislé právě tehdy, když pro každý sloupcový vektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \in F^m$ platí: jestliže $\iota \boldsymbol{\lambda}^T A = \iota \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \iota \lambda_m \alpha_m = o$, potom $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$, kde $\boldsymbol{o} \in F^m$ je nulový sloupcový vektor a $o \in W^\#$ je nulová lineární forma.

Dále snadno nahlédneme, že $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$ právě tehdy, když $\lambda_i = 0$ pro $i = 1, \ldots, m$, právě tehdy, když $\lambda_1 = \iota \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{e}_1 = 0$ a současně … a současně $\lambda_m = \iota \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{e}_m = 0$. (Jestliže je $m = 0$, potom nutně platí $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$, protože prostor F^m je triviální.)

Vezmeme-li v úvahu definice 1.25, 1.39 a 1.59 (a poznámku 1.60), dostáváme následující výsledek: formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když pro každé $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \in F^m$ splňující $\iota \boldsymbol{\lambda}^T A = \iota \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \iota \lambda_m \alpha_m = o$ platí $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$. Zde opět $\boldsymbol{o} \in F^m$ je nulový sloupcový vektor a $o \in W^\#$ je nulová lineární forma. Vidíme, že lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou F-lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé.

2.19. Nyní již můžeme formulovat tvrzení, které Fredholmovu alternativu velmi připomíná. Níže uvedené tvrzení 2.20 ve skutečnosti není Fredholmovou alternativou, protože v něm nevystupuje žádný operátor, avšak s Fredholmovou alternativou (pro čtvercové matice typu $n \times n$, kde n je nenulové přirozené číslo) úzce souvisí – viz poznámku 2.14 výše.

2.20. Tvrzení. „Fredholmova alternativa“. *Nechť W je vektorový prostor nad tělesem F. Nechť m je přirozené číslo (může být i $m = 0$) a ať $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \colon W \to F^m$ je lineární zobrazení, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární formy definované na vektorovém prostoru W. Potom soustava lineárních rovnic*

$$Ax = \boldsymbol{b}$$

má řešení pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in F^m$ právě tehdy, když lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineárně nezávislé.

2.20.a. *Poznámka.* Lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou F-lineárně nezávislé, viz definici 1.46 nebo poznámku 2.18. Jestliže V je netriviální vektorový prostor nad tělesem F, potom pomocí tvrzení odstavce 1.47 – viz tvrzení 2.23 níže – odvodíme, že lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou F-lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou V-lineárně nezávislé.

2.20.b. *Důkaz.* Lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když pro každé $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ splňující $\iota \boldsymbol{\lambda}^T A = o$ platí $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$, kde $o\colon W \to F$ je nulová lineární forma a $\boldsymbol{o} \in F^m$ je nulový sloupcový vektor, viz poznámku 2.18. Ekvivalentně lze říci, že pro každé $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ splňující $\iota \boldsymbol{\lambda}^T A = o$ platí $\iota \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{e}_1 = 0$ a současně … a současně $\iota \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{e}_m = 0$, kde 0 je nula tělesa F a $\boldsymbol{e}_i$ je sloupcový vektor mající jedničku tělesa F na i-tém místě a na ostatních místech nuly pro $i = 1, \ldots, m$, opět viz poznámku 2.18. To jinými slovy znamená, že podmínku 2.11.(2) Fredholmovy věty 2.11 není možné splnit pro $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$. Dle Fredholmovy věty 2.11 ekvivalentně platí, že každá ze soustav $Ax = \boldsymbol{e}_1, \ldots, Ax = \boldsymbol{e}_m$ má řešení. To ale dle lemmatu 2.16 ekvivalentně znamená, že soustava lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ má řešení pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in F^m$. □

2.20.c. *Poznámka.* Jestliže $m = 0$, potom vektorový prostor F^m je triviální a soustava $Ax = \boldsymbol{b}$ má vždy řešení pro každou (jedinou možnou) volbu pravé strany $\boldsymbol{b} \in F^m$, která je nutně počátkem prostoru F^m; dokonce každý bod prostoru W (např. bod $x = 0 \in W$) je řešením této soustavy. Podaný důkaz 2.20.b je ale korektní i v případě, že $m = 0$.

2.21. Poznámka. Erik Ivar FREDHOLM (1866–1927), švédský matematik. Studoval na univerzitě v Uppsale. Pak působil na univerzitě ve Stockholmu. Je znám zejména jako budovatel teorie integrálních rovnic (viz např. [47]). [73], [81].

2.22. Nechť W a V jsou vektorové prostory nad tělesem F a nechť m je přirozené číslo (může být také $m = 0$). V definici 1.46 jsme uvedli, co to znamená, že lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in W^\#$ jsou V-lineárně nezávislé. Nyní se vrátíme k odstavci 1.47, kde jsme uvedli, že formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou V-lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé nebo když vektorový prostor V je triviální. Platnost implikace „$\Leftarrow$“, kterou jsme zatím nedokázali, ukážeme pomocí „Fredholmovy alternativy“ 2.20, která vychází z Fredholmovy věty 2.11.

2.23. Tvrzení. *Nechť W a V jsou vektorové prostory nad tělesem F. Budiž dáno přirozené číslo m (i $m = 0$) a lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in W^\#$. Lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou V-lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé nebo vektorový prostor V je triviální.*

2.23.a. *Poznámka.* Uveďme ekvivalentní formulace uvedeného tvrzení. Lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou V-lineárně závislé (a vektorový prostor V je netriviální) právě tehdy, když jsou lineárně závislé a vektorový prostor V je netriviální. Jestliže vektorový prostor V je netriviální, potom platí: lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou V-lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé.

2.23.b. *Důkaz.* Implikaci „$\Rightarrow$“ jsme dokázali již v tvrzení 1.48. Zbývá dokázat implikaci „$\Leftarrow$“. Jestliže vektorový prostor V je triviální, potom lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou jistě V-lineárně nezávislé (viz definici 1.46). Předpokládejme tedy, že lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineárně nezávislé. Sestavme jejich součin $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ (definice 1.53; jestliže $m = 0$, potom nejde o součin, ale zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ je zavedeno definicí 1.59). Dle „Fredholmovy alternativy“ 2.20 pak soustava lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ má řešení pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in F^m$. Odtud (pomocí lemmatu 2.16) plyne, že existuje bod $x_1 \in W$ takový, že $Ax_1 = \boldsymbol{e}_1$, a zároveň ... a zároveň existuje bod $x_m \in W$ takový, že $Ax_m = \boldsymbol{e}_m$, kde $\boldsymbol{e}_i$ jsou standardní jednotkové vektory mající jedničku tělesa F na i-tém místě a nuly tělesa F jinde (viz definici 1.57) pro $i = 1, \ldots, m$. (Alternativně lze použít důkaz 2.20.b bez jeho závěru.)

Nechť pro nějaké $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$ platí rovnost $\iota\boldsymbol{u}^T A = \iota u_1 \alpha_1 + \cdots + \iota u_m \alpha_m = o$, kde o je nulové lineární zobrazení $o: W \to V$. Uvedenou rovnost vyhodnotíme v získaných bodech $x_1, \ldots, x_m$: Levá strana dává $\iota\boldsymbol{u}^T A x_i = \iota u_1 \alpha_1(x_i) + \cdots + \iota u_m \alpha_m(x_i) = u_i$ pro $i = 1, \ldots, m$. Pravá strana dává $o(x_i) = 0$ pro $i = 1, \ldots, m$. Dohromady máme $u_i = 0$ pro $i = 1, \ldots, m$, přičemž 0 je počátek vektorového prostoru V. Vidíme, že (dle poznámky 2.18) lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou V-lineárně nezávislé. □

2.24. V definici 1.46 jsme zavedli také pojem V-báze prostoru $W_V^\#$. V odstavci 1.49 jsme pak předeslali, že V-báze prostoru $W_V^\#$ nemusí vždy existovat. V tvrzení 1.50 jsme uvedli podmínku, která je pro existenci V-báze nutná. Úplnou odpověď (totiž že uvedená nutná podmínka je zároveň podmínkou postačující) podá následující tvrzení 2.25.

2.25. Tvrzení. *Nechť W a V jsou vektorové prostory nad tělesem F. Potom následující tři výroky jsou ekvivalentní: (1) Prostor $W_V^\#$ má alespoň jednu V-bázi. (2) Obor hodnot $\operatorname{Rng}\gamma$ každého zobrazení $\gamma \in W_V^\#$ je konečněrozměrným podprostorem vektorového prostoru V. (3) Dimenze vektorového prostoru W je konečná nebo dimenze vektorového prostoru V je konečná.*

2.25.a. *Důkaz.* Důkaz implikací „(1) $\Rightarrow$ (2)“ a „(2) $\Rightarrow$ (3)“ jsme podali již v tvrzení 1.50. Zbývá dokázat implikaci „(3) $\Rightarrow$ (1)“.

Předně, jestliže vektorový prostor V je nulový, potom V-báze prostoru $W_V^{\#}$ existuje, a je to prázdná množina. Za popsaných okolností je totiž každé zobrazení $\gamma\colon W \to V$ nulové. Tedy $W_V^{\#} = \{o\}$, kde $o\colon W \to V$ je nulové lineární zobrazení. Avšak $\mathrm{Lin}_V\, \emptyset = \{o\} = W_V^{\#}$. Navíc platí, že prázdná množina $\emptyset$ je V-lineárně nezávislá. Prázdná množina $\emptyset$ je tedy V-báze prostoru $W_V^{\#}$. (Každý z posledních tří závěrů plyne ihned z definice 1.46.) Nadále předpokládejme, že vektorový prostor V je nenulový.

Předpokládejme, že dimenze vektorového prostoru W je konečná a že vektorový prostor V je nenulový. Našim cílem bude najít (nějakou) bázi $B \subseteq W^{\#}$ algebraického duálu $W^{\#}$ vektorového prostoru W a o této bázi B ukázat, že je V-bází prostoru $W_V^{\#}$.

Poznamenáváme, že bázi B algebraického duálu $W^{\#}$ je možné sestrojit konstruktivním způsobem. Jestliže dimenze vektorového prostoru W je konečná, znamená to, že prostor W má alespoň jednu bázi a současně platí, že tato báze má jen konečně mnoho prvků. (Za pozornost stojí, že na tomto místě nepoužíváme axiom výběru, resp. Zornovo lemma 1.31 resp. tvrzení 1.32. (!) Stačí si uvědomit, na základě čeho tvrdíme, že dimenze vektorového prostoru W je konečná.) Existuje tedy přirozené číslo m a existují lineárně nezávislé vektory $x_1, \dots, x_m \in W$ takové, že množina $\{x_1, \dots, x_m\}$ je báze vektorového prostoru W. Pak každý vektor $x \in W$ jednoznačně určuje skaláry $\bar\lambda_1, \dots, \bar\lambda_m \in F$ takové, že $x = \bar\lambda_1 x_1 + \dots + \bar\lambda_m x_m$. Tento předpis jednoznačně určuje lineární formy $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in W^{\#}$ tak, aby rovnost $x = \big(\lambda_1(x)\big)x_1 + \dots + \big(\lambda_m(x)\big)x_m$ platila pro každé $x \in W$. (Viz poznámku 1.72.) Ukážeme, že množina $B = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ je báze prostoru $W^{\#}$. Nechť je dána lineární forma $\alpha \in W^{\#}$. Pro libovolné $x \in W$ zřejmě platí $\alpha(x) = (\lambda_1(x)\big)\alpha(x_1) + \dots + \big(\lambda_m(x)\big)\alpha(x_m)$. Takže $\alpha = \iota\mu_1\lambda_1 + \dots + \iota\mu_m\lambda_m$, kde $\mu_i = \alpha(x_i)$ pro $i = 1, \dots, m$. Dále je zřejmé, že sestrojené formy $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou lineárně nezávislé. (Kdyby např. $\lambda_m = \iota\tilde\mu_1\lambda_1 + \dots + \iota\tilde\mu_{m-1}\lambda_{m-1}$ pro vhodná $\tilde\mu_1, \dots, \tilde\mu_{m-1} \in F$, potom $x_m = 0$, což by byl spor.) Ukázali jsme, že množina B je báze duálu $W^{\#}$, čímž je popis její konstrukce ukončen.

Nechť je dáno libovolné lineární zobrazení $\gamma \in W_V^{\#}$. Již víme, že pro každé $x \in W$ platí rovnice $x = \big(\lambda_1(x)\big)x_1 + \dots + \big(\lambda_m(x)\big)x_m$, kde $\{x_1, \dots, x_m\}$ je báze vektorového prostoru W a $B = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ je báze jeho algebraického duálu $W^{\#}$. Pro každé $x \in W$ tedy platí $\gamma(x) = \big(\lambda_1(x)\big)\gamma(x_1) + \dots + \big(\lambda_m(x)\big)\gamma(x_m)$. To znamená, že zobrazení γ je V-lineární kombinací lineárních forem $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, protože $\gamma = \iota u_1\lambda_1 + \dots + \iota u_m\lambda_m$, kde $u_i = \gamma(x_i)$ pro $i = 1, \dots, m$. Dokázali jsme, že $\mathrm{Lin}_V\, B = W_V^{\#}$. Zbývá dokázat, že množina B je V-lineárně nezávislá. To však plyne ihned z předcházejícího tvrzení 2.23, protože vektorový prostor V je nenulový. Důkaz, že množina B je V-báze prostoru $W_V^{\#}$ je tak završen.

Nyní předpokládejme, že dimenze vektorového prostoru V je konečná. Současně ale předpokládejme, že vektorový prostor V je nenulový. Obdobně jako výše tedy existuje nenulové přirozené číslo m, existují lineárně nezávislé vektory $\tilde u_1, \dots, \tilde u_m \in V$ a existují (lineárně nezávislé) formy $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in V^{\#}$ tak, že pro každé $u \in V$ platí rovnice $u = \big(\lambda_1(u)\big)\tilde u_1 + \dots + \big(\lambda_m(u)\big)\tilde u_m$, viz poznámku 1.72. Zvolme libovolnou bázi $B \subseteq W^{\#}$ algebraického duálu $W^{\#}$. (Existence alespoň jedné báze plyne z tvrzení 1.32. Na tomto místě používáme axiom výběru resp. Zornovo lemma 1.31.) Ukážeme, že množina B je V-báze prostoru $W_V^{\#}$. Zvolme libovolné zobrazení $\gamma \in W_V^{\#}$. Dále zvolme libovolné $x \in W$ a položme $u = \gamma(x)$. Vidíme, že $\gamma(x) = u = \big(\lambda_1\big(\gamma(x)\big)\big)\tilde u_1 + \dots + \big(\lambda_m\big(\gamma(x)\big)\big)\tilde u_m$. Formální úpravou dostáváme $\gamma(x) = \iota\tilde u_1\lambda_1\gamma(x) + \dots + \iota\tilde u_m\lambda_m\gamma(x)$, přičemž $\iota\tilde u_i\lambda_i\gamma$ označuje zobrazení vzniklé složením lineárního zobrazení $\gamma\colon W \to V$, formy $\lambda_i\colon V \to F$ a zobrazení $\iota u_i\colon F \to V$ pro $i = 1, \dots, m$. Vidíme, že zobrazení γ je V-lineární kombinací forem $\lambda_1\gamma, \dots, \lambda_m\gamma$ (tj. zobrazení vzniklých složením zobrazení γ po řadě s formami $\lambda_1, \dots, \lambda_m$), které jsou prvky algebraického duálu $W^{\#}$. Každou z forem $\lambda_1\gamma, \dots, \lambda_m\gamma$ je možné vyjádřit jako lineární kombinaci forem z báze B. Pak stačí dosadit do uvedené rovnice, abychom dostali, že zobrazení γ je možné vyjádřit jako V-lineární kombinaci prvků z báze B.

(Proveďme to. Pro $i = 1, \dots, m$ existuje přirozené číslo n_i, existují lineární formy $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in_i} \in B$ a existují skaláry $\mu_{i1}, \dots, \mu_{in_i} \in F$ tak, že $\lambda_i\gamma = \iota\mu_{i1}\alpha_{i1} + \cdots \cdots + \iota\mu_{in_i}\alpha_{in_i}$. Nyní vidíme, že $\gamma = \iota\tilde{u}_1\lambda_1\gamma + \cdots + \iota\tilde{u}_m\lambda_m\gamma = \iota\tilde{u}_1\iota\mu_{11}\alpha_{11} + \cdots \cdots + \iota\tilde{u}_1\iota\mu_{1n_1}\alpha_{1n_1} + \cdots + \iota\tilde{u}_m\iota\mu_{m1}\alpha_{m1} + \cdots + \iota\tilde{u}_m\iota\mu_{mn_m}\alpha_{mn_m} = \iota(\mu_{11}\tilde{u}_1)\alpha_{11} + \cdots \cdots + \iota(\mu_{1n_1}\tilde{u}_1)\alpha_{1n_1} + \cdots + \iota(\mu_{m1}\tilde{u}_m)\alpha_{m1} + \cdots + \iota(\mu_{mn_m}\tilde{u}_m)\alpha_{mn_m}$.)

Dokázali jsme, že $\mathrm{Lin}_V B = W_V^\#$. Zbývá dokázat, že množina B je V-lineárně nezávislá. To provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje nenulové přirozené číslo n, existují navzájem různé lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in B$ a existují nenulové vektory $u_1, \dots \dots, u_n \in V$ tak, že $\iota u_1\alpha_1 + \cdots + \iota u_n\alpha_n = o$, kde o je nulové lineární zobrazení $o\colon W \to V$. To znamená, že lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou V-lineárně závislé. Podle tvrzení 2.23 jsou ovšem také lineárně závislé, protože vektorový prostor V je nenulový. A to je spor. Opět jsme dokázali, že množina B je V-báze prostoru $W_V^\#$. □

2.26. Provedený důkaz 2.25.a naznačil, že každá báze prostoru $W^\#$ je současně V-bází prostoru $W_V^\#$ (jestliže V je nenulový). Je přirozené se ptát, zda platí také obrácené tvrzení, zda každá V-báze prostoru $W_V^\#$ je také bází prostoru $W^\#$ – za předpokladu, že prostor V je nenulový, ovšem.

2.27. Tvrzení. *Nechť W a V jsou vektorové prostory nad tělesem F. Prostor V budiž nenulový. Potom platí tato dvě tvrzení:*

I. *Jestliže množina $B \subseteq W^\#$ je V-báze prostoru $W_V^\#$, potom je také bází algebraického duálu $W^\#$.*

II. *Jestliže prostor $W_V^\#$ má alespoň jednu V-bázi, potom každá báze $B \subseteq W^\#$ algebraického duálu $W^\#$ je zároveň V-bází prostoru $W_V^\#$.*

2.27.a. *Poznámka.* Uvedené tvrzení lze formulovat také následovně: Nechť vektorový prostor V je nenulový a nechť prostor $W_V^\#$ má alespoň jednu V-bázi (jsou splněny podmínky pro existenci V-báze, viz např. předcházející tvrzení 2.25). Potom daná množina $B \subseteq W^\#$ je V-bází prostoru $W_V^\#$ právě tehdy, když je bází prostoru $W^\#$.

2.27.b. *Poznámka.* Jestliže vektorový prostor V je nulový, potom V-bází prostoru $W_V^\#$ je prázdná množina. (Prázdná množina má všechny potřebné vlastnosti. Viz též začátek důkazu 2.25.a.)

2.27.c. *Důkaz.* I. Nechť $B \subseteq W^\#$ je V-báze prostoru $W_V^\#$. Budiž dána lineární forma $\alpha \in W^\#$. Chceme dokázat, že formu α lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků množiny B. Víme, že vektorový prostor V je nenulový, existuje tedy nenulový vektor $\varepsilon \in V$. Zobrazení $\iota\varepsilon\alpha\colon W \to V$, vzniklé složením lineární formy $\alpha\colon W \to F$ a zobrazení $\iota\varepsilon\colon F \to V$, ovšem můžeme vyjádřit jako V-lineární kombinaci prvků V-báze B. Takže pro vhodné přirozené číslo m, pro vhodné lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in B$ a pro vhodné vektory $u_1, \dots, u_m \in V$ platí $\iota\varepsilon\alpha = \iota u_1\alpha_1 + \cdots + \iota u_m\alpha_m$. Odtud plyne, že $\bigcap_{i=1}^m \mathrm{Ker}\,\alpha_i \subseteq \mathrm{Ker}\,\iota\varepsilon\alpha$. Avšak vektor ε je nenulový, takže platí $\mathrm{Ker}\,\iota\varepsilon\alpha = \mathrm{Ker}\,\alpha$. Základní lemma 2.3 pak dává, že lineární formu α lze vyjádřit jako lineární kombinaci forem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Zbývá dokázat, že množina B je lineárně nezávislá. Postupujme sporem. Kdyby existovalo nenulové přirozené číslo m, existovaly navzájem různé lineární formy $\alpha_1, \dots \dots, \alpha_m \in B$ a existovaly nenulové skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$ (pro $i = 1, \dots, m$ platí $\lambda_i \neq 0$) takové, že $\iota\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \iota\lambda_m\alpha_m = o$, kde o je nulová lineární forma $o\colon W \to F$, znamenalo by to, že formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou lineárně závislé. Podle tvrzení 1.48 jsou také V-lineárně závislé vzhledem k tomu, že vektorový prostor V je nenulový. A to je spor. Takže množina B je (algebraickou) bází duálního vektorového prostoru $W^\#$.

II. Důkaz jsme vlastně provedli již v důkazu 2.25.a. Zde uvedeme jen několik doplnění. Jestliže prostor $W_V^\#$ má alespoň jednu V-bázi, potom dimenze prostoru W je konečná nebo dimenze prostoru V je konečná (viz tvrzení 1.50). Nechť nejprve dimenze vektorového prostoru V je konečná a současně nenulová. Budiž dána libovolná báze $B \subseteq W^{\#}$ algebraického duálu $W^{\#}$. Ukážeme, že B je V-báze prostoru $W_V^{\#}$: lze postupovat stejně jako v důkazu 2.25.a (snad jen s tím rozdílem, že zde axiom výběru, resp. Zornovo lemma 1.31 či tvrzení 1.32, nepotřebujeme). Nyní nechť dimenze prostoru W je konečná – je rovna přirozenému číslu m. Existují tedy (navzájem různé) vektory $x'_1, \ldots \ldots, x'_m \in W$ tak, že množina $\{x'_1, \ldots, x'_m\}$ tvoří bázi vektorového prostoru W. Potom dimenze vektorového prostoru $W^{\#}$ je také rovna přirozenému číslu m. (V důkazu 2.25.a jsme sestrojili bázi prostoru $W^{\#}$, která měla m prvků.) Zvolme libovolnou bázi B vektorového prostoru $W^{\#}$ – ne nutně tu, kterou jsme sestrojili v důkazu 2.25.a. Ze Steinitzovy věty o výměně [78: věta VI.5.7] nebo z tvrzení 1.32 plyne, že množina B má také m prvků. Existují tedy navzájem různé lineární formy $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in W^{\#}$ takové, že $B = \{\lambda_1, \ldots \ldots, \lambda_m\}$. Máme také body $x'_1, \ldots, x'_m$. Způsobem, který velmi připomíná Gaussovu eliminační metodu, najdeme body $x_1, \ldots, x_m$ – lineární kombinace bodů $x'_1, \ldots, x'_m$ – tak, aby $\lambda_i(x_j) = \delta_{ij}$, kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta, pro $i, j = 1, \ldots, m$. (Připomeňme, že $\delta_{ij} = 1$ (jednotka tělesa F) právě tehdy, když $i = j$, a $\delta_{ij} = 0$ (nula tělesa F) právě tehdy, když $i \neq j$, pro $i, j = 1, \ldots, m$. Velmi stručně také naznačme provedení Gaussovy eliminační metody: Skaláry $\lambda_j(x'_i)$, kde $i, j = 1, \ldots, m$, napišme do čtvercové tabulky; je-li index i zvolen pevně a index j se mění, píšeme do stejného řádku; je-li index j zvolen pevně a index i se mění, píšeme do stejného sloupce. Atd.) Samozřejmě, že výsledná množina $\{x_1, \ldots, x_m\}$ bude bází prostoru W. A nyní již můžeme postupovat stejně jako v prostřední části důkazu 2.25.a. Připomeňme předpoklad, že prostor V je nenulový. Následně ověříme, že zvolená množina B je V-bází prostoru $W_V^{\#}$. □

2.27.d. *Ještě jeden, snad kratší důkaz části II.* Jestliže prostor $W_V^{\#}$ má alespoň jednu V-bázi, potom obor hodnot $\operatorname{Rng}\gamma$ každého zobrazení $\gamma \in W_V^{\#}$ je konečněrozměrným podprostorem vektorového prostoru V (část I. tvrzení 1.50). Zvolme libovolné zobrazení $\gamma \in W_V^{\#}$. Podle tvrzení 1.44 je možné jej napsat jako V-lineární kombinaci nějakých lineárních forem z $W^{\#}$. Existuje tedy přirozené číslo m, existují vektory $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m \in V$ a existují lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in W^{\#}$ takové, že $\gamma = \iota\tilde{u}_1\alpha_1 + \cdots + \iota\tilde{u}_m\alpha_m$. Budiž dána libovolná algebraická báze $B \subseteq W^{\#}$ duálu $W^{\#}$. Každou z lineárních forem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ vyjádříme jako F-lineární kombinaci forem z báze B. Získané vyjádření pak za $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ dosadíme do výše uvedené rovnice. (To provedeme stejně jako v poslední části důkazu 2.25.a. Jediný rozdíl je v tom, že v důkazu 2.25.a jsme vyjadřovali formy $\lambda_i\gamma$, kdežto zde potřebujeme vyjádřit lineární formy α_i pro $i = 1, \ldots, m$.) Vidíme, že zobrazení γ je možné vyjádřit jako V-lineární kombinaci forem z množiny B. To dokazuje, že $\operatorname{Lin}_V B = W_V^{\#}$. Zbývá dokázat, že množina B je V-lineárně nezávislá. Ale to provedeme stejně jako na konci důkazu 2.25.a, přičemž využijeme předpoklad, že prostor V je nenulový. □

2.28. Dosažené výsledky. Uvedli jsme obecný tvar základního lemmatu 2.3 lineární algebry i zobecněnou Fredholmovu větu 2.11. V tvrzení 2.23 jsme uvedli vztah mezi lineární a V-lineární nezávislosti lineárních forem. V tvrzení 2.25 jsme zodpověděli otázku týkající se problému existence V-báze prostoru $W_V^{\#}$. V posledním tvrzení 2.27 jsme uvedli další vlastnosti V-báze.

§ 3 Grupy, tělesa a vektorové prostory s lineárním uspořádáním

3.1. Definice. Lineárně uspořádaná grupa. *Lineárně uspořádanou grupou* rozumíme uspořádanou pětici $(G, \cdot, ^{-1}, 1, \leq)$ splňující, že $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa, viz definici 1.1, a „$\leq$“ je binární relace na množině G splňující dvě sady podmínek, které uvedeme. Vsuňme, že pro každé dva prvky $a, b \in G$ píšeme $b \geq a$ právě tehdy, když $a \leq b$. První sadou podmínek, které relace „$\leq$“ musí splňovat, je, že pro každé dva prvky $a, b \in G$ platí $b^{-1} \cdot a \leq 1$, právě když $a \leq b$, právě když $a \cdot b^{-1} \leq 1$. (Odtud plyne, že pro všechna $a \in G$ je $a \geq 1$ právě tehdy, když $a^{-1} \leq 1$ – protože $a \geq 1$, právě když $1 \leq a$, právě když $1 \cdot a^{-1} = a^{-1} \leq 1$.) Druhou sadou podmínek je, že pro každé dva prvky $a, b \in G$ jsou splněny následující tři výroky:

$$\begin{gathered} a \geq 1 \ \vee \ a \leq 1\,, \\ a \geq 1 \ \wedge \ a \leq 1 \implies a = 1\,, \\ a \geq 1 \ \wedge \ b \geq 1 \implies a \cdot b \geq 1\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Tímto je definice lineárně uspořádané grupy završena.

Přijímáme (poněkud nepřesnou) konvenci, že „jestliže $\hat{G}$ je lineárně uspořádaná grupa, potom $\hat{G}$ je grupa“. Této konvenci je třeba rozumět následovně: jestliže $\hat{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1, \leq)$ je lineárně uspořádaná grupa dle této definice 3.1, viz výše, potom $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa dle definice 1.1. Jinými slovy, odebráním poslední, páté složky z uspořádané pětice, která je lineárně uspořádanou grupou, dostáváme uspořádanou čtveřici, která je grupou. Uvedená konvence nám umožňuje využívat veškeré názvosloví, zvyklosti atp., které jsme zavedli pro grupy už v definicích 1.1 a 1.2. Jestliže $(G, \cdot, ^{-1}, 1, \leq)$ je lineárně uspořádaná grupa, je samozřejmé, že zmíněné názvosloví, zvyklosti atp. se vztahuje ke grupě $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$. Pro příklad uveďme, že o grupě $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ můžeme hovořit jen jako o „grupě G“, že znak násobení „$\cdot$“ lze vynechávat (např. místo „$a \cdot b$“ píšeme jen „ab“) atd.

Nechť $(G, \cdot, ^{-1}, 1, \leq)$ je lineárně uspořádaná grupa. O lineárně uspořádané grupě $(G, \cdot, ^{-1}, 1, \leq)$ můžeme ekvivalentně hovořit také jako o *grupě s lineárním uspořádáním*. Vzhledem k výše uvedené (byť trochu nepřesné) konvenci můžeme ve stručnosti hovořit rovněž o „lineárně uspořádané grupě G s uspořádáním ‚$\leq$‘“ nebo o „grupě G s lineárním uspořádáním ‚$\leq$‘“. Jestliže víme, že grupa G (tj. grupa $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$) je komutativní, potom toto slovo („komutativní“) vkládáme do výše uvedených slovních obratů. Hovoříme tedy o „lineárně uspořádané komutativní grupě“ nebo o „komutativní grupě s lineárním uspořádáním“, případně můžeme hovořit o „lineárně uspořádané komutativní grupě G s uspořádáním ‚$\leq$‘“ nebo o „komutativní grupě G s lineárním uspořádáním ‚$\leq$‘“. Kromě slova „komutativní“ lze použít také slovo „Abelova“ nebo „abelovská“.

Nechť $(G, \cdot, ^{-1}, 1, \leq)$ je grupa s lineárním uspořádáním. Povšimněme si, že relace „$\leq$“ je na množině G reflexivní, tranzitivní, antisymetrická a že každé dva prvky grupy G jsou relací „$\leq$“ porovnatelné. To znamená, že množina G je relací „$\leq$“ lineárně uspořádána, viz definici 1.27, odtud pojem „lineárně uspořádaná grupa“. (Nechť $a, b, c \in G$. Reflexivita: Především máme $1 \geq 1$ nebo $1 \leq 1$. Odtud $1 \leq 1$. Nyní $a \leq a$ právě tehdy, když $a \cdot a^{-1} = 1 \leq 1$. Tranzitivita: Máme $a \leq b$ a současně $b \leq c$, ekvivalentně $b^{-1} \cdot a \leq 1$ a $c^{-1} \cdot b \leq 1$, ekvivalentně $a^{-1} \cdot b \geq 1$ a $b^{-1} \cdot c \geq 1$. Odtud $a^{-1} \cdot b \cdot b^{-1} \cdot c = a^{-1} \cdot c \geq 1$, ekvivalentně $c^{-1} \cdot a \leq 1$, ekvivalentně $a \leq c$. Antisymetrie: Máme $a \leq b$ a $b \leq a$, ekvivalentně $a \cdot b^{-1} \leq 1$ a současně $b \cdot a^{-1} \leq 1$. Ovšem $b \cdot a^{-1} \leq 1$, právě když $a \cdot b^{-1} \geq 1$. Odvodíme $a \cdot b^{-1} = 1$, ekvivalentně $a = b$. Porovnatelnost: Máme totiž $a \cdot b^{-1} \leq 1$ nebo $a \cdot b^{-1} \geq 1$. Ekvivalentně máme $a \cdot b^{-1} \leq 1$ nebo $b \cdot a^{-1} \leq 1$, ekvivalentně $a \leq b$ nebo $b \leq a$.)

Dále, jestliže prvky $a, b \in G$ splňují $a \leq b$, potom pro každé $c \in G$ platí $a \cdot c \leq b \cdot c$ a zároveň $c \cdot a \leq c \cdot b$. (Vztah $a \leq b$ máme, právě když $a \cdot b^{-1} = a \cdot c \cdot c^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot c) \cdot (b \cdot c)^{-1} \leq 1$, právě když $a \cdot c \leq b \cdot c$. Obdobně $a \leq b$, právě když $b^{-1} \cdot a = b^{-1} \cdot c^{-1} \cdot c \cdot a = (c \cdot b)^{-1} \cdot (c \cdot a) \leq 1$, právě když $c \cdot a \leq c \cdot b$. Dokázali jsme dokonce ekvivalenci. (!))

Odtud již plyne, že když pro prvky $a, b, c, d \in G$ platí $a \leq b$ a současně $c \leq d$, potom platí $a \cdot c \leq b \cdot d$. (Máme $a \leq b$ a $c \leq d$, ekvivalentně $b^{-1} \cdot a \leq 1$ a $c \cdot d^{-1} \leq 1$, ekvivalentně $a^{-1} \cdot b \geq 1$ a $d \cdot c^{-1} \geq 1$. Odtud $a^{-1} \cdot b \cdot d \cdot c^{-1} \geq 1$. Nyní tuto nerovnici násobíme prvkem c zprava a prvkem a zleva. Dostaneme $b \cdot d \geq a \cdot c$, ekvivalentně $a \cdot c \leq b \cdot d$.)

Poznamenejme, že jinou, ekvivalentní definici lineárně uspořádané grupy lze nalézt v [78: definice IV.6.1]. (Přesněji: V [78: definice IV.6.1] se zavádí pojem (částečně) uspořádané grupy. Jestliže požadujeme, aby uspořádání bylo lineární, potom obě definice (tj. ta uvedená v [78: definice IV.6.1] a tato definice 3.1) jsou ekvivalentní. Abychom zde získali definici částečně uspořádané grupy, stačí definici lineárně uspořádané grupy, kterou jsme podali na začátku této definice 3.1, jen mírně upravit: místo požadavku na splnění první z vlastností (1) (aby $a \geq 1$ nebo $a \leq 1$ pro každé $a \in G$) budeme požadovat, aby pouze $1 \leq 1$. V této práci ale využijeme pouze pojem lineárně uspořádané grupy, který je méně obecný. S obecnějším pojmem částečně uspořádané grupy pracovat nebudeme. Proto jsme jej zde jenom stručně zmínili.)

3.2. Definice. Lineárně uspořádané těleso. *Lineárně uspořádaným tělesem* rozumíme uspořádanou osmici $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$, pro kterou platí, že uspořádaná sedmice $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$ je těleso, viz definici 1.3, uspořádaná čtveřice $(F, +, -, 0, \leq)$ je lineárně uspořádaná grupa – připomeňme, že pro každé $\lambda, \mu \in F$ píšeme $\mu \geq \lambda$ právě tehdy, když $\lambda \leq \mu$ – a k tomu pro každé dva prvky $\lambda, \mu \in F$ splňující $\lambda \geq 0$ a $\mu \geq 0$ platí $\lambda \cdot \mu \geq 0$. (Srov. [78: definice IV.6.1].)

Pro pohodlí zopakujme, že pro každé dva prvky $\lambda, \mu \in F$ máme $\mu \geq \lambda$ právě tehdy, když $\lambda \leq \mu$, právě tehdy, když $\lambda - \mu \leq 0$. (Protože aditivní grupa tělesa F je komutativní, požadavek na ekvivalenci s podmínkou $-\mu + \lambda = \lambda - \mu \leq 0$ už není potřebný. Pro každé $\lambda \in F$ dále platí $\lambda \geq 0$ právě tehdy, když $-\lambda \leq 0$ – protože $\lambda \geq 0$, právě když $0 \leq \lambda$, právě když $0 - \lambda = -\lambda \leq 0$.) Pro každé dva prvky $\lambda, \mu \in F$ jsou navíc splněny tyto čtyři výroky:

$$\begin{gathered} \lambda \geq 0 \ \vee \ \lambda \leq 0 \,, \\ \lambda \geq 0 \ \wedge \ \lambda \leq 0 \implies \lambda = 0 \,, \\ \lambda \geq 0 \ \wedge \ \mu \geq 0 \implies \lambda + \mu \geq 0 \,, \\ \lambda \geq 0 \ \wedge \ \mu \geq 0 \implies \lambda \cdot \mu \geq 0 \,. \end{gathered} \tag{1}$$

Protože aditivní grupa tělesa F je grupa s lineárním uspořádáním „$\leq$“, relace „$\leq$“ je relací lineárního uspořádání na množině F. Odtud pojem „lineárně uspořádané těleso“.

Opět přijímáme (poněkud nepřesnou) konvenci, že „pokud $\hat{F}$ je lineárně uspořádané těleso, potom $\hat{F}$ je těleso“. Tato (nepřesná) konvence je ospravedlněna platností následujícího tvrzení: jestliže $\hat{F} = (F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ je lineárně uspořádané těleso, potom $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$ je těleso. Odebráním poslední, osmé složky z uspořádané osmice, která je lineárně uspořádaným tělesem, viz výše, dostáváme uspořádanou sedmici, která je tělesem dle definice 1.3. Následně můžeme využít veškeré zvyklosti a názvosloví apod., které už pro tělesa máme zavedeny definicemi 1.3 a 1.4. Je-li $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ lineárně uspořádané těleso, je samozřejmé, že zmíněné zvyklosti, názvosloví apod. se vztahují k tělesu $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$. Uveďme například, že o tělese $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$ lze stručně hovořit jen jako o „tělese F“.

Budiž dáno lineárně uspořádané těleso $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$. O lineárně uspořádaném tělese $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ lze ekvivalentně hovořit také jako o *tělese s lineárním uspořádáním*. Uvážíme-li výše uvedenou (trochu nepřesnou) konvenci, můžeme stručněji hovořit také o „tělese F s lineárním uspořádáním ‚$\leq$‘“ nebo o „lineárně uspořádaném tělese F s uspořádáním ‚$\leq$‘“. Jenomže v této práci pro označení lineárního uspořádání tělesa F budeme vždy používat znak „$\leq$“ (a od něj odvozený znak „$\geq$“). Proto často budeme hovořit zkrátka jen o „lineárně uspořádaném tělese F“ nebo o „tělese F s lineárním uspořádáním“.

Stále mějme lineárně uspořádané těleso $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$. Jestliže víme, že těleso F je komutativní / nekomutativní, potom tuto skutečnost ve výše uvedené terminologii naznačíme vložením příslušného slova. Hovoříme tedy o „lineárně uspořádaném komutativním / nekomutativním tělese“ nebo o „komutativním / nekomutativním tělese s lineárním uspořádáním“. Případně hovoříme o „komutativním / nekomutativním tělese F (s lineárním uspořádáním ‚$\leq$‘)“ nebo o „lineárně uspořádaném komutativním / / nekomutativním tělese F (s uspořádáním ‚$\leq$‘)“.

Množinu $F_0^+ = \{\, \lambda \in F \;;\; \lambda \geq 0 \,\}$ nazýváme *nezáporným kuželem* tělesa F. Vztahy (1) určují, jaké vlastnosti tento kužel F_0^+ má mít. (Viz též níže uvedenou poznámku 3.40.) Díky již uvedenému vztahu $F_0^+ = \{\, \lambda \in F \;;\; \lambda \geq 0 \,\}$ můžeme říci, že nezáporný kužel F_0^+ je jednoznačně určen relací „$\leq$“, která je na množině F dána. Nyní se na věc podívejme z druhé strany. Ať F_0^+ je libovolná podmnožina množiny F. Na množině F zaveďme relaci „$\leq$“ následujícím předpisem: pro každé $\lambda, \mu \in F$ máme $\mu \geq \lambda$ právě tehdy, když $\lambda \leq \mu$, právě tehdy, když $(\mu - \lambda) \in F_0^+$. Předpokládejme, že zavedená relace „$\leq$“ splňuje vztahy (1) pro každé $\lambda, \mu \in F$. Přeneseně, s trochou „licence“, můžeme říci, že stejné vlastnosti má i výchozí množina F_0^+. Pak je zřejmé, že F je těleso s lineárním uspořádáním „$\leq$“, přičemž „$\leq$“ je relace, kterou jsme právě sestrojili. Vidíme, že mezi všemi relacemi „$\leq$“, s nimiž F je lineárně uspořádané těleso, a všemi nezápornými kuželi F_0^+, přičemž vždy musejí být splněny vztahy (1), je vzájemně jednoznačný vztah. Srov. [78: bod IV.6.2(ii) a odstavec IV.6.9].

Nechť F je těleso s lineárním uspořádáním „$\leq$“. Na nosné množině tělesa F zaveďme další relaci „$<$“ následujícím předpisem: pro všechna $\lambda, \mu \in F$ je $\mu > \lambda$ právě tehdy, když $\lambda < \mu$, právě tehdy, když $\lambda \leq \mu$ a zároveň $\lambda \neq \mu$.

Skalár $\lambda \in F$ je *kladný* právě tehdy, když $\lambda > 0$, je *záporný* právě tehdy, když $\lambda < 0$, je *nekladný* právě tehdy, když $\lambda \leq 0$, a je *nezáporný* právě tehdy, když $\lambda \geq 0$. (Protože v dalším budeme s lineárně uspořádaným tělesem F pracovat převážně jen v souvislosti s (lineárně uspořádanými) vektorovými prostory, o prvcích tělesa F již nyní hovoříme jako o skalárech.)

Množiny F_0^+, F_0^-, F^+, F^- a F^* ať označují po řadě množinu všech nezáporných, nekladných, kladných, záporných a nenulových skalárů tělesa F. Klademe tedy

$$\begin{aligned}
F^+ &= \{\, \lambda \in F \;;\; \lambda > 0 \,\}\,, \\
F^- &= \{\, \lambda \in F \;;\; \lambda < 0 \,\}\,, \\
F_0^- &= \{\, \lambda \in F \;;\; \lambda \leq 0 \,\}\,, \\
F_0^+ &= \{\, \lambda \in F \;;\; \lambda \geq 0 \,\}\,, \\
F^* &= \{\, \lambda \in F \;;\; \lambda \neq 0 \,\}\,.
\end{aligned}$$

(Připomeňme, že množina F_0^+ je nezáporným kuželem tělesa F, viz výše. S množinou F^* jsme se setkali už v definici 1.3.) Zřejmě platí vztah $F^* = F^+ \cup F^-$.

Poznamenejme, že o vztazích $\lambda \leq \mu$, $\lambda \geq \mu$, $\lambda < \mu$ a $\lambda > \mu$, které dva prvky $\lambda, \mu \in F$ mohou nebo nemusí splňovat, hovoříme jako o *nerovnostech.* O prvních dvou z nich hovoříme jako o *neostrých nerovnostech*, o druhých dvou z nich hovoříme jako o *ostrých nerovnostech.* (Pojem nerovnosti je třeba odlišit od pojmu ne-rovnosti, tj. vztahu $\lambda \neq \mu$. Vztah $\lambda = \mu$ je rovnost.)

3.3. Z právě uvedené definice 3.2, kde jsme zavedli pojem lineárně uspořádaného tělesa, ihned dostáváme následující jednoduché tvrzení 3.4.

3.4. Tvrzení. *Jednotka* 1 *lineárně uspořádaného tělesa* $F(+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ *je vždy kladná. Platí tedy*

$$1 > 0\,.$$

3.4.a. *Důkaz.* Pokud platí $1 > 0$, je vše v pořádku. Kdyby platilo $1 \leq 0$, potom už $-1 \geq 0$. Pak ale $(-1) \cdot (-1) = 1 \geq 0$, a protože $1 \neq 0$, musí platit $1 > 0$. □

3.5. Jak hned uvidíme, pojem lineárně uspořádaného vektorového prostoru, který zavedeme v následující definici 3.6, je (v určitém smyslu, tj. volněji řečeno) obecnější než pojem lineárně uspořádaného tělesa zavedený definicí 3.2. Viz též poznámku 3.8 níže. Další elementární vlastnosti lineárně uspořádaných těles proto uvedeme později, a sice společně s elementárními vlastnostmi lineárně uspořádaných vektorových prostorů.

3.6. Definice. Lineárně uspořádaný vektorový prostor. Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaná grupa a nechť $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ je lineárně uspořádané těleso. Pro každé $u, v \in V$ píšeme $v \succeq u$ právě tehdy, když $u \preceq v$, a pro každé $\lambda, \mu \in F$ píšeme $\mu \geq \lambda$ právě tehdy, když $\lambda \leq \mu$. Dále mějme zobrazení „$*$“ definované na kartézském součinu $F \times V$ a jdoucí do množiny V, které každému $\lambda \in F$ a $u \in V$ přiřadí $(\lambda * u) \in V$. Lineárně uspořádaná grupa $(V, +, -, 0, \preceq)$ je *lineárně uspořádaným vektorovým prostorem* nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ (vzhledem k zobrazení „$*$“) právě tehdy, když grupa $(V, +, -, 0)$ je vektorovým prostorem nad tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$ (vzhledem k zobrazení „$*$“), viz definici 1.5, a zároveň pro každý skalár $\lambda \in F$ a pro každý vektor $u \in V$ splňující $\lambda \geq 0$ a současně $u \succeq 0$ platí $\lambda * u \succeq 0$.

Shrňme, že pro každé dva vektory $u, v \in V$ máme $v \succeq u$ právě tehdy, když $u \preceq v$, právě tehdy, když $u - v \preceq 0$. (Odtud plyne, že pro každé $u \in V$ platí $u \succeq 0$ právě tehdy, když $-u \preceq 0$. Důkaz se provede obdobně jako důkaz analogického tvrzení u lineárně uspořádaných těles, viz definici 3.2.) Pro každé $u, v \in V$ a pro každé $\lambda \in F$ dále platí:

$$\begin{gathered} u \succeq 0 \ \vee \ u \preceq 0\,, \\ u \succeq 0 \ \wedge \ u \preceq 0 \implies u = 0\,, \\ u \succeq 0 \ \wedge \ v \succeq 0 \implies u + v \succeq 0\,, \\ \lambda \geq 0 \ \wedge \ u \succeq 0 \implies \lambda * u \succeq 0\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Připomeňme, že v definicích 3.1 a 3.2 jsme přijali (trochu nepřesné) konvence, že „lineárně uspořádaná grupa je grupa“ a že „lineárně uspořádané těleso je těleso“. Díky nim o lineárně uspořádané grupě $(V, +, -, 0, \preceq)$ a o lineárně uspořádaném tělese $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ můžeme hovořit po řadě jako o „grupě V s lineárním uspořádáním ‚$\preceq$‘“ a jako o „tělese F s lineárním uspořádáním ‚$\leq$‘“.

Nechť platí, že $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Stručněji můžeme hovořit o „lineárně uspořádaném vektorovém prostoru V s uspořádáním ‚$\preceq$‘ nad lineárně uspořádaným tělesem F s uspořádáním ‚$\leq$‘ vzhledem k zobrazení ‚$*$‘“. Velmi často bude jasné, s jakým zobrazením „$*$“ pracujeme. Můžeme tedy hovořit jen o „lineárně uspořádaném vektorovém prostoru V s uspořádáním ‚$\preceq$‘ nad lineárně uspořádaným tělesem F s uspořádáním ‚$\leq$‘“. Namísto slovního obratu „lineárně uspořádaný vektorový prostor V s uspořádáním ‚$\preceq$‘“ lze používat také obrat „vektorový prostor V s lineárním uspořádáním ‚$\preceq$‘“. (Slovní obrat „těleso F s lineárním uspořádáním ‚$\leq$‘“ známe už z definice 3.2.) Avšak pro označení lineárního uspořádání vektorového prostoru V v této práci vždy budeme používat znak „$\preceq$“ (a od něj odvozený znak „$\succeq$“; lineární uspořádání tělesa F budeme vždy označovat „$\leq$“, odvozený znak je „$\geq$“). Nehrozí tedy nedorozumění, když znaky „$\preceq$“ a „$\leq$“ neuvedeme. Můžeme proto hovořit stručně jen o „vektorovém prostoru V s lineárním uspořádáním nad lineárně uspořádaným tělesem F“ nebo o „lineárně uspořádaném vektorovém prostoru V nad tělesem F s lineárním uspořádáním“ apod. Je-li nadto jasné, s jakým lineárně uspořádaným tělesem F pracujeme, stačí hovořit pouze o „lineárně uspořádaném vektorovém prostoru V“ nebo o „vektorovém prostoru V s lineárním uspořádáním“.

Také zde (jako už v definicích 3.1 a 3.2) přijmeme (mírně nepřesnou) konvenci, že „lineárně uspořádaný vektorový prostor (nad vhodným lineárně uspořádaným tělesem vzhledem k vhodnému zobrazení) je vektorový prostor (nad daným tělesem a vzhledem k danému zobrazení)“. Tato konvence nám dovolí využít veškeré názvosloví a zvyklosti apod., které už pro vektorové prostory máme zavedeny. Rovněž všechny definice (!), v nichž pojem vektorového prostoru vystupoval jakýmkoliv způsobem, můžeme využít. Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Je samozřejmé, že zmíněné definice, zvyklosti apod. se vztahují k vektorovému prostoru $(V, +, -, 0)$ nad tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Jako příklad přejímaného názvosloví zmiňme třeba pojem počátku (tj. nulového vektoru) vektorového prostoru. Jako příklad přejímaných zvyklostí uveďme třeba vynechávání znaku skalárního násobení „$*$“ a přednost násobení skalárem před sčítáním vektorů. Jako příklad přejímaných definic můžeme uvést třeba pojem podprostoru nebo pojem lineárního zobrazení.

Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$. Protože $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaná grupa, relace „$\preceq$“ je lineárním uspořádáním množiny V. Odtud pojem „lineárně uspořádaný vektorový prostor“.

Množinu $V_0^+ = \{\, u \in V \; ; \; u \succeq 0 \,\}$ nazýváme *nezáporným kuželem* vektorového prostoru V a vztahy (1) určují, jaké tento kužel V_0^+ má mít vlastnosti. (Viz též poznámku 3.40.) Poznamenejme, že mezi všemi nezápornými kuželi V_0^+ (které mají potřebné vlastnosti) a všemi relacemi „$\preceq$“ (které mají náležité vlastnosti a prostor V uspořádávají lineárně) je vzájemně jednoznačný vztah: pro každé $u, v \in V$ totiž máme $v \succeq u$ právě tehdy, když $u \preceq v$, právě tehdy, když $(v - u) \in V_0^+$. Jde o analogii vztahu, se kterým jsme se setkali již u lineárně uspořádaných těles, viz definici 3.2.

Máme-li vektorový prostor V s lineárním uspořádáním „$\preceq$“, pak na jeho nosné množině zavádíme další relaci „$\prec$“ takto: pro každé $u, v \in V$ máme $v \succ u$ právě tehdy, když $u \prec v$, právě tehdy, když $u \preceq v$ a současně $u \neq v$.

Vektor $u \in V$ je *kladný* právě tehdy, když $u \succ 0$, je *záporný* právě tehdy, když $u \prec 0$, je *nekladný* právě tehdy, když $u \preceq 0$, a je *nezáporný* právě tehdy, když $u \succeq$ $\succeq 0$. Množiny V_0^+, V_0^-, V^+ a V^- ať označují po řadě množinu všech nezáporných, nekladných, kladných a záporných vektorů prostoru V. Klademe tedy

$$\begin{aligned} V^+ &= \{\, u \in V \; ; \; u \succ 0 \,\}\,, \\ V^- &= \{\, u \in V \; ; \; u \prec 0 \,\}\,, \\ V_0^- &= \{\, u \in V \; ; \; u \preceq 0 \,\}\,, \\ V_0^+ &= \{\, u \in V \; ; \; u \succeq 0 \,\}\,. \end{aligned}$$

(V případě množiny V_0^+ jen opakujeme definici nezáporného kužele, viz výše.)

Poznamenejme, že také o vztazích $u \preceq v$, $u \succeq v$, $u \prec v$ a $u \succ v$, které dva vektory $u, v \in V$ mohou nebo nemusí splňovat, hovoříme jako o *nerovnostech*. První dvě z nich jsou *neostré nerovnosti*, druhé dvě z nich jsou *ostré nerovnosti.* (Ne-rovnost je vztah $u \neq v$. Rovnost je vztah $u = v$.)

3.7. Poznámka. Z formálního hlediska jsme uvedenou definicí 3.6 na Universu teorie množin zavedli ternární predikát „nějaké $\hat{V}$, nějaké $\hat{F}$ a nějaké ‚$*$‘ být lineárně uspořádaný vektorový prostor“, srov. obdobnou poznámku 1.6.

Nutnou podmínkou pro splnění tohoto ternárního predikátu samozřejmě je, aby $\hat{V}$ byla lineárně uspořádaná grupa (takže pro vhodné V, „$+$“, „$-$“, 0 a „$\preceq$“ platí $\hat{V} = (V, +, -, 0, \preceq)$), aby $\hat{F}$ bylo lineárně uspořádané těleso ($\hat{F}$ tedy musí být tvaru $\hat{F} = (F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$) a aby „$*$“ bylo vhodné zobrazení (totiž $*\colon F \times V \to V$).

Kdykoliv hovoříme o lineárně uspořádaném vektorovém prostoru, máme na mysli platnost uvedeného ternárního predikátu. Pracujeme-li tedy s nějakým lineárně uspořádaným vektorovým prostorem V, pracujeme také s příslušným lineárně uspořádaným tělesem F a vhodným zobrazením „$*$“ tak, aby výše uvedený ternární predikát byl splněn, třebaže těleso F nebo zobrazení „$*$“ nebude výslovně zmíněno.

Věnujme ještě pozornost následující slovní konstrukci, se kterou (případně obdobnou) se budeme často setkávat: „Nechť W je vektorový prostor (‚bez lineárního uspořádání‘) nad lineárně uspořádaným tělesem F (vzhledem k ‚$*$‘)“. Požadujeme tedy splnění jakéhosi ternárního predikátu. Avšak žádný takový predikát jsme nedefinovali. (!) Aby mohl být splněn ternární predikát z poznámky 1.6, těleso F by nesmělo být lineárně uspořádané, zatímco aby mohl být splněn ternární predikát ze začátku této poznámky 3.7, na prostoru W bychom museli mít dáno nějaké vhodné lineární uspořádání. Abychom naznačené slovní konstrukci porozuměli, odvoláváme se na konvenci z definice 3.2, že „lineárně uspořádané těleso je těleso“. Popsané slovní konstrukci tedy rozumíme takto: Je dáno lineárně uspořádané těleso F, dále je dána nějaká grupa W a nějaké zobrazení „$*$“. Jako F' označme výsledek odebrání poslední složky uspořádané osmice F. Uvedenou slovní konstrukcí žádáme, aby W byl vektorový prostor nad tělesem F' (vzhledem k „$*$“).

3.8. Poznámka. Vztah mezi relací „$\preceq$“ a relací „$\leq$“. Srovnejme definice lineárně uspořádaného tělesa a lineárně uspořádaného vektorového prostoru, tj. definice 3.2 a 3.6. Zaměřme svoji pozornost obzvláště na vztahy 3.2.(1) a 3.6.(1), které určují vlastnosti příslušných nezáporných kuželů. Povšimněme si, že pokud ve vztazích 3.6.(1) namísto všech znaků „$\preceq$“ a „$\succeq$“ napíšeme po řadě znaky „$\leq$“ a „$\geq$“, dostaneme přesně vztahy 3.2. .(1). (K tomu je ještě potřeba proměnné u a v vhodně přejmenovat na proměnné λ a μ.) Vidíme, že definice lineárně uspořádaného tělesa, tj. definice 3.2, je „jakoby odvozena“ od definice lineárně uspořádaného vektorového prostoru, tj. definice 3.6. Ekvivalentně, s trochou „licence“ ovšem, můžeme říci, že definice 3.6 lineárně uspořádaného vektorového prostoru „jakoby zobecňuje“ definici 3.2 lineárně uspořádaného tělesa. (Na druhou stranu se musíme smířit s tím, že definici lineárně uspořádaného vektorového prostoru je možné podat až po zavedení pojmu lineárně uspořádaného tělesa.)

Nechť tedy $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k vhodnému zobrazení „$*$“. Výše uvedený závěr, stále s trochou „licence“, můžeme formulovat také tak, že „relace ‚$\preceq$‘ jakoby zobecňuje relaci ‚$\leq$‘“. To znamená, že když nějaké tvrzení je platné pro relaci „$\preceq$“, potom stejné tvrzení platí také pro relaci „$\leq$“. Vlastně nejde o nic překvapivého. Uvedené závěry totiž vycházejí z následujícího jednoduchého pozorování:

Mějme lineárně uspořádané těleso $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$. Povšimněme si, že za grupu $(V, +, -, 0)$ je možné zvolit aditivní grupu $(F, +, -, 0)$ tělesa F, že za relaci „$\preceq$“ lze dosadit relaci „$\leq$“ a že za zobrazení „$*$“ lze dosadit operaci násobení „$\cdot$“ tělesa F. Povšimněme si tedy, že grupa $(V, +, -, 0, \preceq) = (F, +, -, 0, \leq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení-operaci „$* = \cdot$“.

(Připomeňme, obdobný výsledek, který už známe: jestliže F je těleso, potom jeho aditivní grupa je (levý i pravý) vektorový prostor nad tělesem F (vzhledem k operaci násobení tělesa F). Viz definice 1.5 a 1.8.)

Následující tvrzení 3.10 a 3.11 tedy zůstávají v platnosti i tehdy, když místo znaků „$\preceq$“ a „$\succeq$“ v nich napíšeme po řadě znaky „$\leq$“ a „$\geq$“ (a namísto lineárně uspořádaného vektorového prostoru V a zobrazení „$*$“ v nich použijeme po řadě (lineárně uspořádanou) aditivní grupu lineárně uspořádaného tělesa F a operaci „$\cdot$“).

3.9. V několika následujících tvrzeních uvedeme některé elementární vlastnosti lineárně uspořádaných vektorových prostorů a lineárně uspořádaných těles. S ohledem na uvedenou poznámku 3.8 následující dvě tvrzení 3.10 a 3.11 vypovídají také o základních vlastnostech lineárně uspořádaných těles. Viz též poznámku 3.14 níže.

3.10. Tvrzení. *Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Potom pro každý skalár $\lambda \in F$ a pro každý vektor $u \in V$ platí:*

$$\begin{aligned} \lambda \geq 0 \wedge u \succeq 0 &\implies \lambda * u \succeq 0\,, \\ \lambda \leq 0 \wedge u \succeq 0 &\implies \lambda * u \preceq 0\,, \\ \lambda \geq 0 \wedge u \preceq 0 &\implies \lambda * u \preceq 0\,, \\ \lambda \leq 0 \wedge u \preceq 0 &\implies \lambda * u \succeq 0\,. \end{aligned}$$

3.10.a. *Důkaz.* První z těchto čtyř tvrzení jen opakuje poslední vlastnost z 3.6.(1) z definice 3.6. Z ní pak plynou zbývající tři tvrzení. Stačí uvážit, že $\lambda \leq 0$ právě tehdy, když $-\lambda \geq 0$, a že $u \preceq 0$ právě tehdy, když $-u \succeq 0$. Pro důkaz prostředních dvou tvrzení dále uvážíme, že $(-\lambda) * u = \lambda * (-u) = -(\lambda * u)$ a že $-(\lambda * u) \succeq 0$ právě tehdy, když $\lambda * u \preceq 0$. Pro důkaz posledního tvrzení je třeba uvážit, že $(-\lambda) * (-u) = \lambda * u$. □

3.11. Tvrzení. *Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Potom pro každé $\lambda, \mu \in F$ a pro každé $u, v \in V$ platí:*

$$\begin{aligned} u \succeq v \wedge \lambda \geq 0 &\implies \lambda * u \succeq \lambda * v \quad \text{a} \quad u \succeq 0 \wedge \lambda \geq \mu \implies \lambda * u \succeq \mu * u\,, \\ u \preceq v \wedge \lambda \geq 0 &\implies \lambda * u \preceq \lambda * v \quad \text{a} \quad u \succeq 0 \wedge \lambda \leq \mu \implies \lambda * u \preceq \mu * u\,, \\ u \succeq v \wedge \lambda \leq 0 &\implies \lambda * u \preceq \lambda * v \quad \text{a} \quad u \preceq 0 \wedge \lambda \geq \mu \implies \lambda * u \preceq \mu * u\,, \\ u \preceq v \wedge \lambda \leq 0 &\implies \lambda * u \succeq \lambda * v \quad \text{a} \quad u \preceq 0 \wedge \lambda \leq \mu \implies \lambda * u \succeq \mu * u\,. \end{aligned}$$

3.11.a. *Důkaz.* Všech osm tvrzení plyne z předcházejícího tvrzení 3.10. V případě čtyř tvrzení na levé straně využijeme toho, že pro každé $u', v' \in V$ a $\lambda \in F$ máme $u' \succeq v'$, právě když $v' \preceq u'$, právě když $v' - u' \preceq 0$, právě když $u' - v' \succeq 0$, a dále máme $\lambda*(u'-v') = (\lambda*u')-(\lambda*v')$, následně $(\lambda*u')-(\lambda*v') \succeq 0$, právě když $(\lambda*v')-(\lambda*u') \preceq 0$, právě když $(\lambda * v') \preceq (\lambda * u')$, právě když $(\lambda * u') \succeq (\lambda * v')$. Obdobně v případě druhých čtyř tvrzení na pravé straně využijeme toho, že pro každé $u \in V$ a pro každé $\lambda', \mu' \in F$ platí $\lambda' \geq \mu'$, právě když $\mu' \leq \lambda'$, právě když $\mu' - \lambda' \leq 0$, právě když $\lambda' - \mu' \geq 0$, dále platí $(\lambda' - \mu') * u = (\lambda' * u) - (\mu' * u)$, načež $(\lambda' * u) - (\mu' * u) \succeq 0$, právě když $(\mu' * u) - (\lambda' * u) \preceq 0$, právě když $(\mu' * u) \preceq (\lambda' * u)$, právě když $(\lambda' * u) \succeq (\mu' * u)$. Všechny uvedené řetízky ekvivalencí plynou z definice 3.6. Při důkazu první a třetí dvojice tvrzení shora za u' a v' nebo za λ' a μ' dosadíme po řadě u a v nebo λ a μ, při důkazu druhé a čtvrté dvojice tvrzení shora za u' a v' nebo za λ' a μ' dosadíme po řadě v a u nebo μ a λ. Při důkazu posledních tří dvojic tvrzení některé z uvedených řetízků ekvivalencí už není potřeba využívat celé. □

3.12. Tvrzení. *Nechť $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ je lineárně uspořádané těleso. Potom pro každé $\lambda \in F$ platí:*

$$\begin{aligned} \lambda > 0 &\implies \lambda^{-1} > 0\,, \\ \lambda < 0 &\implies \lambda^{-1} < 0\,. \end{aligned}$$

3.12.a. *Důkaz.* Jestliže $\lambda > 0$ nebo $\lambda < 0$, potom $\lambda \neq 0$. Následně také $\lambda^{-1} \neq 0$. Kdyby $\lambda > 0$ a $\lambda^{-1} < 0$ nebo kdyby $\lambda < 0$ a $\lambda^{-1} > 0$, potom $\lambda \cdot \lambda^{-1} = 1 < 0$ – spor. □

3.13. Tvrzení. *Nechť $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ je lineárně uspořádané těleso. Potom pro všechna $\lambda \in F$ platí:*

$$\begin{aligned} \lambda \geq 1 &\iff 0 < \lambda^{-1} \leq 1\,, \\ \lambda \leq -1 &\iff -1 \leq \lambda^{-1} < 0\,. \end{aligned}$$

3.13.a. *Důkaz.* Nejprve dokážeme implikaci „$\Rightarrow$“ prvního tvrzení. Jestliže $\lambda \geq 1$, potom $\lambda > 0$ a $\lambda^{-1} > 0$ dle předcházejícího tvrzení 3.12. Nerovnost $\lambda^{-1} \leq 1$ obdržíme vynásobením vztahu $1 \leq \lambda$ skalárem $\lambda^{-1} \geq 0$ s využitím tvrzení 3.11. Nyní dokážeme implikaci „$\Leftarrow$“ prvního tvrzení. Předně, jestliže $\lambda^{-1} > 0$, potom $(\lambda^{-1})^{-1} = \lambda > 0$ dle předchozího tvrzení 3.12. Vztah $\lambda \geq 1$ nyní dostaneme vynásobením nerovnosti $1 \geq \lambda^{-1}$ skalárem $\lambda \geq 0$, opět dle tvrzení 3.11. Tím je první tvrzení dokázáno. Druhé tvrzení se dokáže obdobně. (Alternativně je možné druhé tvrzení dokázat tím, že všechny nerovnosti v něm vynásobíme skalárem $-1 \leq 0$. Následně použijeme první tvrzení.) $\square$

3.14. Poznámka. Tvrzení 3.10, 3.11 a 3.13 platí i pro ostré nerovnosti, tj. i tehdy, když znaky „$\leq$“ a „$\geq$“ a znaky „$\preceq$“ a „$\succeq$“ v nich nahradíme po řadě znaky „$<$“ a „$>$“ a znaky „$\prec$“ a „$\succ$“. Vzhledem k poznámce 3.8, tvrzení 3.10 a 3.11 platí také tehdy, když znaky „$\leq$“ a „$\geq$“ a znaky „$\preceq$“ a „$\succeq$“ v nich zaměníme po řadě za znaky „$<$“ a „$>$“ a znaky „$<$“ a „$>$“.

(K tvrzení 3.10: rovnost $\lambda * u = 0$ platí právě tehdy, když $\lambda = 0$ nebo $u = 0$.

K tvrzení 3.11: rovnost $\lambda * u = \lambda * v$ máme, právě když $\lambda = 0$ nebo $u = v$; dále je $\lambda * u = \mu * u$, právě když $\lambda = \mu$ nebo $u = 0$.

K tvrzení 3.13: je totiž $\lambda = 1$, právě když $\lambda^{-1} = 1$, a obdobně je $\lambda = -1$, právě když $\lambda^{-1} = -1$.)

3.15. Uveďme několik jednoduchých příkladů lineárně uspořádaných těles a lineárně uspořádaných vektorových prostorů.

3.16. Příklady. Racionální vektorové prostory s lineárním uspořádáním. Jako lineárně uspořádané těleso F zvolme těleso racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Máme tedy $(F, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1, \leq) = (\mathbb{Q}, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1, \leq)$. Jde o množinu všech racionálních čísel vybavenou standardními početními operacemi sčítání, opačné hodnoty, násobení, převrácené hodnoty spolu s jejími prvky nula a jedna a se standardním uspořádáním, přičemž všechny tyto operace i relace uspořádání jsou omezeny na množinu $\mathbb{Q}$. Těleso racionálních čísel tak slouží jako příklad tělesa s lineárním uspořádáním. Je všeobecně známo, že těleso $\mathbb{Q}$ je komutativní. Také je všeobecně známo, že v tělese racionálních čísel obecně neexistují suprema – najdeme neprázdné a shora omezené podmnožiny množiny racionálních čísel, které v množině racionálních čísel nemají supremum. Pro příklad uveďme množinu $\{\, r \in \mathbb{Q} \,;\ r \cdot r \leq 2 \,\}$, tedy množinu všech racionálních čísel menších než $\sqrt{2}$. (Pojem suprema je všeobecně znám. Proto snad nevadí, že jej zavedeme až v definici 3.69.)

3.16.a. Konečněrozměrné racionální prostory – podprostory reálných čísel. Uvažujme množinu $V = \{\, r + s\sqrt{2} \,;\ r, s \in \mathbb{Q} \,\} = \{\, x \in \mathbb{R};\ \exists r, s \in \mathbb{Q}\colon\ x = r + s\sqrt{2} \,\}$. (Poznamenejme, že použití dvojky 2 pod odmocninou není zásadní. Lze použít i jakékoliv jiné kladné celé, racionální nebo i reálné číslo, jehož odmocnina je iracionální.) Protože $V \subseteq \mathbb{R}$, množinu V můžeme vybavit standardními početními operacemi sčítání „$+$“ a opačné hodnoty „$-$“, číslem nula 0 a relací standardního uspořádání „$\leq$“ – kterou ale budeme značit „$\preceq$“, takže klademe „$\preceq\ =\ \leq$“ –, kde vše omezíme na zavedenou množinu V. Jako zobrazení „$*$“, totiž $*\colon \mathbb{Q} \times V \to V$, vezměme standardní binární operaci násobení reálných čísel, přičemž jeho definiční obor napřed zúžíme na množinu $\mathbb{Q} \times V$. Vidíme, že $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$ vzhledem k zobrazení „$*$“.

Vektorový prostor V je zřejmě dvojrozměrný. Jeho bází je například množina $B = \{1, \sqrt{2}\,\}$. (Kdybychom dvojku 2 pod odmocninou při zavedení množiny V nahradili nezáporným číslem, jehož odmocnina dává racionální číslo, prostor V už by vyšel jako jednorozměrný.) Lehce nahlédneme, že v lineárně uspořádaném vektorovém prostoru V obecně neexistují suprema – najdeme v něm neprázdné a shora omezené množiny, které v množině V nemají supremum. Jako příklad poslouží množina prvků množiny V, které jsou menší než $\sqrt{3}$, tj. množina $\{\, v \in V;\ v \leq \sqrt{3} \,\}$, kde „$\leq$“ označuje relaci standardního uspořádání množiny reálných čísel.

Stojí za zmínku, že grupu $(V, +, -, 0)$ je možné doplnit na těleso. Přesněji: $(V, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1)$, kde „$\cdot$“ a „${}^{-1}$“ jsou standardní operace násobení a převrácené hodnoty reálných čísel omezené na množinu V a 1 je číslo jedna, je těleso. Takže $(V, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1, \preceq)$, kde relace „$\preceq$“ vznikla omezením standardního uspořádání reálných čísel na množinu V, je dalším příkladem lineárně uspořádaného tělesa, které je opět komutativní. (Lze sestrojit i další tělesa tohoto typu. Obecný tvar jejich nosné množiny je $V = \left\{ r + s\sqrt{d} \ ; \ r, s \in \in \mathbb{Q} \right\}$, kde d je nezáporné racionální číslo. V tomto příkladu 3.16.a jsme volili $d = 2$. Poznamenejme, že když číslo d budeme volit výhradně jako součin prvočísel, takže číslo d bude tvaru $d = p_1 \dots p_n$ pro vhodné přirozené číslo n a pro vhodná prvočísla $p_1, \dots \dots, p_n$, potom různé volby čísel d tohoto tvaru vedou k navzájem neizomorfním (lineárně uspořádaným) tělesům (viz definici 3.49 níže). Abychom odůvodnili neizomorfnost, stačí se zabývat otázkou, kdy existuje $x \in V$ tak, aby $x \cdot x = p_1 \dots p_n$ – právě když $d = p_1 \dots \dots p_n$ – takže v tělesech založených na jiné volbě d takové x neexistuje. To dokazuje neizomorfnost. [33: kapitola 7 cvičení 13]. (Poznámka: Autor ve skutečnosti pracoval se starší (první) verzí citovaných skript [33], patrně z roku 1994/1995, kde zmíněné cvičení 13 je v kapitole 6. Název kapitoly „Abelovy grupy, okruhy a tělesa“ je stejný ve starší i novější verzi těchto skript.))

3.16.b. Prostor reálných čísel – nekonečněrozměrný racionální prostor. Nechť $V = \mathbb{R}$ je množina všech reálných čísel. Dále uvažujme standardní operace sčítání „$+$“, opačné hodnoty „$-$“, číslo nula 0 a standardní uspořádání – jež označíme „$\preceq$“ – které jsou zavedeny na množině reálných čísel. Vidíme, že $(\mathbb{R}, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Příslušné zobrazení „$*$“, skalární násobení, získáme zúžením definičního oboru standardní operace násobení reálných čísel na množinu $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$. Je zřejmé, že dimenze popsaného vektorového prostoru je nekonečná. (Tvrzení 1.32 zaručuje existenci alespoň jedné báze tohoto prostoru. Zdá se však být zhola nemožné nějakou takovou bázi (konstruktivně) popsat. Poznamenejme, že báze prostoru $V = \mathbb{R}$ nad tělesem $\mathbb{Q}$ se nazývá také *Hamelova* báze [84: kapitola 2 definice před větou 8 (v čl. 2.5 na str. 57)].) Dále je všeobecně známo, že v prostoru všech reálných čísel $\mathbb{R}$ existují suprema – jestliže $M \subseteq \mathbb{R}$ je libovolná neprázdná a shora omezená množina, potom množina M má v množině $\mathbb{R}$ supremum [62: věta 39 (v kapitole I § 8 na str. 56)].

Je také všeobecně známo, že grupu $(\mathbb{R}, +, -, 0)$ je možné doplnit na těleso, totiž $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1)$ je těleso. Zde „$\cdot$“ a „${}^{-1}$“ jsou standardní operace násobení a převrácené hodnoty a 1 je číslo jedna. Následně $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1, \preceq)$, kde „$\preceq$“ značí standardní uspořádání reálných čísel, slouží jako další příklad lineárně uspořádaného tělesa. Toho využijeme v následujících příkladech 3.17 a 3.80. Dodejme, že těleso reálných čísel je komutativní.

3.17. Příklad. Reálné vektorové prostory s lineárním uspořádáním. Část I. Lexikografické uspořádání. Za lineárně uspořádané těleso F dosaďme těleso reálných čísel s jeho standardním uspořádáním. Položili jsme tedy $(F, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1, \leq) = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1, \leq)$, kde „$+$“, „$-$“, „$\cdot$“ a „${}^{-1}$“ jsou po řadě standardní operace sčítání, opačné hodnoty, násobení a převrácené hodnoty zavedené na množině reálných čísel $\mathbb{R}$, dále 0 a 1 jsou čísla nula a jedna z této množiny a „$\leq$“ je standardní uspořádání reálných čísel. Jak jsme již (výše v příkladu 3.16.b) uvedli, těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ je komutativní a existují v něm suprema (viz definici 3.69).

Nechť N je přirozené číslo. Uvažujme vektorový prostor $V = \mathbb{R}^N$ s jeho obvyklými operacemi sčítání vektorů „$+$“, opačného vektoru „$-$“ a s jeho nulovým vektorem $\boldsymbol{o}$. (Jde o vektorový prostor nad tělesem reálných čísel, tedy tělesem $F = \mathbb{R}$. Viz definici 1.56.) Dále nechť „$\preceq$“ označuje lexikografické uspořádání tohoto prostoru $V = \mathbb{R}^N$, viz úvodní kapitolu této práce. Vidíme, že sestrojená lineárně uspořádaná grupa $(V, +, -, 0, \preceq) = (\mathbb{R}^N, +, -, 0, \preceq)$, neboli prostor $\mathbb{R}^N$ s lexikografickým uspořádáním „$\preceq$“, je lineárně uspořádaným vektorovým prostorem nad lineárně uspořádaným tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$.

Jestliže $N = 1$, potom prostor $\mathbb{R}^1$ je izomorfní s aditivní grupou tělesa $\mathbb{R}$ (kterou chápeme jako vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$) a lexikografické uspořádání „$\preceq$“ se vlastně shoduje se standardním uspořádáním reálných čísel $\mathbb{R}$. Následně, jestliže $N = 1$, potom ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^1$ s lexikografickým uspořádáním „$\preceq$“ existují suprema – každá jeho neprázdná a shora omezená množina bude mít supremum.

Jestliže však $N > 1$, potom suprema v prostoru $\mathbb{R}^N$ už obecně neexistují. Máme-li např. $N = 2$, pak třeba množina $\left\{ \binom{0}{x} \; ; \; x \in \mathbb{R} \right\}$ je jistě neprázdnou a shora omezenou podmnožinou prostoru $\mathbb{R}^2$ – horní mezí v lexikografickém uspořádání „$\preceq$“ je kupř. vektor $\binom{1}{0} \in \mathbb{R}^2$ – avšak uvedená množina v prostoru $\mathbb{R}^2$ s lexikografickým uspořádáním žádné supremum nemá.

3.18. Dalším příkladem lineárně uspořádaného tělesa je těleso hyperreálných čísel (viz např. [26]). Konstrukce tohoto tělesa si ovšem vyžaduje zavedení řady pojmů. Proto příklad tělesa hyperreálných čísel odložíme na později. Uvedeme jej až v odstavci 3.79 a příkladu 3.80. Nyní se budeme věnovat dalším jednoduchým vlastnostem lineárně uspořádaných těles a vektorových prostorů. Současně s tím budeme zavádět i další základní pojmy.

3.19. Definice. Podgrupa. Podtěleso. Mějme grupu $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$, viz definici 1.1. Ať $G' \subseteq G$ je libovolná podmnožina množiny G. Pak G' je *podgrupa* (grupy G) právě tehdy, když obsahuje jednotku, $1 \in G'$, a je uzavřená na operaci násobení i inverzního prvku, pro každé $a, b \in G'$ musí platit $a \cdot b \in G'$ a $a^{-1} \in G'$. Podgrupa G' je *komutativní* právě tehdy, když pro každé $a, b \in G'$ platí $a \cdot b = b \cdot a$. Podgrupa G' je *nekomutativní* právě tehdy, když není komutativní.

Nechť W je vektorový prostor nad tělesem F. Jestliže W' je podprostor vektorového prostoru W, viz definici 1.14, potom W' je podgrupa grupy W. (Obrácené tvrzení platit nemusí. Jestliže W' je podgrupa grupy W, tak z toho ještě neplyne, že W' je podprostorem prostoru W.)

Poznamenejme, že podgrupa G' je jen množina nikoliv grupa. Grupou se stane až po zavedení příslušných operací. Nechť „$\cdot'$“ a „$^{-1'}$“ jsou operace vzniklé zúžením definičního oboru operací „$\cdot$“ a „$^{-1}$“ na množinu G'. Potom $(G', \cdot', ^{-1'}, 1)$ je grupa. Srov. obdobnou poznámku v definici 1.14.

Nechť $(G, \cdot, ^{-1}, 1, \leq)$ je lineárně uspořádaná grupa, viz definici 3.1, a nechť G' je podgrupa grupy $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$. Ať „$\cdot'$“, „$^{-1'}$“ a „$\leq'$“ jsou restrikce operací „$\cdot$“, „$^{-1}$“ a relace „$\leq$“ na množinu G'. Snadno nahlédneme, že $(G', \cdot', ^{-1'}, 1, \leq')$ je lineárně uspořádaná grupa.

Nyní mějme těleso $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$, viz definici 1.3. Nechť $F' \subseteq F$ je libovolná podmnožina množiny F a ať $F'^* = F' \setminus \{0\}$ je množina všech nenulových prvků zvolené množiny F'. Pak F' je *podtěleso* (tělesa F) právě tehdy, když F' je podgrupa aditivní grupy tělesa F a současně F'^* je podgrupa multiplikativní grupy tělesa F. Podtěleso F' je *komutativní* právě tehdy, když F'^* je komutativní podgrupa multiplikativní grupy. Podtěleso F' je *nekomutativní* právě tehdy, když není komutativní.

Také nyní platí, že podtěleso F' je pouze množina a nikoliv těleso. Nechť „$+'$“, „$-'$“, „$\cdot'$“ a „$^{-1'}$“ jsou restrikce operací „$+$“, „$-$“, „$\cdot$“ a „$^{-1}$“ tělesa F na množinu F'. Potom $(F, +', -', \cdot', ^{-1'}, 0, 1)$ je těleso. Srov. obdobnou poznámku o podgrupách výše.

Budiž $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ těleso s lineárním uspořádáním, viz definici 3.2. Ať „$+'$“, „$-'$“, „$\cdot'$“, „$^{-1'}$“ a „$\leq'$“ jsou restrikce operací „$+$“, „$-$“, „$\cdot$“, „$^{-1}$“ a relace „$\leq$“ na množinu F'. Potom $(F, +', -', \cdot', ^{-1'}, 0, 1, \leq')$ je lineárně uspořádané těleso.

3.20. Mějme lineárně uspořádané těleso $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$. Přímo z jeho definice, totiž definice 3.2, plyne, že $(F, +, -, 0, \leq)$ je lineárně uspořádaná grupa, viz definici 3.1. (Uvedená lineárně uspořádaná grupa $(F, +, -, 0, \leq)$ je dokonce komutativní – je to aditivní grupa tělesa F s jeho uspořádáním – viz definici 1.3.) V lineárně uspořádaném tělese ale najdeme ještě jednu lineárně uspořádanou grupu. O tom vypovídá následující tvrzení 3.21.

3.21. Tvrzení. *Nechť $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ je těleso s lineárním uspořádáním a ať F^* a F^+ označují množinu všech jeho po řadě nenulových a kladných skalárů. Dále ať „$\cdot''$“ označuje restrikci operace „$\cdot$“ na množinu F^*. Potom F^+ je podgrupa multiplikativní grupy $(F^*, \cdot'', ^{-1}, 1)$ tělesa F.*

Restrikce operací „$\cdot$“, „$^{-1}$“ a relace „$\leq$“ na množinu F^+ označme po řadě „$\cdot'$“, „$^{-1'}$“ a „$\leq'$“. Potom $(F^+, \cdot', ^{-1'}, 1, \leq')$ je lineárně uspořádaná grupa.

Pro každé $\lambda, \mu \in F^+$ navíc platí $\lambda + \mu \in F^+$.

3.21.a. *Poznámka.* Množina F^+ je tedy podpolotělesem tělesa F. (Srov. [78: body IV.6. .2(ii) a IV.6.3(vii)]. Pro pojem podpolotělesa (resp. polotělesa) viz [78: cvičení IV.C40].)

3.21.b. *Poznámka.* Multiplikativní grupa $(F^*, \cdot'', ^{-1}, 1)$ tělesa F už není lineárně uspořádaná. Například, označíme-li $2 = 1 + 1$, kde 1 je jednotka tělesa F, jistě je $-2 \leq -1$, avšak $(-2) \cdot (-1)^{-1} = 2$ a $\neg(2 \leq 1)$ (neplatí $2 \leq 1$).

3.21.c. *Důkaz.* Abychom dokázali, že F^+ je podgrupou multiplikativní grupy F^*, stačí se odvolat na tvrzení 3.4, na tvrzení 3.10 ve spojení s poznámkami 3.8 a 3.14 a na tvrzení 3.12. Vidíme, že $1 > 0$ a že pro každé $\lambda, \mu > 0$ platí $\lambda^{-1} > 0$ a $\lambda \cdot \mu > 0$.

K důkazu druhého tvrzení je třeba ověřit, že pro každé $\lambda, \mu \in F^+$, tedy $\lambda, \mu > 0$, platí $\lambda \leq \mu$ právě tehdy, když $\lambda \cdot \mu^{-1} \leq 1$, právě tehdy, když $\mu^{-1} \cdot \lambda \leq 1$. To ale plyne ihned z tvrzení 3.11 ve spojení s poznámkami 3.8 a 3.14 a tvrzením 3.12. Protože relace „$\leq$“ lineárně uspořádává množinu F, její restrikce „$\leq'$“ lineárně uspořádává množinu F^+. Dle definice 3.1, viz vlastnosti 3.1.(1), už jen zbývá ověřit, že když $\lambda, \mu \geq 1$, potom $\lambda \cdot \mu \geq 1$. Stačí se ale odvolat na tvrzení 3.11 ve spojení s poznámkou 3.8. Jestliže totiž $\mu \geq 1$, potom $\mu \geq 0$ a násobením nerovnice $\lambda \geq 1$ dostáváme $\lambda \cdot \mu \geq 1 \cdot \mu = \mu \geq 1$.

Poslední tvrzení plyne z definice 3.2, viz vztahy 3.2.(1). Jestliže $\lambda, \mu > 0$, potom jistě $\lambda + \mu \geq 0$. Protože $\lambda, \mu > 0$, dostáváme $-\lambda \leq 0$, následně $-\lambda \neq \mu$. Proto nutně platí $\lambda + \mu \neq 0$. □

3.22. Definice. Celistvá mocnina – neboli mocnina s celočíselným exponentem – v grupě. Nechť $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa. Mějme také množinu všech celých čísel $\mathbb{Z}$. Připomeňme, že znaky $\mathbb{Z}_0^+$, $\mathbb{Z}_0^-$, $\mathbb{Z}^+$ a $\mathbb{Z}^-$ označují po řadě množinu všech nezáporných, nekladných, kladných a záporných celých čísel. Klademe tedy

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^+ &= \{\, n \in \mathbb{Z}\,;\ n > 0\,\}\,, \\ \mathbb{Z}^- &= \{\, n \in \mathbb{Z}\,;\ n < 0\,\}\,, \\ \mathbb{Z}_0^- &= \{\, n \in \mathbb{Z}\,;\ n \leq 0\,\}\,, \\ \mathbb{Z}_0^+ &= \{\, n \in \mathbb{Z}\,;\ n \geq 0\,\}\,, \end{aligned}$$

kde relace „$\leq$“ (od níž relace „$\geq$“, „$<$“ a „$>$“ jsou odvozeny) je standardní uspořádání množiny celých čísel $\mathbb{Z}$.

Na kartézském součinu $\mathbb{Z} \times G$ nyní budeme definovat určité zobrazení „$\cdot^{\cdot}$“ – kde tečky „$\cdot$“ označují místo pro dosazení celého čísla $n \in \mathbb{Z}$ a prvku $a \in G$ grupy G – jdoucí do nosné množiny grupy G, které každému celému číslu $n \in \mathbb{Z}$ a každému prvku $a \in G$ přiřadí prvek $a^n \in G$. Předně, pro $n = 0$ pro každé $a \in G$ klademe $a^n = a^0 = 1$, kde 1 je jednotka grupy G. Pro nezáporné celé číslo $n \in \mathbb{Z}_0^+$ pro každé $a \in G$ klademe $a^{n+1} = a^n \cdot a$. Konečně pro kladné celé číslo $n \in \mathbb{Z}^+$ pro každé $a \in G$ klademe $a^{-n} =$

$= (a^n)^{-1}$, kde „$^{-1}$“ je unární operace inverzního prvku grupy G. Tímto je konstrukce zobrazení $\cdot\colon \mathbb{Z} \times G \to G$ završena. Prvek a^n, kde $n \in \mathbb{Z}$, nazýváme *celistvou mocninou* prvku $a \in G$.

Vidíme, že pro nezáporné celé číslo $n \in \mathbb{Z}_0^+$ pro každé $a \in G$ platí $a^n = a \cdot \ldots \cdot a$, kde pravá strana uvedené rovnice vznikla tak, že jedničku 1 grupy G jsme dohromady n-krát opakovaně násobili zvoleným prvkem a. Obdobně pro každé nekladné celé číslo $n \in \mathbb{Z}_0^-$ pro $a \in G$ platí $a^n = a^{-1} \cdot \ldots \cdot a^{-1}$, kde pravá strana uvedené rovnice vznikla tím, že jedničku 1 jsme dohromady $(-n)$-krát opakovaně násobili inverzním prvkem a^{-1}. Z definice celistvé mocniny dále plyne, že pro každý prvek $a \in G$ a pro každá dvě celá čísla $m, n \in \mathbb{Z}$ platí

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}, \qquad (a^n)^{-1} = a^{-n} = (a^{-1})^n,$$

kde „$^{-1}$“ v posledním vztahu označuje unární operaci inverzního prvku v grupě G. Nadto, jestliže prvky $a, b \in G$ komutují, platí $a \cdot b = b \cdot a$, potom pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí dokonce $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

3.23. Tvrzení. *Nechť $(G, \cdot, ^{-1}, 1, \leq)$ je lineárně uspořádaná grupa. Potom pro každý prvek $a \in G$ a každé celé číslo $n \in \mathbb{Z}$ platí*

$$a^n \neq 1$$

právě tehdy, když $a \neq 1$ a $n \neq 0$.

3.23.a. *Poznámka.* Jestliže tedy $a \neq 1$, potom pro každé kladné celé $n \in \mathbb{Z}^+$ platí $a^n \neq 1$, takže řád každého takového prvku je nekonečný – cyklická podgrupa $\{\, a^n \,;\, n \in \mathbb{Z} \,\}$ je nekonečná – a grupa G je grupou bez torze. (Pro pojem cyklické podgrupy, řádu prvku a grupy bez torze viz po řadě [78: definice III.1.22, III.1.23 a III.5.2].)

3.23.b. *Důkaz.* Implikace „$\Rightarrow$“ uvedeného tvrzení je zřejmá. Jestliže $a = 1$ nebo $n = 0$, potom $a^n = 1$. Dokážeme implikaci „$\Leftarrow$“. Pro každé $b, c \in G$ pišme $c > b$ právě tehdy, když $b < c$, právě tehdy, když $b \leq c$ a současně $b \neq c$. Jestliže $a \neq 1$, potom buď $a > 1$, anebo $a < 1$. Jestliže $n \neq 0$, potom buď $n \in \mathbb{Z}^+$, anebo $n \in \mathbb{Z}^-$. Dohromady tedy mohou nastat čtyři navzájem se vylučující případy. Nejprve se budeme zabývat prvním z nich, kdy $a > 1$ a číslo $n \in \mathbb{Z}^+$ je kladné.

Nechť tedy $a > 1$. Indukcí dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{Z}_0^+$ platí $a^{n+1} > a^n$. Tvrzení je správné pro $n = 0$, protože $a^{0+1} = a > 1 = a^0$ dle předpokladu. Předpokládejme, že pro určité $n \in \mathbb{Z}_0^+$ už jsme dokázali $a^{n+1} > a^n$. Obě strany tohoto vztahu násobme prvkem a. Dostáváme $a^{n+2} > a^{n+1}$. Dokázali jsme, že $a^{n+1} > a^n$ pro každé $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Pomocí tranzitivity relace „$<$“ (plynoucí z tranzitivity „$\leq$“) a opětovným použitím indukce získáme $a^{n+1} > a^n > \cdots > a^0 = 1$. Odtud $a^{n+1} > 1$ pro každé $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Tedy $a^n \neq 1$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}^+$.

Zbývající tři případy je možné převést na už dokázaný první případ. V prostředních dvou případech, kdy $a < 1$ a $n \in \mathbb{Z}^+$ nebo $a > 1$ a $n \in \mathbb{Z}^-$, se stačí odvolat na rovnost $(a^{-1})^n = a^{-n} = (a^n)^{-1}$, kterou známe z předcházející definice 3.22; je-li $a < 1$, pomůžeme si ekvivalencí, že $a < 1$, právě když $a^{-1} > 1$ (která plyne z ekvivalence, že $a \leq 1$, právě když $a^{-1} \geq 1$, kterou známe z definice 3.1); jestliže $n \in \mathbb{Z}^-$, využijeme toho, že $n \in \mathbb{Z}^-$, právě když $-n \in \mathbb{Z}^+$. Zřejmě $(a^n)^{-1} \neq 1$ právě tehdy, když $a^n \neq 1$. V posledním případě, kdy $a < 1$ a $n \in \mathbb{Z}^-$, použijeme rovnost $a^n = (a^{-1})^{-n}$ plynoucí z předcházející definice 3.22. $\square$

3.24. Přenesme tyto výsledky na lineárně uspořádaná tělesa a lineárně uspořádané vektorové prostory.

3.25. Definice. Celistvý násobek – neboli násobení celým číslem – v tělese a ve vektorovém prostoru. Celistvá mocnina – neboli mocnina s celočíselným exponentem – v tělese. Nechť $(V, +, -, 0)$ je vektorový prostor nad tělesem $(F, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Dále mějme množinu celých čísel $\mathbb{Z}$.

Za grupu $(G, \cdot, {}^{-1}, 1)$ v definici 3.22 dosaďme aditivní grupu $(F, +, -, 0)$ tělesa F. Zobrazení „$\cdot$“ zavedené definicí 3.22 nyní označíme „$\times$“. (Znak „$\times$“ označující toto zobrazení je bohužel shodný se znakem označujícím kartézský součin dvou množin. Použité označení zavedeného zobrazení je ale v literatuře běžné.) Zavedli jsme tedy zobrazení $\times\colon \mathbb{Z} \times F \to F$, které každému celému číslu $n \in \mathbb{Z}$ a každému skaláru $\lambda \in F$ přiřadí skalár $(n \times \lambda) \in F$. Skalár $n \times \lambda$, kde $n \in \mathbb{Z}$, nazýváme *celistvým násobkem* skaláru $\lambda \in F$.

Vidíme, že pro nezáporné celé číslo $n \in \mathbb{Z}_0^+$ pro každé $\lambda \in F$ platí $n \times \lambda = \lambda + \cdots \cdots + \lambda$, kde pravá strana vznikla tak, že skalár λ jsme k nule 0 tělesa F přičetli opakovaně dohromady n-krát. Obdobně pro každé nekladné celé číslo $n \in \mathbb{Z}_0^-$ a každé $\lambda \in F$ máme $n \times \lambda = -\lambda - \cdots - \lambda$, kde pravá strana uvedené rovnice nyní vznikla tím, že k nule 0 tělesa F jsme přičetli opačný skalár $-\lambda$ opakovaně dohromady $(-n)$-krát. Dále snadno nahlédneme, že pro každá dvě celá čísla $m, n \in \mathbb{Z}$ a pro každé dva skaláry $\lambda, \mu \in F$ platí

$$\begin{aligned} (m \times \lambda) + (n \times \lambda) &= (m + n) \times \lambda\,, & (n \times \lambda) + (n \times \mu) &= n \times (\lambda + \mu)\,,\\ m \times (n \times \lambda) &= (m \cdot n) \times \lambda\,, & n \times (\lambda \cdot \mu) &= (n \times \lambda) \cdot \mu = \lambda \cdot (n \times \mu)\,,\\ (n \times 1) \cdot \lambda &= n \times \lambda = \lambda \cdot (n \times 1)\,, & (-n) \times \lambda &= -(n \times \lambda) = n \times (-\lambda)\,. \end{aligned}$$

První vztah shora vpravo platí díky komutativitě aditivní grupy tělesa F. Prostřední vztah vpravo i třetí vztah shora vlevo vycházejí z distributivity násobení vůči sčítání. Třetí vztah vlevo navíc těží z toho, že $1 \cdot \lambda = \lambda = \lambda \cdot 1$. (Z uvedených vztahů už lehce plyne, že pro každá dvě celá čísla $m, n \in \mathbb{Z}$ máme $(m \cdot n) \times 1 = (m \times 1) \cdot (n \times 1)$ – protože obě strany se rovnají $m \times (n \times 1)$.)

Nyní za grupu $(G, \cdot, {}^{-1}, 1)$ v definici 3.22 dosaďme grupu $(V, +, -, 0)$ a zobrazení „$\cdot$“ zavedené definicí 3.22 opět označme „$\times$“. Zavedli jsme tedy zobrazení $\times\colon \mathbb{Z} \times V \to V$, které každému celému číslu $n \in \mathbb{Z}$ a každému vektoru $u \in V$ přiřadí vektor $(n \times u) \in V$. Vektor $n \times u$, kde $n \in \mathbb{Z}$, nazýváme *celistvým násobkem* vektoru $u \in V$.

(Z kontextu bude vždy jasné, se kterým ze zavedených dvou zobrazení $\times\colon \mathbb{Z} \times F \to$ $\to F$ nebo $\times\colon \mathbb{Z} \times V \to V$ pracujeme. K záměně uvedených zobrazení proto nedojde: Jestliže x ve výrazu $n \times x$ je skalár, potom pracujeme se zobrazením $\times\colon \mathbb{Z} \times F \to F$. Jestliže x v uvedeném výrazu je vektor, potom pracujeme se zobrazením $\times\colon \mathbb{Z} \times V \to V$. Vlastně jsme v situaci obdobné té, kterou jsme popisovali ve zmínce o „přisuzování rolí“ v poznámce 1.12.)

Znovu vidíme, že pro $n \in \mathbb{Z}_0^+$ resp. $n \in \mathbb{Z}_0^-$ pro každé $u \in V$ máme po řadě $n \times u = u + \cdots + u$ resp. $n \times u = -u - \cdots - u$, kde pravá strana vždy vniká tak, že k nule 0 vektorového prostoru V dohromady po řadě n-krát resp. $(-n)$-krát opakovaně přičítáme po řadě zvolený vektor u resp. opačný vektor $-u$. Dále je velmi snadné ověřit, že pro každá dvě celá čísla $m, n \in \mathbb{Z}$, každé dva vektory $u, v \in V$ a každý skalár $\lambda \in F$ platí

$$\begin{aligned} (m \times u) + (n \times u) &= (m + n) \times u\,, & (n \times u) + (n \times v) &= n \times (u + v)\,,\\ m \times (n \times u) &= (m \cdot n) \times u\,, & n \times (\lambda * u) &= (n \times \lambda) * u = \lambda * (n \times u)\,,\\ (n \times 1) * u &= n \times u\,, & (-n) \times u &= -(n \times u) = n \times (-u)\,. \end{aligned}$$

V prostředním vztahu vpravo a ve třetím vztahu vlevo vystupuje celistvý násobek skaláru „$\times$“, násobení skalárem „$*$“ i celistvý násobek vektoru „$\times$“.

Nakonec za grupu $(G, \cdot, {}^{-1}, 1)$ v definici 3.22 dosaďme multiplikativní grupu $(F^*, \cdot', {}^{-1}, 1)$ tělesa F, kde F^* je množina všech nenulových skalárů tělesa F a „$\cdot'$“ je restrikce operace „$\cdot$“ na množinu F^*. Tím dostáváme zobrazení $\cdot\colon \mathbb{Z} \times F^* \to F^*$. Nyní definiční obor $\mathbb{Z} \times F^*$ získaného zobrazení „$\cdot^{\cdot}$“ rozšíříme na množinu $(\mathbb{Z} \times F^*) \cup (\mathbb{Z}_0^+ \times \{0\}) = (\mathbb{Z}_0^+ \times F) \cup (\mathbb{Z}^- \times F^*)$ tím, že pro kladná $n \in \mathbb{Z}^+$ položíme $0^n = 0$ a pro $n = 0$ položíme $0^n = 0^0 = 1$ (činíme tak ve shodě s [62: kapitola I § 8 poznámka pod čarou [37]) (na str. 59)], viz též [78: odstavec IV.1.3]), kde 0 a 1 je po řadě nula a jednotka tělesa F. Dostali jsme tedy zobrazení $\cdot^{\cdot} \colon (\mathbb{Z}_0^+ \times F) \cup (\mathbb{Z}^- \times F^*) \to F$, které každému $\lambda \in F$ a každému $n \in \mathbb{Z}$ (je-li $\lambda = 0$, musí být $n \in \mathbb{Z}_0^+$) přiřadí prvek $\lambda^n \in F$, který nazýváme *celistvou mocninou* prvku λ.

Budiž $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Vidíme, že pro každé $\lambda \in F$ platí $\lambda^n = \lambda \cdot \ldots \cdot \lambda$, kde pravá strana vznikla tak, že jednotku 1 tělesa F jsme dohromady n-krát opakovaně násobili zvoleným skalárem λ. Nechť nyní $n \in \mathbb{Z}^-$. Potom pro každé $\lambda \in F^*$ máme $\lambda^n = \lambda^{-1} \cdot \ldots \cdot \lambda^{-1}$, kde pravá strana nyní vznikla tak, že jednotku 1 tělesa F jsme dohromady $(-n)$-krát opakovaně násobili inverzním skalárem λ^{-1}. K tomu je snadné nahlédnout, že pro každé $m, n \in \mathbb{Z}$ a pro každý nenulový prvek $\lambda \in F^*$ tělesa F platí

$$\lambda^m \cdot \lambda^n = \lambda^{m+n}, \qquad (\lambda^m)^n = \lambda^{m \cdot n}, \qquad (\lambda^n)^{-1} = \lambda^{-n} = (\lambda^{-1})^n,$$

kde „$^{-1}$“ v poslední rovnici vyjadřuje operaci inverzního prvku tělesa F. Jestliže skaláry $\lambda, \mu \in F^*$ komutují, splňují $\lambda \cdot \mu = \mu \cdot \lambda$, potom pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí také $\lambda^n \cdot \mu^n = (\lambda \cdot \mu)^n$. Poznamenejme, že všechny z uvedených vztahů platí i pro $\lambda = 0 \in F$ (nebo i pro $\mu = 0 \in F$), dokud všechny mezivýsledky ve všech výpočtech leží v definičním oboru zavedeného zobrazení „$\cdot^{\cdot}$“ nebo unární operace „$^{-1}$“. První z uvedených vztahů tak platí i pro $\lambda = 0$, jestliže celá čísla $m, n \in \mathbb{Z}_0^+$ jsou nezáporná. Druhý vztah platí pro $\lambda = 0$ tehdy, když buď $m = 0$ a celé číslo $n \in \mathbb{Z}$ je libovolné, anebo celé číslo $m \in \mathbb{Z}^+$ je kladné a $n \in \mathbb{Z}_0^+$ je nezáporné. Ve třetím vztahu pro $\lambda = 0 \in F$ platí pouze první z rovností (tj. $(\lambda^n)^{-1} = \lambda^{-n}$, tj. $(0^n)^{-1} = 0^{-n}$), ale jen pro $n = 0$. Poslední, čtvrtý vztah platí i tehdy, když $\lambda = 0$ nebo $\mu = 0$, jestliže celé číslo $n \in \mathbb{Z}_0^+$ je nezáporné.

3.26. Tvrzení. *Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Potom máme tato dvě tvrzení:*

I. *Pro každý vektor $u \in V$ a pro každé celé číslo $n \in \mathbb{Z}$ platí*

$$n \times u \neq 0$$

právě tehdy, když $u \neq 0$ a $n \neq 0$.

II. *Pro každý kladný skalár $\lambda \in F^+$ a pro každé celé číslo $n \in \mathbb{Z}$ platí*

$$\lambda^n \neq 1$$

právě tehdy, když $\lambda \neq 1$ a $n \neq 0$.

3.26.a. *Poznámka.* První tvrzení se vzhledem k poznámce 3.8 vztahuje také na aditivní grupu tělesa F, takže pro každý skalár $\lambda \in F$ a pro každé $n \in \mathbb{Z}$ máme $n \times \lambda \neq 0$ právě tehdy, když $\lambda \neq 0$ a $n \neq 0$.

3.26.b. *Poznámka.* Z prvního tvrzení plyne, že řád každého nenulového vektoru v grupě $(V, +, -, 0)$ je nekonečný, takže prostor V je grupou bez torze. Zcela obdobné tvrzení platí také pro aditivní grupu $(F, +, -, 0)$ tělesa F. Speciálně, volíme-li skalár $\lambda = 1$, potom pro každé kladné $n \in \mathbb{Z}^+$ máme $n \times 1 \neq 0$, takže charakteristika tělesa F je nulová, $\mathrm{char}(F) = 0$. Ať „$\cdot'$“ a „$^{-1'}$“ jsou restrikce operací „$\cdot$“ a „$^{-1}$“ na množinu F^+ kladných skalárů tělesa F. Druhé tvrzení dává, že řád každého skaláru různého od jednotky je v grupě $(F^+, \cdot', ^{-1'}, 1)$ nekonečný, takže tato grupa je rovněž grupou bez torze. (Viz též poznámku 3.23.a. Srov. [78: body IV.6.2(iii), IV.6.3(vi) a IV.6.3(vii)]. Pro pojem charakteristiky tělesa (resp. okruhu) viz [78: definice IV.1.8].)

3.26.c. *Důkaz.* Obě části I. a II. jsou přímým důsledkem tvrzení 3.23. V části I. jsme tvrzení 3.23 použili na lineárně uspořádaný prostor V (případně na lineárně uspořádanou aditivní grupu tělesa F, viz odstavec 3.20). V části II. jsme tvrzení 3.23 použili na lineárně uspořádanou grupu $(F^+, \cdot', {}^{-1'}, 1, \leq')$, kde „$\cdot'$“, „${}^{-1'}$“ a „$\leq'$“ je restrikce po řadě operací „$\cdot$“, „${}^{-1}$“ a relace „$\leq$“ na množinu F^+ (viz tvrzení 3.21). □

3.27. Část II. tvrzení 3.26 říká, kdy pro kladné skaláry $\lambda \in F^+$ platí $\lambda^n \neq 1$. Je zajímavé se ptát, zda obdobná vlastnost není splněna také pro všechny nenulové (vzhledem k předchozímu zejména pro záporné) skaláry. Odpověď dá následující tvrzení 3.28.

3.28. Tvrzení. *Nechť $(F, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1, \leq)$ je lineárně uspořádané těleso. Ať F^* je množina všech skalárů tělesa F různých od nuly* 0. *Potom pro všechny nenulové skaláry $\lambda \in F^*$ tělesa F a pro všechna celá čísla $n \in \mathbb{Z}$ platí*

$$\lambda^n \neq 1$$

právě tehdy, když $\lambda \neq 1$ – přičemž je-li $\lambda = -1$, potom n musí být liché – a $n \neq 0$.

3.28.a. *Poznámka.* Dále pro každé nezáporné celé číslo $n \in \mathbb{Z}_0^+$ máme $0^n \neq 1$ právě tehdy, když $n \neq 0$. (To plyne ihned z definice 3.25.)

3.28.b. *Poznámka.* Pro jednoznačnost zapišme podmínku, že $\lambda \neq 1$ (přičemž je-li $\lambda = -1$, potom n musí být liché) a $n \neq 0$, formálně:

$$\lambda \neq 1 \ \wedge \ n \neq 0 \ \wedge \ (\lambda = -1 \ \Rightarrow \ n \text{ je liché}),$$

ekvivalentně

$$\lambda \neq 1 \ \wedge \ \big((\lambda \neq -1 \ \wedge \ n \neq 0) \ \vee \ n \text{ je liché}\big).$$

Vidíme, že oproti části II. předcházejícího tvrzení 3.26 je zde navíc podmínka ošetřující případ $\lambda = -1$.

3.28.c. *Důkaz.* Povšimněme si nejprve, že $(-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1$. Následně indukcí (pomocí definice 3.25) lehce dokážeme, že $(-1)^n = 1$ právě tehdy, když celé číslo n je sudé, a že $(-1)^n = -1$ právě tehdy, když celé číslo n je liché. (Dodejme, že $n \in \mathbb{Z}$ je sudé právě tehdy, když není liché.)

Nechť dále $\lambda > 0$ je kladný skalár. Indukcí opět (pomocí definice 3.25) snadno dokážeme, že jeho celistvá mocnina $\lambda^n > 0$ kladná pro každé celé číslo $n \in \mathbb{Z}$. (Alternativně lze použít toho, že $(F^+, \cdot', {}^{-1'}, 1, \leq')$ je lineárně uspořádaná grupa, viz tvrzení 3.21, jehož značení jsme právě použili: stačí si uvědomit, že celistvá mocnina definovaná v grupě F^+ (dle definice 3.22) a celistvá mocnina definovaná v tělese F (dle definice 3.25) se na části $\mathbb{Z} \times F^+$ svých definičních oborů shodují.)

Implikace „$\Rightarrow$“ je nyní zřejmá. Jestliže $\lambda = 1$ nebo $n = 0$ nebo jestliže $\lambda = -1$ a n je sudé, potom $\lambda^n = 1$. Zbývá dokázat implikaci „$\Leftarrow$“. Budiž dáno nenulové $\lambda \in F^*$ a libovolné celé číslo $n \in \mathbb{Z}$. Předpokládejme, že $\lambda^n = 1$. Dokážeme, že platí $\lambda = 1$ nebo $n = 0$ nebo platí $\lambda = -1$ a n je sudé. Jestliže $\lambda > 0$ je kladné, stačí se odvolat na část II. předcházejícího tvrzení 3.26: dostáváme $\lambda = 1$ nebo $n = 0$, takže dokazovaná podmínka už je splněna. Jestliže $\lambda < 0$ je záporné, potom jistě $-\lambda > 0$ je kladné. Protože $(-1) \cdot (-\lambda) = (-\lambda) \cdot (-1)$, dostáváme $\lambda^n = ((-1) \cdot (-\lambda))^n = (-1)^n \cdot (-\lambda)^n$. Aby platilo $\lambda^n = (-1)^n \cdot (-\lambda)^n = 1$, musí být n sudé, aby $(-1)^n = 1 > 0$. (Kdyby n bylo liché, potom by $(-1)^n = -1 < 0$. Jenomže $(-\lambda)^n > 0$, jak už víme. Součin $(-1)^n \cdot (-\lambda)^n$ by vyšel záporný, avšak jednotka 1 tělesa F je vždy kladná.) Když $(-1)^n = 1$ a $(-1)^n \cdot (-\lambda)^n = 1$, máme $(-\lambda)^n = 1$. Protože $-\lambda > 0$, smíme použít část II. předcházejícího tvrzení 3.26 a dostáváme $-\lambda = 1$, ekvivalentně $\lambda = -1$, nebo $n = 0$. Dokazovaná podmínka je tak opět splněna. Tvrzení je dokázáno. □

3.29. V každém lineárně uspořádaném tělese platí také následující velice jednoduché tvrzení 3.30.

3.30. Tvrzení. *Ať $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ je lineárně uspořádané těleso. Potom druhá mocnina λ^2 libovolného skaláru $\lambda \in F$ je nezáporná, pro každé $\lambda \in F$ platí*

$$\lambda^2 \geq 0\,.$$

Nadto $\lambda^2 = 0$ právě tehdy, když $\lambda = 0$.

3.30.a. *Důkaz.* Dle definice 3.25 je $\lambda^2 = \lambda \cdot \lambda$. Jestliže $\lambda \geq 0$, potom $\lambda \cdot \lambda \geq 0$. Jestliže $\lambda \leq 0$, potom $-\lambda \geq 0$ a $\lambda \cdot \lambda = (-\lambda) \cdot (-\lambda) \geq 0$. Využili jsme tvrzení 3.10 ve spojení s poznámkou 3.8. Jestliže $\lambda = 0$, potom zřejmě $\lambda \cdot \lambda = 0$. Kdyby, obráceně, platilo $\lambda \cdot \lambda = 0$ a $\lambda \neq 0$, dostali bychom $\lambda = \lambda \cdot \lambda \cdot \lambda^{-1} = 0 \cdot \lambda^{-1} = 0$ – spor. □

3.31. Poznámka. Poslední tvrzení 3.30 ve spojení s tvrzením 3.4 nám v některých případech umožňuje dokázat, že dané těleso F není možné lineárně uspořádat. (Přesněji: Máme těleso $(F+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$. Ptáme se, zda existuje relace „$\leq$“ na množině F tak, aby $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ bylo lineárně uspořádané těleso. Pomocí tvrzení 3.30 a 3.4 někdy lze dokázat, že taková relace „$\leq$“ neexistuje.) Jestliže v tělese F existuje skalár $\lambda \in F$ takový, že $\lambda^2 = -1$, potom těleso F není možné lineárně uspořádat. Obecněji, jestliže existuje přirozené číslo n a existují skaláry $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ tak, že $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 = -1$, potom těleso F není možné lineárně uspořádat. (Druhá mocnina libovolného skaláru je v lineárně uspořádaném tělese nezáporná a součet nezáporných skalárů zůstává nezáporný, viz předcházející tvrzení 3.30 a definici 3.2.) Odtud plyne, že těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$ ani těleso (reálných) kvaternionů $\mathbb{H}$ (viz [70: sekce 2.4], viz též [78: odstavce IV.3.1 a IV.3.2]) není možné lineárně uspořádat. V obou případech totiž máme $\mathrm{i}^2 = -1$, kde „i“ je imaginární jednotka. (Jiný argument odůvodňující, že tělesa $\mathbb{C}$ ani $\mathbb{H}$ není možné lineárně uspořádat, uvádíme také v poznámce 3.109.) Podmínku nutnou a postačující k tomu, aby komutativní (!) těleso bylo možné lineárně uspořádat, lze nalézt v [78: věta IV.6.16] (viz též odstavec 3.65 níže).

3.32. Následující lemma 3.33 poukazuje na souvislost mezi uspořádáním lineárně uspořádaného tělesa a standardním uspořádáním množiny celých čísel $\mathbb{Z}$. Této souvislosti pak několikrát využijeme.

3.33. Lemma. *Nechť $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ je lineárně uspořádané těleso. Zvolme libovolné celé číslo $n \in \mathbb{Z}$. Potom*

$$n \times 1 \geq 0$$

právě tehdy, když celé číslo n je nezáporné, neboli $n \geq 0$.

3.33.a. *Poznámka.* Z definice 3.25 plyne, že pro každé celé číslo $n \in \mathbb{Z}$ platí $(-n) \times 1 = -(n \times 1)$. Protože pro každý skalár $\lambda \in F$ máme $\lambda \geq 0$, právě když $-\lambda \leq 0$, dostáváme, že $n \times 1 \leq 0$ právě tehdy, když celé číslo n je nekladné, $n \leq 0$. Dále je $n \times 1 = 0$ právě tehdy, když celé číslo n je nulové, $n = 0$. To plyne buď z části I. tvrzení 3.26, anebo díky tomu, že skalár je nekladný i nezáporný právě tehdy, když je nulový. Následně je $n \times 1 > 0$ právě tehdy, když celé číslo n je kladné, $n > 0$, k tomu je $n \times 1 < 0$ právě tehdy, když celé číslo n je záporné, $n < 0$.

3.33.b. *Důkaz.* Implikaci „$\Leftarrow$“ dokážeme indukcí. Tvrzení zřejmě platí pro $n = 0$. Předpokládejme, že pro jisté nezáporné celé číslo $n \in \mathbb{Z}_0^+$ už víme, že $n \times 1 \geq 0$. Tvrzení nyní dokážeme pro $n + 1$. Ovšem $(n + 1) \times 1 = (n \times 1) + 1$, kde 1 na pravé straně této rovnice je v obou případech jednotka tělesa F. Protože $n \times 1 \geq 0$ dle předpokladu a $1 \geq 0$ dle tvrzení 3.4, máme $(n \times 1) + 1 = (n + 1) \times 1 \geq 0$, čímž je implikace „$\Leftarrow$“ uvedeného lemmatu dokázána.

Implikaci „$\Rightarrow$“ dokážeme nepřímo. Nechť tedy celé číslo n je záporné, $n < 0$, tedy nekladné a nenulové, $n \leq 0$ a $n \neq 0$. Avšak n je nekladné právě tehdy, když $-n$ je nezáporné, $-n \geq 0$. Pak ovšem, dle již dokázané části lemmatu, $(-n) \times 1 \geq 0$. Z definice 3.25 ale plyne, že $(-n) \times 1 = -(n \times 1)$, dále je $-(n \times 1) \geq 0$ právě tehdy, když $n \times 1 \leq 0$. Protože $n \neq 0$, dle části I. tvrzení 3.26 máme $n \times 1 \neq 0$. Musí tedy platit $n \times 1 < 0$. Tím je lemma dokázáno. □

3.34. Nyní ukážeme další jednoduchou vlastnost lineárně uspořádaného tělesa.

3.35. Definice. Husté uspořádání. Nechť množina M je částečně uspořádána relací „$\leq$“, viz definici 1.27. Pro každé $a, b \in M$ pišme $a < b$ právě tehdy, když $a \leq b$ a současně $a \neq b$. Řekneme, že dané uspořádání „$\leq$“ je na množině M *husté* právě tehdy, když ke každým dvěma prvkům $a, b \in M$ splňujícím $a < b$, existuje prvek $c \in M$ takový, že $a < c < b$.

Když uspořádání „$\leq$“ je husté na M, říkáme rovněž, že „množina M je relací částečného uspořádání ‚$\leq$‘ hustě uspořádána“. Jestliže víme, že „$\leq$“ je relací lineárního uspořádání na M, říkáme, že „množina M je relací lineárního uspořádání ‚$\leq$‘ hustě uspořádána“. Je-li zřejmé, jakou relaci „$\leq$“ máme na mysli, můžeme stručně říkat, že „množina M je hustě uspořádána“ nebo že „M je hustě uspořádaná množina“.

3.36. Tvrzení. *Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Potom lineární uspořádání „$\preceq$“ je na množině V husté.*

3.36.a. *Poznámka.* Vzhledem k poznámce 3.8 dostáváme, že také lineární uspořádání „$\leq$“ je husté na množině F. (Srov. [78: bod IV.6.3(vii)].)

3.36.b. *Důkaz.* Zvolme $u, v \in V$ tak, aby $u \prec v$. Potom $u + u \prec u + v \prec v + v$, takže $u \prec \frac{1}{2} * (u + v) \prec v$, kde $\frac{1}{2} = (1 + 1)^{-1}$, přičemž 1 je jednotka tělesa F. □

3.37. V § 1 jsme se zabývali vektorovými prostory nad tělesy („bez lineárního uspořádání“). Zavedli jsme pojem podprostoru (definice 1.14), lineární kombinace a lineárního obalu (definice 1.25) a také pojmy V-lineární kombinace a V-lineárního obalu (definice 1.42 a 1.46), kde V byl další vektorový prostor. Máme-li vektorový prostor („bez lineárního uspořádání“) nad lineárně uspořádaným tělesem, viz poznámku 3.7, lze zavést rovněž „znaménkové“ varianty uvedených pojmů, a sice po řadě pojem kužele, kuželové kombinace a kuželového obalu a, jestliže V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad daným lineárně uspořádaným tělesem, pak také pojmy V-kuželové kombinace a V-kuželového obalu. To provedeme v následující definici 3.38.

3.38. Definice. Kužel. Kuželová kombinace, kuželový obal. V-kuželová kombinace, V-kuželový obal. Nechť $(W, +, -, 0)$ je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“, viz poznámku 3.7.

Podmnožina $K \subseteq W$ vektorového prostoru W je *(konvexní) kužel* právě tehdy, když je uzavřená na sčítání a násobení nezáporným skalárem. Pro každé $u, v \in K$ a pro každé $\lambda \in F_0^+$, splňující $\lambda \geq 0$, tedy platí $u + v \in K$ a $\lambda * u \in K$. Zřejmě $0 \in K$. Triviální podprostory $\{0\}$ a W vektorového prostoru W jsou zároveň kužely. Obecně platí, že každý podprostor prostoru W je současně kužel.

Na potenční množině $\mathcal{P}(W) = \{ A \, ; \; A \subseteq W \}$ nosné množiny vektorového prostoru W nyní zavedeme operaci součtu dvou množin a operaci opačné množiny. Nechť $A, B \in \mathcal{P}(W)$, resp. $A, B \subseteq W$, jsou dvě podmnožiny vektorového prostoru W. Množinu, která je *součtem* těchto dvou množin A a B, označíme $A + B$ a klademe $A + B = \{ a + b ; \; a \in A, \; b \in B \}$. Množinu, která je k množině A *opačná*, označíme $-A$ a klademe $-A = \{ -a \, ; \; a \in A \}$.

Ať podmnožiny $K_1, K_2, K \subseteq W$ prostoru W jsou kužely. Lehce nahlédneme, že průnik $K_1 \cap K_2$ ale také součet $K_1 + K_2$ jsou kužely. Rovněž množina $-K$ je kužel a tento kužel $-K$ nazýváme kuželem *opačným* ke kuželi K. Již jsme poznamenali, že každý lineární podprostor (dle definice 1.14) vektorového prostoru W je kuželem. Avšak kužel K je podprostorem právě tehdy, když $K = -K$. Nyní už je jasné, že když množina K je kužel, potom množina $K \cap -K$ je podprostorem vektorového prostoru W.

Ať dále m je přirozené číslo (lze zvolit i $m = 0$) a ať $u_1, \ldots, u_m, u \in W$ jsou (ne nutně navzájem různé) vektory. Vektor u je *kuželovou kombinací* vektorů $u_1, \ldots, u_m$ právě tehdy, když existují nezáporné skaláry $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F_0^+$, splňující $\lambda_i \geq 0$ pro $i = 1, \ldots, m$, takové, že $u = (\lambda_1 * u_1) + \cdots + (\lambda_m * u_m)$. (Jestliže je $m = 0$, klademe $(\lambda_1 * u_1) + \cdots + (\lambda_m * u_m) = 0$. Když vektor u je kuželovou kombinací vektorů $u_1, \ldots, u_m$, lze ekvivalentně říci, že vektor u je *nezápornou lineární kombinací* uvedených vektorů $u_1, \ldots, u_m$. Srov. definici 1.25.)

Mějme libovolnou podmnožinu $M \subseteq W$ vektorového prostoru W. *Kuželový obal* množiny M označíme $\operatorname{cone} M$ a rozumíme jím množinu všech kuželových kombinací prvků množiny M. To znamená, že $u \in \operatorname{cone} M$ právě tehdy, když existuje přirozené číslo m (může být také $m = 0$) a existují vektory $u_1, \ldots, u_m \in M$ tak, že vektor u je kuželovou kombinací zvolených vektorů $u_1, \ldots, u_m$. Chceme-li se vyhnout nedorozumění, které někdy hrozí, lze ekvivalentně říkat, že $\operatorname{cone} M$ je *konvexní kuželový obal* zvolené množiny M, viz též následující poznámku 3.39.

Lehce nahlédneme, že kuželový obal prázdné množiny obsahuje právě nulový vektor. Dále je zřejmé, že kuželový obal $\operatorname{cone} M$ libovolné množiny $M \subseteq W$ je kužel. Nyní zvolme libovolné podmnožiny $M_1, M_2, M \subseteq W$ vektorového prostoru W. Za pozornost stojí, že platí $\operatorname{cone}(M_1 \cup M_2) = (\operatorname{cone} M_1) + (\operatorname{cone} M_2)$, k tomu $\operatorname{cone}(-M) = -\operatorname{cone} M$. Platí rovněž samozřejmý vztah $\operatorname{cone} M \subseteq \operatorname{Lin} M$. Nyní už vzhledem k předchozímu snadno nahlédneme, že $\operatorname{Lin} M = \operatorname{cone}\big(M \cup (-M)\big) = (\operatorname{cone} M) + (-\operatorname{cone} M)$.

Poznamenejme, že pojem kužele, operace součtu dvou množin i opačné množiny, kuželové kombinace a kuželového obalu jsme v této definici 3.38 zavedli v případě, kdy W byl levý vektorový prostor („bez lineárního uspořádání“) nad lineárně uspořádaným tělesem F, viz definici 1.8 a poznámku 3.7. (Podle konvence zavedené v definici 3.2 můžeme všechny pojmy, které v sobě nějakým způsobem zahrnují pojem tělesa – například pojem lineární kombinace, pojem levého / pravého vektorového prostoru apod. –, použít i tehdy, když pracujeme s lineárně uspořádaným tělesem.) Kdyby W byl pravý vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F, postupovali bychom obdobně.

Přejděme k situaci, kdy kromě vektorového prostoru W nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ máme ještě lineárně uspořádaný vektorový prostor $(V, +, -, 0, \preceq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. (Znak „$*$“ nyní bude znamenat výhradně skalární násobení vektorů z prostoru V.) Připomeňme, že $W^\#$ označuje algebraický duál prostoru W a že $W_V^\#$ je prostor všech lineárních zobrazení mezi prostory W a V, viz definice 1.24 a 1.38.

Zvolme přirozené číslo m (lze vzít i $m = 0$), k tomu zvolme lineární formy $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_m \colon W \to F$ a lineární zobrazení $\gamma \colon W \to V$. (Máme tedy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in W^\#$ a $\gamma \in$ $\in W_V^\#$.) Zobrazení γ je *V-kuželovou kombinací* lineárních forem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ právě tehdy, když existují nezáporné vektory $u_1, \ldots, u_m \in V_0^+$, splňující $u_i \succeq 0$ pro $i = 1, \ldots, m$, takové, že $\gamma = \iota u_1 \alpha_1 + \cdots + \iota u_m \alpha_m$. (Znak „$+$“ zde označuje sčítání v prostoru $W_V^\#$, viz definici 1.38. Je-li $m = 0$, potom klademe $\iota u_1 \alpha_1 + \cdots + \iota u_m \alpha_m = o$, kde $o \colon W \to V$ je nulové lineární zobrazení. Pro význam symbolu „ι“ viz definici 1.39 a navazující poznámku 1.40. Jestliže lineární zobrazení γ je V-kuželovou kombinací lineárních forem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, pak lze také ekvivalentně říkat, že zobrazení γ je *nezápornou V-lineární kombinací* daných lineárních forem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Srov. definici 1.42.)

Ať $M \subseteq W^\#$ je libovolná podmnožina algebraického duálu $W^\#$, tedy libovolná množina lineárních forem definovaných na prostoru W. Její *V-kuželový obal* označíme $\operatorname{cone}_V M$ a rozumíme jím množinu všech V-kuželových kombinací prvků množiny M.

Pro $\gamma \in W_V^\#$ tedy máme $\gamma \in \operatorname{cone}_V M$ právě tehdy, když existuje přirozené číslo m (může být také $m = 0$) a existují nezáporné vektory $u_1, \dots, u_m \in V_0^+$, aby $u_i \succeq 0$ pro $i = 1, \dots, m$, tak, že $\gamma = \iota u_1 \alpha_1 + \cdots + \iota u_m \alpha_m$.

Nyní za lineárně uspořádaný vektorový prostor V dosaďme aditivní grupu tělesa F s jeho lineárním uspořádáním a za násobení skalárem „$*$“ dosaďme operaci násobení „$\cdot$“ tělesa F. Klademe tedy $(V, +, -, 0, \preceq) = (F, +, -, 0, \leq)$ a „$* = \cdot$“. Pak, jak už z definice 1.38 víme, prostor $W_F^\#$ splývá s algebraickým duálem $W^\#$, který je pravým vektorovým prostorem nad tělesem F. Snadno nahlédneme, že pojem nezáporné F-lineární kombinace lineárních forem $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in W^\#$ splývá s pojmem nezáporné lineární kombinace těchto forem. Dále je zřejmé, že F-kuželový obal množiny lineárních forem $M \subseteq W^\#$ je roven kuželovému obalu této množiny, tedy $\operatorname{cone}_F M = \operatorname{cone} M$.

3.39. Poznámka. Kužel, konvexní kužel a klín. Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F s uspořádáním „$\leq$“. V právě podané definici 3.38 jsme uvedli, že množina $K \subseteq W$ je (konvexní) kužel právě tehdy, když je uzavřená na sčítání a násobení nezáporným skalárem, takže $x + y \in K$ a $\lambda x \in K$ pro všechna $x, y \in K$ a $\lambda \in F_0^+$, splňující $\lambda \geq 0$. Je snadné nahlédnout, že když množina K je kužel podle právě uvedené definice, potom množina K je konvexní (viz následující definici 3.42). Z tohoto důvodu o kuželi podle právě uvedené definice někdy hovoříme jako o „konvexním kuželi“. Srov. [67: poznámka 2.23.g3] a [65: definice 1.9 a věta 1.24 (na str. 31)].

Definice kužele ale v literatuře není zcela jednotná. Někteří autoři kromě uzavřenosti na sčítání požadují už jenom uzavřenost na násobení kladnými skaláry, nepožadují tedy, aby kužel obsahoval počátek, viz např. [67: poznámka 2.23.g3]. (Ve výše uvedené definici 3.38 jsme požadovali uzavřenost na násobení nezápornými skaláry. Zde tedy požadujeme, aby kužel počátek obsahoval.) Jiní autoři v definici kužele požadují pouze uzavřenost na násobení nezáporným skalárem, takže kužel obsahuje počátek, kdežto uzavřenost na sčítání už nepožadují – je-li takováto množina přesto uzavřená i na operaci sčítání, hovoří o konvexním kuželi – viz např. [65: definice 1.9 a věta 1.24 (na str. 31)].

Doplňme, že další autoři, kteří kuželem rozumějí vždy konvexní kužel, množinu pouze uzavřenou na násobení nezáporným skalárem – tedy množinu $K \subseteq W$ takovou, že $\lambda x \in K$ pro každé $x \in K$ a každé $\lambda \in F_0^+$, splňující $\lambda \geq 0$ – nazývají *klínem.* (Kuželem tito autoři rozumějí množinu, která je klínem a současně je uzavřená na sčítání, tedy množinu $K \subseteq W$ takovou, že K je klín a zároveň pro každé $x, y \in K$ platí $x + y \in K$.) Tato terminologie, tedy používání pojmů „klín“ a „(konvexní) kužel“, se zdá být poměrně vhodná. (Na druhou stranu je možné pro stejné množiny používat názvy po řadě „kužel“ a „konvexní kužel“.)

Vidíme, že při používání samotného pojmu „kužel“ může poměrně snadno dojít k nedorozumění. Proto je vhodné jej používat obezřetně. V této práci pojmem „kužel“ myslíme vždy konvexní kužel.

3.40. Poznámka. Kužely F_0^+ a F_0^- v lineárně uspořádaném tělese F, kužely V_0^+ a V_0^- v lineárně uspořádaném vektorovém prostoru V. Nechť V je vektorový prostor s lineárním uspořádáním „$\preceq$“ nad lineárně uspořádaným tělesem s uspořádáním „$\leq$“. V definici 3.2 jsme zavedli množiny nezáporných a nekladných skalárů, po řadě F_0^+ a F_0^-. Stejně tak jsme v definici 3.6 zavedli množiny nezáporných a nekladných vektorů, po řadě V_0^+ a V_0^-. Množiny F_0^+ a V_0^+ jsme pak v definicích 3.2 a 3.6 nazvali nezápornými kuželi. (Poznamenejme, že pojem nekladného kužele jsme nezaváděli.) V této poznámce 3.40 odůvodníme, že množiny F_0^+ a V_0^+ (a také množiny F_0^- a V_0^-) jsou kužely (ve smyslu předcházející definice 3.38), takže název „nezáporný kužel“ pro množiny F_0^+ a V_0^+ používáme opodstatněně.

Ať W je aditivní grupa tělesa F, kterou považujeme za vektorový prostor nad tělesem F. Máme $F_0^+ = \{ \lambda \in F \,;\, \lambda \geq 0 \}$. Ze vztahů 3.2.(1), viz definici 3.2, vyplývá, že když skaláry $\lambda, \mu \in F$ splňují $\lambda, \mu \geq 0$, ekvivalentně $\lambda, \mu \in F_0^+$, potom platí $\lambda + \mu \geq 0$ a $\lambda\mu \geq 0$, neboli $\lambda + \mu \in F_0^+$ a $\lambda\mu \in F_0^+$. Tím jsme ověřili, daná podmnožina $F_0^+ \subseteq$

$\subseteq W$ zvoleného vektorového prostoru W je skutečně kuželem podle definice 3.38. Dále snadno nahlédneme, že $F_0^- = -F_0^+$, kde používáme operaci opačné množiny zavedenou předcházející definicí 3.38, tudíž množina F_0^- je kuželem opačným ke kuželi F_0^+. Množina F_0^- je proto také kuželem.

Nyní za vektorový prostor W dosaďme prostor V. Analogicky máme $V_0^+ = \{\, u \in V;\ u \succeq 0 \,\}$ a ze vztahů 3.6.(1) uvedených v definici 3.6 vyplývá, že pro každé vektory $u, v \in V$ splňující $u, v \succeq 0$, tedy $u, v \in V_0^+$ a pro každý nezáporný skalár $\lambda \in F_0^+$ platí $u + v \succeq 0$ a $\lambda u \succeq 0$, tudíž $u + v \in V_0^+$ a $\lambda u \in V_0^+$. Opět jsme ověřili, že množina $V_0^+ \subseteq W$ je kuželem dle definice 3.38. K tomu opět platí $V_0^- = -V_0^+$, takže množina V_0^- je kuželem opačným ke kuželi V_0^+, a proto také kuželem.

3.41. V § 1 dodatkem k pojmům lineárního podprostoru, lineární kombinace a lineárního obalu (definice 1.14 a 1.25) byly pojmy afinního podprostoru, afinní kombinace a afinního obalu (definice 1.35). Zde dodatkem k pojmům kužele, kuželové kombinace a kuželového obalu (uvedená definice 3.38) jsou pojmy konvexní množiny, konvexní kombinace a konvexního obalu.

3.42. Definice. Konvexní množina, konvexní kombinace, konvexní obal. Nechť $(W, +, -, 0)$ je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“, viz poznámku 3.7.

Podmnožina $C \subseteq W$ vektorového prostoru W je *konvexní* právě tehdy, když pro každé dva body $x, y \in C$ a pro každý skalár $\lambda \in F$ splňující $0 \leq \lambda \leq 1$ platí $(\lambda * x) + \big((1 - \lambda) * y\big) \in C$.

Prázdná množina je konvexní. Také každý podprostor a afinní podprostor vektorového prostoru W jsou konvexní množiny. Rovněž každá množina, která je kužel, je konvexní.

Nyní ať m je přirozené číslo a ať $u_1, \ldots, u_m, u \in W$ jsou (ne nutně navzájem různé) vektory. Vektor u je *konvexní kombinací* vektorů $u_1, \ldots, u_m$ právě tehdy, když existují nezáporné skaláry $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F_0^+$, splňující $\lambda_i \geq 0$ pro $i = 1, \ldots, m$, takové, že $u = (\lambda_1 * u_1) + \cdots + (\lambda_m * u_m)$ a současně $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$. (Kdyby bylo $m = 0$, položili bychom $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 0$, tudíž $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m \neq 1$.)

Nakonec budiž dána libovolná podmnožina $M \subseteq W$ vektorového prostoru W. *Konvexní obal* množiny M označíme $\operatorname{conv} M$ a rozumíme jím množinu všech konvexních kombinací prvků množiny M. Pro vektor $u \in W$ tedy platí $u \in \operatorname{conv} M$ tehdy a jen tehdy, když existuje přirozené číslo m a existují vektory $u_1, \ldots, u_m \in M$ tak, že vektor u je konvexní kombinací zvolených vektorů $u_1, \ldots, u_m$.

Vidíme, že pro libovolnou množinu $M \subseteq W$ platí vztah $\operatorname{conv} M = (\operatorname{cone} M) \cap (\operatorname{Aff} M)$. K tomu je zřejmé, že konvexní obal $\operatorname{conv} M$ každé množiny $M \subseteq W$ je konvexní množina. Poznamenejme, že někteří autoři konvexní obal množiny M označují $\operatorname{co} M$, další autoři jej označují $[M]$.

Pojem konvexní množiny konvexní kombinace a konvexního obalu jsme v této definici 3.42 zavedli v případě, kdy W byl levý vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Kdyby W byl pravý vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F, postupovali bychom obdobně.

3.43. Když máme lineárně uspořádaný vektorový prostor nebo těleso, můžeme zavést také pojem absolutní hodnoty a nezáporné a nekladné části. Obvyklým způsobem můžeme zavést rovněž pojem posloupnosti a její limity.

3.44. Definice. Absolutní hodnota, nezáporná část, nekladná část. Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“.

Mějme vektor $u \in V$. Jeho *absolutní hodnotu* označujeme $|u|$ a klademe

$$|u| = \begin{cases} u\,, & \text{jestliže } u \succeq 0\,, \\ -u\,, & \text{jestliže } u \preceq 0\,. \end{cases}$$

Jeho *nezápornou část* označujeme $(u)^+$ a klademe

$$(u)^+ = \begin{cases} u\,, & \text{jestliže } u \succeq 0\,, \\ 0\,, & \text{jestliže } u \preceq 0\,. \end{cases}$$

Jeho *nekladnou část* označujeme $(u)^-$ a klademe

$$(u)^- = \begin{cases} 0\,, & \text{jestliže } u \succeq 0\,, \\ -u\,, & \text{jestliže } u \preceq 0\,. \end{cases}$$

Znak 0 v uvedených vztazích vždy označoval nulový vektor prostoru V. Povšimněme si, že pro každé $u \in V$ platí následující čtyři vztahy:

$$\begin{aligned} u &= (u)^+ - (u)^-\,, \qquad & (u)^+ &= \tfrac{1}{2} * \big(|u| + u\big)\,, \\ |u| &= (u)^+ + (u)^-\,, \qquad & (u)^- &= \tfrac{1}{2} * \big(|u| - u\big)\,, \end{aligned}$$

kde $\frac{1}{2} = (1+1)^{-1}$, přičemž 1 je jednotka tělesa F. Pro libovolné vektory $u, v \in V$ a libovolný nezáporný skalár $\lambda \in F$, splňující $\lambda \geq 0$, máme i tyto čtyři vztahy:

$$|-u| = |u|\,, \qquad |\lambda * u| = \lambda * |u|\,, \qquad |u| = 0 \iff u = 0\,, \qquad |u+v| \preceq |u| + |v|\,.$$

Jestliže za lineárně uspořádaný vektorový prostor $(V, +, -, 0, \preceq)$ dosadíme aditivní grupu tělesa F s jeho lineárním uspořádáním, tedy $(F, +, -, 0, \leq)$, postupujeme zcela obdobně. Mějme skalár $\lambda \in F$. Jeho *absolutní hodnotu* označujeme $|\lambda|$ a klademe $|\lambda| = \lambda$, jestliže $\lambda \geq 0$, a klademe $|\lambda| = -\lambda$, jestliže $\lambda \leq 0$. Jeho *nezápornou část* označujeme $(\lambda)^+$ a klademe $(\lambda)^+ = \lambda$, jestliže $\lambda \geq 0$, a $(\lambda)^+ = 0$, jestliže $\lambda \leq 0$. Jeho *nekladnou část* označujeme $(\lambda)^-$ a klademe $(\lambda)^- = 0$, jestliže $\lambda \geq 0$, a $(\lambda)^- = -\lambda$, jestliže $\lambda \leq 0$. Znak 0 nyní znamenal nulu tělesa F. Pro každé $\lambda \in F$ opět platí $\lambda = (\lambda)^+ - (\lambda)^-$, $|\lambda| = (\lambda)^+ + (\lambda)^-$, $(\lambda)^+ = \frac{1}{2} \cdot \big(|\lambda| + \lambda\big)$, $(\lambda)^- = \frac{1}{2} \cdot \big(|\lambda| - \lambda\big)$ a $|-\lambda| = |\lambda|$. Znak $\frac{1}{2}$ má stejný význam jako výše, tedy $\frac{1}{2} = (1+1)^{-1}$, kde 1 je jednotka tělesa F. Dále pro všechna $\lambda, \mu \in F$ platí $|\lambda \cdot \mu| = |\lambda| \cdot |\mu|$, k tomu $|\lambda| = 0$ právě tehdy, když $\lambda = 0$, a $|\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|$.

Nakonec se vraťme k lineárně uspořádanému vektorovému prostoru V nad lineárně uspořádaným tělesem F vzhledem k zobrazení „$*$“. Dodáváme, že pro libovolné $\lambda \in F$ a $u \in V$ platí $|\lambda * u| = |\lambda| * |u|$.

3.45. Definice. Posloupnost prvků lineárně uspořádaného vektorového prostoru nebo tělesa. Limita posloupnosti. Mějme lineárně uspořádaný vektorový prostor $(V, +, -, 0, \preceq)$ nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Dále mějme množinu všech (nenulových) přirozených čísel $\mathbb{N}$.

Posloupností vektorů (nebo prvků) lineárně uspořádaného vektorového prostoru V rozumíme každé zobrazení $\boldsymbol{a}\colon \mathbb{N} \to V$. Vektor $\boldsymbol{a}(n)$, který je zobrazením $\boldsymbol{a}$ přirozenému číslu $n \in \mathbb{N}$ přiřazen, nazýváme *n-tým členem posloupnosti* $\boldsymbol{a}$ a značíme stručně a_n. Celou posloupnost $\boldsymbol{a}$ obvykle zapisujeme takto: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Máme tedy rovnost $\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Zápis $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ budeme používat, protože je ustálený a názorně vyjadřuje, z jakých členů je posloupnost $\boldsymbol{a}$ složena. (Ekvivalentně by posloupnost bylo možné zavést jako prvky nosné množiny vektorového prostoru $\prod_{n\in\mathbb{N}} V_n$, kde V_n je vektorový prostor $(V, +, -, 0)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\boldsymbol{u} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} V_n$ bychom pak zapisovali $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Viz definici 1.52. Zde ale dáme přednost zápisu $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$.)

Posloupnost vektorů $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vektorového prostoru V je *rostoucí*, resp. *neklesající*, resp. *nerostoucí*, resp. *klesající*, právě tehdy, když pro každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ platí po řadě $a_{n+1} \succ a_n$, resp. $a_{n+1} \succeq a_n$, resp. $a_{n+1} \preceq a_n$, resp. $a_{n+1} \prec a_n$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *monotónní* právě tehdy, když je nerostoucí nebo neklesající. Lehce nahlédneme, že každá rostoucí resp. klesající posloupnost je po řadě neklesající resp. nerostoucí, tedy také monotónní.

Mějme přirozené číslo-index $n_0 \in \mathbb{N}$. Zvolená posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků vektorového prostoru V je *od indexu n_0 stacionární* právě tehdy, když existuje vektor $a \in V$ tak, že pro každé přirozené $n \in \mathbb{N}$ větší nebo rovné n_0, tedy splňující $n \geq n_0$, platí $a_n = a$. Říkáme, že daná posloupnost je *stacionární od určitého svého členu* právě tehdy, když existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že daná posloupnost je stacionární od indexu n_0. K tomu říkáme, že daná posloupnost je *stacionární* právě tehdy, když je stacionární už od indexu $n_0 = 1$. Vidíme, že posloupnost vektorů $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lineárně uspořádaného vektorového prostoru V je stacionární právě tehdy, když je nerostoucí i neklesající současně.

Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků vektorového prostoru V. Dále zvolme libovolný bod $a \in V$. (O prvcích vektorového prostoru někdy hovoříme jako o bodech. Viz názvosloví zavedené definicí 1.5.) Zvolený bod a je *limitou* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ právě tehdy, když ke každému kladnému $\varepsilon \in V$, splňujícímu $\varepsilon \succ 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ větší nebo rovná n_0, tedy vyhovující vztahu $n \geq n_0$, platí $|a_n - a| \prec \varepsilon$. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* právě tehdy, když existuje bod $a \in V$, který je její limitou; posloupnost *nemá limitu* právě tehdy, když žádný takový bod neexistuje. Zvolme bod $a \in V$. Říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* (k bodu a) právě tehdy, když má limitu (a limitou je právě zvolený bod a). Posloupnost *diverguje* právě tehdy, když nemá limitu. Říkáme rovněž, že posloupnost je *konvergentní* resp. *divergentní* právě tehdy, když po řadě má resp. nemá limitu. Povšimněme si, že je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ od určitého svého členu stacionární – je stacionární od vhodného indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ –, potom má limitu a limitou je právě bod a_{n_0}. Dále je zřejmé, že každá posloupnost prvků lineárně uspořádaného vektorového prostoru má nejvýše jednu limitu, tj., existuje nejvýše jeden bod, který je její limitou. Jestliže víme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu, potom její limitu označíme $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Stále mějme posloupnost vektorů $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lineárně uspořádaného vektorového prostoru V. Tato posloupnost je *cauchyovská* právě tehdy, když ke každému kladnému $\varepsilon \in V$, splňujícímu $\varepsilon \succ 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každá dvě přirozená čísla $m, n \in \mathbb{N}$ větší nebo rovna n_0, tedy splňující $m, n \geq n_0$, platí $|a_m - a_n| \prec \varepsilon$. Zvolená posloupnost je *omezená shora* právě tehdy, když existuje prvek $u \in V$ tak, že pro každé přirozené $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \preceq u$. Zvolená posloupnost je *omezená zdola* tehdy a jen tehdy, když existuje prvek $l \in V$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $l \preceq a_n$. Posloupnost je *omezená* právě tehdy, když je omezená shora i zdola. Je zřejmé, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Dále je zřejmé, že každá cauchyovská posloupnost je omezená.

Nakonec k posloupnosti vektorů $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lineárně uspořádaného vektorového prostoru V mějme ještě zobrazení $\boldsymbol{k}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že přirozené číslo $\boldsymbol{k}(n+1)$ je větší než $\boldsymbol{k}(n)$, tedy $\boldsymbol{k}(n+1) > \boldsymbol{k}(n)$, a to pro všechna přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$. (Máme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{\boldsymbol{k}(n)\}_{n=1}^{\infty}$.) Potom posloupnost $\{a_{\boldsymbol{k}(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *podposloupností* (nebo též posloupností *vybranou* z) posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Lehce nahlédneme, že když posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, potom její libovolná podposloupnost je také konvergentní a má stejnou limitu $\lim_{n\to\infty} a_n$. Poznamenejme, že je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost a $\{a_{\boldsymbol{k}(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ její podposloupnost, říkáme také, že „posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uvedenou podposloupnost $\{a_{\boldsymbol{k}(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje".

Jako speciální volbu je možné za lineárně uspořádaný vektorový prostor $(V, +, -, 0, \preceq)$ dosadit aditivní grupu tělesa F spolu s jeho uspořádáním, tedy lineárně uspořádanou grupu $(F, +, -, 0, \leq)$. Všechny pojmy, které jsme v této definici 3.45 zavedli, tak můžeme použít i v případě posloupností resp. zobrazení $\boldsymbol{a}: \mathbb{N} \to V$, tj. $\boldsymbol{a}: \mathbb{N} \to F$, protože nyní máme $V = F$. Jediný rozdíl spočívá v tom, že o posloupnosti resp. zobrazení $\boldsymbol{a}: \mathbb{N} \to F$ hovoříme jako o posloupnosti skalárů či prvků lineárně uspořádaného tělesa F, nikoliv jako o posloupnosti vektorů či prvků nějakého lineárně uspořádaného vektorového prostoru.

3.46. Věta. *Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Mějme dvě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ vektorů prostoru V a dvě posloupnosti $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ skalárů tělesa F. (Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí $a_n, b_n \in V$ a $\lambda_n, \mu_n \in F$.) Dané posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ budiž konvergentní. Smíme tedy položit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ a $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ a $\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$ a $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$.*

Potom posloupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\lambda_n \cdot \mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní a platí

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b\,, \qquad \lim_{n\to\infty} (-a_n) = -a\,, \qquad \lim_{n\to\infty} (\lambda_n \cdot \mu_n) = \lambda \cdot \mu\,.$$

Nadto, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\lambda_n \neq 0$ a $\lambda \neq 0$, potom posloupnost $\{\lambda_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je rovněž konvergentní a platí

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1} = \lambda^{-1}\,.$$

3.46.a. *Poznámka.* Posloupnost $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \{\lambda_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je vlastně zobrazení, které vzniklo složením posloupnosti $\boldsymbol{\lambda}\colon \mathbb{N} \to F$, kde $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, a unární operace inverzního prvku $^{-1}\colon F^* \to F^*$, přičemž F^* je množina všech nenulových skalárů tělesa F. Aby toto složení bylo možné provést – přesněji řečeno, aby definičním oborem složeného zobrazení „$^{-1} \circ \boldsymbol{\lambda}$“ byla množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$, tj., aby složené zobrazení bylo i nadále posloupností – je třeba požadovat, aby $\lambda_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

3.46.b. *Poznámka.* Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stacionární, $a_n = a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Stacionární posloupnost je zřejmě konvergentní, máme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Z prvního tvrzení uvedené věty 3.46 plyne, že $\lim_{n\to\infty}(a+b_n) = a+\lim_{n\to\infty} b_n$. Nyní ať posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stacionární, $\lambda_n = \lambda$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, načež obdobně máme $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Z třetího tvrzení věty 3.46 pak plyne, že $\lim_{n\to\infty}(\lambda \cdot \mu_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} \mu_n$ a také $\lim_{n\to\infty}(\mu_n \cdot \lambda) = (\lim_{n\to\infty} \mu_n) \cdot \lambda$.

3.46.c. *Poznámka.* S ohledem na poznámku 3.8 – dosadíme-li za vektorový prostor V s lineárním uspořádáním „$\preceq$“ aditivní grupu tělesa F s jeho lineárním uspořádáním „$\leq$“ – dostáváme, že posloupnosti $\{\lambda_n + \mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{-\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergují a že $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n + \mu_n) = \lambda + \mu$ a $\lim_{n\to\infty}(-\lambda_n) = -\lambda$. K tomu rovněž $\lim_{n\to\infty}(\lambda + \mu_n) = \lambda + \lim_{n\to\infty} \mu_n$.

3.46.d. *Poznámka.* Ačkoliv posloupnost $\{\lambda_n \cdot \mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, posloupnost $\{\lambda_n * a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obecně může divergovat. Pro příklad za vektorový prostor V s lineárním uspořádáním „$\preceq$“ dosaďme prostor $\mathbb{R}^2$ s lexikografickým uspořádáním „$\preceq$“ nad lineárně uspořádaným tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním „$\leq$“. Uvažujme posloupnost vektorů $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\binom{1}{1/n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Tato posloupnost je v lexikografickém uspořádání zřejmě konvergentní a $\lim_{n\to\infty}\binom{1}{1/n} = \binom{1}{0}$. Dále uvažujme posloupnost skalárů $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1 + 1/n\}_{n=1}^{\infty}$. Také tato posloupnost konverguje a $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n) = 1$. Avšak posloupnost $\{\lambda_n * a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\binom{1+1/n}{1/n+1/n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ v lexikografickém uspořádání není cauchyovská, proto nemůže být ani konvergentní. Kdybychom chtěli dokázat, že posloupnost $\{\lambda_n * a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní a že $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n * a_n) = \lambda * a$, museli bychom předpokládat, že uspořádání „$\preceq$“ vektorového prostoru V je slabě archimedovské (viz definici 3.63 níže a pro další podrobnosti viz též poznámku 3.113 níže) – při důkazu tohoto tvrzení bychom pak postupovali zcela obdobně jako při důkazu konvergence posloupnosti $\{\lambda_n \cdot \mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ a důkazu rovnosti $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n \cdot \mu_n) = \lambda \cdot \mu$, viz následující důkaz 3.46.f.

3.46.e. *Poznámka.* V uvedené větě 3.46 jde o veskrze standardní výsledky – srov. [62: věta 55 (v kapitole II § 2 na str. 81)]. Její důkaz proto jen naznačíme. Poznamenejme, že v citované knize Vojtěcha JARNÍKA [62] je důkaz proveden pro případ komutativního lineárně uspořádaného tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ a komutativita je v důkazu i několikrát použita. Zde ve větě 3.46 komutativitu tělesa F nepředpokládáme (viz též odstavec 3.65 níže). Důkaz třetího a čtvrtého tvrzení této věty 3.46 (tj. vztahů $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n \cdot \mu_n) = \lambda \cdot \mu$ a $\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1} = \lambda^{-1}$) je proto třeba upravit.

3.46.f. *Náznak důkazu.* K prvnímu tvrzení: $\big|(a_n + b_n) - (a + b)\big| = \big|(a_n - a) + (b_n - b)\big| \preceq$ $\preceq |a_n - a| + |b_n - b|$.

Ke druhému tvrzení: $\big|(-a_n) - (-a)\big| = \big|-(a_n - a)\big| = |a_n - a|$.

Ke třetímu tvrzení: $\big|(\lambda_n \cdot \mu_n) - (\lambda \cdot \mu)\big| = \big|(\lambda_n \cdot \mu_n) - (\lambda_n \cdot \mu) + (\lambda_n \cdot \mu) - (\lambda \cdot \mu)\big| \leq$ $\leq \big(|\lambda_n| \cdot |\mu_n - \mu|\big) + \big(|\lambda_n - \lambda| \cdot |\mu|\big)$. Využijeme toho, že posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, protože je konvergentní.

Ke čtvrtému tvrzení: Nejprve dokážeme, že posloupnost $\{\lambda^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená. Pro stručnost položme $\frac{1}{2} = (1+1)^{-1}$, kde 1 je jednotka tělesa F. Protože $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, k $\varepsilon = |\frac{1}{2} \cdot \lambda|$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq n_0$ platí $|\lambda_n - \lambda| \leq$ $\leq |\frac{1}{2} \cdot \lambda|$, ekvivalentně $\lambda - |\frac{1}{2} \cdot \lambda| \leq \lambda_n \leq \lambda + |\frac{1}{2} \cdot \lambda|$, tudíž $|\frac{1}{2} \cdot \lambda| \leq |\lambda_n|$. (Jestliže $\lambda > 0$, potom $0 < |\frac{1}{2} \cdot \lambda| = \frac{1}{2} \cdot \lambda = \lambda - (\frac{1}{2} \cdot \lambda) = \lambda - |\frac{1}{2} \cdot \lambda| \leq \lambda_n = |\lambda_n|$. Jestliže $\lambda < 0$, potom $0 < |\frac{1}{2} \cdot \lambda| = -\frac{1}{2} \cdot \lambda = -\big(\lambda - (\frac{1}{2} \cdot \lambda)\big) = -\big(\lambda + |\frac{1}{2} \cdot \lambda|\big) \leq -\lambda_n = |\lambda_n|$.) Takže $|\lambda_n^{-1}| \leq |2 \cdot \lambda|$, přičemž $2 = (\frac{1}{2})^{-1}$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq n_0$. Odtud $|\lambda_n^{-1}| \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, kde $K \in F$ je voleno tak, aby $|2 \cdot \lambda|, |\lambda_1^{-1}|, \ldots, |\lambda_{n_0-1}^{-1}| \leq K$. Nyní $|\lambda_n^{-1} - \lambda^{-1}| = |\lambda_n^{-1} - \lambda^{-1}| \cdot |\lambda_n \cdot \lambda_n^{-1}| = \big|1 - (\lambda^{-1} \cdot \lambda_n)\big| \cdot \big|\lambda_n^{-1}\big| \leq \big|1 - (\lambda^{-1} \cdot \lambda_n)\big| \cdot K$. Ovšem $\lim_{n\to\infty}(\lambda^{-1} \cdot \lambda_n) = \lambda^{-1} \cdot \lambda = 1$, protože $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. □

3.47. Věta. *Ať* $(V, +, -, 0, \preceq)$ *je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem* $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$. *K tomu* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *buďte dvě konvergentní posloupnosti vektorů prostoru* V, *takže pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *máme* $a_n, b_n \in V$. *Položme* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. *Jestliže pro všechna přirozená čísla* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \preceq b_n$, *potom platí* $a \preceq b$.

3.47.a. *Poznámka.* Za posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je možné volit posloupnost stacionární, kdy $a_n = a$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Z uvedené věty 3.47 pak plyne, že když $a \preceq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, potom $a \preceq b$. Také posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ může být stacionární, $b_n = b$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, načež opět $a \preceq b$, jestliže $a_n \preceq b$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

3.47.b. *Poznámka.* Vzhledem k poznámce 3.8 máme obdobný výsledek také pro aditivní grupu tělesa F. Nechť $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě konvergentní posloupnosti skalárů, $\lambda_n, \mu_n \in F$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Položme $\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$ a $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$. Jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\lambda_n \leq \mu_n$, potom $\lambda \leq \mu$. Nerovnost $\lambda \leq \mu$ platí také tehdy, když jedna z posloupností $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stacionární.

3.47.c. *Poznámka.* I tato věta 3.47 je zcela standardním výsledkem, srov. [62: věta 60 (v kapitole II § 2 na str. 86)].

3.47.d. *Důkaz.* Větu dokážeme nepřímo. Předpokládejme, že $a \succ b$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot$ $\cdot (a - b)$, kde $\frac{1}{2} = (1+1)^{-1}$, přičemž 1 je jednotka tělesa F. Protože posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní, existuje přirozené číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n \in \mathbb{N}$ větší nebo rovna n_0, tedy $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| \prec \varepsilon$ a $|b_n - b| \prec \varepsilon$. Potom ale $a_{n_0} \succ a - \varepsilon = b + \varepsilon \succ b_{n_0}$. □

3.48. V dalším budeme potřebovat pojem izomorfismu těles.

3.49. Definice. Izomorfismus těles (i lineárně uspořádaných). Nechť $F_1(+,-,\cdot,{}^{-1},0,1)$ a $F_2(+,-,\cdot,{}^{-1},0,1)$ jsou dvě tělesa, viz definici 1.3. Tělesa F_1 a F_2 jsou *izomorfní* právě tehdy, když existuje vzájemně jednoznačné, tedy prosté a *na*, zobrazení $f\colon F_1 \to F_2$ takové, že pro všechna $\lambda,\mu \in F_1$ platí

$$f(\lambda+\mu) = \bigl(f(\lambda)\bigr) + \bigl(f(\mu)\bigr)\,,$$
$$f(\lambda\cdot\mu) = \bigl(f(\lambda)\bigr) \cdot \bigl(f(\mu)\bigr)\,.$$

Zobrazení f splňující uvedené podmínky dosvědčuje, že tělesa F_1 a F_2 jsou izomorfní, a nazýváme jej *izomorfismem* těles F_1 a F_2.

Ať $f\colon F_1 \to F_2$ je izomorfismus těles F_1 a F_2. Poměrně snadno nahlédneme, že $f(0)=0$ a že $f(1)=1$. Pak už lehce ověříme, že pro každé $\lambda \in F_1$ platí $f(-\lambda) = -\bigl(f(\lambda)\bigr)$ a že pro každé nenulové $\lambda \in F_1$, tedy $\lambda \neq 0$, platí $f(\lambda^{-1}) = (f(\lambda))^{-1}$. (Pro kterékoliv $\lambda \in F_1$, např. pro $\lambda = 1$, máme $f(\lambda) = f(0+\lambda) = \bigl(f(0)\bigr) + \bigl(f(\lambda)\bigr)$ a také $f(\lambda) = f(1\cdot\lambda) = \bigl(f(1)\bigr)\cdot\bigl(f(\lambda)\bigr)$. Dále pro všechna $\lambda \in F_1$ máme $0 = f(0) = f\bigl(\lambda + (-\lambda)\bigr) = \bigl(f(\lambda)\bigr) + \bigl(f(-\lambda)\bigr)$ a, je-li $\lambda \neq 0$, pak také $1 = f(1) = f(\lambda\cdot\lambda^{-1}) = \bigl(f(\lambda)\bigr)\cdot\bigl(f(\lambda^{-1})\bigr)$.)

Není těžké ověřit, že když tělesa F_1 a F_2 jsou izomorfní, potom tělesa F_2 a F_1 jsou izomorfní. (Nechť $f\colon F_1 \to F_2$ je izomorfismus těles F_1 a F_2. Je třeba dokázat, že inverze $f^{-1}\colon F_2 \to F_1$ je izomorfismus. Zvolme $\bar\lambda,\bar\mu \in F_2$, položme $\lambda = f^{-1}(\bar\lambda)$ a $\mu = f^{-1}(\bar\mu)$. Víme, že $\bigl(f(\lambda)\bigr) + \bigl(f(\mu)\bigr) = f(\lambda+\mu)$, tudíž $f^{-1}(\bar\lambda+\bar\mu) = \bigl(f^{-1}(\bar\lambda)\bigr) + \bigl(f^{-1}(\bar\mu)\bigr)$. Obdobně $\bigl(f(\lambda)\bigr)\cdot\bigl(f(\mu)\bigr) = f(\lambda\cdot\mu)$, načež $f^{-1}(\bar\lambda\cdot\bar\mu) = \bigl(f^{-1}(\bar\lambda)\bigr)\cdot\bigl(f^{-1}(\bar\mu)\bigr)$.) Dále je triviální nahlédnout, že když tělesa F_1 a F_2 a tělesa F_2 a F_3 jsou izomorfní, potom tělesa F_1 a F_3 jsou izomorfní. Triviální je také nahlédnout, že každé těleso F_1 je izomorfní samo se sebou. (Viz též obdobná tvrzení v definici 1.69.)

Nyní ať $(F_1,+,-,\cdot,{}^{-1},0,1,\leq)$ a $(F_2,+,-,\cdot,{}^{-1},0,1,\leq)$ jsou tělesa s lineárním uspořádáním, viz definici 3.2. Lineárně uspořádaná tělesa F_1 a F_2 jsou *izomorfní* právě tehdy, když existuje zobrazení $f\colon F_1 \to F_2$, které je izomorfismem těles $(F_1,+,-,\cdot,{}^{-1},0,1)$ a $(F_2,+,-,\cdot,{}^{-1},0,1)$ a takové, že pro každé $\lambda \in F_1$ splňující $\lambda \geq 0$ platí $f(\lambda) \geq 0$. Zobrazení $f\colon F_1 \to F_2$ dosvědčující, že lineárně uspořádaná tělesa F_1 a F_2 jsou izomorfní, nazýváme *izomorfismem* lineárně uspořádaných těles F_1 a F_2.

Shrňme, že zobrazení $f\colon F_1 \to F_2$ je izomorfismus lineárně uspořádaných těles F_1 a F_2 právě tehdy, když je vzájemně jednoznačné a pro všechna $\lambda,\mu \in F_1$ platí

$$f(\lambda+\mu) = \bigl(f(\lambda)\bigr) + \bigl(f(\mu)\bigr)\,,$$
$$f(\lambda\cdot\mu) = \bigl(f(\lambda)\bigr) \cdot \bigl(f(\mu)\bigr)\,,$$
$$\lambda \geq 0 \implies f(\lambda) \geq 0\,.$$

Snadno nahlédneme, že $\lambda \geq 0$ právě tehdy, když $f(\lambda) \geq 0$, a že pro každé $\lambda,\mu \in F_1$ platí $\lambda \leq \mu$ právě tehdy, když $f(\lambda) \leq f(\mu)$. (Máme totiž $\lambda \leq 0$, právě když $-\lambda \geq 0$, potom $f(-\lambda) = -\bigl(f(\lambda)\bigr) \geq 0$, právě když $f(\lambda) \leq 0$. K tomu $\lambda \neq 0$, právě když $f(\lambda) \neq 0$. Implikace „$\Leftarrow$“ prvního tvrzení je tímto dokázána, důkaz jsme provedli nepřímo. Dále je $\lambda \leq \mu$, právě když $\mu - \lambda \geq 0$, právě když $f(\mu-\lambda) = \bigl(f(\mu)\bigr) - \bigl(f(\lambda)\bigr) \geq 0$, právě když $f(\lambda) \leq f(\mu)$.)

Opět platí, že když lineárně uspořádaná tělesa F_1 a F_2 jsou izomorfní, potom lineárně uspořádaná tělesa F_2 a F_1 jsou izomorfní. (Ať $f\colon F_1 \to F_2$ dosvědčuje, že lineárně uspořádaná tělesa F_1 a F_2 jsou izomorfní. Stačí dokázat, že pro každé $\bar\lambda \in F_2$ platí $\bar\lambda \geq 0$ právě tehdy, když $f^{-1}(\bar\lambda) \geq 0$. To však vlastně už víme: stačí položit $\lambda = f^{-1}(\bar\lambda)$, takže $\bar\lambda = f(\lambda)$, a dosadit do dokazované ekvivalence.) Stejně tak, jestliže lineárně uspořádaná tělesa F_1 a F_2 a F_2 a F_3 jsou izomorfní, potom lineárně uspořádaná tělesa F_1 a F_3 jsou izomorfní. Konečně každé lineárně uspořádané těleso F_1 je izomorfní samo se sebou.

3.50. Poznámka. V definici 3.2 jsme přijali konvenci, že „každé lineárně uspořádané těleso je těleso“. Tato konvence nám umožňuje pojmy, které máme pro tělesa zavedeny, přenést na lineárně uspořádaná tělesa. Povšimněme si ale, že u pojmu izomorfismu (lineárně uspořádaných) těles, viz právě uvedenou definici 3.49, tomu tak není. Izomorfismus lineárně uspořádaných těles oproti izomorfismu těles („bez lineárního uspořádání“) musí splňovat ještě jednu omezující podmínku navíc.

3.51. Připomeňme, že definicí 3.25 jsme v tělese zavedli pojem celistvého násobku. To nám umožní zavést pojem prvotělesa.

3.52. Definice. Prvotěleso. Mějme těleso $F(+,-,\cdot,^{-1},0,1)$. Dále mějme množinu celých čísel $\mathbb{Z}$ a zobrazení celistvého násobku $\times\colon \mathbb{Z}\times F\to F$, viz definici 3.25.

Prvotělesem tělesa F rozumíme množinu $P=\left\{\,(p\times 1)\cdot(q\times 1)^{-1};\ p,q\in\mathbb{Z}\ \wedge\ q\neq 0\,\right\}$, tedy

$$P=\left\{\,\lambda\in F\,;\ \exists p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0\colon\ \lambda=(p\times 1)\cdot(q\times 1)^{-1}\,\right\},$$

kde 1 je jednotka tělesa F. Snadno nahlédneme, že $0,1\in P$. (Stačí uvážit např. $q=1$ a po řadě $p=0$ a $p=1$.) Pro každé $\lambda,\mu\in P$ dále máme $-\lambda$, $\lambda\cdot\mu$, $\lambda+\mu\in P$ a, jestliže $\lambda\neq 0$, potom také $\lambda^{-1}\in P$. (Nechť pro vhodná $p_1,p_2,q_1,q_2\in\mathbb{Z}$, kde $q_1,q_2\neq 0$, platí $\lambda=(p_1\times 1)\cdot(q_1\times 1)^{-1}$ a $\mu=(p_2\times 1)\cdot(q_2\times 1)^{-1}$. Potom $-\lambda=((-p_1)\times 1)\cdot(q_1\times 1)^{-1}$, dále, jestliže $\lambda\neq 0$, ekvivalentně $p_1\neq 0$, máme $\lambda^{-1}=(q_1\times 1)\cdot(p_1\times 1)^{-1}$, a k tomu $\lambda\cdot\mu=((p_1\cdot p_2)\times 1)\cdot((q_1\cdot q_2)\times 1)^{-1}$. Vidíme, že pro každé $\lambda,\mu\in P$ platí rovněž $\lambda\cdot\mu=\mu\cdot\lambda$. (Poznamenejme, že není příliš těžké ověřit, že vztah $\lambda\cdot\mu=\mu\cdot\lambda$ platí dokonce pro každé $\lambda\in P$ a pro zcela libovolné $\mu\in F$. (!)) Zbývá dokázat, že $\lambda+\mu\in P$. Nejprve dokážeme, že když racionální čísla p_1/q_1 a p_2/q_2 se rovnají, $p_1/q_1=p_2/q_2$, potom $\lambda=\mu$: máme $p_1/q_1=p_2/q_2$, právě když $p_1\cdot q_2=p_2\cdot q_1$, potom $(p_1\cdot q_2)\times 1=(p_1\times 1)\cdot(q_2\times 1)=$ $=(p_2\times 1)\cdot(q_1\times 1)=(p_2\cdot q_1)\times 1$, právě když $(p_1\times 1)\cdot(q_1\times 1)^{-1}=(p_2\times 1)\cdot(q_2\times 1)^{-1}$. Nyní bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $q_1=q_2$. Lze tedy položit $q=q_1=q_2$. Potom $\big((p_1\times 1)\cdot(q\times 1)^{-1}\big)+\big((p_2\times 1)\cdot(q\times 1)^{-1}\big)=\big((p_1+p_2)\times 1\big)\cdot(q\times 1)^{-1}$. Všechna zde uvedená tvrzení plynou ihned ze základních vlastností celistvého násobku „$\times$“, viz definici 3.25.)

Povšimněme si, že prvotěleso P je vždy komutativním podtělesem tělesa F, viz definici 3.19.

Nechť nyní $(F,+,-,\cdot,^{-1},0,1,\leq)$ je těleso s lineárním uspořádáním. Pak *prvotělesem* lineárně uspořádaného tělesa F rozumíme prvotěleso tělesa $(F,+,-,\cdot,^{-1},0,1)$, tedy opět množinu $P=\left\{\,(p\times 1)\cdot(q\times 1)^{-1}\,;\ p,q\in\mathbb{Z}\ \wedge\ q\neq 0\,\right\}$.

3.53. O významu prvotělesa svědčí následující tvrzení 3.54

3.54. Tvrzení. *Nechť množina P je prvotěleso lineárně uspořádaného tělesa $(F,+,$ $-,\cdot,^{-1},0,1,\leq)$. Nechť „$+'$“, „$-'$“, „$\cdot'$“, „${}^{-1'}$“ a „$\leq'$“ jsou restrikce po řadě operací „$+$“, „$-$“, „$\cdot$“, „${}^{-1}$“ a relace „$\leq'$“ na množinu P. Pak platí tato dvě tvrzení:*

I. *Předně, $(P,+',-',\cdot',^{-1'},0,1)$ je komutativní těleso a $(P,+',-',\cdot',^{-1'},0,1,\leq')$ je lineárně uspořádané komutativní těleso.*

II. *Těleso $(P,+',-',\cdot',^{-1'},0,1)$ je izomorfní s tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$ a lineárně uspořádané těleso $(P,+',-',\cdot',^{-1'},0,1,\leq')$ je izomorfní s lineárně uspořádaným tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$ se standardním uspořádáním.*

3.54.a. *Důkaz.* I. Stačí ověřit pouze tolik, že P je podtělesem tělesa F. Ale to jsme učinili už v předcházející definici 3.52. Viz též definici 3.19.

II. Sestrojíme izomorfismus $f\colon\mathbb{Q}\to F$, který dosvědčí, že těleso racionálních čísel $\mathbb{Q}$ a těleso $(P,+',-',\cdot',^{-1'},0,1)$ jsou izomorfní. Nechť $p,q\in\mathbb{Z}$ jsou celá čísla, celé číslo q budiž nenulové, $q\neq 0$. Položme

$$f(p/q)=(p\times 1)\cdot(q\times 1)^{-1},\tag{1}$$

kde 1 je jednotka tělesa F a „$\times$“ označuje celistvý násobek. Z předcházející definice 3.19 už víme, že když pro nějaká čísla $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, kde $q_1, q_2 \neq 0$, platí $p_1/q_1 = p_2/q_2$, potom $(p_1 \times 1) \cdot (q_1 \times 1)^{-1} = (p_2 \times 1) \cdot (q_2 \times 1)^{-1}$, takže zobrazení f uvedeným předpisem opravdu můžeme definovat. Následně je zřejmé, že zobrazení f je definováno pro každé racionální číslo $x \in \mathbb{Q}$. Dále je zřejmé, že pro všechna $x \in \mathbb{Q}$ platí $f(x) \in P$, dokonce je zřejmé, že zobrazení f množinu $\mathbb{Q}$ zobrazuje *na* množinu P. To vše plyne z předcházející definice 3.19. Dokážeme, že zobrazení f je prosté. Nechť pro nějaká celá čísla $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, kde $q_1, q_2 \neq 0$, platí $f(p_1/q_1) = f(p_2/q_2)$. Ekvivalentně tedy máme $(p_1 \times 1) \cdot (q_1 \times 1)^{-1} = (p_2 \times 1) \cdot (q_2 \times 1)^{-1}$, ekvivalentně $(p_1 \times 1) \cdot (q_2 \times 1) = \big((p_1 \cdot q_2) \times 1\big) = \big((p_2 \cdot q_1) \times 1\big) = (p_2 \times 1) \cdot (q_1 \times 1)$, ekvivalentně $\big((p_1 \cdot q_2) \times 1\big) - \big((p_2 \cdot q_1) \times 1\big) = \big((p_1 \cdot q_2) - (p_2 \cdot q_1)\big) \times 1 = 0$. Vzhledem k části I. tvrzení 3.26 dostáváme $(p_1 \cdot q_2) - (p_2 \cdot q_1) = 0$, ekvivalentně $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$, takže racionální čísla p_1/q_1 a p_2/q_2 jsou si rovna, $p_1/q_1 = p_2/q_2$. Nyní je třeba ověřit, že zobrazení f zachovává násobení a součty, že $f\big((p_1/q_1) \cdot (p_2/q_2)\big) = \big(f(p_1/q_1)\big) \cdot \big(f(p_2/q_2)\big)$ a že $f\big((p_1/q) + (p_2/q)\big) = \big(f(p_1/q)\big) + \big(f(p_2/q)\big)$ pro libovolná $p_1, p_2, q_1, q_2, q \in \mathbb{Z}$, kde $q_1, q_2, q \neq 0$. To je ale zřejmé, ověření jsme provedli už v předcházející definici 3.52.

Nyní dokážeme, že stejné zobrazení f, zavedené vztahem (1) pro všechna $p, q \in \mathbb{Z}$, kde $q \neq 0$, je izomorfismem mezi tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$ se standardním uspořádáním a lineárně uspořádaným tělesem $(P, +', -', \cdot', ^{-1'}, 0, 1, \leq')$. K tomu stačí dokázat, že když $p/q \geq 0$, potom $f(p/q) \geq 0$ pro libovolné $p, q \in \mathbb{Z}$, kde $q \neq 0$. Ovšem $p/q \geq 0$, právě když $p \cdot q \geq 0$. Dle lemmatu 3.33 a užitím základních vlastností celistvého násobku, definice 3.25, ekvivalentně máme $(p \cdot q) \times 1 = (p \times 1) \cdot (q \times 1) \geq 0$, což nastává právě tehdy, když $(p \times 1) \cdot (q \times 1)^{-1} = f(p/q) \geq 0$. □

3.55. Předtím než zavedeme další pojmy, se kterými se v souvislosti s lineárně u spořádanými tělesy a vektorovými prostory pracuje, připomeneme jednoduché pojmy relace ekvivalence a relace slabého uspořádání.

3.56. Definice. Relace reflexivní, tranzitivní, symetrická. Relace ekvivalence. Faktorizace množiny podle relace. Třídy ekvivalence. Mějme libovolnou množinu M. Dále mějme libovolnou binární relaci „$\sim$“. Z definice 1.27 už víme, kdy relace „$\sim$“ je na množině M reflexivní nebo tranzitivní. Nyní doplňme, že relace „$\sim$“ je na množině M *symetrická* právě tehdy, když pro každé dva prvky $x, y \in M$ splňující $x \sim y$ platí také $y \sim x$. Relace „$\sim$“, která je současně reflexivní, tranzitivní a symetrická na M, je relací *ekvivalence* na množině M.

Nechť M je libovolná množina a nechť „$\sim$“ je libovolná relace (ne nutně relace ekvivalence na M). Pro každé $x \in M$ položme

$$[x]_\sim = \{\, y \in M \; ; \; y \sim x \,\} .$$

Faktorizaci množiny M podle relace „$\sim$“ značíme $M/\sim$ a klademe

$$M/\sim \, = \big\{\, [x]_\sim \; ; \; x \in M \,\big\} .$$

Faktorizaci množiny M podle relace „$\sim$“ nazýváme také *faktorovou množinou.* (Srov. [45: písmeno I.1.2.c], [2: definice I.5.35 a I.5.37].)

Ať M je libovolná množina a „$\sim$“ nyní budiž relací ekvivalence na M. Zvolme libovolné $x \in M$. Potom množinu $[x]_\sim$ nazýváme *třídou ekvivalence* (nebo *ekvivalenční třídou*) určenou zvoleným prvkem x a prvek x nazýváme *reprezentantem* této ekvivalenční třídy $[x]_\sim$. Vidíme, že faktorová množina $M/\sim$ je tvořena právě všemi ekvivalenčními třídami, které je možné určit volbou nějakého prvku $x \in M$. Zopakujme některé základní vlastnosti: Pro každé $x \in M$ platí $x \in [x]_\sim$. Dále pro každé $x, y \in M$ platí $[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \emptyset$ právě tehdy, když $[x]_\sim = [y]_\sim$. (Ekvivalentně pro všechna $x, y \in M$ máme buď $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$, anebo $[x]_\sim = [y]_\sim$.) Snadno také nahlédneme, že následujících pět výroků je ekvivalentních: (1) $[x]_\sim = [y]_\sim$. (2) $[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \emptyset$. (3) $x \sim y$. (4) $x \in [y]_\sim$. (5) $y \in [x]_\sim$.

3.57. Definice. Relace asymetrická a negativně tranzitivní. Relace slabého uspořádání. Nechť M je libovolná množina a nechť „$\prec\prec$“ je libovolná relace. Relace „$\prec\prec$“ je *asymetrická* na M právě tehdy, když pro každé $x, y \in M$ splňující $x \prec\prec y$ platí $\neg(y \prec\prec x)$, tj., neplatí $y \prec\prec x$. Relace „$\prec\prec$“ je *negativně tranzitivní* na M právě tehdy, když pro každé $x, y, z \in M$ splňující $\neg(x \prec\prec y)$ a $\neg(y \prec\prec z)$ platí $\neg(x \prec\prec z)$. Relace „$\prec\prec$“ je relací *slabého uspořádání* na M právě tehdy, když relace „$\prec\prec$“ je zároveň asymetrická a negativně tranzitivní na M.

Když „$\prec\prec$“ je relací slabého uspořádání na množině M, říkáme také, že „množina M je relací ‚$\prec\prec$‘ slabě uspořádána“ případně že „relace ‚$\prec\prec$‘ slabě uspořádává množinu M“. Pokud je zřejmé, jakou relaci „$\prec\prec$“ máme na mysli, lze říkat stručně, že „M je slabě uspořádaná množina“.

Platí následující zajímavé tvrzení: Jestliže relace „$\prec\prec$“ je na množině M asymetrická a negativně tranzitivní, tj., je relací slabého uspořádání na M, potom tato relace „$\prec\prec$“ je na množině M rovněž tranzitivní. (Zvolme tři prvky $x, y, z \in M$, pro které platí $x \prec\prec y$ a $y \prec\prec z$. Jelikož platí $x \prec\prec y$, díky negativní tranzitivitě – obměnou implikace – musí platit $x \prec\prec z$ nebo $z \prec\prec y$. Kdyby platilo $z \prec\prec y$, pak asymetrie by dala $\neg(y \prec\prec z)$ – spor. Musí tedy platit $x \prec\prec z$.)

Vidíme, že každá relace slabého uspořádání je asymetrická a tranzitivní. Tvrzení ale neplatí obráceně, asymetrická a tranzitivní relace ještě nemusí být relací slabého uspořádání. Můžeme ale uvést tento jednoduchý výsledek: Nechť „$\leq$“ je relace, která množinu M uspořádává lineárně, viz definici 1.27. Na množině M zaveďme novou relaci „$<$“ tak, abychom pro každé $x, y \in M$ měli $x < y$ právě tehdy, když $x \leq y$ a $x \neq y$. Potom relace „$<$“ je relací slabého uspořádání na množině M. (Nechť $x, y, z \in M$ jsou tři prvky množiny M. Asymetrie: Máme $x < y$, ekvivalentně $x \leq y$ a $x \neq y$. Kdyby $y < x$, ekvivalentně $y \leq x$ a $x \neq y$, antisymetrie by dala $x = y$. Negativní tranzitivita: Máme $\neg(x < y)$ a $\neg(y < z)$. Ekvivalentně máme $\neg(x \leq y)$ nebo $x = y$, k tomu $\neg(y \leq z)$ nebo $y = z$. Vzhledem k linearitě (úplnosti) relace „$\leq$“ na M máme $y \leq x$ a současně $z \leq y$, následně $z \leq x$. Jestliže navíc $x \leq z$, pak antisymetrie relace „$\leq$“ dá $x = z$. Vidíme, že platí $\neg(x \leq z)$ nebo $x = z$, ekvivalentně $\neg(x < z)$.)

Relace „$\prec\prec$“ je na množině M *trichotomická* právě tehdy, když pro každé dva prvky $x, y \in M$ platí $x \prec\prec y$ nebo $x = y$ nebo $y \prec\prec x$. (Jestliže „$\leq$“ je relací lineárního uspořádání na množině M, potom „$\leq$“ je nutně trichotomická na M. Obecněji, když nějaká relace je na dané množině úplná (viz definici 1.27), potom je na dané množině rovněž trichotomická.) Poznamenejme, že když „$\prec\prec$“ slabě uspořádává množinu M, tak relace „$\prec\prec$“ na M ještě nemusí být trichotomická. To nás motivuje k zavedení další relace „$\approx$“ na množině M následujícím způsobem: pro $x, y \in M$ klademe $x \approx y$ právě tehdy, když $\neg(x \prec\prec y)$ a současně $\neg(y \prec\prec x)$, tj., neplatí ani $x \prec\prec y$ ani $y \prec\prec x$.

Poměrně lehce ověříme, že „$\approx$“ je relací ekvivalence na množině M, viz předcházející definici 3.56. (Zvolme $x, y, z \in M$. Reflexivita: Jistě platí $\neg(x \prec\prec x)$ a $\neg(x \prec\prec x)$ – protože když $x \prec\prec x$, pak asymetrie okamžitě dává $\neg(x \prec\prec x)$. Tranzitivita: Ať $x \approx y$ a současně $y \approx z$, ekvivalentně $\neg(x \prec\prec y)$ a $\neg(y \prec\prec x)$ a současně $\neg(y \prec\prec z)$ a $\neg(z \prec\prec y)$. Negativní tranzitivita dává $\neg(x \prec\prec z)$ i $\neg(z \prec\prec x)$, ekvivalentně $x \approx z$. Symetrie: Je zřejmá, protože $\neg(x \prec\prec y)$ a $\neg(y \prec\prec x)$ právě tehdy, když $\neg(y \prec\prec x)$ a $\neg(x \prec\prec y)$.)

K tomu pro každé $x, y, z \in M$ platí tato dvě tvrzení: Jestliže $x \prec\prec y$ a $y \approx z$, potom $x \prec\prec z$. Jestliže $x \approx y$ a $y \prec\prec z$, potom $x \prec\prec z$. (Je-li $y \approx z$, potom $\neg(z \prec\prec y)$, a kdyby $\neg(x \prec\prec z)$, potom negativní tranzitivita by dala $\neg(x \prec\prec y)$. Obdobně, když $x \approx y$, pak $\neg(y \prec\prec x)$, a kdyby $\neg(x \prec\prec z)$, dostali bychom $\neg(y \prec\prec z)$.)

Faktorizujme nyní množinu M podle relace „$\approx$“. Položme $\mathfrak{M} = M/\approx$. Na sestrojené množině $\mathfrak{M}$ zaveďme relaci „$\prec\prec_{\approx}$“ následujícím předpisem: pro libovolné $[x]_{\approx}, [y]_{\approx} \in \mathfrak{M}$, kde $x, y \in M$, klademe $[x]_{\approx} \prec\prec_{\approx} [y]_{\approx}$ právě tehdy, když $x \prec\prec y$. Vzhledem k předcházejícímu tvrzení je zřejmé, že v uvedeném předpisu nezáleží na volbě reprezentantů x a y. Dále je zřejmé, že zavedená relace „$\prec\prec_{\approx}$“ je relací slabého uspořádání na množině $\mathfrak{M}$, všechny potřebné vlastnosti jsou jistě splněny. Z definice relace „$\approx$“ navíc plyne, že pro všechna $x, y \in M$ platí buď $x \prec\prec y$, anebo $x \approx y$, anebo $y \prec\prec x$. To znamená, že relace slabého uspořádání „$\prec\!\!\prec_{\approx}$“ je na množině $\mathfrak{M}$ dokonce trichotomická.

3.58. Významným pojmem, se kterým se v souvislosti s lineárně uspořádanými tělesy často pracuje, je pojem archimedovského uspořádání.

3.59. Definice. Archimedovské uspořádání. Ať $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Uspořádání „$\preceq$“ vektorového prostoru V je *archimedovské* právě tehdy, když ke každým dvěma vektorům $u, v \in V$, přičemž $u \neq 0$, existuje celé číslo $n \in \mathbb{Z}$ tak, že $n \times u = (n \times 1) * u \succeq v$, kde „$\times$“ je celistvý násobek po řadě vektoru a skaláru, viz definici 3.25. Uspořádání „$\preceq$“ vektorového prostoru V je *nearchimedovské* právě tehdy, když není archimedovské.

Lineárně uspořádaný vektorový prostor V je *archimedovský* právě tehdy, když jeho uspořádání je archimedovské. Lineárně uspořádaný vektorový prostor V je *nearchimedovský* právě tehdy, když není archimedovský. (Hovoříme-li stručně jen o „archimedovském / nearchimedovském vektorovém prostoru V“, máme na mysli lineárně uspořádaný vektorový prostor V, který je archimedovský / nearchimedovský.)

Za lineárně uspořádaný vektorový prostor V nyní dosaďme aditivní grupu tělesa F včetně jeho lineárního uspořádání a za zobrazení „$*$“ dosaďme operaci násobení „$\cdot$“ tělesa F. Klademe tedy $(V, +, -, 0, \preceq) = (F, +, -, 0, \leq)$ a „$* = \cdot$“. Použitím výše uvedené definice dostáváme, že uspořádání „$\leq$“ tělesa F je *archimedovské* právě tehdy, když ke každým dvěma skalárům $\lambda, \mu \in F$, přičemž $\lambda \neq 0$, existuje celé číslo $n \in \mathbb{Z}$ takové, že $n \times \lambda = (n \times 1) \cdot \lambda \geq \mu$, kde „$\times$“ v obou případech je celistvý násobek skaláru. Uspořádání „$\leq$“ tělesa F je *nearchimedovské* právě tehdy, když není archimedovské.

Lineárně uspořádané těleso F je *archimedovské* resp. *nearchimedovské* právě tehdy, když jeho uspořádání je po řadě archimedovské resp. nearchimedovské. (Také zde, hovoříme-li stručně jen o „archimedovském / nearchimedovském tělese F“, míníme tím lineárně uspořádané těleso F, které je archimedovské / nearchimedovské.)

Nechť F je lineárně uspořádané těleso s uspořádáním „$\leq$“ a nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor s uspořádáním „$\preceq$“. Když „$\leq$“ je archimedovské / nearchimedovské uspořádání tělesa F, říkáme rovněž, že „F je těleso s archimedovským / / nearchimedovským uspořádáním ‚$\leq$‘“ nebo že „relace ‚$\leq$‘ těleso F uspořádává archimedovsky / nearchimedovsky“. Víme-li, že F je těleso s lineárním uspořádáním „$\leq$“ a je-li zřejmé, se kterou relací „$\leq$“ pracujeme, říkáme také stručně, že „F je archimedovsky / nearchimedovsky uspořádané těleso“ nebo že „F je těleso s archimedovským / / nearchimedovským uspořádáním“. Obdobné slovní obraty používáme také tehdy, když za lineárně uspořádané těleso F a jeho uspořádání „$\leq$“ v uvedených slovních obratech dosadíme lineárně uspořádaný vektorový prostor V a jeho uspořádání „$\preceq$“.

Není těžké nahlédnout, že když V je archimedovský lineárně uspořádaný vektorový prostor nad (libovolným) lineárně uspořádaným tělesem F, potom těleso F je rovněž archimedovské.

3.60. Tvrzení. *Nechť $(F, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1, \leq)$ těleso s lineárním uspořádáním. Potom uspořádání „$\leq$“ tělesa F je archimedovské právě tehdy, když ke každému prvku $\lambda \in F$ existuje kladné celé číslo $n \in \mathbb{Z}^+$ tak, že $\lambda \leq n \times 1$.*

3.60.a. *Důkaz.* Implikace „$\Rightarrow$“ je zřejmá. Je-li $\lambda \leq 0$, stačí volit $n = 1$. Je-li $\lambda > 0$, pak dle předpokladu existuje celé číslo $n \in \mathbb{Z}$ tak, že $\lambda \leq n \times 1$. Protože $0 < \lambda \leq n \times 1$, lemma 3.33, viz poznámku 3.33.a, dává, že celé číslo n je kladné, $n \in \mathbb{Z}^+$. Zbývá ověřit implikaci „$\Leftarrow$“. Máme $\lambda, \mu \in F$, přičemž $\lambda \neq 0$, a hledáme $n \in \mathbb{Z}$, aby $n \times \lambda \geq \mu$. Dle předpokladu najdeme $n_\mu \in \mathbb{Z}^+$ tak, že $\mu \leq n_\mu \times 1$. Jestliže $\lambda > 0$, najdeme $n_\lambda \in \mathbb{Z}^+$, aby $\lambda^{-1} \leq n_\lambda \times 1$. Odtud $1 \leq (n_\lambda \times 1) \cdot \lambda = n_\lambda \times \lambda$. Následně $\mu \leq n_\mu \times (n_\lambda \times \lambda) = (n_\mu \cdot n_\lambda) \times \lambda$. Jestliže $\lambda < 0$, najdeme $n_\lambda \in \mathbb{Z}^+$ tak, aby $-\lambda^{-1} \leq n_\lambda \times 1$, načež $1 \leq (n_\lambda \times 1) \cdot (-\lambda) = (-n_\lambda) \times \lambda$. Odtud opět $\mu \leq n_\mu \times \big((-n_\lambda) \times \lambda\big) = (-n_\mu \cdot n_\lambda) \times \lambda$. $\square$

3.61. Příklad. Těleso racionálních čísel $\mathbb{Q}$ se standardním uspořádáním, příklady 3.16, těleso $V = \{\, r + s\sqrt{2} \ ; \ r, s \in \mathbb{Q} \,\}$ se standardním uspořádáním, příklad 3.16.a, i těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním, příklady 3.16.b a 3.17, slouží jako příklady lineárně uspořádaných těles s archimedovským uspořádáním. Jako příklad tělesa s nearchimedovským uspořádáním nám poslouží těleso hyperreálných čísel, viz odstavec 3.79 a příklad 3.80 níže.

3.62. Poznámka. Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Následující úvahu lze provést i pro lineárně uspořádaný vektorový prostor V, ale pro jednoduchost se zaměříme jen aditivní grupu tělesa F s lineárním uspořádáním „$\leq$“.

Z definice 3.59 víme, kdy uspořádání „$\leq$“ je archimedovské: právě tehdy, když ke každému $\lambda, \mu \in F$, kde $\lambda \neq 0$, existuje $n \in \mathbb{Z}$ tak, že $n \times \lambda \geq \mu$. Předpokládejme na chvíli, že skaláry λ a μ jsou kladné, $\lambda, \mu > 0$. Dále předpokládejme, že uspořádání „$\leq$“ není archimedovské. Pak (při vhodné volbě kladných skalárů $\lambda, \mu \in F^+$) se může stát, že $n \times \lambda < \mu$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$. Protože $\lambda > 0$, stačí se omezit jen na kladná $n \in \mathbb{Z}^+$ – jelikož pro $n \in \mathbb{Z}_0^-$ platí $n \times \lambda \leq 0 < \mu$ triviálně. Na základě tohoto principu v tělese F – ale i ve vektorovém prostoru V – můžeme zavést novou relaci slabého uspořádání, viz definici 3.57, „být nekonečněkrát menší než“.

Mějme dva prvky resp. skaláry $\lambda, \mu \in F$. Řekneme, že prvek resp. skalár λ je *nekonečněkrát menší* než prvek resp. skalár μ právě tehdy, když pro všechna kladná celá čísla $n \in \mathbb{Z}^+$ platí $n \times \lambda < \mu$, ekvivalentně $\lambda < (n \times 1)^{-1} \cdot \mu$. Prvek resp. skalár λ je *nekonečněkrát větší* než prvek resp. skalár μ právě tehdy, když μ je nekonečněkrát menší než λ. (S uvedenou relací nebudeme příliš pracovat. Proto ji nezavádíme zvláštní definicí a ani pro ni nezavádíme zvláštní označení.) Je zřejmé, že když prvek $\lambda \in F$ je nekonečněkrát menší resp. nekonečněkrát větší než prvek $\mu \in F$, potom prvek λ je po řadě menší resp. větší než prvek μ, po řadě $\lambda < \mu$ resp. $\lambda > \mu$. Povšimněme si, že když $\lambda \leq 0$ a $\lambda < \mu$, potom λ je nekonečněkrát menší než μ. (Následně, je-li $\lambda \leq 0$, potom λ je nekonečněkrát menší než μ právě tehdy, když $\lambda < \mu$.) Snadno ověříme, že uspořádání tělesa F je archimedovské tehdy a jen tehdy, když pro každé $\lambda, \mu \in F$ splňující, že λ je nekonečněkrát menší než μ, platí $\lambda \leq 0$ (a k tomu triviálně $\lambda < \mu$). Není nikterak těžké nahlédnout, že zavedená relace „být nekonečněkrát menší než“ je relací slabého uspořádání na množině F (viz důkaz obdobného tvrzení v následující definici 3.63). Nakonec si povšimněme, že zavedená relace na množině F není (!) trichotomická, existují dva prvky $\lambda, \mu \in F$, které zavedenou relací nejsou porovnatelné a jsou od sebe různé, $\lambda \neq \mu$. Stačí uvážit např. $\lambda = 1$ a $\mu = 2 \times \lambda$.

(Ve vektorovém prostoru V lze postupovat zcela obdobně. Nechť $u, v \in V$ jsou dva vektory. Vektor u je *nekonečněkrát menší* resp. *nekonečněkrát větší* než vektor v právě tehdy, když pro všechna $n \in \mathbb{Z}^+$ platí po řadě $n \times u \prec v$ resp. $(n \times 1)^{-1} * u \succ v$. Platí také analogická tvrzení. Pro příklad uveďme, že když vektor u je nekonečněkrát menší resp. nekonečněkrát větší než vektor v, potom vektor u je po řadě menší resp. větší než vektor v, po řadě $u \prec v$ resp. $u \succ v$.)

Významným prvkem tělesa F je jeho jednotka 1. Řekneme, že skalár resp. prvek $\lambda \in F$ je *(bezznaménkově) nekonečně malý* (čili *infinitesimální*) právě tehdy, když $|\lambda|$ je nekonečněkrát menší než 1. Připomeňme, že $|\lambda|$ označuje absolutní hodnotu skaláru λ, viz definici 3.44. Ekvivalentně lze říci, že skalár λ je infinitesimální právě tehdy, když $|\lambda| < (n \times 1)^{-1}$ pro všechna kladná celá $n \in \mathbb{Z}^+$. Dále řekneme, že skalár $\lambda \in F$ je *(bezznaménkově) nekonečně velký* (neboli *infinitní*) právě tehdy, když $|\lambda|$ je nekonečněkrát větší než 1. Ekvivalentně, skalár λ je infinitní právě tehdy, když $|\lambda| > (n \times 1)$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}^+$. Lehce nahlédneme, že nenulový skalár λ je infinitní právě tehdy, když λ^{-1} je infinitesimální. Vzhledem k tvrzení 3.60 je zřejmé, že těleso F je archimedovské právě tehdy, když v něm neexistují žádné nekonečně velké prvky, což nastává právě tehdy, když nula 0 je jeho jediným infinitesimálním prvkem. (Srov. [26: Kapitola 1 Sekce 1].)

3.63. Definice. Slabě archimedovské uspořádání. Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Uspořádání „$\preceq$“ vektorového prostoru V je *slabě archimedovské* právě tehdy, když ke každým dvěma vektorům $u, v \in V$, přičemž $u \neq 0$, existuje skalár $\lambda \in F$ tak, že $\lambda * u \succeq v$. (Srov. [31: Definice 4.9 a 4.11].)

Lineárně uspořádaný vektorový prostor V je *slabě archimedovský* právě tehdy, když jeho uspořádání je slabě archimedovské. (Hovoříme-li stručně jen o „slabě archimedovském vektorovém prostoru V“, míníme tím lineárně uspořádaný vektorový prostor V, který je slabě archimedovský.) Jestliže V je lineárně uspořádaný vektorový prostor a „$\preceq$“ je jeho slabě archimedovské uspořádání, říkáme rovněž, že „V je vektorový prostor se slabě archimedovským uspořádáním ‚$\preceq$‘“ nebo že „relace ‚$\preceq$‘ vektorový prostor V uspořádává slabě archimedovsky“. Když V je vektorový prostor s lineárním uspořádáním a je zřejmé, s jakou relací „$\preceq$“ jeho lineárního uspořádání pracujeme, říkáme také stručně, že „V je slabě archimedovsky uspořádaný vektorový prostor“ nebo že „V je vektorový prostor se slabě archimedovským uspořádáním“.

Z definice 3.59 víme, že vektorový prostor V je archimedovský právě tehdy, když ke každým dvěma vektorům $u, v \in V$, přičemž $u \neq 0$, existuje celé číslo $n \in \mathbb{Z}$ tak, že $n \times u = (n \times 1) * u \succeq v$. Vidíme, že pojem slabě archimedovského uspořádání zobecňuje pojem archimedovského uspořádání: jestliže prostor V je archimedovský, potom je slabě archimedovský – za λ stačí volit skalár speciálního tvaru, totiž $\lambda = n \times 1$.

Poznamenejme, že pojem slabě archimedovského uspořádání má význam u lineárně uspořádaných vektorových prostorů, kdežto u lineárně uspořádaných těles svůj význam ztrácí. Definovali bychom, že těleso F je slabě archimedovské právě tehdy, když ke každým dvěma prvkům $\mu, \nu \in F$, kde $\mu \neq 0$, existuje $\lambda \in F$ tak, že $\lambda \cdot \mu \geq \nu$. Slabě archimedovské je tedy každé lineárně uspořádané těleso – stačí volit $\lambda = \nu \cdot \mu^{-1}$. Následně, jestliže lineárně uspořádaný vektorový prostor V je cyklický (tj. nejvýše jednorozměrný), potom je slabě archimedovský (viz též níže uvedené tvrzení 3.115).

V předcházející poznámce 3.62 jsme viděli, že při archimedovském uspořádání (a související relaci „být nekonečněkrát menší než“) je podstatné násobení celým číslem, ekvivalentně násobení skalárem speciálního tvaru $n \times 1$, kde $n \in \mathbb{Z}$ a 1 je jednotka tělesa F. V této definici 3.63 výše jsme zase viděli, že při slabě archimedovském uspořádání se používá násobení libovolným skalárem $\lambda \in F$. Jako relace „být nekonečněkrát menší než“, viz předcházející poznámku 3.62, byla doplňkem k pojmu archimedovského uspořádání, relace „být nekonečně menší než“, kterou na vektorovém prostoru V nyní zavedeme, bude doplňkem k pojmu slabě archimedovského uspořádání. (Pozor na záměnu: „nekonečněkrát“ vs. „nekonečně“. Slovo „nekonečněkrát“ naznačuje opakované přičítání (jakoby indukcí, která se provádí podle množiny všech přirozených čísel $\mathbb{N}$), kdežto u slova „nekonečně“ tomu tak není!)

Nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“ stále mějme lineárně uspořádaný vektorový prostor $(V, +, -, 0, \preceq)$. Ať $u, v \in V$ jsou dva vektory. Vektor u je *nekonečně menší* než vektor v, píšeme $u \prec\!\!\prec v$, právě tehdy, když pro každé kladné $\lambda \in F^+$ platí $\lambda * u \prec v$. (Protože $(V, +, -, 0)$ je levý vektorový prostor nad tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$ vzhledem k zobrazení „$*$“, můžeme také říkat, pokud stále $u \prec\!\!\prec v$, že vektor u je *zleva nekonečně menší* než vektor v – vidíme, že vektor u je násoben skalárem λ zleva.) Vektor u je *(zleva) nekonečně větší* než vektor v, píšeme $u \succ\!\!\succ v$, právě tehdy, když vektor v je nekonečně menší než vektor u, tedy právě tehdy, když $u \succ \lambda * v$ pro všechna $\lambda \in F^+$. (Srov. [31: Definice 4.9].)

Ať $u, v \in V$. Povšimněme si, že $u \prec\!\!\prec v$ právě tehdy, když $\lambda * u \prec \mu * v$ pro všechna $\lambda, \mu \in F^+$. (Implikace „$\Leftarrow$“ je triviální, stačí volit $\mu = 1$. Dokážeme směr „$\Rightarrow$“. Když $\lambda, \mu \in F^+$, potom $\mu^{-1} \cdot \lambda \in F^+$, tudíž $(\mu^{-1} \cdot \lambda) * u = \mu^{-1} * (\lambda * u) \prec v$, načež $\lambda * u \prec \mu * v$.) K tomu pro všechna $\lambda \in F^+$ platí $\lambda * u \prec v$ právě tehdy, když pro všechna $\lambda \in F^+$ platí $u \prec \lambda * v$. (Viz tvrzení 3.12.) Vidíme tedy, že následující tři výroky jsou ekvivalentní: (1) pro každé $\lambda \in F^+$ platí $\lambda * u \prec v$, dále (2) pro všechna $\lambda, \mu \in F^+$ platí $\lambda * u \prec \mu * v$, k tomu (3) pro každé $\lambda \in F^+$ platí $u \prec \lambda * v$.

Stále mějme $u, v \in V$. Lehce nahlédneme, že když vektor u je nekonečně menší resp. nekonečně větší než vektor v, tedy po řadě $u \prec\!\!\prec v$ resp. $u \succ\!\!\succ v$, potom vektor u je po řadě nekonečněkrát menší resp. nekonečněkrát větší než v, viz předchozí poznámku 3.62, takže vektor u je po řadě menší resp. větší než vektor v, po řadě $u \prec v$ resp. $u \succ v$. Dále je zřejmé, že když $u \preceq 0$ a $0 \prec v$ nebo $u \prec 0$ a $0 \preceq v$, potom $u \prec\!\!\prec v$. Nakonec vidíme, že prostor V je slabě archimedovský právě tehdy, když pro každý vektor $u \in V$ a každý kladný vektor $v \in V^+$ splňující $u \prec\!\!\prec v$ platí $u \preceq 0$ (a, triviálně, $u \prec v$).

Bez potíží lze ověřit, že zavedená relace „$\prec\!\!\prec$" je na nosné množině vektorového prostoru V relací slabého uspořádání. (Mějme tři vektory $u, v, w \in V$. Asymetrie: Když máme $u \prec\!\!\prec v$, pak $u \prec v$, načež $\neg(v \prec u)$, tudíž $\neg(v \prec\!\!\prec u)$. Negativní tranzitivita: Nechť $\neg(u \prec\!\!\prec v)$ a $\neg(v \prec\!\!\prec w)$. Existují tedy kladné skaláry $\lambda, \mu \in F^+$ tak, že $\lambda * u \succeq v$, tudíž $\mu * (\lambda * u) \succeq \mu * v$, a $\mu * v \succeq w$, následně $(\mu \cdot \lambda) * u \succeq w$, takže $\neg(u \prec\!\!\prec w)$.)

Konečně si povšimneme, že relace „$\prec\!\!\prec$" je na nosné množině prostoru V trichotomická právě tehdy, když vektorový prostor V je triviální, tj., právě když jeho dimenze je nulová. (Máme-li nenulový vektor u, stačí k němu uvážit např. vektor $v = 2 \times u$. Viz též předcházející poznámku 3.62.)

K vlastnostem relace „$\prec\!\!\prec$" se ještě vrátíme v poznámce 3.94 níže.

3.64. Příklad. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ s lexikografickým uspořádáním „$\preceq$" nad lineárně uspořádaným tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním „$\leq$", nechť „$\prec\!\!\prec$" označuje odpovídající relaci „být nekonečně menší než" na $\mathbb{R}^2$, kterou jsme zavedli předcházející definicí 3.63. Potom například $\binom{0}{9} \prec\!\!\prec \binom{1}{1}$. Dále, například, sice máme $\binom{1}{1} \prec \binom{2}{9}$, ale vztah $\binom{1}{1} \prec\!\!\prec \binom{2}{9}$ už neplatí.

3.65. Je samozřejmé, že o vlastnostech lineárně uspořádaných těles je možné dokázat řadu tvrzení, která pro „obyčejná" tělesa (tj. tělesa „bez lineárního uspořádání") obecně neplatí. K tomu lze očekávat, že pro archimedovská tělesa lze dokázat tvrzení, která pro obecná (nearchimedovská) lineárně uspořádaná tělesa nemusejí platit. Mimořádně zajímavou otázkou je, zda každé lineárně uspořádané těleso je komutativní. Lze dokázat, že každé archimedovské těleso už je nutně komutativní, viz následující větu 3.67. (Hlavní myšlenkou důkazu uvedeného tvrzení je, že každé archimedovské těleso lze vnořit do tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$.) Na druhou stranu je třeba přiznat, že v případě obecných (nearchimedovských) lineárně uspořádaných těles je otázka jejich komutativity nejasná: neumíme dokázat, že obecné lineárně uspořádané těleso je komutativní, a ani neumíme nalézt příklad lineárně uspořádaného tělesa, které by nebylo komutativní.

3.66. Následující věta 3.67 tvrdí vlastně mnohem více než jenom tolik, že každé archimedovské těleso je komutativní. Podá totiž úplnou charakteristiku lineárně uspořádaných archimedovských těles. (Viz též související tvrzení 3.60.)

3.67. Věta. *Ať $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ je lineárně uspořádané těleso s archimedovským uspořádáním. Potom existuje podtěleso F' tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ takové, že lineárně uspořádaná tělesa $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ a $(F', +', -', \cdot', ^{-1'}, 0', 1', \leq')$ jsou izomorfní. Zde $0'$ a $1'$ jsou po řadě reálná čísla nula a jedna a „$+'$", „$-'$", „$\cdot'$", „$^{-1'}$" a „$\leq'$" jsou restrikce po řadě standardní operace sčítání, opačné hodnoty, násobení, převrácené hodnoty a relace uspořádání, které jsou zavedeny na množině reálných čísel $\mathbb{R}$, na množinu F'. Jako důsledek dostáváme, že těleso $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$ je komutativní.*

Ať F'' je libovolné podtěleso tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$. Potom lineárně uspořádané těleso $(F'', +'', -'', \cdot'', ^{-1''}, 0', 1', \leq'')$ je archimedovské. Zde, zcela obdobně, „$+''$", „$-''$", „$\cdot''$", „$^{-1''}$" a „$\leq''$" jsou restrikce po řadě standardní operace sčítání, opačné hodnoty, násobení, převrácené hodnoty a relace uspořádání, které jsou na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ zavedeny, na množinu F''.

3.67.a. *Poznámka.* Následující důkaz 3.67.b je značně dlouhý, není však těžký. Jeho rozsáhlost je dána nutností ověřit velký počet poměrně jednoduchých tvrzení.

3.67.b. *Důkaz.* Začněme důkazem druhého tvrzení, které je snadné. Těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ se svým standardním uspořádáním je totiž archimedovské. (To plyne ze způsobu konstrukce tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$. Snadno nahlédneme, že těleso racionálních čísel $\mathbb{Q}$ se standardním uspořádáním je archimedovské, viz též [62: věta 15 (v kapitole I § 2 na str. 25)]. A zúplněním tělesa racionálních čísel $\mathbb{Q}$ pomocí Dedekindových řezů, viz [62: kapitola I], se tato vlastnost zachová – protože ke každému reálnému (zejm. iracionálnímu) číslu existuje racionální číslo, které je větší, viz též [62: kapitola I § 6 cvičení 2 (na str. 51)].) Jelikož nosná množina tělesa F'' je obsažena v nosné množině archimedovského tělesa, totiž $F'' \subseteq \mathbb{R}$, těleso F'' je také archimedovské. Tím je druhé tvrzení dokázáno.

Dovětek prvního tvrzení je rovněž snadný. Protože těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ je komutativní, jeho podtěleso F' je také komutativní, tedy těleso $(F', +', -', \cdot', {}^{-1'}, 0', 1')$ je komutativní. Protože tělesa F a F' jsou izomorfní, těleso F je rovněž komutativní.

Naším hlavním úkolem je dokázat první část prvního tvrzení. Je třeba sestrojit izomorfismus $f: F \to F'$, který dosvědčí, že lineárně uspořádaná tělesa F a F' jsou izomorfní. Napřed sestrojíme (vůbec nějaké) zobrazení $f: F \to \mathbb{R}$, které bude zachovávat operace i uspořádání tělesa F. Potom položíme $F' = f(F)$, aby množina F' byla obraz množiny F daný zobrazením f. Teprve potom určíme „$+'$“, „$-'$“, „$\cdot'$“, „${}^{-1'}$“ a „$\leq'$“ jako restrikce po řadě standardní operace sčítání, opačné hodnoty, násobení, převrácené hodnoty a relace uspořádání, které jsou zavedeny na množině reálných čísel $\mathbb{R}$, na množinu F'. Následně sestavíme lineárně uspořádané těleso $(F', +', -', \cdot', {}^{-1'}, 0', 1', \leq')$. Už zmiňované zobrazení $f: F \to F'$ teprve nyní bude izomorfismus původně zadaného lineárně uspořádaného tělesa $(F, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1, \leq)$ a nově sestaveného lineárně uspořádaného tělesa F'.

Při sestrojování zobrazení $f: F \to \mathbb{R}$, které by mělo zachovávat operace i uspořádání, vyjdeme z izomorfismu prvotěles tělesa F a tělesa $\mathbb{R}$ – v podstatě jde o izomorfismus s tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$, viz část II. tvrzení 3.54. Tento izomorfismus pak pomocí limitních přechodů (viz definici 3.45 a větu 3.46) rozšíříme na zobrazení $f: F \to \mathbb{R}$. Přitom bude potřeba ověřit, že zobrazení f má všechny potřebné vlastnosti.

Nechť tedy P a P' jsou prvotělesa tělesa F a tělesa $\mathbb{R}$, takže máme $P = \{ (p \times 1) \cdot (q \times 1)^{-1} ;\ p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \}$, kde 1 je jednotka tělesa F, a dále $P' = \{ (p \times 1') \cdot (q \times 1')^{-1} ;\ p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \}$, kde $1'$ je reálné číslo jedna a „$\cdot$“ a „${}^{-1}$“ zde označují standardní operace násobení a převrácené hodnoty zavedené na množině reálných čísel. Ať „$+_P$“, „$-_P$“, „$\cdot_P$“, „${}^{-1_P}$“ a „$\leq_P$“ jsou restrikce po řadě operací „$+$“, „$-$“, „$\cdot$“, „${}^{-1}$“ a relace „$\leq$“ na množinu P a ať „$+_{P'}$“, „$-_{P'}$“, „$\cdot_{P'}$“, „${}^{-1_{P'}}$“ a „$\leq_{P'}$“ jsou restrikce po řadě standardní operace sčítání, opačné hodnoty, násobení, převrácené hodnoty a relace uspořádání zavedené na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ na množinu P'. Pak lineárně uspořádané těleso $(P, +_P, -_P, \cdot_P, {}^{-1_P}, 0, 1, \leq_P)$ je izomorfní s lineárně uspořádaným tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$, viz část II. tvrzení 3.54. Také lineárně uspořádané těleso $(P', +_{P'}, -_{P'}, \cdot_{P'}, {}^{-1_{P'}}, 0', 1', \leq_{P'})$ je izomorfní s lineárně uspořádaným tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Lineárně uspořádaná tělesa P a P' jsou tedy izomorfní, jejich izomorfismem budiž zobrazení $f_P: P \to P'$. (Pro každé $p, q \in \mathbb{Z}$, kde $q \neq 0$, zřejmě máme $f_P\big((p \times 1) \cdot_P (q \times 1)^{-1_P}\big) = (p \times 1') \cdot_{P'} (q \times 1')^{-1_{P'}}$.)

Nalezený izomorfismus $f_P: P \to P'$ pomocí limitních přechodů budeme rozšiřovat na zobrazení $f: F \to \mathbb{R}$ tak, aby pro každé $\lambda \in P$ platilo $f(\lambda) = f_P(\lambda)$. Zvolme tedy libovolný skalár $\lambda \in F$. Chceme určit hodnotu $f(\lambda)$.

Dříve však na tělese F zavedeme nové zobrazení $[\![\cdot]\!]: F \to \mathbb{Z}$, které každému skaláru $\lambda \in F$ přiřadí určité celé číslo $[\![\lambda]\!] \in \mathbb{Z}$. Číslo $[\![\lambda]\!]$ zavedeme tak, aby platilo $[\![\lambda]\!] \times 1 \leq \lambda < \big([\![\lambda]\!] \times 1\big) + 1$, kde 1 je jednotka tělesa F. Využijeme toho, že těleso F je archimedovské. Existuje tedy celé číslo $n_1 \in \mathbb{Z}$ tak, že $-\lambda \leq n_1 \times 1$, ekvivalentně $-n_1 \times 1 \leq \lambda$. Dále existuje celé číslo $n_2 \in \mathbb{Z}$takové, že $\lambda \leq n_2 \times 1$, načež $\lambda < (n_2 + 1) \times 1$. Najdeme tedy největší celé číslo $n \in \mathbb{Z}$ tak, že $n \times 1 \leq \lambda$. (Máme $n \in \{-n_1, -n_1+1, \ldots, n_2\}$.) Takovéto největší celé číslo n existuje právě jedno. Zřejmě platí $n \times 1 \leq \lambda < (n \times 1) + 1$. (Kdyby $(n \times 1) + 1 = (n+1) \times 1 \leq \lambda$, tak n by nebylo největší celé číslo, pro které platí $n \times 1 \leq \lambda$.) Nakonec klademe $[\![\lambda]\!] = n$, kde n je celé číslo popsaných vlastností. Zřejmě platí $[\![\lambda + 1]\!] = [\![\lambda]\!] + 1$, kde 1 je nejprve jednotka tělesa F, podruhé celé číslo jedna. Pro stručnost pro každý skalár $\lambda \in F$ položme $[\lambda] = [\![\lambda]\!] \times 1$, kde 1 je jednotka tělesa F. Skalár $[\lambda]$ nazýváme *celou částí* zvoleného skaláru $\lambda \in F$. Máme tedy zobrazení $[\cdot]\colon F \to F$, které každému skaláru $\lambda \in F$ přiřadí jeho celou část $[\lambda] \in F$. (Poznamenejme, že zobrazení „$[\cdot]$" lze pojímat i jako unární operaci na tělese F.) Pro každé $\lambda \in F$ zřejmě máme $[\lambda] \leq \lambda < [\lambda] + 1 = [\lambda + 1]$. Povšimněme si, že celá část $[\lambda]$ každého skaláru $\lambda \in F$ leží v prvotělese P, tedy $[\lambda] \in P$ pro každé $\lambda \in F$.

Máme-li zvolen libovolný skalár $\lambda \in F$, zaměřme se na posloupnost $\{[\lambda \cdot (n \times 1)] \cdot (n \times 1)^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$. Pro stručnost položme $\lambda_n = [\lambda \cdot (n \times 1)] \cdot (n \times 1)^{-1} = [n \times \lambda] \cdot (n \times 1)^{-1}$ pro všechna přirozená $n = 1, 2, \ldots$ (Poznámka: Obecně – podle způsobu zavedení množiny celých čísel $\mathbb{Z}$ – lze očekávat platnost vztahu $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}^+$, resp. dokonce $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^+ = \emptyset$. To znamená, že množina (nenulových) přirozených čísel $\mathbb{N}$ je od množiny kladných celých čísel $\mathbb{Z}^+$ (alespoň z formálního hlediska) odlišná. Mezi oběma množinami $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}^+$ je ale jistě zcela přirozený a vzájemně jednoznačný vztah (resp. zobrazení). Proto není velkou chybou a nedojde k nedorozumění, když ve výrazu $n \times 1$ pracujeme s přirozeným (nikoliv celým) číslem n, protože namísto přirozeného čísla n dosadíme jednoznačně odpovídající kladné celé číslo (resp. jeho obraz určený příslušným vzájemně jednoznačným zobrazením mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}^+$).) Za pozornost stojí, že členy zavedené posloupnosti $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou prvky prvotělesa P, tedy $\lambda_n \in P$ pro $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme, že posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ je (v tělese F) konvergentní a že $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$.

Zvolme kladné $\varepsilon \in F$, tedy $\varepsilon > 0$. Protože těleso F je archimedovské, najdeme celé číslo $n_0 \in \mathbb{Z}$ takové, že $\varepsilon^{-1} \leq n_0 \times 1$. Celé číslo n_0 je jistě kladné, tudíž $(n_0 \times 1)^{-1} \leq \varepsilon$. Pro každé celé číslo $n \in \mathbb{Z}$ a pro (libovolný) výše zvolený skalár $\lambda \in F$ zřejmě platí $[n \times \lambda] \leq n \times \lambda < [n \times \lambda] + 1$. Omezme se na kladná celá $n \in \mathbb{Z}^+$. Pak násobením těchto dvou nerovnic (kladným) skalárem $(n \times 1)^{-1}$ zprava, jelikož $n \times \lambda = \lambda \cdot (n \times 1)$, dostáváme $[n \times \lambda] \cdot (n \times 1)^{-1} \leq \lambda < [n \times \lambda] \cdot (n \times 1)^{-1} + (n \times 1)^{-1}$. Kladná celá čísla lze považovat za přirozená (podrobněji viz poznámku výše). Pro každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ a pro zvolený skalár $\lambda \in F$ tak máme $\lambda_n \leq \lambda < \lambda_n + (n \times 1)^{-1}$. Vidíme, že $\lambda_n - \lambda \leq 0$, takže $|\lambda_n - \lambda| = \lambda - \lambda_n < (n \times 1)^{-1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro každé přirozené (resp. kladné celé) číslo n, které je větší nebo rovno než (původně kladné celé, ale vzhledem k výše uvedené poznámce také) přirozené číslo n_0, aby platilo $n \geq n_0$, máme $n \times 1 \geq n_0 \times 1$, a tedy, protože n i n_0 jsou kladná, $(n \times 1)^{-1} \leq (n_0 \times 1)^{-1} \leq \varepsilon$. Následně $|\lambda_n - \lambda| < \varepsilon$ pro všechna přirozená čísla n splňující $n \geq n_0$. Dokázali jsme, že posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a že její limitou je na počátku zvolený skalár λ.

Nyní se zaměříme na posloupnost reálných čísel $\{f_P(\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_P\colon P \to P'$ je výše zavedený izomorfismus těles P a P'. Ukážeme, že uvedená posloupnost je v lineárně uspořádaném tělese reálných čísel $\mathbb{R}$ cauchyovská. Zvolme kladné reálné číslo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tedy $\varepsilon > 0$. Protože těleso $\mathbb{R}$ je archimedovské, najdeme přirozené (přesněji: kladné celé) číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $(n_0 \times 1')^{-1} \leq \varepsilon$. Ať přirozená (opět přesněji: kladná celá) čísla $m, n \in \mathbb{N}$ jsou větší nebo rovna n_0, aby $(n \times 1)^{-1}, (m \times 1)^{-1} \leq (n_0 \times 1)^{-1}$. S použitím výsledků z výše uvedeného důkazu konvergence posloupnosti $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ dostáváme, že $0 \leq \lambda - \lambda_n < (n \times 1)^{-1} \leq (n_0 \times 1)^{-1}$ a že $-(n_0 \times 1)^{-1} \leq -(m \times 1)^{-1} < \lambda_m - \lambda \leq 0$. Sečtením těchto nerovností odvodíme $-(n_0 \times 1)^{-1} < \lambda_m - \lambda_n < (n_0 \times 1)^{-1}$, ekvivalentně $-(n_0 \times 1')^{-1} < f_P(\lambda_m) - f_P(\lambda_n) < (n_0 \times 1')^{-1}$. (Zřejmě platí $f_P\big((n_0 \times 1)^{-1}\big) = (n_0 \times 1')^{-1}$. Relace uspořádání zůstává zachována, protože f_P je izomorfismus lineárně uspořádaných těles P a P'.) Tudíž $\big|f_P(\lambda_m) - f_P(\lambda_n)\big| < (n_0 \times 1')^{-1} \leq \varepsilon$ a posloupnost $\{f_P(\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

Protože posloupnost reálných čísel $\{f_P(\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je (v lineárně uspořádaném tělese $\mathbb{R}$) cauchyovská, je konvergentní, viz [63: věta 26 (v kapitole II § 3 na str. 77)].

Položme $f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} f_P(\lambda_n)$. Protože $\lambda \in F$ mohlo být zvoleno libovolně, zobrazení $f\colon F \to \mathbb{R}$ je tímto zavedeno pro každé $\lambda \in F$. Je zřejmé, že pro $\lambda \in P$ platí $f(\lambda) = f_P(\lambda)$ – neboť posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ v takovémto případě obsahuje stacionární podposloupnost.

Nyní položme $F' = f(F)$ a ať „$+'$“, „$-'$“, „$\cdot'$“, „${}^{-1'}$“ a „$\leq'$“ jsou restrikce příslušných operací a relace zavedených na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ na množinu F'. Zbývá ověřit, že $f\colon F \to F'$ je izomorfismus lineárně uspořádaných těles $(F, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1, \leq)$ a $(F', +', -', \cdot', {}^{-1'}, 0', 1', \leq')$. Ověření provedeme pomocí vět 3.46 a 3.47.

(Ve zbytku tohoto důkazu 3.67.b budeme pro označení početních operací s reálnými čísly a následné porovnání výsledků používat už jen „očárkované“ znaky „$+'$“, „$-'$“, „$\cdot'$“, „${}^{-1'}$“ a „$\leq'$“. Kdežto „neočárkované“ znaky „$+$“, „$-$“, „$\cdot$“, „${}^{-1}$“ a „$\leq$“ budeme ve zbytku tohoto důkazu 3.67.b používat důsledně jen pro označení početních operací se skaláry tělesa F a následné porovnání výsledků.)

Zvolme $\lambda, \mu \in F$ a pro každé přirozené (resp. kladné celé) číslo $n \in \mathbb{N}$ položme $\lambda_n = [n \times \lambda] \cdot (n \times 1)^{-1}$ a $\mu_n = [n \times \mu] \cdot (n \times 1)^{-1}$.

K vlastnímu ověření (pomocí vět 3.46 a 3.47) budeme potřebovat následující pomocné tvrzení: Jestliže $\{\hat{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost prvků prvotělesa P, tedy $\hat{\lambda}_n \in P$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, konvergující k λ, takže $\lim_{n\to\infty} \hat{\lambda}_n = \lambda$, potom posloupnost $\{f_P(\hat{\lambda}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ také konverguje a $\lim_{n\to\infty} f_P(\hat{\lambda}_n) = f(\lambda)$. Zvolme libovolné kladné reálné $\varepsilon \in F'^{+}$, tedy $\varepsilon >' 0'$. Najdeme kladné celé číslo $m_0 \in \mathbb{Z}^+$, aby $3 \times \varepsilon^{-1'} \leq' m_0 \times 1'$, ekvivalentně $3 \times (m_0 \times 1')^{-1'} \leq' \varepsilon$. Protože $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, kde posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ má výše zavedený význam, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$ větší nebo rovna n_1 platí $|\lambda_n - \lambda| < (m_0 \times 1)^{-1}$. Obdobně, jelikož $\lim_{n\to\infty} \hat{\lambda}_n = \lambda$, najdeme $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$ větší nebo rovna n_2 je $|\hat{\lambda}_n - \lambda| < (m_0 \times 1)^{-1}$. Pro přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$, která jsou větší nebo rovna n_1 i n_2 pak platí $|\hat{\lambda}_n - \lambda_n| \leq |\hat{\lambda}_n - \lambda| + |\lambda_n - \lambda| < 2 \times (m_0 \times 1)^{-1}$, tudíž $|f_P(\hat{\lambda}_n) -' f_P(\lambda_n)| <' 2 \times (m_0 \times 1')^{-1'}$. Dále víme, že $\lim_{n\to\infty} f_P(\lambda_n) = f(\lambda)$. Existuje tedy $n_3 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n \in \mathbb{N}$ větší nebo rovna n_3 platí $|f_P(\lambda_n) -' f(\lambda)| <' (m_0 \times 1')^{-1'}$. Pro všechna přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$, která jsou větší nebo rovna než každé z čísel n_1, n_2 a n_3 tedy máme $|f_P(\hat{\lambda}_n) -' f_P(\lambda)| \leq' |f_P(\hat{\lambda}_n) -' f_P(\lambda_n)| +' |f_P(\lambda_n) -' f_P(\lambda)| <' 3 \times (m_0 \times 1')^{-1'} \leq' \varepsilon$. To vzhledem k libovolné počáteční volbě $\varepsilon >' 0'$ dokazuje, že $\lim_{n\to\infty} f_P(\hat{\lambda}_n) = f(\lambda)$.

Závěr důkazu už je nasnadě: Stále máme $\lambda, \mu \in F$ a pro každé přirozené (resp. kladné celé) číslo $n \in \mathbb{N}$ máme $\lambda_n = [n \times \lambda] \cdot (n \times 1)^{-1}$ a $\mu_n = [n \times \mu] \cdot (n \times 1)^{-1}$. Už víme, že $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ a $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$. K tomu víme, že $\lim_{n\to\infty} f_P(\lambda_n) = f(\lambda)$ a $\lim_{n\to\infty} f_P(\mu_n) = f(\mu)$.

Jestliže $\lambda \leq \mu$, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ zřejmě $\lambda_n \leq \mu_n$, ekvivalentně $f_P(\lambda_n) \leq' f_P(\mu_n)$, načež $f(\lambda) \leq' f(\mu)$ dle věty 3.47.

Pomocí věty 3.46 snadno dokážeme, že posloupnost $\{\lambda_n + \mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a že $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n + \mu_n) = \lambda + \mu$. Dle uvedeného pomocného tvrzení konverguje i posloupnost $\{f_P(\lambda_n + \mu_n)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\lim_{n\to\infty} f_P(\lambda_n + \mu_n) = f(\lambda + \mu)$. Užitím věty 3.46 dostáváme, že také posloupnost $\{f_P(\lambda_n) +' f_P(\mu_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a $\lim_{n\to\infty}(f_P(\lambda_n) +' f_P(\mu_n)) = f(\lambda) +' f(\mu)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ ovšem platí $f_P(\lambda_n + \mu_n) = f_P(\lambda_n) +' f_P(\mu_n)$. Je tedy $f(\lambda + \mu) = f(\lambda) +' f(\mu)$. Důkaz vztahu $f(\lambda \cdot \mu) = f(\lambda) \cdot' f(\mu)$ se provede obdobně. Ani vztah $f(-\lambda) = -'(f(\lambda))$ nebude činit obtíže.

Zbývá předpokládat, že $\lambda \neq 0$. Protože $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, existuje přirozené číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$ větší nebo rovna n_0 už platí $\lambda_n \neq 0$. (Stačí uvážit $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot |\lambda|$, kde $\frac{1}{2} = (1+1)^{-1}$.) Pak „posunutá“ posloupnost $\{\lambda_{n_0+n}\}_{n=1}^{\infty}$ stále konverguje, $\lim_{n\to\infty} \lambda_{n_0+n} = \lambda$ a už nebude problém dokázat, že $\lim_{n\to\infty} f_P(\lambda_{n_0+n}^{-1}) = f(\lambda^{-1}) = (f(\lambda))^{-1'}$.

Tímto je důkaz věty zcela završen. □

3.68. Provedeným důkazem jsme dokončili významnou část tohoto paragrafu, kde jsme shrnovali některé základní vlastnosti vektorových prostorů a těles s lineárním uspořádáním. V další části tohoto paragrafu, jak jsme v odstavci 3.18 předeslali, ukážeme další zajímavý příklad lineárně uspořádaného tělesa, a sice tělesa hyperreálných čísel. Předtím je ale nutné zavést pojem volného ultrafiltru, jemuž předchází pojmy ultrafiltru a filtru a na začátku také pojem suprema a infima. Poznamenejme, že v příkladech 3.16 a 3.17 jsme s pojmem suprema vlastně už pracovali.

3.69. Definice. Supremum a infimum. Nechť M je libovolná množina a ať „$\leq$" je relací částečného uspořádání na množině M, viz definici 1.27. K tomu ať $A \subseteq M$ je libovolná podmnožina množiny M.

Prvek $u \in M$ je *horní závorou* (nebo *horní mezí*) množiny A právě tehdy, když pro každý prvek $a \in A$ platí $a \leq u$. Říkáme, že množina A je *shora omezená* nebo že *má horní mez* nebo *horní závoru* právě tehdy, když existuje prvek $u \in M$, který je její horní závorou.

Prvek $l \in M$ je *dolní závorou* (nebo *dolní mezí*) množiny A právě tehdy, když pro každý prvek $a \in A$ platí $l \leq a$. Říkáme, že množina A je *zdola omezená* nebo že *má dolní mez* nebo *dolní závoru* právě tehdy, když existuje prvek $l \in M$, který je její dolní závorou.

Prvek $s \in M$ je *supremem* množiny A právě tehdy, když s je nejmenší horní závorou množiny A. To znamená, že prvek s je supremem množiny A právě tehdy, když jsou splněny následující dva výroky:

$$\forall a \in A\colon\ a \leq s \qquad \text{a} \qquad \forall u \in M\colon\ (\forall a \in A\colon\ a \leq u) \ \Rightarrow\ (s \leq u)\,.$$

Prvek s tedy musí být horní závorou množiny A. To říká první výrok. Dále, jestliže u je kterákoliv jiná horní závora množiny A, potom prvky s a u musejí být porovnatelné a musí platit $s \leq u$. To říká druhý výrok. Říkáme, že množina A *má supremum* právě tehdy, když existuje prvek $s \in M$, který je jejím supremem; říkáme, že daná množina *nemá supremum* právě tehdy, když žádný takový prvek neexistuje.

Snadno nahlédneme, že každá množina $A \subseteq M$ má nejvýše jedno supremum, existuje nejvýše jedno $s \in M$, které je supremem množiny A. (Nechť s_1 a s_2 jsou dvě suprema této množiny. Protože s_1 je supremum a s_2 je horní mezí, musí platit $s_1 \leq s_2$. Protože s_2 je supremum a s_1 je horní mezí, musí platit $s_2 \leq s_1$. Z antisymetrie relace „$\leq$" plyne $s_1 = s_2$.) Jestliže víme, že daná množina A má supremum, potom její supremum označíme $\sup A$. Z definice suprema plyne, že pro každé dva prvky $a, b \in M$ máme $a \leq b$ právě tehdy, když množina $\{a, b\}$ má supremum a platí $b = \sup\{a, b\}$. (Dokáže se implikace „$\Leftarrow$" a „$\Rightarrow$". Obě implikace jsou natolik snadné, že zde není co dokazovat.)

Prvek $i \in M$ je *infimum* množiny A právě tehdy, když i je největší dolní závorou množiny A. Jinými slovy, prvek i je infimem množiny A právě tehdy, když platí následující dva výroky:

$$\forall a \in A\colon\ i \leq a \qquad \text{a} \qquad \forall l \in M\colon\ (\forall a \in A\colon\ l \leq a) \ \Rightarrow\ (l \leq i)\,.$$

Oba výroky po řadě říkají, že prvek i musí být dolní závorou množiny A a že, když l je jakoukoliv dolní závorou, potom platí $l \leq i$. Množina A *má infimum* právě tehdy, když existuje prvek $i \in M$, který je jejím infimem, a *nemá infimum* právě tehdy, když žádný takový prvek neexistuje.

Snadno nahlédneme, že každá množina $A \subseteq M$ má nejvýše jedno infimum, existuje nejvýše jedno $i \in M$, které je infimem množiny A. (Důkaz se provede obdobně jako v případě analogického tvrzení pro suprema.) Jestliže víme, že daná množina A má infimum, potom její infimum označíme $\inf A$. Z definice infima bezprostředně plyne, že pro každé dva prvky $a, b \in M$ platí $a \leq b$ právě tehdy, když množina $\{a, b\}$ má infimum a platí $a = \inf\{a, b\}$. (Důkaz je opět velice snadný.)

3.70. Následující tvrzení 3.71 podává vztah mezi supremy a infimy. Zmíněné tvrzení 3.71 je velice snadné, protože plyne bezprostředně z právě uvedené definice 3.69.

3.71. Tvrzení. *Ať množina M je částečně uspořádaná relací „$\le$“. Budiž dána libovolná její podmnožina $A \subseteq M$. Nechť $L = \{\, l \in M\, ;\ \forall a \in A\colon\ l \le a \,\}$ je množinou všech dolních závor množiny A. Potom množina A má infimum právě tehdy, když množina L má supremum. Nadto, jestliže A má infimum a L má supremum, platí* $\inf A = \sup L$.

3.71.a. *Důkaz.* Nechť množina A má infimum. Položme $i = \inf A$. Víme tedy, že

$$\forall a \in A\colon\ i \le a \qquad \text{a} \qquad \forall l \in M\colon\ (\forall a \in A\colon\ l \le a) \ \Rightarrow\ (l \le i)\,,$$
$$\forall l \in L\colon\ l \le i\,.$$

Máme dokázat, že prvek i je supremem množiny L. Jinými slovy, máme dokázat, že

$$\forall l \in L\colon\ l \le i \qquad \text{a} \qquad \forall u \in M\colon\ (\forall l \in L\colon\ l \le u) \ \Rightarrow\ (i \le u)\,,$$

Platnost prvního výroku ($l \le i$ pro všechna $l \in L$) je zřejmá. Ověříme platnost druhého výroku. Zvolme $u \in M$. Předpokládejme, že předpoklad ($l \le u$ pro $l \in L$) celé implikace je splněn, takže $l \le u$ pro každou dolní závoru $l \in L$. Pak ale $i \le u$, protože $i \in L$ je také dolní závora množiny A (protože i je infimum množiny A). Tím je platnost druhého výroku dokázána.

Nyní předpokládejme, že množina L má supremum, a položme $s = \sup L$. Víme tedy, že

$$\forall l \in L\colon\ l \le s \qquad \text{a} \qquad \forall u \in M\colon\ (\forall l \in L\colon\ l \le u) \ \Rightarrow\ (s \le u)\,. \tag{1}$$

Máme dokázat, že prvek s je infimum množiny A. Máme tedy dokázat, že

$$\forall a \in A\colon\ s \le a \qquad \text{a} \qquad \forall l \in M\colon\ (\forall a \in A\colon\ l \le a) \ \Rightarrow\ (l \le s)\,,$$
$$\forall l \in L\colon\ l \le s\,.$$

Platnost druhého z těchto dvou výroků ($l \le s$ pro všechna $l \in L$) je zřejmá. Zbývá dokázat první výrok. Zvolme $a \in A$. Máme dokázat, že $s \le a$. Dosaďme zvolené a za u (uvažujeme $u = a$) ve druhém výroku z (1). Pro každé $a \in A$ a pro každé $l \in L$ ovšem zřejmě platí $l \le a$. To znamená, že předpoklad implikace ve druhém výroku z (1) je splněn. Protože platnost celého výroku předpokládáme, pro zvolené $a \in A$ máme $s \le a$. Protože $a \in A$ mohlo být zvoleno libovolně, důkaz je završen. $\square$

3.72. Definice. Filtr a ultrafiltr. Mějme množinu M, která je částečně uspořádaná relací „$\le$“, viz definici 1.27. Pro každé dva prvky $a, b \in M$ pišme $b \ge a$ právě tehdy, když $a \le b$. Nechť platí, že každá (neprázdná a nejvýše) dvouprvková podmnožina množiny M má infimum – množina $\{a, b\}$ má infimum pro každé $a, b \in M$. Dále mějme libovolnou podmnožinu $F \subseteq M$ množiny M. Daná množina F je *filtr* právě tehdy, když pro každé dva prvky $a, b \in M$ jsou splněny následující dvě podmínky:

$$a, b \in F \implies \inf\{a, b\} \in F\,,$$
$$a \ge b \in F \implies a \in F\,.$$

Filtr $F \subseteq M$ je *vlastní* právě tehdy, když $F \ne M$.

Nechť navíc platí, že každá (neprázdná a nejvýše) dvouprvková podmnožina množiny M má také supremum – množina $\{a, b\}$ má supremum i infimum pro každé dva prvky $a, b \in M$. K tomu mějme libovolnou podmnožinu $U \subseteq M$ množiny M. Daná množina U je *ultrafiltr* právě tehdy, když je vlastní filtr a navíc pro každé $a, b \in M$ platí

$$\sup\{a, b\} \in U \implies a \in U\ \vee\ b \in U\,.$$

(Podrobněji viz [45: odstavce II.5.1 až II.5.3].)

3.73. Poznámka. Ať M je množina, která je která je částečně uspořádaná relací „$\leq$“. Budiž splněno, že množina $\{a, b\}$ má infimum pro každé $a, b \in M$. Zvolme libovolnou podmnožinu $F \subseteq M$. Potom pro každé $a, b \in M$ máme

$$a \geq b \in F \implies a \in F \tag{1}$$

právě tehdy, když pro všechna $a, b \in M$ platí

$$\inf\{a, b\} \in F \implies a \in F \wedge b \in F. \tag{2}$$

(Dokážeme implikaci „(1) $\Leftarrow$ (2)“. Z definice 3.69 víme, že $a \geq b$ právě tehdy, když $\inf\{a, b\} = b$. Takže $a \geq b \in F$ právě tehdy, když $\inf\{a, b\} = b \in F$, následně $a \in F$. Nyní dokážeme implikaci „(1) $\Rightarrow$ (2)“. Nechť $\inf\{a, b\} = i \in F$. Protože $a \geq i \in F$, máme $a \in F$. Protože $b \geq i \in F$, máme také $b \in F$. Tím je ekvivalence dokázána. [45: cvičení k odstavci II.5.2].)

Vidíme, že daná množina F je filtr právě tehdy, když pro každé $a, b \in M$ platí ekvivalence

$$\inf\{a, b\} \in F \iff a \in F \wedge b \in F.$$

Také definici ultrafiltru je možné upravit. Nechť množina $\{a, b\}$ má supremum i infimum pro každou volbu $a, b \in M$ a zvolme libovolnou podmnožinu $U \subseteq M$ množiny M. Daná množina U je ultrafiltr právě tehdy, když pro každé $a, b \in M$ jsou současně splněny tyto dva výroky:

$$\inf\{a, b\} \in U \iff a \in U \wedge b \in U,$$
$$\sup\{a, b\} \in U \iff a \in U \vee b \in U.$$

Poznamenejme, že implikace „$\Leftarrow$“ druhé podmínky je nadbytečná, protože plyne z implikace (1), která je ekvivalentní s implikací „$\Rightarrow$“ první podmínky.

Jiné formulace definice filtru a ultrafiltru v částečně uspořádané množině, které jsme v této poznámce 3.73 uvedli, jsou zajímavé. Avšak původní způsob, jímž tyto pojmy byly zavedeny v definici 3.72, se zdá být názornější (lépe srozumitelný). Navíc jde o způsob, který je běžně používaný.

3.74. Filtry a ultrafiltry v takto obecném pojetí (tj. v rámci obecné částečně uspořádané množiny) nebudeme používat. V dalším se budeme zabývat pouze systémem množin částečně uspořádaným inkluzí (viz příklad 1.29). To nám umožní zavést pojem kofinitního filtru a volného ultrafiltru.

3.75. Definice. Volný ultrafiltr. Mějme libovolnou množinu X a uvažujme její potenční množinu, tedy systém všech podmnožin množiny X. Zmíněnou potenční množinu označíme znakem $\mathfrak{M}$. Položili jsme $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X) = \{\, A\,;\ A \subseteq X \,\}$. Množinu $\mathfrak{M}$ nyní částečně uspořádáme inkluzí, viz příklad 1.29. Pro každé $A, B \in \mathfrak{M}$ tedy klademe $B \geq A$ právě tehdy, když $A \leq B$, právě tehdy, když $A \subseteq B$. Z praktických důvodů ovšem namísto relace částečného uspořádání „$\leq$“, kterou jsme na množině $\mathfrak{M}$ zavedli, budeme používat jednoduše binární predikát inkluze „$\subseteq$“, který je zaveden na celém Universu teorie množin.

Snadno nahlédneme, že libovolná podmnožina $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$ množiny $\mathfrak{M}$ částečně uspořádané inkluzí má supremum a infimum. Pro libovolnou podmnožinu $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$ máme $\sup \mathfrak{A} = \bigcup \mathfrak{A}$ a $\inf \mathfrak{A} = \bigcap \big(\mathfrak{A} \cup \{X\}\big)$. (Připomeňme, že pro každou množinu M je $\bigcup M = \{\, a;\ \exists A \in M\colon\ a \in A \,\}$ a že pro každou neprázdnou (!) množinu M je $\bigcap M = \{\, a;\ \forall A \in M\colon\ a \in A \,\}$, viz [2: axiom I.2.17 a definice I.2.18 a I.3.12].) Pro každé $A, B \in \mathfrak{M}$ tedy máme $\sup\{A, B\} = A \cup B$ a $\inf\{A, B\} = A \cap B$. Nadále místo suprema a infima množiny $\{A, B\}$ budeme jednoduše používat po řadě množinu $A \cup B$ a $A \cap B$. Využijeme tak binárních operací průniku „$\cap$“ a sjednocení „$\cup$“, které máme definovány na celém Universu teorie množin.

Poznamenejme, že pojem filtru na množině (tj. na systému množin $\mathfrak{M}$ částečně uspořádaném inkluzí) se definuje trochu jinak. Množina $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$, tedy systém podmnožin neprázdné množiny X, je *filtr na množině* X právě tehdy, když $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ a pro každé $A, B \in \mathfrak{M}$ platí

$$\emptyset \notin \mathfrak{F}\,, \qquad A, B \in \mathfrak{F} \implies A \cap B \in \mathfrak{F}\,, \qquad A \supseteq B \in \mathfrak{F} \implies A \in \mathfrak{F}\,. \tag{1}$$

Oproti podmínkám stanoveným definicí 3.72 či poznámkou 3.73 jsou zde navíc podmínky, že $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ a $\emptyset \notin \mathfrak{F}$. (První podmínka $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ ekvivalentně znamená, že $X \in \mathfrak{F}$. Pro vhodné $A \in \mathfrak{M}$ totiž máme $A \in \mathfrak{F}$, následně $X \supseteq A \in \mathfrak{F}$. Druhá podmínka $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ ekvivalentně znamená, že filtr $\mathfrak{F}$ je, ve smyslu předcházející definice 3.72, vlastní. Jelikož máme $X \in \mathfrak{F}$ a $\emptyset \notin \mathfrak{F}$, množina X je nutně neprázdná – to ale za předpokladu, že alespoň jeden filtr $\mathfrak{F}$ na množině X existuje.) Definice ultrafiltru už je „stejná“. Množina $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{M}$ je *ultrafiltr na množině* X právě tehdy, když $\mathfrak{U}$ je filtr na množině X (dle této definice 3.75, ne tedy podle definice 3.72 nebo poznámky 3.73) a navíc pro každé $A, B \in \mathfrak{M}$ platí

$$A \cup B \in \mathfrak{U} \implies A \in \mathfrak{U} \ \vee \ B \in \mathfrak{U}\,. \tag{2}$$

Nechť $\mathfrak{U}$ je ultrafiltr na množině X. Stojí za pozornost, že pro každou množinu $A \in \mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$ platí buď $A \in \mathfrak{U}$, anebo $X \setminus A \in \mathfrak{U}$. (Ekvivalentně: pro každou množinu $A \in \mathfrak{M}$ platí $A \in \mathfrak{U}$ právě tehdy, když $X \setminus A \notin \mathfrak{U}$. Protože $\mathfrak{U}$ je (ultra)filtr, máme $X = A \cup (X \setminus A) \in \mathfrak{U}$, viz výše, a jelikož $\mathfrak{U}$ je ultrafiltr, musí platit $A \in \mathfrak{U}$ nebo $X \setminus A \in \mathfrak{U}$. Kdyby platilo obojí, muselo by platit také $A \cap (X \setminus A) = \emptyset \in \mathfrak{U}$, což je spor, protože $\emptyset \notin \mathfrak{U}$. Viz [2: definice I.8.5 a odstavce I.8.7 až I.8.9].)

Přejděme k zavádění dalších pojmů.

Předpokládejme, že výchozí množina X je nekonečná (tj., neplatí $\mathrm{Fin}(X)$). I nadále máme $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X) = \{\, A \,;\, A \subseteq X \,\}$. *Kofinitním filtrem* na nekonečné množině X rozumíme kolekci množin

$$\mathfrak{F}_X = \big\{\, A \in \mathfrak{M} \,;\, \mathrm{Fin}(X \setminus A) \,\big\}\,, \tag{3}$$

kde „Fin“ označuje unární predikát „být konečná množina“, viz [2: definice I.6.2]. Vidíme, že kofinitní filtr $\mathfrak{F}_X$ je tvořen všemi množinami, jejichž doplněk v X je konečný. Snadno ověříme, že kolekce $\mathfrak{F}_X$ je skutečně filtr na množině X. (Zřejmě platí $X \in \mathfrak{F}_X$, takže kolekce $\mathfrak{F}_X$ je neprázdná, a vlastnosti (1) jsou splněny pro každé $A, B \in \mathfrak{M}$, píšeme-li v nich $\mathfrak{F}_X$ namísto $\mathfrak{F}$.)

Budiž nyní dána množina $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$. Množina $\mathfrak{U}$ je *volný ultrafiltr* na množině X právě tehdy, když $\mathfrak{U}$ je ultrafiltr na množině X a k tomu $\mathfrak{F}_X \subseteq \mathfrak{U}$.

Z této definice už plyne, že množina X je nekonečná – jestliže alespoň jeden volný ultrafiltr $\mathfrak{U}$ na množině X existuje. (Kdyby X byla konečná, potom $\emptyset \in \mathcal{P}(X) = \mathfrak{F}_X \subseteq \mathfrak{U}$, načež $\mathfrak{U}$ nemůže být (ultra)filtr na množině X.)

Pro pohodlí shrňme, že množina $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$ je volný ultrafiltr na množině X právě tehdy, když $\mathfrak{U} \neq \emptyset$ a pro každé $A, B \in \mathfrak{M}$ jsou splněny následující čtyři výroky:

$$\begin{gathered} A, B \in \mathfrak{U} \implies A \cap B \in \mathfrak{U}\,, \\ A \supseteq B \in \mathfrak{U} \implies A \in \mathfrak{U}\,, \\ A \cup B \in \mathfrak{U} \implies A \in \mathfrak{U} \ \vee \ B \in \mathfrak{U}\,, \\ A \in \mathfrak{U} \implies \neg\,\mathrm{Fin}(A)\,. \end{gathered} \tag{4}$$

(Ověřme, že kolekce množin $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{M}$ je volný ultrafiltr právě tehdy, když $\mathfrak{U} \neq \emptyset$ a podmínky (4) jsou splněny pro každé $A, B \in \mathfrak{M}$. Toto tvrzení, které máme dokázat, napřed vyslovíme v jiném, ekvivalentním tvaru: Nechť $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{M}$ je ultrafiltr. Potom $\mathfrak{F}_X \subseteq \mathfrak{U}$ právě tehdy, když pro každou množinu $A \in \mathfrak{U}$ platí $\neg\,\mathrm{Fin}(A)$. V důkazech obou implikací „$\Rightarrow$“ i „$\Leftarrow$“ využijeme metodu nepřímého důkazu. Začneme implikací „$\Rightarrow$“.

Zvolme množinu $A \in \mathfrak{M}$, která je konečná, $\mathrm{Fin}(A)$. Máme ovšem $A = X \setminus (X \setminus A)$. Doplněk množiny $X \setminus A$ je tedy konečný, ekvivalentně $X \setminus A \in \mathfrak{F}_X \subseteq \mathfrak{U}$. Dostáváme $X \setminus A \in \mathfrak{U}$. Ekvivalentně, protože $\mathfrak{U}$ je (neprázdný) ultrafiltr, máme $A \notin \mathfrak{U}$. Zbývá dokázat implikaci „$\Leftarrow$“. Zvolme libovolnou množinu $A \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{U}$, neboli $A \notin \mathfrak{U}$. Protože $\mathfrak{U}$ je ultrafiltr, ekvivalentně máme $X \setminus A \in \mathfrak{U}$. Z předpokladu plyne $\neg\,\mathrm{Fin}(X \setminus A)$. Doplněk množiny A je nekonečný, ekvivalentně $A \notin \mathfrak{F}_X$.)

3.76. Poznámka. Množiny „velké“ a „malé“. V matematice se někdy setkáváme s (intuitivním) pojmem „velká množina“. Jednou z možností, jak tento pojem formalizovat, je použít pojem filtru: Nechť X je libovolná (neprázdná) množina a nechť $\mathfrak{F}$ je filtr na množině X. Pak množina $A \subseteq X$ je „velká“ právě tehdy, když $A \in \mathfrak{F}$. (Vidíme, že pojem „velké množiny“ jsme zavedli pouze pro podmnožiny množiny X.)

V dalším však budeme pracovat s pojmem volného ultrafiltru, což znamená, že na pojem „velké množiny“ klademe ještě další omezující podmínky. Nechť tedy $\mathfrak{U}$ je volný ultrafiltr na (nekonečné) množině X. Množinu $A \subseteq X$ považujeme za „velkou“ právě tehdy, když $A \in \mathfrak{U}$. Množinu $A \subseteq X$ naopak považujeme za „malou“ právě tehdy, když $A \notin \mathfrak{U}$. (Protože $\mathfrak{U}$ je (volný) ultrafiltr, dostáváme, že množina $A \subseteq X$ je „velká“ právě tehdy, když není „malá“. Srov. [2: odstavec I.8.10].) Popišme slovně vlastnosti 3.75. .(4), které každé dvě „velké“ množiny $A, B \subseteq X$ musí splňovat: (1) Jestliže množiny A a B jsou „velké“, potom jejich průnik $A \cap B$ je stále „velká“ množina. (2) Jestliže množina B je „velká“ a množina $A \supseteq B$ je ještě „větší“, potom A je také „velká“ množina. (Z poznámky 3.73 víme, že obě podmínky lze sloučit do jediné ekvivalence: průnik $A \cap B$ je „velká“ množina právě tehdy, když obě množiny A a B jsou „velké“.) (3) Sjednocení $A \cup B$ dvou množin je „velká“ množina tehdy a jenom tehdy, když alespoň jedna z množin A nebo B je „velká“. (Implikace „$\Leftarrow$“ plyne z vlastnosti (2), opět viz poznámku 3.73.) (4) Jestliže A je „velká“, potom A je nekonečná. Ekvivalentně, jestliže A je konečná, potom je „malá“, není „velká“. (Toto tvrzení neplatí obráceně. Jestliže množina A je „malá“, tak ještě nemusí být konečná.)

3.77. Poznámka. Existence volného ultrafiltru. Nechť X je nekonečná množina. Chceme-li pracovat s volnými ultrafiltry na množině X, je namístě otázka, zda alespoň jeden volný ultrafiltr na množině X vůbec existuje. Důkaz existence provedeme užitím Zornova lemmatu 1.31. Jak už z odstavce 1.26 víme, Zornovo lemma 1.31 je ekvivalentní s axiomem výběru. Platnost Zornova lemmatu 1.31 proto předpokládáme.

Ať $\mathfrak{F}_X = \big\{\, A \subseteq X \,;\, \mathrm{Fin}(X \setminus A) \,\big\}$ je kolekce všech podmnožin množiny X, jejichž doplněk v X je konečný. Protože množina X je nekonečná, kolekce $\mathfrak{F}_X$ je filtr. Dále uvažujme systém $\mathfrak{M}$ všech filtrů na množině X, které současně obsahují kofinitní filtr $\mathfrak{F}_X$. Položili jsme tedy $\mathfrak{M} = \{\, \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(X) \,;\, \mathfrak{F} \text{ je filtr na } X \text{ a } \mathfrak{F}_X \subseteq \mathfrak{F} \,\}$. Množina $\mathfrak{M}$ je částečně uspořádaná inkluzí (viz příklad 1.29). Ověříme, že je splněna Zornova vlastnost (viz Zornovo lemma 1.31). Ať $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}$ je libovolný řetězec. Pro každé $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{R}$ tedy platí $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ nebo $\mathfrak{F}_1 \supseteq \mathfrak{F}_2$. Máme dokázat, že v množině $\mathfrak{M}$ existuje prvek $\mathfrak{U}_0 \in \mathfrak{M}$ takový, že $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}_0$ pro všechna $\mathfrak{F} \in \mathfrak{R}$. Jestliže $\mathfrak{R} = \emptyset$, potom položíme $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{F}_X$. (Zřejmě platí $\mathfrak{F}_X \in \mathfrak{M}$. Množina $\mathfrak{M}$ je tedy neprázdná.) A jestliže řetězec $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}$ je neprázdný, $\mathfrak{R} \neq \emptyset$, potom položme $\mathfrak{U}_0 = \bigcup \mathfrak{R} = \{\, A \,;\, \exists \mathfrak{F} \in \mathfrak{R}\colon\ A \in \mathfrak{F} \,\}$. Je zřejmé, že množina $\mathfrak{U}_0$ je filtr na množině X. (Množina $\mathfrak{U}_0$ je jistě neprázdná, protože řetězec $\mathfrak{R}$ je nyní neprázdný a protože řetězec $\mathfrak{R}$ obsahuje pouze filtry, které jsou také neprázdné. Protože každá množina $\mathfrak{F} \in \mathfrak{R}$ splňovala vlastnosti 3.75.(1) pro každé $A, B \subseteq X$, jejich sjednocení $\mathfrak{U}_0$ tyto vlastnosti 3.75.(1), kde místo $\mathfrak{F}$ nyní píšeme $\mathfrak{U}_0$, splňuje pro všechna $A, B \subseteq X$ rovněž.) Je tedy $\mathfrak{U}_0 \in \mathfrak{M}$ a pro každé $\mathfrak{F} \in \mathfrak{R}$ platí $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}_0$. Tímto je Zornova vlastnost ověřena. Užitím Zornova lemmatu 1.31 dostáváme, že v množině $\mathfrak{M}$ (vzhledem k uspořádání inkluzí) existuje alespoň jeden maximální prvek $\mathfrak{U} \in \mathfrak{M}$. Ověříme, že $\mathfrak{U}$ je hledaným volným ultrafiltrem na množině X. Protože $\mathfrak{U} \in \mathfrak{M}$, máme $\mathfrak{F}_X \subseteq \mathfrak{U}$ a dále platí, že množina $\mathfrak{U}$ je filtr na X. Abychom dokázali, že $\mathfrak{U}$ je volný ultrafiltr, stačí už ověřit pouze platnost implikace 3.75.(2) pro každé $A, B \subseteq X$. Pro spor předpokládejme opak. Najdeme tedy dvě množiny $A_0, B_0 \subseteq X$ takové, že $A_0 \cup B_0 \in \mathfrak{U}$ ale $A_0, B_0 \notin \mathfrak{U}$. Uvažujme systém $\mathfrak{U}_{A_0} = \mathfrak{U} \cup \{ A \subseteq X \; ; \; \exists B \in \mathfrak{U} \colon \; A \supseteq B \cap A_0 \}$. Je snadné ověřit, že $\mathfrak{U}_{A_0}$ je filtr na množině X a že $\mathfrak{F}_X \subseteq \mathfrak{U}_{A_0}$. (Nejdůležitější je ověřit, že $\emptyset \notin \mathfrak{U}_{A_0}$, což nastává právě tehdy, když $B \cap A_0 \neq \emptyset$ pro každé $B \in \mathfrak{U}$. Kdyby pro nějaké $B \in \mathfrak{U}$ platilo $B \cap A_0 = \emptyset$, ekvivalentně $B \subseteq X \setminus A_0$, potom $X \setminus A_0 \in \mathfrak{U}$, protože $B \in \mathfrak{U}$. Následně $B_0 \supseteq B_0 \setminus A_0 = (A_0 \cup B_0) \cap (X \setminus A_0) \in \mathfrak{U}$, tudíž $B_0 \in \mathfrak{U}$ – spor. Platí tedy $\emptyset \notin \mathfrak{U}_{A_0}$. Ověření zbývajících vlastností 3.75.(1), kde namísto $\mathfrak{F}$ píšeme $\mathfrak{U}_{A_0}$, pro všechna $A \subseteq X$ už je snadné. Zřejmě také $\emptyset \neq \mathfrak{F}_X \subseteq \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}_{A_0}$.) Máme tedy $\mathfrak{U}_{A_0} \in \mathfrak{M}$ a je zřejmé, že $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}_{A_0}$, neboli $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}_{A_0}$ a $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}_{A_0}$. To je spor s maximalitou množiny $\mathfrak{U}$ (v systému $\mathfrak{M}$ vzhledem k inkluzi). Množina $\mathfrak{U}$ je hledaným volným ultrafiltrem na množině X. Tímto je důkaz existence alespoň jednoho volného ultrafiltru na nekonečné množině X dokončen.

Protože jsme dokázali existenci alespoň jednoho volného ultrafiltru na nekonečné množině X, dokázali jsme také existenci alespoň jednoho ultrafiltru na této množině. (Podrobněji viz [2: odstavec I.8.16 a lemma I.8.17 (a definice I.8.14 a věta I.8.18)].)

3.78. Nyní se již můžeme vrátit k příkladu 3.17, kde jsme se zabývali reálnými vektorovými prostory s lineárním uspořádáním. V následujícím odstavci 3.79 popíšeme množinu všech hyperreálných čísel a rovněž základy práce s těmito čísly. Těleso hyperreálných čísel sestrojíme v navazujícím příkladu 3.80 níže. Jak uvidíme, těleso hyperreálných čísel je lineárně uspořádané a nadto jej lze pojímat i jako další příklad lineárně uspořádaného vektorového prostoru nad lineárně uspořádaným tělesem reálných čísel.

3.79. Reálné vektorové prostory s lineárním uspořádáním. Část II. Hyperreálná čísla. Příprava. Uvažujme množinu všech nenulových přirozených čísel $\mathbb{N}$, která, jak je všeobecně známo, je nekonečná. Na této množině $\mathbb{N}$ budiž dán volný ultrafiltr $\mathfrak{U}$. (Viz definici 3.75. Existenci alespoň jednoho volného ultrafiltru na nekonečné množině jsme odůvodnili poznámkou 3.77.) Dále mějme množinu všech reálných čísel $\mathbb{R}$.

Věnujme svoji pozornost množině všech posloupností reálných čísel, tedy množině všech zobrazení $\boldsymbol{a} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, a tuto množinu označme znakem ℓ. Zvolme posloupnost resp. zobrazení $\boldsymbol{a} \in \ell$. Číslo $\boldsymbol{a}(n)$, které je přirozenému číslu $n \in \mathbb{N}$ zobrazením $\boldsymbol{a}$ přiřazeno, značíme stručně a_n a, jak už je obvyklé, zobrazení $\boldsymbol{a}$ zapisujeme také následovně: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Máme tedy rovnost $\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Viz též definici 3.45. Na množině ℓ nyní zaveďme relaci ekvivalence „$\approx$“, definice 3.56, následujícím předpisem: pro každé $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \ell$ máme

$$\boldsymbol{a} \approx \boldsymbol{b} \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad \exists U \in \mathfrak{U} \; \forall n \in U \colon \; a_n = b_n \, .$$

(Snadno nahlédneme, že relace „$\approx$“ je skutečně relací ekvivalence na množině ℓ. Reflexivita: uvaž $U = \mathbb{N} \in \mathfrak{U}$. Tranzitivita: jestliže $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$, potom $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}$. Symetrie: stačí uvážit stejné $U \in \mathfrak{U}$.) Množinu ℓ faktorizujme relací ekvivalence „$\approx$“. Faktorovou množinu $\ell/{\approx}$ označme znakem $\mathcal{H}$, takže máme

$$\mathcal{H} = \ell/{\approx} = \{ \, [\boldsymbol{a}]_{\approx} \; ; \; \boldsymbol{a} \in \ell \, \} \, . \tag{1}$$

Prvky množiny $\mathcal{H}$, tedy ekvivalenční třídy $[\boldsymbol{a}]_{\approx}$ pro $\boldsymbol{a} \in \ell$, nazýváme *hyperreálnými čísly* a množina $\mathcal{H}$ je množinou všech takovýchto hyperreálných čísel. (Výsledná podoba množiny $\mathcal{H}$ závisí na počáteční volbě volného ultrafiltru $\mathfrak{U}$ na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$.)

Povšimněme si, že množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je zcela přirozeně „obsažena“ v množině ℓ všech posloupností reálných čísel: libovolnému číslu $t \in \mathbb{R}$ odpovídá stacionární posloupnost $\{t\}_{n=1}^{\infty}$, totiž posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = t$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Obdobným způsobem je množina $\mathbb{R}$ „obsažena“ také v množině $\mathcal{H}$: číslu $t \in \mathbb{R}$ odpovídá ekvivalenční třída $[\{t\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}$. Zobrazení $i \colon \mathbb{R} \to \mathcal{H}$, které každému reálnému číslu $t \in \mathbb{R}$ přiřadí ekvivalenční třídu $[\{t\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}$ určenou stacionární posloupností $\{t\}_{n=1}^{\infty}$, neboli $i \colon t \mapsto [\{t\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}$ pro každé $t \in \mathbb{R}$, nazveme *vnořením* množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ do množiny hyperreálných čísel $\mathcal{H}$.

Nyní se budeme věnovat základům práce s hyperreálnými čísly. Objasněme, že prací s hyperreálnými čísly máme na mysli provádění základních početních operací, jako je sčítání, odčítání, násobení a dělení. K základům patří rovněž porovnávání hyperreálných čísel podle velikosti. Dále je možné se zabývat množinami hyperreálných čísel s určitou vlastností – např. množinou všech kladných hyperreálných čísel, množinou všech celých hyperreálných čísel nebo množinou všech přirozených hyperreálných čísel, viz níže. Dále je možné pracovat s libovolnými hyperreálnými funkcemi jedné hyperreálné proměnné – například je možné zavést sinus, logaritmus i exponenciální funkci hyperreálného čísla. (Samozřejmě je možné pracovat i hyperreálnými funkcemi více hyperreálných proměnných.)

Základní princip práce s hyperreálnými čísly je veskrze jednoduchý. Pracujeme s nimi totiž zcela obdobně jako s čísly reálnými. To znamená, že používáme běžné početní operace sčítání, odčítání, násobení a dělení reálných čísel, k tomu používáme standardní uspořádání množiny reálných čísel. Studujeme-li nějakou vlastnost, jako například kladnost, celost nebo přirozenost, vycházíme z toho, jak jsou tyto vlastnosti zavedeny na množině reálných čísel. Obdobně vycházíme z reálných funkcí jedné reálné proměnné, např. $\sin x$, $\ln x$ nebo e^x, případně z reálných funkcí několika reálných proměnných. Princip spočívá v tom, že veškeré operace, relace, unární vlastnosti nebo funkce zavedené na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ poměrně jednoduchým a snadno zapamatovatelným způsobem rozšíříme na množinu hyperreálných čísel $\mathcal{H}$. Postup popíšeme spíše intuitivně.

Nechť $R_1 \subseteq \mathbb{R}$ je unární relace na množině reálných čísel $\mathbb{R}$. (Pro příklad může jít o množinu všech přirozených reálných čísel, tj. množinu $R_1 = \{\, n \times 1\,;\ n \in \mathbb{Z}^+ \,\}$, kde 1 je reálné číslo jedna, „$\times$“ označuje celistvý násobek, viz definici 3.25, a $\mathbb{Z}^+$ je množina kladných celých čísel. Na množině $\mathbb{R}$ tedy studujeme vlastnost „být přirozené číslo“: reálné číslo $n \in \mathbb{R}$ považujeme za přirozené právě tehdy, když $n \in R_1$.) Unární relaci R_1 na množině $\mathbb{R}$ rozšíříme na unární relaci $\tilde{R}_1$ na množině hyperreálných čísel $\mathcal{H}$. Pro $[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx} \in \mathcal{H}$ máme

$$\big[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\big]_{\approx} \in \tilde{R}_1 \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad \{\, n \in \mathbb{N}\,;\ a_n \in R_1 \,\} \in \mathfrak{U}\,, \tag{2}$$

kde $\mathfrak{U}$ je na počátku zvolený volný ultrafiltr na $\mathbb{N}$. Vidíme, že dané hyperreálné číslo splňuje rozšířenou vlastnost $\tilde{R}_1$ právě tehdy, když vlastnost R_1 je splněna pro „mnoho“ (srov. poznámku 3.76) členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která jej reprezentuje. (Tak získáme například pojem přirozeného hyperreálného čísla. V případě studia kladných, celých atp. čísel se postupuje obdobně. Například, jestliže máme posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell$ a jestliže každé a_n je kladné, celé nebo přirozené atp. pro všechna $n \in \mathbb{N}$, potom hyperreálné číslo $[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}$ je po řadě kladné, celé nebo přirozené atp.)

Nyní nechť $R_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je binární relace na množině $\mathbb{R}$. (Kupříkladu může jít o relaci standardního uspořádání množiny $\mathbb{R}$. Je tedy $R_2 = \big\{\, [a,b] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,;\ a \le b \,\big\}$. Pro $a, b \in \mathbb{R}$ máme $a \le b$, tj. aR_2b, právě tehdy, když $[a,b] \in R_2$.) Relaci R_2 rozšíříme na binární relaci $\tilde{R}_2$ na množině $\mathcal{H}$. Pro $[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}, [\{b_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx} \in \mathcal{H}$ máme

$$\big[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\big]_{\approx} \tilde{R}_2 \big[\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\big]_{\approx} \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad \{\, n \in \mathbb{N}\,;\ a_n R_2 b_n \,\} \in \mathfrak{U}\,. \tag{3}$$

Opět vidíme, že dvě hyperreálná čísla jsou v rozšířené relaci $\tilde{R}_2$ právě tehdy, když ve vztahu (tj. relaci) R_2 je „mnoho“ vzájemně si odpovídajících dvojic členů posloupností, jimiž jsou tato dvě hyperreálná čísla reprezentována. (Uvedeným způsobem je možné relaci standardního uspořádání reálných čísel rozšířit na relaci uspořádání množiny hyperreálných čísel $\mathcal{H}$. Například, jestliže $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \le b_n$, potom hyperreálné číslo $[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}$ je menší nebo rovno hyperreálnému číslu $[\{b_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}$.)

Přejděme k reálné funkci f_1 jedné reálné proměnné. (Například může jít o nějakou unární operaci na množině $\mathbb{R}$, jako třeba operaci opačného prvku, tedy $f_1(x) = -x$ pro

$x \in \mathbb{R}$, nebo operaci inverzního prvku, takže $f_1(x) = x^{-1}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Také může jít o funkci $f_1(x) = \sin x$ nebo $f_1(x) = \mathrm{e}^x$ pro $x \in \mathbb{R}$, či $f_1(x) = \ln x$ pro $x \in \mathbb{R}^+$ atd. atd. Případně může jít o zcela obecnou reálnou funkci jedné reálné proměnné. Není nutné, aby funkce f_1 byla definována na celé množině $\mathbb{R}$.) Zadanou funkci f_1 rozšíříme na hyperreálnou funkci $\tilde{f}_1$ jedné hyperreálné proměnné. Zvolme hyperreálné číslo $[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx} \in \mathcal{H}$. Předpokládejme, že a_n leží v definičním oboru funkce f_1 pro všechna přirozená $n \in \mathbb{N}$. Potom klademe

$$\tilde{f}_1\Big(\big[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\big]_{\approx}\Big) = \Big[\big\{f_1(a_n)\big\}_{n=1}^{\infty}\Big]_{\approx}. \tag{4}$$

Vidíme, že rozšíření funkce f_1 na funkci $\tilde{f}_1$ probíhá tak, že funkci f_1 aplikujeme na každý člen posloupnosti reprezentující zvolené hyperreálné číslo, aplikujeme ji tedy „člen po členu“. (Tímto způsobem lze unární operaci opačného nebo inverzního prvku rozšířit na množinu hyperreálných čísel $\mathcal{H}$: operace opačného prvku bude definována pro každé hyperreálné číslo a operace inverzního prvku bude definována pro každé hyperreálné číslo s výjimkou hyperreálné nuly $i(0)$, kde $i\colon \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ je výše popsané vnoření množiny reálných čísel do množiny hyperreálných čísel. Například pro $[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx} \in \mathcal{H}$ máme $-[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx} = [\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}$, dále např. $\mathrm{e}^{[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}} = [\{\mathrm{e}^{a_n}\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}$ atd.)

Nakonec mějme reálnou funkci f_2 dvou reálných proměnných. (Může jít třeba o binární operaci součtu nebo součinu dvou reálných čísel, tedy např. $f_2(x,y) = x + y$ nebo $f_2(x,y) = x \cdot y$. V obecnosti může jít o libovolnou funkci dvou proměnných, přičemž není nutné, aby funkce f_2 byla definována na celém kartézském součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.) Funkci f_2 rozšíříme na hyperreálnou funkci $\tilde{f}_2$ dvou hyperreálných proměnných. Zvolme dvě hyperreálná čísla $[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}, [\{b_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx} \in \mathcal{H}$ taková, že dvojice $[a_n, b_n]$ patří do definičního oboru funkce f_2 pro všechna $n \in N$. Pak klademe

$$\tilde{f}_2\Big(\big[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\big]_{\approx}, \big[\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\big]_{\approx}\Big) = \Big[\big\{f_2(a_n, b_n)\big\}_{n=1}^{\infty}\Big]_{\approx}. \tag{5}$$

Jako předtím, rozšíření funkce f_2 na funkci $\tilde{f}_2$ provedeme tím, že funkci f_2 aplikujeme postupně na všechny vzájemně si odpovídající dvojice členů posloupností, které reprezentují zvolená hyperreálná čísla. (Tímto postupem je možné binární operace součtu a součinu rozšířit na množinu všech hyperreálných čísel $\mathcal{H}$. Například v případě součtu čísel $[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}, [\{b_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx} \in \mathcal{H}$ máme $[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx} + [\{b_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx} = [\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}$. Součet tedy probíhá jakoby „po složkách“. Součin zvolených čísel by probíhal zcela obdobně.)

Není nikterak těžké ověřit, že použitím předpisů (2) a (3) pro rozšíření relací a použitím předpisů (4) a (5) pro rozšíření funkcí dostáváme stále stejné výsledky, ať už reprezentanty $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ hyperreálných čísel $[\{a_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}$ a $[\{b_n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}$ volíme jakkoliv. (Přičemž u předpisů (4) a (5) musí být splněny dodatečné podmínky týkající se definičního oboru, které jsme uvedli). To plyne ze způsobu zavedení množiny hyperreálných čísel $\mathcal{H}$ a z vlastností volného ultrafiltru $\mathfrak{U}$.

(Poznamenejme, že celý postup rozšiřování relací a funkcí z množiny $\mathbb{R}$ na množinu $\mathcal{H}$ by bylo možné značně formalizovat: Z teorie množin víme, že každá funkce jedné proměnné je ve skutečnosti určitou množinou uspořádaných dvojic (tedy relace), funkce dvou proměnných je množina uspořádaných trojic (tj. ternární relace) atd. To znamená, že předpis (4) pro rozšíření reálné funkce jedné proměnné je vlastně zbytečný. Stačilo by uvést pouze předpis (3) pro rozšiřování binárních relací. Pak bychom snadno dokázali, že rozšířením relace na množině $\mathbb{R}$, která je funkcí, dostaneme relaci na množině $\mathcal{H}$, která je opět funkcí. Namísto předpisu (5) pro rozšiřování funkcí dvou proměnných bychom uvedli obecnější předpis pro rozšiřování ternárních relací, načež bychom zase dokázali, že rozšířením ternární relace na $\mathbb{R}$, která je funkcí, nedostaneme nic jiného než ternární relaci na $\mathcal{H}$, která je funkcí. Avšak, aby při tomto formálním způsobu nedošlo k nedorozumění (z důvodu různých „jemností“), celý postup by bylo nutné uvést značně podrobně. To by mohlo vést až k zastření ústřední myšlenky. Postup rozšiřování relací a funkcí jsme proto popsali spíše intuitivně, dokonce i s tou „chybou“ (či spíše „vadou na kráse“), že předpis (4) je uveden nadbytečně. Tento „nedostatek“ byl ale veden snahou o větší názornost výkladu.)

Podrobněji se lze s hyperreálnými čísly seznámit například v knize [26].

3.80. Příklad. Reálné vektorové prostory s lineárním uspořádáním. Část II. Hyperreálná čísla. Mějme těleso reálných čísel se (standardním) lineárním uspořádáním. Máme tedy $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$. Na množině (nenulových) přirozených čísel $\mathbb{N}$ budiž dán nějaký volný ultrafiltr $\mathfrak{U}$. Postupem uvedeným v předcházejícím odstavci 3.79 sestrojíme množinu všech hyperreálných čísel $\mathcal{H}$, viz rovnici 3.79.(1). Připomeňme, že máme sestrojeno také vnoření $i: \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ do množiny hyperreálných čísel $\mathcal{H}$.

Nyní uvažujme binární operace sčítání „$+$“ a násobení „$\cdot$“ na množině reálných čísel $\mathbb{R}$. Postupem, který jsme v odstavci 3.79 uvedli, tyto operace rozšíříme na množinu všech hyperreálných čísel $\mathcal{H}$ a rozšíření označíme po řadě „$\tilde{+}$“ a „$\tilde{\cdot}$“. (Použijeme předpis 3.79.(5), kde místo $\tilde{f}_2$ a f_2 píšeme po řadě „$\tilde{+}$“ a „$+$“ nebo „$\tilde{\cdot}$“ a „$\cdot$“. Poznamenejme, že v případě operace sčítání je zvykem používat infixový zápis, takže namísto „$+(a, b)$“ resp. „$\tilde{+}(a, b)$“ bývá obvyklé psát „$a + b$“ resp. „$a \tilde{+} b$“. Obdobná poznámka platí také pro operaci násobení „$\cdot$“ resp. „$\tilde{\cdot}$“.) Dále uvažujme unární operace opačného čísla „$-$“ a převrácené hodnoty „$^{-1}$“ na množině reálných čísel $\mathbb{R}$. Tyto operace opět rozšíříme na množinu hyperreálných čísel $\mathcal{H}$. Rozšíření označíme po řadě „$\tilde{-}$“ a „$\widetilde{^{-1}}$“. (Použijeme předpis 3.79.(4), kde namísto $\tilde{f}_1$ a f_1 píšeme po řadě „$\tilde{-}$“ a „$-$“ nebo „$^{-1}$“ a „$\widetilde{^{-1}}$“. Dodejme pouze, že namísto „$-(a)$“ resp. „$\tilde{-}(a)$“ nebo „$^{-1}(a)$“ resp. „$\widetilde{^{-1}}(a)$“ obvykle píšeme po řadě „$-a$“ resp. „$\tilde{-}a$“ nebo „a^{-1}“ resp. „$a^{\widetilde{-1}}$“.) Zbývá uvažovat už jen binární relaci „$\leq$“ standardního uspořádání reálných čísel. Také ji rozšíříme a její rozšíření označíme „$\preceq$“. (Použijeme předpis 3.79.(3), kde místo $\tilde{R}_2$ a R_2 píšeme po řadě „$\preceq$“ a „$\leq$“.) Reálná čísla nula 0 a jedna 1 do množiny $\mathcal{H}$ pouze vnoříme. Výsledkem vnoření jsou hyperreálná čísla nula $i(0)$ a jedna $i(1)$, kde $i: \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ je vnoření $\mathbb{R}$ do $\mathcal{H}$.

Vidíme, že $\big(\mathcal{H}, \tilde{+}, \tilde{-}, \tilde{\cdot}, \widetilde{^{-1}}, i(0), i(1), \preceq\big)$ je lineárně uspořádané těleso, totiž *těleso hyperreálných čísel*. Těleso hyperreálných čísel je zřejmě komutativní.

(Vlastně je třeba ověřit, že $\big(\mathcal{H}, \tilde{+}, \tilde{-}, \tilde{\cdot}, \widetilde{^{-1}}, i(0), i(1), \preceq\big)$ je skutečně lineárně uspořádaným (komutativním) tělesem dle definice 3.2, tedy že uvedená uspořádaná osmice má všechny potřebné vlastnosti. To ale plyne snadno ze způsobu konstrukce tělesa hyperreálných čísel $\mathcal{H}$ a z vlastností volného ultrafiltru $\mathfrak{U}$.)

Poznamenejme, že konstrukce množiny $\mathcal{H}$ i celého lineárně uspořádaného tělesa hyperreálných čísel probíhá s ohledem na zvolený volný ultrafiltr $\mathfrak{U}$ na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$. To znamená, že výsledná struktura tělesa hyperreálných čísel $\mathcal{H}$ je závislá na počáteční volbě volného ultrafiltru $\mathfrak{U}$, přičemž různé volby tohoto volného ultrafiltru $\mathfrak{U}$ mohou vést i k navzájem neizomorfním tělesům hyperreálných čísel. (!)

Přejděme k některým vlastnostem tělesa hyperreálných čísel. Nejprve ať „$\cdot'$“, „$^{-1'}$“ a „$\leq'$“ jsou restrikce operací „$\cdot$“, „$^{-1}$“ a relace „$\leq$“ zavedených na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ na množinu kladných reálných čísel $\mathbb{R}^+$. Z tvrzení 3.21 víme, že $(\mathbb{R}^+, \cdot', ^{-1'}, \leq')$ je lineárně uspořádaná grupa. Aniž budeme uvádět další podrobnosti, poznamenáváme, že lineárně uspořádaná aditivní grupa $(\mathbb{R}, +, -, 0, \leq)$ tělesa $\mathbb{R}$ a uvedená grupa $(\mathbb{R}^+, \cdot', ^{-1'}, \leq')$ jsou izomorfní. Izomorfismem $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ je exponenciální funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Nyní ať „$\tilde{\cdot}'$“, „$\widetilde{^{-1}}'$“ a „$\preceq'$“ jsou restrikce operací „$\tilde{\cdot}$“, „$\widetilde{^{-1}}$“ a relace „$\preceq$“ na množinu kladných hyperreálných čísel $\mathcal{H}^+$. Pak lineárně uspořádaná aditivní grupa $\big(\mathcal{H}, \tilde{+}, \tilde{-}, i(0), \preceq\big)$ tělesa $\mathcal{H}$ a lineárně uspořádaná grupa $\big(\mathcal{H}^+, \tilde{\cdot}', \widetilde{^{-1}}', i(1), \preceq'\big)$ jsou opět izomorfní. Izomorfismus $\tilde{f}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ získáme rozšířením izomorfismu f (viz předpis 3.79.(4), kde místo $\tilde{f}_1$ a f_1 píšeme po řadě $\tilde{f}$ a f), takže pro $[\{a_n\}_{n=1}^\infty]_\approx \in \mathcal{H}$ máme $\tilde{f}\big([\{a_n\}_{n=1}^\infty]_\approx\big) = \mathrm{e}^{[\{a_n\}_{n=1}^\infty]_\approx} = [\{\mathrm{e}^{a_n}\}_{n=1}^\infty]_\approx$.

Uveďme další pozoruhodné vlastnosti sestrojeného lineárně uspořádaného tělesa hyperreálných čísel $\mathcal{H}$.

Předně, v tělese $\mathcal{H}$ najdeme nenulová nekonečně malá i nekonečně velká hyperreálná čísla, viz poznámku 3.62. Příkladem kladného nekonečně malého hyperreálného čísla je číslo $\omega = [\{1/n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}$, jako příklad kladného nekonečně velkého hyperreálného čísla lze uvést číslo $\Omega = [\{n\}_{n=1}^{\infty}]_{\approx}$. Povšimněme si, že číslo Ω je převrácenou hodnotou čísla ω, takže $\Omega = \omega^{\tilde{-}1}$. Dále si povšimněme, že hyperreálné číslo Ω je přirozené, protože posloupnost $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, která jej reprezentuje, sestává pouze z reálných přirozených čísel (tj. čísel z množiny $\{\, n \times 1 \; ; \; n \in \mathbb{Z}^+ \,\}$, viz předcházející odstavec 3.79). Není těžké ověřit, že kladné hyperreálné číslo je nekonečně malé právě tehdy, když (volněji řečeno) je menší než každé kladné reálné číslo. Obdobně, kladné hyperreálné číslo je nekonečně velké právě tehdy, když (volně řečeno) je větší než každé reálné číslo. Přesněji, kladné hyperreálné číslo $a \in \mathcal{H}$, takže $a \succ i(0)$, je nekonečně malé resp. nekonečně velké právě tehdy, když pro každé kladné reálné číslo $t \in \mathbb{R}$, splňující $t > 0$, platí po řadě $a \prec i(t)$ resp. $i(t) \prec a$.

Za zmínku dále stojí, že žádná (spočetná) posloupnost kladných hyperreálných čísel $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, tedy $A \colon \mathbb{N} \to \mathcal{H}$, kde $A_n \succ i(0)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, nekonverguje k nule: existuje kladné $\varepsilon \in \mathcal{H}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ máme $i(0) \prec \varepsilon \preceq A_n$. (Idea: Posloupnost A je vlastně posloupnost posloupností reálných čísel. Můžeme předpokládat, že všechna čísla jsou kladná – změna členů posloupnosti na „malé“ množině indexů hodnotu tak jako tak kladného hyperreálného čísla neovlivní. Vybereme vhodnou „diagonální posloupnost“ – to bude hledané hyperreálné číslo ε. První člen je první člen první posloupnosti. Druhý člen je minimum druhých členů prvních dvou posloupností. Třetí člen je minimum třetích členů prvních tří posloupností. Atd.) Důsledkem je, že v tělese hyperreálných čísel neexistují cauchyovské (spočetně dlouhé) posloupnosti – jedinou výjimkou jsou posloupnosti, jež jsou od určitého svého členu stacionární. Žádná (spočetně dlouhá) posloupnost tím pádem nemůže být ani konvergentní – ledaže by od určitého svého členu byla stacionární. (Viz definici 3.45.) Vidíme, že v tělese hyperreálných čísel $\mathcal{H}$ je splněno tvrzení, že „každá cauchyovská posloupnost je konvergentní“.

Zřetelně vidíme, že v tělese hyperreálných čísel $\mathcal{H}$ obecně neexistují suprema. (Kdyby suprema existovala, každá klesající a zdola omezená (třebaže jen spočetně dlouhá) posloupnost by měla limitu.) Například množina všech nekonečně malých hyperreálných čísel je neprázdná i shora omezená, ale supremum nemá.

Těleso hyperreálných čísel $\mathcal{H}$ nám slouží jako další příklad lineárně uspořádaného tělesa. Stejně dobře nám ale může posloužit i jako příklad lineárně uspořádaného vektorového prostoru nad lineárně uspořádaným tělesem $\mathbb{R}$. K tomu se stačí zaměřit na aditivní grupu tělesa $\mathcal{H}$. Snadno nahlédneme, že $\big(\mathcal{H}, \tilde{+}, \tilde{-}, i(0), \preceq\big)$ je vektorový prostor s lineárním uspořádáním nad lineárně uspořádaným tělesem reálných čísel $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1, \leq)$. Příslušné zobrazení $* \colon \mathbb{R} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, násobení skalárem, obdržíme „omezením definičního oboru operace násobení ‚$\tilde{\cdot}$‘ na množinu $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$“. Přesněji řečeno, pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ a pro každé $u \in \mathcal{H}$ klademe $\lambda * u = \big(i(\lambda)\big) \,\tilde{\cdot}\, u$, kde $i \colon \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ je vnoření $\mathbb{R}$ do $\mathcal{H}$.

3.81. Nechť F je lineárně uspořádané těleso s uspořádáním „$\leq$“. Zvolme libovolnou neprázdnou a shora omezenou podmnožinu $M \subseteq F$ tělesa F. (Platí tedy $M \neq \emptyset$ a existuje $\lambda \in F$ tak, že $\mu \leq \lambda$ pro každé $\mu \in M$.) Můžeme se ptát, zda takováto množina v tělese F má supremum, viz definici 3.69. (Definici 3.69 zde můžeme použít, protože lineární uspořádání „$\leq$“ nosné množiny tělesa F je zajisté také částečným uspořádáním této množiny.) Nyní mějme lineárně uspořádaný vektorový prostor V s uspořádáním „$\preceq$“. Opět se můžeme ptát, zda každá neprázdná a shora omezená podmnožina vektorového prostoru V v tomto vektorovém prostoru V má supremum. Ukazuje se, že těleso nebo vektorový prostor, kde je tato podmínka splněna, má další významné vlastnosti. Pro těleso a vektorový prostor, které splňují uvedenou podmínku, proto v následující definici 3.82 zavedeme zvláštní pojmenování. Tělesy splňujícími uvedenou podmínku se budeme zabývat v celé následující části tohoto paragrafu.

3.82. Definice. Úplné těleso. Úplný vektorový prostor. Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$. Lineárně uspořádané těleso F je *úplné* právě tehdy, když každá jeho neprázdná a shora omezená podmnožina má supremum. Lineárně uspořádaný vektorový prostor V je *úplný* (vůči svému uspořádání) právě tehdy, když každá jeho neprázdná a shora omezená podmnožina má supremum.

Lineárně uspořádané těleso F je *neúplné* právě tehdy, když není úplné. Lineárně uspořádaný vektorový prostor V je *neúplný* právě tehdy, když není úplný.

Hovoříme-li stručně jen o „úplném / neúplném tělese F" resp. o „úplném / neúplném vektorovém prostoru V", myslíme tím lineárně uspořádané těleso F, které je úplné / / neúplné, resp. lineárně uspořádaný vektorový prostor V, který je úplný / neúplný.

3.83. Poznámka. Terminologie týkající se úplných těles není zcela jednotná. Například zde uvedená definice 3.82 úplného lineárně uspořádaného tělesa je ve shodě s [26: Definice před Teorémem 2-1.2 (na str. 46)].

Úplným vektorovým prostorem („bez lineárního uspořádání" ovšem) se obvykle rozumí normovaný vektorový prostor, který v metrice indukované svojí normou je úplný, tj., každá cauchyovská posloupnost v něm musí mít limitu (viz [67: odstavec 1.1]). Normovaný vektorový prostor, kde je tato podmínka splněna, se nazývá Banachův prostor. Obdobný přístup lze použít také v případě pojmu úplného tělesa (které může být i „bez lineárního uspořádání"): těleso se někdy považuje za úplné právě tehdy, když každá cauchyovská (spočetně dlouhá) posloupnost v něm má limitu – viz [78: cvičení IV.C88]. Zde, v definici 3.82, jsme úplnost zaváděli vzhledem uspořádání daného tělesa nebo vektorového prostoru a o úplnosti jsme rozhodovali na základě existence suprem (nikoliv na základě konvergence cauchyovských posloupností). (Aby nedošlo k záměně pojmů, o úplnosti tělesa nebo vektorového prostoru podle této poznámky 3.83, tj. o úplnosti určené na základě konvergence cauchyovských posloupností, by snad bylo lépe hovořit jako o „sekvenciální úplnosti".)

Není těžké dokázat, že když lineárně uspořádané těleso F je úplné (dle poslední definice 3.82), potom každá cauchyovská posloupnost (s obvyklým významem dle definice 3.45) v něm má limitu, viz [63: věta 26 (v kapitole II § 3 na str. 77)] ve spojení s níže uvedenou větou 3.87. Uvedené tvrzení ale není možné obrátit. Stačí uvážit příklad tělesa hyperreálných čísel, příklad 3.80, kde jsme uvedli, že každá cauchyovská posloupnost hyperreálných čísel je v tomto tělese konvergentní, avšak uvažované těleso (ve smyslu poslední definice 3.82) není úplné.

3.84. Platí následující důležitá věta 3.85 [26: Teorém 2-1.2 (na str. 46)].

3.85. Věta. *Každé úplné lineárně uspořádané těleso* $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ *je archimedovské.*

3.85.a. *Poznámka.* Obdobně lze dokázat rovněž tvrzení, že každý úplný lineárně uspořádaný vektorový prostor je archimedovský.

3.85.b. *Důkaz.* Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že těleso F není archimedovské. To podle tvrzení 3.60 znamená, že existuje $\lambda \in F$ takové, že pro všechna kladná celá $n \in \mathbb{Z}^+$ platí $(n \times 1) < \lambda$. Množina $M = \{\, n \times 1;\ n \in \mathbb{Z}^+ \,\}$ je tedy neprázdná a shora omezená. Protože těleso F je úplné, množina M má supremum. Položme $s = \sup M$. Pak $\mu \leq s$ pro všechna $\mu \in M$ a existuje $\mu_0 \in M$ tak, že $s - 1 < \mu_0$. Odtud $s < \mu_0 + 1$. Avšak $(\mu_0 + 1) \in M$, tudíž s nemůže být supremem množiny M – spor. □

3.86. Důsledkem právě dokázané věty 3.85 je následující věta 3.87 (srov. [26: Teorém 2-1.3 (na str. 46)]) podávající charakteristiku úplných těles.

3.87. Věta. *Každé úplné lineárně uspořádané těleso* $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ *je izomorfní s lineárně uspořádaným tělesem reálných čísel* $\mathbb{R}$ *se standardním uspořádáním.*

3.87.a. *Poznámka.* Mějme úplný vektorový prostor V nad lineárně uspořádaným tělesem F. Z poznámky 3.85.a víme, že prostor V je archimedovský, takže i těleso F je archimedovské. Dle věty 3.67 je těleso F izomorfní s nějakým podtělesem tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$.

Nadto platí, že když V je archimedovský prostor, potom grupa V je izomorfní s nějakou podgrupou aditivní grupy tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$. (Toto tvrzení zde uvádíme bez důkazu.) Odtud plyne, že když V je úplný prostor, potom grupa V je izomorfní s celou aditivní grupou tělesa $\mathbb{R}$. (!)

3.87.b. *Důkaz.* Dokážeme první tvrzení. Z předcházející věty 3.85 plyne, že těleso F je archimedovské. Věta 3.67 pak dává, že těleso $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ je izomorfní s tělesem $(F', +', -', \cdot', ^{-1'}, 0', 1', \leq')$, kde F' je podtěleso tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$, dále $0'$ a $1'$ jsou po řadě reálná čísla nula a jedna a $+'$, „$-'$“, „$\cdot'$“, „$^{-1'}$“ a „$\leq'$“ jsou restrikce po řadě standardní operace sčítání, opačné hodnoty, násobení, převrácené hodnoty a relace uspořádání, které jsou zavedeny na množině reálných čísel $\mathbb{R}$, na množinu F'. Protože těleso F je úplné, těleso F' je rovněž úplné. Je třeba dokázat, že $F' = \mathbb{R}$.

Pro spor předpokládejme, že existuje $\hat{\lambda} \in \mathbb{R} \setminus F'$ a uvažujme množinu $M = \{\, \lambda \in F';\ \lambda <' \hat{\lambda} \,\}$. Je zřejmé, že ve standardním uspořádání tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ množina M má supremum a platí $\sup M = \hat{\lambda}$. Stačí však připomenout, že těleso F' i těleso $\mathbb{R}$ ale obsahují společné prvotěleso P, které je izomorfní s lineárně uspořádaným tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$ se standardním uspořádáním, viz část II. tvrzení 3.54. Z toho vyplývá, že neprázdná a shora omezená množina M v tělese F' nemá supremum, což je spor s úplností tělesa F' resp. F. Těleso F je proto izomorfní s tělesem $\mathbb{R}$. □

3.88. V další části tohoto paragrafu se budeme věnovat lineárně uspořádaným vektorovým prostorům nad úplným tělesem s lineárním uspořádáním. Vzhledem k předcházející větě 3.87 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že jde o těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním. V další části tohoto paragrafu se tedy budeme věnovat reálným lineárně uspořádaným vektorovým prostorům neboli lineárně uspořádaným vektorovým prostorům nad tělesem $\mathbb{R}$.

Uvažujme napřed lineárně uspořádané těleso racionálních čísel $\mathbb{Q}$, které není úplné. Příklady 3.16.a a 3.16.b ukázaly, že na různých lineárně uspořádaných vektorových prostorech nad tělesem $\mathbb{Q}$ lze očekávat značné „množství“ různých typů lineárních uspořádání. (Kromě uvedených příkladů 3.16.a a 3.16.b lze sestavit také racionální vektorový prostor s lexikografickým uspořádáním. Rovněž těleso hyperreálných čísel, viz odstavec 3.79 a příklad 3.80, lze chápat jako lineárně uspořádaný vektorový prostor nad tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$.)

Nyní nad úplným tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním uvažujme jakýkoliv lineárně uspořádaný vektorový prostor V. Po předchozích příkladech by se mohlo zdát, že také na vektorovém prostoru V by bylo možné očekávat „celou řadu“ různých typů lineárních uspořádání. Ukážeme, možná překvapivě, že tomu tak není: Jestliže V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad úplným tělesem a dimenze prostoru V je konečná, potom uspořádání prostoru V už je nutně lexikografické. (Viz větu 3.107 níže. Viz též před ní uvedený odstavec 3.106.)

Abychom se lexikografickým uspořádáním mohli zabývat obšírněji, uvedeme jeho definici. S lexikografickým uspořádáním jsme se setkali už v úvodní kapitole této práce, viz též příklad 3.17, avšak zavedli jsme jej jen v případě konečněrozměrného prostoru. V následující definici 3.89 se pokusíme zavést pojem lexikografického uspořádání obecněji. (Pro jiný způsob zavedení lexikografického uspořádání viz poznámku 3.108.)

3.89. Definice. Lexikografické uspořádání. Mějme lineárně uspořádaný vektorový prostor $(V, +, -, 0, \preceq)$ nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. (Dimenze vektorového prostoru V může být i nekonečná.) Řekneme, že uspořádání „$\preceq$“ vektorového prostoru V je *lexikografické* právě tehdy, když prostor V je buďto nulový, anebo V je nenulový ale existuje jeho báze B splňující následující podmínku:

Z poznámky 1.72 víme, že existují (lineární) zobrazení $\lambda_v \colon V \to F$ pro $v \in B$ tak, že pro každý vektor $u \in V$ máme $u = \sum_{v \in B} \big(\lambda_v(u)\big) * v$. Nyní zvolme nenulový vektor $u \in V$, takže $u \neq 0$. Uvažujme množinu $M_u = \{\, v \in B\,;\ \lambda_v(u) \neq 0 \,\}$ a najděme její prvek $v_u \in M_u$ tak, aby pro každé $v \in M_u$ platilo $v \preceq v_u$. Požadujeme, aby platilo $u \succ 0$ právě tehdy, když $\lambda_{v_u}(u) > 0$.

Uvedenou podmínku lze ekvivalentně formulovat takto: Ať $u \in V$ je zcela libovolný vektor. Potom vektor u je kladný, $u \succ 0$, právě tehdy, když existuje vektor $v_u \in B$ takový, že $\lambda_{v_u}(u) > 0$ a pro každý další vektor $v \in B$ splňující $v \succ v_u$ už platí $\lambda_v(u) = 0$, formálně

$$u \succ 0 \iff \exists v_u \in B\colon \big(\lambda_{v_u}(u) > 0 \ \wedge\ \forall v \in B\colon\ v \succ v_u \ \Rightarrow\ \lambda_v(u) = 0\big)\,. \tag{1}$$

Je-li uspořádání „$\preceq$“ vektorového prostoru V lexikografické, říkáme také, že „relace ‚$\preceq$‘ uspořádává vektorový prostor V lexikograficky“ anebo říkáme jen stručně, že „V je vektorový prostor s lexikografickým uspořádáním“ nebo že „V je lexikograficky uspořádaný vektorový prostor“. Báze B vektorového prostoru V, která je prázdná anebo je neprázdná a splňuje výše uvedenou podmínku (1) pro každé $u \in V$, pak dosvědčuje, že uspořádání „$\preceq$“ vektorového prostoru V je lexikografické (nebo že V je prostor s lexikografickým uspořádáním apod.)

Povšimněme si, že když báze B dosvědčuje, že uspořádání „$\preceq$“ vektorového prostoru V je lexikografické, potom všechny prvky báze B jsou kladné. (Pro $u \in B$ máme $\lambda_u(u) = 1 > 0$, zatímco pro všechna ostatní $v \in B$ splňující $v \neq u$ máme $\lambda_v(u) = 0$. Vzhledem k podmínce (1) je nutně $u \succ 0$.)

3.90. Příklad. Vraťme se k úvodní kapitole této práce resp. k příkladu 3.17. Ať F je těleso reálných čísel, $F = \mathbb{R}$, se standardním uspořádáním, dále N budiž přirozené číslo a nakonec nechť V je prostor $V = \mathbb{R}^N$ s lexikografickým uspořádáním dle příkladu 3.17. Bází B, která dosvědčuje, že $\mathbb{R}^N$ je lexikograficky uspořádaný vektorový prostor, je například (kanonická) báze $B = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_N\}$, kde $\boldsymbol{e}_j$ je standardní vektor mající jedničku na j-tém místě a nuly jinde pro $j = 1, \dots, N$, viz též definici 1.57.

3.91. Budiž dán lineárně uspořádaný vektorový prostor $(V, +, -, 0, \preceq)$ nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Připomeňme, že v definici 3.63 jsme na vektorovém prostoru V zavedli relaci „$\prec\!\!\prec$“, kterou jsme nazvali „být nekonečně menší než“. Zopakujme, že pro každé $u, v \in V$ platí, že vektor v je nekonečně větší než vektor u, píšeme $v \succ\!\!\succ u$, tehdy a jen tehdy, když vektor u je nekonečně menší než vektor v, píšeme $u \prec\!\!\prec v$, právě tehdy, když pro všechna $\lambda \in F^+$ máme $\lambda * u \prec v$.

Dále z definice 3.63 víme, že zavedená relace „$\prec\!\!\prec$“ nosnou množinu vektorového prostoru V slabě uspořádává. Na nosné množině prostoru V proto můžeme zavést relaci ekvivalence „$\approx$“ tak, že pro každé $u, v \in V$ položíme $u \approx v$ právě tehdy, když neplatí ani $u \prec\!\!\prec v$ ani $u \succ\!\!\succ v$. (Viz též definici 3.57.) To provedeme v následující definici 3.92. V navazující poznámce 3.94 pak uvedeme některé další vlastnosti relace „$\prec\!\!\prec$“, jakož i některé vlastnosti relace „$\approx$“.

3.92. Definice. Relace „$\approx$“ – dodatek k relaci „$\prec\!\!\prec$“ tj. „být nekonečně menší než“. Nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor s uspořádáním „$\preceq$“ nad lineárně uspořádaným tělesem F s uspořádáním „$\leq$“. Znak „$\prec\!\!\prec$“ ať označuje relaci „být nekonečně menší než“, kterou jsme na vektorovém prostoru V zavedli definicí 3.63. Na nosné množině vektorového prostoru V zaveďme relaci „$\approx$“ tím, že pro každé $u, v \in V$ položíme $u \approx v$ právě tehdy, když $\neg(u \prec\!\!\prec v)$ a současně $\neg(u \succ\!\!\succ v)$, tj. právě tehdy, když neplatí ani $u \prec\!\!\prec v$ ani $u \succ\!\!\succ v$. (Pro uvedenou relaci „$\approx$“ žádný název nezavádíme. Snad „vektory u a v být řádově srovnatelné“? Nebo možná lépe „vektory u a v být ve slabé rovnováze“?)

Protože relace „$\prec\!\!\prec$“ je relací slabého uspořádání na množině V, právě zavedená relace „$\approx$“ je relací ekvivalence na množině V. Množinu V tudíž zavedenou relací ekvivalence „$\approx$“ můžeme faktorizovat a na faktorové množině $V/\!\approx$ můžeme zavést relaci „$\prec\!\!\prec_\approx$“ tím, že pro každé $[u]_\approx, [v]_\approx \in V/\!\approx$, kde $u, v \in V$, položíme $[u]_\approx \prec\!\!\prec_\approx [v]_\approx$ právě tehdy, když $u \prec\!\!\prec v$. Podrobněji viz definici 3.57, kde jsou uvedeny také základní vlastnosti zavedených relací „$\approx$“ a „$\prec\!\!\prec_\approx$“ a vlastnosti relace „$\approx$“ ve vztahu k relaci „$\prec\!\!\prec$“.

3.93. Příklad. Opět, jako v příkladu 3.64, uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ s lexikografickým uspořádáním „$\preceq$“ nad lineárně uspořádaným tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním „$\leq$“. Nechť „$\approx$“ je odpovídající relace na $\mathbb{R}^2$, kterou jsme zavedli poslední definicí 3.92. Potom například $\binom{1}{1} \approx \binom{1}{3}$, ale také například $\binom{1}{1} \approx \binom{2}{9}$.

3.94. Poznámka. Další vlastnosti relace „$\prec\!\!\prec$“ tj. „být nekonečně menší než“. Další vlastnosti relace „$\approx$“. Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Znak „$\prec\!\!\prec$“ ať označuje relaci „být nekonečně menší než“, kterou jsme zavedli v definici 3.63, znak „$\approx$“ ať označuje relaci zavedenou předcházející definicí 3.92. Některé základní vlastnosti relace „$\prec\!\!\prec$“ jsme uvedli už v definici 3.63. S ostatními základními vlastnostmi relací „$\prec\!\!\prec$“ a „$\approx$“, které plynou z toho, že relace „$\prec\!\!\prec$“ je relací slabého uspořádání na množině V, se lze seznámit v definici 3.57. Na lineárně uspořádaném vektorovém prostoru ale relace „$\prec\!\!\prec$“ a „$\approx$“ mají ještě několik dalších zajímavých vlastností.

Ať jsou dány vektory $u, v, w \in V$. Jestliže $u, v \prec\!\!\prec w$, potom $u + v \prec\!\!\prec w$ a pro každé $\lambda \in F^+$, tedy $\lambda > 0$, platí $\lambda * u \prec\!\!\prec w$. Odtud plyne, že množina $\{\, u \in V\,;\ u \prec\!\!\prec w \,\} \cup \{0\}$ je (konvexní) kužel, viz definici 3.38, pro libovolnou volbu $w \in V$. Nadto, jestliže vektor $w \in V$ je kladný, $w \succ 0$, potom už $0 \in \{\, u \in V\,;\ u \prec\!\!\prec w \,\}$.

Obdobně, jestliže $u, v, w \in V$ a $u, v \succ\!\!\succ w$, potom $u + v \succ\!\!\succ w$ a pro libovolné $\lambda \in F^+$ platí $\lambda * u \succ\!\!\succ w$. Vidíme, že také množina $\{\, u \in V\,;\ u \succ\!\!\succ w \,\} \cup \{0\}$ je kužel pro každé $w \in V$, a když vektor $w \in V$ je záporný, $w \prec 0$, potom $0 \in \{\, u \in V\,;\ u \succ\!\!\succ w \,\}$.

Poznamenejme, že kužel $\{\, u \in V;\ u \prec\!\!\prec w \,\} \cup \{0\}$ je kuželem opačným ke kuželi $\{\, u \in \in V;\ u \succ\!\!\succ -w \,\} \cup \{0\}$ pro libovolné $w \in V$. Jejich průnikem tedy dostáváme podprostor prostoru V. Odtud plyne, že množina $\{\, u \in V\,;\ -w \prec\!\!\prec u \prec\!\!\prec w \,\}$ je podprostorem vektorového prostoru V pro libovolné kladné $w \in V^+$.

Pomocí výše uvedených závěrů už není žádný problém nahlédnout, že když vektory $u_1, v_1, u_2, v_2 \in V$ splňují $u_1 \prec\!\!\prec v_1$ a $u_2 \prec\!\!\prec v_2$, potom platí také $u_1 + u_2 \prec\!\!\prec v_1 + v_2$. Není ani těžké nahlédnout, že pro libovolné $u, v \in V$ platí $u \prec\!\!\prec v$ právě tehdy, když pro všechna kladná $\lambda, \mu \in F^+$ je $\lambda * u \prec\!\!\prec \mu * v$. Odtud pro všechna $u, v \in V$ máme $u \prec\!\!\prec v$ právě tehdy, když $\lambda * u \prec\!\!\prec \lambda * v$ pro každé kladné $\lambda \in F^+$. Za pozornost rovněž stojí, že pro libovolné $u, v \in V$ je $u \prec\!\!\prec v$ tehdy a jen tehdy, když $-u \succ\!\!\succ -v$. Připomeneme-li navíc výsledky z definice 3.63, můžeme shrnout, že když vektory $u, v \in V$ jsou zvoleny libovolně, potom následujících devět výroků je ekvivalentních: (1) $u \prec\!\!\prec v$, dále (2) $\lambda * u \prec v$ pro každé $\lambda \in F^+$, obdobně (3) $u \prec \lambda * v$ pro každé $\lambda \in F^+$, k tomu (4) $\lambda * u \prec \mu * v$ pro všechna $\lambda, \mu \in F^+$, dále (5) $\lambda * u \prec\!\!\prec v$ pro každé $\lambda \in F^+$, obdobně (6) $u \prec\!\!\prec \lambda * v$ pro každé $\lambda \in F^+$, k tomu (7) $\lambda * u \prec\!\!\prec \mu * v$ pro všechna $\lambda, \mu \in F^+$, nadto (8) $\lambda * u \prec\!\!\prec \lambda * v$ pro libovolné $\lambda \in F^+$, konečně (9) $-u \succ\!\!\succ -v$.

Zmiňme ještě jedno užitečné pozorování. Mějme dva kladné vektory $u, v \in V^+$ a předpokládejme, že $u \prec\!\prec v$. Potom vztah $\lambda * u \prec v$ platí dokonce pro každé $\lambda \in F$. (Jestliže $\lambda > 0$, potom zřejmě $\lambda * u \prec v$. Jestliže $\lambda \leq 0$, pak $\lambda * u \preceq 0$, ovšem $0 \prec v$, takže opět $\lambda * u \prec v$.) Nyní už je snadné nahlédnout, že když $u, v \in V^+$ a $u \prec\!\prec v$, potom $0 \prec (\lambda * u) + v$ pro každé $\lambda \in F$ a k tomu $0 \prec (\lambda * u) + (\mu * v)$ pro libovolné $\lambda \in F$ a $\mu \in F^+$.

Přejděme k relaci „$\approx$". Mějme dva vektory $u, v \in V$ a předpokládejme, že $u \approx v$. Potom oba vektory u a v mají stejné znaménko, přesněji, buď jsou oba kladné, $u, v \succ 0$, anebo jsou oba nulové, $u, v = 0$, anebo jsou oba záporné, $u, v \prec 0$. (Kdyby $u \preceq 0$ a $0 \prec v$ nebo $u \prec 0$ a $0 \preceq v$, potom $u \prec\!\prec v$, jak jsme poznamenali už v definici 3.63. Obdobně, kdyby $u \succeq 0$ a $0 \succ v$ nebo $u \succ 0$ a $0 \succeq v$, potom $u \succ\!\succ v$.)

Ať $u, v, w \in V$ a předpokládejme, že $u, v \approx w$. S použitím předcházejícího tvrzení, že vektory u, v a w mají stejné znaménko, snadno nahlédneme, že platí $u + v \approx w$ a že pro každý kladný skalár $\lambda \in F^+$ platí také $\lambda * u \approx w$. To znamená, že když k ekvivalenční třídě $[w]_\approx = \{\, u \in V \,;\, u \approx w \,\}$ přidáme také počátek 0 prostoru V, opět dostáváme kužel: množina $[w]_\approx \cup \{0\}$ je kužel pro každé $w \in V$ (a kužel $[-w]_\approx \cup \{0\}$ je k němu opačný). Dodejme, že $0 \in [w]_\approx$ právě tehdy, když $w = 0$, ekvivalentně $[w]_\approx = \{0\}$.

Zvolme dva vektory $u, v \in V$. Pomocí výše uvedeného bez potíží nahlédneme, že $u \approx v$ právě tehdy, když $\lambda * u \approx \mu * v$ pro libovolné $\lambda, \mu \in F^+$. Obdobně lze uvidět, že když platí $u \approx v$ potom $\lambda * u \approx \lambda * v$ pro libovolné $\lambda \in F$. Nadto, jestliže skalár $\lambda \in F$ je nenulový, $\lambda \neq 0$, a $\lambda * u \approx \lambda * v$, potom zpátky $u \approx v$ (stačí násobit inverzí λ^{-1}). Speciální volba $\lambda = -1$ dává, že $u \approx v$ právě tehdy, když $-u \approx -v$. Můžeme tedy shrnout, že pro libovolné $u, v \in V$ je následujících pět výroků ekvivalentních: (1) $u \approx v$, dále (2) $\lambda * u \approx v$ pro libovolné $\lambda \in F^+$, obdobně (3) $u \approx \lambda * v$ pro libovolné $\lambda \in F^+$, k tomu (4) $\lambda * u \approx \mu * v$ pro všechna $\lambda, \mu \in F^+$, navíc (5) $\lambda * u \approx \lambda * v$ pro kterékoliv $\lambda \in F^*$.

Není těžké ověřit, že když vektory $u_1, v_1, u_2, v_2 \in V$ mají stejné znaménko (buď $u_1, v_1, u_2, v_2 \succ 0$, anebo $u_1, v_1, u_2, v_2 = 0$, anebo $u_1, v_1, u_2, v_2 \prec 0$) a současně platí $u_1 \approx v_1$ a $u_2 \approx v_2$, potom $u_1 + u_2 \approx v_1 + v_2$.

Nakonec může být užitečné poznamenat, že pomocí relací „$\approx$" a „$\prec\!\prec$" lze sestavit ještě jeden kužel: jestliže $w \in V$ je zvoleno libovolně, pak množina $K = \{\, u \in V \,;\, u \prec\!\prec w \vee u \approx w \,\} \cup \{0\}$ je kužel. (Je-li $u \in K$ a $\lambda \in F^+$, pak zajisté $\lambda * u \in K$, protože každá z množin $\{\, u \in V \,;\, u \prec\!\prec w \,\}$, $\{\, u \in V \,;\, u \approx w \,\}$ a $\{0\}$ je kužel. Zbývá ověřit, že $u + v \in K$, kdykoliv $u, v \in K$. To je zřejmé, jestliže $u, v \prec\!\prec w$ nebo $u, v \approx w$ nebo když $u = 0$ či $v = 0$. Předpokládejme tedy, že $u \prec\!\prec w$ a $v \approx w$. (Případem, kdy $u \approx w$ a $v \prec\!\prec w$ se vzhledem ke komutativitě grupy V zabývat nemusíme.) Jestliže $u + v \prec\!\prec w$, potom jistě $u + v \in K$. Proto předpokládejme, že vztah $u + v \prec\!\prec w$ neplatí, existuje $\lambda \in F^+$ tak, že $\lambda * (u + v) \succeq w$. Hledáme ještě $\lambda' \in F^+$ tak, aby $\lambda' * (u + v) \preceq w$, aby $u + v \approx w$, což by zaručilo $u + v \in K$. Víme ale, že $\mu * u \prec w$ pro libovolné $\mu \in F^+$ a že existuje $\mu' \in F^+$ takové, že $\mu' * v \preceq w$ (ježto $v \approx w$). Položme $\lambda' = \frac{1}{2} \cdot \mu'$, kde $\frac{1}{2} = (1+1)^{-1}$, přičemž 1 je jednotka tělesa F. Pak zřejmě $\mu' * u \prec w$, takže $\lambda' * u \prec \frac{1}{2} * w$, k tomu $\lambda' * v \preceq \frac{1}{2} * w$. Odtud $\lambda' * (u + v) \preceq w$.) Kuželem opačným ke kuželi K je kužel $-K = \{\, u \in V \,;\, u \succ\!\succ -w \ \vee\ u \approx -w \,\} \cup \{0\}$. Průnikem kuželů K a $-K$ dostáváme podprostor. Vidíme, že množina $V' = [-w]_\approx \cup \{\, u \in V \,;\, -w \prec\!\prec u \prec\!\prec w \,\} \cup [w]_\approx$ je podprostorem vektorového prostoru V pro libovolné kladné $w \in V^+$.

3.95. Pro relaci „$\approx$" na lineárně uspořádaném vektorovém prostoru V platí také následující důležitá věta 3.96.

3.96. Věta. *Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$". Znak „$\approx$" ať označuje relaci zavedenou definicí 3.92.*

Zvolme libovolnou množinu $B \subseteq V^+$ kladných vektorů tak, aby pro každé dva vektory $u, v \in B$ splňující $u \neq v$ platilo $\neg(u \approx v)$, tj., neplatilo $u \approx v$. Potom množina

B je lineárně nezávislá.

3.96.a. *Poznámka.* Další dvě ekvivalentní formulace podmínky uvedené věty 3.96, že pro každé $u, v \in B$ splňující $u \neq v$ má platit $\neg(u \approx v)$, lze nalézt v následujícím tvrzení 3.97.

3.96.b. *Důkaz.* Zvolme nenulové přirozené číslo m, dále zvolme m navzájem různých vektorů $u_1, \ldots, u_m \in B$ a nakonec m nenulových skalárů $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$, aby $\lambda_i \neq 0$ pro $i = 1, \ldots, m$. Pro spor předpokládejme, že $(\lambda_1 * u_1) + \cdots + (\lambda_m * u_m) = 0$. Povšimněme si, že přirozené číslo m je větší než jedna. (Kdyby $m = 1$, bylo by $\lambda_1 * u_1 \neq 0$, protože $u_1 \succ 0$ a $\lambda_1 \neq 0$.) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že vektory $u_1, \ldots$ $\ldots, u_m$ už jsou uspořádány podle velikosti, $u_1 \succ \cdots \succ u_m$. (Jinak vektory $u_1, \ldots, u_m$ a jim odpovídající skaláry $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ přečíslujeme.) Je tedy $u_1 \neq u_2, \ldots, u_{m-1} \neq u_m$, následně $\neg(u_1 \approx u_2), \ldots, \neg(u_{m-1} \approx u_m)$. Proto nutně platí $u_1 \succ\!\succ \cdots \succ\!\succ u_m$. Dále, jelikož $\lambda_1 \neq 0$, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\lambda_1 = (m-1) \times 1$, kde „$\times$" označuje celistvý násobek a 1 je po řadě přirozené resp. celé číslo jedna a jednotka tělesa F. (Pro $i = 1, \ldots, m$ položíme $\lambda_i := \big((m-1) \times 1\big) \cdot \lambda_1^{-1} \cdot \lambda_i$. Poznamenejme, že $(m-1) \times 1 \neq 0$, protože přirozené resp. kladné celé číslo m je větší než jedna.) Pak ovšem $(\lambda_1 * u_1) + (\lambda_2 * u_2) + \cdots + (\lambda_m * u_m) = \big(u_1 + (\lambda_2 * u_2)\big) + \cdots + \big(u_1 + (\lambda_m * u_m)\big) \succ 0$. (Protože pro $i = 2, \ldots, m$ máme $u_1 \succ\!\succ u_i$, všechny členy uvedeného součtu jsou dle předcházející poznámky 3.94 kladné, $0 \prec (\lambda_i * u_i) + u_1$ pro $i = 2, \ldots, m$.) Tím jsme dostali spor s předpokladem, že uvedený součet je nulový. Množina B je tudíž lineárně nezávislá. □

3.97. Tvrzení. *Nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor s uspořádáním „$\preceq$" nad lineárně uspořádaným tělesem F s uspořádáním „$\leq$". Znak „$\prec\!\prec$" ať označuje relaci „být nekonečně menší než" zavedenou definicí 3.63 a znak „$\approx$" ať označuje příslušnou relaci zavedenou definicí 3.92.*

Zvolme libovolnou podmnožinu $B \subseteq V$ vektorového prostoru V. Potom následující tři výroky jsou ekvivalentní: (1) Relace „$\prec\!\prec$" je na množině B trichotomická, takže pro každé $u, v \in B$ máme buď $u \prec\!\prec v$, anebo $u = v$, anebo $u \succ\!\succ v$. (2) Pro každé $u, v \in B$ platí $u \prec v$ právě tehdy, když $u \prec\!\prec v$. (3) Pro kterékoliv $u, v \in B$ máme $u = v$ tehdy a jen tehdy, když $u \approx v$.

3.97.a. *Důkaz.* Předně, implikace „$\Leftarrow$" v rámci výroku (2) a implikace „$\Rightarrow$" v rámci výroku (3) jsou zcela triviální a v dalším se jimi nebudeme zabývat. Odůvodníme implikaci „(1) $\Leftarrow$ (2)", která je zřejmá. Pro libovolné $u, v \in B$ totiž máme buď $u \prec v$, anebo $u = v$, anebo $u \succ v$. Jestliže $u \prec v$ nebo $u \succ v$, potom po řadě $u \prec\!\prec v$ nebo $u \succ\!\succ v$, takže relace „$\prec\!\prec$" je na množině B trichotomická. Také implikace „(1) $\Rightarrow$ (2)" je snadná. Mějme $u, v \in B$ a předpokládejme, že $u \prec v$. Platí ovšem buď $u \prec\!\prec v$, anebo $u = v$, anebo $u \succ\!\succ v$. Rovnost $u = v$ určitě nenastává, ani vztah $u \succ\!\succ v$ nemůže platit (bylo by $u \succ v$). Je tedy $u \prec\!\prec v$. Zbývající implikace „(1) $\Rightarrow$ (3)" i „(1) $\Leftarrow$ (3)" se dokáží užitím jednoho společného argumentu. Jestliže $u \neq v$, potom $u \prec\!\prec v$ nebo $u \succ\!\succ v$, ekvivalentně $\neg(u \approx v)$, tj., neplatí $u \approx v$. □

3.98. Následující věta 3.99 podá několik charakteristik lexikografického uspořádání. Věta 3.99 navíc ukáže, že lexikografické uspořádání je poměrně úzce spojeno s relací „$\prec\!\prec$", kterou jsme zavedli už v definici 3.63.

3.99. Věta. *Mějme lineárně uspořádaný vektorový prostor $(V, +, -, 0, \preceq)$ nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$". Zvolme libovolnou bázi B vektorového prostoru V. Potom následující čtyři výroky jsou ekvivalentní: (1) Báze B dosvědčuje, že uspořádání vektorového prostoru V je lexikografické, tj., pro každé $u \in V$ platí*

$$u \succ 0 \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad \exists v_u \in B,\ \lambda_{v_u}(u) > 0\ \forall v \in B\colon\ v \succ v_u \ \Rightarrow\ \lambda_v(u) = 0\,.$$

(2) Všechny prvky báze B jsou kladné, $B \subseteq V^+$, a pro každé $u, v \in B$ platí $u \prec v$ právě tehdy, když $u \prec\!\!\prec v$. (3) Všechny prvky báze B jsou kladné, $B \subseteq V^+$, a pro $u, v \in B$ platí $u = v$ právě tehdy, když $u \approx v$. (4) Všechny prvky báze B jsou kladné, $B \subseteq V^+$, a relace „$\prec\!\!\prec$" je na bázi B trichotomická, takže pro kterékoliv $u, v \in B$ máme buď $u \prec\!\!\prec v$, anebo $u = v$, anebo $u \succ\!\!\succ v$.

Zobrazení $\lambda_v: V \to F$, kde $v \in B$, použitá ve výroku (1) jsou sestrojena podle poznámky 1.72. Relace „$\prec\!\!\prec$" a „$\succ\!\!\succ$" použité ve výrocích (2) a (4) byly zavedeny definicí 3.63. Relace „$\approx$" použitá ve výroku (3) byla zavedena definicí 3.92.

3.99.a. *Důkaz.* Platnost ekvivalence „(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4)" plyne z předcházejícího tvrzení 3.97. Dokážeme platnost ekvivalence „(1) $\Leftrightarrow$ (2)".

Začneme důkazem implikace „(1) $\Rightarrow$ (2)". Předně, kladnost prvků báze B je zřejmá (viz definici 3.89). Rovněž platnost implikace „$\Leftarrow$" v rámci výroku (2) je zřejmá. Zvolme tedy vektory $u, v \in B$ splňující $u \prec v$ a ptejme se, zda $u \prec\!\!\prec v$. Zvolme libovolné kladné $\lambda \in F^+$. Položme $\tilde{u} = v - (\lambda * u)$. Zřejmě je $\lambda_v(\tilde{u}) = 1 > 0$, a jestliže $\tilde{v} \in B$ je zvoleno tak, aby $\tilde{v} \succ v$, potom $\lambda_{\tilde{v}}(\tilde{u}) = 0$. Z předpokládaného výroku (1) plyne, že $\tilde{u} \succ 0$, takže $\lambda * u \prec v$. Protože $\lambda \in F^+$ mohlo být zvoleno libovolně, máme $u \prec\!\!\prec v$.

Nyní dokážeme implikaci „(1) $\Leftarrow$ (2)". Budiž dán libovolný vektor $u \in V$. Jestliže $u = 0$, potom platnost ekvivalence ve výroku (1) je zřejmá. (Ani jedna strana zmíněné ekvivalence neplatí, takže ekvivalence je pravdivá.) Proto nadále předpokládejme, že vektor u je nenulový, $u \neq 0$. Pro vhodné nenulové přirozené číslo m, pro vhodné vektory $u_1, \ldots, u_m \in B$ a pro vhodné skaláry $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$ tedy máme $u = (\lambda_1 * u_1) + \cdots \cdots + (\lambda_m * u_m)$. (Kdyby přirozené číslo m bylo nulové, bylo by $u = 0$.) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že skaláry $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ jsou nenulové, $\lambda_i \neq 0$ pro $i = 1, \ldots, m$, a že vektory $u_1, \ldots, u_m$ jsou navzájem různé. Následně bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že tyto vektory už jsou seřazeny podle velikosti, $u_1 \succ \cdots \succ u_m$. (Kdyby některý skalár byl nulový, potom jej i s odpovídajícím vektorem můžeme vynechat. Kdyby se některý vektor opakoval, můžeme jej vytknout a odpovídající skaláry sečíst. Kdyby vektory $u_1, \ldots, u_m$ nebyly seřazeny podle velikosti, stačí je a jim odpovídající skaláry $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ jen vhodně přečíslovat.) Podržme tyto předpoklady na chvíli v paměti, jelikož je použijeme v důkazu obou implikací „$\Leftarrow$" i „$\Rightarrow$", z nichž výrok (1) sestává.

Napřed dokážeme implikaci „$\Leftarrow$" výroku (1). Pro vektor $v_u = u_1$ tedy máme $\lambda_{v_u}(u) = \lambda_1 > 0$, jak z předpokladu dokazované implikace „$\Leftarrow$" vyplývá. Jestliže přirozené číslo m je rovno jedné, $m = 1$, potom zřejmě $u = \lambda_1 * u_1 \succ 0$, protože $u_1 \succ 0$. Předpokládejme proto, že přirozené resp. kladné celé číslo m je větší než jedna, $m > 1$. Položme $\hat{\lambda}_1 = ((m-1) \times 1)^{-1} \cdot \lambda_1$, kde uvnitř (vnější) závorky stojí celistvý násobek jednotky tělesa F. Je zřejmé, že $\hat{\lambda}_1 > 0$. Dále zřejmě máme $u = (\lambda_1 * u_1) + (\lambda_2 * u_2) + \cdots \cdots + (\lambda_m * u_m) = \big((\hat{\lambda}_1 * u_1) + (\lambda_2 * u_2)\big) + \cdots + \big((\hat{\lambda}_1 * u_1) + (\lambda_m * u_m)\big)$. Máme ovšem $u_1 \succ u_i$, tudíž $u_1 \succ\!\!\succ u_i$ pro $i = 2, \ldots, m$ dle předpokládaného výroku (2). Nadto je $u_i \succ 0$ pro $i = 1, \ldots, m$ (jelikož $B \subseteq V^+$). Všechny členy v uvedeném součtu jsou proto kladné, $(\hat{\lambda}_1 * u_1) + (\lambda_i * u_i) \succ 0$ pro $i = 2, \ldots, m$ (viz poznámku 3.94). Tudíž $u = \big((\hat{\lambda}_1 * u_1) + (\lambda_2 * u_2)\big) + \cdots + \big((\hat{\lambda}_1 * u_1) + (\lambda_m * u_m)\big) \succ 0$, jak jsme měli dokázat.

Zbývá dokázat implikaci „$\Rightarrow$" výroku (1). Důkaz provedeme nepřímo. Předpokládejme, že ke každému $v_u \in B$ zvolenému tak, aby $\lambda_{v_u}(u) > 0$, existuje $v \in B$ takové, že $v \succ v_u$ a $\lambda_v(u) \neq 0$. Vzhledem k výše uvedeným předpokladům máme $\lambda_1 \leq 0$, takže – jelikož $\lambda_1 \neq 0$ – máme $\lambda_1 < 0$. (Kdyby bylo $\lambda_{u_1}(u) = \lambda_1 > 0$, muselo by existovat $v \in B$ tak, aby $v \succ u_1$ a $\lambda_v(u) \neq 0$. Takové v ovšem neexistuje, protože $\lambda_v(u) \neq 0$ jen pro $v = u_1, \ldots, u_m$ a k tomu pro $v = u_1, \ldots, u_m$ máme $u_1 \succeq u_i$.) Uvažujme vektor $-u = (-\lambda_1 * u_1) + \cdots + (-\lambda_m * u_m)$. Pro vektor $v_{-u} = u_1$ je zřejmě $\lambda_{v_{-u}}(u) = -\lambda_1 > 0$, a když $v \in B$ splňuje $v \succ u_1$, potom jistě $\lambda_v(-u) = 0$. Dle již dokázané implikace „$\Leftarrow$" platí $-u \succ 0$. Ekvivalentně platí $u \prec 0$, tudíž $u \preceq 0$. Tím je důkaz završen. □

3.100. Poznámka. Jak poznáme, že uspořádání vektorového prostoru je lexikografické? Pomocí už dokázaných vět 3.96 a 3.99 můžeme „poměrně snadno“ rozhodnout, zda uspořádání daného lineárně uspořádaného vektorového prostoru je lexikografické. Budiž dán lineárně uspořádaný vektorový prostor V s uspořádáním „$\preceq$“. Ať znak „$\approx$“ označuje relaci ekvivalence na V, kterou jsme zavedli definicí 3.92. Uvažujme množinu V^+ všech kladných vektorů prostoru V a faktorizujme ji uvedenou relací „$\approx$“. Máme tedy faktorovou množinu $V^+/\approx$. Z každé ekvivalenční třídy obsažené ve faktorové množině $V^+/\approx$ vyberme po jednom prvku a z těchto prvků vytvořme množinu B. (Používáme axiom výběru. Alternativně lze použít Zornovo lemma 1.31: Množina $B \subseteq V^+$ je maximální taková, že pro každé $u, v \in B$ splňující $u \neq v$ platí $u \not\approx v$. Maximalita množiny B se uvažuje vzhledem k uspořádání inkluzí, viz příklad 1.29.) Věta 3.96 říká, že množina B je lineárně nezávislá. Dále, vzhledem ke způsobu zavedení množiny B, je zřejmé, že pro každé dva různé vektory $u, v \in B$, splňující $u \neq v$, platí $\neg(u \approx v)$. Tudíž, jestliže takto získaná množina B je báze vektorového prostoru V, tedy $\operatorname{Lin} B = V$, potom tato báze B dle poslední věty 3.99 dosvědčuje, že uspořádání vektorového prostoru V je lexikografické. Samozřejmě se může stát, že získaná množina B ještě není báze prostoru V, neboli $\operatorname{Lin} B \neq V$. Potom uspořádání vektorového prostoru V není lexikografické. (Kdyby uspořádání prostoru V bylo lexikografické, dle definice 3.89 a poslední věty 3.99 by musela existovat báze $B' \subseteq V^+$ tak, aby pro každé $u, v \in B'$ splňující $u \neq v$ platilo $\neg(u \approx v)$. Množina B' by tedy byla množinou prvků vybraných ze všech ekvivalenčních tříd obsažených v množině $V^+/\approx$ – z každé ekvivalenční třídy by byl vybrán právě jeden prvek.)

3.101. V následující definici 3.102 na nosné množině lineárně uspořádaného vektorového prostoru V zavedeme další relaci ekvivalence. Pak ukážeme vztah této nové relace k už zavedené relaci „$\approx$“.

3.102. Definice. Relace „$\sim$“ tj. „být v rovnováze“. Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Na množině V nyní zavedeme binární relaci „$\sim$“ rovnováhy vektorů. Relaci „$\sim$“ nejprve zavedeme jen na množině V^+ všech kladných vektorů. Řekneme, že dva kladné vektory $u, v \in V^+$, tedy $u, v \succ 0$, jsou *v rovnováze* a píšeme $u \sim v$ právě tehdy, když pro každý kladný skalár $\lambda \in F^+$, splňující $\lambda > 0$, platí $(1 + \lambda) * u \succ v$ a $u \prec (1 + \lambda) * v$. Nyní relaci „$\sim$“ zavedeme i na množině V^- všech záporných vektorů. Řekneme, že dva záporné vektory $u, v \in V^-$, tedy $u, v \prec 0$, jsou *v rovnováze* a píšeme $u \sim v$ právě tehdy, když pro každý kladný skalár $\lambda \in F^+$, splňující $\lambda > 0$, platí $(1 + \lambda) * u \prec v$ a $u \succ (1 + \lambda) * v$. Nakonec relaci „$\sim$“ zavedeme i na jednoprvkové množině $\{0\}$ obsahující nulový vektor prostoru V tím, že položíme $0 \sim 0$, aby nulový vektor prostoru V byl v rovnováze (pouze) sám se sebou.

Z uvedené definice relace „$\sim$“ je ihned patrné, že pro vektory $u, v \in V$ platí $u \sim v$ právě tehdy, když $-u \sim -v$.

Vcelku snadno dokážeme, že zavedená relace „$\sim$“ je na množině kladných vektorů V^+ reflexivní a symetrická. (Když $u, v \in V^+$ jsou kladné vektory, $u, v \succ 0$, pak zajisté $(1 + \lambda) * u \succ u$ a $u \prec (1 + \lambda) * u$, a když navíc $(1 + \lambda) * u \succ v$ a $u \prec (1 + \lambda) * v$, potom zřejmě také $(1 + \lambda) * v \succ u$ a $v \prec (1 + \lambda) * u$, to vše pro libovolné kladné $\lambda \in F^+$.)

Důkaz tranzitivity relace „$\sim$“ na množině V^+ je trošku těžší. (Mějme tři kladné vektory $u, v, w \in V^+$, takže $u, v, w \succ 0$. Předpokládejme, že $u \sim v$ a že $v \sim w$. Chceme dokázat, že $u \sim w$. Víme tedy, že $(1 + \lambda) * u \succ v$ a $u \prec (1 + \lambda) * v$ a že $(1 + \lambda) * v \succ w$ a $v \prec (1 + \lambda) * w$, obojí pro libovolné kladné $\lambda \in F^+$. Chceme dokázat, že pro libovolné kladné $\mu \in F^+$ platí $(1 + \mu) * u \succ w$ a $u \prec (1 + \mu) * w$. Nechť tedy kladné $\mu \in F^+$ je dáno, máme $\mu > 0$. Najdeme kladné $\lambda \in F^+$, splňující $\lambda > 0$, aby $(1 + \lambda)^2 \leq (1 + \mu)$. Předně, jestliže $\mu \geq 3$, potom stačí volit $\lambda = 1$, přičemž pro stručnost jsme položili $2 = 1 + 1$ a $3 = 2 + 1$, kde 1 je jednotka tělesa F. (Máme totiž $(1 + \lambda)^2 = (1 + 1)^2 = 2^2 = 1 + 3 \leq 1 + \mu$.) A jestliže $\mu \leq 3$, přičemž $\mu > 0$, potom stačí volit $\lambda = \frac{1}{3} \cdot \mu$, kde $\frac{1}{3} = 3^{-1}$. (Zvolené λ splňuje vztahy $0 < \lambda$ a $\lambda \leq 1$, takže $\lambda^2 \leq \lambda$. Následně $(1+\lambda)^2 = 1 + (2 \cdot \lambda) + \lambda^2 \leq 1 + (3 \cdot \lambda) = 1 + \mu$.) Máme tedy kladný skalár λ tak, aby $(1+\lambda)^2 \leq (1+\mu)$. Nyní $(1+\lambda) * u \succ v$, takže $(1+\lambda)^2 * u \succ (1+\lambda) * v$, a také $(1+\lambda) * v \succ w$; protože máme $(1+\mu) * u \succeq (1+\lambda)^2 * u$ (jelikož $u \succ 0$), dostáváme $(1+\mu) * u \succ w$. Obdobně $u \prec (1+\lambda) * v$, dále $(1+\lambda) * v \prec (1+\lambda)^2 * w$, k tomu $(1+\lambda)^2 * w \preceq (1+\mu) * w$ (ježto $w \succ 0$), takže dostáváme $u \prec (1+\mu) * w$. Je tedy $u \sim w$.)

Jak jsme již výše uvedli, pro $u, v \in V$ platí $u \sim v$ právě tehdy, když $-u \sim -v$. Dále máme $0 \sim 0$, kde 0 je počátek prostoru V. Protože relace „$\sim$" je relací ekvivalence na množině V^+ všech kladných vektorů, snadno nyní odvodíme, že „$\sim$" je relací ekvivalence dokonce na celé množině V. Další vlastnosti zavedené relace „$\sim$" uvedeme v následující poznámce 3.104.

3.103. Příklad. Stále, jako už v příkladech 3.64 a 3.93, uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ s lexikografickým uspořádáním „$\preceq$" nad lineárně uspořádaným tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním „$\leq$". Nechť „$\approx$" a „$\sim$" jsou odpovídající relace na $\mathbb{R}^2$ zavedené definicemi po řadě 3.92 a 3.102. Potom například $\binom{1}{1} \sim \binom{1}{3}$. Dále je sice, například, $\binom{1}{1} \approx \binom{2}{9}$, ale vztah $\binom{1}{1} \sim \binom{2}{9}$ už neplatí. Na druhou stranu, vektor $\binom{1}{1}$ stačí vynásobit skalárem 2, abychom dostali platný vztah $\binom{2}{2} \sim \binom{2}{9}$.

3.104. Poznámka. Další vlastnosti relace „$\sim$" tj. „být v rovnováze". Ať $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$". K tomu ať „$\approx$" a „$\sim$" jsou odpovídající relace ekvivalence na množině V zavedené definicemi po řadě 3.92 a 3.102.

Poměrně lehce ověříme, že když dva vektory $u, v \in V$ jsou v rovnováze, $u \sim v$, potom platí $u \approx v$. Jak jsme v předcházejícím příkladu 3.103 viděli, uvedené tvrzení nemusí platit obráceně, jestliže pro $u, v \in V$ platí $u \approx v$, tak vztah $u \sim v$ platit nemusí. Předcházející příklad ale naznačil, že když $u \approx v$, potom může existovat kladný skalár $\lambda \in F^+$ takový, že $\lambda * u \sim v$. (Podrobněji viz následující větu 3.105.) Z uvedeného je snad patrné, proč jsme relaci „$\approx$" v definici 3.92 navrhovali nazvat (také) „být ve slabé rovnováze".

Na množině V^+ kladných vektorů prostoru V mezi relací „$\sim$" a relací „$\approx$" – resp. relací „$\prec\!\!\prec$", kterou jsme zavedli definicí 3.63 – platí ještě jeden vztah. Jestliže vektory $u, v \in V^+$ jsou v rovnováze, $u \sim v$, potom $u \succ\!\!\succ v - u$ a $u - v \prec\!\!\prec v$. (Pro každé $\lambda \in F^+$ máme $(1+\lambda) * u \succ v$, tudíž $\lambda * u \succ v - u$, rovněž $u \prec (1+\lambda) * v$, tedy $u - v \prec \lambda * v$.) Obdobný vztah mezi relací „$\sim$" a „$\approx$", resp. „$\prec\!\!\prec$", najdeme i na množině V^- všech záporných vektorů.

Dále mějme libovolné dva vektory $u, v \in V$ a předpokládejme $u \sim v$. Potom, jak je bez větších potíží možné ověřit, pro každé kladné $\lambda \in F^+$ platí $\lambda * u \sim \lambda * v$. Následně vidíme, že vztah $\lambda * u \sim \lambda * v$ platí dokonce pro libovolné $\lambda \in F$. Na druhou stranu, jestliže $\lambda * u \sim \lambda * v$ a skalár $\lambda \in F$ je nenulový, $\lambda \neq 0$, potom zpětně $u \sim v$. Lze tedy shrnout, že pro vektory $u, v \in V$ platí $u \sim v$ tehdy a jen tehdy, když pro všechna nenulová $\lambda \in F^*$ máme $\lambda * u \sim \lambda * v$. Speciální volba $\lambda = -1$ dává, že $u \sim v$ právě tehdy, když $-u \sim -v$, kde $u, v \in V$

Již jsme poznamenali, že když vektory $u, v \in V$ splňují $u \sim v$, potom $u \approx v$. Odtud (užitím poznámky 3.94) plyne, že vektory $u, v \in V$ musejí mít stejná znaménka, kdykoliv $u \sim v$.

Dodejme, že když vektory $u_1, v_1, u_2, v_2 \in V$ mají stejné znaménko (buď $u_1, v_1, u_2, v_2 \succ 0$, anebo $u_1, v_1, u_2, v_2 = 0$, anebo $u_1, v_1, u_2, v_2 \prec 0$) a zároveň $u_1 \sim v_1$ a $u_2 \sim v_2$, potom platí $u_1 + u_2 \sim v_1 + v_2$.

Povšimněme si, že tvrzení obdobná těm, která jsme v této poznámce 3.104 formulovali pro relaci „$\sim$", platí také pro relaci „$\approx$", viz poznámku 3.94.

3.105. Věta o vztahu mezi relací „$\approx$“ a „$\sim$“. *Nechť* $(V, +, -, 0, \preceq)$ *je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem* $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ *vzhledem k zobrazení „$*$“. K tomu ať „$\approx$“ a „$\sim$“ jsou odpovídající relace ekvivalence na množině* V *zavedené definicemi po řadě 3.92 a 3.102. Těleso* F *budiž úplné. Zvolme dva vektory* $u, v \in V$. *Potom* $u \approx v$ *právě tehdy, když existuje kladný skalár* $\lambda \in F^+$ *takový, že* $\lambda * u \sim v$.

3.105.a. *Poznámka.* Úplnost tělesa F je potřebná jen k důkazu implikace „$\Rightarrow$“. Implikace „$\Leftarrow$“ je triviální a platí i bez předpokladu úplnosti tělesa F. Z věty 3.87 víme, že úplné těleso F je izomorfní s tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním.

3.105.b. *Důkaz.* Jak jsme už poznamenali, implikace „$\Leftarrow$“ platí triviálně. Dokážeme implikaci „$\Rightarrow$“. Povšimněme si, že uvedené tvrzení je zřejmé, jestliže vektory u a v jsou nulové, $u, v = 0$ – stačí volit např. $\lambda = 1$. Bez újmy na obecnosti proto můžeme předpokládat, že vektory u a v jsou kladné, $u, v \in V^+$. (Případ $u, v = 0$ jsme už objasnili. Kdyby $u, v \in V^-$ a $u \approx v$, potom ekvivalentně $-u \approx -v$, načež bude existovat $\lambda \in F^+$ tak, že $-\lambda * u \sim -v$, ekvivalentně $\lambda * u \sim v$.) Ježto máme $u \approx v$, neplatí ani $u \prec\!\!\prec v$ ani $u \succ\!\!\succ v$, existují $\bar{\mu}, \bar{\nu} \in F^+$ tak, že $\bar{\mu} * u \succ v$ a $u \prec \bar{\nu} * v$, ekvivalentně $\bar{\nu}^{-1} * u \prec v$. (Předpoklad $u \approx v$ dává, že existují $\bar{\mu}, \bar{\nu} \in F^+$ tak, aby $\bar{\mu} * u \succeq v$ a $u \preceq \bar{\nu} * v$. Jestliže $\bar{\mu} * u = v$ nebo $u = \bar{\nu} * v$, pak stačí volit např. po řadě $\bar{\mu} := 2 \cdot \bar{\mu}$ nebo $\bar{\nu} := 2 \cdot \bar{\nu}$, abychom dostali po řadě $\bar{\mu} * u \succ v$ nebo $u \prec \bar{\nu} * v$, protože $u, v \succ 0$ a $\bar{\mu}, \bar{\nu} > 0$. V uvedených vztazích jsme položili $2 = 1 + 1$, kde 1 je jednotka tělesa F.) Vidíme, že množina $M = \{\, \mu \in F^+ \,;\, \mu * u \prec v \,\}$ je neprázdná i shora omezená. Protože těleso F je úplné, množina M má supremum. (Supremum se samozřejmě uvažuje vzhledem k množině F a uspořádání „$\leq$“.) Položme $\lambda = \sup M$. Chceme dokázat, že pro každé $\nu \in F^+$ platí $(1 + \nu) * (\lambda * u) \succ v$ a rovněž $\lambda * u \prec (1 + \nu) * v$.

Z definice suprema (definice 3.69) je jasné, že $\lambda > 0$ (protože $\lambda \geq \bar{\nu}^{-1} > 0$). Dále, jestliže pro skalár $\mu \in F^+$ platí $\mu < \lambda$, potom zřejmě $\mu \in M$, takže $\mu * u \prec v$. Na druhou stranu, jestliže skalár $\mu \in F^+$ splňuje $\mu > \lambda$, potom $\mu * u \succ v$. (Jistě $\mu \notin M$, tudíž $\mu * u \succeq v$. Kdyby však pro nějaké $\hat{\mu} \in F^+$ takové, že $\hat{\mu} > \lambda$, platilo $\hat{\mu} * u = v$, potom uvažme $\tilde{\mu} = \frac{1}{2} \cdot (\hat{\mu} + \lambda)$, kde $\frac{1}{2} = (1 + 1)^{-1}$ a 1 je jednotka tělesa F. Jistě je $\tilde{\mu} > \lambda$, takže $\tilde{\mu} \notin M$, načež $\tilde{\mu} * u \succeq v$. Stejně tak ovšem je $\hat{\mu} > \tilde{\mu}$, takže $v = \hat{\mu} * u \succ \tilde{\mu} * u$ (máme $u \succ 0$, nyní stačí použít tvrzení 3.11 ve spojení s poznámkou 3.14). Dostáváme $v \succ v$ – spor.)

Zvolme tedy libovolné kladné $\nu \in F^+$, takže $\nu > 0$. Pak pro $\mu = (1 + \nu) \cdot \lambda$ platí $\mu > \lambda$, tudíž $(1 + \nu) * (\lambda * u) \succ v$. Dále pro $\mu = (1 + \nu)^{-1} \cdot \lambda$ platí $\mu < \lambda$, takže $(1 + \nu)^{-1} * (\lambda * u) \prec v$, ekvivalentně $\lambda * u \prec (1 + \nu) * v$. Tím je věta dokázána. $\square$

3.106. Nyní již můžeme dokázat následující větu 3.107 o lexikografickém uspořádání konečněrozměrného vektorového prostoru nad úplným tělesem, jak jsme v odstavci 3.88 výše předeslali.

Význam následující věty 3.107 spočívá především v tom, že nám říká, co udělat nejde: Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^N$ nad lineárně uspořádaným tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním „$\leq$“, kde N je přirozené číslo. Nyní se na nosné množině prostoru $\mathbb{R}^N$ pokusme sestavit binární relaci „$\preceq$“ tak, aby $\mathbb{R}^N$ byl lineárně uspořádaný vektorový prostor s uspořádáním „$\preceq$“ nad tělesem $\mathbb{R}$ s lineárním uspořádáním „$\leq$“. Následující věta 3.107 říká, že kromě lexikografického uspořádání se nám žádné jiné uspořádání najít nepodaří.

3.107. Věta o lexikografickém uspořádání konečněrozměrného vektorového prostoru nad úplným tělesem. *Nechť* $(V, +, -, 0, \preceq)$ *je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem* $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ *vzhledem k zobrazení „$*$“. Těleso* F *budiž úplné a vektorový prostor* V *budiž konečněrozměrný. Potom uspořádání vektorového prostoru* V *je lexikografické.*

3.107.a. *Poznámka.* Z věty 3.87 vyplývá, že úplné těleso F je izomorfní s tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním.

3.107.b. *Důkaz.* Tvrzení věty je zřejmé, jestliže prostor V je nulový. Ve zbytku důkazu proto budeme předpokládat, že prostor V je nenulový. Dále ať relace „$\prec\!\!\prec$“, „$\approx$“ a „$\sim$“ mají význam zavedený definicemi po řadě 3.63, 3.92 a 3.102. Už víme, že relace „$\approx$“ je relací ekvivalence na množině V, je tedy relací ekvivalence i na množině kladných vektorů V^+. Faktorizujme množinu V^+ relací „$\approx$“. Máme faktorovou množinu $V^+/\approx$. Protože dimenze prostoru V je konečná, počet ekvivalenčních tříd, tj. prvků množiny $V^+/\approx$, je konečný (věta 3.96). Počet prvků faktorové množiny $V^+/\approx$ budiž roven přirozenému číslu n. (Protože prostor V je nenulový, množina kladných vektorů je neprázdná, $V^+ \neq \emptyset$, tudíž přirozené číslo n je nenulové.) Nyní položme

$$\mathfrak{M} = \{\, B \subseteq V \; ; \; \forall v \in V^+ \; \exists! u \in B \colon \; u \approx v \,\} \, .$$

Slovy: Uvažujme libovolnou množinu $B \in \mathfrak{M}$. Množina B obsahuje po právě jednom zástupci z každé ekvivalenční třídy, která je v množině $V^+/\approx$ obsažená, tj., ke každé ekvivalenční třídě $[v]_\approx \in V^+/\approx$, kde $v \in V^+$ je vhodně zvoleno, (stručně: ke každému $v \in V^+$) existuje právě jedno $u \in B$ tak, že $u \in [v]_\approx$. Je zřejmé, že počet prvků libovolné množiny $B \in \mathfrak{M}$ obsažené v množině $\mathfrak{M}$ je roven počtu prvků faktorové množiny $V^+/\approx$, tedy přirozenému číslu n. Dodejme, že množina $\mathfrak{M}$ je neprázdná. (Poznamenejme, že axiom výběru (resp. Zornovo lemma 1.31, které je s ním ekvivalentní) k odůvodnění neprázdnosti množiny $\mathfrak{M}$ nepotřebujeme. Existence alespoň jednoho selektoru [2: definice I.7.3] na množině $V^+/\approx$ plyne z toho, že tato množina $V^+/\approx$ je konečná, viz [2: odstavec I.7.1 a věta I.6.8].) Nyní zvolme kterýkoliv prvek $B \in \mathfrak{M}$ množiny $\mathfrak{M}$. Jak už víme (věta 3.96), množina B je lineárně nezávislá. Jsou proto dvě možnosti:

První možností je, že množina B již tvoří bázi vektorového prostoru V, máme $\operatorname{Lin} B = V$. Potom (s ohledem na Steinitzovu větu o výměně [78: věta VI.5.7]) kterákoliv množina $B \in \mathfrak{M}$ je bází prostoru V. A podle věty 3.99 kterákoliv z těchto bází dosvědčuje, že uspořádání „$\preceq$“ vektorového prostoru V je lexikografické, viz též poznámku 3.100; s tímto závěrem můžeme důkaz ukončit.

Druhou možností je, že množina B ještě bázi prostoru V netvoří, $\operatorname{Lin} B \subset V$, tedy $\operatorname{Lin} B \neq V$. Pak ovšem (opět s ohledem na Steinitzovu větu o výměně [78: věta VI.5.7]) žádná z množin $B \in \mathfrak{M}$ není bází prostoru V. Ve zbytku důkazu (indukcí a) sporem dokážeme, že tato možnost nemůže nastat.

Nechť přirozené číslo $j_0 = 1, \ldots, n$ je nejmenší takové, že ke zvolenému přirozenému číslu j_0 existuje množina $B \in \mathfrak{M}$ a kladný vektor $v \in V^+$ s následující vlastností: Víme, že množina B má n prvků, máme $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, kde $u_1, \ldots, u_n$ jsou navzájem různé kladné vektory. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $u_1 \prec \cdots \prec u_n$ (jinak vektory $u_1, \ldots, u_n$ přečíslujeme). Pak máme dokonce $u_1 \prec\!\!\prec \cdots \prec\!\!\prec u_m$, protože $B \in \mathfrak{M}$. Požadovanou vlastností je, aby množina $B \cup \{v\}$ byla lineárně nezávislá a aby $v \approx u_{j_0}$. (Jelikož množina B ještě netvoří bázi, zajisté existuje vektor $v \in V^+$ tak, aby množina $B \cup \{v\}$ byla lineárně nezávislá. Chceme však, aby číslo j_0 bylo nejmenší možné, aby množina $B \in \mathfrak{M}$ a vektor $v \in V^+$ s popsanou vlastností ještě existovali.)

Protože těleso F je úplné, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že vektory v a u_{j_0} jsou v rovnováze, $v \sim u_{j_0}$. (Věta 3.105 o vztahu mezi relací „$\approx$“ a „$\sim$“ říká, že existuje kladné $\lambda \in F^+$ tak, že $\lambda * v \sim u_{j_0}$. Položíme tedy $v := \lambda * v$.) Dále bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $u_{j_0} \prec v$. (Jinak vezmeme množinu $B := \{u_1, \ldots$ $\ldots, u_{j_0-1}, v, u_{j_0+1}, \ldots, u_n\}$ a vektor $v := u_{j_0}$.) Pak ovšem, kromě toho, že $0 \prec v - u_{j_0}$, máme $v - u_{j_0} \prec\!\!\prec u_{j_0}$ a pro vhodné $j = 1, \ldots, j_0 - 1$ platí $v - u_{j_0} \approx u_j$. (Kdyby pro každé $j = 1, \ldots, j_0 - 1$ platilo $v - u_{j_0} \prec\!\!\prec u_j$ anebo $v - u_{j_0} \succ\!\!\succ u_j$, měli bychom $v - u_{j_0} \prec\!\!\prec u_j$ anebo $v - u_{j_0} \succ\!\!\succ u_j$ dokonce pro všechna $j = 1, \ldots, n$ (jelikož $v - u_{j_0} \prec\!\!\prec u_{j_0} \prec\!\!\prec \cdots$ $\cdots \prec\!\!\prec u_n$), načež dostáváme, že faktorová množina $V^+/\approx$ obsahuje alespoň $(n+1)$ prvků, nikoliv právě n, což by byl spor.) Přirozené číslo j je ovšem menší než číslo j_0, nadto množina $B \cup \{v - u_{j_0}\}$ je zřejmě lineárně nezávislá, takže přirozené číslo j_0 nebylo zvoleno jako nejmenší možné – spor.

Vidíme, že kterákoliv z množin $B \in \mathfrak{M}$ je bází prostoru V a dosvědčuje, že uspořádání prostoru V je lexikografické. Tím je věta dokázána. □

3.107.c. *Poznámka.* Uvedený důkaz 3.107.b byl proveden zcela formálně. Chceme-li bázi B dosvědčující, že V je lexikograficky uspořádaný vektorový prostor, nalézt konstruktivně, můžeme použít následující proceduru: (1) Nechť B je libovolná báze prostoru V. (2) Jestliže B obsahuje záporné vektory, pak děláme: Zvolíme záporný vektor $v \in B$, tedy $v \prec 0$, vektor v z báze B vyjmeme a místo něj do báze vložíme vektor $-v$, jenž je k němu opačný; opakujeme krok (2). (3) Báze B už obsahuje jen kladné vektory. Jestliže báze B ještě nedosvědčuje, že uspořádání prostoru V je lexikografické, potom děláme: Najdeme dva vektory $u, v \in B$ tak, že $u \approx v$. Vektory u a v uvedeme do rovnováhy, najdeme kladný skalár $\lambda \in F^+$ tak, aby $\lambda * u \sim v$. Jestliže $\lambda * u \prec v$, potom vektor v z báze B vyřadíme a místo něj do báze vložíme vektor $v - (\lambda * u)$, načež se vracíme na začátek kroku (3). Jinak máme $\lambda * u \succ v$, z báze B vyřadíme vektor u a na jeho místo vložíme vektor $(\lambda * u) - v$, načež se vracíme na začátek kroku (3). (4) Báze B dosvědčuje, že uspořádání prostoru V je lexikografické. Konec výpočtu.

Popsaná procedura skončí po provedení konečně mnoha kroků, protože dimenze vektorového prostoru V je konečná, tj., báze B je konečná.

Procedura (přesněji: procedura obdobná té), jíž jsme v této poznámce 3.107.c výše uvedli, je implicitně obsažena i v podaném důkazu 3.107.b. Důkaz 3.107.b totiž ze zmíněné procedury vychází, resp. svojí myšlenkou je na zmíněné proceduře založen.

3.108. Poznámka. Uvedená věta 3.107 neplatí, jestliže těleso F není úplné. Stačí uvážit příklad vektorového prostoru $V = \{ r + s\sqrt{2} \,;\, r, s \in \mathbb{Q} \}$ s lineárním uspořádáním nad tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$ z příkladu 3.16.a. Uvedený vektorový prostor V je zřejmě dvojrozměrný (není cyklický, tj. nejvýše jednorozměrný) a je slabě archimedovský, proto nemůže být lexikograficky uspořádaný, viz následující tvrzení 3.111. Uvedená věta 3.107 neplatí ani tehdy, když dimenze vektorového prostoru V je nekonečná. Máme následující příklad (zde se vyhneme formálnímu popisu a příklad uvedeme spíše intuitivně): Za vektorový prostor V dosaďme prostor všech posloupností reálných čísel, které jsou od určitého svého členu stacionární. Na prostoru V máme běžné operace součtu posloupností, opačné posloupnosti i běžné násobení posloupnosti skalárem, máme rovněž nulovou posloupnost. Bází prostoru V je například množina $B = \{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots\}$, kde $\boldsymbol{e} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ je stacionární posloupnost sestávající ze samých jedniček a $\boldsymbol{e}_j = \{\delta_{jn}\}_{n=1}^{\infty}$ je „standardní jednotková posloupnost“ mající jedničku na j-tém místě a jinde nuly pro $j = 1, 2, \dots$, kde δ_{jn} je Kroneckerův symbol. Nyní na prostoru V zavedeme relaci „$\preceq$“. Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ jsou dvě posloupnosti, $\boldsymbol{u} = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\boldsymbol{v} = \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$. Klademe $\boldsymbol{u} \prec \boldsymbol{v}$ právě tehdy, když existuje přirozené číslo n_0 takové, že $u_n = v_n$ pro $n = 1, \dots, n_0 - 1$ a $u_{n_0} < v_{n_0}$. K tomu klademe $\boldsymbol{u} \preceq \boldsymbol{v}$ právě tehdy, když $\boldsymbol{u} \prec \boldsymbol{v}$ nebo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$. Poměrně snadno nahlédneme, že zavedené uspořádání prostoru V není lexikografické (dle definice 3.89).

Uspořádání „$\preceq$“ prostoru V z právě uvedeného příkladu však přece jenom (alespoň intuitivně) lexikografické uspořádání připomíná. To nás motivuje k úvaze, že pojem lexikografického uspořádání lze zavést i jiným způsobem. Nechť $(V, +, -, 0, \preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F s uspořádáním „$\leq$“. Řekneme, že uspořádání „$\preceq$“ prostoru V je lexikografické (v alternativním smyslu, tj. nikoliv podle definice 3.89) právě tehdy, když je splněna následující podmínka: Ať je dána neprázdná indexová množina J. Dále mějme relaci „$\leq$“, která je relací lineárního uspořádání na množině J. (Relaci uspořádání na množině J i uspořádání tělesa F značíme stejným znakem „$\leq$“. Z kontextu však bude jasné, v jakém významu je tento znak resp. znak „$<$“ označující příslušnou ostrou nerovnost použit.) Sestavme součin $\bar{V} = \prod_{j \in J} F_j$, viz definici 1.52, kde F_j je aditivní grupa tělesa F pro $j \in J$. Aditivní grupu tělesa F pojímáme jako levý vektorový prostor nad tělesem F, aby sestrojený prostor $\bar{V}$ vyšel jako levý vektorový prostor nad tělesem F. Spolu se součinem $\bar{V}$ máme také přirozené projekce $p_j\colon \bar{V} \to F$ pro $j \in J$, opět viz definici 1.52. (Na prostoru $\bar{V}$ žádné uspořádání nezavádíme.) Nyní zvolme vhodný podprostor V' prostoru $\bar{V} = \prod_{j\in J} F_j$. Strukturu prostoru $\bar{V}$ zužme přirozeným způsobem na podprostor V', viz poznámku 1.16. Rovněž definiční obor přirozených projekcí p_j zúžíme na množinu V', abychom měli $p_j\colon V' \to F$ pro $j \in J$. Předpokládejme, že (původní) vektorový prostor $V(+,-,0)$ („bez lineárního uspořádání ‚$\preceq$'" ovšem) nad tělesem F a vektorový prostor V' jsou izomorfní, izomorfismem, který tuto skutečnost dosvědčí, budiž zobrazení $f\colon V \to V'$. Požadovanou podmínkou (aby uspořádání „$\preceq$" prostoru V bylo v alternativním smyslu lexikografické) je, že pro každý vektor $u \in V$ máme $u \succ 0$ právě tehdy, když existuje index $j_0 \in J$ tak, že $p_{j_0}\big(f(u)\big) > 0$ a současně $p_j\big(f(u)\big) = 0$ pro $j \in J$ splňující $j < j_0$.

Je zřejmé, že když V je libovolný lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F a uspořádání „$\preceq$" prostoru V je lexikografické (dle definice 3.89), potom jeho uspořádání „$\preceq$" je lexikografické i v alternativním smyslu (dle této poznámky 3.108). (Ať B je libovolná báze prostoru V dosvědčující, že uspořádání prostoru V je lexikografické (dle definice 3.89). Potom V je izomorfní s prostorem $V' = \coprod_{v\in B} F_v$, kde F_v je aditivní grupa tělesa F pro $v \in B$ (část II. tvrzení 1.70). Navíc V' je podprostorem prostoru $\bar{V} = \prod_{v\in B} F_v$. Vidíme, že bázi B jsme použili jako indexovou množinu; jako její lineární uspořádání stačí vzít uspořádání „$\preceq'$" opačné k uspořádání „$\preceq$" prostoru V, tj. uspořádání „$\preceq'$" zavedené tak, aby pro $u, v \in B$ platilo $u \preceq' v$ tehdy a jen tehdy, když $u \succeq v$.)

Už v této poznámce 3.108 výše jsme uvedli příklad vektorového prostoru nad úplným tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$, který nebyl uspořádaný lexikograficky (dle definice 3.89), ale byl uspořádaný lexikograficky v alternativním smyslu (dle této poznámky 3.108). Vzniká tak zajímavá otázka, zda, když je dán lineárně uspořádaný vektorový prostor nad úplným tělesem, je už tento prostor uspořádán lexikograficky v alternativním smyslu (dle této poznámky 3.108), anebo zda existují příklady lineárně uspořádaných vektorových prostorů nad úplným tělesem, které takto uspořádány nejsou.

S položenou otázkou částečně souvisí následující výsledek: Jestliže V je úplný vektorový prostor (kde existují suprema, viz definici 3.82) nad tělesem F a dimenze prostoru V je alespoň dvě, potom (bez ohledu na úplnost tělesa F) uspořádání prostoru V není lexikografické, a to ani v alternativním smyslu podle této poznámky 3.108. (Podaný výsledek je důsledkem poznámky 3.87.a.)

3.109. Poznámka. V poznámce 3.31 jsme zmínili otázku, zda dané těleso F je možné lineárně uspořádat. V téže poznámce 3.31 jsme rovněž popsali jednoduché kritérium, které nám umožňuje dokázat, že dané těleso F nelze lineárně uspořádat. Poznamenejme, že další takové (avšak už poněkud komplikovanější) kritérium nám poskytuje i poslední věta 3.107. V této poznámce 3.109 se zaměříme jen na dvě tělesa: těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$ a těleso (reálných) kvaternionů $\mathbb{H}$.

Povšimněme si, že těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$ lze považovat za dvojrozměrný vektorový prostor nad úplným (lineárně uspořádaným) tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$, obdobně těleso kvaternionů $\mathbb{H}$ lze považovat za čtyřrozměrný vektorový prostor nad stejným tělesem $\mathbb{R}$. Z uvedené věty 3.107 vyplývá, že pokud by se nějaké lineární uspořádání na tělese $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{H}$ vůbec podařilo zavést, zavedené uspořádání by nutně bylo lexikografické – když tělesa $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$ pojímáme jako vektorové prostory nad $\mathbb{R}$, jak jsme už zmínili. Nedá příliš mnoho práce si rozmyslet, že lexikografické uspořádání nemůže být lineárním uspořádáním tělesa $\mathbb{C}$ ani tělesa $\mathbb{H}$. Opět dospíváme k závěru, že těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$ ani těleso kvaternionů $\mathbb{H}$ není možné lineárně uspořádat.

3.110. Následující tvrzení 3.111 objasní vztah mezi vektorovými prostory se slabě archimedovským uspořádáním, prostory s lexikografickým uspořádáním a vektorovými prostory, které jsou cyklické (tj. nejvýše jednorozměrné).

3.111. Tvrzení. *Nechť $(V,+,-,0,\preceq)$ je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem $(F,+,-,\cdot,^{-1},0,1,\leq)$ vzhledem k zobrazení „$*$“. Potom uspořádání vektorového prostoru V je slabě archimedovské a lexikografické právě tehdy, když vektorový prostor V je cyklický.*

3.111.a. *Poznámka.* Uvedené tvrzení dává následující dva snadné důsledky: Jestliže vektorový prostor V slabě archimedovský, potom uspořádání prostoru V je lexikografické právě tehdy, když prostor V je cyklický. Jestliže uspořádání prostoru V je lexikografické, potom vektorový prostor V je slabě archimedovský právě tehdy, když je cyklický.

3.111.b. *Důkaz.* Implikace „$\Leftarrow$“ je nasnadě. Nejprve předpokládejme, že vektorový prostor V je nulový. Pak je zřejmě slabě archimedovský a dle definice 3.89 jeho uspořádání je lexikografické. Nyní předpokládejme, že vektorový prostor V je jednorozměrný. Zvolme dva vektory $u,v\in V$, přičemž $u\neq 0$. Potom existuje právě jeden skalár $\lambda\in F$ takový, že $\lambda*u=v$, tudíž $\lambda*u\succeq v$. To dokazuje, že prostor V je slabě archimedovský. Abychom dokázali, že uspořádání prostoru V je lexikografické, zvolme libovolný kladný vektor $v\in V^+$. Množina $B=\{v\}$ je zřejmě bází prostoru V, protože pro každý skalár $\lambda\in F$ máme $\lambda*v=0$ právě tehdy, když $\lambda=0$, a ke každému vektoru $u\in V$ existuje (právě jeden) skalár $\lambda\in F$ takový, že $\lambda*v=u$. (Vidíme, že množina B je lineárně nezávislá a že $\operatorname{Lin}B=V$.) Báze B navíc dosvědčuje, že uspořádání prostoru V je lexikografické, protože pro libovolný skalár $\lambda\in F$ máme $\lambda*v\succ 0$ tehdy a jen tehdy, když $\lambda>0$.

Implikaci „$\Rightarrow$“ dokážeme nepřímo. Dokážeme, že když prostor V není cyklický ale jeho uspořádání je lexikografické, potom prostor V není slabě archimedovský. Protože vektorový prostor V není cyklický, jeho uspořádání nemůže být lexikografické z důvodu, že je nulový – vektorový prostor V musí být nenulový (poněvadž není cyklický). Máme tedy bázi B prostoru V dosvědčující, že jeho uspořádání je lexikografické. Protože prostor V není cyklický, jeho dimenze je alespoň dvě, v bázi B najdeme dva různé vektory $u,v\in B$, splňující $u\neq v$. Věta 3.99 dává, že vektory u a v jsou kladné, $u,v\succ 0$, a platí $u\prec\!\prec v$ nebo $u\succ\!\succ v$. Uspořádání prostoru V tedy není slabě archimedovské, viz definici 3.63, kde jsme zavedli i použitou relaci „$\prec\!\prec$“. $\square$

3.112. Napadne nás, že spojením tvrzení 3.111 s větou 3.107 bychom mohli dostat následující důsledek: jestliže (konečněrozměrný?) lineárně uspořádaný vektorový prostor nad úplným tělesem není cyklický, potom není slabě archimedovský. Poněkud vylepšený výsledek lze nalézt v následujícím tvrzení 3.115, které je přesto snadné.

3.113. Poznámka. Slabě archimedovské uspořádání, s nímž se ve výše i níže uvedeném tvrzení 3.111 a 3.115 setkáváme, někdy hraje poměrně významnou roli. Skutečnost, zda uspořádání vektorového prostoru V je či není slabě archimedovské, totiž rozhoduje o platnosti nebo případné neplatnosti některých tvrzení. Zmiňme například větu 3.46 resp. poznámku 3.46.d, ve které jsme se zabývali konvergencí posloupnosti $\{\lambda_n*a_n\}_{n=1}^{\infty}$, přičemž $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní posloupnost skalárů lineárně uspořádaného tělesa a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní posloupnost vektorů lineárně uspořádaného vektorového prostoru.

Poznámka 3.46.d vlastně není překvapivá, protože platí následující tvrzení: Mějme lineárně uspořádaný vektorový prostor V nad lineárně uspořádaným tělesem F vzhledem k zobrazení „$*$“. Potom uspořádání prostoru V je slabě archimedovské tehdy a jen tehdy, když skalární násobení $*\colon F\times V\to V$ je spojité (když na F i V uvažujeme klasickou intervalovou topologii a na prostoru $F\times V$ uvažujeme součin těchto topologií). Uvedené tvrzení je vcelku snadné, uvádíme jej proto bez důkazu a bez dalších podrobností k němu.

Pro příklad dalších tvrzení, jejichž platnost závisí na tom, zda prostor V je slabě archimedovský, viz Haarovu větu 4.30 (s poznámkou 4.31) a poznámku 6.17.b.

3.114. Důsledkem následujícího tvrzení 3.115 pak je, že když máme lineárně uspořádaný vektorový prostor nad úplným tělesem a dimenze daného vektorového prostoru je alespoň dvě, potom tvrzení diskutovaná v předcházející poznámce 3.113 nemusí platit.

3.115. Tvrzení. *Nechť* $(V, +, -, 0, \preceq)$ *je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem* $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ *vzhledem k zobrazení „$*$“. Těleso* F *budiž úplné. Potom vektorový prostor* V *je slabě archimedovský právě tehdy, když je cyklický.*

3.115.a. *Poznámka.* Úplnost tělesa F je potřebná jen k důkazu implikace „$\Rightarrow$“. Dále z věty 3.87 víme, že úplné těleso F je izomorfní s tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním.

3.115.b. *Důkaz.* Implikace „$\Leftarrow$“ je důsledkem předcházejícího tvrzení 3.111. Zbývá dokázat implikaci „$\Rightarrow$“. Důkaz provedeme nepřímo. Předpokládejme, že prostor V není cyklický, takže najdeme dva kladné lineárně nezávislé vektory $u, v \in V^+$, aby pro všechna $\lambda, \mu \in F$ platilo $(\lambda * u) + (\mu * v) = 0$ tehdy a jen tehdy, když $\lambda = 0$ a $\mu = 0$. Ať relace „$\prec\!\!\prec$“ a „$\approx$“ mají význam zavedený definicemi po řadě 3.63 a 3.92. Jsou dvě možnosti: buď $u \prec\!\!\prec v$ nebo $u \succ\!\!\succ v$, anebo $u \approx v$. Jestliže $u \prec\!\!\prec v$ nebo $u \succ\!\!\succ v$, potom vektorový prostor V není slabě archimedovský, protože vektory u a v jsou kladné, tedy $u, v \succ 0$. Jestliže $u \approx v$, potom vektory u a v lze uvést do rovnováhy, dle věty 3.105 existuje kladné $\lambda \in F^+$ takové, že $\lambda * u \sim v$, ježto těleso F je úplné. Odtud $(\lambda * u) - v \prec\!\!\prec v$ a rovněž $\lambda * u \succ\!\!\succ v - (\lambda * u)$. Vidíme, že ani teď vektorový prostor V není slabě archimedovský, protože když $\lambda * u \succ v$ resp. $\lambda * u \prec v$, potom vektory po řadě $(\lambda * u) - v$ a v resp. $\lambda * u$ a $v - (\lambda * u)$ jsou kladné. □

3.116. V závěrečné části tohoto paragrafu se budeme zabývat soustavami lineárních rovnic a nerovnic. (Půjde o jistou obdobu závěrečné části § 1, kde jsme se zabývali soustavami lineárních rovnic a ne-rovnic.) Nejprve uvedeme, jakým způsobem porovnáváme sloupce vektorů a sloupcové vektory (skalárů). Potom zavedeme pojem soustavy lineárních nerovnic. Abychom soustavy lineárních rovnic a nerovnic mohli vzájemně kombinovat (tj., mohli zavést předeslaný pojem „soustavy lineárních rovnic a nerovnic“), zavedeme pojem blokové soustavy.

3.117. Definice. Porovnávání sloupců vektorů a porovnávání sloupcových vektorů. Ať V je lineárně uspořádaný vektorový prostor s uspořádáním „$\preceq$“ nad lineárně uspořádaným tělesem F s uspořádáním „$\leq$“. Nechť m je přirozené číslo (může být i $m = 0$). Zvolme dva sloupce vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V^m$. Máme tedy $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m$ a $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1}^m$. Pak zápis $\boldsymbol{u} \preceq \boldsymbol{v}$ vyjadřuje, že sloupec $\boldsymbol{u}$ je (po složkách) menší nebo roven sloupci $\boldsymbol{v}$ – nebo že každá složka sloupce $\boldsymbol{u}$ je menší nebo rovna odpovídající složce sloupce $\boldsymbol{v}$ –, máme $\boldsymbol{u} \preceq \boldsymbol{v}$ právě tehdy, když

$$u_1 \preceq v_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ u_m \preceq v_m \,. \tag{1}$$

Obdobně zápis $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{v}$ vyjadřuje, že sloupec $\boldsymbol{u}$ je (po složkách) větší nebo roven sloupci $\boldsymbol{v}$, máme $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{v}$ právě tehdy, když $-\boldsymbol{u} \preceq -\boldsymbol{v}$, ekvivalentně můžeme psát konjunkci (1), v níž místo znaku „$\preceq$“ píšeme znak „$\succeq$“. Poznamenejme, že znaménko minus „$-$“ (tj. unární operaci opačného vektoru) před sloupci vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ můžeme použít, protože na prostoru V^m máme zavedenu strukturu vektorového prostoru, viz definici 1.56. Snadno ověříme, že zavedená relace „být po složkách menší nebo roven“ je relací částečného uspořádání (definice 1.27) na prostoru V^m.

Stále mějme dva sloupce vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V^m$, tedy $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m$ a $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1}^m$. Pak zápis $\boldsymbol{u} \prec \boldsymbol{v}$ vyjadřuje, že sloupec $\boldsymbol{u}$ je (po složkách ostře) menší než sloupec $\boldsymbol{v}$ – takže každá složka sloupce $\boldsymbol{u}$ je (ostře) menší než odpovídající složka sloupce $\boldsymbol{v}$ –, máme $\boldsymbol{u} \prec \boldsymbol{v}$ tehdy a jen tehdy, když

$$u_1 \prec v_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ u_m \prec v_m \,. \tag{2}$$

Obdobně zápis $\boldsymbol{u} \succ \boldsymbol{v}$ znamená, že sloupec $\boldsymbol{u}$ je (po složkách ostře) větší než sloupec $\boldsymbol{v}$, máme $\boldsymbol{u} \succ \boldsymbol{v}$ tehdy a jen tehdy, když $-\boldsymbol{u} \prec -\boldsymbol{v}$, ekvivalentně můžeme použít konjunkci (2), kde místo znaku „$\prec$“ píšeme znak „$\succ$“.

Na chvíli předpokládejme, že $m = 0$. Potom prostor V^m je triviální vektorový prostor obsahující pouze svůj počátek. Máme-li $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V^m$, pak vztahy $\boldsymbol{u} \preceq \boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{v}$ ale také vztahy $\boldsymbol{u} \prec \boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{u} \succ \boldsymbol{v}$ jsou vždy splněny. Konjunkce (1) a (2) – kde případně používáme znaky po řadě „$\succeq$“ a „$\succ$“ – jsou totiž prázdné, proto pravdivé.

Nakonec se ještě zabývejme otázkou, zda existuje alespoň jeden sloupec $\boldsymbol{u} \in V^m$ takový, že $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$, případně takový, že $\boldsymbol{u} \succ \boldsymbol{o}$. Zde m je opět libovolné přirozené číslo (může být i $m = 0$) a $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru V^m, viz definici 1.57. Sloupec $\boldsymbol{u}$ splňující $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$ zřejmě existuje vždy. Stačí uvážit např. právě počátek $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ prostoru V^m. Avšak sloupec $\boldsymbol{u}$ splňující $\boldsymbol{u} \succ \boldsymbol{o}$ existuje tehdy a jen tehdy, když buďto přirozené číslo m je nulové, $m = 0$, anebo přirozené číslo m je nenulové, $m \neq 0$, a vektorový prostor V je netriviální. (Srov. poznámku 1.80.)

Dodejme, že s ohledem na poznámku 3.8 za lineárně uspořádaný vektorový prostor V můžeme dosadit i aditivní grupu tělesa F s jeho lineárním uspořádáním „$\leq$“. To znamená, že obdobným způsobem, jakým jsme v této definici 3.117 porovnávali sloupce vektorů z prostoru V^m pomocí relací „$\preceq$“, „$\succeq$“, „$\prec$“ či „$\succ$“, můžeme porovnávat také sloupcové vektory z prostoru F^m pomocí relací „$\leq$“, „$\geq$“, „$<$“ či „$>$“.

3.118. Definice. Soustavy lineárních nerovnic a ostrých lineárních nerovnic. Ať W je vektorový prostor („bez lineárního uspořádání“) nad lineárně uspořádaným tělesem F s uspořádáním „$\leq$“, viz poznámku 3.7.

Ať $\alpha \in W^{\#}$, tedy $\alpha\colon W \to F$, je lineární forma na vektorovém prostoru W a nechť $b \in F$ je libovolný skalár. Pak $\alpha(x) \leq b$ a $\alpha(x) \geq b$ jsou *lineární nerovnice* a $\alpha(x) < b$ a $\alpha(x) > b$ jsou *ostré lineární nerovnice*, kde $x \in W$ je proměnná (či neznámá). *Řešením* lineární nerovnice $\alpha(x) \leq b$ resp. $\alpha(x) \geq b$ resp. ostré lineární nerovnice $\alpha(x) < b$ resp. $\alpha(x) > b$ je každé $x \in W$, které uvedený vztah splňuje. Daná lineární nerovnice nebo ostrá lineární nerovnice *má řešení* právě tehdy, když existuje $x \in W$, které je jejím řešením. Daná lineární nerovnice nebo ostrá lineární nerovnice *nemá řešení* právě tehdy, když žádné takové $x \in W$ neexistuje. Poznamenejme, že lineární nerovnice $\alpha(x) \leq b$ a $\alpha(x) \geq b$ se pro zdůraznění nazývají také *neostré lineární nerovnice.*

Nyní mějme přirozené číslo m (lze položit i $m = 0$). Ať $A\colon W \to F^m$ je lineární zobrazení, přičemž na prostoru F^m je zavedena struktura levého vektorového prostoru nad tělesem F, viz definice 1.53 a 1.56. Mějme rovněž sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$. Potom $Ax \leq \boldsymbol{b}$ a $Ax \geq \boldsymbol{b}$ jsou *soustavy lineárních nerovnic* a $Ax < \boldsymbol{b}$ a $Ax > \boldsymbol{b}$ jsou *soustavy ostrých lineárních nerovnic.* Je-li bod $x \in W$ zvolen libovolně, pak $Ax \in F^m$ je sloupcový vektor, načež sloupce Ax a $\boldsymbol{b}$, tedy sloupcové vektory z prostoru F^m, dle předcházející definice 3.117 můžeme porovnávat. Platnost jednotlivých vztahů $Ax \leq \boldsymbol{b}$, $Ax \geq \boldsymbol{b}$, $Ax < \boldsymbol{b}$ a $Ax > \boldsymbol{b}$ se tedy řídí definicí 3.117. Bod $x \in W$ je *řešením* dané soustavy lineárních nerovnic $Ax \leq \boldsymbol{b}$ resp. $Ax \geq \boldsymbol{b}$ resp. ostrých lineárních nerovnic $Ax < \boldsymbol{b}$ resp. $Ax > \boldsymbol{b}$ tehdy a jen tehdy, když splňuje uvedený vztah. Říkáme, že daná soustava lineárních nerovnic nebo ostrých lineárních nerovnic *má řešení* právě tehdy, když existuje $x \in W$, které je jejím řešením. V opačném případě říkáme, že daná soustava *nemá řešení.* Jestliže je $m = 0$, potom soustavy lineárních nerovnic $Ax \leq \boldsymbol{b}$ a $Ax \geq \boldsymbol{b}$ a soustavy ostrých lineárních nerovnic $Ax < \boldsymbol{b}$ a $Ax > \boldsymbol{b}$ jsou *prázdné.* Z definice řešení (viz též předcházející definici 3.117) je zřejmé, že prázdná soustava lineárních nerovnic či ostrých lineárních nerovnic má vždy řešení a že jejím řešením je každé $x \in W$. Dodejme, že o soustavě lineárních nerovnic $Ax \leq \boldsymbol{b}$ nebo $Ax \geq \boldsymbol{b}$ někdy pro zdůraznění hovoříme jako o *soustavě neostrých lineárních nerovnic.*

Poznamenejme, jako na konci definice 1.77, že kromě slovního obratu „x je řešením“ lineární nerovnice $\alpha(x) \leq b$ nebo $\alpha(x) \geq b$, ostré lineární nerovnice $\alpha(x) < b$ nebo $\alpha(x) > b$, soustavy lineárních nerovnic $Ax \leq \boldsymbol{b}$ nebo $Ax \geq \boldsymbol{b}$ nebo soustavy ostrých lineárních nerovnic $Ax < \boldsymbol{b}$ nebo $Ax > \boldsymbol{b}$ lze použít i několik jiných slovních obratů:

x *řeší* nebo x *splňuje* nebo x *vyhovuje* dané (ostré) nerovnici nebo soustavě (ostrých) nerovnic. O dané soustavě lineárních nerovnic $Ax \leq \boldsymbol{b}$ nebo $Ax \geq \boldsymbol{b}$ nebo ostrých lineárních nerovnic $Ax < \boldsymbol{b}$ nebo $Ax > \boldsymbol{b}$, která má resp. nemá řešení, rovněž říkáme, že po řadě *je* resp. *není řešitelná* (*je neřešitelná*). Řešitelné resp. neřešitelné soustavy (ostrých) lineárních nerovnic nazýváme také po řadě *konzistentní* resp. *nekonzistentní* (nebo *inkonzistentní*).

3.119. Definice. Blokové sloupce. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem F. Dále mějme nenulové přirozené číslo K a vektorové prostory $\bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_K$ nad tělesem F takové, že pro každé $i = 1, \ldots, K$ je buď $\bar{V}_i = V$, anebo $\bar{V}_i = V^{m_i}$, kde m_i je přirozené číslo (může být i $m_i = 0$). Položme $\bar{V} = \bar{V}_1 \dot{\times} \cdots \dot{\times} \bar{V}_K$ (jde o součin prostorů s významem dle definice 1.52). O prvcích sestaveného prostoru $\bar{V}$ hovoříme jako o *blokových sloupcích.*

Za vektorový prostor V je možné dosadit rovněž aditivní grupu tělesa F, jak z definice 1.5 víme. Jako o blokových sloupcích tedy hovoříme také o prvcích prostoru $\bar{F} = \bar{F}_1 \dot{\times} \cdots \dot{\times} \bar{F}_K$, kde buď $\bar{F}_i$ je aditivní grupa tělesa F, anebo $\bar{F}_i = F^{m_i}$ pro vhodné přirozené číslo m_i (může být i $m_i = 0$) pro $i = 1, \ldots, K$.

S ohledem na konvence zavedené definicemi 3.2 a 3.6 lze tuto definici 3.119 použít i v případě, že V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F.

3.120. Definice. Porovnávání blokových sloupců. Nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor s uspořádáním „$\preceq$“ nad lineárně uspořádaným tělesem F s uspořádáním „$\leq$“. Mějme nenulové přirozené číslo K. Položme $\bar{V} = \bar{V}_1 \dot{\times} \cdots \dot{\times} \bar{V}_K$, přičemž buď $\bar{V}_i = V$, anebo $\bar{V}_i = V^{m_i}$, kde m_i je přirozené číslo (může být i $m_i = 0$) pro $i = 1, \ldots, K$. Zvolme dva blokové sloupce $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \bar{V}$. Předpokládejme, že $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^K$ a $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1}^K$ – je tedy $u_i, v_i \in \bar{V}_i$ pro $i = 1, \ldots, K$.

Symbol „$\sim$“ ať zastupuje buď jednu z relací „$\preceq$“ nebo „$\succeq$“, anebo jednu z relací „$\prec$“ nebo „$\succ$“. Pak máme $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$ neboli

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

právě tehdy, když

$$u_1 \sim v_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ u_K \sim v_K \,,$$

kde platnost výroku $u_i \sim v_i$ se řídí buď definicí 3.6 (popř. definicí 3.2, viz níže), jestliže $\bar{V}_i = V$, anebo definicí 3.117, jestliže $\bar{V}_i = V^{m_i}$, pro $i = 1, \ldots, K$.

S ohledem na poznámku 3.8 za lineárně uspořádaný vektorový prostor V můžeme dosadit rovněž aditivní grupu tělesa F s jeho lineárním uspořádáním „$\leq$“, načež obdobným způsobem, jakým jsme v této definici 3.120 pomocí relací „$\preceq$“, „$\succeq$“, „$\prec$“ nebo „$\succ$“ porovnávali blokové sloupce z prostoru $\bar{V}$, můžeme pomocí relací „$\leq$“, „$\geq$“, „$<$“ nebo „$>$“ porovnávat blokové sloupce z prostoru $\bar{F} = \bar{F}_1 \dot{\times} \cdots \dot{\times} \bar{F}_K$, kde buď $\bar{F}_i$ je aditivní grupa tělesa F, anebo $\bar{F}_i = F^{m_i}$ pro vhodné přirozené číslo m_i (může být i $m_i = 0$) pro $i = 1, \ldots, K$.

3.121. Soustavu lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ můžeme považovat za jeden samostatný výrok. Také rovnici $\alpha(x) = b$, ne-rovnici $\alpha(x) \neq b$, soustavu ne-rovnic $Ax \neq \boldsymbol{b}$, dále soustavu nerovnic $Ax \leq \boldsymbol{b}$ nebo $Ax < \boldsymbol{b}$ či nerovnici $\alpha(x) \leq b$ nebo $\alpha(x) < b$ můžeme považovat za samostatné výroky. Často však chceme vyšetřovat vlastnosti množiny všech $x \in W$, které splňují (například) $Ax = \boldsymbol{b}$ a současně $Cx < \boldsymbol{d}$, kde $Ax = \boldsymbol{b}$ je soustava lineárních rovnic a $Cx < \boldsymbol{d}$ je soustava ostrých lineárních nerovnic. Tím se dostáváme k pojmu blokové soustavy.

3.122. Definice. Blokové soustavy. Nechť W je vektorový prostor nad (ne nutně lineárně uspořádaným) tělesem F. Dále mějme nenulové přirozené číslo K. Rozlišíme dva případy:

Jestliže W je vektorový prostor nad tělesem F („bez lineárního uspořádání"), potom ať zápis $A_i x \sim_i \boldsymbol{b}_i$ znamená buď jednu lineární rovnici, anebo soustavu lineárních rovnic, anebo jednu lineární ne-rovnici, anebo soustavu lineárních ne-rovnic (definice 1.77) pro $i = 1, \dots, K$.

Jestliže W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F, potom ať zápis $A_i x \sim_i \boldsymbol{b}_i$ znamená buď jednu lineární rovnici, anebo soustavu lineárních rovnic, anebo jednu lineární ne-rovnici, anebo soustavu lineárních ne-rovnic (definice 1.77), anebo jednu lineární nerovnici, anebo soustavu lineárních nerovnic, anebo jednu ostrou lineární nerovnici, anebo soustavu ostrých lineárních nerovnic (definice 3.118) pro $i = 1, \dots, K$.

Pak zápis

$$\begin{array}{c} A_1 x \sim_1 \boldsymbol{b}_1 , \\ \vdots \\ \underline{A_K x \sim_K \boldsymbol{b}_K} \end{array}$$

vyjadřuje *blokovou soustavu* resp. *soustavu bloků*, v níž *blokem* rozumíme každý z výroků $A_i x \sim_i \boldsymbol{b}_i$ (ve smyslu předcházejícího odstavce 3.121) pro $i = 1, \dots, K$. Uvedenou blokovou soustavu můžeme zapsat také následujícím úspornějším způsobem: $A_1 x \sim_1 \boldsymbol{b}_1, \dots, A_K x \sim_K \boldsymbol{b}_K$.

Daný bod $x \in W$ je *řešením* blokové soustavy $A_1 x \sim_1 \boldsymbol{b}_1, \dots, A_K x \sim_K \boldsymbol{b}_K$ právě tehdy, když platí

$$A_1 x \sim_1 \boldsymbol{b}_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ A_K x \sim_K \boldsymbol{b}_K ,$$

přičemž pravdivost každého jednotlivého bloku $A_i x \sim_i \boldsymbol{b}_i$ se řídí příslušnou definicí 1.77 nebo 3.118 pro $i = 1, \dots, K$.

Daná bloková soustava *má řešení* právě tehdy, když existuje alespoň jedno $x \in W$, které je jejím řešením. V opačném případě říkáme, že daná bloková soustava *nemá řešení.*

Také v případě blokových soustav namísto slovního obratu „x je řešením" můžeme použít několik dalších obratů: x *řeší* nebo x *splňuje* nebo x *vyhovuje* dané blokové soustavě. O dané blokové soustavě, která má resp. nemá řešení, rovněž říkáme, že po řadě *je* resp. *není řešitelná* (*je neřešitelná*). Řešitelné resp. neřešitelné blokové soustavy nazýváme také po řadě *konzistentní* resp. *nekonzistentní* (nebo *inkonzistentní*).

Hovoříme-li o blokové soustavě, obvykle ji i zhruba popisujeme. Například, jestliže každý z bloků $A_i x \sim_i \boldsymbol{b}_i$ je soustavou lineárních rovnic, potom hovoříme o blokové soustavě lineárních rovnic. Jestliže každý z bloků $A_i x \sim_i \boldsymbol{b}_i$ je soustavou lineárních rovnic nebo soustavou ostrých lineárních nerovnic, hovoříme o blokové soustavě lineárních rovnic a ostrých lineárních nerovnic. Atd. Tímto způsobem můžeme dojít k až $2^4 - 1 = 15$ různým typům blokových soustav, jelikož každý z bloků může být až čtyř základních typů (soustava lineárních rovnic, soustava lineárních ne-rovnic, soustava lineárních nerovnic, soustava ostrých lineárních nerovnic). Všechny možné typy blokových soustav, které můžeme sestavit, zde nevyjmenováváme.

3.123. V následujících poznámkách shrnujeme některé všeobecně známé základní dovednosti pro práci se soustavami lineárních rovnic a nerovnic.

3.124. Poznámka. Vztah několika soustav lineárních rovnic a jedné soustavy lineárních rovnic. Nechť W je vektorový prostor nad tělesem F. Mějme přirozená čísla K a n (přičemž může být $K = 0$ nebo $n = 0$) a mějme K soustav lineárních rovnic $A_1 x = \boldsymbol{c}_1, \dots, A_K x = \boldsymbol{c}_K$ a n lineárních rovnic $\beta(x) = d_1, \dots, \beta(x) = d_n$. Zde $A_k = (\alpha_{ki})_{i=1}^{m_k} \in W^{\#}_{F^{m_k}}$ (neboli $A_k \colon W \to F^{m_k}$) jsou lineární zobrazení a $\boldsymbol{c}_k = (c_{ki})_{i=1}^{m_k} \in$

$\in F^{m_k}$ jsou sloupcové vektory, kde $m_1, \dots, m_K$ jsou přirozená čísla (přičemž kterékoliv z nich může být i nulové), a dále $\beta_1, \dots, \beta_n \in W^{\#}$ jsou lineární formy a $d_1, \dots, d_n \in F$ jsou skaláry. Uvedených K soustav lineárních rovnic a n lineárních rovnic může pocházet z nějaké „větší" blokové soustavy.

Poznamenáváme, že zmíněných K soustav lineárních rovnic a n lineárních rovnic můžeme „sloučit" do jedné jediné soustavy lineárních rovnic. Stačí uvážit lineární zobrazení $\Gamma\colon W \to F^m$, které bude součinem všech použitých lineárních forem. Zde máme $m = m_1 + \dots + m_K + n$. Stačí položit $\Gamma = \alpha_{11} \dot\times \cdots \dot\times \alpha_{1m_1} \dot\times \cdots \dot\times \alpha_{K1} \dot\times \cdots \dot\times \alpha_{Km_K} \dot\times \beta_1 \dot\times \cdots \cdots \dot\times \beta_n$. K tomu stačí uvážit sloupec $\boldsymbol{f} = (f_i)_{i=1}^m \in F^m$, jehož složky $f_1, \dots, f_m$ jsou po řadě skaláry $c_{11}, \dots, c_{1m_1}, \dots, c_{K1}, \dots, c_{Km_K}, d_1, \dots, d_n$.

Potom výše uvedených K soustav lineárních rovnic $A_1 x = \boldsymbol{c}_1, \dots, A_K x = \boldsymbol{c}_K$ a n lineárních rovnic $\beta(x) = d_1, \dots, \beta(x) = d_n$ je ekvivalentních jediné soustavě lineárních rovnic $\Gamma x = \boldsymbol{f}$ v tom smyslu, že zvolené $x \in W$ je řešením všech daných K soustav lineárních rovnic n lineárních rovnic právě tehdy, když řeší soustavu lineárních rovnic $\Gamma x = \boldsymbol{f}$.

3.125. Poznámka. Vztah několika soustav (ostrých) lineárních nerovnic a jedné soustavy (ostrých) lineárních nerovnic. Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F s uspořádáním „$\leq$". Ať symbol „$\sim$" zastupuje buď jednu z relací „$\leq$" nebo „$\geq$", anebo jednu z relací „$<$" nebo „$>$". Nechť K a n jsou přirozená čísla (může být i $K = 0$ nebo $n = 0$). Mějme K soustav (neostrých nebo ostrých) lineárních nerovnic $A_1 x \sim \boldsymbol{c}_1, \dots, A_K x \sim \boldsymbol{c}_K$ a n (neostrých nebo ostrých) lineárních nerovnic $\beta(x) \sim d_1, \dots, \beta(x) \sim d_n$. Jako v přecházející poznámce 3.124, tak i zde $A_k = (\alpha_{ki})_{i=1}^{m_k} \in W^{\#}_{F^{m_k}}$ (neboli $A_k\colon W \to F^{m_k}$) jsou lineární zobrazení a $\boldsymbol{c}_k = (c_{ki})_{i=1}^{m_k} \in F^{m_k}$ jsou sloupcové vektory, kde $m_1, \dots, m_K$ jsou přirozená čísla (přičemž kterékoliv z nich může být i nulové), a k tomu $\beta_1, \dots, \beta_n \in W^{\#}$ jsou lineární formy a $d_1, \dots, d_n \in F$ jsou skaláry. Uvedených K soustav lineárních nerovnic a n lineárních nerovnic může pocházet z nějaké „větší" blokové soustavy.

Poznamenejme, že daných K soustav a n nerovnic lze opět „sloučit" do jediné soustavy (neostrých nebo ostrých) lineárních nerovnic $\Gamma x \sim \boldsymbol{f}$. Postup je stejný jako v předcházející poznámce 3.124. Získaná soustava $\Gamma x \sim \boldsymbol{f}$ je s původními K soustavami a n nerovnicemi ekvivalentní ve smyslu, který jsme v předchozí poznámce 3.124 objasnili.

3.126. Poznámka. Předcházející poznámky 3.124 a 3.125 neplatí, jestliže pracujeme s lineárními ne-rovnicemi. Soustavy lineárních ne-rovnic ani lineární ne-rovnice „slučovat" nelze (!) – „sloučená" soustava už s původními soustavami nebude ekvivalentní.

3.127. Poznámka. Lineární rovnice psaná jako dvě nerovnice. Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F s uspořádáním „$\leq$". Mějme lineární formu $\alpha \in W^{\#}$, tedy $\alpha\colon W \to F$, a skalár $b \in F$. Potom lineární rovnici $\alpha(x) = b$ můžeme ekvivalentně převést na blokovou soustavu lineárních nerovnic $\alpha(x) \leq b$, $\alpha(x) \geq b$. Ekvivalence převodu spočívá v tom, že libovolné $x \in W$ řeší rovnici $\alpha(x) = b$ právě tehdy, když řeší blokovou soustavu $\alpha(x) \leq b$, $\alpha(x) \geq b$.

Nyní ať m je přirozené číslo (lze vzít rovněž $m = 0$). Budiž dáno lineární zobrazení $A\colon W \to F^m$ a také sloupec $\boldsymbol{b} \in F^m$. Potom soustavu lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ lze ekvivalentně převést na blokovou soustavu lineárních nerovnic $Ax \leq \boldsymbol{b}$, $Ax \geq \boldsymbol{b}$. Také nyní pro libovolné $x \in W$ platí, že je řešením soustavy $Ax = \boldsymbol{b}$ právě tehdy, když je řešením blokové soustavy $Ax \leq \boldsymbol{b}$, $Ax \geq \boldsymbol{b}$.

3.128. Poznámka. Vektor (nebo skalár) neomezený ve znaménku psaný jako rozdíl dvou nezáporných vektorů (nebo skalárů). Nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor s uspořádáním „$\preceq$" nad lineárně uspořádaným tělesem F s uspořádáním „$\leq$". Často se stává, že pracujeme s nějakým vektorem $u \in V$. (Zde, jelikož $u \in V$ je obecný vektor prostoru V, říkáme, že vektor u *není omezený ve znaménku.*

Obdobně, když $\lambda \in F$ může být libovolný skalár, pak říkáme, že skalár λ *není omezený ve znaménku*. Namísto slovního obratu „není omezený ve znaménku“ lze rovněž říkat *je neomezený ve znaménku*.) Povšimněme si, že obecný vektor $u \in V$ můžeme nahradit rozdílem dvou nezáporných vektorů: ke každému $u \in V$ existují nezáporné vektory $u^+, u^- \in V_0^+$, tedy $u^+, u^- \succeq 0$, tak, že $u = u^+ - u^-$. Stačí uvážit např. $u^+ = (u)^+$ a $u^- = (u)^-$, kde $(u)^+$ a $(u)^-$ je po řadě nezáporná a nekladná část vektoru u, viz definici 3.44. Vektory u^+ a u^- ovšem nejsou určeny jednoznačně (je-li prostor V netriviální), protože $u = u^+ - u^-$, kde $u^+ = (u)^+ + v$ a $u^- = (u)^- + v$, pro kterékoliv nezáporné $v \in V_0^+$. (Jestliže však $u = u^+ - u^-$ a platí $u^+, u^- \succeq 0$, potom už $u^+ = (u)^+ + v$ a $u^- = (u)^- + v$ pro vhodné nezáporné $v \in V_0^+$.) Z tohoto důvodu – kvůli popsané nejednoznačnosti vektorů u^+ a u^- – uvedený převod nemusí být zcela ekvivalentní, na což je vhodné pamatovat. Obvykle však popsaná nejednoznačnost nevadí. Diskutované nejednoznačnosti se můžeme vyhnout (například) dodatečným požadavkem, aby alespoň jeden z vektorů u^+ nebo u^- byl nulový.

Zcela obdobným způsobem můžeme postupovat i v případě sloupců z prostoru V^m, kde m je přirozené číslo (smí být i $m = 0$). Ke každému sloupci $\boldsymbol{u} \in V^m$ totiž existují sloupce $\boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{u}^- \in V^m$ takové, že $\boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{u}^- \succeq \boldsymbol{o}$ a platí $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-$. Sloupce $\boldsymbol{u}^+$ a $\boldsymbol{u}^-$ nejsou jednoznačně určené, jestliže prostor V^m je netriviální (což nastává právě tehdy, když přirozené číslo m je nenulové a prostor V je netriviální).

Podle poznámky 3.8 za lineárně uspořádaný vektorový prostor V můžeme dosadit rovněž aditivní grupu tělesa F s jeho lineárním uspořádáním „$\leq$“. To znamená, že obdobné výsledky, které jsme v této poznámce 3.128 uvedli pro vektory z prostoru V a sloupce z prostoru V^m, platí i pro skaláry z tělesa F a sloupcové vektory z prostoru F^m.

3.129. Poznámka. Změna znaménka u (ostré) lineární nerovnice. Budiž dán vektorový prostor W nad lineárně uspořádaným tělesem F s uspořádáním „$\leq$“. Dále mějme lineární formu $\alpha \in W^\#$, tedy $\alpha\colon W \to F$, a skalár $b \in F$. Potom neostrou lineární nerovnici $\alpha(x) \geq b$ je možné ekvivalentně převést na nerovnici $(-\alpha)(x) \leq -b$. Obdobně ostrou lineární nerovnici $\alpha(x) > b$ lze ekvivalentně převést na nerovnici $(-\alpha)(x) < -b$. Vidíme, že kterékoliv $x \in W$ řeší nerovnici $\alpha(x) \geq b$ resp. $\alpha(x) > b$ právě tehdy, když řeší nerovnici po řadě $(-\alpha)(x) \leq -b$ resp. $(-\alpha)(x) < -b$. Zde $-\alpha$ je lineární forma opačná k formě α a skalár $-b$ je opačný ke skaláru b. (Obě operace jsou proveditelné, protože duál $W^\#$ je (pravý) vektorový prostor a F je těleso (definice 1.24 a 1.3).)

V případě soustav (neostrých nebo ostrých) lineárních nerovnic můžeme postupovat obdobně. Ať tedy m je přirozené číslo (lze vzít i $m = 0$) a ať $A \in W^\#_{F^m}$, neboli $A\colon W \to F^m$, je lineární zobrazení. K tomu mějme sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$. Potom soustavu lineárních nerovnic $Ax \geq \boldsymbol{b}$ lze ekvivalentně převést na soustavu $(-A)(x) \leq -\boldsymbol{b}$. Rovněž soustavu ostrých lineárních nerovnic $Ax > \boldsymbol{b}$ můžeme ekvivalentně převést na soustavu $(-A)(x) < -\boldsymbol{b}$. Opět vidíme, že libovolné $x \in W$ je řešením soustavy $Ax \geq \boldsymbol{b}$ resp. $Ax > \boldsymbol{b}$ tehdy a jen tehdy, když je řešením soustavy po řadě $(-A)(x) \leq -\boldsymbol{b}$ resp. $(-A)(x) < -\boldsymbol{b}$. Nyní $-A$ je lineární zobrazení opačné k zobrazení A a sloupcový vektor $-\boldsymbol{b}$ je opačný k vektoru $\boldsymbol{b}$. (Také zde jsou obě operace proveditelné, protože na prostoru $W^\#_{F^m}$ máme zavedenu strukturu komutativní grupy a F^m je vektorový prostor (definice 1.38 a 1.56).)

3.130. Poznámka. Změna znaménka u vektoru (nebo skaláru). Nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor s uspořádáním „$\preceq$“ nad lineárně uspořádaným tělesem F s uspořádáním „$\leq$“. Zvolme vektor $u \in V$. Je samozřejmé, že když $u \preceq 0$ resp. $u \prec 0$, potom – vlastně ekvivalentně – platí po řadě $-u \succeq 0$ resp. $-u \succ 0$. Dále ať m je přirozené číslo (může být také $m = 0$). Budiž dán sloupec $\boldsymbol{u} \in V^m$. Nyní, když $\boldsymbol{u} \preceq \boldsymbol{o}$ resp. $\boldsymbol{u} \prec \boldsymbol{o}$, potom – ekvivalentně – platí po řadě $-\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$ resp. $-\boldsymbol{u} \succ \boldsymbol{o}$. (Dodejme, že operace opačného sloupce je proveditelná, protože V^m je vektorový prostor (definice 1.56).)

Dle poznámky 3.8 za lineárně uspořádaný vektorový prostor V můžeme dosadit také aditivní grupu tělesa F s jeho lineárním uspořádáním „$\leq$“. Obdobné výsledky, které jsme v této poznámce 3.130 uvedli pro vektory z prostoru V a sloupce z prostoru V^m, tudíž platí i pro skaláry z tělesa F a sloupcové vektory z prostoru F^m.

3.131. Poznámka. O „zjednodušení teorie“. Poslední poznámky 3.127, 3.128, 3.129 a 3.130 umožňují, aby teorie soustav lineárních nerovnic, kterou v dalších paragrafech této práce uvedeme, byla „jednodušší“. S ohledem na poznámku 3.127 není na újmu obecnosti, když se budeme zabývat pouze soustavami (ostrých) lineárních nerovnic, protože každou soustavu lineárních rovnic můžeme vyjádřit jako blokovou soustavu lineárních nerovnic. Poznámka 3.129 pak říká, že není na újmu obecnosti, když se budeme zabývat pouze nerovnostmi typu „$\leq$“ nebo „$<$“, protože nerovnosti typu „$\geq$“ nebo „$>$“ na dříve uvedené typy můžeme ekvivalentně převést. Konečně poznámky 3.128 a 3.130 dávají, že bez újmy na obecnosti se stačí zabývat pouze nezápornými (nebo kladnými) vektory (nebo skaláry či sloupci vektorů nebo skalárů). Každý obecný vektor (nebo skalár atp.) neomezený ve znaménku lze vyjádřit pomocí dvou nezáporných vektorů (nebo skalárů atp.). Dále každý nekladný (nebo záporný) vektor (či skalár atp.) lze vyjádřit pomocí nezáporného (nebo kladného) vektoru (či skaláru atp.).

Dodejme, že převody uvedené v posledních poznámkách 3.127, 3.128, 3.129 a 3.130 lze provádět také obráceně. Například, blokovou soustavu lineárních nerovnic $Ax \leq \leq \boldsymbol{b}$, $Ax \geq \boldsymbol{b}$ lze převést na soustavu lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$. Dále, například, když pracujeme s rozdílem $u^+ - u^-$ dvou nezáporných vektorů $u^+, u^- \in V_0^+$, potom tento rozdíl můžeme nahradit vektorem $u \in V$, který není omezený ve znaménku. A podobně.

3.132. Dosažené výsledky. Zavedli jsme pojem lineárně uspořádaného tělesa a lineárně uspořádaného vektorového prostoru, jakož i celou řadu dalších pojmů, které v této práci budeme potřebovat. Ačkoliv je celý tento paragraf, § 3, značně rozsáhlý, výsledky v něm obsažené jsou odborníkům z oblasti algebry (popř. nestandardní analýzy) jistě dobře známy. Lze se ale důvodně domnívat, že pojmy lineárně uspořádaných grup, těles či vektorových prostorů zdaleka nejsou známy všeobecně. Z tohoto důvodu se zdálo být účelné právě zakončovaný paragraf, § 3, do této práce zařadit a ukázat některé základní vlastnosti těles a vektorových prostorů s lineárním uspořádáním. Ve větě 3.46 jsme dokázali, že limita součinu je rovna součinu limit a že limita převrácené hodnoty je rovna převrácené hodnotě limity i tehdy, když dané lineárně uspořádané těleso není komutativní. V odstavci 3.79 a příkladu 3.80 jsme uvedli zajímavý příklad lineárně uspořádaného tělesa hyperreálných čísel. Dále jsme se věnovali lineárně uspořádaným vektorovým prostorům nad úplným tělesem (které je izomorfní tělesu reálných čísel $\mathbb{R}$, jak z věty 3.87 vyplynulo). Zabývali jsme se rovněž lexikografickým uspořádáním (definice 3.89). Za zmínku stojí věta 3.107, kde jsme dokázali, že každý lineárně uspořádaný konečněrozměrný vektorový prostor nad úplným tělesem už je uspořádán lexikograficky. V poznámce 3.108 jsme se lexikografickým uspořádáním zabývali ještě hlouběji, uvedli jsme alternativní definici lexikografického uspořádání. Důležitá otázka, zda lineárně uspořádané těleso musí být komutativní, zůstává v této práci nezodpovězena, viz odstavec 3.65.

3.133. Poznámka. V dalších paragrafech této práce se již důsledně přidržíme konvencí, které jsme zavedli už v definicích 1.1, 1.3 a 1.5 (případně též 1.8) a znaménko „$\cdot$“ označující násobení skalárů i znak „$*$“ označující násobení vektoru skalárem budeme vynechávat; budeme využívat také konvenci, že násobení skalárů resp. násobení vektoru skalárem má přednost před sčítáním po řadě skalárů resp. vektorů. Dále budeme využívat konvence zavedené definicemi 3.2 a 3.6: Budeme-li hovořit jen o „lineárně uspořádaném tělese F“, budeme vědět, že máme na mysli „lineárně uspořádané těleso F s uspořádáním ‚$\leq$‘“, tj. lineárně uspořádané těleso $(F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$. Obdobně, budeme-li hovořit jen o „lineárně uspořádaném vektorovém prostoru V“, budeme tím mít na mysli „lineárně uspořádaný vektorový prostor V s uspořádáním ‚$\preceq$'", tj. lineárně uspořádaný vektorový prostor $(V, +, -, 0, \preceq)$.

§ 4 Farkasovo lemma

4.1. V níže uvedeném lemmatu 4.15 vyslovíme zobecněné Farkasovo lemma, které je jedním z ústředních výsledků této práce. Jeho důkaz 4.15.d vychází z původního autorova důkazu, který autor nalezl na podzim (v průběhu října a listopadu) roku 2000. Autor tehdy dokazoval Farkasovo lemma 4, které je uvedeno v úvodní kapitole této práce. Teprve po delší době se ukázalo, že prakticky stejným postupem lze dokázat i lexikografické Farkasovo lemma 5. Až pak vyšlo najevo, že stejným způsobem je možné dokázat také níže uvedené Farkasovo lemma 4.15. Blíže viz úvodní kapitolu této práce.

4.2. Poznámky. Stručná historie a fyzikální motivace Farkasova lemmatu 1. V těchto poznámkách 4.2 se budeme zabývat Farkasovým lemmatem 1, které jsme podali již v úvodní kapitole této práce a které je formulováno v konečněrozměrném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$. Stručně popíšeme různé typy důkazů, historii a původní fyzikální motivaci Farkasova lemmatu 1.

4.2.a. V literatuře dnes můžeme nalézt bezpočet důkazů Farkasova lemmatu 1. Prakticky každá učebnice lineárního programování (každá skripta nebo jiný učební text na toto téma), například [58] nebo [76], obsahuje nějaký důkaz Farkasova lemmatu 1, dále zmiňme alespoň například [19] (viz též [82]), [28] (viz též [29], [30]), [46], [48], [50], [77] nebo [87]; viz též poznámku 4.14.b. Broyden [19] rozlišuje tři hlavní skupiny důkazů Farkasova lemmatu 1: důkazy algoritmické, geometrické a algebraické.

Při algoritmickém důkazu se Farkasovo lemma 1 nejprve převede na nějaký problém (například na úlohu lineárního programování), k jehož řešení se pak použije určitý výpočetní postup (například simplexová metoda). Potíží, se kterou je nutné při korektním algoritmickém důkazu počítat, je možnost degenerace a cyklu. Různé algoritmické důkazy se s touto potíží vyrovnávají různým způsobem. (Algoritmický důkaz se tak vlastně redukuje na důkaz konečnosti použitého algoritmu. Poznamenejme, že algoritmický důkaz Farkasova lemmatu 1 nemusí spočívat jen v použití simplexové metody. Pro použití jiného algoritmu viz např. [29].) Geometrické důkazy Farkasova lemmatu vycházejí z věty o oddělitelnosti bodu a uzavřené konvexní množiny (uzavřenou) nadrovinou. Ke geometrickým důkazům se vrátíme níže v samostatné úvaze 4.5. Poslední typ důkazů využívá čistě algebraické postupy.

Podrobnější diskusi a rovněž odkazy na příklady jednotlivých typů důkazů lze nalézt v Broydenově článku [19]. V samotném článku [19], jak už jeho název napovídá, je důkaz proveden algebraickým způsobem.

4.2.b. Důkaz Farkasova lemmatu 1 lze samozřejmě nalézt také v původních Farkasových pracích. András Prékopa ve svém článku [77: Sekce 3] uvádí, že Farkas svůj výsledek publikoval poprvé maďarsky v roce 1894 [38] (o rok později také německy [41]). Podruhé svůj výsledek publikoval maďarsky v roce 1896 [39] (německy v roce 1898 [42]). Oba první důkazy v článcích [38], [41], [39], [42] jsou ale neúplné. První úplný důkaz Farkas publikoval maďarsky v roce 1898 [40] (a německy o rok později [43]). Nejznámější – a také nejčastěji citovaný – je ale jeho článek [44] z roku 1902.

4.2.c. Zatímco počet citací Farkasova článku [44] v literatuře je úctyhodný, skutečně čten je tento článek [44] pravděpodobně už jen velmi málo. V literatuře se totiž často setkáváme s několika zkomolenými podobami citace článku [44]. Lze se domnívat, že ke zkomolení muselo dojít už „dávno" (nejpozději do roku 1956, což dokládají např. články [87] a [35], pravděpodobně však dříve). Patrně díky postupnému přebírání zkomolené citace článku [44] se s její překroucenou podobou můžeme setkat i v poměrně nedávných pracích (např. [19]).

Někteří autoři článek [44] citují pod názvem „Über die Theorie der einfachen Ungleichungen", avšak nadpis článku [44] je pouze „Theorie der einfachen Ungleichungen". (Text „über die Theorie der einfachen Ungleichungen" – s malým „ü" (!) – se nachází v záhlaví ostatních stránek článku [44].) – Dále se někdy uvádí, že článek [44] byl publikován už v roce 1901. (Rok 1901 jako rok publikace článku [44] uvádí dokonce i databáze Zentralblatt MATH ⟨`http://www.emis.de/ZMATH/`⟩ [údaje k srpnu 2005]. Také PRÉKOPA [77] jako rok publikace uvádí rok 1901. MOTZKIN [71], [72: odst. 9 (v § 2 v úvodní kapitole)] nejprve uvádí, že FARKAS svoje výsledky systematicky vyložil v roce 1902, ale v seznamu literatury [71], [72: odst. 11 (v § 2 v úvodní kapitole)] jako rok publikace článku [44] uvádí rok 1901.) Na titulním listu svazku č. 124 časopisu „Journal für die reine und angewandte Mathematik" je ale uveden rok 1902. (Záležitost ohledně roku publikace článku [44] je poněkud nejasná. Bylo by zajímavé zjistit, zda snad nedošlo k tomu, že sešit č. 1 svazku č. 124 uvedeného časopisu byl publikován už v roce 1901, zatímco jeho sešit č. 4 byl publikován až v roce 1902, pročež na jeho titulní list byl vytištěn rok 1902.) – Nadto se jako rozsah článku [44] poměrně často uvádějí stránky 1–24. Článek [44] však končí až na straně 27.

Popsané tři nepřesnosti jsou pak v literatuře různým způsobem kombinovány, tudíž se můžeme setkat několika rozličnými podobami této jediné citace. Potvrďme proto, že citace Farkasova článku [44], která je uvedena v seznamu literatury na konci této práce, byla prověřena, tedy by měla být uvedena správně.

4.2.d. V už zmíněném článku Andráse PRÉKOPY [77] (jehož stručné shrnutí lze nalézt také v [19]) se dozvídáme, že prvotní motivace pro vznik nyní slavného Farkasova lemmatu pocházela z fyziky. FARKAS se totiž zabýval problémem mechanické rovnováhy (tj. problémem nalezení rovnovážného stavu mechanického systému, kdy (jako nutná podmínka) veškeré síly musí být v rovnováze). Už na samém počátku svého článku [44] (anglický překlad najdeme v [77: citát v Sekci 1]) FARKAS píše, že chceme-li se analytické mechanice věnovat přirozeným a přitom systematickým způsobem, pak – kvůli nutnosti používat určitý princip, jenž poprvé formuloval FOURIER a později také GAUSS – musíme mít dobrou znalost teorie homogenních lineárních nerovnic. Avšak, jak uvádí [44] ([77]), znalost teorie lineárních nerovnic v té době (na konci 19. a počátku 20. století) zcela chyběla. To FARKASE přimělo, aby se teorií nerovnic začal zabývat soustavněji.

FARKAS [44] dále uvádí, že FOURIER se nerovnostmi zabýval mnohokrát, ale bez valného výsledku; později se stejným tématem zabýval také ruský resp. ukrajinský matematik OSTROGRADSKIJ (ОСТРОГРАДСЬКИЙ). Další informace historického rázu lze najít v Prékopově článku [77]. (Viz též poznámku 5.26.)

4.3. Poznámka. Gyula FARKAS (1847–1930), maďarský matematik a fyzik. Těžiště jeho práce leží především v oblasti mechaniky a termodynamiky. Působil na univerzitě v Pesti, později na univerzitě v Koloszváru. (Snad smíme vložit notoricky známou poznámku, že Pest je od roku 1872 součástí dnešní Budapesti. Koloszvár, Klausenburg, Claudiopolis a Cluj je po řadě maďarské, německé, latinské a rumunské jméno téhož města, které v roce 1974 bylo přejmenováno na nynější Cluj-Napocu. [90].) V pozdější době kvůli problémům se zrakem musel FARKAS svojí práce zanechat a posledních 15 let svého života strávil v ústraní v Budapesti. Po Farkasově smrti on i značná část jeho výsledků upadly v zapomnění. Do povědomí vstoupil v 50. letech 20. století, kdy jeho výsledky v oblasti teorie homogenních lineárních nerovnic došly uznání, především však jeho výsledek, který je znám pod názvem „Farkasovo lemma" (někdy též „Farkasova věta"), viz odstavec 4.1 a poznámky 4.2 výše. [75]. Další odkazy na prameny o životě a díle Gyuly FARKASE lze nalézt v [77: Sekce 3].

Poznamenejme, že Gyula FARKAS je znám také jako Julius FARKAS. Až do začátku 20. století totiž bylo obvyklé, když autor publikoval článek, přeložit autorova křestní jména do stejného jazyka, ve kterém byl článek napsán. Německé jméno „Julius“ a původní maďarské jméno „Gyula“ se považovala za rovnocenná. Proto při publikování článků psaných německy ([41], [42], [43], [44]) Farkas svoje jméno uváděl v němčině (Julius), při publikování článků psaných maďarsky ([38], [39], [40]) uváděl původní maďarskou podobu svého jména (Gyula). [77: Poznámky na začátku Referencí]. (Pro zajímavost dodejme, že maďarské slovo „farkas“ znamená česky „vlk“.)

4.4. Po uvedeném historickém odbočení se vrátíme ke geometrickým způsobům důkazu Farkasova lemmatu, jak jsme v poznámce 4.2.a slíbili.

4.5. Úvaha. Geometrické důkazy Farkasova lemmatu. V poznámce 4.2.a jsme uvedli, že Farkasovo lemma 1 z úvodní kapitoly této práce lze dokazovat v zásadě třemi různými způsoby: algoritmicky, geometricky a algebraicky. Algoritmické důkazy jsme už v poznámce 4.2.a diskutovali a k algebraickým důkazům téměř není co dodat. V této úvaze 4.5 se zaměříme na geometrické důkazy. V poznámce 4.2.a jsme zatím uvedli, že geometrické důkazy Farkasova lemmatu 1 se opírají o větu o oddělitelnosti bodu a uzavřené konvexní množiny (uzavřenou) nadrovinou. Za pozornost stojí, že zatímco algoritmické a algebraické důkazy Farkasova lemmatu 1 probíhají v podstatě „bez problémů“, v případě geometrických důkazů tomu tak není.

Především, aby o uzavřenosti nějaké množiny mělo vůbec smysl hovořit, musíme předpokládat, že příslušný vektorový prostor je vybaven vhodnou topologií. To (alespoň intuitivně) nečiní problém, dokud příslušný vektorový prostor je konečněrozměrný a nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$. Konečněrozměrné reálné vektorové prostory totiž snadno vybavíme klasickou eukleidovskou topologií a lehce nahlédneme, že každou uzavřenou konvexní množinu a bod ležící mimo tuto množinu lze oddělit nadrovinou. (Přičemž tato nadrovina už je nutně uzavřená.)

Jakmile však pracujeme s nekonečněrozměrným (reálným) vektorovým prostorem, eukleidovskou topologii na něm už nemusíme být schopni zavést (přesněji: nemusí jít o Hilbertův prostor) a platnost tvrzení věty o oddělitelnosti se tak může vytratit. Následně nemusíme být schopni provést ani geometrický důkaz Farkasova lemmatu, neboť ten je na větě o oddělitelnosti závislý. To představuje jakousi překážku v použitelnosti geometrických důkazů.

(Určité východisko nabízí funkcionální analýza. Lze totiž pracovat se slabou* topologií [67: kapitola 15]. Větou o oddělitelnosti je pak malá Mazurova věta [67: věta 14.27], viz též větu 9.6. Tento přístup použijeme v následující, druhé kapitole této práce. Poznamenejme však rovnou, že k popsanému přístupu se neuchylujeme proto, že bychom opět pracovali v nekonečněrozměrných prostorech, nýbrž pro nedostatek jiných použitelných metod důkazu.)

Jinou diskusi geometrických důkazů (s upozorněním na jiný možný nedostatek důkazů tohoto typu) lze nalézt v Broydenově článku [19: před Teorémem 1.2].

Shrňme, že geometrické důkazy Farkasova lemmatu (nebo jiných vět o alternativě) mají svoje opodstatnění. Geometrický přístup ostatně použijeme v následující kapitole této práce. Při použití geometrického přístupu si ale musíme být vědomi omezení, která tento přístup přináší (viz úvahu 10.10).

4.6. V tomto paragrafu Farkasovo lemma 4.15 dokážeme algebraickým způsobem. Nejprve zavedeme pojem sublineárního zobrazení.

4.7. Definice. Sublineární zobrazení. Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F (vzhledem ke skalárnímu násobení „$*$“), k tomu V budiž lineárně uspořádaný vektorový prostor nad stejným lineárně uspořádaným tělesem F (vzhledem k jinému skalárnímu násobení „$*$“). Ať $p\colon W \to V$ je libovolné zobrazení. Potom p je *sublineární zobrazení* (vzhledem ke grupě W a lineárně uspořádané grupě V – které jsou ovšem příslušnými vektorovými prostory –, lineárně uspořádanému tělesu F

a oběma zobrazením „$*$“) právě tehdy, když pro každé $x, y \in W$ a pro každé kladné $\lambda \in F^+$ platí

$$p(\lambda * x) = \lambda * \bigl(p(x)\bigr)\,,$$
$$p(x + y) \preceq \bigl(p(x)\bigr) + \bigl(p(y)\bigr)\,.$$

Jsou-li tyto podmínky splněny a je-li z kontextu zřejmé, kterou grupu W, lineárně uspořádanou grupu V, které lineárně uspořádané těleso F a která příslušná dvě zobrazení „$*$“ máme na mysli, potom hovoříme stručně jen o „sublineárním zobrazení p“.

Uvedené dvě podmínky vyjadřují po řadě *pozitivní homogenitu* a *subaditivitu* sublineárního zobrazení p. Jestliže $p\colon W \to V$ je sublineární zobrazení, pak $p(0) = 0$, a tudíž $p(\lambda * x) = \lambda * \bigl(p(x)\bigr)$ pro všechna nezáporná $\lambda \in F_0^+$ a všechna $x \in W$. (Důkaz se provede stejným způsobem, jako důkaz obdobného tvrzení v definici 1.18.) Dále snadno nahlédneme, že pro každé $x \in W$ platí vztah $p(-x) \succeq -p(x)$, kde samozřejmě $-p(x) = -\bigl(p(x)\bigr)$. (Máme $0 = p(0) = p(x - x) \preceq \bigl(p(x)\bigr) + \bigl(p(-x)\bigr)$. Odtud $-p(x) \preceq p(-x)$.) Srov. [65: definice 6.2 (na str. 143)], [67: odstavec 2.15].

Poznamenejme, že když zobrazení $p\colon W \to V$ je lineární (podle definice 1.18), potom je sublineární. (Uvedené tvrzení ovšem neplatí obráceně, jestliže zobrazení p je sublineární, pak nemusí být lineární.)

Stojí za pozornost, že pro sublineární zobrazení $p\colon W \to V$ platí rovněž tzv. *Jensenova nerovnost*: Nechť $p\colon W \to V$ je sublineární zobrazení. Mějme přirozené číslo n a zvolme libovolné body $x_1, \dots, x_n \in W$ a libovolné nezáporné skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F_0^+$, takže $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, splňující $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. (Přirozené číslo n je tudíž nenulové.) Potom platí

$$p(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \preceq \lambda_1 p(x_1) + \dots + \lambda_n p(x_n)\,,$$

kde znaky „$*$“ označující skalární násobení pro větší přehlednost vynecháváme. (Důkaz provedeme indukcí. Tvrzení je zřejmé, jestliže $n = 1$. Předpokládejme tedy, že přirozené číslo n je větší než jedna, $n > 1$, a že dokazované tvrzení platí pro $n - 1$. Pro stručnost položme $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}$. (Je tedy samozřejmě $\lambda + \lambda_n = 1$, přičemž $\lambda \geq 0$, jelikož skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ jsou nezáporné.) Rozlišíme dva případy: buď $\lambda = 0$, anebo $\lambda > 0$. Nastává-li první případ, $\lambda = 0$, potom dokazované tvrzení je zřejmé, neboť vzhledem k předpokladům máme $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ a $\lambda_n = 1$. Nyní předpokládejme, že $\lambda > 0$. Položme $\lambda_i' = \lambda^{-1}\lambda_i$ pro $i = 1, \dots, n-1$. Pak skaláry $\lambda_1', \dots, \lambda_{n-1}'$ jsou jistě nezáporné, $\lambda_1', \dots, \lambda_{n-1}' \geq 0$, a navíc platí $\lambda_1' + \dots + \lambda_{n-1}' = 1$. Postupným užitím subaditivity, pozitivní homogenity a indukčního předpokladu dostáváme $p(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = {}$ $= p\bigl(\bigl(\lambda*(\lambda_1' x_1 + \dots + \lambda_{n-1}' x_{n-1})\bigr) + \bigl(\lambda_n x_n\bigr)\bigr) \preceq p\bigl(\lambda*(\lambda_1' x_1 + \dots + \lambda_{n-1}' x_{n-1})\bigr) + p\bigl(\lambda_n x_n\bigr) = {}$ $= \lambda p(\lambda_1' x_1 + \dots + \lambda_{n-1}' x_{n-1}) + \lambda_n p(x_n) \preceq \lambda * \bigl(\lambda_1' p(x_1) + \dots + \lambda_{n-1}' p(x_{n-1})\bigr) + \lambda_n p(x_n) = {}$ $= \lambda_1 p(x_1) + \dots + \lambda_n p(x_n)$. Tím je tvrzení dokázáno.) Srov. [65: věta 3.8 (na str. 107)].

4.8. Následující lemma 4.9 bylo původně ústřední částí autorova důkazu (viz též odstavec 4.1) Farkasova lemmatu 4.15. Zdá se však být užitečné tuto ústřední část z důkazu „vyjmout“ a (po nepatrném zobecnění) formulovat jako samostatné tvrzení. Užitečnost následujícího lemmatu 4.9 je dána jednak jeho použitím v důkazu 4.15.d Farkasova lemmatu 4.15, jednak jeho možným použitím v níže uvedené poznámce 5.33.c.

4.9. Lemma. *Nechť F je lineárně uspořádané těleso, nechť W je vektorový prostor nad tělesem F a nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Budiž dáno přirozené číslo m a také lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m\colon W \to F^m$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou lineární formy definované na prostoru W. K tomu mějme sublineární zobrazení $p\colon W \to V$.*

Implikace „$Ax \leq \boldsymbol{o} \Rightarrow 0 \preceq p(x)$“ neboli

$$\alpha_1(x) \leq 0 \,\wedge\, \cdots \,\wedge\, \alpha_m(x) \leq 0 \implies 0 \preceq p(x)$$

budiž splněna pro každé $x \in W$. Dále nechť existuje libovolný sloupec vektorů $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$ takový, že nerovnost $0 \preceq p(x) + \iota \boldsymbol{u}^T A x$ čili

$$0 \preceq p(x) + \iota u_1 \alpha_1(x) + \cdots + \iota u_m \alpha_m(x)$$

je rovněž splněna pro každé $x \in W$.

Předpokládejme, že alespoň jeden z vektorů $u_1, \ldots, u_m$ je záporný. (Z toho vyplývá, že přirozené číslo m je nenulové.) Ať dohromady m_1 z těchto vektorů je záporných. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jde o prvních m_1 vektorů. (Protože jinak vektory $u_1, \ldots, u_m$ a jim odpovídající formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jen vhodně přečíslujeme.) Máme tedy

$$u_1, \ldots, u_{m_1} \prec 0 \qquad \text{a} \qquad u_{m_1+1}, \ldots, u_m \succeq 0\,,$$

kde přirozené číslo m_1 je nenulové.

Potom jednu z lineárních forem $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_1}$ lze vynechat, přičemž výše uvedená implikace zůstane v platnosti. Jinými slovy, existuje vhodné $j = 1, \ldots, m_1$ tak, že implikace

$$\alpha_1(x) \le 0 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ \alpha_{j-1}(x) \le 0 \ \wedge \ \alpha_{j+1}(x) \le 0 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ \alpha_m(x) \le 0 \implies 0 \preceq p(x)$$

platí pro všechna $x \in W$.

4.9.a. *Poznámka.* Pro význam symbolu „ι“ viz definici 1.39 a poznámku 1.40. Viz též definice 1.56 a 1.59 a poznámku 1.60.

4.9.b. *Důkaz.* Pro spor předpokládejme, že uvedené tvrzení neplatí, že žádnou z lineárních forem $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_1}$ není možné vynechat. Potom existují body $x_1, \ldots, x_{m_1} \in W$ takové, že pro všechna $j = 1, \ldots, m_1$ platí

$$\begin{aligned} \alpha_i(x_j) &\le 0 \qquad && \text{pro } i = 1, \ldots, j-1,\ j+1, \ldots, m_1,\ m_1+1, \ldots, m\,, \\ 0 &\succ p(x_j)\,. \end{aligned}$$

Nutně je $\alpha_j(x_j) > 0$ pro všechna $j = 1, \ldots, m_1$. (Protože kdyby $\alpha_i(x_j) \le 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$, pak by dle předpokladu bylo $0 \preceq p(x_j)$.)

Nyní sestrojíme body $x'_1, \ldots, x'_{m_1} \in W$ – přičemž každý z nich bude konvexní kombinací bodů $x_1, \ldots, x_{m_1}$ – takové, že pro všechna $j = 1, \ldots, m_1$ bude platit

$$\begin{aligned} \alpha_i(x'_j) &= 0 \qquad && \text{pro } i = 1, \ldots, j-1,\ j+1, \ldots, m_1\,, \\ \alpha_i(x'_j) &\le 0 && \text{pro } i = m_1+1, \ldots, m\,, \\ 0 &\succ p(x'_j)\,. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $\alpha_j(x'_j) > 0$ pro kterékoliv $j = 1, \ldots, m_1$.

Postupujme indukcí pro $k = 0, 1, \ldots, m_1$. V každém kroku $k = 0, 1, \ldots, m_1$ sestrojíme sadu bodů $x_1^k, \ldots, x_{m_1}^k$ tak, aby pro libovolné $j = 1, \ldots, k,\ k+1, \ldots, m_1$ platilo

$$\begin{aligned} \alpha_i(x_j^k) &= 0 \qquad && \text{pro } i = 1, \ldots, j-1,\ j+1, \ldots, k\,, \\ \alpha_i(x_j^k) &\le 0 && \text{pro } i = k+1, \ldots, j-1,\ j+1, \ldots, m_1\,, \\ \alpha_i(x_j^k) &\le 0 && \text{pro } i = m_1+1, \ldots, m\,, \\ 0 &\succ p(x_j^k)\,. \end{aligned}$$

Následně je $\alpha_j(x_j^k) > 0$ pro všechna $j = 1, \ldots, m_1$.

Na počátku položíme $x_j^0 = x_j$ pro $j = 1, \ldots, m_1$. Je zřejmé, že tato sada bodů $x_1^0, \ldots, x_{m_1}^0$ splňuje požadované vlastnosti pro $k = 0$. Předpokládejme, že pro vhodné $k = 0, 1, \ldots, m_1 - 1$ už jsme získali sadu bodů $x_1^k, \ldots, x_{m_1}^k$ s požadovanými vlastnostmi.

Sestrojíme sadu bodů $x_1^{k+1}, \dots, x_{m_1}^{k+1}$ a ověříme, že tato sada má všechny požadované vlastnosti.

Položme $x_{k+1}^{k+1} = x_{k+1}^k$. Už víme, že platí $\alpha_{k+1}(x_{k+1}^{k+1}) = \alpha_{k+1}(x_{k+1}^k) > 0$ a zároveň $\alpha_{k+1}(x_j^k) \le 0$ pro všechna $j = 1, \dots, k,\ k+2, \dots, m_1$. Chceme sestrojit body $x_1^{k+1}, \dots \dots, x_k^{k+1}, x_{k+2}^{k+1}, \dots, x_{m_1}^{k+1}$ tak, aby $\alpha_{k+1}(x_j^{k+1}) = 0$ pro $j = 1, \dots, k,\ k+2, \dots, m_1$.

Můžeme si představovat, že body $x_1^k, \dots, x_{m_1}^k$ ve vektorovém prostoru W vytvářejí simplex. Lineární forma α_{k+1} je v jeho vrcholu x_{k+1}^k kladná a na jeho protější stěně je nekladná. Tuto stěnu „nadzvedneme“ směrem k vrcholu x_{k+1}^k tak, aby forma α_{k+1} na ní byla nulová. Na každé hraně vycházející z vrcholu x_{k+1}^k najdeme bod, ve kterém forma α_{k+1} je nulová. Položme

$$
\begin{aligned}
x_j^{k+1} = x_{k+1}^k - \big(\alpha_{k+1}(x_{k+1}^k)\big) * \big(\alpha_{k+1}(x_{k+1}^k) - \alpha_{k+1}(x_j^k)\big)^{-1} * x_{k+1}^k +\\
+ \big(\alpha_{k+1}(x_{k+1}^k)\big) * \big(\alpha_{k+1}(x_{k+1}^k) - \alpha_{k+1}(x_j^k)\big)^{-1} * x_j^k
\end{aligned}
$$

pro $j = 1, \dots, k,\ k+2, \dots, m_1$. Poznamenejme, že $\big(\alpha_{k+1}(x_{k+1}^k) - \alpha_{k+1}(x_j^k)\big) > 0$, dále platí $\alpha_{k+1}(x_j^{k+1}) = 0$, k tomu vidíme, že bod x_j^{k+1} je konvexní kombinací bodů x_{k+1}^k a x_j^k, to vše pro $j = 1, \dots, k,\ k+2, \dots, m_1$. Je třeba ověřit, že získaná sada bodů $x_1^{k+1}, \dots, x_{m_1}^{k+1}$ má požadované vlastnosti.

Nejprve máme ověřit, že když $j = 1, \dots, m_1$ je dáno, pak $\alpha_i(x_j^{k+1}) = 0$ pro $i = 1, \dots \dots, j-1,\ j+1, \dots, k+1$. To jsme zatím ukázali pro $i = k+1$. Pro ostatní $i = 1, \dots, j-1,\ j+1, \dots, k$ víme, že $\alpha_i(x_j^k) = 0$ a že $\alpha_i(x_{k+1}^k) = 0$, tudíž $\alpha_i(x_j^{k+1}) = 0$.

Dále máme ověřit, že $\alpha_i(x_j^{k+1}) \le 0$ pro $i = k+2, \dots, j-1,\ j+1, \dots, m_1$ pro kterékoliv $j = 1, \dots, m_1$. To je ale také zřejmé, protože víme, že $\alpha_i(x_j^k) \le 0$, že $\alpha_i(x_{k+1}^k) \le 0$ a že bod x_j^{k+1} je konvexní kombinací bodů x_j^k a x_{k+1}^k.

K tomu máme ověřit, že $\alpha_i(x_j^{k+1}) \le 0$ pro $i = m_1+1, \dots, m$ pro každé $j = 1, \dots \dots, m_1$. Opět stačí říci, že $\alpha_i(x_j^k) \le 0$, že $\alpha_i(x_{k+1}^k) \le 0$ a že bod x_j^{k+1} je konvexní kombinací bodů x_j^k a x_{k+1}^k.

Zbývá ověřit, že $0 \succ p(x_j^{k+1})$ pro všechna $j = 1, \dots, m_1$. Víme však, že $0 \succ p(x_j^k)$, že $0 \succ p(x_{k+1}^k)$ a že bod x_j^{k+1} je konvexní kombinací bodů x_j^k a x_{k+1}^k. Stačí tedy použít Jensenovu nerovnost z předcházející definice 4.7.

Konstrukce nové sady bodů $x_1^{k+1}, \dots, x_k^{k+1}$ je tímto zcela popsána. Nakonec položíme $x'_j = x_j^{m_1}$ pro $j = 1, \dots, m_1$.

Nyní okamžitě dostáváme spor: Vezměme kterýkoliv z bodů $x'_1, \dots, x'_{m_1}$ (případně jakoukoliv jejich konvexní kombinaci). Pro jednoduchost vezmeme bod x'_1. Připomeňme, že $0 \succ p(x'_1)$, že $\alpha_1(x'_1) > 0$, že $\alpha_i(x'_1) = 0$ pro $i = 2, \dots, m_1$ a že $\alpha_i(x'_1) \le 0$ pro $i = m_1+1, \dots, m$. Dále víme, že $u_1, \dots, u_{m_1} \prec 0$ a že $u_{m_1+1}, \dots, u_m \succeq 0$. Platí tedy

$$
p(x'_1) + \iota u_1 \alpha_1(x'_1) + \dots + \iota u_{m_1} \alpha_{m_1}(x'_1) + \iota u_{m_1+1} \alpha_{m_1+1}(x'_1) + \dots + \iota u_m \alpha_m(x'_1) \prec 0\,.
$$

Všechny členy uvedeného součtu jsou totiž nekladné, přičemž první člen je záporný, dokonce ještě alespoň jeden z následujících m_1 členů je záporný. To je ovšem spor, protože podle předpokladu má platit $0 \preceq p(x'_1) + \iota u_1 \alpha_1(x'_1) + \dots + \iota u_m \alpha_m(x'_1)$.

Jednu z lineárních forem $\alpha_1, \dots, \alpha_{m_1}$ tedy bylo možné vynechat. □

4.9.c. *Poznámka.* Právě podaný důkaz 4.9.b jsme vlastně provedli nepřímo (nikoliv sporem), protože předpoklad, že pro všechna $x \in W$ platí $0 \preceq p(x) + \iota u_1 \alpha_1(x) + \dots \dots + \iota u_m \alpha_m(x)$, jsme v důkazu použili jen jednou, až v jeho závěrečné části.

4.10. Poznámka. V souvislosti s právě dokázaným lemmatem 4.9 vyvstává zajímavá otázka, zda některé z jeho předpokladů nejsou nadbytečné. Bylo by zajímavé rozhodnout, zda předpoklad existence sloupce $\boldsymbol{u} \in V^m$ takového, aby $0 \preceq p(x) + \iota\boldsymbol{u}^T Ax$ pro všechna $x \in W$, není zbytečný, zda tento fakt neplyne už z předpokladu, že pro každé $x \in W$ platí implikace „$Ax \leq \boldsymbol{o} \Rightarrow 0 \preceq p(x)$“.

Ekvivalentně můžeme položit následující otázku: Nechť F je lineárně uspořádané těleso, nechť W je vektorový prostor nad tělesem F a ať V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Mějme lineární formu $\alpha\colon W \to F$ a sublineární zobrazení $p\colon W \to V$. Předpokládejme, že pro každé $x \in W$ platí implikace „$\alpha(x) = 0 \Rightarrow 0 \preceq p(x)$“. Ptáme se, zda existuje $u \in V$ tak, aby $\iota u\alpha(x) \preceq p(x)$ pro všechna $x \in W$.

(Odůvodněme, že obě otázky jsou ekvivalentní. Když umíme kladně zodpovědět první otázku, pak jistě umíme kladně zodpovědět i druhou otázku, neboť rovnici $\alpha(x) = 0$ lze vyjádřit jako dvě nerovnice, viz poznámky 3.127, 3.129 a 3.131. Když umíme kladně zodpovědět druhou otázku, pak umíme kladně zodpovědět také první otázku. Platí-li totiž pro každé $x \in W$ implikace „$Ax \leq \boldsymbol{o} \Rightarrow 0 \preceq p(x)$“, potom pro každé $x \in W$ platí také implikace „$Ax = \boldsymbol{o} \Rightarrow 0 \preceq p(x)$“. Dále stačí postupovat indukcí podle počtu rovnic v soustavě $Ax = \boldsymbol{o}$.)

Upozorněme na poměrně těsnou souvislost druhé otázky z této poznámky 4.10 s algebraickou Hahnovou-Banachovou větou [67: věta 2.16]. Vektor $u \in V$ (z druhé otázky) by jistě bylo možné najít stejným postupem jako v [67: závěrečná část důkazu věty 2.16] – ovšem za předpokladu, že vektorový prostor V je (ve smyslu definice 3.82) úplný, tj. za předpokladu, že (volněji řečeno) ve vektorovém prostoru V existují suprema a infima (takže grupa V je izomorfní s aditivní grupou tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$, viz poznámku 3.87.a).

Z tohoto důvodu se nezdá, že v obecném případě (když vektorový prostor V není úplný) by druhou otázku bylo možné zodpovědět kladně. Nemáme však žádný konkrétní protipříklad, který by (obecnou) neexistenci vektoru $u \in V$ ze druhé otázky potvrdil. K tomu, jak jsme už naznačili, (obecnou) existenci vektoru $u \in V$ neumíme ani dokázat.

Kdyby snad odpověď na druhou otázku přece jen byla vždy kladná (tj., existenci vektoru $u \in V$ by se podařilo dokázat i v obecném případě, kdy prostor V není úplný), pak tvrzení ze druhé otázky bychom mohli považovat za jakési zobecnění základního lemmatu 2.3 – za předpokladu, že těleso F a prostor V jsou lineárně uspořádané, ovšem. Z něj by pak (pomocí uvedeného lemmatu 4.9) mohlo plynout tvrzení, které by bylo podstatně obecnější než níže uvedené Farkasovo lemma 4.15. Správnou odpověď však zatím neznáme.

4.11. Pracujeme-li s lineárním zobrazením $\gamma\colon W \to V$ a se sublineárním zobrazením $p\colon W \to V$, kde W a V je po řadě vektorový a lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F, často nás zajímá, zda nerovnost $\gamma(x) \preceq p(x)$ je splněna pro každé $x \in W$. To jsme viděli v posledním lemmatu 4.9 a předcházející poznámce 4.10, kde jsme pracovali s lineárním zobrazením $\gamma = -\iota\boldsymbol{u}^T A$. Je-li však zobrazení p lineární, pak uvedená nerovnost má zajímavý důsledek, o němž vypovídá následující jednoduché tvrzení 4.12.

4.12. Tvrzení. *Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F a nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad stejným lineárně uspořádaným tělesem F. Mějme dvě lineární zobrazení $\gamma, \gamma'\colon W \to V$. Potom tato zobrazení si jsou rovna, $\gamma = \gamma'$, právě tehdy, když pro každé $x \in W$ platí nerovnost $\gamma(x) \preceq \gamma'(x)$.*

4.12.a. *Důkaz.* Implikace „$\Rightarrow$“ je snadná. Jestliže $\gamma = \gamma'$, pak pro každé $x \in W$ platí $\gamma(x) = \gamma'(x)$, a tedy $\gamma(x) \preceq \gamma'(x)$. Implikaci „$\Leftarrow$“ dokážeme sporem. Jestliže $\gamma \neq \gamma'$, pak existuje bod $x \in W$ takový, že $\gamma(x) \neq \gamma'(x)$. Vzhledem k předpokladu je $\gamma(x) \prec \gamma'(x)$. Pak ovšem $\gamma(-x) \succ \gamma'(-x)$ – spor. $\square$

4.13. Nyní již přikročíme k důkazu zobecněného Farkasova lemmatu [44: oddíl IV], tedy lemmatu 4.15, které je jedním z ústředních výsledků této práce.

4.14. Poznámky. Farkasovu lemmatu 4.15 předešleme ještě několik poznámek.

4.14.a. Ve Farkasově lemmatu 4.15 – obdobně jako v základním lemmatu 2.3, se setkáváme s vektorovým prostorem W, který hraje roli „základního“ či „nosného“ vektorového prostoru. Dále se v něm setkáváme s lineárně uspořádaným vektorovým prostorem V, který má význam prostoru „cílových hodnot“. Oba prostory W a V jsou nad společným lineárně uspořádaným tělesem F.

Stojí za pozornost, že ve Farkasově lemmatu 4.15 se nepožaduje, aby těleso F bylo komutativní. (Komutativitu tělesa F jsme nepředpokládali ani v předcházejícím lemmatu 4.9. Viz též odstavec 3.65.)

Jako jednu z voleb je možné v níže uvedeném lemmatu 4.15 za těleso F dosadit lineárně uspořádané těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním „$\leq$“ a za vektorový prostor V je možné dosadit vektorový prostor $\mathbb{R}^N$ s lexikografickým uspořádáním „$\preceq$“, kde N je přirozené číslo. Tím dostáváme lexikografické Farkasovo lemma 5 z úvodní kapitoly této práce. Ponecháme-li $F = \mathbb{R}$ a za vektorový prostor V dosadíme aditivní grupu tělesa $\mathbb{R}$ s jeho standardním uspořádáním, dostáváme Farkasovo lemma 4. Klademe-li nadto $W = \mathbb{R}^n$, kde n je přirozené číslo, dostáváme Farkasovo lemma 1.

4.14.b. V níže uvedeném Farkasově lemmatu 4.15 se nepředpokládá, že by „základní“ vektorový prostor W měl být konečněrozměrný. To je jeden ze základních rozdílů oproti Farkasovu lemmatu 1 (viz úvodní kapitolu této práce), jehož různé způsoby důkazu jsme diskutovali v poznámce 4.2.a. Některé z důkazů, o kterých jsme v poznámce 4.2.a hovořili, jsou na konečné dimenzi „základního“ prostoru W zcela závislé a v případě nekonečněrozměrného vektorového prostoru W už tyto důkazy selhávají.

Farkasovo lemma v případě (obecně) nekonečněrozměrného „základního“ vektorového prostoru W (přičemž se nepředpokládá, že by prostor W byl vybaven nějakou topologií) dokazoval Ky FAN [35] (viz též [37]) a Sergej ČERNIKOV (Сергей ЧЕРНИКОВ) [22]. Ky FAN [35: Teorém 4 (v § 3 v Části I)] ve skutečnosti dokázal Haarovu větu, viz poznámku 4.29.a a větu 4.30 níže. Abychom získali výsledek, který dokázal Sergej ČERNIKOV [22: lemma 2.4 (v hlavě II § 1 na str. 119)], v níže uvedeném lemmatu 4.15 stačí za vektorový prostor V dosadit aditivní grupu tělesa F spolu s jeho uspořádáním a předpokládat, že těleso F je komutativní. (Na druhou stranu se nezdá, že by ČERNIKOV komutativitu tělesa F ve svém důkazu využíval. Opět odkazujeme na odstavec 3.65.)

4.14.c. Důkaz 4.15.d Farkasova lemmatu 4.15 může být poměrně stručný. Je to ovšem tím, že jeho podstatnou část jsme přesunuli do samostatného lemmatu 4.9.

4.15. Farkasovo lemma. *Nechť F je lineárně uspořádané těleso, nechť W je vektorový prostor nad tělesem F a nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Dále budiž dáno přirozené číslo m (lze položit i $m = 0$) a lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$, které vzniklo součinem lineárních forem $\alpha_1, \dots, \alpha_m : W \to F$. K tomu ať $\gamma : W \to V$ je další lineární zobrazení.*

Potom implikace „$Ax \leq \boldsymbol{o} \Rightarrow \gamma(x) \preceq 0$“ neboli

$$\alpha_1(x) \leq 0 \wedge \cdots \wedge \alpha_m(x) \leq 0 \implies \gamma(x) \preceq 0 \tag{1}$$

platí pro všechna $x \in W$ právě tehdy, když

$$\exists u_1, \dots, u_m \succeq 0 \colon \iota u_1 \alpha_1 + \cdots + \iota u_m \alpha_m = \gamma\,, \tag{2}$$

kde $u_1, \dots, u_m \in V$, tzn., že pro vhodné $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$ splňující $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$ platí $\iota \boldsymbol{u}^T A = \gamma$.

4.15.a. *Poznámka.* Kdybychom za vektorový prostor V dosadili aditivní grupu tělesa F s jeho uspořádáním, pak podmínka (1) by říkala, že bloková soustava nerovnic $Ax \le \boldsymbol{o}$, $\gamma(x) > 0$ nemá řešení.

4.15.b. *Poznámka.* Podmínka (2) říká, že zobrazení γ je V-kuželovou kombinací lineárních forem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, viz definici 3.38.

4.15.c. *Poznámka.* Zobrazení A je součinem lineárních forem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ (dle definice 1.53) jen tehdy, když přirozené číslo m je nenulové. Jinak, když $m = 0$, je význam zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ zaveden definicí 1.59.

4.15.d. *Důkaz.* Implikace „$\Leftarrow$“ je triviální. Dokážeme implikaci „$\Rightarrow$“. Důkaz provedeme indukcí. Tvrzení je zřejmé, jestliže $m = 0$. (Je-li $m = 0$, pak konjunkce na levé straně implikace (1) je prázdná, proto pravdivá, tudíž máme $\gamma(x) \preceq 0$ pro každé $x \in W$. To ovšem znamená (vzhledem k tvrzení 4.12, kde za γ' volíme nulové lineární zobrazení), že zobrazení γ je nulové. Je-li $m = 0$, pak ovšem klademe $\iota u_1\alpha_1 + \dots + \iota u_m\alpha_m = o$, kde o je nulové zobrazení $o: W \to V$. Je tedy $\gamma = o$, takže tvrzení je, v případě $m = 0$, skutečně pravdivé.) Nyní předpokládejme, že přirozené číslo m je nenulové a že pravdivost tvrzení už byla dokázána pro $m - 1$. Povšimněme si, že z předpokladu (1) vyplývá, že pro každé $x \in W$ platí implikace

$$\alpha_1(x) = 0 \ \wedge\ \cdots\ \wedge\ \alpha_m(x) = 0 \implies \gamma(x) = 0\,.$$

(Kdyby pro některé $x \in W$ platilo $\alpha_i(x) = 0$ pro $i = 1, \dots, m$ a $\gamma(x) \prec 0$, potom $\alpha_i(-x) = 0$ pro $i = 1, \dots, m$ a $\gamma(-x) \succ 0$ – spor.) Podle základního lemmatu 2.3 tedy existují vektory $u_1, \dots, u_m \in V$ takové, že

$$\iota u_1\alpha_1 + \dots + \iota u_m\alpha_m = \gamma\,.$$

Jsou-li všechny vektory $u_1, \dots, u_m$ nezáporné, tedy $u_1, \dots, u_m \succeq 0$, důkaz můžeme ukončit. Předpokládejme proto, že alespoň jeden z těchto vektorů je záporný a že celkový počet záporných vektorů je m_1. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že vektory $u_1, \dots, u_{m_1}$ jsou záporné a že vektory $u_{m_1+1}, \dots, u_m$ jsou nezáporné. (Protože jinak vektory $u_1, \dots, u_m$ a jim odpovídající formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jen vhodně přečíslujeme.) Lemma 4.9 (kde volíme $p = -\gamma$) nyní dává, že jednu z lineárních forem $\alpha_1, \dots, \alpha_{m_1}$ můžeme vynechat, že existuje vhodné $j = 1, \dots, m_1$ tak, že implikace

$$\alpha_1(x) \le 0 \ \wedge\ \cdots\ \wedge\ \alpha_{j-1}(x) \le 0 \ \wedge\ \alpha_{j+1}(x) \le 0 \ \wedge\ \cdots\ \wedge\ \alpha_m(x) \le 0 \implies \gamma(x) \preceq 0$$

opět platí pro všechna $x \in W$. Dle indukčního předpokladu pak existují nezáporné vektory $u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_m \succeq 0$ takové, že když navíc položíme $u_j = 0$, platí

$$\iota u_1\alpha_1 + \dots + \iota u_m\alpha_m = \gamma\,.$$

Tím je lemma dokázáno. □

4.16. Poznámka. Jak jsme v právě uvedeném důkazu 4.15.d Farkasova lemmatu 4.15 poznamenali, jeho implikace „$\Leftarrow$“ platí triviálně. Podstatná je jeho implikace „$\Rightarrow$“, která, obdobně jako v případě základního lemmatu 2.3 (poznámka 2.4), dává následující komutativní diagram:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\gamma"'] & F^m \arrow[dl, dashed, "\iota \boldsymbol{u}^T"] \\ V & \end{tikzcd}$$

Jestliže zobrazení $A: W \to F^m$ a $\gamma: W \to V$ jsou svázána určitou podmínkou (splňují implikaci 4.15.(1) pro všechna $x \in W$), potom existuje zobrazení $\iota\boldsymbol{u}^T: F^m \to V$ takové, že uvedený diagram komutuje. Přitom zobrazení $\iota\boldsymbol{u}^T$ má ještě další vlastnost, a sice $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$, jak z podmínky 4.15.(2) vyplývá.

4.17. V následující definici 4.18 se pokusíme zavést pojem obecné úlohy optimalizace, potom se pokusíme objasnit pojem úlohy lineárního programování, nakonec stručně nastíníme úkol teorie duality.

4.18. Definice. Obecná úloha optimalizace. Úloha lineárního programování. Teorie duality. Nechť M a N jsou dvě množiny. Na množině N budiž dána nějaká relace „$\le$“. Pro jednoduchost předpokládejme, že relace „$\le$“ je relací lineárního uspořádání na množině N. K tomu mějme libovolné zobrazení $f\colon \bar{M} \to N$, kde $\bar{M} \supseteq M$ je libovolná nadmnožina množiny M. Pak *obecnou úlohu optimalizace* zapisujeme (například) takto:

$$\begin{aligned} f(x) &\longrightarrow \max \\ x &\in M\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Množinu M nazýváme *množinou přípustných řešení* dané úlohy (1), její prvky nazýváme *přípustnými řešeními* a zobrazení f nazýváme *cílovou funkcí* této úlohy (1). Nadmnožinu $\bar{M}$ množiny M chápeme jako „základní“ nebo „nosný“ prostor, množinu N pojímáme jako prostor „cílových hodnot“. Jestliže množina přípustných řešení je prázdná, $M = \emptyset$, říkáme, že daná úloha *nemá přípustné řešení* nebo že je *nepřípustná.* V opačném případě, když $M \neq \emptyset$, říkáme, že daná úloha *má přípustné řešení* nebo že je *přípustná.*

Jak z uvedeného zápisu (1) vyplývá, úkolem je najít bod $x^* \in M$, ve kterém funkce f na množině M nabývá svojí maximální hodnoty – jinými slovy, najít bod $x^* \in M$ takový, že pro každé (jiné) $x \in M$ platí $f(x) \le f(x^*)$ – případně je úkolem odůvodnit, že žádný takový bod x^* neexistuje. Každý bod $x^* \in M$ popsaných vlastností nazýváme *optimálním řešením* a hodnotu $f(x^*)$ nazýváme *optimální hodnotou* dané optimalizační úlohy. Existuje-li alespoň jeden takový bod $x^* \in M$, říkáme, že daná úloha *má (alespoň jedno) optimální řešení*; v opačném případě říkáme, že daná úloha *nemá optimální řešení.* Cílová funkce dané úlohy je (na množině přípustných řešení) *shora omezená* právě tehdy, když existuje $y \in N$ takové, že nerovnost $f(x) \le y$ platí pro všechna $x \in M$. Zřejmě, jestliže daná optimalizační úloha (1) má optimální řešení, potom její cílová funkce je omezená shora.

Doplňme, že cílová funkce dané úlohy je (na množině přípustných řešení) *zdola omezená* právě tehdy, když existuje $y \in N$ takové, že $y \le f(x)$ pro všechna $x \in M$. Cílová funkce je (na množině přípustných řešení) *neomezená shora* resp. *zdola* právě tehdy, když není omezená po řadě shora resp. zdola. Místo slovního obratu, že „cílová funkce (na množině přípustných řešení) je omezená shora / zdola“, někdy říkáme jen stručně, že „daná úloha je omezená shora / zdola“. Obdobně místo slovního obratu, že „cílová funkce (na množině přípustných řešení) není omezená shora / zdola“, říkáme též stručně, že „daná úloha není omezená shora / zdola“ nebo že „daná úloha je neomezená shora / zdola“.

Poznamenejme, že lze pracovat také s několika variantami obecné úlohy optimalizace. Někdy funkci f chceme minimalizovat, takže v zápisu (1) místo „max“ píšeme „min“. Úkolem je pak najít bod $x^* \in M$, kde funkce f na množině M nabývá svého minima (případně dokázat, že žádný takový bod neexistuje). Jindy zase, když pracujeme s úlohou (1), může být už předem jasné, že funkce f svého maxima na množině M nemusí nabývat, avšak víme, že množina $\{\, f(x)\, ;\ x \in M \,\}$ v množině N má supremum (definice 3.69). V takovém případě se spokojíme jen s nalezením tohoto suprema. V zápisu (1) se to projeví tak, že místo „max“ píšeme „sup“. Analogicky někdy víme, že funkce f na množině M nenabývá svého minima, ale víme, že množina $\{\, f(x)\, ;\ x \in M \,\}$ má infimum v množině N. Pak hledáme toto infimum a v zápisu (1) místo „max“ píšeme „inf“.

Zápis (1) obecné úlohy optimalizace je prostorově poněkud náročný. Proto ekvivalentně můžeme úsporněji psát, že úkolem je maximalizovat (resp. minimalizovat resp. najít supremum nebo infimum) $f(x)$ za podmínky $x \in M$.

Nyní se pokusíme objasnit pojem úlohy lineární optimalizace, tedy úlohy lineárního programování. – Poznamenejme, že slovní spojení „lineární programování“ je někdy potřeba používat velmi často, proto se místo něj používá ustálená zkratka „LP“. – Budiž tedy dán „základní“ nebo „nosný“ vektorový prostor W nad lineárně uspořádaným tělesem F a také lineárně uspořádaný vektorový prostor V „cílových hodnot“ nad lineárně uspořádaným tělesem F. Nechť $\gamma\colon W \to V$ je lineární zobrazení. Dále mějme přirozené číslo m (lze vzít i $m = 0$), lineární zobrazení $A\colon W \to F^m$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$. Potom *(primární) úlohou lineárního programování* (s konečným počtem lineárních omezení) rozumíme výše popsanou obecnou úlohu optimalizace (1), kde klademe $\bar{M} = W$ a $M = \{\, x \in W\ ;\ Ax \le \boldsymbol{b}\,\}$, dále $N = V$ a k tomu $f = \gamma$. Primární úlohu lineárního programování však obvykle zapisujeme následovně:

$$\begin{aligned} \gamma(x) &\longrightarrow \max \\ Ax &\le \boldsymbol{b}\,, \end{aligned} \tag{2}$$

kde $x \in W$ je proměnná. V souvislosti s uvedenou primární úlohou LP používáme terminologii, kterou jsme už v této definici 4.18 zavedli pro obecnou úlohu optimalizace. (Jde o pojmy množiny přípustných řešení, cílové funkce, „základní“ nebo „nosný“ prostor, prostor „cílových hodnot“, optimálního řešení, optimální hodnoty, přípustnosti a nepřípustnosti, „mít / nemít přípustné řešení“, „mít / nemít optimální řešení“ a omezenosti / neomezenosti cílové funkce resp. úlohy shora.) Rovněž úkol (najít alespoň jedno optimální řešení dané primární úlohy LP, anebo odůvodnit, že úloha optimální řešení nemá) je stejný jako v případě obecné úlohy.

Poznamenejme, že někdy se úloha lineárního programování uvažuje ve (zdánlivě obecnějším) tvaru, kdy množina přípustných řešení není popsána jedinou soustavou lineárních nerovnic (jako v úloze (2)), nýbrž celou blokovou soustavou lineárních rovnic a lineárních nerovnic (definice 3.122). Ve skutečnosti však tento přístup žádné zvláštní zobecnění nedává, neboť, jak z poznámek 3.124, 3.125, 3.127, 3.129 (a 3.131) vyplývá, blokovou soustavu lineárních rovnic a nerovnic můžeme převést na jedinou soustavu lineárních nerovnic.)

Primární úlohu lineárního programování se snažíme formulovat tak, aby k ní bylo možné sestavit tzv. *duální úlohu lineárního programování*, která (obdobně jako primární úloha LP) je rovněž speciálním případem obecné úlohy optimalizace (1). Primární a duální úlohu formulujeme tak, aby pro obě úlohy platil tzv. *princip duality*, což je tvrzení zhruba následujícího tvaru: primární úloha má optimální řešení právě tehdy, když duální úloha má optimální řešení; jestliže primární i duální úloha mají optimální řešení, potom optimální hodnoty obou úloh se rovnají. Disciplína, která se formulováním duálních úloh, dokazováním principu duality a souvisejícími otázkami zabývá, je *teorie duality*. Teorii duality lineárního programování s konečným počtem lineárních omezení se budeme věnovat v § 6, teorii duality lineárního programování s nekonečným počtem lineárních omezení se budeme věnovat v následující kapitole v § 12.

4.19. Tak jako Fredholmova věta 2.11 je snadným důsledkem základního lemmatu 2.3, tak i níže uvedené lemma 4.21 o základní dualitě v lineárním programování je snadným důsledkem Farkasova lemmatu 4.15. Následující lemma 4.21 je další tzv. větou o alternativě (podrobněji viz úvodní kapitolu této práce), se kterou se v této práci setkáváme. Zatímco Fredholmova věta charakterizuje případ, kdy (primární) soustava lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ nemá řešení, lemma o základní dualitě v LP charakterizuje případ, kdy (primární) soustava lineárních nerovnic $Ax \le \boldsymbol{b}$ nemá řešení.

4.20. Poznámka. Někteří autoři lemma o základní dualitě v LP považují za variantu Farkasova lemmatu a odvolávají se při tom na původní Farkasův článek [44]. Lze se (jen) domnívat, že Gyula Farkas měl dostatečné prostředky k tomu, aby lemma, jež v této práci nazýváme „lemmatem o základní dualitě v lineárním programování“, dokázal. (Přinejmenším v konečněrozměrném případě, kdy se pracuje jen s maticemi a sloupcovými vektory reálných čísel. Viz též níže uvedené poznámky 4.23 a 4.24.) Na druhou stranu, autor – alespoň pokud jeho chabé znalosti německého jazyka dovolovaly – žádné tvrzení, které by lemma o základní dualitě v LP připomínalo, ve Farkasově článku [44] nenašel.

Jiní autoři lemma o základní dualitě v LP připisují Davidu GALEOVI [48: Teorém 2.7 (v Kapitole 2 Sekci 3 na str. 46)] a nazývají jej Galeovou větou. To ovšem – dle autorova skromného mínění – je zvláštní, protože v podstatě stejnou větu dokázal už o 4 roky dříve Ky FAN [35: Teorém 1 (v § 1 v Části I)].

Jak jsme v této práci už několikrát poznamenali, Ky FAN [35] (viz též [37]) pracuje v reálném vektorovém prostoru libovolné (obecně nekonečné) dimenze. David GALE [48] ovšem pracuje v reálném vektorovém prostoru konečné dimenze. Tedy, nejenže Ky FAN svůj výsledek [35: Teorém 1 (v § 1 v Části I)] dokázal o už o čtyři roky dříve, nýbrž jeho výsledek je dokonce obecnější než Galeův výsledek [48: Teorém 2.7 (v Kapitole 2 Sekci 3 na str. 46)]. Proto, z uvedených důvodů, by snad bylo správnější lemma o základní dualitě nazývat „Fanovou větou“ popř. „Fanovou-Galeovou větou“. (Doplňme, že kdyby GALE k důkazu Farkasova lemmatu [48: Teorém 2.6 (v Kapitole 2 Sekci 3 na str. 44)] místo svého základního lemmatu [48: Teorém 2.5 (v Kapitole 2 Sekci 2 na str. 41)] použil nějakou jeho obecnější verzi, např. [67: lemma A.5], případně zde uvedené základní lemma 2.3, potom by jeho důkaz lemmatu o základní dualitě [48: Teorém 2.7 (v Kapitole 2 Sekci 3 na str. 46)] bylo možné použít i k důkazu níže uvedeného lemmatu 4.21 (tedy i v případě obecně nekonečněrozměrného prostoru nad lineárně uspořádaným tělesem) – ovšem jen za dodatečného předpokladu, že použité lineárně uspořádané těleso F je komutativní. K této otázce viz též odstavec 3.65. Také důkaz, jenž provedl FAN [35: Teorém 1 (v § 1 v Části I)], by bylo možné použít k důkazu lemmatu 4.21 – avšak za dodatečného předpokladu, že použité lineárně uspořádané těleso F je úplné (definice 3.82, takže dle věty 3.87 je izomorfní s tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$). Poznamenejme, že v níže uvedeném lemmatu 4.21 nepředpokládáme, že by těleso F mělo být komutativní nebo úplné.)

Vzhledem k výše zmíněným nejasnostem, které ohledně původu lemmatu 4.21 o základní dualitě v lineárním programování v literatuře panují, by bylo zajímavé zjistit, kdo je jeho skutečným původcem, tj., kdo důkaz diskutovaného lemmatu (byť jen v konečněrozměrném reálném vektorovém prostoru) publikoval jako první. (Snad Ky FAN [35: Teorém 1 (v § 1 v Části I)]?)

4.21. Lemma o základní dualitě v lineárním programování. *Ať W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F a nechť m je přirozené číslo (může být i $m = 0$). Budiž dáno lineární zobrazení $A\colon W \to F^m$, k tomu mějme ještě sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$. Potom soustava lineárních nerovnic*

$$Ax \leq \boldsymbol{b} \tag{1}$$

nemá řešení právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o}\colon \ \iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o \ \wedge \ \iota\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{b} < 0\,, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$, přičemž $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru F^m, dále o je nulová lineární forma $o\colon W \to F$ a 0 je nula tělesa F.

4.21.a. *Poznámka.* Zatímco prostor „cílových hodnot“ V byl do formulace Farkasova lemmatu 4.15 začleněn poměrně přirozeně, ve formulaci lemmatu 4.21 o základní dualitě už jej nenacházíme. Platí však následující tvrzení:

Nechť W, F, m, A, $\boldsymbol{b}$ má stejný význam jako v lemmatu 4.21 a nechť V je netriviální lineárně uspořádaný vektorový prostor nad F. Potom soustava (1) nemá řešení právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}\colon \ \iota\boldsymbol{u}^T A = o \ \wedge \ \iota\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} \prec 0\,, \tag{3}$$

kde $\boldsymbol{u} \in V^m$, k tomu $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru V^m, dále o je nulové lineární zobrazení $o: W \to V$ a 0 je nulový vektor prostoru V.

Kombinací s uvedeným lemmatem 4.21 pak dostáváme následující tvrzení: výroky (2), (3) a „soustava (1) nemá řešení“ jsou ekvivalentní.

Důkaz tohoto tvrzení je snadný. Když platí (3), pak soustava $Ax \leq \boldsymbol{b}$ jistě nemá řešení. Jestliže soustava $Ax \leq \boldsymbol{b}$ nemá řešení, potom – dle lemmatu 4.21, jehož důkaz 4.21.b uvádíme níže – platí (2). Nakonec, jelikož vektorový prostor V je netriviální, najdeme kladný vektor $\varepsilon \in V$, tedy $\varepsilon \succ 0$. Nyní, platí-li (2), pak na levou i pravou stranu rovnosti a nerovnosti v (2) stačí aplikovat zobrazení $\iota\varepsilon$ – tj., stačí uvážit sloupec $\boldsymbol{u} = (\lambda_i \varepsilon)_{i=1}^m \in V^m$, kde $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \in F^m$ je sloupec dosvědčující platnost (2) – čímž dostáváme (3).

4.21.b. *Důkaz.* Soustava nerovnic $Ax \leq \boldsymbol{b}$ nemá řešení právě tehdy, když implikace

$$(\,A \quad -\iota\boldsymbol{b}\,)\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = Ax - \iota\boldsymbol{b}(t) \leq \boldsymbol{o} \implies (\,o \quad \iota 1\,)\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = o(x) + \iota 1(t) = t \leq 0\,,$$

kde 1 je jednotka tělesa F, platí pro všechna $\binom{x}{t} \in W \dot{\times} F$. (Kdyby $t > 0$, potom bod $t^{-1}x$ by řešil soustavu $Ax \leq \boldsymbol{b}$.) Dle Farkasova lemmatu 4.15 (použitého pro případ $V = F$) ekvivalentně platí, že existuje $\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o}$ splňující $\iota\boldsymbol{\lambda}^T(\,A \quad -\iota\boldsymbol{b}\,) = (\,o \quad \iota 1\,)$. Je zřejmé, že tato rovnost je splněna tehdy a jen tehdy, když $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o$ a zároveň $(\iota\boldsymbol{\lambda}^T)(-\iota\boldsymbol{b}) = \iota 1$. K tomu je zřejmé, že $(\iota\boldsymbol{\lambda}^T)(-\iota\boldsymbol{b}) = \iota 1$ právě tehdy, když $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b} = -1$. Přitom platí $-1 < 0$. Na druhou stranu, máme-li $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \geq \boldsymbol{o}$ splňující $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o$ a $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b} < 0$, potom toto $\boldsymbol{\lambda}$ lze „přeškálovat“ tak, aby $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o$ a $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b} = -1$. (Stačí vzít $\boldsymbol{\lambda} :=$ $:= (-\lambda_i(\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b})^{-1})_{i=1}^m \in F^m$.) □

4.21.c. *Poznámka.* Jestliže $m = 0$, potom prostor F^m je triviální a soustava nerovnic $Ax \leq \boldsymbol{b}$ má vždy řešení (např. $x = 0 \in W$). Podaný důkaz 4.21.b je ale korektní i tehdy, když $m = 0$.

4.22. Poznámky. Základní dualita v lineárním programování. Nechť F je lineárně uspořádané těleso, ať W je vektorový prostor nad tělesem F a ať V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Mějme přirozené číslo m (lze vzít i $m = 0$), dále ať $A: W \to F^m$ je lineární zobrazení a $\boldsymbol{b} \in F^m$ je sloupcový vektor. K tomu nechť $o: W \to V$ je nulové lineární zobrazení a $\boldsymbol{o} = (0)_{i=1}^m \in V^m$ je sloupec nulových vektorů. Uvažujme následující primární úlohu LP (vlevo) a její duální úlohu (vpravo):

$$(\mathrm{P}_0) \qquad \begin{aligned} o(x) &\longrightarrow \max \\ Ax &\leq \boldsymbol{b}\,, \end{aligned} \qquad\qquad (\mathrm{D}_0) \qquad \begin{aligned} \iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} &\longrightarrow \min \\ \iota\boldsymbol{u}^T A &= o\,, \\ \boldsymbol{u} &\succeq \boldsymbol{o}\,, \end{aligned}$$

kde $x \in W$ a $\boldsymbol{u} \in V^m$ jsou proměnné. Význam primární úlohy (P_0) jsme objasnili už v definici 4.18. Významu duální úlohy (D_0) věnujeme následující samostatnou poznámku 4.22.a. Na vzájemnou provázanost obou úloh (P_0) a (D_0) upozorníme pomocí lemmatu 4.21 o základní dualitě v níže uvedené poznámce 4.22.b.

4.22.a. Objasněme význam duální úlohy lineárního programování, tj. úlohy (D_0). Duální úlohu (D_0) získáme, jestliže v obecné úloze optimalizace 4.18.(1), viz definici 4.18, položíme $\bar{M} = V^m$, dále $M = \{\,\boldsymbol{u} \in V^m\,;\ \iota\boldsymbol{u}^T A = o \ \wedge\ \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}\,\}$, k tomu $N = V$, přičemž cílová funkce $f: V^m \to V$ je dána předpisem $f(\boldsymbol{u}) = \iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b}$ pro každé $\boldsymbol{u} \in V^m$. Duální úloha je ovšem variantou obecné úlohy optimalizace, protože cílová funkce se zde minimalizuje.

Stojí za pozornost, že zobrazení $f: V^m \to V$ určené předpisem $f(\boldsymbol{u}) = \iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b}$ pro každé $\boldsymbol{u} \in V^m$ v obecném případě – jestliže těleso F není komutativní (viz též odstavec 3.65) – nemusí být lineární. (!)

Uveďme ještě jeden alternativní, možná lepší způsob, jakým lze duální úlohu získat. Opět uvažujme obecnou úlohu optimalizace 4.18.(1) z definice 4.18. Nyní však položíme $\bar{M} = (F^m)^{\#}_V$, což je prostor všech lineárních zobrazení definovaných na prostoru F^m a jdoucích do prostoru V (definice 1.38). Dále klademe $M = \{\, \varphi \in (F^m)^{\#}_V \,;\ \varphi \circ A = o \ \wedge$ $\wedge\ \varphi \in ((F_0^-)^m)^*_V \,\}$, kde „$\circ$" označuje skládání zobrazení a množinu $((F_0^-)^m)^*_V$ zavádíme níže. K tomu opět klademe $N = V$ a cílová funkce $f\colon (F^m)^{\#}_V \to V$ je určena předpisem $f(\varphi) = \varphi(\boldsymbol{b})$ pro $\varphi \in (F^m)^{\#}_V$. Zbývá objasnit význam množiny $((F_0^-)^m)^*_V$.

Nechť na chvíli W a V je po řadě vektorový a lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Uvažujme prostor $W^{\#}_V$ (definice 1.38). V prostoru W zvolme libovolnou podmnožinu $A \subseteq W$. Pak klademe $A^*_V = \{\, \varphi \in W^{\#}_V \,;$ $\forall a \in A\colon\ \varphi(a) \preceq 0 \,\}$, kde 0 je počátek prostoru V. Povšimněme si značné podobnosti se známou definicí polárního kužele. (Upozorněme ale na významný rozdíl. Je-li $A \subseteq$ $\subseteq W$, potom klasický polární kužel množiny A leží v algebraickém duálu $W^{\#}$. Zde však množina A^*_V leží v prostoru $W^{\#}_V$.) Vskutku, jestliže $\varphi, \psi \in A^*_V$, potom zajisté $\varphi+\psi \in A^*_V$. Nelze však říkat, že A^*_V je kužel, protože na prostoru $W^{\#}_V$ nemáme zavedenu strukturu (levého ani pravého) vektorového prostoru. (Viz též poznámky 1.74 a úvahu 1.75.)

Nyní se vraťme k původnímu případu, kdy pracujeme s prostory F^m a $(F^m)^{\#}_V$. Máme objasnit význam množiny $((F_0^-)^m)^*_V$. Položme nejprve $(F_0^-)^m = \{\, \boldsymbol{\lambda} \in F^m \,;$ $\boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{o} \,\}$, kde $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru F^m. Zavedená množina $(F_0^-)^m$ je tzv. *nekladný ortant* prostoru F^m. (Lehce ověříme, že nekladný ortant $(F_0^-)^m$ je v prostoru F^m kuželem dle definice 3.38.) Nyní samozřejmě klademe $((F_0^-)^m)^*_V = A^*_V$, kde $A = (F_0^-)^m$, tedy $((F_0^-)^m)^*_V = \{\, \varphi \in (F^m)^{\#}_V \,;\ \forall \boldsymbol{\lambda} \in (F_0^-)^m\colon\ \varphi(\boldsymbol{\lambda}) \leq 0 \,\}$, přičemž 0 je nula tělesa F. Obecně platí, že když $\varphi, \psi \in ((F_0^-)^m)^*_V$, potom $\varphi + \psi \in ((F_0^-)^m)^*_V$, a když na prostoru $(F^m)^{\#}_V$ zavedeme strukturu levého vektorového prostoru (poznámka 1.74.e; prostor $(F^m)^{\#}_V$ bude izomorfní s prostorem V^m), potom množina $((F_0^-)^m)^*_V$ v něm bude kužel (obdobně jako množina $\{\, \boldsymbol{u} \in V^m \,;\ \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o} \,\}$ je kužel v prostoru V^m). Kdybychom však na prostoru $(F^m)^{\#}_V$ zavedli strukturu pravého vektorového prostoru (poznámka 1.74.d), potom uvedená otázka, zda množina $((F_0^-)^m)^*_V$ je kužel, už se zdá být nejasná.

Poznamenejme, že cílová funkce $f\colon (F^m)^{\#}_V \to V$ určená předpisem $f(\varphi) = \varphi(\boldsymbol{b})$ pro každé $\varphi \in (F^m)^{\#}_V$ v obecném případě nemusí být lineární. Předně, abychom o linearitě funkce $f\colon (F^m)^{\#}_V \to V$ vůbec mohli hovořit, na prostoru $(F^m)^{\#}_V$ napřed musí být zavedena struktura levého (nikoliv pravého) vektorového prostoru, viz poznámku 1.74.e (nikoliv 1.74.d). A i když na $(F^m)^{\#}_V$ strukturu levého vektorového prostoru zavedeme, pak – jestliže těleso F není komutativní (viz též odstavec 3.65) – tato funkce f nemusí být lineární. (Prostor $(F^m)^{\#}_V$ bude izomorfní s prostorem V^m a cílová funkce $f\colon V^m \to V$ nemusela být lineární ani v předcházejícím případě.)

Snad bychom ještě měli odůvodnit, proč obě pojetí duální úlohy (D_0), která jsme v této poznámce 4.22.a uvedli, jsou ekvivalentní. Stačí si uvědomit, že když $\boldsymbol{u} \in V^m$, potom $\iota\boldsymbol{u}^T \in (F^m)^{\#}_V$, a že ke každému $\varphi \in (F^m)^{\#}_V$ existuje právě jedno $\boldsymbol{u} \in V^m$ splňující $\varphi = \iota\boldsymbol{u}^T$. Nadto pro každé $\boldsymbol{u} \in V^m$ platí $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$ tehdy a jen tehdy, když $\iota\boldsymbol{u}^T \in ((F_0^-)^m)^*_V$. (Snadno nahlédneme, že $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$ právě tehdy, když $\iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\lambda} \geq 0$ pro všechna $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$, kde $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ jsou standardní jednotkové vektory z prostoru F^m dle definice 1.57.) Nyní už by ekvivalence obou pojetí (tedy vzájemně jednoznačný vztah mezi množinami přípustných řešení a rovnost hodnot obou cílových funkcí ve vzájemně si odpovídajících bodech) měla být zřejmá.

4.22.b. Ukažme, že primární a duální úloha LP, tj. výše uvedené úlohy (P_0) a (D_0), jsou vzájemně provázány. K tomu použijeme již dokázané lemma 4.21 o základní dualitě v LP.

Povšimněme si nejdříve, že primární úloha (P_0) má optimální řešení (a její optimální hodnota je 0) právě tehdy, když je přípustná, tj., právě tehdy, když soustava $Ax \leq \boldsymbol{b}$ má řešení.

Předpokládejme napřed, že primární úloha (P_0) je přípustná, že $Ax \leq \boldsymbol{b}$ má řešení. Zcela evidentně platí, že když sloupec $\boldsymbol{u} \in V^m$ je přípustným řešením duální úlohy (D_0), je splněno $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$ a $\iota\boldsymbol{u}^T A = o$, potom $\iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \succeq 0$, kde 0 je nulový vektor prostoru V. (Soustava $Ax \leq \boldsymbol{b}$ by jinak žádné řešení nemohla mít. Srov. triviální implikaci „$\Leftarrow$“ lemmatu 4.21 resp. triviální implikaci „(3) $\Rightarrow$ ‚soustava $Ax \leq \boldsymbol{b}$ nemá řešení‘“ z poznámky 4.21.a.) Dále vidíme, že nulový sloupec $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ je přípustným řešením duální úlohy a že platí $\iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{o} = 0$. Z uvedeného vyplývá, že duální úloha (D_0) má optimální řešení – optimálním řešením je například bod $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ – a že optimální hodnota duální úlohy je 0.

Nyní předpokládejme, že primární úloha (P_0) není přípustná. Navíc předpokládejme, že vektorový prostor V je netriviální. (!) Tvrdíme, že potom cílová funkce duální úlohy (D_0) není zdola omezená, že ke každému $\hat{z} \in V$ existuje $\boldsymbol{u} \in V^m$ splňující $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$ a $\iota\boldsymbol{u}^T A = o$ takové, že $\iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \prec \hat{z}$. Uvedené tvrzení je zřejmé, jestliže zvolené $\hat{z}$ je kladné, $\hat{z} \succ 0$ (neboť stačí vzít například $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$). Předpokládejme, že zvolené $\hat{z}$ je nekladné, $\hat{z} \preceq 0$. Protože prostor V je netriviální, najdeme v něm alespoň jeden kladný vektor, existuje $\varepsilon \in V$ splňující $\varepsilon \succ 0$. Jelikož primární úloha není přípustná, soustava $Ax \leq \boldsymbol{b}$ nemá řešení, tudíž dle lemmatu 4.21 o základní dualitě v LP existuje $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \in F^m$ takové, že $\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o}$ a dále $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o$ a $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b} < 0$, kde $o\colon W \to F$ je nulová lineární forma a 0 je nula tělesa F. Bez újmy na obecnosti smíme předpokládat, že $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b} = -1$ (stačí položit $\boldsymbol{\lambda} := (-\lambda_i(\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{b})^{-1})_{i=1}^m$, viz též konec důkazu 4.21.b). Nyní položme $\boldsymbol{u} = (-\lambda_i(\hat{z}-\varepsilon))_{i=1}^m$. Vidíme, že $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$, dále $\iota\boldsymbol{u}^T A = o$ a k tomu $\iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} = \hat{z} - \varepsilon \prec \hat{z}$, přičemž $\boldsymbol{u} \in V^m$ a o a 0 je opět po řadě nulové lineární zobrazení $o\colon W \to V$ a nulový vektor prostoru V. Tím je dané tvrzení dokázáno.

Vyslovme obměnu dokázaného tvrzení: Nechť vektorový prostor V je netriviální. Jestliže duální úloha (D_0) je zdola omezená, potom primární úloha (P_0) je přípustná.

Povšimněme si, že duální úloha (D_0) má vždy alespoň jedno přípustné řešení (například $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$). Dále vidíme, že nastává právě jedna z následujících dvou možností: buď duální úloha má optimální řešení (a optimální hodnota je 0), anebo duální úloha není omezená zdola. (Jestliže vektorový prostor V je triviální nebo jestliže primární úloha (P_0) je přípustná, potom sloupec $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ je optimálním řešením duální úlohy (D_0). Jestliže vektorový prostor V je netriviální a primární úloha (P_0) je nepřípustná, potom duální úloha (D_0) není zdola omezená.) Ekvivalentně lze říci, že duální úloha (D_0) má optimální řešení právě tehdy, když je omezená zdola.

Z provedené diskuse vyplývají následující dvě tvrzení, kde 0 je v obou případech nulový vektor prostoru V:

I. Jestliže primární úloha (P_0) má optimální řešení, potom duální úloha (D_0) má také optimální řešení a optimální hodnota obou úloh je 0.

II. Jestliže vektorový prostor V je netriviální a duální úloha (D_0) má optimální řešení, potom primární úloha (P_0) má rovněž optimální řešení a optimální hodnota obou úloh je 0.

Uvedená dvě tvrzení dávají následující důsledek: Nechť vektorový prostor V je netriviální. Potom primární úloha (P_0) má optimální řešení právě tehdy, když duální úloha (D_0) má optimální řešení. Nadto, jestliže obě úlohy mají optimální řešení, potom optimální hodnota obou úloh je 0. Z výše provedené diskuse dále vyplývá, že když žádná z těchto úloh nemá optimální řešení, potom primární úloha (P_0) není přípustná a duální úloha (D_0) není omezená zdola.

Získaný důsledek není ničím jiným než principem duality (viz konec definice 4.18) pro výše uvedené úlohy (P_0) a (D_0). Princip duality jsme zatím formulovali jen pro velmi jednoduché úlohy lineárního programování – totiž úlohy (P_0) a (D_0) – kde cílová funkce primární úlohy je nulová. Tento princip duality jsme ovšem získali výhradně za použití lemmatu 4.21 a z právě tohoto důvodu uvedené lemma 4.21 nazýváme „lemmatem o základní dualitě v lineárním programování“. Princip duality pro obecné úlohy LP, kde cílová funkce primární úlohy může být libovolná (lineární), formulujeme až v § 6, viz princip duality 6.15.

4.23. Poznámka. Obměna lemmatu o základní dualitě v lineárním programování. Povšimněme si, že obměnou ekvivalence z lemmatu 4.21 dostáváme tvrzení, které jistým způsobem připomíná Farkasovo lemma 4.15: Implikace „$\iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o \Rightarrow \iota\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{b} \geq 0$“ platí pro všechna nezáporná $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$, tj. pro všechna $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ splňující $\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o}$, právě tehdy, když existuje $x \in W$ takové, že $Ax \leq \boldsymbol{b}$.

Snad právě tato ekvivalentní formulace lemmatu 4.21 zapříčiňuje, že někteří autoři lemma o základní dualitě v lineárním programování považují za variantu Farkasova lemmatu, jak jsme v poznámce 4.20 zmínili.

4.24. Poznámka. Ještě jeden důkaz lemmatu o základní dualitě v lineárním programování. Uveďme ještě jeden důkaz lemmatu 4.21 o základní dualitě v případě, že vektorový prostor W je konečněrozměrný a F je těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním. Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je reálná matice typu $m \times n$, kde m a n jsou přirozená čísla. Dále mějme m-složkový sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Chceme dokázat, že soustava $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je proměnná, nemá řešení právě tehdy, když existuje nezáporné $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ takové, že $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{o}^T$ a $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} < 0$. Vzhledem k předcházející poznámce 4.23 stačí dokázat obměnu uvedené ekvivalence. To nyní provedeme.

Implikace „$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{o}^T \Rightarrow \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \geq 0$“ platí pro všechna nezáporná $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ právě tehdy, když implikace „$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{o}$, $-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{o}$, $-\boldsymbol{Iu} \leq \boldsymbol{o} \Rightarrow -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u} \leq 0$“ platí pro všechna $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$, kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice typu $m \times m$. Farkasovo lemma 1 z úvodní kapitoly této práce ekvivalentně dává, že existují nezáporné sloupce $\boldsymbol{x}^+, \boldsymbol{x}^- \in \mathbb{R}^n$ a nezáporný sloupec $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ tak, že $\boldsymbol{x}^{-T}\boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{x}^{+T}\boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{I} = -\boldsymbol{b}^T$, neboli $\boldsymbol{x}^{+T}\boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{x}^{-T}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{I} = \boldsymbol{b}^T$. Ekvivalentně existuje vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$.

Právě provedený důkaz lemmatu o základní dualitě (díky několikerému transponování matic) ovšem silně využil toho, že „základní“ prostor $W = \mathbb{R}^n$ je konečněrozměrný. Lze jen spekulovat, zda Gyula FARKAS tento důkaz mohl provést. Podrobněji viz poznámku 4.20.

4.25. V poznámce 4.23 jsme viděli, že lemma 4.21 dává odpověď na otázku, kdy daná soustava lineárních nerovnic $Ax \leq \boldsymbol{b}$ má řešení pro předem zvolenou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in F^m$. V následujícím lemmatu 4.26 a tvrzení 4.27 se budeme zabývat otázkou, kdy soustava $Ax \leq \boldsymbol{b}$ má řešení pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in F^m$. Vlastně půjde o „znaménkové varianty“ lemmatu 2.16 a „Fredholmovy alternativy“ 2.20.

4.26. Lemma. *Budiž dán vektorový prostor W nad lineárně uspořádaným tělesem F. Mějme přirozené číslo m (lze zvolit i $m = 0$) a nechť $A\colon W \to F^m$ je lineární zobrazení. Potom soustava lineárních nerovnic $Ax \leq \boldsymbol{b}$ má řešení pro každou pravou $\boldsymbol{b} \in F^m$ právě tehdy, když (volněji řečeno) každá ze soustav $Ax \leq -\boldsymbol{e}_1, \ldots, Ax \leq -\boldsymbol{e}_m$ má řešení. Přesněji:*

Soustava lineárních nerovnic

$$Ax \leq \boldsymbol{b} \tag{1}$$

má řešení pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in F^m$ právě tehdy, když

$$\big(\exists x_1 \in W\colon\ Ax_1 \leq -\boldsymbol{e}_1\big) \ \wedge \cdots \wedge \ \big(\exists x_m \in W\colon\ Ax_m \leq -\boldsymbol{e}_m\big)\,. \tag{2}$$

Zde $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor prostoru F^m a sloupce $\boldsymbol{e}_i \in F^m$ mají jednotku tělesa F na i-tém místě a nuly tělesa F jinde pro $i = 1, \ldots, m$.

4.26.a. *Poznámka.* Jako soustava lineárních rovnic $Ax = \boldsymbol{b}$ má řešení pro nulovou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in F^m$, tedy $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$, viz též lemma 2.16, tak soustava lineárních nerovnic $Ax \leq \boldsymbol{b}$ má vždy řešení pro libovolnou nezápornou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in F^m$, splňující $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{o}$.

4.26.b. *Poznámka.* Jestliže $m = 0$, pak vektory $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ definicí 1.57 nejsou zavedeny. To ovšem nevadí, protože sloupcové vektory $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ nepotřebujeme, je-li $m = 0$, neboť konjunkce (2) je prázdná. Níže podaný důkaz 4.26.c bude korektní i tehdy, když $m = 0$, jelikož konjunkce výroků, v nichž vektory $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ vystupují, budou prázdné.

4.26.c. *Důkaz.* Implikace „$\Rightarrow$“ je zřejmá, protože když soustava $Ax \le \boldsymbol{b}$ má řešení pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in F^m$, musí mít řešení i pro $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{e}_1, \dots, -\boldsymbol{e}_m$.

Zbývá dokázat implikaci „$\Leftarrow$“. Mějme bod $x_1 \in W$ splňující $Ax_1 \le -\boldsymbol{e}_1$ a zároveň … a zároveň mějme bod $x_m \in W$ splňující $Ax_m \le -\boldsymbol{e}_m$. Zvolme libovolnou pravou stranu $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$. Podle poznámky 3.128 sloupcový vektor $\boldsymbol{b}$ můžeme vyjádřit jako rozdíl dvou nezáporných sloupcových vektorů: položme $\boldsymbol{b}^- = ((b_i)^-)_{i=1}^m$ a $\boldsymbol{b}^+ = ((b_i)^+)_{i=1}^m$, kde $(b_i)^-$ a $(b_i)^+$ je po řadě nekladná a nezáporná část skaláru b_i pro $i = 1, \dots, m$ (definice 3.44). Máme $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^+ - \boldsymbol{b}^-$, dále $\boldsymbol{b}^+ \ge \boldsymbol{o}$, k tomu $(b_i)^- \ge 0$ pro $i = 1, \dots, m$. Nyní vidíme, že soustava $Ax \le -\boldsymbol{b}^-$ má řešení. Jejím řešením je například bod $x = (b_1)^- x_1 + \cdots + (b_m)^- x_m$. (Odůvodnění by se provedlo obdobně jako v důkazu 2.16.b.) Stejný bod pak řeší i soustavu $Ax \le \boldsymbol{b}$, neboť $Ax \le -\boldsymbol{b}^- \le \boldsymbol{b}^+ - \boldsymbol{b}^- = \boldsymbol{b}$. □

4.27. Tvrzení. *Mějme vektorový prostor W nad lineárně uspořádaným tělesem F. Ať m je přirozené číslo (může být i $m = 0$) a nechť $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \colon W \to F^m$ je lineární zobrazení, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou lineární formy definované na vektorovém prostoru W. Potom soustava lineárních nerovnic*

$$Ax \le \boldsymbol{b}$$

má řešení pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in F^m$ tehdy a jen tehdy, když pro každý nezáporný sloupcový vektor $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$, aby $\boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{o}$, platí: jestliže $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o$, potom $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$. Zde $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru F^m a o je nulová lineární forma $o \colon W \to F$.

4.27.a. *Poznámka.* Víme (poznámka 2.18), že lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když pro každé $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ splňující $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o$ platí $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$. Podmínka uvedená v tvrzení 4.27 (že pro všechna $\boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{o}$ splňující $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o$ platí $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$) tak vlastně vyjadřuje, že lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou *kuželově nezávislé.* (Srov. „Fredholmovu alternativu“ 2.20 a tvrzení 2.23.)

4.27.b. *Důkaz.* Nechť pro každé nezáporné $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ splňující $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o$ platí $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$. Ekvivalentně lze říci, že pro každé nezáporné $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ splňující $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o$ platí $-\iota\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{e}_1 = 0$ a současně … a současně $-\iota\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{e}_m = 0$, kde 0 je nula tělesa F a $\boldsymbol{e}_i$ je sloupcový vektor mající jedničku tělesa F na i-tém místě a na ostatních místech nuly pro $i = 1, \dots, m$ (definice 1.57; srov. poznámku 2.18). To ekvivalentně znamená, že podmínku 4.21.(2) lemmatu 4.21 nelze splnit pro žádné $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{e}_1, \dots, -\boldsymbol{e}_m$. Podle lemmatu 4.21 o základní dualitě v LP tedy ekvivalentně platí, že každá ze soustav $Ax \le -\boldsymbol{e}_1, \dots, Ax \le -\boldsymbol{e}_m$ má řešení. Poslední lemma 4.26 pak ekvivalentně dává, že soustava lineárních nerovnic $Ax \le \boldsymbol{b}$ má řešení pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b} \in F^m$. □

4.28. V závěrečné části tohoto paragrafu se budeme zabývat Haarovou větou [77: Teorém 6.1], [69: Teorém 4], [59: výsledek na konci § 2], [60: výsledek na konci § 2] – článek [60] je v podstatě německým překladem maďarského článku [59] – srov. [35: Teorém 4 (v § 3 v Části I)] nebo [22: teorém 2.4 (v hlavě II § 1 na str. 124)].

4.29. Poznámky. K Haarově větě 4.30 nejprve uvedeme několik poznámek.

4.29.a. Zhruba lze říci, že zatímco Farkasovo lemma se zabývá platností implikace „$Ax \leq \leq \boldsymbol{o} \Rightarrow \gamma(x) \leq 0$“ pro všechna $x \in W$, Haarovo zobecnění Farkasova lemmatu se zabývá platností implikace „$Ax \leq \boldsymbol{b} \Rightarrow \gamma(x) \leq K$“ pro všechna $x \in W$. Zde $A: W \to \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení, kde W je reálný vektorový prostor a m je přirozené číslo, k tomu $\gamma: W \to \mathbb{R}$ je (pouze) lineární forma definovaná na prostoru W. Dále $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ je sloupcový vektor a $K \in \mathbb{R}$ je nějaká konstanta. (Těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním je možné nahradit libovolným tělesem F s lineárním uspořádáním. Těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ jsme zde zvolili pouze z důvodu názornosti.) Vidíme, že rozdíl mezi Farkasovým lemmatem a Haarovou větou tkví především v tom, že pravé strany nerovnic z implikace ve Farkasově lemmatu jsou nulové, kdežto v Haarově větě tyto strany mohou být obecně nenulové. Z tohoto důvodu – dokud pracujeme v kontextu jednoho reálného vektorového prostoru resp. jednoho „základního“ vektorového prostoru W nad lineárně uspořádaným tělesem F – lze Haarovu větu považovat za zobecnění Farkasova lemmatu. Srov. [22: komentář za důkazem teorému 2.4 (v hlavě II § 1 na str. 125)]. (Farkasovo lemma získáme, jestliže v Haarově větě volíme nulové pravé strany.) Ukazuje se však, že jakmile začneme pracovat v kontextu „základního“ vektorového prostoru W a lineárně uspořádaného vektorového prostoru „cílových hodnot“ V, kde oba prostory W a V jsou nad společným lineárně uspořádaným tělesem F, Haarova věta už Farkasovo lemma nezobecňuje, protože je nutné předpokládat určitou dodatečnou vlastnost uspořádání vektorového prostoru V, viz též poznámku 4.31 níže.

4.29.b. Alfréd HAAR ve svých článcích [59], [60] sice pracuje v reálném vektorovém prostoru konečné dimenze, avšak zabývá se soustavami s obecně nekonečným počtem lineárních nerovnic (tzv. semiinfinitní případ). Má-li soustava nekonečně mnoho nerovnic, požaduje, aby tato soustava byla uzavřená. (Když soustava má jen konečně mnoho nerovnic, je tato podmínka splněna samozřejmě.) Níže uvedená věta 4.30 tedy původní Haarův výsledek [59: výsledek na konci § 2], [60: výsledek na konci § 2] zobecňuje jen v případě soustavy s konečným počtem nerovností. Viz též poznámku 10.16.

4.29.c. Haarovu větu v případě (obecně) nekonečněrozměrného prostoru dokazoval Ky FAN [35], viz též poznámku 4.14.b, později také Sergej ČERNIKOV (Сергей ЧЕРНИКОВ) [22]. Níže uvedená Haarova věta 4.30 je ale obecnější: Abychom obdrželi Černikovův výsledek [22: teorém 2.4 (v hlavě II § 1 na str. 124)], v následující větě 4.30 stačí za vektorový prostor V dosadit aditivní grupu tělesa F spolu s jeho uspořádáním (a předpokládat, že těleso F je komutativní, viz též odstavec 3.65). K získání Fanova výsledku [35: Teorém 4 (v § 3 v Části I)] postačuje, abychom v následující Haarově větě 4.30 za těleso F a prostor V dosadili po řadě těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním a aditivní grupu tělesa $\mathbb{R}$ s jeho uspořádáním.

4.30. Haarova věta. *Nechť F je lineárně uspořádané těleso, nechť W je vektorový prostor nad tělesem F a nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Dále mějme přirozené číslo m (smí být také $m = 0$), lineární zobrazení $A: W \to F^m$ a lineární zobrazení $\gamma: W \to V$. Mějme rovněž sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$ a libovolný vektor $K \in V$. Předpokládejme, že soustava lineárních nerovnic $Ax \leq \boldsymbol{b}$ má řešení, že pro vhodné $x_0 \in W$ platí $Ax_0 \leq \boldsymbol{b}$. K tomu předpokládejme, že uspořádání vektorového prostoru V je slabě archimedovské. Potom implikace*

$$Ax \leq \boldsymbol{b} \implies \gamma(x) \preceq K \tag{1}$$

je splněna pro všechna $x \in W$ právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}\colon\ \iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A = \gamma \ \wedge\ \iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \preceq K\,, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{u} \in V^m$ a $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru V^m.

4.30.a. *Poznámka.* Pro pojem slabě archimedovského uspořádání viz definici 3.63, viz též poznámku 3.113.

4.30.b. *Důkaz.* Našim cílem je ukázat, že za splnění předpokladů věty platí implikace (1) pro všechna $x \in W$ tehdy a jen tehdy, když implikace

$$\begin{array}{c} Ax - \iota\boldsymbol{b}(t) \leq \boldsymbol{o}\,, \\ \underline{o(x) - \iota 1(t) \leq 0} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \gamma(x) - \iota K(t) \preceq 0 \tag{3}$$

platí pro všechna $\binom{x}{t} \in W \dot{\times} F$, kde $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor prostoru F^m, dále o je nulová lineární forma $o\colon W \to F$, k tomu 1 je jednotka tělesa F a 0 je po řadě nula tělesa F a nulový vektor prostoru V. Platí-li implikace (3) pro všechna $\binom{x}{t} \in W \dot{\times} F$, potom implikace (1) jistě platí pro všechna $x \in W$, neboť v implikaci (3) stačí volit $t = 1$. Nyní předpokládejme, že implikace (1) platí pro všechna $x \in W$. Dále zvolme $x \in W$ a $t \in F$. Platnost implikace (3) je zřejmá, jestliže $t < 0$, protože její předpoklad není splněn, proto je tato implikace pravdivá. Platnost implikace (3) je rovněž zřejmá, jestliže $t > 0$, neboť implikace (1) je splněna i tehdy, když v ní za x dosadíme $t^{-1}x$. Zbývá uvažovat případ, kdy $t = 0$. Pro spor předpokládejme, že existuje $\hat{x} \in W$ takové, že $A\hat{x} \leq \boldsymbol{o}$ a současně $\gamma(\hat{x}) \succ 0$. Víme ovšem, že existuje bod $x_0 \in W$ splňující $Ax_0 \leq \boldsymbol{b}$. Pomocí implikace (1) odvodíme, že $\gamma(x_0) \preceq K$, tudíž $K - \gamma(x_0) \succeq 0$. Pro kterékoliv nezáporné $\lambda \in F$, splňující $\lambda \geq 0$, tak máme $A(x_0 + \lambda\hat{x}) \leq \boldsymbol{b}$, a tudíž dle implikace (1) platí $\gamma(x_0 + \lambda\hat{x}) \preceq K$ neboli $\lambda\gamma(\hat{x}) \preceq K - \gamma(x_0)$ pro všechna nezáporná $\lambda \in F$. Prostor V je ale slabě archimedovský, k tomu $\gamma(\hat{x}) \succ 0$. To znamená, že pro vhodné $\hat{\lambda} \in F$ platí $\hat{\lambda}\gamma(\hat{x}) \succeq K - \gamma(x_0)$. Ježto $\gamma(\hat{x}) \succ 0$ a $K - \gamma(x_0) \succeq 0$, musí platit $\hat{\lambda} \geq 0$. Nyní, uvažujeme-li $\lambda = \hat{\lambda} + 1$, dostáváme $\lambda\gamma(\hat{x}) \succ K - \gamma(x_0)$, neboť $\gamma(\hat{x}) \succ 0$, což je spor, protože má platit $\lambda\gamma(\hat{x}) \preceq K - \gamma(x_0)$. Implikace (3) tedy platí pro všechna $\binom{x}{t} \in W \dot{\times} F$.

Nyní již stačí použít Farkasovo lemma 4.15. (Blokovou soustavu na levé straně implikace (3) dle poznámky 3.125 můžeme převést na jedinou soustavu lineárních nerovnic. To je nutné poznamenat, aby Farkasovo lemma 4.15 bylo možné (formálně) použít, neboť v lemmatu 4.15 vystupuje pouze jediná soustava lineárních nerovnic.) Víme tedy, že (za předpokladů věty) implikace (1) platí pro všechna $x \in W$ právě tehdy, když implikace (3) platí pro všechna $\binom{x}{t} \in W \dot{\times} F$, takže dle Farkasova lemmatu 4.15 ekvivalentně existuje nezáporný blokový sloupec $\binom{\boldsymbol{u}}{v} \succeq \binom{\boldsymbol{o}}{0}$, kde $\binom{\boldsymbol{u}}{v} \in V^m \dot{\times} V$, takový, že $\iota\boldsymbol{u}^T(A \;\; -\iota\boldsymbol{b}) + \iota v(o \;\; -\iota 1) = (\gamma \;\; -\iota K)$ neboli $\iota\boldsymbol{u}^T A = \gamma$ a $\iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} + v = K$. Ekvivalentně lze říci, že existuje nezáporné $\boldsymbol{u} \in V^m$, splňující $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$, takové, že $\iota\boldsymbol{u}^T A = \gamma$ a $\iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \preceq K$. Tím je důkaz proveden. □

4.31. Poznámka. Z provedeného důkazu 4.30.b je zřejmé, že předpoklady Haarovy věty 4.30 nelze oslabit: Haarova věta 4.30 už nemusí platit, jestliže soustava $Ax \leq \boldsymbol{b}$ (stojící na levé straně implikace 4.30.(1)) nemá řešení. (Stačí uvážit případ, kdy zobrazení A je nulové, dále $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{o}$ a zobrazení γ je nenulové.) Stejně tak Haarova věta 4.30 nemusí platit, jestliže prostor V není slabě archimedovský. (Implikace 4.30.(3) už by v případě, že $t = 0$, nemusela být splněna.)

Stojí za pozornost, že Farkasovo lemma 4.15 platí bez ohledu na to, zda prostor V je slabě archimedovský. Z tohoto důvodu už nelze tvrdit, že Haarova věta 4.30 je zobecněním Farkasova lemmatu 4.15.

(Poznamenejme, že uvedenou skutečnost – že Haarova věta 4.30 není zobecněním Farkasova lemmatu 4.15 – netvrdíme na základě toho, že soustava $Ax \leq \boldsymbol{b}$ z levé strany implikace 4.30.(1) Haarovy věty 4.30 má mít řešení. Soustavě $Ax \leq \boldsymbol{b}$ z Haarovy věty 4.30 odpovídá soustava $Ax \leq \boldsymbol{o}$ s nulovou pravou stranou stojící na levé straně implikace 4.15.(1) Farkasova lemmatu 4.15. Ovšem soustava $Ax \leq \boldsymbol{o}$ je vždy řešitelná, řešením je například počátek $x = 0$ prostoru W; na to snad ani nebylo nutné upozorňovat.)

4.32. Poznámka. Haarova věta a princip duality. Pomocí Haarovy věty 4.30 lze dokázat také část principu duality (viz definici 4.18 a poznámku 4.22.b) pro obecné úlohy LP. (Velmi stručně naznačme myšlenku: Nechť bod $x^* \in W$ je optimálním řešením úlohy maximalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $Ax \leq \boldsymbol{b}$. To znamená, že implikace 4.30.(1) Haarovy věty 4.30, kde dosadíme $K = \gamma(x^*)$, platí pro všechna $x \in W$. Haarova věta 4.30 pak dává, že existuje nezáporné $\boldsymbol{u}^* \in V^m$ takové, že $\iota \boldsymbol{u}^{*T} A = \gamma$ a $\iota \boldsymbol{u}^{*T} \boldsymbol{b} \preceq K = \gamma(x^*)$. K tomu z věty 6.6 o slabé dualitě plyne, že $\iota \boldsymbol{u}^{*T} \boldsymbol{b} \succeq \gamma(x^*)$. Tudíž $\iota \boldsymbol{u}^{*T} \boldsymbol{b} = \gamma(x^*)$. Tím je důkaz završen.) Při tomto způsobu důkazu je ale nutné předpokládat, že uspořádání prostoru V je slabě archimedovské, aby Haarovu větu 4.30 bylo možné použít. V § 6 důkaz principu duality 6.15 provedeme jiným způsobem, při kterém na uspořádání prostoru V není nutné klást žádné další omezující požadavky. Naproti tomu se však v další kapitole, kde se budeme zabývat úlohami lineárního programování s nekonečným počtem lineárních omezení, uchýlíme k tomu, že princip duality 12.9 dokážeme právě pomocí Haarovy věty 10.17. (Učiníme tak pro nedostatek jiných způsobů důkazu.)

4.33. Dosažené výsledky. Uvedli jsme nové lemma 4.9, s jehož pomocí jsme snadno dokázali zobecněné Farkasovo lemma 4.15, které je jedním z ústředních výsledků této práce. V poznámkách 4.22 jsme uvedli význam dokázaného lemmatu 4.21 o základní dualitě v lineárním programování. Dokázali jsme rovněž zobecněnou Haarovu větu 4.30 a v poznámce 4.32 jsme připomněli souvislost Haarovy věty s principem duality pro úlohy lineárního programování. Autor hlavní výsledky tohoto paragrafu – Farkasovo lemma 4.15 a lemma 4.21 o základní dualitě v LP – odeslal k publikaci, viz [15].

§ 5 Další věty o alternativě

5.1. V úvodní kapitole této práce jsme již objasnili, že tzv. věty o alternativě jsou obyčejně tvrzení zhruba následujícího tvaru: primární soustava nemá řešení právě tehdy, když duální soustava má řešení. Větami o alternativě, které jsme v předcházejících paragrafech už dokázali, jsou Fredholmova věta 2.11 a lemma 4.21 o základní dualitě v lineárním programování. Za věty o alternativě se považují rovněž základní lemma 2.3, Farkasovo lemma 4.15 i Haarova věta 4.30.

5.2. Studium lineárních nerovností v matematice sahá do dávnější minulosti. Připomeňme, že soustavami lineárních nerovnic – ve snaze formulovat věty o alternativě – se zabýval už FOURIER, viz poznámku 4.2.d, viz též níže uvedenou poznámku 5.26. Stručný pohled do historie tohoto tématu lze nalézt v Motzkinově práci [71], [72: § 2 (v úvodní kapitole)].

5.3. Za první úspěšně dokázanou větu o alternativě se všeobecně považuje Gordanova věta [56]. Zmíněný článek [56] pochází z roku 1873.

5.4. Gordanova věta. *Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Dále ať m je přirozené číslo (může být také $m = 0$) a nechť $A\colon W \to F^m$ je lineární zobrazení. Potom soustava ostrých lineárních nerovnic*

$$Ax < \boldsymbol{o}$$

nemá řešení právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o},\ \boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o}\colon\ \iota \boldsymbol{\lambda}^T A = o\,,$$

kde $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$, dále $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor prostoru F^m a o je nulová lineární forma $o\colon W \to F$.

5.5. Gordanovu větu 5.4 uvádíme bez důkazu. Namísto toho dokážeme Motzkinovu větu [71], [72: Teorém D6 (v odstavci 73 v § 13 v Kapitole III na str. 60)], která Gordanovu větu [56] zobecňuje.

5.6. Motzkinova věta. *Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Mějme dvě přirozená čísla m a n (lze položit i $m = 0$ nebo $n = 0$), k tomu mějme dvě lineární zobrazení $A\colon W \to F^m$ a $B\colon W \to F^n$. Potom soustava ostrých a neostrých lineárních nerovnic*

$$\begin{array}{c} Ax < \boldsymbol{o}\,, \\ Bx \leq \boldsymbol{o} \\ \hline \end{array} \tag{1}$$

nemá řešení právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o},\ \boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o},\ \exists \boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{o}\colon\ \iota\boldsymbol{\lambda}^T A + \iota\boldsymbol{\mu}^T B = o\,, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ a $\boldsymbol{\mu} \in F^n$ a o je nulová lineární forma $o\colon W \to F$.

5.6.a. *Poznámka.* Gordanovu větu 5.4 dostaneme, jestliže v Motzkinově větě 5.6 vynecháme soustavu $Bx \leq \boldsymbol{o}$ (případ $n = 0$).

5.6.b. *Poznámka.* Nechť $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \in F^m$ je nezáporný sloupcový vektor, $\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o}$. Potom $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o}$ právě tehdy, když $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{e} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m > 0$, kde $\boldsymbol{e} = (1)_{i=1}^m \in F^m$ je vektor m jedniček tělesa F (definice 1.57). Z níže provedeného důkazu 5.6.c navíc vyplyne, že podmínka (2) je splněna právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o},\ \iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{e} = 1,\ \exists \boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{o}\colon\ \iota\boldsymbol{\lambda}^T A + \iota\boldsymbol{\mu}^T B = o\,, \tag{3}$$

kde 1 je jednotka tělesa F. Když máme lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m\colon W \to F^m$ a $B = (\beta_j)_{j=1}^n\colon W \to F^n$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ a $\beta_1, \ldots, \beta_n$ jsou lineární formy definované na prostoru W, pak uvedená podmínka (3) říká, že nulová lineární forma o je součtem vhodné konvexní kombinace lineárních forem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ a vhodné kuželové kombinace lineárních forem $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Srov. též část II. Motzkinovy věty 11.11.

5.6.c. *Důkaz.* Využijeme Farkasovo lemma 4.15, kde za lineárně uspořádaný vektorový prostor V dosadíme aditivní grupu tělesa F s jeho uspořádáním, tj., položíme $V = F$.

Nechť $\boldsymbol{e} = (1)_{i=1}^m \in F^m$ je sloupcový vektor m jedniček tělesa F. Pak bloková soustava nerovnic $Ax < \boldsymbol{o}$, $Bx \leq \boldsymbol{o}$ nemá řešení právě tehdy, když implikace

$$\begin{array}{c} Ax + \iota\boldsymbol{e}(t) \leq \boldsymbol{o}\,, \\ Bx + \iota\boldsymbol{o}(t) \leq \boldsymbol{o} \\ \hline \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad o(x) + \iota 1(t) \leq 0$$

platí pro všechna $\binom{x}{t} \in W \dot{\times} F$. (Kdyby $o(x) + \iota 1(t) = t > 0$, pak bod $t^{-1}x$ by řešil danou soustavu, neboť bychom měli $A(t^{-1}x) + \boldsymbol{e} \leq \boldsymbol{o}$ a $B(t^{-1}x) \leq \boldsymbol{o}$, tudíž $A(t^{-1}x) < < \boldsymbol{o}$ a $B(t^{-1}x) \leq \boldsymbol{o}$.) Podle Farkasova lemmatu 4.15 (přičemž blokovou soustavu na levé straně uvedené implikace napřed pomocí poznámky 3.125 převedeme na jedinou soustavu lineárních nerovnic; v dalších důkazech už tuto poznámku nebudeme uvádět) pak ekvivalentně platí, že existuje nezáporný blokový sloupec $\binom{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\mu}} \in F^m \dot{\times} F^n$ splňující $\iota\boldsymbol{\lambda}^T(A\ \ \iota\boldsymbol{e}) + \iota\boldsymbol{\mu}^T(B\ \ \iota\boldsymbol{o}) = (o\ \ \iota 1)$. Ekvivalentně existují $\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{o}$ tak, že $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A + \iota\boldsymbol{\mu}^T B = o$ a $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{e} = 1$, tudíž $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o}$. Na druhou stranu, máme-li $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \geq \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{\mu} = (\mu_j)_{j=1}^n \geq \boldsymbol{o}$ taková, že $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A + \iota\boldsymbol{\mu}^T B = o$ a $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o}$, potom sloupcové vektory $\boldsymbol{\lambda}$ a $\boldsymbol{\mu}$ lze „přeškálovat“ tak, aby $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A + \iota\boldsymbol{\mu}^T B = o$ a $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{e} = 1$. (Stačí vzít $\boldsymbol{\lambda} := := (\lambda_i(\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{e})^{-1})_{i=1}^m \in F^m$ a $\boldsymbol{\mu} := (\mu_j(\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{e})^{-1})_{j=1}^n \in F^n$.) $\square$

5.7. Pokračujme Carverovou větou [20: Teorém 3].

5.8. Carverova věta. *Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Mějme přirozené číslo m (lze vzít i $m = 0$). Nechť $A\colon W \to F^m$ je lineární zobrazení a ať $\boldsymbol{b} \in F^m$ je sloupcový vektor. Potom soustava lineárních nerovnic*

$$Ax < \boldsymbol{b} \tag{1}$$

nemá řešení právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o},\ \boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o}\colon\ \iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} A = o \ \wedge\ \iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} \leq 0\,, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$, dále $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor prostoru F^m, k tomu o je nulová lineární forma $o\colon W \to F$ a 0 je nula tělesa F.

5.8.a. *Poznámka.* Také Carverova věta 5.8 je zobecněním Gordanovy věty 5.4. Abychom dostali Gordanovu větu 5.4, v Carverově větě 5.8 stačí položit $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$. Rovněž je zajímavé si povšimnou několika „podobností“ mezi Carverovou větou 5.8 a lemmatem 4.21 o základní dualitě v LP.

5.8.b. *Důkaz.* Soustava nerovnic $Ax < \boldsymbol{b}$ nemá řešení právě tehdy, když vztahy $Ax - {}$ $- \iota\boldsymbol{b}(t) < \boldsymbol{o}$ a $t > 0$, kde $t \in F$ je nová proměnná, nelze splnit současně, tj. právě tehdy, když soustava

$$\begin{aligned} Ax - \iota\boldsymbol{b}(t) &< \boldsymbol{o}\,, \\ o(x) - \iota 1(t) &< 0 \end{aligned}$$

nemá řešení, kde 1 je jednotka tělesa F. Gordanova věta 5.4 ekvivalentně dává, že existuje nezáporný a nenulový sloupec $\binom{\boldsymbol{\lambda}}{\mu} \in F^m \dot{\times} F$ takový, že $\iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(A\ \ -\iota\boldsymbol{b}) + \iota\mu(o\ \ -\iota 1) =$ $= (o\ \ \iota 0)$. Ekvivalentně lze říci, že existuje $\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o}$ a $\mu \geq 0$ tak, že $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o}$ nebo $\mu \neq 0$, dále $\iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} A = o$ a $-\iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} - \mu = 0$. Kdyby platilo $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$, vzhledem k poslední rovnosti by muselo být také $\mu = 0$. Je tedy $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o}$. Ekvivalentně lze tudíž říci, že existuje $\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o}$ splňující $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o}$, dále $\iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} A = o$ a $\iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \leq 0$. □

5.9. Nyní se budeme zabývat soustavami, které mají být splněny současně jako nerovnosti „$\leq$“ i ne-rovnost „$\neq$“. Neřešitelnost takové soustavy charakterizuje Stiemkeho věta [85].

5.10. Stiemkeho věta. *Ať W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Budiž dáno přirozené číslo m (smí být také $m = 0$) a lineární zobrazení $A\colon W \to F^m$. Potom soustava*

$$\begin{aligned} Ax &\leq \boldsymbol{o}\,, \\ Ax &\neq \boldsymbol{o} \end{aligned} \tag{1}$$

nemá řešení právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{\lambda} > \boldsymbol{o}\colon\ \iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} A = o\,, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$, dále $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor prostoru F^m a o je nulová lineární forma $o\colon W \to F$.

5.10.a. *Poznámka.* Stiemkeho věta 5.10 je „dualizací“ Gordanovy věty 5.4.

5.11. Také Stiemkeho větu 5.10 uvádíme bez důkazu, protože místo ní dokážeme Tuckerovu větu [87: Korolár 2A část (i)], která Stiemkeho větu [85] zobecňuje.

5.12. Tuckerova věta. *Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Mějme dvě přirozená čísla m a n (lze položit také $m = 0$ nebo $n = 0$) a dvě lineární zobrazení $A\colon W \to F^m$ a $B\colon W \to F^n$. Potom soustava*

$$\begin{aligned} Ax &\le \boldsymbol{o}\,, \\ Ax &\ne \boldsymbol{o}\,, \\ Bx &\le \boldsymbol{o} \end{aligned} \tag{1}$$

nemá řešení právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{\lambda} > \boldsymbol{o}\ \exists \boldsymbol{\mu} \ge \boldsymbol{o}\colon\ \iota\boldsymbol{\lambda}^T A + \iota\boldsymbol{\mu}^T B = o\,, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$, dále $\boldsymbol{\mu} \in F^n$ a o je nulová lineární forma $o\colon W \to F$.

5.12.a. *Poznámka.* Tuckerova věta 5.12 zobecňuje Stiemkeho větu 5.10 obdobným způsobem, jako Motzkinova věta 5.6 zobecňuje Gordanovu větu 5.4. Také zde dostaneme Stiemkeho větu 5.10, jestliže v Tuckerově větě 5.12 vynecháme soustavu $Bx \le \boldsymbol{o}$ (případ $n = 0$).

5.12.b. *Poznámka.* Tuckerova věta 5.12 je „dualizací“ Motzkinovy věty 5.6. Ostatně [87: Korolár 2A část (ii)] není ničím jiným než právě Motzkinovou větou [71], [72: Teorém D6 (v odstavci 73 v § 13 v Kapitole III na str. 60)].

5.12.c. *Důkaz.* Nechť $\boldsymbol{e} = (1)_{i=1}^m \in F^m$ je sloupcový vektor m jedniček tělesa F (definice 1.57). Dále předpokládejme, že $A = (\alpha_i)_{i=1}^m\colon W \to F^m$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární formy definované na vektorovém prostoru W. Zvolme $x \in W$. Povšimněme si, že vztahy $Ax \le \boldsymbol{o}$ a $Ax \ne \boldsymbol{o}$ jsou splněny současně právě tehdy, když $Ax \le \boldsymbol{o}$ a $\iota\boldsymbol{e}^T Ax = \alpha_1(x) + \cdots \cdots + \alpha_m(x) < 0$. (Srov. poznámku 5.6.b.) Vidíme, že soustava $Ax \le \boldsymbol{o}$, $Ax \ne \boldsymbol{o}$, $Bx \le \boldsymbol{o}$ nemá řešení právě tehdy, když implikace

$$\begin{aligned} Ax &\le \boldsymbol{o}\,, \\ Bx &\le \boldsymbol{o} \end{aligned} \qquad\Longrightarrow\qquad -\iota\boldsymbol{e}^T Ax \le 0$$

platí pro všechna $x \in W$, kde 0 je nula tělesa F. Dle Farkasova lemmatu 4.15 (použitého pro případ $V = F$) ekvivalentně existuje nezáporný sloupec $\binom{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}{\boldsymbol{\mu}} \in F^m \dot{\times} F^n$ takový, že $\iota\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T A + \iota\boldsymbol{\mu}^T B = -\iota\boldsymbol{e}^T A$. Ekvivalentně máme $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \ge \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{\mu} \ge \boldsymbol{o}$ tak, že $\iota(\boldsymbol{e} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}})^T A + \iota\boldsymbol{\mu}^T B = o$. K dokončení důkazu již stačí položit $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{e} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}$. Zřejmě je $\boldsymbol{\lambda} > \boldsymbol{o}$. Na druhou stranu, když máme $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m > \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{\mu} = (\mu_j)_{j=1}^n \ge \boldsymbol{o}$ splňující $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A + \iota\boldsymbol{\mu}^T B = o$, pak bez újmy na obecnosti smíme předpokládat, že $\lambda_i \ge 1$ pro $i = 1, \ldots, m$, kde 1 je jednotka tělesa F. (Když $i_0 = 1, \ldots, m$ je zvoleno tak, že $\lambda_{i_0} \le \lambda_i$ pro $i = 1, \ldots, m$ a $\lambda_{i_0} < 1$ (přičemž $\lambda_{i_0} > 0$), stačí položit $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_i \lambda_{i_0}^{-1})_{i=1}^m$ a $\boldsymbol{\mu} := (\mu_j \lambda_{i_0}^{-1})_{j=1}^n$.) Takže $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{e} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ pro vhodné $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \ge \boldsymbol{o}$. □

5.13. Dalším (nyní již) klasickým výsledkem, který sice není větou o alternativě, avšak se soustavami lineárních nerovnic úzce souvisí, je tzv. klíčová věta [87: Teorém 1], [50: Sekce 4], [19: Teorém 1.2], viz též písmeno 7.2.a.

5.14. Poznámka. Klíčovou větu jako první pravděpodobně formuloval a dokázal Albert Tucker [87: Teorém 1]. Nejprve dokazuje jisté lemma [87: Lemma], s jeho pomocí pak dokazuje klíčovou větu [87: Teorém 1]. Jak ale Tucker uvádí [87: text před Lemmatem] jeho důkaz vychází z myšlenky patřící Davidu Galeovi – patrně však hovoří (pouze) o důkazu lemmatu [87: Lemma].

Název „klíčová věta“ pro diskutovanou větu zavedl, zdá se, R. A. Good [50]. Důvodem pro zvolené pojmenování je, že – jak Good s ohledem na dosud známé výsledky soudí [50: text na začátku Sekce 4] – z klíčové věty plynou prakticky všechny podstatné výsledky v teorii duality, viz články [50] a [87]. (V této kapitole naproti tomu vycházíme ze základního lemmatu 2.3 a z Farkasova lemmatu 4.15.)

5.15. Klíčová věta. *Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Dále mějme přirozené číslo m (lze položit i $m = 0$) a lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \colon W \to F^m$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární formy definované na prostoru W. Potom existují bod $x \in W$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ tak, že*

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o}\,, \qquad \iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o\,, \qquad Ax \geq \boldsymbol{o} \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{\lambda} + Ax > \boldsymbol{o}\,,$$

kde $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor prostoru F^m a o je nulová lineární forma $o \colon W \to F$.

5.15.a. *Důkaz.* Důkaz provedeme indukcí v nejvýše $(m+1)$ krocích. Na počátku položíme $\boldsymbol{\lambda}^0 = (\lambda_i^0)_{i=1}^m = (0)_{i=1}^m = \boldsymbol{o}$. Dále budeme pracovat se dvěma indexovými množinami, na začátku položíme $I^0 = \{1, \ldots, m\}$ a $J^0 = \emptyset$.

Nyní předpokládejme, že se nalézáme v k-tém kroku, kde k je přirozené číslo (nepřevyšující číslo m). Máme tedy dvě disjunktní indexové množiny I^k a J^k, jejichž sjednocení je $\{1, \ldots, m\}$, k tomu máme $\boldsymbol{\lambda}^k = (\lambda_i^k)_{i=1}^m \in F^m$ takové, že $\lambda_i^k \geq 0$ pro $i \in I^k$ a dále $\lambda_j^k > 0$ pro $j \in J^k$, kde 0 je nula tělesa F. Nadto platí $\iota{\boldsymbol{\lambda}^k}^T A = \iota\lambda_1^k\alpha_1 + \cdots + \iota\lambda_m^k\alpha_m = o$. Uvažujme následující soustavu ostrých a neostrých lineárních nerovnic: $\alpha_i(x) > 0$ pro $i \in I^k$, k tomu $\alpha_j(x) \geq 0$ pro $j \in J^k$. Jestliže tato soustava má řešení, důkaz můžeme ukončit, neboť bod $x \in W$ řešící tuto soustavu a $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^k$ mají všechny požadované vlastnosti, platí rovněž $\boldsymbol{\lambda} + Ax > \boldsymbol{o}$. Jestliže uvažovaná soustava řešení nemá, pak podle Motzkinovy věty 5.6 existuje $\boldsymbol{\lambda}' = (\lambda_i')_{i=1}^m \geq \boldsymbol{o}$ takové, že $\iota{\boldsymbol{\lambda}'}^T A = \iota\lambda_1'\alpha_1 + \cdots \cdots + \iota\lambda_m'\alpha_m = o$, přičemž $\lambda_i' \neq 0$ pro alespoň jedno $i \in I^k$. Nyní položíme $\boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}^k + \boldsymbol{\lambda}'$, dále $I^{k+1} = I^k \setminus \{\, i \in I^k \,;\ \lambda_i' \neq 0 \,\}$ a $J^{k+1} = J^k \cup \{\, i \in I^k \,;\ \lambda_i' \neq 0 \,\}$, načež můžeme přejít na $(k+1)$-ní krok.

Uvedený postup skončí v nejvýše $(m+1)$ krocích, protože množina I^k v k-tém prováděném kroku má nejvýše $m - k$ prvků. Jakmile je $I^k = \emptyset$, pak soustava $Ax \geq \boldsymbol{o}$ už má řešení a důkaz skončí. □

5.15.b. *Poznámka.* V provedeném důkazu 5.15.a jsme postupovali zhruba tak, že jsme položili $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$ a chtěli jsme, aby soustava $Ax > \boldsymbol{o}$ měla řešení. Když tato soustava neměla řešení, použili jsme Motzkinovu větu 5.6 a konstruovali jsme (konečnou) posloupnost $\boldsymbol{\lambda}^0, \ldots, \boldsymbol{\lambda}^k$. Poznamenejme, že lze rovněž postupovat „duálním“ způsobem: Na začátku položíme $x = 0$, kde 0 je počátek prostoru W, a budeme chtít, aby existovalo $\boldsymbol{\lambda} > \boldsymbol{o}$ splňující $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A = o$. Pokud by takové $\boldsymbol{\lambda}$ neexistovalo, použijeme Tuckerovu větu 5.12 a budeme konstruovat konečnou posloupnost $x^0, \ldots, x^k$.

5.16. Poznámka. Ačkoliv TUCKER klíčovou větu [87: Teorém 1] dokazuje v poněkud jiném tvaru (pracuje s maticemi reálných čísel, tedy v konečněrozměrném reálném vektorovém prostoru), poznamenává [87: text před Lemmatem], že důkaz by stejně dobře bylo možné provést i v případě libovolného lineárně uspořádaného (komutativního?) tělesa. Tuckerův důkaz klíčové věty [87: Lemma a Teorém 1] (viz též poznámku 5.14) si přesto zaslouží bližší pozornost. Ukazuje se totiž, že jeho původní důkaz by (po provedení jen potřebných formálních úprav) bylo možné použít také k důkazu právě uvedené klíčové věty 5.15, (!) tedy i v případě nekonečněrozměrného vektorového prostoru nad lineárně uspořádaným (ne nutně komutativním) tělesem (viz též odstavec 3.65).

Poznamenejme, že zmiňované lemma [87: Lemma] je vlastně Motzkinovou či Tuckerovou větou 5.6 či 5.12 formulovanou pro případ $m = 1$ resp. Farkasovým lemmatem 4.15 formulovaným pro případ $V = F$. Vskutku: Farkasovo lemma 4.15 v případě $V = F$ je snadným důsledkem lemmatu [87: Lemma], viz [87: Korolár]. (Doplňme, že když ve Farkasově lemmatu 4.15 za vektorový prostor V dosadíme aditivní grupu tělesa F s jeho uspořádáním, pak Motzkinovu větu 5.6 i Tuckerovu větu 5.12 lze považovat za zobecnění Farkasova lemmatu 4.15. V Motzkinově větě 5.6 totiž můžeme mít obecný počet m ostrých nerovností; stejně tak v Tuckerově větě 5.12 můžeme mít obecný počet m (neostrých) nerovností, z nichž alespoň jedna musí být splněna ostře; zatímco ve Farkasově lemmatu 4.15 máme právě jedinou ostrou nerovnost (ekvivalentně neostrou nerovnost současně splněnou jako ne-rovnost), viz poznámku 4.15.a.)

Vidíme, že klíčovou větu 5.15 lze dokázat několika různými způsoby: kromě výše naznačených dvou důkazů (důkaz 5.15.a a poznámka 5.15.b) lze použít také původní Tuckerův důkaz ([87: Lemma a Teorém 1]) nebo upravený Tuckerův důkaz ([87: Teorém 1], kde místo lemmatu [87: Lemma] použijeme Motzkinovu nebo Tuckerovu větu 5.6 nebo 5.12 či Farkasovo lemma 4.15, které jsme už v této práci dokázali).

5.17. V definici 3.44 jsme zavedli pojem absolutní hodnoty, nezáporné části a nekladné části vektoru nebo skaláru. V následující definici 5.18 zavedeme pojem absolutní hodnoty, nezáporné části a nekladné části sloupcového vektoru. Zavedené pojmy využijeme při formulaci další věty o alternativě.

5.18. Definice. Absolutní hodnota, nezáporná část, nekladná část sloupce vektorů a absolutní hodnota, nezáporná část, nekladná část sloupcového vektoru. Nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Budiž dáno přirozené číslo m (může být i $m = 0$). Mějme sloupec vektorů $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$. Jeho *absolutní hodnotu* a *nezápornou* a *nekladnou část* označujeme po řadě $|\boldsymbol{u}|$ a $(\boldsymbol{u})^+$ a $(\boldsymbol{u})^-$ a klademe $|\boldsymbol{u}| = (|u_i|)_{i=1}^m$, dále $(\boldsymbol{u})^+ = ((u_i)^+)_{i=1}^m$ a $(\boldsymbol{u})^- = ((u_i)^-)_{i=1}^m$. Význam absolutní hodnoty vektoru a nezáporné a nekladné části vektoru použité na pravé straně definujících rovností se řídí definicí 3.44.

Zcela obdobně postupujeme, když za lineárně uspořádaný vektorový prostor V dosadíme aditivní grupu tělesa F s jeho lineárním uspořádáním. Ať tedy $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \in F^m$ je sloupcový vektor. Jeho *absolutní hodnotu* a *nezápornou* a *nekladnou část* označujeme po řadě $|\boldsymbol{\lambda}|$ a $(\boldsymbol{\lambda})^+$ a $(\boldsymbol{\lambda})^-$, k tomu klademe $|\boldsymbol{\lambda}| = (|\lambda_i|)_{i=1}^m$, dále $(\boldsymbol{\lambda})^+ = ((\lambda_i)^+)_{i=1}^m$ a $(\boldsymbol{\lambda})^- = ((\lambda_i)^-)_{i=1}^m$. Pro význam absolutní hodnoty skaláru a nezáporné a nekladné části skaláru na pravé straně definujících rovností se opět odvoláváme na definici 3.44.

5.19. Nyní můžeme uvést větu o alternativě, která byla dokázána teprve „nedávno". Jde o Daxovu větu [28: Subsekce 5.1 a 5.4], viz též [27], [30: Sekce 9]. Daxova věta je pozoruhodná tím, že na rozdíl od ostatních vět o alternativě v ní vystupuje absolutní hodnota (definice 3.44 a 5.18), což je nelineární, dokonce nehladký element. Použití Daxovy věty při formulaci podmínek optimality jistých optimalizačních úloh lze nalézt v [28: Subsekce 5.2 a 5.3]. Popis praktického problému, který stojí na pozadí úlohy diskutované v [28: Subsekce 5.3], lze dohledat v [89].

5.20. Daxova věta. *Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Mějme dvě přirozená čísla m a n (může být také $m = 0$ nebo $n = 0$) a dvě lineární zobrazení $A\colon W \to F^m$ a $B\colon W \to F^n$. Mějme rovněž sloupec nezáporných vah $\boldsymbol{w} \in F^n$, splňující $\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{o}$, kde $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru F^n. K tomu budiž dáno lineární zobrazení $\gamma\colon W \to F$. Potom implikace*

$$Ax \leq \boldsymbol{o} \implies \gamma(x) \leq \iota \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} |Bx| \tag{1}$$

je splněna pro každé $x \in W$ právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{o}\ \exists \boldsymbol{v},\ -\boldsymbol{w} \leq \boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{w}\colon\ \gamma = \iota \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} A + \iota \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} B\,, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{u} \in F^m$, dále $\boldsymbol{v} \in F^n$ a $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru F^m.

5.20.a. *Poznámka.* Když $x \in W$, pak $(Bx) \in F^n$ je sloupcový vektor a $|Bx|$ je jeho absolutní hodnota podle definice 5.18. Následně $\iota\boldsymbol{w}^T|Bx|$ je skalár získaný vyhodnocením zobrazení $\iota\boldsymbol{w}^T\colon F^n \to F$ v tomto sloupci $|Bx| \in F^n$ pro $x \in W$. Vidíme, že na pravé straně vztahu (1) v bodě $x \in W$ vyhodnocujeme zobrazení, které vzniklo složením zobrazení $B\colon W \to F^n$, absolutní hodnoty sloupcového vektoru $|\cdot|\colon F^n \to F^n$ (definice 5.18) a zobrazení $\iota\boldsymbol{w}^T\colon F^n \to F$.

5.20.b. *Důkaz.* Pro stručnost položme $Z = \left\{ \boldsymbol{\zeta} = (\zeta_j)_{j=1}^n \in F^n \,;\, \zeta_j = 1 \text{ nebo } \zeta_j = -1 \text{ pro } j = 1, \ldots, n \right\}$, což je množina všech sloupcových vektorů sestavených z n plus nebo minus jedniček tělesa F. Připomeňme, že když $\boldsymbol{\zeta} \in Z$ je zvoleno, potom $\iota I_{\boldsymbol{\zeta}}\colon F^n \to F^n$ je zobrazení „připomínající čtvercovou matici typu $n \times n$ mající vektor $\boldsymbol{\zeta}$ na diagonále a nuly tělesa F jinde“, podrobněji viz odstavec 1.64 a definici 1.65.

Nyní si povšimneme, že soustava nerovnic $\gamma(x) > \iota\boldsymbol{w}^T|Bx|$, $Ax \leq \boldsymbol{o}$ má řešení právě tehdy, když každá ze soustav $\iota\boldsymbol{w}^T\iota I_{\boldsymbol{\zeta}}Bx - \gamma(x) < 0$, $Ax \leq \boldsymbol{o}$ má řešení pro všechna $\boldsymbol{\zeta} \in Z$. Zde $\iota\boldsymbol{w}^T\iota I_{\boldsymbol{\zeta}}B\colon W \to F$ je zobrazení vzniklé složením zobrazení $B\colon W \to F^n$, dále $\iota I_{\boldsymbol{\zeta}}\colon F^n \to F^n$ a $\iota\boldsymbol{w}^T\colon F^n \to F$ pro $\boldsymbol{\zeta} \in Z$, k tomu 0 je nula tělesa F. (Ať $x \in W$ je řešením dané soustavy. Implikace „$\Rightarrow$“ uvedeného tvrzení je snadná, protože pro všechna $\boldsymbol{\zeta} \in Z$ máme $\iota I_{\boldsymbol{\zeta}}Bx \leq |Bx|$. Implikace „$\Leftarrow$“ je rovněž snadná, protože pro vhodné $\boldsymbol{\zeta} \in Z$ platí $\iota I_{\boldsymbol{\zeta}}Bx = |Bx|$.) Ekvivalentně platí, že „velká“ soustava lineárních nerovnic

$$\begin{array}{rl} \iota\boldsymbol{w}^T\iota I_{\boldsymbol{\zeta}}Bx - \gamma(x) < 0 & \qquad \text{pro všechna } \boldsymbol{\zeta} \in Z\,, \\ Ax \leq \boldsymbol{o} & \\ \hline \end{array} \tag{3}$$

má řešení. Jinými slovy, implikace (1) platí pro všechna $x \in W$ tehdy a jen tehdy, když soustava (3) nemá řešení. Podle Motzkinovy věty 5.6 ekvivalentně existují nezáporný a nenulový sloupcový vektor $\tilde{\boldsymbol{v}} = (\tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}})_{\boldsymbol{\zeta}\in Z} \in F^{2^n}$ a nezáporný sloupcový vektor $\boldsymbol{u} \in F^m$ tak, že

$$\sum_{\boldsymbol{\zeta}\in Z} \iota\tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}}\iota\boldsymbol{w}^T\iota I_{\boldsymbol{\zeta}}B - \sum_{\boldsymbol{\zeta}\in Z} \iota\tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}}\gamma + \iota\boldsymbol{u}^T A = o\,, \tag{4}$$

kde o je nulová lineární forma $o\colon W \to F$ a uvedené součty probíhají v algebraickém duálu $W^\#$. Když sloupec $\boldsymbol{\zeta} \in Z$ a bod $x \in W$ zvolíme libovolně, pak s poněkud větší dávkou „licence“ – neboť zobrazení $\iota I_{\boldsymbol{\zeta}}$ „odebereme“ symbol „ι“, načež s $I_{\boldsymbol{\zeta}}$ a se sloupci Bx a $\boldsymbol{w}$ budeme pracovat, jako kdyby šlo o matice – můžeme provést následující úpravy:

$$\begin{aligned} \iota\tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}}\iota\boldsymbol{w}^T\iota I_{\boldsymbol{\zeta}}Bx &= (\iota\tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}})(\iota\boldsymbol{w}^T)(\iota I_{\boldsymbol{\zeta}})(Bx) = \\ &= (\iota\tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}})(\iota\boldsymbol{w}^T)\big((Bx)^T I_{\boldsymbol{\zeta}}\big)^T = \\ &= (\iota\tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}})\big((Bx)^T I_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{w}\big) = \\ &= (Bx)^T(I_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{w}\tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}}) = \\ &= \iota(I_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{w}\tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}})^T Bx\,. \end{aligned}$$

Jak už ale víme, s maticemi zde nepracujeme (poznámky 1.54 a 1.66), význam součinu „$I_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{w}\tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}}$“ nemáme definován (pro žádné $\boldsymbol{\zeta} \in Z$). Máme-li však nezáporné $\boldsymbol{w} = (w_j)_{j=1}^n \in F^n$, pak pro $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_j)_{j=1}^n \in Z$ můžeme položit $\boldsymbol{v}'_{\boldsymbol{\zeta}} = (\zeta_j w_j \tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}})_{j=1}^n$, načež pro $x \in W$ platí

$$\iota\tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}}\iota\boldsymbol{w}^T\iota I_{\boldsymbol{\zeta}}Bx = \iota\boldsymbol{v}'^{\,T}_{\boldsymbol{\zeta}}Bx\,.$$

Vidíme, že rovnice (4) je splněna tehdy a jen tehdy, když

$$\iota\boldsymbol{u}^T A + \iota\Big(\sum_{\boldsymbol{\zeta}\in Z} \boldsymbol{v}'_{\boldsymbol{\zeta}}\Big)^T B = \iota\Big(\sum_{\boldsymbol{\zeta}\in Z} \tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}}\Big)\gamma\,.$$

Jelikož $\tilde{\boldsymbol{v}} \geq \boldsymbol{o}$ a $\tilde{\boldsymbol{v}} \neq \boldsymbol{o}$, bez újmy na obecnosti smíme předpokládat, že $\sum_{\boldsymbol{\zeta} \in Z} \tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}} = 1$. (Jinak položíme $\tilde{\boldsymbol{v}} := \big(\tilde{v}_{\boldsymbol{\eta}} \big(\sum_{\boldsymbol{\zeta} \in Z} \tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}}\big)^{-1}\big)_{\boldsymbol{\eta} \in Z}$ a $\boldsymbol{u} := \big(u_i \big(\sum_{\boldsymbol{\zeta} \in Z} \tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}}\big)^{-1}\big)_{i=1}^{m}$, dále $\boldsymbol{v}'_{\boldsymbol{\zeta}} := (\zeta_j w_j \tilde{v}_{\boldsymbol{\zeta}})_{j=1}^{n}$ pro $\boldsymbol{\zeta} \in Z$. Viz též poznámku 5.6.b.) Pak ovšem $\boldsymbol{v} = \sum_{\boldsymbol{\zeta} \in Z} \boldsymbol{v}'_{\boldsymbol{\zeta}}$ je konvexní kombinací vrcholů kvádru $K = \{\, \boldsymbol{\lambda} \in F^n;\ -\boldsymbol{w} \leq \boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{w} \,\}$ – přičemž prostor F^n pro tento okamžik výjimečně považujeme za pravý (ne levý) vektorový prostor nad tělesem F – proto platí $-\boldsymbol{w} \leq \boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{w}$. Na druhou stranu, máme-li $\boldsymbol{v} \in F^n$ splňující $-\boldsymbol{w} \leq \boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{w}$, potom jej jistě můžeme vyjádřit jako konvexní kombinaci vrcholů kvádru K. $\square$

5.21. Poznámka. Věty o alternativě prvního druhu, věty o alternativě druhého druhu. Nyní již známe celou řadu vět o alternativě: Fredholmovu větu 2.11, lemma 4.21 o základní dualitě v LP, Gordanovu větu 5.4, Motzkinovu větu 5.6, Carverovu větu 5.8, Stiemkeho větu 5.10 a Tuckerovu větu 5.12. O právě vyjmenovaných větách o alternativě budeme v dalším hovořit jako o větách o alternativě *prvního druhu*. Věty o alternativě prvního druhu udávají podmínku nutnou a postačující k tomu, aby primární soustava (určitého tvaru resp. typu) neměla řešení. K větám o alternativě počítáme rovněž základní lemma 2.3, Farkasovo lemma 4.15, Haarovu větu 4.30 a Daxovu větu 5.20. Nyní vyjmenované věty o alternativě budeme v dalším nazývat věty o alternativě *druhého druhu*. Věty o alternativě druhého druhu – na rozdíl od vět prvního druhu – necharakterizují případ, kdy nějaká primární soustava nemá řešení. (Viz však poznámky 2.3.a a 4.15.a. U Haarovy ani Daxovy věty 4.30 a 5.20 jsme už tyto poznámky neuváděli). Namísto toho v primární části vět o alternativě druhého druhu vystupuje určitá implikace a tyto věty dávají podmínku nutnou a postačující k tomu, aby uvedená implikace byla splněna pro každý bod x „základního" prostoru W. Společným rysem těchto vět je, že na levé straně uvedené implikace vystupuje „běžná" soustava lineárních (ne)rovnic, zatímco na pravé straně uvedené implikace vystupuje zobrazení jdoucí ze „základního" vektorového prostoru W do prostoru „cílových hodnot" V. (Výjimkou je Daxova věta 5.20. Viz ale poznámku 5.33.c níže.)

5.22. Bezpochyby je možné dokázat celou řadu dalších vět o alternativě prvního druhu (viz předcházející poznámku 5.21), jež charakterizují případ, kdy primární soustava (určitého typu) nemá řešení. Dosud uvedené věty 2.11, 5.4, 5.6, 5.8, 5.10 a 5.12 a lemma 4.21 totiž zachytily jen malý vzorek všech možných typů primárních soustav. Pro každý z doposud nezkoumaných typů primárních soustav tak můžeme formulovat zvláštní větu o alternativě podávající podmínku nutnou a postačující k tomu, aby daná soustava neměla řešení. Ale spíše než mechanické dokazování těchto nových vět bude jistě užitečnější vyložit všeobecnou metodiku, pomocí které tyto věty snadno dokážeme.

Zmíněná všeobecná metodika je ve své podstatě pouze shrnutím myšlenek a postupů, které jsou všeobecně známy už dlouhou dobu – tyto postupy se používaly již dříve při důkazech vět o alternativě v konečněrozměrném (reálném) vektorovém prostoru. Je proto zajímavé, že stejné postupy můžeme použít i k důkazu vět o alternativě v (obecně) nekonečněrozměrném vektorovém prostoru nad lineárně uspořádaným tělesem. Tyto myšlenky a postupy shrnujeme v jediné následující poznámce 5.23.

5.23. Poznámka. Shrnutí metod důkazu vět o alternativě. Vraťme se ke způsobu, jakým jsme při důkazech vět o alternativě postupovali. V této kapitole jsme jako výchozí věty o alternativě zvolili základní lemma 2.3 a Farkasovo lemma 4.15. Uvedená lemmata 2.3 a 4.15 jsme museli dokázat přímo. Následně jsme mohli dokázat celou řadu dalších vět o alternativě (Fredholmovu větu 2.11, lemma 4.21 o základní dualitě v LP, Haarovu větu 4.30, Gordanovu větu 5.4, Motzkinovu větu 5.6, Carverovu větu 5.8, Stiemkeho větu 5.10, Tuckerovu větu 5.12 a Daxovu větu 5.20). Důkazy těchto dalších vět o alternativě už byly řetězce ekvivalentních tvrzení. Jako spojovací článek jsme uprostřed tohoto řetězce použili některou z dříve dokázaných vět o alternativě: použili jsme základní lemma 4.21 (důkaz Fredholmovy věty 2.11), dále jsme použili Farkasovo lemma 4.15 (důkaz lemmatu 4.21 o základní dualitě v LP, Haarovy věty 4.30, Motzkinovy věty 5.6 a Tuckerovy věty 5.12), s výhodou jsme použili rovněž Motzkinovu větu 5.6 (důkaz Carverovy věty 5.8 a Daxovy věty 5.20, viz též důkaz níže uvedeného principu 5.27 a důkazy níže uvedených vět 5.29 a 5.32).

Podívejme se, jak jsme v uvedených důkazech postupovali, abychom v jejich prostřední části mohli použít některou z dříve dokázaných vět o alternativě. Když jsme pracovali s nehomogenními soustavami, tj. soustavami s obecně nenulovou pravou stranou (Fredholmova věta 2.11, lemma 4.21 o základní dualitě v LP, Haarova věta 4.30 a Carverova věta 5.8), vždy jsme zavedli novou pomocnou proměnnou $t \in F$. Původně nehomogenní soustavu jsme pak homogenizovali, převedli na soustavu homogenní, tj. soustavu s nulovou pravou stranou. V Gordanově (resp. Motzkinově) větě 5.4 (resp. 5.6) jsme pracovali se soustavou ostrých lineárních nerovnic typu „$<$“. Při jejím důkazu jsme si pomohli přičtením sloupcového vektoru $\boldsymbol{e}$, jehož všechny složky jsou nenulové. Ve Stiemkeho (resp. Tuckerově) větě 5.10 (resp. 5.12) jsme zase pracovali se soustavou současných lineárních nerovnic a ne-rovnic typu „$\leq$“ a „$\neq$“. Tam jsme si pomohli vzájemným sečtením těchto nerovnic. Důkaz 5.20.b Daxovy věty 5.20 pak ukázal, jakým způsobem si můžeme poradit s absolutními hodnotami: uvažovali jsme všechny možné hodnoty znamének výrazů, které v absolutních hodnotách vystupovaly. Jakmile jsme soustavu, jejíž neřešitelnost chceme charakterizovat, upravili pomocí právě uvedených jednoduchých pravidel, obdrželi jsme novou homogenní soustavu ostrých („$<$“) a neostrých („$\leq$“) lineárních nerovnic. Pak už stačilo použít Motzkinovu větu 5.6, popřípadě Farkasovo lemma 4.15, jestliže nová soustava obsahovala pouze jedinou ostrou („$<$“) nerovnost.

Nezabývali jsme se větami o alternativě, které charakterizují neřešitelnost soustavy obsahující nerovnosti typu „větší (nebo rovno)“, tj. „$>$“ nebo „$\geq$“, protože takové nerovnosti lze snadno převést na nerovnosti typu „menší (nebo rovno)“, tj. „$<$“ nebo „$\leq$“, poznámka 3.129. Stejně tak jsme se nezabývali větami o alternativě charakterizujícími neřešitelnost soustavy obsahující rovnosti. (Výjimkou je Fredholmova věta 2.11.) Je totiž všeobecně známo, že soustavu $Ax = \boldsymbol{b}$ lze ekvivalentně psát jako $Ax \leq \boldsymbol{b}$, $-Ax \leq -\boldsymbol{b}$ a že výraz $(\boldsymbol{\lambda}^+ - \boldsymbol{\lambda}^-)$, kde $\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^- \in F^m$ jsou nezáporné sloupcové vektory, lze nahradit jediným sloupcovým vektorem $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^+ - \boldsymbol{\lambda}^- \in F^m$ neomezeným ve znaménku, poznámky 3.127 a 3.128, viz též konec poznámky 3.131. Z tohoto hlediska lemma 4.21 o základní dualitě v LP je zobecněním Fredholmovy věty 2.11, v obdobném duchu je Farkasovo lemma 4.15 zobecněním základního lemmatu 2.3 – obojí ovšem za dodatečného předpokladu, že těleso F a vektorový prostor V jsou lineárně uspořádány, protože jinak jsou uvedené výsledky vzájemně „neporovnatelné“.

Podobně, jakmile jsme formulovali Daxovu větu 5.20 podávající nutnou a postačující podmínku, aby soustava $\gamma(x) > \iota\boldsymbol{w}^T|Bx|$, $Ax \leq \boldsymbol{o}$ neměla řešení, už není potřeba se zabývat větami o alternativě charakterizujícími neřešitelnost obdobné soustavy, kde namísto absolutní hodnoty $|Bx|$ by se v první nerovnici pracovalo například s nezápornou částí $(Bx)^+$, srov. [28: Subsekce 5.5]. Takovéto případy lze totiž na Daxovu větu 5.20 snadno převést: Nechť m je přirozené číslo (lze položit také $m = 0$) a nechť $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$. Snadno nahlédneme, že $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda})^+ - (\boldsymbol{\lambda})^-$ a $|\boldsymbol{\lambda}| = (\boldsymbol{\lambda})^+ + (\boldsymbol{\lambda})^-$, kde absolutní hodnota a nezáporná a nekladná část sloupcového vektoru je zavedena definicí 5.18. Nyní ať $\boldsymbol{e} = (1)_{i=1}^m \in F^m$ je sloupec jedniček tělesa F s významem podle definice 1.57. Pro stručnost položme $\boldsymbol{\frac{1}{2}} = \iota\boldsymbol{e}\big((1+1)^{-1}\big)$, kde 1 je jednotka tělesa F a zobrazení $\iota\boldsymbol{e}$ je odvozeno ze sloupce $\boldsymbol{e}$ užitím definice 1.59. Všech m složek sloupcového vektoru $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ je tedy rovno jedné polovině. Následně vidíme, že $(\boldsymbol{\lambda})^+ = \iota I_{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}\big(|\boldsymbol{\lambda}| + \boldsymbol{\lambda}\big)$ a $(\boldsymbol{\lambda})^- = \iota I_{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}\big(|\boldsymbol{\lambda}| - \boldsymbol{\lambda}\big)$, kde zobrazení $\iota I_{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$ je odvozeno „z diagonální matice typu $m \times m$ mající vektor $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ na diagonále a nuly tělesa F jinde“, viz definici 1.65. Potom, kupříkladu, nerovnost $\gamma(x) > \iota\boldsymbol{w}^T(Bx)^+$ je ekvivalentní nerovnosti $(\gamma - \iota\boldsymbol{w}^T\iota I_{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}B)(x) > \iota\boldsymbol{w}^T\iota I_{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}|Bx|$, neboť $(Bx)^+ = \iota I_{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}\big(|Bx| + Bx\big)$.

5.24. Metodika uvedená v poslední poznámce 5.23 nám umožňuje lehce podávat podmínky nutné a postačující k tomu, aby určitá primární soustava lineárních rovnic, nerovnic nebo ne-rovnic neměla řešení. Jinými slovy, tato metodika nám umožňuje snadno formulovat další věty o alternativě (prvního druhu). Popsanou metodiku využijeme při důkazu níže uvedeného principu 5.27 a níže uvedených vět 5.29 a 5.32.

5.25. Vraťme se k lemmatu 4.21 o základní dualitě v lineárním programování a ke Carverově větě 5.8. Lemma 4.21 charakterizuje případ, kdy soustava $Ax \leq \boldsymbol{b}$ nemá řešení, věta 5.8 charakterizuje případ, kdy soustava ostrých lineárních nerovnic $Ax < \boldsymbol{b}$ nemá řešení. Je zajímavé se ptát, zda obě tato tvrzení lze „sloučit“ do jediné věty, která by charakterizovala neřešitelnost „obecné“ soustavy lineárních nerovnic $Ax < \boldsymbol{c}$, $Bx \leq \boldsymbol{d}$. Odpověď dává níže uvedený Motzkinův kombinační princip 5.27.

5.26. Poznámka. Motzkinův kombinační princip. V Motzkinově práci [71], [72: odst. 7 (v § 2 v úvodní kapitole)] se dočítáme, že (ne)řešitelností nehomogenní soustavy obsahující ostré i neostré nerovnice se zabýval už FOURIER. (Viz též odstavec 5.2, srov. [57].) Všeobecně se však uvádí ([44: úvodní část], poznámka 4.2.d, [71], [72: odst. 7 (v § 2 v úvodní kapitole)]), že FOURIER nešel do velké hloubky. MOTZKIN [71], [72: odst. 8 (v § 2 v úvodní kapitole), odst. 10 poznámka pod čarou [1] (v § 2 v úvodní kapitole na str. 9)] dále zmiňuje, že stejným tématem se dříve zabýval také MINKOWSKI, který již podal úplnou teorii (ne)řešitelnosti obecných nehomogenních soustav.

Neřešitelností nehomogenní soustavy obsahující ostré i neostré nerovnice se pak zabýval i sám Theodore MOTZKIN [71], [72: odstavec 69 (v § 12 v Kapitole III)]. Ačkoliv MOTZKIN pracuje výhradně s maticemi reálných čísel (tj. výhradně v konečněrozměrném reálném vektorovém prostoru), uvádí následující výsledek, který nazývá *kombinačním principem* [71], [72: Teorém D2 (v odstavci 69 v § 12 v Kapitole III na str. 56)]:

„*Lineární kombinací relací [tj. rovnic, nerovnic a ostrých nerovnic] libovolné neřešitelné soustavy lze odvodit spor bez neznámých [tj. proměnných].*

Takový spor je tvaru $\alpha < \alpha$, anebo jednoho z tvarů $\alpha \leq \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, kde ve skutečnosti platí $\alpha > \beta$. [Zde α a β jsou skaláry.]“

Následující Motzkinův kombinační princip 5.27 citovaný Motzkinův výsledek [71], [72: Teorém D2 (v odstavci 69 v § 12 v Kapitole III na str. 56)] uvádí v poněkud jiném tvaru. Doplňme, že další tvar Motzkinova kombinačního principu lze nalézt v [17: Teorém 1].

5.27. Motzkinův kombinační princip. *Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Ať m a n jsou dvě přirozená čísla (může být i $m = 0$ nebo $n = 0$) a ať $A\colon W \to F^m$ a $B\colon W \to F^n$ jsou dvě lineární zobrazení. K tomu mějme sloupcové vektory $\boldsymbol{c} \in F^m$ a $\boldsymbol{d} \in F^n$. Potom soustava nerovnic*

$$\begin{array}{c} Ax < \boldsymbol{c}\,, \\ Bx \leq \boldsymbol{d} \\ \hline \end{array}$$

nemá řešení právě tehdy, když

$$\exists \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \nu \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o}\ \vee\ \nu \neq 0,\ \exists \boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{o}\colon$$
$$\iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} A + \iota\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} B = o\ \wedge\ \iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} + \iota\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} + \nu = 0\,,$$

kde $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ a $\boldsymbol{\mu} \in F^n$, dále $\nu \in F$, k tomu o je nulová lineární forma $o\colon W \to F$ a 0 je nula tělesa F.

5.27.a. *Poznámka.* Podmínka $\binom{\nu}{\boldsymbol{\lambda}} \geq \binom{0}{\boldsymbol{o}}$ a k tomu $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o}$ nebo $\nu \neq 0$ je splněna právě tehdy, když $\binom{\nu}{\boldsymbol{\lambda}} \geq \binom{0}{\boldsymbol{o}}$ a $\binom{\nu}{\boldsymbol{\lambda}} \neq \binom{0}{\boldsymbol{o}}$.

5.27.b. *Poznámka.* Případ $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$ je singulární: soustava $Ax < \boldsymbol{c}$, $Bx \leq \boldsymbol{d}$ nemá řešení, protože už samotná soustava $Bx \leq \boldsymbol{d}$ nemá řešení.

5.27.c. *Poznámka.* Uvedený princip 5.27 zobecňuje Gordanovu větu 5.4 ($\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ a $n = 0$), Motzkinovu větu 5.6 ($\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{o}$), lemma 4.21 o základní dualitě v LP ($m = 0$) i Carverovu větu 5.8 ($n = 0$).

5.27.d. *Důkaz.* Soustava $Ax < \boldsymbol{c}$, $Bx \leq \boldsymbol{d}$ nemá řešení právě tehdy, když soustava

$$\begin{array}{r} o(x) - \iota 1(t) < 0\,, \\ Ax - \iota \boldsymbol{c}(t) < \boldsymbol{o}\,, \\ Bx - \iota \boldsymbol{d}(t) \leq \boldsymbol{o} \\ \hline \end{array}$$

nemá řešení, kde $t \in F$ je nová proměnná a 1 je jednotka tělesa F. K dokončení důkazu již stačí použít Motzkinovu větu 5.6 a provést několik málo ekvivalentních úprav. □

5.28. Motzkinova věta 5.6 charakterizuje neřešitelnost soustavy ostrých a neostrých lineárních nerovnic s nulovými pravými stranami. Právě uvedený Motzkinův kombinační princip 5.27 zobecňuje Motzkinovu větu 5.6 tím způsobem, že charakterizuje neřešitelnost soustavy ostrých a neostrých lineárních nerovnic s libovolnými pravými stranami.

Vraťme se k Tuckerově větě 5.12, která charakterizuje neřešitelnost soustavy současných neostrých lineárních nerovnic a ne-rovnic a neostrých lineárních nerovnic s nulovými pravými stranami. Nyní se obdobně můžeme ptát, zda je možné sestavit větu charakterizující neřešitelnost soustavy současných neostrých lineárních nerovnic a ne-rovnic a neostrých lineárních nerovnic s obecnými pravými stranami. Odpověď dává následující věta 5.29 zobecňující Tuckerovu větu 5.12.

Autorovi není známo, že by následující věta 5.29 (resp. věta jí obdobná) byla v literatuře kdy publikována. Lehkost, s jakou zde uvedenou větu 5.29 můžeme dokázat, tedy svědčí o užitečnosti metodiky důkazů vět o alternativě z poznámky 5.23.

5.29. Věta. *Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Mějme přirozená čísla m a n (lze vzít rovněž $m = 0$ nebo $n = 0$) a dvě lineární zobrazení $A: W \to F^m$ a $B: W \to F^n$. Dále mějme dva sloupcové vektory $\boldsymbol{c} \in F^m$ a $\boldsymbol{d} \in F^n$. Potom soustava*

$$\begin{array}{r} Ax \leq \boldsymbol{c}\,, \\ Ax \neq \boldsymbol{c}\,, \\ Bx \leq \boldsymbol{d} \\ \hline \end{array}$$

nemá řešení právě tehdy, když

$$\exists \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \nu \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\lambda} > \boldsymbol{o} \vee \nu > 0,\ \exists \boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{o}\colon$$
$$\iota \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} A + \iota \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} B = o \wedge \iota \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c} + \iota \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} + \nu = 0\,,$$

kde $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ a $\boldsymbol{\mu} \in F^n$, dále $\nu \in F$, k tomu o je nulová lineární forma $o: W \to F$ a 0 je nula tělesa F.

5.29.a. *Poznámka.* Uvedená věta 5.29 zobecňuje Stiemkeho větu 5.10 ($\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ a $n = 0$) i Tuckerovu větu 5.12 ($\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{o}$). Odvození lemmatu 4.21 o základní dualitě v LP z uvedené věty 5.29 je ovšem trochu složitější. Nestačí totiž položit $m = 0$, neboť potom by soustava $Ax \leq \boldsymbol{c}$, $Ax \neq \boldsymbol{c}$, $Bx \leq \boldsymbol{d}$ nikdy neměla řešení, protože blok $Ax \neq \boldsymbol{c}$ by neměl řešení (poznámka 1.78). (Poznamenejme, že tato věta 5.29 je korektní i tehdy, když $m = 0$. Stačí zvolit $\binom{\boldsymbol{\lambda}}{\nu} = \binom{\boldsymbol{o}}{0}$ a $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{o}$. Je-li $m = 0$ a $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$, pak zajisté $\boldsymbol{\lambda} > \boldsymbol{o}$ (definice 3.117).) Chceme-li z uvedené věty 5.29 odvodit lemma 4.21 o základní dualitě v LP, přirozené číslo m musí být nenulové (např. $m = 1$), avšak za lineární zobrazení $A\colon W \to F^m$ dosadíme nulové lineární zobrazení $O\colon W \to F^m$. Sloupcový vektor $\boldsymbol{c} \in F^m$ pak zvolíme libovolně tak, aby $\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{o}$ (např. $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}$, kde $\boldsymbol{e}$ je sloupec m jedniček, definice 1.57), aby soustava $Ax \leq \boldsymbol{c}$, $Ax \neq \boldsymbol{c}$ měla řešení a jejím řešením byl každý bod $x \in W$. Soustava $Ax \leq \boldsymbol{c}$, $Ax \neq \boldsymbol{c}$, $Bx \leq \boldsymbol{d}$ pak nemá řešení tehdy a jen tehdy, když soustava $Bx \leq \boldsymbol{d}$ nemá řešení. Nyní, když máme nezáporné $\boldsymbol{\mu} \in F^n$ splňující $\iota\boldsymbol{\mu}^T B = o$ a $\iota\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{d} < 0$, stačí volit $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$ a $\nu = -\iota\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{d}$. Na druhou stranu, když máme nezáporné $\binom{\boldsymbol{\lambda}}{\nu} \in F^m \dot{\times} F$ a nezáporné $\boldsymbol{\mu} \in F^n$ takové, že $\boldsymbol{\lambda} > \boldsymbol{o}$ nebo $\nu > 0$, k tomu $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A + \iota\boldsymbol{\mu}^T B = \iota\boldsymbol{\mu}^T B = o$ a $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{c} + \iota\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{d} + \nu = 0$, potom nutně $\iota\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{d} < 0$ (neboť $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{c} > 0$ nebo $\nu > 0$, tudíž $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{c} + \nu > 0$).

5.29.b. *Důkaz.* Použijeme metodiku z poznámky 5.23. Protože chceme charakterizovat neřešitelnost soustavy s obecně nenulovými pravými stranami, zavedeme novou pomocnou proměnnou $t \in F$. Protože pracujeme se soustavou současných nerovnic a ne-rovnic ($Ax \leq \boldsymbol{c}$, $Ax \neq \boldsymbol{c}$), nerovnice z této soustavy sečteme. Nyní vidíme, že soustava $Ax \leq \boldsymbol{c}$, $Ax \neq \boldsymbol{c}$, $Bx \leq \boldsymbol{d}$ nemá řešení právě tehdy, když soustava

$$\begin{aligned} o(x) - \iota\ 1\ (t) &< 0\,,\\ \iota\boldsymbol{e}^T Ax - \iota\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{c}(t) &< 0\,,\\ Ax - \iota\ \boldsymbol{c}\ (t) &\leq \boldsymbol{o}\,,\\ Bx - \iota\ \boldsymbol{d}\ (t) &\leq \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

nemá řešení, kde 1 je jednotka tělesa F a $\boldsymbol{e} = (1)_{i=1}^m \in F^m$ je sloupcový vektor m jedniček (definice 1.57). Podle Motzkinovy věty 5.6 ekvivalentně existují nezáporné skaláry $\nu, \eta \in F$, kde $\nu \neq 0$ nebo $\eta \neq 0$ (tedy $\nu > 0$ nebo $\eta > 0$), a nezáporné sloupcové vektory $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = (\tilde{\lambda}_i)_{i=1}^m \in F^m$ a $\boldsymbol{\mu} \in F^n$ tak, že $\iota\nu o + (\iota\eta\iota\boldsymbol{e}^T + \iota\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T)A + \iota\boldsymbol{\mu}^T B = o$ a současně $-\iota\nu\iota 1 - (\iota\eta\iota\boldsymbol{e}^T + \iota\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T)\iota\boldsymbol{c} - \iota\boldsymbol{\mu}^T\iota\boldsymbol{d} = \iota 0$. Druhá z těchto dvou rovnic je ovšem splněna tehdy a jen tehdy, když $\iota\nu(1) + (\iota\eta\iota\boldsymbol{e}^T + \iota\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T)(\boldsymbol{c}) + \iota\boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{d}) = 0$.

Položme $\boldsymbol{\lambda} = (\tilde{\lambda}_i + \eta)_{i=1}^m$. Snadno nahlédneme, že $(\iota\eta\iota\boldsymbol{e}^T + \iota\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T) = \iota\boldsymbol{\lambda}^T$. Dále vidíme, že když $\eta > 0$, potom zřejmě $\boldsymbol{\lambda} > \boldsymbol{o}$. Na druhou stranu, když máme $\boldsymbol{\lambda} > \boldsymbol{o}$, potom jistě existuje kladné $\eta \in F$ a nezáporný sloupcový vektor $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = (\tilde{\lambda}_i)_{i=1}^m \in F^m$ tak, že $\boldsymbol{\lambda} = (\tilde{\lambda}_i + \eta)_{i=1}^m$.

Ekvivalentně lze tedy říci, že soustava $Ax \leq \boldsymbol{c}$, $Ax \neq \boldsymbol{c}$, $Bx \leq \boldsymbol{d}$ nemá řešení právě tehdy, když existují nezáporný skalár $\nu \in F$ a nezáporné sloupcové vektory $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ a $\boldsymbol{\mu} \in F^n$ tak, že $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A + \iota\boldsymbol{\mu}^T B = o$ a současně $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{c} + \iota\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{d} + \nu = 0$, přičemž $\nu > 0$ nebo $\boldsymbol{\lambda} > \boldsymbol{o}$. Tím je věta dokázána. □

5.30. Při formulování Motzkinova kombinačního principu 5.27 bylo naším cílem „sloučit“ lemma 4.21 v lineárním programování a Carverovu větu 5.8 do jediného tvrzení. Nyní se můžeme ptát zda také princip 5.27 a poslední větu 5.29 lze „sloučit“ do jediného tvrzení. Výsledek uvádíme v následující větě 5.32.

Jak již zmíněno v odstavci 5.28, autorovi není známo, že by předcházející věta 5.29 byla v literatuře publikována. Následující věta 5.32 zmíněnou větu 5.29 zobecňuje. Z toho důvodu lze předpokládat, že ani následující věta 5.32 dosud v literatuře nebyla publikována.

5.31. Poznámka. Následující věta 5.32 je vlastně nejobecnější možnou větou o alternativě prvního druhu (poznámka 5.21). Charakterizuje totiž neřešitelnost soustavy s obecně nenulovými pravými stranami, v níž vystupují ostré lineární nerovnice, neostré nerovnice, které mají být splněny současně jako ne-rovnice, a neostré lineární nerovnice.

5.32. Věta. *Nechť W je vektorový prostor nad tělesem F. Ať m, n a r jsou tři přirozená čísla (může být $m = 0$ nebo $n = 0$ nebo $r = 0$). K tomu budiž dána tři lineární zobrazení $A: W \to F^m$, dále $B: W \to F^n$ a $\Gamma: W \to F^r$, dány budiž také tři sloupcové vektory $\boldsymbol{c} \in F^m$, k tomu $\boldsymbol{d} \in F^n$ a $\boldsymbol{f} \in F^r$. Potom soustava*

$$\begin{aligned} Ax &< \boldsymbol{c}\,, \\ Bx &\le \boldsymbol{d}\,, \\ Bx &\ne \boldsymbol{d}\,, \\ \Gamma x &\le \boldsymbol{f} \end{aligned}$$

nemá řešení právě tehdy, když

$$\exists \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \nu \\ \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ 0 \\ \boldsymbol{o} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\lambda} \ne \boldsymbol{o} \vee \nu \ne 0 \vee \boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{o},\ \exists \boldsymbol{\xi} \ge \boldsymbol{o}: \\ \iota\boldsymbol{\lambda}^T A + \iota\boldsymbol{\mu}^T B + \iota\boldsymbol{\xi}^T \Gamma = o \wedge \iota\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{c} + \iota\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{d} + \iota\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{f} + \nu = 0\,,$$

kde $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$, dále $\boldsymbol{\mu} \in F^n$, k tomu $\boldsymbol{\xi} \in F^r$ a $\nu \in F$, navíc o je nulová lineární forma $o: W \to F$ a 0 je nula tělesa F.

5.32.a. *Poznámka.* Když $\nu \ge 0$, potom $\nu \ne 0$ právě tehdy, když $\nu > 0$.

5.32.b. *Poznámka.* Podaná věta 5.32 zobecňuje předcházející větu 5.29 ($m = 0$), která – jak z poznámky 5.29.a víme – zobecňuje Stiemkeho větu 5.10, Tuckerovu větu 5.12, i lemma 4.21 o základní dualitě v LP. Odvození Motzkinova kombinačního principu 5.27, jenž – jak víme z poznámky 5.27.c – zobecňuje Gordanovu větu 5.4, Motzkinovu větu 5.6, lemma 4.21 o základní dualitě v LP i Carverovu větu 5.8 – je sice trochu pracnější, avšak lze postupovat obdobně jako v poznámce 5.29.a: přirozené číslo n musí být nenulové (např. $n = 1$), za zobrazení $B: W \to F^n$ dosadíme nulové lineární zobrazení $O: W \to F^n$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{d} \in F^n$ zvolíme tak, aby $\boldsymbol{d} \ge \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{d} \ne \boldsymbol{o}$ (např. $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{e}$). Pak soustava $Ax < \boldsymbol{c}$, $Bx \le \boldsymbol{d}$, $Bx \ne \boldsymbol{d}$, $\Gamma x \le \boldsymbol{f}$ nemá řešení právě tehdy, když soustava $Ax < \boldsymbol{c}$, $\Gamma x \le \boldsymbol{f}$ nemá řešení. Následně, když máme nezáporné $\binom{\boldsymbol{\lambda}}{\nu} \in F^m \dot{\times} F$ a nezáporné $\boldsymbol{\xi} \in F^r$ tak, že $\boldsymbol{\lambda} \ne \boldsymbol{o}$ nebo $\nu \ne 0$, k tomu $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A + \iota\boldsymbol{\xi}^T \Gamma = o$ a $\iota\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{c} + \iota\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{f} + \nu = 0$, potom už stačí položit $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{o}$. Na druhou stranu, když máme nezáporná $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$, $\tilde{\nu} \in F$, $\boldsymbol{\mu} \in F^m$ a nezáporné $\boldsymbol{\xi} \in F^r$ tak, že $\boldsymbol{\lambda} \ne \boldsymbol{o}$ nebo $\tilde{\nu} \ne 0$ nebo $\boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{o}$, k tomu $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A + \iota\boldsymbol{\mu}^T B + \iota\boldsymbol{\xi}^T \Gamma = \iota\boldsymbol{\lambda}^T A + \iota\boldsymbol{\xi}^T \Gamma = o$ a $\iota\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{c} + \iota\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{d} + \iota\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{f} + \tilde{\nu} = 0$, potom $\iota\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{c} + \iota\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{f} + \nu = 0$, kde $\nu = \tilde{\nu} + \iota\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{d}$; když $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{o}$, potom $\tilde{\nu} > 0$ nebo $\boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{o}$, následně $\tilde{\nu} > 0$ nebo $\iota\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{d} > 0$, takže $\nu = \tilde{\nu} + \iota\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{d} > 0$.

5.32.c. *Důkaz.* Budeme postupovat podobným způsobem jako v důkazu 5.29.b předcházející věty 5.29. Soustava $Ax < \boldsymbol{c}$, $Bx \le \boldsymbol{d}$, $Bx \ne \boldsymbol{d}$, $\Gamma x \le \boldsymbol{f}$ nemá řešení právě tehdy, když soustava

$$\begin{aligned} o(x) - \iota\ \ 1\ \ (t) &< 0\,, \\ Ax - \iota\ \ \boldsymbol{c}\ \ (t) &< \boldsymbol{o}\,, \\ \iota\boldsymbol{e}^T Bx - \iota\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{d}(t) &< 0\,, \\ Bx - \iota\ \ \boldsymbol{d}\ \ (t) &\le \boldsymbol{o}\,, \\ \Gamma x - \iota\ \ \boldsymbol{f}\ \ (t) &\le \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

nemá řešení, kde $t \in F$ je nová proměnná, dále 1 je jednotka tělesa F a $\boldsymbol{e} = (1)_{i=1}^m \in F^m$ je sloupcový vektor m jedniček (definice 1.57). Dle Motzkinovy věty 5.6 ekvivalentně existují nezáporné $\nu \in F$, $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$, $\eta \in F$, kde $\nu \neq 0$ nebo $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o}$ nebo $\eta \neq 0$ (tj. $\eta > 0$), a nezáporné $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = (\tilde{\mu}_j)_{j=1}^n \in F^n$ a $\boldsymbol{\xi} \in F^r$ takové, že $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A + (\iota\eta\iota\boldsymbol{e}^T + \iota\tilde{\boldsymbol{\mu}}^T)B + \iota\boldsymbol{\xi}^T\Gamma = o$ a současně $-\iota\nu(1) - \iota\boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{c}) - (\iota\eta\iota\boldsymbol{e}^T + \iota\tilde{\boldsymbol{\mu}}^T)(\boldsymbol{d}) - \iota\boldsymbol{\xi}^T(\boldsymbol{f}) = 0$.

Položme $\boldsymbol{\mu} = (\tilde{\mu}_j + \eta)_{j=1}^n$, aby $(\iota\eta\iota\boldsymbol{e}^T + \iota\tilde{\boldsymbol{\mu}}^T) = \iota\boldsymbol{\mu}^T$. Je jasné, že když $\eta > 0$, potom $\boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{o}$. Na druhou stranu, máme-li $\boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{o}$, potom jistě existuje kladné $\eta \in F$ a nezáporný sloupcový vektor $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = (\tilde{\mu}_j)_{j=1}^n \in F^n$ tak, že $\boldsymbol{\mu} = (\tilde{\mu}_j + \eta)_{j=1}^n$.

Ekvivalentně tedy můžeme říci, že soustava $Ax < \boldsymbol{c}$, $Bx \leq \boldsymbol{d}$, $Bx \neq \boldsymbol{d}$, $\Gamma x \leq \boldsymbol{f}$ nemá řešení právě tehdy, když existují nezáporná $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$, $\nu \in F$, $\boldsymbol{\mu} \in F^m$ a nezáporné $\boldsymbol{\xi} \in F^r$ tak, že $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A + \iota\boldsymbol{\mu}^T B + \iota\boldsymbol{\xi}^T\Gamma = o$ a současně $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{c} + \iota\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{d} + \iota\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{f} + \nu = 0$, přičemž $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o}$ nebo $\nu \neq 0$ nebo $\boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{o}$. □

5.33. Poznámky. Na závěr k větám o alternativě a souvisejícím výsledkům uvedeme několik poznámek.

5.33.a. Podívejme se znovu na věty o alternativě druhého druhu (poznámka 5.21). Stojí za pozornost, že v základním lemmatu 2.3, Farkasově lemmatu 4.15 i v Haarově větě 4.30 vystupoval (lineárně uspořádaný) vektorový prostor „cílových hodnot“ V a že tento prostor V byl do formulace vyjmenovaných tvrzení (alespoň z „intuitivního hlediska“) začleněn zcela přirozeným způsobem. Na druhou stranu, ve formulaci vět o alternativě prvního druhu (poznámka 5.21) – tedy Fredholmovy věty 2.11, lemmatu 4.21 o základní dualitě v LP, Gordanovy věty 5.4, Motzkinovy věty 5.6, Carverovy věty 5.8, Stiemkeho věty 5.10, Tuckerovy věty 5.12, Motzkinova kombinačního principu 5.27 ani vět 5.29 a 5.32 – už tento prostor „cílových hodnot“ V nenacházíme. Kdybychom přesto chtěli, aby (netriviální) vektorový prostor V (s lineárním uspořádáním) ve vyjmenovaných větách vystupoval, mohli bychom postupovat obdobně jako v poznámkách 2.11.a nebo 4.21.a.

Poznamenejme ale, že takového „vpravení“ prostoru V do vět o alternativě prvního druhu je (především z „intuitivního hlediska“) značně nepřirozené. Vidíme, že přítomnost nebo nepřítomnost prostor „cílových hodnot“ V ve formulaci věty je dalším podstatným rozdílem mezi větami o alternativě prvního a druhého druhu, viz poznámku 5.21.

5.33.b. Zatímco prostor „cílových hodnot“ V bylo možné do formulace vět o alternativě prvního druhu „vpravit“ alespoň „uměle“ (předcházející poznámka 5.33.a), v případě klíčové věty 5.15 je už toto „vpravení“ zcela nemožné. (Odůvodněme, proč vektorový prostor „cílových hodnot“ V do klíčové věty 5.15 není možné nijak začlenit: Kdybychom v klíčové větě 5.15 měli $\boldsymbol{\lambda} \in V^m$, potom obor hodnot $\operatorname{Rng} A$ zobrazení A z věty 5.15 je nutně částí prostoru F^m, aby obě zobrazení $A\colon W \to F^m$ a $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\colon F^m \to V$ bylo možné složit, abychom ve větě 5.15 mohli pracovat se složeným zobrazením $\iota\boldsymbol{\lambda}^T A$. Když ovšem v klíčové větě 5.15 máme zobrazení $A\colon W \to F^m$, potom v této větě 5.15 nutně musíme mít $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$ (tedy nikoliv $\boldsymbol{\lambda} \in V^m$), aby součet $\boldsymbol{\lambda} + Ax$, kde $x \in W$, byl proveditelný. Prostor „cílových hodnot“ V tedy do klíčové věty 5.15 není možné začlenit.)

5.33.c. Vektorový prostor „cílových hodnot“ V nevystupuje ani v Daxově větě 5.20, přestože v poznámce 5.21 jsme Daxovu větu 5.20 zařadili mezi věty o alternativě druhého druhu. K tomu jsme v poznámkách 5.21 a 5.33.a naznačili, že prostor „cílových hodnot“ V ve větách o alternativě druhého druhu má své přirozené místo. Lze se však důvodně domnívat, že platí také následující zobecnění Daxovy věty [28: Subsekce 5.1 a 5.4] (a [27], [30: Sekce 9]):

Nechť F je lineárně uspořádané těleso, nechť W je vektorový prostor nad tělesem F a nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Mějme dvě přirozená čísla m a n (lze vzít také $m = 0$ nebo $n = 0$) a dvě lineární zobrazení $A\colon W \to F^m$ a $B\colon W \to F^n$. Mějme rovněž sloupec nezáporných vah $\boldsymbol{w} \in V^n$, splňující $\boldsymbol{w} \succeq \boldsymbol{o}$, kde $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru V^n. K tomu budiž dáno lineární zobrazení $\gamma\colon W \to V$.

Potom implikace

$$Ax \le \boldsymbol{o} \implies \gamma(x) \preceq \iota \boldsymbol{w}^T |Bx|$$

platí pro každé $x \in W$ právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}\ \exists \boldsymbol{v},\ -\boldsymbol{w} \preceq \boldsymbol{v} \preceq \boldsymbol{w}\colon\ \gamma = \iota \boldsymbol{u}^T A + \iota \boldsymbol{v}^T B\,,$$

kde $\boldsymbol{u} \in V^m$, dále $\boldsymbol{v} \in V^n$ a $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru V^m.

Právě uvedená Daxova věta je samozřejmě obecnější než výše uvedená Daxova věta 5.20. Stojí za pozornost, že nyní uvedená Daxova věta zobecňuje také Farkasovo lemma 4.15. (Farkasovo lemma 4.15 lze z právě uvedené Daxovy věty získat dokonce dvěma způsoby: v Daxově větě stačí položit $n = 0$ anebo $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$.)

Dokázat Daxovu větu z této poznámky 5.33.c však bude poněkud náročnější, bude nutné postupovat zcela jinak než v důkazu 5.20.b Daxovy věty 5.20. Naznačme alespoň osnovu: (1) Uvedenou Daxovu větu je nejprve třeba dokázat v případě $m = 0$ (srov. [28: Subsekce 5.1], [27], [30: Sekce 9]). Je tedy třeba dokázat, že nerovnost $\gamma(x) \preceq \iota \boldsymbol{w}^T |Bx|$ platí pro všechna $x \in W$ právě tehdy, když existuje $\boldsymbol{v} \in V^n$ splňující $-\boldsymbol{w} \preceq \boldsymbol{v} \preceq \boldsymbol{w}$ a současně $\gamma = \iota \boldsymbol{v}^T B$. (2) Povšimněme si, že zobrazení $p\colon W \to V$ určené rovnicí $p(x) = \iota \boldsymbol{w}^T |Bx| - \gamma(x)$ pro $x \in W$ je sublineární (definice 4.7). Nyní je třeba dokázat, že implikace „$Ax = 0 \Rightarrow 0 \preceq p(x)$“, kde p je právě zavedené zobrazení, platí pro všechna $x \in W$ tehdy a jen tehdy, když existuje (vůbec nějaké) $\boldsymbol{u} \in V^m$ takové, že pro každé $x \in W$ je $0 \preceq p(x) + \iota \boldsymbol{u}^T Ax$. (Srov. poznámku 4.10, srov. též základní lemma 2.3.) Při důkazu existence sloupce $\boldsymbol{u} \in V^m$ využijeme toho, že zavedené zobrazení p má dosti speciální tvar. (3) Použijeme lemma 4.9. Indukcí (jako v důkazu 4.15.d Farkasova lemmatu 4.15) získáme nezáporný sloupec $\boldsymbol{u} \in V^m$, splňující $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$, takový, že pro každé $x \in W$ bude platit $0 \preceq p(x) + \iota \boldsymbol{u}^T Ax$ neboli $(\gamma - \iota \boldsymbol{u}^T A)(x) \preceq \iota \boldsymbol{w}^T |Bx|$. (4) Použijeme dokázanou větu z bodu (1). Máme tedy sloupec $\boldsymbol{v} \in V^n$ takový, že $-\boldsymbol{w} \preceq \boldsymbol{v} \preceq \boldsymbol{w}$, přičemž $\gamma - \iota \boldsymbol{u}^T A = \iota \boldsymbol{v}^T B$ neboli $\gamma = \iota \boldsymbol{u}^T A + \iota \boldsymbol{v}^T B$. Tím by uvedená Daxova věta byla dokázána.

Tvrzení uvedená v bodech (1) a (2) se zdají být „intuitivně zřejmá“. Na svůj (poctivě provedený) důkaz však teprve čekají. Body (3) a (4) jsou již snadné.

5.34. Dosažené výsledky. Uvedli jsme zobecněné tvary mnoha známých vět o alternativě, jmenovitě jde o Gordanovu větu 5.4, Motzkinovu větu 5.6, Carverovu větu 5.8, Stiemkeho větu 5.10, Tuckerovu větu 5.12, Daxovu větu 5.20 a Motzkinův kombinační princip 5.27. Zobecnili jsme také výsledek, který s větami o alternativě souvisí, a sice klíčovou větu 5.15. Přestože některá z těchto tvrzení – Carverovu větu a Motzkinův kombinační princip – lze najít v knize Sergeje ČERNIKOVA (Сергея ЧЕРНИКОВА) [22] – po řadě [22: teorém 4.1 (v hlavě IV § 1 na str. 282)] a [22: teorémy 4.4 a 4.4* (v hlavě IV § 2 na str. 289 a 290)] –, v této práci jsme důkazy provedli jiným způsobem; na rozdíl od ČERNIKOVA navíc nepředpokládáme, že by lineárně uspořádané těleso F mělo být komutativní (viz též odstavec 3.65). Použité metody důkazů jsme shrnuli v poznámce 5.23. Pomocí metodiky z poznámky 5.23 jsme pak snadno mohli dokázat i nové věty o alternativě 5.29 a 5.32, o kterých autorovi není známo, že by v literatuře byly publikovány. V poznámce 5.21 jsme věty o alternativě rozdělili na věty o alternativě prvního druhu a věty o alternativě druhého druhu; další rozdíly mezi těmito větami jsme uvedli v poznámce 5.33.a. Nakonec jsme v poznámce 5.33.c naznačili, že Daxovu větu 5.20, která je větou o alternativě druhého druhu, lze patrně ještě zobecnit. Řadu vět uvedených v tomto paragrafu – Motzkinovu větu 5.6, Carverovu větu 5.8, Motzkinův kombinační princip 5.27, Tuckerovu větu 5.12, Daxovu větu 5.20, klíčovou větu 5.15 a dosud nepublikovanou větu 5.29 – autor odeslal k publikaci, viz [15].

§ 6 Princip duality pro úlohy lineárního programování

6.1. V tomto paragrafu se budeme zabývat teorií duality v lineárním programování. Kromě již uvedeného Farkasova lemmatu 4.15 je jedním z ústředních výsledků této práce také níže uvedený princip duality 6.15.

Princip duality se v lineárním programování obvykle formuluje pro následující primární úlohu (vlevo) a úlohu k ní duální (vpravo):

$$\begin{array}{cc} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \longrightarrow \max & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \longrightarrow \min \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\,, & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \\ & \boldsymbol{u} \ge \boldsymbol{o}\,, \end{array} \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je matice typu $m \times n$, dále $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ jsou sloupcové vektory, přičemž m a n jsou přirozená čísla, a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ jsou proměnné. Připomeňme znění principu duality pro uvedené dvě úlohy (viz též definici 4.18):

Primární úloha má optimální řešení právě tehdy, když duální úloha má optimální řešení. Jestliže obě úlohy mají optimální řešení, potom optimální hodnoty obou úloh se rovnají.

6.2. Poznámka. Princip duality lze v lineárním programování formulovat rovněž pro primární úlohu (vlevo) a úlohu k ní duální (vpravo) následujícího tvaru:

$$\begin{array}{cc} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \longrightarrow \max & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \longrightarrow \min \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\,, & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} \ge \boldsymbol{c}^T, \\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{o}\,, & \boldsymbol{u} \ge \boldsymbol{o}\,, \end{array}$$

kde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{u}$ má stejný význam jako v předcházejícím odstavci 6.1. Rozdíl oproti úlohám 6.1.(1) z předcházejícího odstavce 6.1 spočívá v tom, že primární úloha zde navíc má podmínky na nezápornost proměnných ($\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{o}$), načež v duální úloze hlavní omezující podmínky jsou ve tvaru „$\ge$“ (nikoliv „$=$“).

My však budeme chtít (primární) úlohu formulovat v (obecně) nekonečněrozměrném vektorovém prostoru W. Máme-li nějaký vektor $x \in W$, potom je nesmírně obtížné rozhodnout, zda vektor x je nezáporný (protože na W nemáme žádnou „znaménkovou strukturu“, jde pouze o vektorový prostor). Z tohoto důvodu v této práci upřednostňujeme (primární) úlohy s omezeními ve tvaru nerovností „$\le$“ bez podmínek na nezápornost proměnných.

Pro úplnost dodejme, že podmínky na nezápornost proměnných x se v nekonečněrozměrném prostoru někdy formulují jako $x \in P$, kde P je konvexní kužel. K tomuto přístupu se vrátíme v § 13 (úvaha 13.6; pro jiný přístup viz poznámku 16.10). Ukážeme, že úlohy s „podmínkami na nezápornost“ tvaru $x \in P$ lze někdy převést na úlohy s nekonečným počtem lineárních omezení.

6.3. Okolnosti, které autora vedly až k formulaci a důkazu zobecněného Farkasova lemmatu 4.15 jsou blíže popsány v úvodní kapitole této práce. Po nalezení prvního důkazu Farkasova lemmatu na podzim roku 2000 (jak v odstavci 4.1 zmíněno) se autor k tomuto tématu důkladněji vrátil až po více než jeden a půlroční přestávce na jednom pobytu (ve Vela Luce) během letních prázdnin roku 2002. Tam autor hledal vlastní způsob důkazů (některých) vět o alternativě (jmenovitě šlo o Motzkinovu větu, lemma o základní dualitě v LP, Carverovu větu a Motzkinův kombinační princip). Poté autor přešel k teorii duality v lineárním programování v nekonečněrozměrných prostorech. Nakonec se autor snažil stejných výsledků dosáhnout i v případě soustav s nekonečným počtem lineárních nerovnic resp. omezení. Lze tedy říci, že základní myšlenky příslušných částí § 4 (lemma 4.21 o základní dualitě v LP a poznámka 4.22.b), § 5 (Motzkinova věta 5.6, Carverova věta 5.8 a Motzkinův kombinační princip 5.27), tohoto paragrafu, § 6 (níže uvedené lemma 6.12 a princip duality 6.15), jakož i významné části následující, druhé kapitoly (viz odstavec 11.9) pocházejí právě z té doby.

Autor tehdy (v létě roku 2002) stále pracoval v kontextu jednoho reálného vektorového prostoru. Tak se na už zmíněném pobytu jednoho dne stalo, že autor dokázal princip duality pro následující primární úlohu LP (vlevo) a úlohu k ní duální (vpravo):

$$\begin{array}{rcl} \gamma(x) \longrightarrow \max & \qquad & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \longrightarrow \min \\ Ax \le \boldsymbol{b}\,, & & \boldsymbol{u}^T A = \gamma\,, \\ & & \boldsymbol{u} \ge \boldsymbol{o}\,, \end{array} \tag{1}$$

kde $A\colon W \to \mathbb{R}^m$ a $\gamma\colon W \to \mathbb{R}$ jsou lineární zobrazení, přičemž m je přirozené číslo a W je reálný vektorový prostor (jakékoliv dimenze), dále $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ je sloupcový vektor, k tomu $x \in W$ a $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ jsou proměnné.

Později, až autor zjistil, že umí dokázat i lexikografické Farkasovo lemma 5 z úvodní kapitoly této práce, autor ověřil, že v podstatě stejným způsobem – původně použitým k důkazu principu duality pro výše uvedené dvě úlohy (1) – lze princip duality dokázat také pro následující primární úlohu lexikografického lineárního programování (vlevo) a úlohu k ní duální (vpravo):

$$\begin{array}{rcl} \gamma(x) \longrightarrow \operatorname{lex\,max} & \qquad & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \longrightarrow \operatorname{lex\,min} \\ Ax \le \boldsymbol{b}\,, & & \boldsymbol{u}^T A = \gamma\,, \\ & & \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}\,, \end{array} \tag{2}$$

kde W, m, A, $\boldsymbol{b}$ mají stejný význam jako výše, dále $\gamma\colon W \to \mathbb{R}^N$ je lineární zobrazení, přičemž N je přirozené číslo a na prostoru $\mathbb{R}^N$ uvažujeme lexikografické uspořádání (příklad 3.17) a $x \in W$ a $\boldsymbol{u} \in (\mathbb{R}^N)^m$ jsou proměnné. Nyní $\boldsymbol{u}^T$ můžeme chápat jako matici typu $N \times m$ a zápis $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$ vyjadřuje, že každý z jejích m sloupců má být lexikograficky nezáporný.

Po uplynutí další doby, až autor zjistil, že umí dokázat rovněž zobecněné Farkasovo lemma 4.15, vyšlo najevo, že (ve své podstatě stále stejným) způsobem je možné dokázat princip duality i pro následující primární úlohu LP (vlevo) a úlohu k ní duální (vpravo):

$$\begin{array}{rcl} \gamma(x) \longrightarrow \max & \qquad & \iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \longrightarrow \min \\ Ax \le \boldsymbol{b}\,, & & \iota\boldsymbol{u}^T A = \gamma\,, \\ & & \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}\,, \end{array} \tag{3}$$

kde $A\colon W \to F^m$ a $\gamma\colon W \to V$ jsou lineární zobrazení, přičemž m je přirozené číslo, dále F je lineárně uspořádané těleso, k tomu W je vektorový prostor nad tělesem F a V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F, navíc $\boldsymbol{b} \in F^m$ je sloupcový vektor a $x \in W$ a $\boldsymbol{u} \in V^m$ jsou proměnné.

6.4. Poznámka. Nechť F je těleso s lineárním uspořádáním. Dále ať W je vektorový prostor nad tělesem F a V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Budiž dána dvě lineární zobrazení $A\colon W \to F^m$ a $\gamma\colon W \to V$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$, kde m je přirozené číslo (může být i $m = 0$). Jak jsme v předcházejícím odstavci 6.3 naznačili, v tomto paragrafu se budeme zabývat následující primární úlohou LP (vlevo) a úlohou k ní duální (vpravo), kde $x \in W$ a $\boldsymbol{u} \in V^m$ jsou proměnné:

$$\begin{array}{llcll} \text{(P)} & \gamma(x) \longrightarrow \max & \qquad & \text{(D)} & \iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \longrightarrow \min \\ & Ax \le \boldsymbol{b}\,, & & & \iota\boldsymbol{u}^T A = \gamma\,, \\ & & & & \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}\,. \end{array}$$

Obě tyto úlohy jsou speciálním případem obecné úlohy optimalizace dle definice 4.18. Abychom dostali primární úlohu (P), v definici 4.18 stačí položit $\bar{M} = W$ a $M = \{\, x \in W \;;\; Ax \le \boldsymbol{b} \,\}$, dále $N = V$, k tomu $f = \gamma$. Abychom dostali duální úlohu (D), v definici 4.18 stačí položit $\bar{M} = V^m$ a $M = \{\, \boldsymbol{u} \in V^m \;;\; \iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A = \gamma \wedge \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o} \,\}$, opět $N = V$ a cílová funkce $f\colon V^m \to V$ je určena předpisem $f(\boldsymbol{u}) = \iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ pro $\boldsymbol{u} \in V^m$. Duální úloha (D) je ovšem variantou obecné úlohy optimalizace, neboť cílová funkce se v ní minimalizuje. Dodejme, že pokud těleso F není komutativní (viz též odstavec 3.65), cílová funkce duální úlohy nemusí být lineární (viz též poznámku 4.22.a).

6.5. Dříve než pro úlohy (P) a (D) z předcházející poznámky 6.4 dokážeme princip duality 6.15, ukážeme, že pro obě úlohy platí také následující věta 6.6 o slabé dualitě.

6.6. Tvrzení. Věta o slabé dualitě. *Nechť F je lineárně uspořádané těleso, nechť W je vektorový prostor nad tělesem F a nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Ať m je přirozené číslo (lze vzít i $m = 0$), k tomu mějme lineární zobrazení $A\colon W \to F^m$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$. Mějme rovněž lineární zobrazení $\gamma\colon W \to V$.*

Potom pro libovolný bod $x \in W$ splňující $Ax \le \boldsymbol{b}$ a pro libovolný sloupec vektorů $\boldsymbol{u} \in V^m$ splňující $\iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A = \gamma$ a $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$ platí

$$\gamma(x) \preceq \iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\,.$$

6.6.a. *Poznámka.* Řešení $x \in W$ splňující $Ax \le \boldsymbol{b}$ je přípustným řešením úlohy (P) z poznámky 6.4, tj., je *primárně přípustné.* Řešení $\boldsymbol{u} \in V^m$ splňující $\iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A = \gamma$ a $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$ je přípustným řešením úlohy (D) z poznámky 6.4, tj., je *duálně přípustné.*

6.6.b. *Důkaz.* $\gamma(x) = \iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}Ax \preceq \iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$. □

6.7. Poznámky. Uveďme všeobecně známé důsledky právě uvedeného tvrzení 6.6. Úlohy (P) a (D) v následujících třech poznámkách znamenají úlohy (P) a (D) z poznámky 6.4.

6.7.a. Jestliže se nám podaří najít dvě přípustná řešení x a $\boldsymbol{u}$ splňující $\gamma(x) = \iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$, potom tato řešení jsou optimálními řešeními úloh po řadě (P) a (D) a platí podmínka komplementarity $\iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(Ax - \boldsymbol{b}) = 0$, kde 0 je nulový vektor prostoru V.

6.7.b. Jestliže cílová funkce primární úlohy (P) není omezená shora, potom duální úloha (D) je nepřípustná.

6.7.c. Jestliže cílová funkce duální úlohy (D) není omezená zdola, potom primární úloha (P) je nepřípustná.

6.8. V následující definici 6.9 zavedeme označení, které použijeme v níže uvedeném lemmatu 6.12 a principu duality 6.15 a které využijeme i v § 14.

6.9. Definice. Prostory F^I a V^I, lineární zobrazení $A_I\colon W \to F^I$, sloupce $\boldsymbol{b}_I$ a $\boldsymbol{u}_I$. Lineární zobrazení $\iota\boldsymbol{u}_I^{\mathrm{T}}\colon F^I \to V$. Nechť W a V jsou vektorové prostory nad tělesem F. Budiž dáno přirozené číslo m (lze vzít i $m = 0$), lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m\colon W \to F^m$, sloupcový vektor $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$ a sloupec vektorů $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$. Zde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární formy definované na prostoru W, dále $b_1, \ldots, b_m$ jsou skaláry z tělesa F a $u_1, \ldots, u_m$ jsou vektory z prostoru V. Zvolme libovolnou podmnožinu $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ množiny indexů $\{1, \ldots, m\}$.

Nejprve předpokládejme, že množina I je neprázdná, $I \ne \emptyset$ (takže přirozené číslo m je nenulové). Podle definice 1.52 můžeme sestavit součiny $F^I = \prod_{i \in I} F_i$ a $V^I = \prod_{i \in I} V_i$, kde F_i a V_i je po řadě aditivní grupa tělesa F a prostor V pro $i \in I$. Dále ať $p_i\colon F^m \to F$ a $\tilde{p}_i\colon V^m \to V$ jsou příslušné přirozené projekce (viz definici 1.52) pro $i = 1, \ldots, m$. Dle definice 1.53 můžeme sestavit součiny $\prod_{i\in I} p_i: F^m \to F^I$ a $\prod_{i\in I} \tilde{p}_i: V^m \to V^I$ těchto projekcí. Položme pro stručnost $P_I = \prod_{i\in I} p_i$ a $\tilde{P}_I = \prod_{i\in I} \tilde{p}_i$. Když máme lineární zobrazení $A: W \to F^m$ a sloupce $\boldsymbol{b} \in F^m$ a $\boldsymbol{u} \in V^m$, potom klademe $A_I = P_I \circ A_I$, kde „$\circ$" označuje skládání zobrazení, a dále $\boldsymbol{b}_I = P_I\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{u}_I = \tilde{P}_I\boldsymbol{u}$. Máme tedy

$$A_I = (\alpha_i)_{i\in I}: W \to F^I, \qquad \boldsymbol{b}_I = (b_i)_{i\in I} \in F^I, \qquad \boldsymbol{u}_I = (u_i)_{i\in I} \in V^I,$$

kde význam součinu $(\alpha_i)_{i\in I}$ lineárních forem α_i, přičemž $i \in I$, je dán definicí 1.53 a význam sloupců $(b_i)_{i\in I} \in F^I$ a $(u_i)_{i\in I} \in V^i$ je dán definicí 1.52.

Jestliže množina I je prázdná, $I = \emptyset$, potom (ať už přirozené číslo m je anebo není nulové) klademe $F^I = F^0$ a $V^I = V^0$, přičemž význam triviálních prostorů F^0 a V^0 je zaveden definicí 1.56, dále $A_I: W \to F^I$ je nulové lineární zobrazení a sloupce $\boldsymbol{b}_I$ a $\boldsymbol{u}_I$ jsou počátky těchto prostorů po řadě F^0 a V^0.

Opět předpokládejme, že množina I je neprázdná. Potom s každou ze složek u_i sloupce $\boldsymbol{u}_I = (u_i)_{i\in I}$ je asociováno lineární zobrazení $\iota u_i: F \to V$ pro $i \in I$, a sice pravá V-homotetie vektorového prostoru V určená vektorem u_i pro $i \in I$. Podle definice 1.53 tato lineární zobrazení můžeme direktně sečíst a položit $\iota\boldsymbol{u}_I^T = (\iota u_i)_{i\in I}^T: F^I \to V$. Podobně postupujeme i tehdy, když za vektorový prostor V je dosazena aditivní grupa tělesa F. Následně, máme-li vektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \in F^m$, potom obdobným způsobem sestavíme lineární zobrazení $\iota\boldsymbol{\lambda}_I^T = (\iota\lambda_i)_{i\in I}^T: F^I \to F$.

Je-li množina I prázdná, potom lineární zobrazení $\iota\boldsymbol{u}_I^T: F^I \to V$, jakož i $\iota\boldsymbol{\lambda}_I^T: F^I \to$ $\to F$, kde $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$, jsou nulová.

6.10. Poznámka. Porovnávání sloupců prostorů F^I a V^I. Nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Mějme přirozené číslo m a zvolme indexovou množinu $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ (může být i $m = 0$ nebo $I = \emptyset$). Na konci § 3 jsme se zabývali porovnáváním sloupců z prostorů V^m a F^m, soustavami lineárních nerovnic a dalšími tématy. Obdobným způsobem bychom mohli postupovat i zde, kdy chceme pracovat s prostory V^I a F^I. Bylo by ale zbytečné tuto teorii znovu opakovat. (Spíše jsme na konci § 1 a § 3 měli postupovat tak, abychom pokryli i případ prostorů V^I a F^I. Viz též poznámku 10.3.)

Je tedy zřejmé, že když $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m$, $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1}^m \in V^m$ jsou sloupce vektorů a $\boldsymbol{o} = (0)_{i=1}^m \in V^m$ je počátek prostoru V^m, potom $\boldsymbol{u}_I \succeq \boldsymbol{o}_I$ resp. $\boldsymbol{u}_I \preceq \boldsymbol{v}_I$ právě tehdy, když po řadě $u_i \succeq 0$ resp. $u_i \preceq v_i$ pro všechna $i \in I$. Obdobným způsobem se postupuje i tehdy, když za prostor V je dosazena aditivní grupa tělesa F. Následně, máme-li lineární zobrazení $A: W \to F^m$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$, pak $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ je soustava lineárních nerovnic: pro daný bod $x \in W$ je $A_I x$ sloupcový vektor z prostoru F^I a výše naznačeným způsobem jej porovnáváme se sloupcovým vektorem $\boldsymbol{b}_I$.

6.11. Předtím, než princip duality 6.15 dokážeme, uvedeme následující lemma 6.12, které podává charakteristiku optimality primárně přípustného řešení.

6.12. Lemma. *Nechť F je těleso s lineárním uspořádáním, nechť W je vektorový prostor nad tělesem F a nechť V je vektorový prostor s lineárním uspořádáním nad lineárně uspořádaným tělesem F. Ať m je přirozené číslo (může být i $m = 0$) a mějme lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m: W \to F^m$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$. Mějme také lineární zobrazení $\gamma: W \to V$.*

Bod $x^* \in W$ splňující $Ax^* \leq \boldsymbol{b}$ budiž jedním z přípustných řešení úlohy (P). *Omezující podmínky $Ax \leq \boldsymbol{b}$ rozdělme do dvou skupin: na podmínky aktivní v bodě x^* a na podmínky neaktivní v bodě x^*, položme*

$$I^{=}_{A,x^*,\boldsymbol{b}} = \left\{\, i \in \{1, \ldots, m\} \;;\; \alpha_i(x^*) = b_i \,\right\},$$
$$I^{<}_{A,x^*,\boldsymbol{b}} = \left\{\, i \in \{1, \ldots, m\} \;;\; \alpha_i(x^*) < b_i \,\right\}.$$

Pak bod x^* je optimálním řešením úlohy (P) *právě tehdy, když zobrazení γ leží ve V-kuželovém obalu aktivních podmínek, tj. právě tehdy, když*

$$\gamma \in \operatorname{cone}_V \{\, \alpha_i \,;\, i \in I^{=}_{A,x^*,\boldsymbol{b}} \,\} = \Big\{ \sum_{i \in I^{=}_{A,x^*,\boldsymbol{b}}} \iota u_i \alpha_i \,;\, u_i \in V,\, u_i \succeq 0,\, i \in I^{=}_{A,x^*,\boldsymbol{b}} \Big\},$$

kde 0 *je počátek vektorového prostoru V. Úloha* (P) *znamená úlohu* (P) *z poznámky 6.4.*

6.12.a. *Důkaz.* Pro stručnost položme $I = I^{=}_{A,x^*,\boldsymbol{b}}$ a k tomu $J = I^{<}_{A,x^*,\boldsymbol{b}}$.

Implikace „$\Leftarrow$" je snadná. Když zobrazení γ leží ve V-kuželovém obalu aktivních podmínek, znamená to, že existuje nezáporný sloupec $\boldsymbol{u}_I \in V^I$, splňující $\boldsymbol{u}_I \succeq \boldsymbol{o}_I$, kde $\boldsymbol{o}_I$ je počátek prostoru V^I, pro který platí $\gamma = \iota \boldsymbol{u}_I^T A_I$. Odtud plyne (pomocí triviální části Farkasova lemmatu 4.15), že pro všechna $x \in W$ platí

$$A_I x \le \boldsymbol{o}_I \implies \gamma(x) \preceq 0\,,$$

kde $\boldsymbol{o}_I$ již vyjadřuje počátek prostoru F^I.

Je zřejmé, že každý bod z množiny přípustných řešení úlohy (P) lze vyjádřit jako součet $x^* + x$, kde $x \in W$ je vhodný vektor.

Zkusme si tedy položit otázku, zda v nějakém přípustném bodě $x^* + x$ může být hodnota cílové funkce γ lepší než v bodě x^*. Když bod $x^* + x$ je přípustný, musí platit $A_I(x^* + x) \le \boldsymbol{b}_I$ (protože platí $A(x^* + x) \le \boldsymbol{b}$). Víme však, že $A_I x^* = \boldsymbol{b}_I$ (vzhledem k definici množiny $I = I^{=}_{A,x^*,\boldsymbol{b}}$). Tudíž $A_I x \le \boldsymbol{o}_I$, proto $\gamma(x) \preceq 0$, a odtud

$$\gamma(x^* + x) = \gamma(x^*) + \gamma(x) \preceq \gamma(x^*)\,.$$

Vidíme, že bod x^* je optimálním řešením úlohy (P).

Nyní dokážeme implikaci „$\Rightarrow$". Nechť bod x^* je optimálním řešením úlohy (P). Připomeňme, že $I = I^{=}_{A,x^*,\boldsymbol{b}}$ a $J = I^{<}_{A,x^*,\boldsymbol{b}}$ je množina indexů podmínek po řadě aktivních a neaktivních v bodě x^*, a každý bod množiny přípustných řešení úlohy (P) pišme ve tvaru $x^* + x$, kde $x \in W$ je vhodný vektor.

Víme tedy, že implikace

$$A(x^* + x) \le \boldsymbol{b} \implies \gamma(x^* + x) \preceq \gamma(x^*)$$

neboli

$$\begin{array}{c} A_I x^* + A_I x \le \boldsymbol{b}_I\,, \\ \underline{A_J x^* + A_J x \le \boldsymbol{b}_J} \end{array} \qquad \implies \qquad \gamma(x) \preceq 0$$

neboli (ježto $A_I x^* = \boldsymbol{b}_I$)

$$\begin{array}{c} A_I x \le \boldsymbol{o}_I\,, \\ \underline{A_J x \le \boldsymbol{b}_J - A_J x^*} \end{array} \qquad \implies \qquad \gamma(x) \preceq 0$$

platí pro všechna $x \in W$. Poznamenejme, že sloupec $\boldsymbol{b}_J - A_J x^*$ je konstantní a ostře kladný, $\boldsymbol{b}_J - A_J x^* > \boldsymbol{o}_J$, kde $\boldsymbol{o}_J$ je počátek prostoru F^J.

Ukážeme, že pro všechna $x \in W$ platí implikace

$$A_I x \le \boldsymbol{o}_I \implies \gamma(x) \preceq 0\,.$$

Zvolme bod $x \in W$ splňující $A_I x \le \boldsymbol{o}_I$. Je-li současně $A_J x \le \boldsymbol{b}_J - A_J x^*$, pak tvrzení ($\gamma(x) \preceq 0$) plyne z implikace výše. Jinak ($A_J x \not\le \boldsymbol{b}_J - A_J x^*$) vektor x vynásobíme dostatečně malým kladným skalárem λ tak, aby $A_J(\lambda x) \le \boldsymbol{b}_J - A_J x^*$ (vezmi $\lambda = {}$ $= \min_{j \in J^*} \big(b_j - \alpha_j(x^*)\big)\big(\alpha_j(x)\big)^{-1}$, kde $J^* = \{\, j \in J \,;\, \alpha_j(x) > b_j - \alpha_j(x^*) \,\}$). Pak platí i $A_I(\lambda x) \le \boldsymbol{o}_I$, a tudíž $\gamma(\lambda x) \preceq 0$.

Pro každé $x \in W$ tedy platí: jestliže $A_I x \le \boldsymbol{o}_I$, potom $\gamma(x) \preceq 0$. Farkasovo lemma 4.15 pak dává žádaný výsledek. $\square$

6.13. Nyní jsme již dostatečně připraveni, abychom mohli dokázat větu o silné dualitě neboli princip duality pro úlohy lineárního programování (s konečným počtem lineárních omezení).

6.14. Poznámka. V principu duality 6.15 – jako už v základním lemmatu 2.3 a Farkasově lemmatu 4.15 – vystupuje „základní“ nebo „nosný“ vektorový prostor W a vektorový prostor „cílových hodnot“ V s lineárním uspořádáním (srov. definici 4.18). Oba prostory W a V jsou nad společným lineárně uspořádaným tělesem F. Viz též komutativní diagram v poznámce 2.4 nebo 4.16.

Jednou z možných voleb v níže uvedeném principu duality 6.15 je za vektorový prostor V dosadit aditivní grupu tělesa F s jeho uspořádáním. Za dodatečného předpokladu komutativity tělesa F tak dostáváme princip duality, který dokázal Černikov (Черников) [22: teorém 6.4 (v hlavě VI § 1 na str. 373)]. Jinou možností je za těleso F dosadit těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním a za vektorový prostor V dosadit prostor $\mathbb{R}^N$ s lexikografickým uspořádáním, kde N je přirozené číslo. Tím dostáváme princip duality pro úlohy lexikografického lineárního programování 6.3.(2) z odstavce 6.3. Je-li F stále těleso $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním a za vektorový prostor V dosadíme aditivní grupu tohoto tělesa s jeho uspořádáním, dostáváme princip duality pro úlohy lineárního programování v (obecně) nekonečněrozměrných prostorech 6.3.(1) z odstavce 6.3. A když navíc W je prostor $\mathbb{R}^n$, kde n je přirozené číslo, potom dostáváme klasický princip duality pro úlohy 6.1.(1) lineárního programování v konečněrozměrných prostorech, které jsme uvedli už v odstavci 6.1.

Stojí za pozornost, že v principu duality 6.15 nepředpokládáme, že by lineárně uspořádané těleso F mělo být komutativní (viz též odstavec 3.65). V principu duality 6.15 rovněž nepředpokládáme, že by uspořádání prostoru V mělo být slabě archimedovské, a v jeho důkazu 6.15.c nepoužíváme Haarovu větu 4.30 (srov. poznámku 4.32).

6.15. Princip duality. *Ať F je lineárně uspořádané těleso, ať W je vektorový prostor nad tělesem F a nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Nechť m je přirozené číslo (může být i $m = 0$) a mějme lineární zobrazení $A\colon W \to F^m$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$. K tomu mějme lineární zobrazení $\gamma\colon W \to V$. Uvažujme následující primární úlohou LP (vlevo) a úlohou k ní duální (vpravo), kde $x \in W$ a $\boldsymbol{u} \in V^m$ jsou proměnné:*

$$
\text{(P)}\qquad \begin{aligned} \gamma(x) &\longrightarrow \max \\ Ax &\le \boldsymbol{b}\,, \end{aligned}
\qquad\qquad\qquad
\text{(D)}\qquad \begin{aligned} \iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} &\longrightarrow \min \\ \iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A &= \gamma\,, \\ \boldsymbol{u} &\succeq \boldsymbol{o}\,. \end{aligned}
$$

Potom platí:

I. *Nechť bod $x^* \in W$, splňující $Ax^* \le \boldsymbol{b}$, je optimálním řešením primární úlohy. Potom existuje $\boldsymbol{u}^* \in V^m$ vyhovující podmínkám $\iota\boldsymbol{u}^{*\mathrm{T}}A = \gamma$ a $\boldsymbol{u}^* \succeq \boldsymbol{o}$ a takové, že $\gamma(x^*) = \iota\boldsymbol{u}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$.*

II. *Nechť sloupec $\boldsymbol{u}^* \in V^m$, splňující $\iota\boldsymbol{u}^{*\mathrm{T}}A = \gamma$ a $\boldsymbol{u}^* \succeq \boldsymbol{o}$, je optimálním řešením duální úlohy. Navíc předpokládejme, že vektorový prostor V je nenulový. Potom existuje bod $x^* \in W$ vyhovující podmínce $Ax^* \le \boldsymbol{b}$ takový, že $\gamma(x^*) = \iota\boldsymbol{u}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$.*

6.15.a. *Poznámka.* Ad I. Pomocí věty 6.6 o slabé dualitě snadno ověříme, že sloupec $\boldsymbol{u}^*$ je optimálním řešením duální úlohy. Jestliže tedy primární úloha má optimální řešení x^*, potom rovněž duální úloha má optimální řešení $\boldsymbol{u}^*$ a platí $\gamma(x^*) = \iota\boldsymbol{u}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$.

6.15.b. *Poznámka.* Ad II. Pomocí věty 6.6 o slabé dualitě rovněž ověříme, že bod x^* je optimálním řešením primární úlohy. Jestliže tedy duální úloha má optimální řešení $\boldsymbol{u}^*$ a vektorový prostor V je netriviální, potom také primární úloha má optimální řešení x^* a platí $\gamma(x^*) = \iota\boldsymbol{u}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$.

6.15.c. *Důkaz.* I. Dle předchozího lemmatu 6.12 víme, že γ leží ve V-kuželovém obalu aktivních podmínek. Předpokládejme, že $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ a že $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$. Ať $I = I^{=}_{A,x^*,\boldsymbol{b}}$ a $J = I^{<}_{A,x^*,\boldsymbol{b}}$ je množina indexů podmínek po řadě aktivních a neaktivních v bodě x^*, jinými slovy

$$\begin{aligned} I = I^{=}_{A,x^*,\boldsymbol{b}} &= \left\{\, i \in \{1,\dots,m\} \,;\ \alpha_i(x^*) = b_i \,\right\}, \\ J = I^{<}_{A,x^*,\boldsymbol{b}} &= \left\{\, i \in \{1,\dots,m\} \,;\ \alpha_i(x^*) < b_i \,\right\}. \end{aligned}$$

Víme tedy, že $\gamma \in \operatorname{cone}_V\{\, \alpha_i \,;\ i \in I \,\}$ neboli

$$\exists \boldsymbol{u}_I^* \succeq \boldsymbol{o}_I \colon\ \gamma = \iota \boldsymbol{u}_I^{*T} A_I \,.$$

Položme dále $\boldsymbol{u}_J^* = \boldsymbol{o}_J$. Zde $\boldsymbol{u}_I^* \in V^I$ a $\boldsymbol{u}_J^* \in V^J$, k tomu $\boldsymbol{o}_I$ a $\boldsymbol{o}_J$ je nulový vektor prostoru po řadě V^I a V^J. Potom dohromady máme $\boldsymbol{u}^* \succeq \boldsymbol{o}$, kde $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru V^m, platí $\iota \boldsymbol{u}^{*T} A = \gamma$ a

$$\iota \boldsymbol{u}^{*T} \boldsymbol{b} = \iota \boldsymbol{u}_J^{*T} \boldsymbol{b}_J + \iota \boldsymbol{u}_I^{*T} \boldsymbol{b}_I = 0 + \iota \boldsymbol{u}_I^{*T} A_I x^* = \gamma(x^*) \,.$$

Tímto je důkaz první části završen.

II. Budiž tedy $\boldsymbol{u}^* = (u_i^*)_{i=1}^m \in V^m$, splňující $\boldsymbol{u}^* \succeq \boldsymbol{o}$ a $\iota \boldsymbol{u}^{*T} A = \gamma$, optimálním řešením duální úlohy. Indexy proměnné $\boldsymbol{u}^*$ rozdělme na dvě skupiny:

$$\begin{aligned} I &= \left\{\, i \in \{1,\dots,m\} \,;\ u_i^* \succ 0 \,\right\}, \\ J &= \left\{\, i \in \{1,\dots,m\} \,;\ u_i^* = 0 \,\right\}. \end{aligned}$$

Uvažujme nyní, že primární úloha by mohla mít nějaké optimální řešení x^* očekávaných vlastností (tj. $\gamma(x^*) = \iota \boldsymbol{u}^{*T} \boldsymbol{b}$). Pak je ovšem zcela nevyhnutelné – kvůli nerovnosti $\gamma(x^*) = \iota \boldsymbol{u}^{*T} A x^* \preceq \iota \boldsymbol{u}^{*T} \boldsymbol{b}$ –, že podmínky s indexy z množiny I v bodě x^* budou aktivní.

Na druhou stranu, podaří-li se nám najít nějaké primárně přípustné řešení x^* takové, aby podmínky s indexy z množiny I v něm byly aktivní, pak zřejmě půjde o optimální řešení primární úlohy (v nerovnosti $\gamma(x^*) = \iota \boldsymbol{u}^{*T} A x^* \preceq \iota \boldsymbol{u}^{*T} \boldsymbol{b}$ nastane rovnost).

Stačí tedy nalézt bod x^* uvedených vlastností: řešíme soustavu rovnic a nerovnic

$$\begin{aligned} A_I x &= \boldsymbol{b}_I \,, \\ A_J x &\le \boldsymbol{b}_J \,. \end{aligned}$$

Kdyby tato soustava nebyla řešitelná, pak dle lemmatu 4.21 o základní dualitě v LP (ve spojení s poznámkami 3.127, 3.128, 3.129 a 3.131)

$$\exists \boldsymbol{\lambda}_I\ \exists \boldsymbol{\lambda}_J \ge \boldsymbol{o}_J \colon\ \iota \boldsymbol{\lambda}_I^T A_I + \iota \boldsymbol{\lambda}_J^T A_J = o \ \wedge\ \iota \boldsymbol{\lambda}_I^T \boldsymbol{b}_I + \iota \boldsymbol{\lambda}_J^T \boldsymbol{b}_J < 0 \,,$$

kde sloupcový vektor $\boldsymbol{\lambda}_I \in F^I$ není omezen ve znaménku, dále $\boldsymbol{\lambda}_J \in F^J$ a $\boldsymbol{o}_I$ a $\boldsymbol{o}_J$ je nulový vektor prostoru po řadě F^I a F^J. (Poznámka: Jedna ze složek vektoru $\boldsymbol{\lambda}_I$ je záporná. Nutně totiž platí

$$\forall \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_I \ge \boldsymbol{o}\ \forall \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_J \ge \boldsymbol{o} \colon\ \iota \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_I^T A_I + \iota \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_J^T A_J = o \ \Rightarrow\ \iota \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_I^T \boldsymbol{b}_I + \iota \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_J^T \boldsymbol{b}_J \ge 0 \,.$$

Jinak by cílová funkce úlohy (D) – obdobně jako v poznámce 4.22.b (případ, kdy primární úloha (P_0) není přípustná) – nebyla omezená zdola. (Přímý argument: Předpokládejme pro spor, že existuje nezáporné $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = (\tilde{\lambda}_i)_{i=1}^m \in F^m$, splňující $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \ge \boldsymbol{o}$, aby $\iota \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T A = o$ a $\iota \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T \boldsymbol{b} < 0$. Vezměme kladné $\varepsilon \in V$, splňující $\varepsilon \succ 0$, a položme $\tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{\lambda}_i \varepsilon)_{i=1}^m$. Potom

$(\boldsymbol{u}^* + \tilde{\boldsymbol{u}}) \succeq \boldsymbol{o}$ a $\iota(\boldsymbol{u}^* + \tilde{\boldsymbol{u}})^T A = \gamma$, navíc $\iota(\boldsymbol{u}^* + \tilde{\boldsymbol{u}})^T \boldsymbol{b} \prec \iota \boldsymbol{u}^{*T} \boldsymbol{b}$, což je spor s optimalitou řešení $\boldsymbol{u}^*$.) Jako vedlejší výsledek též dostáváme, že soustava

$$\begin{array}{c} A_I x \leq \boldsymbol{b}_I\,, \\ A_J x \leq \boldsymbol{b}_J \\ \hline \end{array}$$

má řešení (užitím lemmatu 4.21 o základní dualitě v LP), což znamená, že úloha (P) je přípustná.)

Dohromady jsme tedy získali sloupcový vektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \in F^m$ takový, že $\iota \boldsymbol{\lambda}^T A = = o$ a $\iota \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{b} < 0$, k tomu $\boldsymbol{\lambda}_J \geq \boldsymbol{o}_J$, přičemž $\boldsymbol{\lambda}_I$ není omezeno ve znaménku.

Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ vynásobíme vhodným malým kladným vektorem $\varepsilon \in V$ tak, aby $\boldsymbol{u}^* + + \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$, kde $\boldsymbol{u} = (\lambda_i \varepsilon)_{i=1}^m$ a $\boldsymbol{u}^* = (u_i^*)_{i=1}^m$ je optimální řešení úlohy (D). (Vezmi $\varepsilon = \min_{i \in I^*} -\lambda_i^{-1} u_i^*$, kde $I^* = \{\, i \in I\,;\ \lambda_i < 0\,\}$.) Pak ovšem $\iota(\boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{u})^T A = \gamma$ a $\iota(\boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{u})^T \boldsymbol{b} \prec \iota \boldsymbol{u}^{*T} \boldsymbol{b}$ – spor s optimalitou řešení $\boldsymbol{u}^*$.

Nějaké řešení x^* soustavy $A_I x = \boldsymbol{b}_I$, $A_J x \leq \boldsymbol{b}_J$ tedy existuje. □

6.16. Poznámka. Část II. uvedeného principu duality 6.15 neplatí, jestliže vektorový prostor V je nulový. V takovém případě, když V je nulový, duální úloha (D) má vždy optimální řešení, a sice nulový sloupec $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{o}$, kdežto primární úloha (P) nemusí být přípustná, tj., soustava $Ax \leq \boldsymbol{b}$ nemusí mít řešení.

V části I. principu duality 6.15 však tento předpoklad, že prostor V má být nenulový, nebylo nutné činit. Nutnost diskutovaného předpokladu v části II. uvedeného principu duality 6.15 tedy ukazuje na jistou asymetrii (!) obou částí principu duality 6.15.

Ostatně už tehdy, když jsme neřešitelnost soustavy $Ax = \boldsymbol{b}$ resp. $Ax \leq \boldsymbol{b}$ (viz Fredholmovu větu 2.11 resp. lemma 4.21 o základní dualitě v LP) chtěli charakterizovat za použití vektorového prostoru V, bylo nutné předpokládat, že tento vektorový prostor je nenulový, viz poznámku 2.11.a resp. 4.21.a, srov. též obě části principu duality 6.15 s poznámkou 4.22.b.

6.17. Poznámky. Z klasické teorie duality lineárního programování (pro úlohy 6.3.(1) z odstavce 6.3 resp. pro úlohy 6.1.(1) z odstavce 6.1) víme, že když jedna z úloh je přípustná a druhá je nepřípustná, potom cílová funkce přípustné úlohy není omezená shora (jde-li o primární úlohu) resp. zdola (jde-li o duální úlohu). Podívejme se, zda je tento výsledek zachován i v případě úloh lineárního programování formulovaných v kontextu dvou vektorových prostorů, z nichž jeden je lineárně uspořádaný, nad společným lineárně uspořádaným tělesem. Úlohy (P) a (D) v následujících třech poznámkách znamenají úlohy (P) a (D) z poznámky 6.4 resp. z principu duality 6.15.

6.17.a. Předpokládejme, že úloha (D) je přípustná, úloha (P) je nepřípustná a že vektorový prostor V je netriviální. Potom cílová funkce duální úlohy (D) není zdola omezená. (Stačí vzít v úvahu, že cílová funkce úlohy (D_0) není zdola omezená, jestliže úloha (P_0) není přípustná, viz poznámku 4.22.b.)

Poznamenejme, že uvedené tvrzení platí také obráceně, viz poznámku 6.7.c.

6.17.b. Nyní předpokládejme, že úloha (D) je nepřípustná a úloha (P) je přípustná. Potom cílová funkce primární úlohy (P) stále ještě může být shora omezená. Máme následující příklad: Za těleso F dosaďme těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním, za vektorový prostor V zvolme prostor $\mathbb{R}^2$ s lexikografickým uspořádáním a za prostor W dosaďme aditivní grupu tělesa $\mathbb{R}$. Dále nechť $\gamma(x) = \binom{0}{x}$ a $Ax = -x$ pro $x \in W = \mathbb{R}$, k tomu položme $\boldsymbol{b} = 0$. Pak primární úlohou je lexikograficky maximalizovat $\binom{0}{x}$ za podmínky $-x \leq 0$, tj. $x \geq 0$. Vidíme, že tato úloha je přípustná, nemá optimální řešení, avšak horní mezí cílové funkce je například vektor $\binom{1}{0}$. Duální úlohou je lexikograficky minimalizovat $\binom{u'}{u''} 0 = \binom{0}{0}$ za podmínek $\binom{u'}{u''}(-1) = \binom{0}{1}$ a

$\binom{u'}{u''} \succeq \binom{0}{0}$. Duální úloha je ovšem nepřípustná, neboť uvedená rovnice má jediné řešení $\binom{u'}{u''} = \binom{0}{-1} \prec \binom{0}{0}$.

Abychom za daných předpokladů, kdy úloha (P) je přípustná a (D) je nepřípustná, dokázali, že cílová funkce primární úlohy není shora omezená, musíme navíc předpokládat, že uspořádání vektorového prostoru „cílových hodnot“ V je slabě archimedovské (definice 3.63).

Když je úloha (P) přípustná, tak pro vhodný bod $x_0 \in W$ platí $Ax_0 \leq \boldsymbol{b}$. Ježto úloha (D) není přípustná, dle Farkasova lemmatu 4.15 existuje bod $\hat{x} \in W$ takový, že $A\hat{x} \leq \boldsymbol{o}$ a $\gamma(\hat{x}) \succ 0$. Nyní zvolme libovolný vektor $K \in V$, který by měl být horní mezí cílové funkce γ. Předpokládejme, že $K \succeq \gamma(x_0)$. Jestliže prostor V je slabě archimedovský, pak existuje $\hat{\lambda} \in F$ takové, že $\hat{\lambda}\gamma(\hat{x}) \succeq K - \gamma(x_0)$. Protože je $\gamma(\hat{x}) \succ 0$ a $K - \gamma(x_0) \succeq 0$, musí být $\hat{\lambda} \geq 0$. Položme $\lambda = \hat{\lambda} + 1$, aby $\lambda\gamma(\hat{x}) \succ K - \gamma(x_0)$, dále $A(\lambda\hat{x}) \leq \boldsymbol{o}$. Následně je $A(x_0 + \lambda\hat{x}) \leq \boldsymbol{b}$ a $\gamma(x_0 + \lambda\hat{x}) \succ K$. Vidíme, že cílová funkce úlohy (P) není shora omezená.

(Důkaz uvedeného tvrzení jsme v této poznámce 6.17.b provedli přímo. Alternativně jsme mohli použít také Haarovu větu 4.30: Zvolme „horní mez“ $K \in V$. Když úloha (D) není přípustná, pak podmínku 4.30.(2) není možné splnit. Tudíž existuje bod $x \in W$ porušující implikaci 4.30.(1).)

Z uvedeného vyplývá, že ačkoliv duální úloha (D) může být nepřípustná, předpoklady tvrzení z poznámky 6.7.b nemusejí být splněny.

6.17.c. Poznamenáváme, že případ, kdy obě úlohy (P) a (D) jsou nepřípustné, může také nastat. Stačí, aby zobrazení A bylo nulové, sloupec $\boldsymbol{b}$ byl záporný a zobrazení γ bylo nenulové.

6.18. Poznámka. Důležitou větu o existenci optimálních řešení úloh (P) a (D) z poznámky 6.4 resp. z principu duality 6.15 uvádíme až v § 15, viz větu 15.21.

6.19. Dosažené výsledky. Dokázali princip duality 6.15 pro úlohy lineárního programování formulované v kontextu dvou vektorových prostorů, z nichž jeden je lineárně uspořádaný, nad společným lineárně uspořádaným tělesem. V poznámce 6.16 jsme upozornili na jistou asymetrii mezi částí I. a II. principu duality 6.15. Tato asymetrie mezi úlohami (P) a (D) z poznámky 6.4 resp. principu duality 6.15 je ještě zvýrazněna posledními poznámkami 6.17.a a 6.17.b. Hlavní výsledek tohoto paragrafu (který je současně jedním z ústředních výsledků této práce) – princip duality 6.15 – autor odeslal k publikaci, viz [15].

§ 7 Zamyšlení nad dosaženými výsledky

7.1. Jak již naznačeno, mezi ústřední výsledky této práce počítáme především Farkasovo lemma 4.15 a princip duality 6.15. Oba tyto výsledky jsou formulovány v kontextu „základního“ vektorového prostoru W, lineárně uspořádaného vektorového prostoru „cílových hodnot“ V, přičemž oba tyto prostory jsou nad společným lineárně uspořádaným tělesem F. (Viz též komutativní diagram v poznámce 2.4 nebo 4.16.) Kromě těchto dvou hlavních výsledků z § 4 a § 6 mezi dosažené výsledky řadíme také různé věty o alternativě, kterými jsme se zabývali v § 5.

7.1.a. Běžně se všechny zmíněné výsledky v literatuře (např. [28], [30], [48], [50], [71], [72], též [19], [82], [87]) formulují v kontextu jednoho (obvykle konečněrozměrného) „základního“ vektorového prostoru W nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$, za prostor „cílových hodnot“ V bývá dosazena aditivní grupa tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ s jeho standardním uspořádáním. Viz např. Farkasovo lemma 1 z úvodní kapitoly této práce; podobně princip duality se často uvádí jen pro úlohy lineárního programování 6.1.(1) z odstavce 6.1.

7.1.b. Výhodou zde uvedených výsledků (tj. Farkasova lemmatu 4.15 z § 4, principu duality 6.15 z § 6 a dalších vět o alternativě z § 5) je, že jejich formulace obsahuje pouze ty předpoklady, které jsou k jejich důkazu skutečně nezbytné: (1) Předně, dimenze „základního“ prostoru W může být libovolná (tj. konečná nebo nekonečná). Nepředpokládáme ani, že by na prostoru W měla být dána norma nebo nějaká topologie. (2) Lze pracovat s jakýmkoliv lineárně uspořádaným tělesem; volba tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním je jen speciálním případem. (3) Není nutné předpokládat, že uspořádání prostoru „cílových hodnot“ V je slabě archimedovské nebo že splňuje nějaké jiné zvláštní předpoklady (výjimkou je Haarova věta 4.30 a poznámka 6.17.b).

7.1.c. Avšak techniky použité v důkazech výsledků běžně uváděných v literatuře (písmeno 7.1.a) někdy implicitně vyžadují další předpoklady, jejichž explicitní uvedení ve znění daného výsledku chybí. Jindy jde o techniky, jejichž použití ztěžuje další zobecnění daného výsledku.

Jako příklad techniky, která vyžaduje přítomnost dalších implicitních předpokladů, uveďme použití věty o oddělitelnosti (bodu od uzavřené konvexní množiny uzavřenou nadrovinou). Aby větu o oddělitelnosti bylo možné použít, příslušný vektorový prostor musí být vybaven topologií (abychom mohli hovořit o uzavřenosti množiny), která má navíc potřebné vlastnosti, aby věta o oddělitelnosti platila. (Musí jít o lokálně konvexní topologii, viz malou Mazurovu větu [67: věta 14.27].) A je to právě přítomnost vhodné topologie, která je na příslušném prostoru implicitně předpokládána. Pracujeme-li s konečněrozměrným vektorovým prostorem $\mathbb{R}^n$, je tento prostor už „jaksi přirozeně“ vybaven klasickou eukleidovskou topologií (která má všechny potřebné vlastnosti, neboť, samozřejmě, je lokálně konvexní).

Jako příklad techniky, jejíž použití může znemožnit či alespoň ztížit další zobecnění daného výsledku, zmiňme transponování matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lineárního zobrazení $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Následná práce s maticí $\boldsymbol{A}$ i s k ní transponovanou maticí $\boldsymbol{A}^T$ totiž vynucuje práci v konečněrozměrných prostorech: „základní“ vektorový prostor $W = \mathbb{R}^n$ musí být konečněrozměrný – srov. bod (1) předcházejícího písmene 7.1.b.

7.1.d. Poznamenejme, že za zobecnění techniky transponování (zmíněné v předcházejícím písmenu 7.1.c) lze chápat práci s banachovsky adjungovaným zobrazením $A'\colon Y^* \to X^*$, kde $A\colon X \to Y$ je spojité lineární zobrazení, dále X a Y jsou topologické vektorové prostory a X^* a Y^* jsou jejich topologické duály. Jde ale o zcela jiný přístup, který je použit například v knize [1], článcích [21], [34], [83] a řadě dalších prací. Zde tento přístup nepoužíváme a jdeme jinou cestou.

7.1.e. Uvedení co nejmenšího počtu nutných předpokladů, které jsou již zcela nezbytné, pomáhá celou presentovanou teorii „zprůhlednit“ (tj. lépe pochopit) anebo – lépe řečeno – vede k novému pohledu na celou tuto teorii.

V přístupu, který jsme v této kapitole zvolili, například větu o oddělitelnosti vůbec nelze použít, protože na žádném z prostorů jsme explicitně nezavedli žádnou topologii: Vzhledem k tomu, že vektorový prostor W může být i nekonečněrozměrný, je už nemyslitelné implicitně předpokládat, že na něm nebo na jeho algebraickém duálu $W^\#$ či na prostoru $W^\#_V$, kde V je další vektorový prostor, je dána nějaká (nejraději eukleidovská) topologie. Jinými slovy, použitý přístup nás „chrání“ před neuvědomělým přijetím implicitních předpokladů.

Rovněž jsme v této kapitole pracovali s lineárním zobrazením $A\colon W \to F^m$. Zatímco každé lineární zobrazení mezi dvěma konečněrozměrnými vektorovými prostory má svou matici, již je možné transponovat, uvedené lineární zobrazení A už takovou matici nemá, neboť prostor W může být nekonečněrozměrný. Následně zde není co transponovat. (Ačkoliv zobrazení $A\colon W \to F^m$ nemusí být spojité, protože na prostorech W ani F^m nemáme topologii, můžeme pracovat s jeho formální banachovskou adjunkcí A', srov. předcházející písmeno 7.1.d.)

7.1.f. Přínos nového pohledu zmíněného v přecházejícím písmenu 7.1.e tedy spočívá v tom, že nás nutí, abychom si daleko lépe uvědomili „typ“ objektů (resp. abychom se důkladněji zamysleli nad rolí objektů), s nimiž pracujeme. V této kapitole jsme pracovali s následujícími pěti „typy“ objektů: (1) bod x vektorového prostoru W, dále (2) lineární formy $\alpha_1, \dots, \alpha_m : W \to F$ a (3) skaláry $b_1, \dots, b_m \in F$, k tomu (4) lineární zobrazení $\gamma : W \to V$ a rovněž (5) vektory $u_1, \dots, u_m \in V$.

Zavedení těchto „typů“ objektů následně vede i k „typové kontrole“. Přitom jde o typovou kontrolu v pravém slova smyslu, jak ji znají programátoři z prostředí výpočetní techniky. Například bod x smíme dosadit do lineárních forem α_1, …, α_m nebo do lineárního zobrazení γ (jednotlivé „typy“ jsou vzájemně slučitelné / kompatibilní). Avšak například součet zobrazení γ a lineární formy α_i nedává žádný smysl (jde o chybnou operaci, protože použité „typy“ nejsou slučitelné / kompatibilní) pro $i = 1, \dots, m$.

Popsaná „typová kontrola“ je naproti tomu dosti omezená, když pracujeme v reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ konečné dimenze. Pro příklad zvolme dva sloupcové vektory $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. V tomto okamžiku oba sloupcové vektory $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{x}$ považujeme za body „základního“ prostoru $\mathbb{R}^n$. Nic nám ovšem nebrání vektor $\boldsymbol{c}$ transponovat a pracovat s lineární formou $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ určenou předpisem $f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}$ pro $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Následně tuto formu můžeme vyhodnotit i v daném bodě $\boldsymbol{x}$ a pracovat s číslem $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$. Na druhou stranu, vektory $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{x}$ jsou prvky téhož prostoru $\mathbb{R}^n$, a proto je můžeme i sečíst, můžeme pracovat se součtem $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{x}$. Vidíme, že jeden a tentýž sloupcový vektor $\boldsymbol{c}$ je použit ve dvou zcela odlišných významech – jsou mu přisouzeny dvě různé role: jednak role bodu „základního“ prostoru $\mathbb{R}^n$, jednak role lineární formy $f : \boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}$, kde $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Kdybychom důsledněji použili „typovou kontrolu“, právě popsaná situace by nemohla vzniknout (bod „základního“ vektorového prostoru nelze transponovat, lineární formu a bod nelze vzájemně sčítat).

Shrňme tedy, že význam diskutované „typové kontroly“ tkví především v tom, že brání, aby jednomu objektu bylo přisouzeno více různých rolí. Různé „přisuzování rolí“ totiž může vést k zastření použitých myšlenek, popřípadě může vést i k nedorozumění, s čímž jsme se (při jiné příležitosti) setkali už v poznámce 1.12.

7.2. Užitečnost nového pohledu a „typové kontroly“ z písmen 7.1.e a 7.1.f nyní ukážeme na příkladu klíčové věty a dalších vět o alternativě z § 5.

7.2.a. V literatuře je klíčová věta uvedena v následujícím tvaru ([87: Teorém 1], [50: Sekce 4], [19: Teorém 1.2]):

Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice typu $m \times n$, kde m a n jsou přirozená čísla. Potom existují vektory $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ takové, že platí

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{o}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}, \qquad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{o} \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} > \boldsymbol{o},$$

kde $\boldsymbol{A}^T$ je matice transponovaná k matici $\boldsymbol{A}$.

Uvedená formulace klíčové věty je nutně omezena jen na konečněrozměrný prostor, protože v ní vystupuje jak matice $\boldsymbol{A}$, tak matice $\boldsymbol{A}^T$ k ní transponovaná. Práci s transponovanou maticí $\boldsymbol{A}^T$ se však můžeme snadno vyhnout tím, že součin $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}$ zaměníme za součin $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A}$; alternativně můžeme pracovat výhradně s transponovanou maticí $\boldsymbol{A}^T$, takže součin $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ zaměníme za součin $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T$. Z úvodní kapitoly této práce už víme (úvaha vedoucí od Farkasova lemmatu 1 k Farkasovu lemmatu 4), že řádky matice mohou znamenat lineární formy na obecném vektorovém prostoru W. Po krátkém zamyšlení, kde jednotlivým objektům vystupujícím v klíčové větě přiřadíme správný „typ“, a vhodné změně v označení dospějeme k následující formulaci diskutované věty:

Nechť $A : W \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení, kde W je reálný vektorový prostor a m je přirozené číslo. Potom existuje vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ a bod $x \in W$ tak, že

$$\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{o}, \qquad \boldsymbol{u}^T A = o, \qquad Ax \geq \boldsymbol{o} \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{u} + Ax > \boldsymbol{o},$$

kde $\boldsymbol{o}$ *je nulový vektor prostoru* $\mathbb{R}^m$ *a* o *je nulová lineární forma* $o\colon W \to \mathbb{R}$.

Ještě obecnější tvar uvedené klíčové věty jsme pak v této práci skutečně dokázali – viz klíčovou větu 5.15. Tuto skutečnost můžeme považovat za potvrzení užitečnosti nového pohledu a „typové kontroly“ z písmen 7.1.e a 7.1.f.

7.2.b. Stejný přístup, jehož užitečnost jsme v předcházejícím písmenu 7.2.a právě demonstrovali na příkladu klíčové věty, autor ve skutečnosti použil už v § 5. Autor tento přístup použil k nalezení „správných“ formulací některých vět o alternativě, které – obdobně jako klíčová věta – jsou v literatuře původně formulovány jen v konečněrozměrných prostorech (s využitím transponovaných matic apod.).

Nový pohled spolu s „typovou kontrolou“ z písmen 7.1.e a 7.1.f nás pak v § 5 přirozeným způsobem dovedl až k rozdělení vět o alternativě na věty o alternativě prvního druhu a na věty o alternativě druhého druhu, viz poznámku 5.21 a poznámku 5.33.a. Odůvodněme, že toto rozdělení bylo možné provést jen díky tomu, že v některých větách o alternativě (druhého druhu) vystupuje nový „typ“, a sice vektorový prostor „cílových hodnot“ V (což tyto věty odlišuje od vět prvního druhu). Už víme, že za prostor V je možné dosazovat aditivní grupu tělesa F. Stojí za pozornost, že kdybychom mezi oběma „typy“ (tj. prostorem V a aditivní grupou tělesa F) důsledněji nerozlišovali, uvedené rozdělení na věty o alternativě prvního a druhého druhu bychom nebyli schopni provést. Tento výsledek pak můžeme chápat jako další potvrzení užitečnosti nového pohledu a „typové kontroly“ z písmen 7.1.e a 7.1.f.

7.3. Shrňme, že v této kapitole jsme novému pohledu (z písmen 7.1.e a 7.1.f) podrobili známé výsledky z oblasti teorie duality lineárního programování (§ 6) a z oblasti teorie lineárních nerovnic (§ 4 a § 5, částečně též § 2) a formulovali jsme zobecněné varianty těchto výsledků. Mohlo by být zajímavé tomuto novému pohledu podrobit také řadu dalších už známých výsledků, například z oblasti teorie nelineární optimalizace. Lze očekávat, že by tím vyšlo najevo mnoho zajímavých skutečností.

7.4. Vraťme se ještě k Farkasovu lemmatu 4.15 a principu duality 6.15. Jak už v odstavcích 4.1 a 6.3 zmíněno, autor původně dokazoval méně obecné varianty těchto výsledků. Až později se ukázalo, že týmiž postupy je možné dokázat i zobecněné varianty, které jsou v této práci uvedeny. Je otázka, jak daleko (při použití stále stejných postupů) lze v tomto zobecňování jít: V této kapitole jsme pracovali v kontextu „základního“ vektorového prostoru W a lineárně uspořádaného vektorového prostoru „cílových hodnot“ V nad lineárně uspořádaným tělesem F (viz též komutativní diagram v poznámce 2.4 nebo 4.16). Použité pojmy jsme zavedli definicemi 1.5, 3.2 a 3.6. Bylo by zajímavé zjistit, zda požadavky kladené na pojem vektorového prostoru nebo lineárně uspořádaného vektorového prostoru či tělesa je možné ještě dále oslabit (např. tím způsobem, abychom dostali tzv. struktury se zobecněnou rovností), aby hlavní výsledky této práce (Farkasovo lemma a princip duality) zůstaly i nadále v platnosti.

7.5. Dosažené výsledky. Shrnuli jsme základní výsledky dosažené v této kapitole. Uvedli jsme, že přínos dosažených výsledků spočívá nejen v tom, že zobecňují dosud známé výsledky, ale především v tom, že tato zobecnění na dosud známé výsledky přinášejí zcela nový pohled. V předcházejících dvou odstavcích 7.3 a 7.4 jsme naznačili další možné směry rozvoje předložené teorie.

§ 8 Směrem k nekonečnému případu

8.1. Vraťme se k Farkasovu lemmatu 4 z úvodní kapitoly této práce. (Abychom obdrželi Farkasovo lemma 4, v dokázaném Farkasově lemmatu 4.15 stačí za těleso F dosadit těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním a za prostor V dosadit aditivní grupu tělesa $\mathbb{R}$ s jeho uspořádáním.) Vidíme, že ve Farkasově lemmatu 4 vystupuje konečný počet lineárních forem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Jak naznačeno v úvodní kapitole, autor si kladl otázku, zda je možné najít zobecnění Farkasova lemmatu zachycující také případ, kdy počet lineárních forem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots$ je obecně nekonečný.

Vraťme se rovněž k principu duality pro úlohy lineárního programování 6.3.(1) z odstavce 6.3. (Abychom obdrželi princip duality pro úlohy 6.3.(1), v dokázaném principu duality 6.15 za těleso F a prostor V stačí dosadit po řadě těleso $\mathbb{R}$ a jeho aditivní grupu se standardním uspořádáním; dodejme, že prostor V pak bude slabě archimedovský (definice 3.63), takže můžeme použít i poznámku 6.17.b.) Primární úloha (z úloh 6.3.(1)) však má jen konečný počet lineárních omezení. Je zajímavé se ptát, zda i k primární úloze s obecně nekonečným počtem lineárních omezení je možné sestavit duální úlohu tak, aby pro obě úlohy platil princip duality. Otázkou je, jaký tvar by duální úloha měla mít.

8.2. Uvažujme o konečných verzích výsledků, které jsme v předcházejícím odstavci 8.1 diskutovali, a naznačme možný způsob jejich zobecnění.

8.3. Úvaha. Farkasovo lemma 4 z úvodní kapitoly této práce tvrdí, že implikace „$Ax \leq \leq \boldsymbol{o} \;\Rightarrow\; \gamma(x) \leq 0$“ platí pro všechna $x \in W$ právě tehdy, když

$$\exists u_1, \ldots, u_m \geq 0\colon\; u_1\alpha_1 + \cdots + u_m\alpha_m = \gamma\,.$$

Je zřejmé, že tuto podmínku nelze na případ nekonečného počtu lineárních forem přímo zobecnit: kdyby počet lineárních forem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots$ byl nekonečný, potom i „součet $u_1\alpha_1 + \cdots + u_m\alpha_m + \cdots$“ by byl nekonečný a bylo by nutné definovat jeho význam (konvergenci apod.). Autor se nejprve domníval, že by se měl použít nějaký druh zobecněného součtu, tj. (Lebesgueův) integrál, přičemž koeficienty $u_1, \ldots, u_m$ by se chápaly jako nezáporná míra na kompaktním prostoru $\{1, \ldots, m\}$. Ukázalo se však, že tento přístup vede do slepé uličky. Výsledná formulace Farkasova lemmatu totiž působila značně nepřirozeně, neboť závisela na příliš mnoha různých speciálních předpokladech.

Až později, částečně pod vlivem článku [83], autor dospěl k závěru, že lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m\colon W \to \mathbb{R}^m$ vzniklé součinem lineárních forem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (definice 1.53 a 1.59) je třeba chápat jako konečnou podmnožinu $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ algebraického duálu $W^\#$, tj. prostoru všech lineárních forem definovaných na W (definice 1.24). Výše uvedená podmínka pak říká, že forma γ leží v kuželovém obalu množiny $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ (definice 3.38). Tuto vlastnost již snadno zobecníme i na případ nekonečné podmnožiny algebraického duálu $W^\#$. Je ale zřejmé, že výsledný kuželový obal musí být nějakým způsobem uzavřený: použití slabého* uzávěru se zdá být pro tento účel vhodné.

Obdobný přístup můžeme použít i v případě ostatních vět o alternativě: také je budeme formulovat pomocí pojmů (slabě* uzavřených) konvexních a kuželových obalů.

8.4. Úvaha. Podívejme se na úlohy lineárního programování 6.3.(1) z odstavce 6.3 a zaměřme se na duální úlohu. Podstatné jsou především následující dvě otázky: (1) Jak rozhodneme, zda duální úloha je přípustná? (2) Jak počítáme hodnotu cílové funkce? Odpověď na první otázku: Ptáme se, zda γ leží v kuželovém obalu množiny lineárních forem $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Odpověď na druhou otázku: Jestliže duální úloha není přípustná, pak podle všeobecně přijímaných konvencí její optimální hodnota je rovna $+\infty$. Jestliže duální úloha je přípustná, potom existuje svědek – kuželová kombinace $\boldsymbol{u}$ – dosvědčující, že γ leží v daném kuželovém obalu (tj., existuje $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{o}$ takové, že $\gamma = \boldsymbol{u}^T A$). Stejnou (!) kuželovou kombinaci $\boldsymbol{u}$ pak použijeme na vektor pravých stran $\boldsymbol{b}$, abychom obdrželi hodnotu cílové funkce ($\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b}$). Nakonec je třeba uvažovat všechny možné svědky (tj. přípustné kuželové kombinace $\boldsymbol{u}$) a zvolit toho, který dává nejmenší hodnotu cílové funkce.

8.5. Dosažené výsledky. Provedené úvahy 8.3 a 8.4 nám pomohou formulovat Farkasovo lemma a princip duality pro úlohy lineárního programování v případě nekonečného počtu lineárních omezení.

Kapitola II.

Soustavy lineárních nerovnic a úlohy lineárního programování v případě nekonečného počtu omezujících podmínek

Vzhledem k použitým metodám důkazů jsme v celé této, druhé kapitole nuceni pracovat s vektorovými prostory nad úplným tělesem. Vezmeme-li do úvahy větu 3.87, není na újmu obecnosti, když budeme pracovat výhradně s reálnými vektorovými prostory, tj. prostory nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$.

V § 9 připomeneme základní pojmy z teorie slabých* topologií. Rovněž naznačíme, jak Farkasovo lemma v nekonečněrozměrném vektorovém prostoru vyslovit i tehdy, když počet lineárních funkcionálů vystupujících v něm je nekonečný (tzv. infinitní případ).

V § 10 uvedeme infinitní Farkasovo lemma. Pokusíme se také o vyslovení alespoň lexikografické verze infinitního Farkasova lemmatu. Vyslovíme rovněž infinitní lemma o základní dualitě v lineárním programování a infinitní Haarovu větu. Uvedená tvrzení tedy budeme formulovat v nekonečněrozměrném vektorovém prostoru pro případ nekonečného počtu lineárních funkcionálů.

V § 11 nejprve uvedeme infinitní Motzkinovu větu, načež se budeme zabývat vlastnostmi (slabě*) uzavřených konvexních množin. Dále ukážeme infinitní Carverovu větu a infinitní Motzkinův kombinační princip. Pak budeme diskutovat, jakým způsobem lze odvodit další infinitní věty o alternativě; pro příklad uvedeme infinitní Daxovu větu.

V § 12 formulujeme primární úlohu infinitního lineárního programování a úlohu k ní duální. Dokážeme rovněž princip duality pro obě tyto úlohy. V závěrečné části § 12 se budeme zabývat otázkou, zda některé omezující podmínky primární úlohy je možné vynechat, aniž by to znamenalo změnu optimální hodnoty (resp. optimálního řešení) dané úlohy.

V § 13 shrneme výsledky, kterých dosáhli jiní autoři, a provedeme jejich srovnání s výsledky dosaženými v této práci. Rovněž se budeme zabývat otázkou, jak vypadá duální úloha, jestliže k primární úloze lineárního programování s (obecně) nekonečným počtem lineárních omezení přidáme podmínky na nezápornost tvaru $x \in P$, kde P je konvexní kužel.

§ 9 Základy slabých* topologií

9.1. Reálný vektorový prostor X a jeho algebraický duál $X^{\#}$. Volba podprostoru X^* algebraického duálu $X^{\#}$. Nechť X je reálný vektorový prostor, tj. vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním (definice 1.5, poznámka 3.7). Všechny lineární formy definované na X pak vytvářejí jeho algebraický duál $X^{\#}$ (definice 1.24). Poznamenejme, že v případě reálného vektorového prostoru o lineárních formách, které jsou na něm definovány, hovoříme také jako o *lineárních funkcionálech.*

Máme-li reálný vektorový prostor X, většinou nepracujeme s celým jeho algebraickým duálem $X^{\#}$. Zvolme proto vhodný podprostor X^* tohoto duálu $X^{\#}$ (definice 1.14). Podprostor X^* je tvořen právě těmi lineárními funkcionály definovanými na X, s nimiž zamýšlíme pracovat. Rozlišíme tři významné případy volby podprostoru X^*:

9.1.a. Čistě algebraický případ. Na prostoru X není dána žádná topologie. Můžeme položit $X^* = X^\#$.

9.1.b. Prostor X je Banachův (nebo jen normovaný či topologický) vektorový prostor. Potom X^* je obvyklé označení pro jeho topologický duál, tj. pro prostor všech lineárních funkcionálů, které jsou vzhledem k dané topologii na X (a standardní eukleidovské resp. intervalové topologii na $\mathbb{R}$) spojité. Jestliže X je nekonečněrozměrný vektorový normovaný prostor, potom X^* je vlastním podprostorem algebraického duálu $X^\#$. (Srov. [67: odstavec 2.3, věta 2.2, poznámka 2.6.c a odstavec 16.16].)

9.1.c. Prostor X^* není ani algebraickým ani topologickým duálem prostoru X – je to obecný podprostor algebraického duálu $X^\#$.

9.2. Definice. Slabá topologie na X a slabá* topologie na X^*. Nechť X^* je podprostor algebraického duálu $X^\#$ reálného vektorového prostoru X. Slabou topologii na X (určenou podprostorem X^*) označujeme $\sigma(X, X^*)$. Slabou* topologii na X^* označujeme $\sigma(X^*, X)$. Abychom určili slabou topologii $\sigma(X, X^*)$, stačí popsat všechna slabá okolí každého bodu $x \in X$. Obdobně, abychom určili slabou* topologii $\sigma(X^*, X)$, stačí popsat všechna slabá* okolí každého bodu resp. funkcionálu $\varphi \in X^*$. Ostatní topologické pojmy ((slabě / slabě*) otevřená množina, (slabě / slabě*) uzavřená množina, (slabý / / slabý*) uzávěr množiny, (slabý / slabý*) vnitřek množiny apod.) se již ze zavedeného topologického pojmu slabého / slabého* okolí zavedou obvyklým způsobem.

Poznamenejme, že o slabé topologii $\sigma(X, X^*)$ někdy pro stručnost hovoříme jako o w-topologii, o slabé* topologii $\sigma(X^*, X)$ někdy pro stručnost hovoříme jako o w^*-topologii. Obdobně o slabém okolí, slabém uzávěru, slabém vnitřku slabě otevřené a slabě uzavřené množině apod. ve stručnosti hovoříme jako o po řadě w-okolí, w-uzávěru, w-vnitřku w-otevřené a w-uzavřené množině apod. Rovněž o slabém* okolí, slabém* uzávěru, slabém* vnitřku slabě* otevřené a slabě* uzavřené množině apod. někdy pro stručnost hovoříme jako o po řadě w^*-okolí, w^*-uzávěru, w^*-vnitřku w^*-otevřené a w^*-uzavřené množině apod.

Množina $U \subseteq X$ je *slabým okolím* bodu $x_0 \in X$ právě tehdy, když existuje kladné reálné číslo $\varepsilon > 0$ a existují přirozené číslo n a funkcionály $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$ takové, že

$$\bigcap_{j=1}^{n} \Big\{ x \in X \,;\ \big|\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)\big| < \varepsilon \Big\} \subseteq U .$$

Obdobně množina $U \subseteq X^*$ je *slabým* okolím* bodu resp. funkcionálu $\varphi_0 \in X^*$ právě tehdy, když existuje kladné reálné číslo $\varepsilon > 0$ a existují přirozené číslo n a body $x_1, \ldots, x_n \in X$ takové, že

$$\bigcap_{j=1}^{n} \Big\{ \varphi \in X^* \,;\ \big|\varphi(x_j) - \varphi_0(x_j)\big| < \varepsilon \Big\} \subseteq U .$$

Zde $|a - b|$ označuje absolutní hodnotu (definice 3.44) rozdílu dvou reálných čísel $a = \varphi_j(x)$ a $b = \varphi_j(x_0)$ resp. $a = \varphi(x_j)$ a $b = \varphi_0(x_j)$ pro $j = 1, \ldots, n$. K tomu v obou případech můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\varepsilon = 1$, protože funkcionály $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ resp. body $x_1, \ldots, x_n$ lze „přeškálovat“.

9.3. Definice. Kanonické vnoření X do $X^{*\#}$. Ať X^* je podprostor algebraického duálu $X^\#$ reálného vektorového prostoru X. Protože X považujeme za levý vektorový prostor (dle konvence z definice 1.8), na algebraickém duálu $X^\#$ máme zavedenu strukturu pravého vektorového prostoru. Zužme tuto strukturu přirozeným způsobem na jeho podprostor X^* (poznámka 1.16). Následně můžeme uvažovat algebraický duál $X^{*\#}$ právě zavedeného (pravého) vektorového prostoru X^*. Tento duál $X^{*\#}$ je opět levým vektorovým prostorem. Zajisté, každé $\varphi \in X^*$ je lineární forma $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ a každé $\Phi \in X^{*\#}$ je lineární forma $\Phi\colon X^* \to \mathbb{R}$.

Kanonickým obrazem vektoru $x \in X$ rozumíme lineární formu $\varepsilon_x \in X^{*\#}$ určenou předpisem $\varepsilon_x(\varphi) = \varphi(x)$ pro všechna $\varphi \in X^*$. *Kanonickým vnořením* prostoru X do $X^{*\#}$ pak rozumíme zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{*\#}$, které každému vektoru $x \in X$ přiřadí jeho kanonický obraz ε_x, takže $\varepsilon\colon x \mapsto \varepsilon_x$ pro všechna $x \in X$. Je zřejmé, že kanonický obraz ε_x každého prvku $x \in X$ je lineární forma definovaná na vektorovém prostoru X^*. Dále je zřejmé, že kanonické zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{*\#}$ je lineární a prosté. (Srov. [67: odstavce 2.29, 15.1, 17.18] nebo též [78: odstavec VI.6.5].)

9.4. Poznámky. Mějme podprostor X^* algebraického duálu $X^\#$ reálného vektorového prostoru X. Na X^* zaveďme strukturu pravého vektorového prostoru tím, že strukturu duálu $X^\#$ zúžíme přirozeným způsobem na jeho podprostor X^*. Prostor X vybavme slabou topologií $\sigma(X, X^*)$ a prostor X^* vybavme slabou* topologií $\sigma(X^*, X)$. Na tělese $\mathbb{R}$ uvažujme klasickou eukleidovskou resp. intervalovou topologii. Snadno si uvědomíme, že každý lineární funkcionál $\varphi \in X^*$ je slabě spojitý na X a že, když zvolíme prvek $x \in X$, potom jeho kanonický obraz ε_x je slabě* spojitý na X^*. Máme však i následující výsledky:

9.4.a. Nechť $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ je slabě spojitý lineární funkcionál na X. Potom $\varphi \in X^*$. – Je-li zobrazení φ spojité v počátku, potom musí existovat jeho slabé okolí $\tilde{U}$ takové, že $|\varphi(x)| < 1$ pro $x \in \tilde{U}$. Existuje tedy přirozené číslo n a existují funkcionály $\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_n \in X^*$ tak, že když položíme

$$U = \bigcap_{j=1}^{n} \Big\{ x \in X\,;\ |\varphi_j(x)| < 1 \Big\},$$

potom $|\varphi(x)| < 1$ pro všechna $x \in U$. Zřejmě platí $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} \varphi_j \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$, takže podle základního lemmatu 2.3 lze φ vyjádřit jako lineární (resp. $\mathbb{R}$-lineární) kombinaci funkcionálů $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Proto $\varphi \in X^*$.

Vidíme, že prostor X^* je prostorem právě všech slabě spojitých lineárních funkcionálů definovaných na X. To vysvětluje, proč diskutovaný podprostor X^* prostoru $X^\#$ označujeme zrovna „X^*“, srov. písmeno 9.1.b.

9.4.b. Nyní ať $\Phi\colon X^* \to \mathbb{R}$ je slabě* spojitá lineární forma na X^*. Potom existuje $x \in X$ tak, že $\Phi = \varepsilon_x$, kde ε_x je kanonický obraz prvku x. – Opět, když zobrazení Φ je slabě* spojité v počátku, potom existuje přirozené číslo n a existují body $x_1, \ldots, x_n \in X$ tak, že položíme-li

$$U = \bigcap_{j=1}^{n} \Big\{ \varphi \in X^*\,;\ |\varphi(x_j)| < 1 \Big\},$$

potom $|\Phi(\varphi)| < 1$ pro $\varphi \in U$. Lehce ověříme, že $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} \varepsilon_{x_j} \subseteq \operatorname{Ker} \Phi$. Formy Φ a $\varepsilon_{x_1}, \ldots$ $\ldots, \varepsilon_{x_n}$ jsou sice pravá lineární zobrazení (definice 1.18), avšak tvrzením zcela analogickým základnímu lemmatu 2.3 (které je formulováno pro levá lineární zobrazení) dostaneme, že Φ je lineární kombinací forem $\varepsilon_{x_1}, \ldots, \varepsilon_{x_n}$. Stejnou lineární kombinaci aplikujeme i na body $x_1, \ldots, x_n$, výsledkem budiž bod x. Vidíme, že $\varepsilon_x = \Phi$.

Volněji můžeme říci, že X je prostorem právě všech slabě* spojitých lineárních funkcionálů na prostoru X^*. Přesněji: ke každému slabě* spojitému lineárnímu funkcionálu

$\varPhi\colon X^* \to \mathbb{R}$ existuje alespoň jeden bod $x \in X$ tak, že $\varepsilon_x = \varPhi$. (Obecně může existovat i několik různých bodů $x \in X$ takových, že $\varepsilon_x = \varPhi$, není-li podprostor X^* „dostatečně velký".)

9.5. Poznámka. Vidíme, že pro slabé i slabé* topologie platí obdobná tvrzení. V dalším se zaměříme především na slabé* topologie a příslušná tvrzení platná pro slabé topologie již nebudeme formulovat (pouze podotkneme, že obdobné tvrzení platí i pro slabé topologie).

9.6. Věta o oddělitelnosti. *Nechť X^* je podprostor algebraického duálu $X^\#$ reálného vektorového prostoru X. Dále na X^* zaveďme strukturu pravého vektorového prostoru tím, že strukturu duálu $X^\#$ zúžíme přirozeným způsobem na jeho podprostor X^*. Prostor X^* ještě vybavme slabou* topologií $\sigma(X^*, X)$.*

Ať C je w^*-uzavřená konvexní podmnožina prostoru X^* a lineární funkcionál φ_0 z prostoru X^* ať leží mimo množinu C. Potom existuje bod $x \in X$ a reálné číslo $t \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall \varphi \in C\colon\ \varphi(x) \le t \qquad \text{a} \qquad \varphi_0(x) > t\,.$$

9.6.a. *Poznámka.* Samozřejmě je $\varphi(x) = \varepsilon_x(\varphi)$ a $\varphi_0(x) = \varepsilon_x(\varphi_0)$, kde ε je kanonické vnoření prostoru X do $X^{*\#}$.

9.6.b. *Poznámka.* Uvedenou větu 9.6 o oddělitelnosti lze formulovat také v případě slabé topologie na prostoru X. Rovněž níže uvedené důkazy 9.6.c a 9.6.e se provedou obdobně.

9.6.c. *Důkaz.* Tvrzení věty je zřejmé, jestliže množina C je prázdná: za x stačí dosadit počátek prostoru X, dále stačí zvolit například $t = -1$. Nadále proto předpokládejme, že množina C je neprázdná. Slabá* topologie je ovšem lokálně konvexní, k tomu se odvoláme na poznámky 9.4 (poznámku 9.4.b). Tvrzení věty je pak důsledkem malé Mazurovy věty [67: věta 14.27]. □

9.6.d. *Poznámka.* Právě uvedený důkaz 9.6.c je založen na použití malé Mazurovy věty [67: věta 14.27], která je důsledkem algebraické Hahnovy-Banachovy věty [67: věta 2.16]. Důkaz algebraické Hahnovy-Banachovy věty ovšem využívá axiom výběru resp. Zornovo lemma 1.31, které je s ním ekvivalentní.

Zmíněná malá Mazurova věta je navíc dosti obecná, lze ji použít v libovolném topologickém vektorovém prostoru s lokálně konvexní topologií.

Uveďme proto ještě jeden důkaz věty 9.6 o oddělitelnosti, který je sice možné použít jen v případě slabých* topologií, avšak využívá podstatně jednodušších prostředků. Následující důkaz 9.6.e je převzat z článku CRAVENA a KOLIHY [21: Lemma 1]. (Poznamenejme, že zmíněné lemma [21: Lemma 1] je formulováno pro případ slabé topologie na X. Jeho původní důkaz je zde upraven pro případ slabé* topologie na X^*.)

9.6.e. *Jiný důkaz věty o oddělitelnosti.* Funkcionál φ_0 neleží ve slabě* uzavřené množině C tehdy a jen tehdy, když existuje slabé* okolí funkcionálu φ_0, které množinu C neprotíná. Existuje tedy přirozené číslo n a body $x_1, \dots, x_n \in X$ tak, že množina

$$\Big\{\, \varphi \in X^*\,;\ \big|\varepsilon_{x_1}(\varphi) - \varepsilon_{x_1}(\varphi_0)\big| < 1\ \wedge\ \cdots\ \wedge\ \big|\varepsilon_{x_n}(\varphi) - \varepsilon_{x_n}(\varphi_0)\big| < 1 \Big\}$$

má s množinou C prázdný průnik, kde ε označuje kanonické vnoření. Pro každé $\varphi \in C$ tedy platí

$$\big|\varepsilon_{x_1}(\varphi) - \varepsilon_{x_1}(\varphi_0)\big| \ge 1\ \vee\ \cdots\ \vee\ \big|\varepsilon_{x_n}(\varphi) - \varepsilon_{x_n}(\varphi_0)\big| \ge 1\,. \tag{1}$$

Sestavme součin lineárních funkcionálů $\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_n}$ a označme jej $\varPsi$ (definice 1.53; je-li $n = 0$, potom množina C je prázdná a význam nulového lineárního zobrazení $\varPsi$ se řídí definicí 1.59). Získali jsme tedy lineární zobrazení $\varPsi\colon X^* \to \mathbb{R}^n$ a pro každé $\varphi \in X^*$ máme $\varPsi(\varphi) = (\varepsilon_{x_j}(\varphi))_{j=1}^n$.

Ať $\Psi(C)$ označuje obraz množiny C skrze zavedené zobrazení Ψ. Je zřejmé, že množina $\Psi(C)$ je konvexní, protože Ψ je lineární zobrazení a C je konvexní. K tomu ať $\overline{\Psi(C)}$ označuje uzávěr množiny $\Psi(C)$ ve standardní eukleidovské topologii prostoru $\mathbb{R}^n$. Množina $\overline{\Psi(C)}$ je nadále konvexní, protože uzávěr každé konvexní množiny je konvexní [86: věta 3.4-F (na str. 134)].

Na prostoru $\mathbb{R}^n$ uvažujme Čebyševovu normu $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ určenou předpisem $\|\boldsymbol{\lambda}\|_\infty = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$ pro každé $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Podmínka (1) pak vyjadřuje, že čebyševovské 1-okolí bodu $\Psi(\varphi_0)$ množinu $\Psi(C)$ neprotíná. Je všeobecně známo, že Čebyševova norma na prostoru $\mathbb{R}^n$ indukuje eukleidovskou topologii. To znamená, že bod $\Psi(\varphi_0)$ neleží ani v uzávěru množiny $\Psi(C)$, neleží v uzavřené a konvexní množině $\overline{\Psi(C)}$.

Nyní na prostoru $\mathbb{R}^n$ uvažujme eukleidovskou normu $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ určenou předpisem $\|\boldsymbol{\lambda}\|_2 = \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2}$ pro $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$. (Podrobněji viz níže uvedenou poznámku 9.7.) Je samozřejmé, že eukleidovská norma na prostoru $\mathbb{R}^n$ indukuje standardní eukleidovskou topologii. Dále je všeobecně známo, že prostor $\mathbb{R}^n$ vybavený eukleidovskou normou je Hilbertův. S odvoláním na známou větu o promítání bodu na neprázdnou uzavřenou a konvexní množinu v Hilbertově prostoru [67: věta 1.17 a odstavec 1.26] dostáváme, že v množině $\overline{\Psi(C)}$ existuje právě jeden bod $\boldsymbol{\lambda}_0$, který má od bodu $\Psi(\varphi_0)$ v eukleidovské normě nejmenší vzdálenost. (Je-li množina C prázdná, zvolme bod $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^n$ libovolně tak, aby $\boldsymbol{\lambda}_0 \neq \Psi(\varphi_0)$.) Tato vzdálenost je přitom kladná, tudíž

$$\big(\Psi(\varphi_0) - \boldsymbol{\lambda}_0,\, \Psi(\varphi_0) - \boldsymbol{\lambda}_0\big) > 0\,,$$

kde $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^n$ odvozený od zavedené eukleidovské normy $\|\cdot\|_2$. Dále vidíme, že pro všechna $\boldsymbol{\lambda} \in \overline{\Psi(C)}$ platí

$$\big(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_0,\, \Psi(\varphi_0) - \boldsymbol{\lambda}_0\big) \le 0\,,$$

tudíž

$$\big(\Psi(\varphi) - \boldsymbol{\lambda}_0,\, \Psi(\varphi_0) - \boldsymbol{\lambda}_0\big) \le 0$$

pro všechna $\varphi \in C$.

Nechť $\boldsymbol{\mu} = \Psi(\varphi_0) - \boldsymbol{\lambda}_0$. Když $\boldsymbol{\mu} = (\mu_j)_{j=1}^n$, položme $x = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n$. Potom (opět s využitím komutativity tělesa $\mathbb{R}$) pro všechna $\varphi \in C$ máme

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - \varphi_0(x) &= \varepsilon_x(\varphi - \varphi_0) = \\
&= \mu_1 \varepsilon_{x_1}(\varphi - \varphi_0) + \cdots + \mu_n \varepsilon_{x_n}(\varphi - \varphi_0) = \\
&= \big(\Psi(\varphi - \varphi_0),\, \boldsymbol{\mu}\big) = \\
&= \big(\Psi(\varphi) - \boldsymbol{\lambda}_0,\, \Psi(\varphi_0) - \boldsymbol{\lambda}_0\big) - \big(\Psi(\varphi_0) - \boldsymbol{\lambda}_0,\, \Psi(\varphi_0) - \boldsymbol{\lambda}_0\big) \le \\
&\le -\big(\Psi(\varphi_0) - \boldsymbol{\lambda}_0,\, \Psi(\varphi_0) - \boldsymbol{\lambda}_0\big)\,.
\end{aligned}$$

Odtud plyne, že pro všechna $\varphi \in C$ máme

$$\varphi(x) \le \varphi_0(x) - \big(\Psi(\varphi_0) - \boldsymbol{\lambda}_0,\, \Psi(\varphi_0) - \boldsymbol{\lambda}_0\big)\,.$$

Stačí tedy položit $t = \varphi_0(x) - \big(\Psi(\varphi_0) - \boldsymbol{\lambda}_0,\, \Psi(\varphi_0) - \boldsymbol{\lambda}_0\big)$. □

9.7. Poznámka. Eukleidovská norma na prostoru F^m. Mějme lineárně uspořádané těleso F a přirozené číslo m. Zabývejme se otázkou zda na prostoru F^m je možné zavést eukleidovskou normu $\|\cdot\|_2 : F^m \to F_0^+$ předpisem $\|\boldsymbol{\lambda}\|_2 = \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_m^2}$ pro všechna $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \in F^m$.

Existenci odmocniny každého nezáporného skaláru lze zaručit předpokladem, že těleso F je úplné (tudíž dle věty 3.87 izomorfní s tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$), viz [62: věta 43 (v kapitole I § 8 na str. 62)]. Úplnost tělesa F však pro existenci odmocnin nezáporných skalárů není bezpodmínečně nutná, jak nyní ukážeme. Definujme funkci $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, jejímž definičním oborem i oborem hodnot je množina nezáporných reálných čísel, předpisem $f(x) = \sqrt{x}$ pro $x \in \mathbb{R}_0^+$. Dále uvažujme těleso hyperreálných čísel $\mathcal{H}$, viz odstavec 3.79 a příklad 3.80, kde jsme rovněž uvedli, že těleso hyperreálných čísel $\mathcal{H}$ není úplné. Postupem uvedeným v odstavci 3.79 (viz předpis 3.79.(4), kde místo $\tilde{f}_1$ a f_1 píšeme po řadě $\tilde{f}$ a f) funkci $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ rozšíříme na funkci $\tilde{f}\colon \mathcal{H}_{i(0)}^+ \to \mathcal{H}_{i(0)}^+$ tak, že pro každé nezáporné hyperreálné číslo $[\{a_n\}_{n=1}^\infty]_\approx \in \mathcal{H}_{i(0)}^+$ – bez újmy na obecnosti je $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, vzhledem k vlastnostem volného ultrafiltru $\mathfrak{U}$ a způsobu konstrukce hyperreálných čísel, viz odstavec 3.79 – máme $\tilde{f}\big([\{a_n\}_{n=1}^\infty]_\approx\big) = \sqrt{[\{a_n\}_{n=1}^\infty]_\approx} = [\{\sqrt{a_n}\,\}_{n=1}^\infty]_\approx$. Vidíme, že každé nezáporné hyperreálné číslo má odmocninu, ačkoliv těleso hyperreálných čísel $\mathcal{H}$ není úplné.

Předpokládejme tedy, že lineárně uspořádané těleso F je Pythagorovo. (Těleso F („bez lineárního uspořádání“) je *Pythagorovo* právě tehdy, když je komutativní a ke každému přirozenému číslu n a libovolně zvoleným skalárům $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ existuje $\mu \in F$ tak, že $\mu^2 = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2$. [78: odstavec IV.6.14].) Uvedený předpoklad zaručí, že na prostoru F^m je možné zavést zobrazení $\|\cdot\|_2\colon F^m \to F_0^+$ předpisem $\|\boldsymbol{\lambda}\|_2 = \sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_m^2}$ pro $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m \in F^m$. Důležitou otázkou ale je, zda zavedená norma splní trojúhelníkovou resp. Minkowského nerovnost $\|\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu}\|_2 \leq \|\boldsymbol{\lambda}\|_2 + \|\boldsymbol{\mu}\|_2$ pro všechna $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in F^m$.

Důkaz Minkowského nerovnosti [63: věta 105 (v kapitole V § 12 na str. 214)], [68: Teorém 10.4] využívá Hölderovu nerovnost. Důkaz Hölderovy nerovnosti [63: věta 103 (v kapitole V § 12 na str. 212)], [64: kapitola 5 úloha 2], [68: Teorém 10.3] se pak opírá o Youngovu nerovnost. Zmíněné důkazy Minkowského i Hölderovy nerovnosti využívají komutativitu tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ (resp. komutativitu tělesa F). V [68: Teorém 10.2] autoři k důkazu Youngovy nerovnosti využívají toho, že funkce (přirozeného) logaritmu je konkávní. (Přirozený logaritmus lze snadno zavést na úplném tělese (tedy tělese reálných čísel $\mathbb{R}$, viz větu 3.87), jak je všeobecně známo [62: kapitola III] (a [62: kapitola V § 2]). Nadto funkci $\ln x$ definovanou na množině nezáporných reálných čísel $\mathbb{R}_0^+$ dovedeme rozšířit na množinu nezáporných hyperreálných čísel $\mathcal{H}_{i(0)}^+$, viz odstavec 3.79 a příklad 3.80.) Chceme-li odvodit Minkowského nerovnost (pouze) pro eukleidovskou normu, můžeme použít také Jarníkův [63: věta 101 (v kapitole V § 12 na str. 212)] nebo Korovkinův [64: kapitola 5 úloha 1] důkaz Youngovy nerovnosti. V obou těchto důkazech se používá pouze komutativita tělesa $\mathbb{R}$ (resp. F). Jarníkův důkaz je sice krátký, ale Korovkinův důkaz zase používá jen elementární argumenty.

Poznamenejme, že lze postupovat i jiným způsobem. Na prostoru F^m nejprve zavedeme skalární součin $(\cdot,\cdot)\colon F^m \times F^m \to F$ tím, že pro každé $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{i=1}^m \in$ $\in F^m$ položíme $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \lambda_1\mu_1 + \dots + \lambda_m\mu_m$. Následně můžeme eukleidovskou normu zavést předpisem $\|\boldsymbol{\lambda}\|_2 = \sqrt{(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda})}$ pro každé $\boldsymbol{\lambda} \in F^m$. Minkowského nerovnost nyní můžeme dokázat jiným způsobem, viz [70: kapitola 4] i [66: věty 4.3 a 4.4 (na str. 63)]. V důkazu se opět využije komutativita tělesa $\mathbb{R}$ (resp. F).

Shrňme tedy, že eukleidovskou normu na prostoru F^m můžeme zavést, kdykoliv lineárně uspořádané těleso F je Pythagorovo (a komutativní, viz též odstavec 3.65).

9.8. Definice. Slabý* uzávěr, slabě* uzavřený konvexní obal a slabě* uzavřený kuželový obal. Nechť X^* je podprostor algebraického duálu $X^\#$ reálného vektorového prostoru X. Přirozeným zúžením struktury duálu $X^\#$ zaveďme na X^* strukturu pravého vektorového prostoru. Dále prostor X^* vybavme slabou* topologií $\sigma(X^*, X)$.

Slabý* uzávěr libovolné podmnožiny A prostoru X^* označíme $\overline{A}^*$. Připomeňme, že *slabý uzávěr* množiny A je roven průniku všech slabě* uzavřených množin, které A obsahují jako svoji podmnožinu.

Když konvexní obal množiny A označíme $\operatorname{conv} A$ (definice 3.42), pak její *slabě* uzavřený konvexní obal* označíme $\overline{\operatorname{conv}}^* A$ a klademe

$$\overline{\operatorname{conv}}^* A = \overline{\operatorname{conv} A}^*.$$

V libovolném topologickém (ne nutně lokálně konvexním) vektorovém prostoru platí, že uzávěr konvexní množiny je konvexní [86: věta 3.4-F (na str. 134)]. Množina $\overline{\operatorname{conv}}^* A$ je tedy slabě* uzavřená a konvexní.

Obdobně, když kuželový obal množiny A označíme $\operatorname{cone} A$ (definice 3.38), pak její *slabě* uzavřený kuželový obal* označíme $\overline{\operatorname{cone}}^* A$ a položíme

$$\overline{\operatorname{cone}}^* A = \overline{\operatorname{cone} A}^* .$$

Snadno nahlédneme, že uzávěr kuželu v libovolném topologickém vektorovém prostoru je kužel. Množina $\overline{\operatorname{cone}}^* A$ je tedy slabě* uzavřený kužel.

Obdobným způsobem by bylo možné zavést také pojem slabě uzavřeného konvexního i slabě uzavřeného kuželového obalu v prostoru X.

9.9. Následující lemma 9.10 je přímým důsledkem věty 9.6 o oddělitelnosti a podá charakteristiku slabě* uzavřeného konvexního obalu.

9.10. Lemma. *Ať X^* je podprostor algebraického duálu $X^\#$ reálného vektorového prostoru X. Přirozeným zúžením struktury duálu $X^\#$ zaveďme na X^* strukturu pravého vektorového prostoru. Dále prostor X^* vybavme slabou* topologií $\sigma(X^*, X)$. Pak pro libovolnou podmnožinu A prostoru X^* platí*

$$\overline{\operatorname{conv}}^* A = \bigcap_{x \in X} \left\{ \varphi \in X^* \,;\ \varphi(x) \le \sup_{\alpha \in A} \alpha(x) \right\} . \qquad (1)$$

9.10.a. *Poznámka.* Vidíme, že slabě* uzavřený konvexní obal lze popsat jako průnik slabě* uzavřených poloprostorů.

9.10.b. *Poznámka.* Obdobné tvrzení platí i v případě slabé topologie na prostoru X.

9.10.c. *Důkaz.* Inkluze „$\subseteq$“ je triviální. Když nyní $\varphi_0 \in X^* \setminus \overline{\operatorname{conv}}^* A$, potom dle věty 9.6 o oddělitelnosti existuje bod $x \in X$ a číslo $t \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $\alpha \in \overline{\operatorname{conv}}^* A$ platí $\alpha(x) \le t$ a $\varphi_0(x) > t$. Je tedy $\sup_{\alpha \in A} \alpha(x) \le \sup_{\alpha \in \overline{\operatorname{conv}}^* A} \alpha(x) \le t < \varphi_0(x)$. Tím je dokázána inkluze „$\supseteq$“. □

9.11. Pomocí dokázaného lemmatu 9.10 nyní odvodíme charakteristiku slabě* uzavřeného kuželového obalu.

9.12. Lemma. *Ať X^* je podprostor algebraického duálu $X^\#$ reálného vektorového prostoru X. Přirozeným zúžením struktury duálu $X^\#$ na X^* zaveďme strukturu pravého vektorového prostoru. Dále prostor X^* vybavme slabou* topologií $\sigma(X^*, X)$. Pak pro libovolnou podmnožinu A prostoru X^* platí*

$$\overline{\operatorname{cone}}^* A = \bigcap_{x \in X} \Big\{ \varphi \in X^* \,;\ \big(\forall \alpha \in A\colon\ \alpha(x) \le 0\big) \ \Rightarrow\ \big(\varphi(x) \le 0\big) \Big\} . \qquad (1)$$

9.12.a. *Poznámka.* Obdobné tvrzení platí také v případě slabé topologie na prostoru X.

9.12.b. *Důkaz.* Tvrzení je důsledkem předcházejícího lemmatu 9.10. Stačí si uvědomit, že $\overline{\operatorname{cone}}^* A = \overline{\operatorname{conv}}^* \operatorname{cone} A$. Dále je zřejmé, že pro kterékoliv $x \in X$ je supremum $\sup_{\alpha \in \operatorname{cone} A} \alpha(x)$ rovno buď 0, anebo $+\infty$. (První možnost nastává právě tehdy, když pro všechna $\alpha \in \operatorname{cone} A$ platí $\alpha(x) \le 0$, což nastává právě tehdy, když pro všechna $\alpha \in A$ je $\alpha(x) \le 0$. Druhá možnost nastává v právě opačném případě.) Nyní mějme $x \in X$ a $\varphi \in X^*$. Je-li $\sup_{\alpha \in \operatorname{cone} A} \alpha(x) = +\infty$, potom nerovnost $\varphi(x) \le \sup_{\alpha \in \operatorname{cone} A} \alpha(x)$ je samozřejmá. Je-li $\sup_{\alpha \in \operatorname{cone} A} \alpha(x) = 0$, pak tato nerovnost $\varphi(x) \le \sup_{\alpha \in \operatorname{cone} A} \alpha(x)$ platí tehdy a jen tehdy, když $\varphi(x) \le 0$. □

9.13. Poznámka. Kdybychom vůbec nebyli obeznámeni s teorií topologie (tj., pojmy topologie, topologického prostoru, uzávěru atp. by nám byly zcela neznámé), potom vztahy 9.10.(1) a 9.12.(1) z posledních dvou lemmat 9.10 a 9.12 bychom mohli použít jako definice slabě* uzavřeného po řadě konvexního a kuželového obalu dané množiny A. Vztah zavedených pojmů ke slabé* topologii by nám ovšem zůstal utajen.

Význam posledních dvou lemmat 9.10 a 9.12 ale spočívá právě v tom, že slabou* topologickou strukturu na prostoru X^* (na straně jedné) a podmínku vyjádřitelnou prostředky lineární algebry (na straně druhé) dává do vzájemné souvislosti.

9.14. Poznámka. Farkasovo lemma. Povšimněme si, že poslední lemma 9.12 – kromě toho, že podává charakteristiku slabě* uzavřeného kuželového obalu libovolné množiny $A \subseteq X^*$ – už v sobě obsahuje Farkasovo lemma pro případ nekonečného počtu lineárních funkcionálů na nekonečněrozměrném vektorovém prostoru X. (Přítomnost průniku „$\bigcap_{x \in X}$“ před množinou ve vztahu 9.12.(1) znamená, že podmínka uvnitř této množiny musí být splněna „pro každé $x \in X$“.) Vidíme, že postupujeme v souladu s přístupem stanoveným v § 8.

9.15. Dosažené výsledky. Připomněli jsme známé pojmy z teorie slabých* topologií. Tyto výsledky nám způsobem naznačeným v předcházející poznámce 9.14 pomohou ihned zformulovat Farkasovo lemma v případě (obecně) nekonečného počtu lineárních funkcionálů na (obecně) nekonečněrozměrném vektorovém prostoru. V poznámce 9.7 jsme uvedli podmínky postačující k tomu, aby eukleidovskou normu bylo možné zavést i na prostoru F^m, kde F je obecné lineárně uspořádané těleso.

§ 10 Farkasovo lemma

10.1. Definice. Prostor $\mathbb{R}^J$, jeho počátek $\boldsymbol{o}$ a jedničkový sloupcový vektor $\boldsymbol{e}$. Lineární zobrazení $A: X \to \mathbb{R}^J$ a $\iota\boldsymbol{b}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^J$. Mějme libovolnou indexovou množinu J. Nejprve předpokládejme, že množina J je neprázdná.

Z definice 1.5 víme, že aditivní grupu tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ můžeme chápat jako reálný vektorový prostor. Dle definice 1.52 pak můžeme sestavit i součin těchto prostorů a položit $\mathbb{R}^J = \prod_{j \in J} \mathbb{R}_j$, kde $\mathbb{R}_j$ označuje aditivní grupu tělesa $\mathbb{R}$ pro $j \in J$. Vektorům z prostoru $\mathbb{R}_j$ říkáme buď sloupce (podle definice 1.52), anebo také *sloupcové vektory* (srov. definici 1.56).

Počátek neboli nulový vektor zavedeného prostoru $\mathbb{R}^J$ označíme $\boldsymbol{o}$. Máme tedy $\boldsymbol{o} = (o_j)_{j \in J} = (0)_{j \in J}$, kde $o_j = 0$ pro $j \in J$ a 0 je reálné číslo nula.

Znak $\boldsymbol{e}$ ať označuje sloupcový vektor prostoru $\mathbb{R}^J$ sestavený pouze z jedniček. Máme $\boldsymbol{e} = (e_j)_{j \in J} = (1)_{j \in J}$, kde $e_j = 1$ pro $j \in J$ a 1 je reálné číslo jedna.

Nyní pro každé $j \in J$ budiž dán právě jeden lineární funkcionál $\alpha_j: X \to \mathbb{R}$, takže $\alpha_j \in X^{\#}$. Podle definice 1.53 můžeme sestavit součin daných lineárních funkcionálů a položit $A = (\alpha_j)_{j \in J} = \prod_{j \in J} \alpha_j$. Tím máme lineární zobrazení

$$A = (\alpha_j)_{j \in J}: X \to \mathbb{R}^J \qquad \text{a} \qquad Ax = \big(\alpha_j(x)\big)_{j \in J}$$

pro každé $x \in X$. (Poznámka: Položme $(X^{\#}_{\mathbb{R}})^J = (X^{\#})^J = \prod_{j \in J} X^{\#}_j$, kde $X^{\#}_j$ je algebraický duál $X^{\#}$ prostoru X pro všechna $j \in J$. Prostor všech lineárních zobrazení definovaných na prostoru X a jdoucích do prostoru $\mathbb{R}^J$ dle definice 1.38 označujeme $X^{\#}_{\mathbb{R}^J}$. Je snadné nahlédnout, že mezi prostory $(X^{\#}_{\mathbb{R}})^J$ a $X^{\#}_{\mathbb{R}^J}$ existuje přirozený a vzájemně jednoznačný vztah. Srov. definici 1.59.)

Zvolme libovolný sloupec $\boldsymbol{b} = (b_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^J$. S každou ze složek b_j sloupce $\boldsymbol{b}$ je podle definice 1.39 asociována pravá homotetie $\iota b_j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ určená předpisem $\iota b_j(t) = t b_j$ pro

$t \in \mathbb{R}$ a každé $j \in J$. Dle definice 1.53 opět můžeme sestavit součin těchto homotetií a položit $\iota\boldsymbol{b} = (\iota b_j)_{j\in J} = \prod_{j\in J} \iota b_j$. Tím dostáváme lineární zobrazení

$$\iota\boldsymbol{b} = (\iota b_j)_{j\in J} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^J \qquad \text{a} \qquad \iota\boldsymbol{b}(t) = (\iota b_j)_{j\in J}(t) = \big(\iota b_j(t)\big)_{j\in J} = (t b_j)_{j\in J}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Nakonec předpokládejme, že indexová množina J je prázdná. Potom klademe $\mathbb{R}^J = \mathbb{R}^0$, kde význam prostoru $\mathbb{R}^0$ je určen definicí 1.56. Počátek nulového prostoru $\mathbb{R}^J$ nadále značíme $\boldsymbol{o}$ a píšeme $\boldsymbol{o} = (0)_{j\in J}$, kde 0 je reálné číslo nula. Obě lineární zobrazení $A = (\alpha_j)_{j\in J} \colon X \to \mathbb{R}^J$ a $\iota\boldsymbol{b} = (\iota b_j)_{j\in J} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^J$, kde α_j jsou lineární funkcionály definované na prostoru X pro $j \in J$ a k tomu $\boldsymbol{b} = (b_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J$ je sloupcový vektor, jsou s ohledem na definici 1.59 nulová.

10.2. Definice. Různé obaly lineárního zobrazení $A \colon X \to \mathbb{R}^J$. Mějme reálný vektorový prostor X a indexovou množinu J. Každému $j \in J$ budiž přiřazen právě jeden lineární funkcionál $\alpha_j \in X^{\#}$, kde $X^{\#}$ je algebraický duál prostoru X. K tomu ať $A = (\alpha_j)_{j\in J} \colon X \to \mathbb{R}^J$ je lineární zobrazení s významem dle předcházející definice 10.1.

Je-li dána libovolná podmnožina $M \subseteq X^{\#}$ algebraického duálu $X^{\#}$, potom podle definic 1.25, 1.35, 3.38 a 3.42 umíme sestavit její lineární obal $\operatorname{Lin} M$, afinní obal $\operatorname{Aff} M$, kuželový obal $\operatorname{cone} M$ a konvexní obal $\operatorname{conv} M$. Nyní, když $A = (\alpha_j)_{j\in J} \colon X \to \mathbb{R}^J$ je lineární zobrazení, pak pro stručnost klademe

$$\begin{aligned} \operatorname{Lin} A &= \operatorname{Lin}\{\, \alpha_j \,;\ j \in J \,\}, \\ \operatorname{Aff} A &= \operatorname{Aff}\{\, \alpha_j \,;\ j \in J \,\}, \\ \operatorname{cone} A &= \operatorname{cone}\{\, \alpha_j \,;\ j \in J \,\}, \\ \operatorname{conv} A &= \operatorname{conv}\{\, \alpha_j \,;\ j \in J \,\}. \end{aligned}$$

Množina $\{\, \alpha_j \,;\ j \in J \,\}$ je zřejmě podmnožinou algebraického duálu $X^{\#}$ a význam jejího lineárního, afinního kuželového a konvexního obalu je určen zmíněnými definicemi 1.25, 1.35, 3.38 a 3.42. Význam zápisů $\operatorname{Lin} A$, $\operatorname{Aff} A$, $\operatorname{cone} A$ a $\operatorname{conv} A$, kde $A = (\alpha_j)_{j\in J} \colon X \to \mathbb{R}^J$ je lineární zobrazení, je stanoven právě uvedenými rovnicemi.

Nyní algebraický duál $X^{\#}$ vybavme slabou* topologií $\sigma(X^{\#}, X)$. Je-li $M \subseteq X^{\#}$ libovolná podmnožina duálu $X^{\#}$, pak význam jejího slabě* uzavřeného kuželového obalu $\overline{\operatorname{cone}}^* M$ i slabě* uzavřeného konvexního obalu $\overline{\operatorname{conv}}^* M$ je určen definicí 9.8 (popř. lemmaty 9.12 a 9.10). Když máme lineární zobrazení $A = (\alpha_j)_{j\in J} \colon X \to \mathbb{R}^J$, potom pro stručnost klademe

$$\overline{\operatorname{cone}}^* A = \overline{\operatorname{cone}}^*\{\, \alpha_j \,;\ j \in J \,\} \qquad \text{a} \qquad \overline{\operatorname{conv}}^* A = \overline{\operatorname{conv}}^*\{\, \alpha_j \,;\ j \in J \,\}.$$

Zde opět množina $\{\, \alpha_j \,;\ j \in J \,\}$ je částí algebraického duálu $X^{\#}$ a význam jejího slabě* uzavřeného kuželového i konvexního obalu se řídí definicí 9.8. Smysl zápisů $\overline{\operatorname{cone}}^* A$ a $\overline{\operatorname{conv}}^* A$, kde $A = (\alpha_j)_{j\in J} \colon X \to \mathbb{R}^J$ je lineární zobrazení, je pak určen právě uvedenými rovnicemi.

Poznamenejme, že úmluvu zavedenou v této definici 10.2 používáme i pro součiny zobrazení (definice 1.53). Jestliže tedy I a J jsou dvě indexové množiny, dále $A = (\alpha_i)_{i\in I} \colon X \to \mathbb{R}^I$ a $B = (\beta_j)_{j\in J} \colon X \to \mathbb{R}^J$ jsou dvě lineární zobrazení a $\gamma \colon X \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál, pak klademe

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{cone}}^* \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \overline{\operatorname{cone}}^*\big(\{\, \alpha_i \,;\ i \in I \,\} \cup \{\, \beta_j \,;\ j \in J \,\}\big), \\ \overline{\operatorname{cone}}^* \begin{pmatrix} \gamma \\ A \end{pmatrix} &= \overline{\operatorname{cone}}^*\big(\{\, \alpha_i \,;\ i \in I \,\} \cup \{\gamma\}\big). \end{aligned}$$

V případě ostatních obalů (Lin, Aff, cone, conv nebo $\overline{\operatorname{conv}}^*$) postupujeme obdobně.

10.3. Poznámka. Porovnávání sloupců prostoru $\mathbb{R}^J$. Soustavy lineárních nerovnic. Na konci § 3 jsme se zevrubně zabývali porovnáváním sloupců z prostoru F^m, soustavami lineárních nerovnic a dalšími souvisejícími tématy. V podstatě stejnou teorii bychom mohli uvést i zde, kdy namísto s vektorovým prostorem W nad lineárně uspořádaným tělesem F a s prostorem F^m, kde m je přirozené číslo, pracujeme po řadě s vektorovým prostorem X nad lineárně uspořádaným tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ se standardním uspořádáním a s prostorem $\mathbb{R}^J$, kde J je indexová množina. Zcela jistě je zbytečné tak činit.

Naznačme proto alespoň stručně, že když X je reálný vektorový prostor, dále J je indexová množina a máme sloupce $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j \in J}$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^J$, potom $\boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{\mu}$ resp. $\boldsymbol{\lambda} < \boldsymbol{\mu}$ tehdy a jen tehdy, když po řadě $\lambda_j \leq \mu_j$ resp. $\lambda_j < \mu_j$ pro všechna $j \in J$. Srov. definici 3.117. Pojem soustav (ostrých a neostrých) lineárních nerovnic (definice 3.118), blokových sloupcových vektorů a jejich porovnávání (definice 3.119 a 3.120) a pojem blokových soustav (definice 3.122) bychom zavedli obdobně.

(Poznámka: Záměrem při psaní této práce bylo pojmy porovnávání sloupcových vektorů a soustav lineárních nerovnic formalizovat na konci § 3 (a § 1). Ačkoliv na konci § 3 (i § 1) jsou (konečné) soustavy rovnic a nerovnic zavedeny ve značné obecnosti, tato obecnost se ukazuje jako nedostatečná. Správnější by bylo na konci § 3 (a § 1) postupovat tak, aby byly pokryty i nekonečné soustavy, správnější by bylo pracovat s obecnou (ne nutně konečnou) indexovou množinou. Rovněž definice 6.9 (jakož i 10.1) měla být zapracována už do § 1, snad namísto definice 1.56, načež prostory F^m a V^m apod. by se zavedly jako speciální případ prostorů F^I a V^I apod. pro $I = \{1, \ldots, m\}$. Poznámky 6.10 a 12.12, jakož i tato poznámka 10.3, by tak ztratily svoje opodstatnění a bylo by možné je vynechat.)

10.4. Nyní můžeme přejít k formulaci zobecnění Farkasova lemmatu, ve kterém může vystupovat i nekonečný počet lineárních funkcionálů.

10.5. Poznámka. Následující Farkasovo lemma 10.6 je ve skutečnosti už dlouho známým výsledkem. Tvrzení velmi podobná tomu, které zde uvádíme jako Farkasovo lemma 10.6, lze najít v [34: Lemma 1] nebo v [21: Lemma 2]. Autoři předmětných článků jen vztah mezi Farkasovým lemmatem a uvedenými výsledky [34: Lemma 1], [21: Lemma 2] z nějakého důvodu nezmiňují. (Srov. [10: Lemma 3].)

Obdobným tvrzením je [22: teorém 7.1 (v hlavě VII § 1 na str. 438)]. ČERNIKOV (ЧЕРНИКОВ) ale pojem slabě* uzavřeného kuželového obalu (definice 9.8 a 10.2, popř. lemma 9.12) zavádí poněkud jiným způsobem. Důsledkem toho je, že jeho výsledek [22: teorém 7.1 (v hlavě VII § 1 na str. 438)] je prakticky bezcenný. (!) (ČERNIKOV ve své definici [22: definice 7.1 (v hlavě VII § 1 na str. 437)] totiž slabě* uzavřený kuželový obal zavádí, jako kdyby použil rovnici 9.12.(1) lemmatu 9.12. Srov. přístup popsaný na začátku poznámky 9.13. Jeho věta [22: teorém 7.1 (v hlavě VII § 1 na str. 438)] se pak redukuje na tvrzení, že „implikace ‚$Ax \leq \boldsymbol{o} \Rightarrow \gamma(x) \leq 0$‘ platí pro všechna $x \in X$ právě tehdy, když tato implikace ‚$Ax \leq \boldsymbol{o} \Rightarrow \gamma(x) \leq 0$‘ platí pro všechna $x \in X$“. Viz též následující Farkasovo lemma 10.6 a jeho důkaz 10.6.b.)

Doplňme, že zobecněním Farkasova lemmatu v konečněrozměrném vektorovém prostoru pro případ nekonečného počtu lineárních funkcionálů (tzv. semiinfinitní případ) se zabýval už HAAR [59: výsledek na konci § 1], [60: výsledek na konci § 1].

10.6. Farkasovo lemma. *Mějme reálný vektorový prostor X a indexovou množinu J (může být i $J = \emptyset$). Nechť $A\colon X \to \mathbb{R}^J$ a $\gamma\colon X \to \mathbb{R}$ je po řadě lineární zobrazení a lineární funkcionál. Potom implikace*

$$Ax \leq \boldsymbol{o} \implies \gamma(x) \leq 0 \tag{1}$$

platí pro všechna $x \in X$ právě tehdy, když

$$\gamma \in \overline{\text{cone}}^* A\,. \tag{2}$$

Zde $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru $\mathbb{R}^J$ a 0 je reálné číslo nula. Uzávěr bereme ve slabé topologii $\sigma(X^\#, X)$ algebraického duálu $X^\#$.*

10.6.a. *Poznámka.* Uvedené Farkasovo lemma 10.6 udává podmínku nutnou a postačující k tomu, aby bloková soustava nerovnic $Ax \leq \boldsymbol{o}$, $\gamma(x) > 0$ neměla řešení. Srov. poznámku 4.15.a, viz též poznámku 11.11.b.

10.6.b. *Důkaz.* Jde jen o jinou formulaci (mj. používáme značení zavedené definicí 10.2) už dokázaného lemmatu 9.12. Viz též poznámku 9.14. □

10.7. Poznámka. Vztah mezi slabými* topologiemi $\sigma(X^*, X)$ a $\sigma(X^\#, X)$. Povšimněme si, že právě uvedené Farkasovo lemma 10.6 jsme formulovali pro případ, kdy pracujeme s celým algebraickým duálem $X^\#$ (srov. písmeno 9.1.a) – ačkoliv v odstavci 9.1 jsme uváděli, že někdy chceme pracovat s vlastním podprostorem X^* algebraického duálu $X^\#$. Můžeme se proto ptát, zda není na újmu obecnosti, když v uvedeném Farkasově lemmatu 10.6 pracujeme s celým duálem $X^\#$.

Ať X^* je podprostor algebraického duálu $X^\#$ reálného vektorového prostoru X. Prostory X^* a $X^\#$ vybavme odpovídající slabou* topologií, po řadě $\sigma(X^*, X)$ a $\sigma(X^\#, X)$. Potom X^* je zřejmě také topologickým podprostorem prostoru $X^\#$, tj., topologie $\sigma(X^*, X)$ je restrikcí topologie $\sigma(X^\#, X)$ na množinu X^*. Odtud plyne, že pro libovolnou množinu $A \subseteq X^*$ platí vztahy

$$\overline{\text{cone}}^{\sigma(X^*,X)} A = X^* \cap \overline{\text{cone}}^{\sigma(X^\#,X)} A\,,$$

$$\overline{\text{conv}}^{\sigma(X^*,X)} A = X^* \cap \overline{\text{conv}}^{\sigma(X^\#,X)} A\,,$$

kde $\overline{\text{cone}}$ resp. $\overline{\text{conv}}$ značí slabě* uzavřený po řadě kuželový resp. konvexní obal dle definice 9.8, přičemž horní index vyjadřuje odpovídající slabou* topologii, ve které uzávěr daného obalu bereme. S využitím konvencí zavedených definicí 10.2 dostáváme, že uvedené vztahy platí rovněž pro každé lineární zobrazení $A = (\alpha_j)_{j\in J}\colon X \to \mathbb{R}^J$ sestavené z funkcionálů, se kterými chceme pracovat, tedy $\alpha_j \in X^*$ pro $j \in J$. Zde J je indexová množina.

Nechť stále X^* je podprostor algebraického duálu $X^\#$ reálného vektorového prostoru X. K tomu mějme indexovou množinu J, lineární zobrazení $A = (\alpha_j)_{j\in J}\colon X \to \mathbb{R}^J$ sestavené z funkcionálů, se kterými chceme pracovat, a $\gamma\colon X \to \mathbb{R}$ budiž další takový lineární funkcionál. Je tedy $\alpha_j, \gamma \in X^*$ pro všechna $j \in J$. Potom výše uvedené Farkasovo lemma 10.6 platí i tehdy, když uzávěr ve vztahu 10.6.(2) vezmeme ve slabé* topologii $\sigma(X^*, X)$ prostoru X^*.

Obdobný dovětek se týká všech vět, tvrzení a poznámek, které v této kapitole ještě uvedeme.

10.8. Poznámka. Vztah mezi Farkasovým lemmatem 4 a 10.6. Vraťme se ještě k Farkasovu lemmatu 4 z úvodní kapitoly této práce. Už víme, viz poznámku 4.14.a, že Farkasovo lemma 4 je důsledkem dokázaného Farkasova lemmatu 4.15. Stojí za pozornost, že když indexová množina J je konečná (přesněji: máme $J = \{1, \dots, m\}$, kde m je přirozené číslo), potom infinitní Farkasovo lemma 10.6 i Farkasovo lemma 4 se (vzhledem k poznámce 4.15.b) shodují. Jestliže totiž $A\colon X \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení, kde X je reálný vektorový prostor a m je konečné přirozené číslo (může být i $m = 0$), potom $\text{cone}\, A = \overline{\text{cone}}^* A$. To plyne z části I. následujícího tvrzení 10.9.

Zmíněná část I. tvrzení 10.9 – říkající, že kuželový obal konečné podmnožiny algebraického duálu je (slabě*) uzavřený – je známým faktem. Viz např. [46: Kapitola I Sekce 7 Lemma (na str. 54)], kde se ovšem pracuje v prostoru konečné dimenze. V následujícím tvrzení 10.9 pracujeme v (obecně) nekonečněrozměrném prostoru a navíc uvedenou skutečnost dokazujeme zcela elementárním způsobem, jako snadný důsledek právě Farkasova lemmatu 4.

10.9. Tvrzení. *Mějme reálný vektorový prostor X a přirozené číslo m (lze vzít i $m = 0$). Dále ať $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \colon X \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární funkcionály definované na prostoru X. Potom platí:*

I. *Kuželový obal* $\operatorname{cone} A$ *je slabě* uzavřený.*

II. *Lineární obal* $\operatorname{Lin} A$ *je slabě* uzavřený.*

III. *Afinní obal* $\operatorname{Aff} A$ *je slabě* uzavřený.*

IV. *Konvexní obal* $\operatorname{conv} A$ *je slabě* uzavřený.*

Uzavřenost posuzujeme ve slabé topologii $\sigma(X^\#, X)$ algebraického duálu $X^\#$.*

10.9.a. *Poznámka.* Uvedená tvrzení platí i tehdy, když namísto tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ dosadíme libovolné lineárně uspořádané těleso F. Je zajímavé si povšimnout, že těleso F nemusí být úplné (definice 3.82).

10.9.b. *Poznámka.* V tvrzení 11.14 dokážeme, že konvexní obal $\operatorname{conv} A$ je dokonce slabě* kompaktní (při tom však využijeme úplnost tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$).

10.9.c. *Důkaz.* I. Budiž dán bod $\gamma \in X^\# \setminus \operatorname{cone} A$. Máme dokázat, že γ neleží ve (slabém*) uzávěru kuželového obalu $\operatorname{cone} A$. Obecně platí, že bod γ neleží v uzávěru nějaké množiny B právě tehdy, když existuje okolí bodu γ, které množinu B neprotíná. Jelikož $\gamma \in X^\# \setminus \operatorname{cone} A$, z Farkasova lemmatu 4.15 (resp. Farkasova lemmatu 4 z úvodní kapitoly této práce) plyne existence bodu $x \in X$ takového, že

$$\alpha_1(x) \le 0 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ \alpha_m(x) \le 0 \qquad \text{a} \qquad \gamma(x) > 0\,.$$

Položíme-li $\varepsilon = \gamma(x)$, pak množina

$$\Big\{\, \varphi \in X^\# \,;\ \big|\varphi(x) - \gamma(x)\big| < \varepsilon \,\Big\}$$

je slabým* okolím bodu γ, které neprotíná $\operatorname{cone} A$. Tím je část I. dokázána.

V důkazu následujících dvou částí II. a III. budeme pracovat s množinou $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$.

II. Zřejmě je $\operatorname{Lin} A = \operatorname{Lin} \mathcal{A} = \operatorname{cone}\big(\mathcal{A} \cup (-\mathcal{A})\big)$, kde $-\mathcal{A} = \{\, -\alpha \,;\ \alpha \in \mathcal{A} \,\}$. Stačí tedy použít předcházející část I.

III. Platí $\operatorname{Aff} A = \operatorname{Aff} \mathcal{A} = \big(\operatorname{Lin}(\mathcal{A} - \alpha_1) + \alpha_1\big)$. Zde $\mathcal{A} - \alpha_1 = \{\, \alpha - \alpha_1 \,;\ \alpha \in \mathcal{A} \,\}$. Položme pro stručnost $\mathcal{B} = \operatorname{Lin}(\mathcal{A} - \alpha_1)$, dále $\mathcal{B} + \alpha_1 = \{\, \beta + \alpha_1 \,;\ \beta \in \mathcal{B} \,\}$. Množina $\mathcal{B}$ je dle předcházející části II. slabě* uzavřená. Následně také množina $\operatorname{Aff} A = \mathcal{B} + \alpha_1$, která je oproti množině $\mathcal{B}$ pouze posunutá, je slabě* uzavřená.

IV. Zřejmě $\operatorname{conv} A = (\operatorname{cone} A) \cap (\operatorname{Aff} A)$, načež stačí použít část I. a III. □

10.10. Úvaha. Lexikografické Farkasovo lemma. Infinitní Farkasovo lemma 10.6 jsme formulovali v kontextu reálného vektorového prostoru X, který hrál roli „základního“ či „nosného“ vektorového prostoru; roli vektorového prostoru „cílových hodnot“ hrála aditivní grupa tělesa $\mathbb{R}$. Avšak Farkasovo lemma 4.15 jsme formulovali v kontextu „základního“ vektorového prostoru W, k tomu prostorem „cílových hodnot“ hodnot mohl být jakýkoliv lineárně uspořádaný vektorový prostor V, kde prostory W i V jsou nad společným libovolným tělesem F s lineárním uspořádáním, viz též komutativní diagram v poznámce 4.16. Můžeme se proto ptát, zda také v infinitním Farkasově lemmatu 10.6 by v roli prostoru „cílových hodnot“ mohl vystupovat obecný lineárně uspořádaný vektorový prostor.

Odpověď na položenou otázku se zdá být nesnadná a může sloužit jako motivace k dalšímu výzkumu. Základní potíž tkví v tom, že důkaz 10.6.b Farkasova lemmatu 10.6 jsme dokazovali geometrickým způsobem (poznámka 4.2.a a úvaha 4.5), jeho důkaz 10. .6.b je založen na použití věty 9.6 o oddělitelnosti. Oba důkazy 9.6.c a 9.6.e věty 9.6 o oddělitelnosti pak využívají toho, že prostor „cílových hodnot“ je roven aditivní grupě daného úplného tělesa (tedy vlastně tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$, viz větu 3.87). Použitá metoda důkazu infinitního Farkasova lemmatu 10.6 tedy vůbec nenaznačuje, jakým způsobem bychom toto lemma 10.6 měli dále zobecnit.

Přesto se v této úvaze 10.10 pokusíme o alespoň částečné zodpovězení výše položené otázky. Budeme předpokládat, že lineárně uspořádaný vektorový prostor „cílových hodnot“ má konečnou dimenzi. Protože jde o prostor nad úplným tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$, z věty 3.107 o lexikografickém uspořádání konečněrozměrného prostoru vyplývá, že uspořádání prostoru „cílových hodnot“ musí být lexikografické (definice 3.89).

Mějme přirozené číslo N (lze vzít i $N = 0$). Na prostoru $\mathbb{R}^N$ zaveďme lexikografické uspořádání „$\preceq$“, viz příklad 3.17. Dále mějme reálný vektorový prostor X a libovolnou indexovou množinu J (může být i $J = \emptyset$). Ať $A = (\alpha_j)_{j\in J}\colon X \to \mathbb{R}^J$ a $\Gamma = (\gamma_i)_{i=1}^N\colon X \to \mathbb{R}^N$ jsou lineární zobrazení, kde α_j a γ_i jsou lineární funkcionály definované na prostoru X pro $j \in J$ a $i = 1, \dots, N$. S využitím už známého Farkasova lemmatu 10.6 hledejme podmínku nutnou a postačující k tomu, aby implikace

$$Ax \le \boldsymbol{o} \implies \Gamma(x) \preceq 0 \tag{1}$$

byla splněna pro každé $x \in X$.

Pro zvolené $x \in X$ platí $\Gamma(x) \preceq 0$ právě tehdy, když $\gamma_1(x) \le 0$ a současně, jestliže $\gamma_1(x) = 0$, potom $\gamma_2(x) \le 0$ a současně, ... a současně, jestliže $\gamma_1(x) = \dots = \gamma_{N-1}(x) = 0$, potom $\gamma_N(x) \le 0$.

Je-li ovšem pro nějaké $x \in X$ a $i = 1, \dots, N-1$ splněno $\gamma_1(x) \le 0$ a ... a $\gamma_i(x) \le 0$, potom $\gamma_1(x) = \dots = \gamma_i(x) = 0$ právě tehdy, když $\gamma_1(x) \ge 0$ a ... a $\gamma_i(x) \ge 0$.

Odtud dostáváme, že implikace (1) platí pro každé $x \in X$ tehdy a jen tehdy, když všechny implikace

$$\begin{gathered}
Ax \le \boldsymbol{o} \implies \gamma_1(x) \le 0\,,\\
Ax \le \boldsymbol{o} \wedge -\gamma_1(x) \le 0 \implies \gamma_2(x) \le 0\,,\\
\dots,\\
Ax \le \boldsymbol{o} \wedge -\gamma_1(x) \le 0 \wedge \dots \wedge -\gamma_{N-1} \le 0 \implies \gamma_N(x) \le 0
\end{gathered}$$

jsou splněny současně pro všechna $x \in X$. Vidíme, že implikace (1) platí pro každé $x \in X$ právě tehdy, když všechny výroky

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &\in \overline{\operatorname{cone}}^*(\mathcal{A})\,,\\
\gamma_2 &\in \overline{\operatorname{cone}}^*(\mathcal{A} \cup \{-\gamma_1\})\,,\\
&\dots,\\
\gamma_N &\in \overline{\operatorname{cone}}^*(\mathcal{A} \cup \{-\gamma_1, \dots, -\gamma_{N-1}\})\,,
\end{aligned} \tag{2}$$

kde $\mathcal{A} = \{\, \alpha_j \,;\, j \in J \,\}$, jsou splněny současně. Tímto jsme odvodili lexikografickou verzi infinitního Farkasova lemmatu:

Implikace (1) *platí pro každé* $x \in X$ *tehdy a jen tehdy, když všechny výroky* (2) *jsou splněny zároveň.*

Jestliže indexová množina J je konečná (máme $J = \{1, \dots, m\}$ pro vhodné přirozené číslo m), potom uvedené lexikografické infinitní Farkasovo lemma odpovídá lexikografickému Farkasovu lemmatu 5 z úvodní kapitoly této práce (které je důsledkem dokázaného Farkasova lemmatu 4.15, viz poznámku 4.14.a). V lemmatu 5 jsme ale platnost implikace (1) pro každé $x \in X$ mohli charakterizovat jedinou podmínkou: existuje $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$ splňující $\iota\boldsymbol{u}^T A = \gamma$, kde $\boldsymbol{u} \in (\mathbb{R}^N)^m$ a $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru $(\mathbb{R}^N)^m$. Zůstává proto otevřenou otázkou, zda i v obecném případě je možné výroky (2) sloučit do jediné podmínky.

10.11. Další větou o alternativě, kterou jsme se v § 4 po Farkasově lemmatu 4.15 zabývali, bylo lemma 4.21 o základní dualitě v lineárním programování. Zmíněné lemma 4.21 pak ukázalo cestu k formulaci duální úlohy lineárního programování, viz poznámky 4.22 a princip duality 6.15. Vyplatí se proto, když následující infinitní verzi lemmatu 10. .13 o základní dualitě v LP budeme věnovat náležitou pozornost, neboť tato infinitní verze nám obdobným způsobem může naznačit tvar duální úlohy infinitního lineárního programování (tj. úlohy lineárního programování v (obecně) nekonečněrozměrném vektorovém prostoru s (obecně) nekonečným počtem lineárních omezení). Poznamenejme, že důkaz 10.13.b následujícího lemmatu 10.13 je proveden obdobně jako důkaz 4.21.b lemmatu 4.21 o základní dualitě v LP. To můžeme chápat jako další potvrzení užitečnosti metodiky důkazů vět o alternativě, kterou jsme shrnuli v poznámce 5.23.

10.12. Stojí za zmínku, že autor následující lemma 10.13 o základní dualitě v LP publikoval, viz [10: Lemma 4].

10.13. Lemma o základní dualitě v lineárním programování. *Nechť X je reálný vektorový prostor a J budiž libovolná indexová množina (může být i $J = \emptyset$). Mějme lineární zobrazení $A\colon X \to \mathbb{R}^J$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^J$. Potom soustava lineárních nerovnic*

$$Ax \le \boldsymbol{b}$$

nemá řešení právě tehdy, když

$$(\,o \quad \iota(-1)\,) \in \overline{\operatorname{cone}}^*\,(\,A \quad \iota\boldsymbol{b}\,)\ .$$

Zde $o\colon X \to \mathbb{R}$ a -1 je po řadě nulový lineární funkcionál a reálné číslo minus jedna. Uzávěr bereme ve slabé topologii $\sigma\big((X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#},\, X \dot{\times} \mathbb{R}\big)$ algebraického duálu $(X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#}$.*

10.13.a. *Poznámka.* Dodejme, že význam lineárních zobrazení $\iota(-1)$ a $\iota\boldsymbol{b}$ je určen definicemi 1.39 a 10.1, načež $(\,o \quad \iota(-1)\,)$ a $(\,A \quad \iota\boldsymbol{b}\,)$ jsou lineární zobrazení vzniklá direktním součtem zobrazení po řadě o a $\iota(-1)$ a A a $\iota\boldsymbol{b}$ dle definice 1.53.

10.13.b. *Důkaz.* Soustava lineárních nerovnic $Ax \le \boldsymbol{b}$ nemá řešení právě tehdy, když pro všechna $\binom{x}{t} \in X \dot{\times} \mathbb{R}$ splňující $(\,A \quad -\iota\boldsymbol{b}\,)\binom{x}{t} = Ax - \iota\boldsymbol{b}(t) \le \boldsymbol{o}$ platí $(\,o \quad \iota 1\,)\binom{x}{t} = = o(x) + \iota 1(t) = t \le 0$. Farkasovo lemma 10.6 dá požadovaný výsledek. Zřejmě je $(\,o \quad \iota 1\,) \in \overline{\operatorname{cone}}^*(\,A \quad -\iota\boldsymbol{b}\,)$ tehdy a jen tehdy, když $(\,o \quad \iota(-1)\,) \in \overline{\operatorname{cone}}^*(\,A \quad \iota\boldsymbol{b}\,)$. □

10.14. Poznámka. Podívejme se blíže na podmínky, které v lemmatech 4.21 a 10.13 o základní dualitě v LP charakterizují neřešitelnost soustavy $Ax \le \boldsymbol{b}$. V lemmatu 4.21 šlo o to, aby nulová lineární forma $o\colon W \to F$ ležela v kuželovém obalu $\operatorname{cone} A$ lineárního zobrazení A a aby táž kuželová kombinace aplikovaná na vektor pravých stran $\boldsymbol{b}$ dala zápornou hodnotu. V lemmatu 10.13 chceme, aby nulový lineární funkcionál $o\colon X \to \to \mathbb{R}$ ležel ve slabě* uzavřeném kuželovém obalu $\overline{\operatorname{cone}}^* A$ lineárního zobrazení A. To znamená, že musí existovat zobecněná posloupnost (síť) [67: appendix C] koeficientů kuželových kombinací taková, že když její jednotlivé členy aplikujeme na zobrazení A, dostaneme zobecněnou posloupnost konvergující k o. Členy téže zobecněné posloupnosti aplikované na vektor $\boldsymbol{b}$ pak musí dát zobecněnou posloupnost konvergující k nějaké záporné hodnotě, například k číslu -1.

10.15. Nakonec jsme se v § 4 zabývali Haarovou větou 4.30. Níže uvedenou infinitní verzi Haarovy věty 10.17 v této kapitole použijeme jako princip duality pro úlohy infinitního lineárního programování – jak jsme naznačili už v poznámce 4.32.

10.16. Poznámka. V poznámce 4.29.b jsme uvedli, že Alfréd Haar se zabýval soustavami s obecně nekonečným počtem lineárních nerovnic v konečněrozměrném reálném vektorovém prostoru (tzv. semiinfinitní případ). Níže uvedená Haarova věta 4.30 se zabývá stejným tématem v obecně nekonečněrozměrném reálném vektorovém prostoru (tzv. infinitní případ). Přesto následující infinitní Haarovu větu 4.30 nelze považovat za zobecnění původních Haarových výsledků: Haar totiž dokazuje [59: § 2], [60: § 2] – použijeme-li označení podle následující věty 4.30 – že funkcionál γ (a konstantu K) lze za splnění určitých podmínek (poznámka 4.29.b) vyjádřit jako kuželovou kombinaci konečně mnoha lineárních funkcionálů α_i (a skalárů b_i), kde $i \in I$, přičemž I je konečná podmnožina indexové množiny J a dále $A = (\alpha_j)_{j\in J}$ (a $\boldsymbol{b} = (b_j)_{j\in J}$). V této souvislosti je nutné poznamenat, že Černikov (Черников) ve svém komentáři [22: úvodní část hlavy VII (zejm. str. 435)] a dále v [22: poznámka 3 k teorému 7.4 (v hlavě VII § 1 na str. 445)] upozorňuje na jistý omyl (!) v původních Haarových výsledcích [59: výsledek na konci § 2], [60: výsledek na konci § 2].

10.17. Haarova věta. *Nechť X je reálný vektorový prostor. Mějme indexovou množinu J (lze vzít i $J = \emptyset$), lineární zobrazení $A\colon X \to \mathbb{R}^J$, sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^J$ a konstantu $K \in \mathbb{R}$. Nechť platí, že soustava $Ax \le \boldsymbol{b}$ má alespoň jedno řešení – existuje $x_0 \in X$ splňující $Ax_0 \le \boldsymbol{b}$. Potom implikace*

$$Ax \le \boldsymbol{b} \implies \gamma(x) \le K \tag{1}$$

platí pro všechna $x \in X$ právě tehdy, když existuje (konečné) reálné číslo $z^* \le K$ takové, aby

$$(\,\gamma \quad \iota z^*\,) \in \overline{\mathrm{cone}}^*\,(\,A \quad \iota\boldsymbol{b}\,)\ , \tag{2}$$

kde uzávěr bereme ve slabé topologii $\sigma\big((X\dot{\times}\mathbb{R})^\#,\ X\dot{\times}\mathbb{R}\big)$ algebraického duálu $(X\dot{\times}\mathbb{R})^\#$.*

10.17.a. *Poznámka.* Význam lineárních zobrazení ιz^* a $\iota\boldsymbol{b}$ je určen definicemi 1.39 a 10.1. Navíc $(\,\gamma\ \ \iota z^*\,)$ a $(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)$ jsou lineární zobrazení vzniklá direktním součtem zobrazení po řadě γ a ιz^* a A a $\iota\boldsymbol{b}$ dle definice 1.53.

10.17.b. *Poznámka.* Obdobně jako v důkazu 4.30.b Haarovy věty 4.30 lze dokázat, že implikace (1) platí pro všechna $x \in X$ tehdy a jen tehdy, když implikace

$$\begin{array}{c} Ax - \iota\boldsymbol{b}(t) \le \boldsymbol{o}\,, \\ \underline{o(x) - \iota 1(t) \le 0} \end{array} \qquad \implies \qquad \gamma(x) - \iota K(t) \le 0$$

platí pro všechna $\binom{x}{t} \in X \dot{\times} \mathbb{R}$, kde $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru $\mathbb{R}^J$, dále o je nulový lineární funkcionál $o\colon X \to \mathbb{R}$ a 0 a 1 je reálné číslo po řadě nula a jedna. Farkasovo lemma 10.6 ekvivalentně dává, že $(\,\gamma\ \ -\iota K\,) \in \overline{\mathrm{cone}}^*\left(\begin{smallmatrix} A & -\iota\boldsymbol{b} \\ o & -\iota 1\end{smallmatrix}\right)$, ekvivalentně

$$(\,\gamma \quad \iota K\,) \in \overline{\mathrm{cone}}^*\begin{pmatrix} A & \iota\boldsymbol{b} \\ o & \iota 1\end{pmatrix} = \overline{\mathrm{cone}\,(\,A \quad \iota\boldsymbol{b}\,) + \mathrm{cone}\,(\,o \quad \iota 1\,)}^*\,. \tag{3}$$

Dále vidíme, že vztah (2) platí pro vhodné $z^* \le K$ tehdy a jen tehdy, když existuje nezáporné reálné číslo $\lambda \ge 0$ takové, že $(\,\gamma\ \ \iota(K-\lambda)\,) \in \overline{\mathrm{cone}}^*(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)$, ekvivalentně

$$(\,\gamma \quad \iota K\,) \in \overline{\mathrm{cone}}^*\,(\,A \quad \iota\boldsymbol{b}\,) + \mathrm{cone}\,(\,o \quad \iota 1\,)\ . \tag{4}$$

Vzhledem k libovolné počáteční volbě lineárního funkcionálu $\gamma \in X^\#$ a reálného čísla $K \in \mathbb{R}$ tak vztahy (3) a (4) (za předpokladu řešitelnosti soustavy $Ax \le \boldsymbol{b}$) dávají zajímavý výsledek

$$\overline{\mathrm{cone}\,(\,A \quad \iota\boldsymbol{b}\,) + \mathrm{cone}\,(\,o \quad \iota 1\,)}^* = \overline{\mathrm{cone}}^*\,(\,A \quad \iota\boldsymbol{b}\,) + \mathrm{cone}\,(\,o \quad \iota 1\,)\ . \tag{5}$$

Důsledkem odvozeného vztahu (5) je, že množina stojící na jeho pravé straně je vždy slabě* uzavřená (má-li soustava $Ax \le \boldsymbol{b}$ řešení). Viz též odstavec 11.15, příklad 11.16 a tvrzení 11.19.

10.17.c. *Důkaz.* Implikace „$\Leftarrow$“ je snadná. Máme-li reálné číslo $z^* \leq K$ splňující (2), ekvivalentně $(\gamma \ \ -\iota z^*) \in \overline{\text{cone}}^*(A \ \ -\iota \boldsymbol{b})$, pak užitím triviální implikace Farkasova lemmatu 10.6 dostáváme, že pro všechna $\binom{x}{t} \in X \dot{\times} \mathbb{R}$ splňující $(A \ \ -\iota \boldsymbol{b})\binom{x}{t} \leq \boldsymbol{o}$ platí $(\gamma \ \ -\iota z^*)\binom{x}{t} \leq 0$, kde $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru $\mathbb{R}^J$ a 0 je reálné číslo nula. Jestliže za t dosadíme reálné číslo jedna, $t = 1$, dostáváme, že implikace

$$Ax \leq \boldsymbol{b} \implies \gamma(x) \leq z^*$$

platí pro všechna $x \in X$, což (neboť $z^* \leq K$) dokazuje platnost implikace (1) pro všechna $x \in X$.

Přejděme k důkazu implikace „$\Rightarrow$“. Uvažujme množinu $M = \{\gamma(x)\ ;\ x \in X, Ax \leq \boldsymbol{b}\}$. Množina M je jistě neprázdná (protože máme bod x_0, který je řešením soustavy $Ax \leq \boldsymbol{b}$) a shora omezená (horní mezí je, vzhledem k platnosti implikace (1) pro všechna $x \in X$, konstanta K). Protože těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ je úplné, množina M v něm má (konečné) supremum. Položme $z^* = \sup\{\gamma(x)\ ;\ x \in X, Ax \leq \boldsymbol{b}\}$. Zřejmě platí $\gamma(x_0) \leq z^* \leq K$. Ukážeme, že implikace (1) platí pro všechna $x \in X$ právě tehdy, když implikace

$$(A \ \ -\iota \boldsymbol{b}) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = Ax - \iota \boldsymbol{b}(t) \leq \boldsymbol{o} \implies (\gamma \ \ -\iota z^*) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma(x) - \iota z^*(t) \leq 0 \tag{6}$$

je splněna pro všechna $\binom{x}{t} \in X \dot{\times} \mathbb{R}$, kde $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor prostoru $\mathbb{R}^J$, dále o je nulový lineární funkcionál $o \colon X \to \mathbb{R}$ a 0 je reálné číslo nula. Vskutku, platí-li implikace (6) pro všechna $\binom{x}{t} \in X \dot{\times} \mathbb{R}$, stačí volit $t = 1$, abychom viděli, že implikace (1) platí pro všechna $x \in X$. Nyní předpokládejme, že pro všechna $x \in X$ platí implikace (1). Platnost implikace (6) dokážeme pro tři různé skupiny bodů $\binom{x}{t} \in X \dot{\times} \mathbb{R}$:

Zvolme $\binom{\bar{x}}{t} \in X \dot{\times} \mathbb{R}$ a předpokládejme, že $t > 0$. Nadto předpokládejme, že $Ax - \iota \boldsymbol{b}(t) \leq \boldsymbol{o}$, ekvivalentně $A(t^{-1}x) \leq \boldsymbol{b}$. Potom ovšem $(\gamma(t^{-1}x)) \in M$. Protože $z^* = \sup M$, máme $\gamma(t^{-1}x) \leq z^*$, ekvivalentně $\gamma(x) - \iota z^*(t) \leq 0$.

Zvolme $\binom{\hat{x}}{t} \in X \dot{\times} \mathbb{R}$ a předpokládejme, že $t = 0$. Navíc předpokládejme, že implikace (6) pro $\binom{x}{t} = \binom{\hat{x}}{t}$ neplatí, takže $A\hat{x} \leq \boldsymbol{o}$ a $\gamma(\hat{x}) > 0$. Máme ovšem bod x_0, pro který platí $Ax_0 \leq \boldsymbol{b}$. Potom pro dostatečně velké kladné $\lambda > 0$ obdržíme $A(x_0 + \lambda\hat{x}) \leq \boldsymbol{b}$ a současně $\gamma(x_0 + \lambda\hat{x}) > K$. Vidíme, že pro $x = x_0 + \lambda\hat{x}$ neplatí ani implikace (1).

Nakonec zvolme $\binom{\tilde{x}}{t} \in X \dot{\times} \mathbb{R}$ a předpokládejme, že $t < 0$. Opět předpokládejme, že implikace (6) pro $\binom{x}{t} = \binom{\tilde{x}}{t}$ neplatí. Pro jednoduchost smíme předpokládat, že $t = -1$, protože nerovnosti v implikaci (6) je možné „přeškálovat“ (stačí položit $\tilde{x} := t^{-1}\tilde{x}$ a $t := -1$, načež implikace (6) pro $\binom{x}{t} = \binom{\tilde{x}}{-1}$ nadále neplatí). Máme tedy $A\tilde{x} \leq -\boldsymbol{b}$ a $\gamma(\tilde{x}) > -z^*$. Jelikož poslední nerovnost $\gamma(\tilde{x}) > -z^*$ je ostrá a uspořádání tělesa $\mathbb{R}$ (i každého jiného lineárně uspořádaného tělesa) je husté, existuje kladné reálné číslo $\varepsilon > 0$ takové, že $\gamma(\tilde{x}) > -(z^* - \varepsilon) > -z^*$. Protože z^* je supremum množiny M, existuje $x^*_\varepsilon \in M$, splňující $Ax^*_\varepsilon \leq \boldsymbol{b}$, takové, že $\gamma(x^*_\varepsilon) > z^* - \varepsilon$. Následně $A(\tilde{x} + x^*_\varepsilon) \leq \boldsymbol{o}$ a zároveň $\gamma(\tilde{x} + x^*_\varepsilon) > 0$. Z předcházejícího případu ($t = 0$) už ale víme, že vztahy $A\hat{x} \leq \boldsymbol{o}$ a $\gamma(\hat{x}) > 0$ pro $\hat{x} = \tilde{x} + x^*_\varepsilon$ nemohou platit současně.

Dokázali jsme, že implikace (2) je splněna pro všechna $x \in X$ tehdy a jen tehdy, když (6) platí pro všechna $\binom{x}{t} \in X \dot{\times} \mathbb{R}$. Dle Farkasova lemmatu 10.6 ekvivalentně platí $(\gamma \ \ -\iota z^*) \in \overline{\text{cone}}^*(A \ \ -\iota \boldsymbol{b})$, ekvivalentně $(\gamma \ \ \iota z^*) \in \overline{\text{cone}}^*(A \ \ \iota \boldsymbol{b})$. Tím je důkaz završen. □

10.18. Dosažené výsledky. Dokázali jsme infinitní Farkasovo lemma 10.6, které už je známým výsledkem, jak jsme v poznámce 10.5 uvedli. Dokázali jsme ale také infinitní lemma 10.13 o základní dualitě v lineárním programování a infinitní Haarovu větu 10. .17; o těchto dvou výsledcích autorovi není známo, že by v literatuře byly publikovány; lemma 10.13 o základní dualitě v LP autor publikoval ve vlastním článku [10: Lemma 4].

Navíc jsme se v úvaze 10.10 zabývali otázkou, zda je možné formulovat alespoň lexikografické infinitní Farkasovo lemma. V tvrzení 10.9 jsme elementárním způsobem (který nevyužívá úplnost tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$) dokázali známý fakt, že kuželový obal konečné podmnožiny algebraického duálu je slabě* uzavřený. Za zmínku stojí též zajímavý vztah 10.17.(5) z poznámky 10.17.b.

§ 11 Další věty o alternativě

11.1. Před uvedením některých dalších vět o alternativě zavedeme pojmy, se kterými v tomto paragrafu budeme soustavně pracovat.

11.2. Definice. Množiny $\mathbb{R}^+$ a $(\mathbb{R}^+)^J$. Znak $\mathbb{R}^+$ ať označuje množinu všech kladných reálných čísel. Je tedy $\mathbb{R}^+ = \{ t \in \mathbb{R} ;\ t > 0 \}$, kde 0 je reálné číslo nula. Nyní mějme indexovou množinu J (lze vzít i $J = \emptyset$). Potom ať $(\mathbb{R}^+)^J$ označuje množinu všech sloupcových vektorů prostoru $\mathbb{R}^J$ (definice 10.1), jejichž všechny složky jsou kladné. Klademe tedy $(\mathbb{R}^+)^J = \{ \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^J ;\ \boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{o} \}$, kde $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru $\mathbb{R}^J$ (a porovnávání sloupců $\boldsymbol{\varepsilon}$ a $\boldsymbol{o}$ se děje podle poznámky 10.3).

11.3. Mějme lineární zobrazení $A = (\alpha_j)_{j\in J}\colon X \to \mathbb{R}^J$. Několikrát se rovněž setkáme s nutností jednotlivé složky zobrazení A – tj. jednotlivé lineární formy α_j, kde $j \in J$ – „přeškálovat“. Budeme tedy pracovat se zobrazením $(\iota\varepsilon_j\alpha_j)_{j\in J}\colon X \to \mathbb{R}^J$, kde $\varepsilon_j \in \mathbb{R}$ jsou „škálovací koeficienty“ pro $j \in J$. Zobrazení $(\iota\varepsilon_j\alpha_j)_{j\in J}\colon X \to \mathbb{R}^J$ vzniklo složením zobrazení $A\colon X \to \mathbb{R}^J$ a zobrazení $\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}}\colon \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^J$, které zavádíme následující definicí 11.4.

11.4. Definice. Zobrazení $\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Budiž dána libovolná indexová množina J a sloupcový vektor $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J$.

Nejprve předpokládejme, že množina J je neprázdná. Jak už z definice 1.5 víme, aditivní grupu tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ můžeme chápat jako reálný vektorový prostor. Dle definice 1.52 pak můžeme sestavit i součin těchto prostorů $\mathbb{R}^J = \prod_{j\in J} \mathbb{R}_j$, kde $\mathbb{R}_j$ označuje aditivní grupu tělesa $\mathbb{R}$ pro $j \in J$. (Tímto jsme zopakovali část definice 10.1.) K tomu ať $p_j\colon \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ je j-tá přirozená projekce pro $j \in J$ s významem podle definice 1.52. Připomeňme, že $\iota\varepsilon_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je pravá homotetie aditivní grupy tělesa $\mathbb{R}$ určená skalárem ε_j podle definice 1.39 pro $j \in J$. Nyní vidíme, že zobrazení p_j a $\iota\varepsilon_j$ můžeme složit, výsledkem je lineární zobrazení $\iota\varepsilon_j p_j\colon \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$, viz poznámku 1.40, pro $j \in J$. Nakonec podle definice 1.53 můžeme sestavit součin těchto lineárních zobrazení a položit

$$\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \prod_{j\in J} (\iota\varepsilon_j p_j)\,.$$

Tímto jsme sestrojili lineární zobrazení $\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}}\colon \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^J$.

Jestliže indexová množina J je prázdná, $J = \emptyset$, potom vektorový prostor $\mathbb{R}^J$ je nulový a $\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}}\colon \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^J$ je nulové lineární zobrazení s významem podle definice 1.65.

11.5. Poznámka. Nechť X je reálný vektorový prostor a J je indexová množina (může být i $J = \emptyset$). Dále mějme lineární zobrazení $A = (\alpha_j)_{j\in J}\colon X \to \mathbb{R}^J$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J$. Potom lineární zobrazení $A\colon X \to \mathbb{R}^J$ a lineární zobrazení $\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}}\colon \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^J$ získané dle předcházející definice 11.4 můžeme složit. Výsledkem je lineární zobrazení

$$\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} A\colon X \to \mathbb{R}^J.$$

K tomu máme vztah

$$\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} A = (\iota\varepsilon_j\alpha_j)_{j\in J}\,.$$

Zde $\iota\varepsilon_j\alpha_j\colon X \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál vzniklý složením funkcionálu $\alpha_j\colon X \to \mathbb{R}$ a zobrazení $\iota\varepsilon_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro $j \in J$. Zobrazení $(\iota\varepsilon_j\alpha_j)_{j\in J}\colon X \to \mathbb{R}^J$ je pak součinem získaných funkcionálů podle definice 1.53 (je-li indexová množina J neprázdná; jinak, když $J = \emptyset$, lineární zobrazení $(\iota\varepsilon_j\alpha_j)_{j\in J}$ je nulové podle definice 1.59).

Vidíme, že představujeme-li si zobrazení A jako sloupec lineárních funkcionálů $(\alpha_j)_{j\in J}$ – viz definici 1.53 –, pak zobrazení $\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ si můžeme představovat jako diagonální matici se sloupcem $\iota\boldsymbol{\varepsilon}$ na diagonále a nulovými lineárními funkcionály jinde. Složením „čtvercové matice“ $\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ a sloupce A pak dostáváme sloupec lineárních funkcionálů $(\iota\varepsilon_j\alpha_j)_{j\in J}$. Srov. odstavec 1.64 a definici 1.65.

11.6. Poznámka. Součet množin. Nechť X je reálný vektorový prostor a ať $A, B \subseteq \subseteq X^{\#}$ jsou libovolné dvě podmnožiny jeho algebraického duálu $X^{\#}$. Připomeňme, že v definici 3.38 jsme zavedli mj. pojem součtu dvou množin: klademe $A + B = \{\, \alpha + \beta\,;\ \alpha \in A,\ \beta \in B \,\}$. Se součtem množin (které byly kuželovými obaly) jsme vlastně pracovali už v poznámce 10.17.b.

11.7. Následující lemma 11.8 – které je další větou o alternativě (druhého druhu; poznámka 5.21) – můžeme považovat za variantu Farkasova lemmatu a použijeme je při důkazu níže uvedené infinitní Motzkinovy věty 11.11.

11.8. Lemma. *Mějme reálný vektorový prostor X a dvě indexové množiny I a J (lze vzít i $I = \emptyset$ nebo $J = \emptyset$). Nechť $A = (\alpha_i)_{i\in I}\colon X \to \mathbb{R}^I$ a $B = (\beta_j)_{j\in J}\colon X \to \mathbb{R}^J$ jsou dvě lineární zobrazení, kde α_i a β_j jsou lineární funkcionály definované na prostoru X. Potom implikace*

$$\begin{array}{ll} Ax + \iota\boldsymbol{e}(t) \le \boldsymbol{o}\,, & \\ Bx \qquad\quad\ \le \boldsymbol{o} & \\ \hline \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad o(x) + \iota 1(t) = t \le 0\,. \tag{1}$$

platí pro všechna $\binom{x}{t} \in X \dot{\times} \mathbb{R}$ právě tehdy, když

$$o \in \overline{\operatorname{conv} A + \operatorname{cone} B}^{\,*}. \tag{2}$$

Zde o je nulový lineární funkcionál $o\colon X \to \mathbb{R}$, dále 1 je reálné číslo jedna, k tomu $\boldsymbol{e}$ je sloupcový vektor z prostoru $\mathbb{R}^I$ sestavený pouze z jedniček, navíc $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru $\mathbb{R}^J$ a uzávěr bereme ve slabé topologii $\sigma(X^{\#}, X)$ algebraického duálu $X^{\#}$.

11.8.a. *Poznámka.* Význam sloupcového vektoru $\boldsymbol{e}$ je určen definicí 10.1. Symbol „ι“ používáme ve významu podle definic 1.39 a 10.1.

11.8.b. *Poznámka.* Jestliže indexová množina I je prázdná, $I = \emptyset$, pak implikace (1) neplatí např. pro $x = 0$ a $t = 1$, dále však $\operatorname{conv} A = \emptyset$, tudíž $\operatorname{conv} A + \operatorname{cone} B = \emptyset$, takže podmínka (2) rovněž není splněna. Vidíme, že tvrzení uvedeného lemmatu 11.8 platí i tehdy, když $I = \emptyset$.

11.8.c. *Důkaz.* Podle Farkasova lemmatu 10.6 implikace (1) platí pro všechna $\binom{x}{t} \in \in X \dot{\times} \mathbb{R}$ tehdy a jen tehdy, když

$$(\, o \quad \iota 1\,) \in \overline{\operatorname{cone}}^{*} \begin{pmatrix} A & \iota\boldsymbol{e} \\ B & \iota\boldsymbol{o} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

kde uzávěr bereme ve slabé* topologii $\sigma\big((X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#},\ X \dot{\times} \mathbb{R}\big)$ algebraického duálu $(X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#}$. Je tedy třeba dokázat, že podmínka (2) platí právě tehdy, když platí podmínka (3).

Začneme důkazem implikace „$\Rightarrow$“, která je snadná. Máme dokázat platnost podmínky (3), tj., že každé slabé* okolí bodu $(\, o \quad \iota 1\,)$ protíná $\operatorname{cone}\left(\begin{smallmatrix} A & \iota\boldsymbol{e} \\ B & \iota\boldsymbol{o} \end{smallmatrix}\right)$. Algebraický duál

$X^\#$ vybavme slabou* topologií $\sigma(X^\#, X)$ a algebraický duál $\mathbb{R}^\#$ vybavme slabou* topologií $\sigma(\mathbb{R}^\#, \mathbb{R})$. Sestavme součin $X^\# \dot{\times} \mathbb{R}^\#$ algebraických duálů $X^\#$ a $\mathbb{R}^\#$. Lehce ověříme, že sestavený prostor $X^\# \dot{\times} \mathbb{R}^\#$ a algebraický duál $(X \dot{\times} \mathbb{R})^\#$ jsou izomorfní. Dále s trochou úsilí lze nahlédnout, že prostor $X^\# \dot{\times} \mathbb{R}^\#$ vybavený součinem slabých* topologií $\sigma(X^\#, X)$ a $\sigma(\mathbb{R}^\#, \mathbb{R})$ a algebraický duál $(X \dot{\times} \mathbb{R})^\#$ vybavený slabou* topologií $\sigma\big((X \dot{\times} \mathbb{R})^\#,\, X \dot{\times} \mathbb{R}\big)$ jsou homeomorfní. (Přirozeným homeomorfním izomorfismem dosvědčujícím uvedené skutečnosti je například zobrazení $F\colon X^\# \dot{\times} \mathbb{R}^\# \to (X \dot{\times} \mathbb{R})^\#$ určené předpisem $F\binom{\varphi}{\iota t} = (\varphi \ \ \iota t)$ pro $\binom{\varphi}{\iota t} \in X^\# \dot{\times} \mathbb{R}^\#$.) Stačí tedy ověřit, že kartézský součin $U \times V$ (přesněji: množina $\big\{\, (\varphi \ \ \iota t)\,;\ \varphi \in U,\ \iota t \in V \,\big\}$) protíná $\operatorname{cone}\big(\begin{smallmatrix} A & \iota e \\ B & \iota o \end{smallmatrix}\big)$ pro každé slabé* okolí U bodu o a každé slabé* okolí V bodu $\iota 1$.

Zvolme takové okolí U bodu o a okolí V bodu $\iota 1$. Z platnosti podmínky (2) vyplývá, že slabé* okolí U protíná množinu $\operatorname{conv} A + \operatorname{cone} B$. Existují tedy přirozené číslo m, indexy $i_1, \ldots, i_m \in I$, nezáporné reálné skaláry $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ splňující $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = {}$ $= 1$ (takže přirozené číslo m je nenulové a indexová množina I je neprázdná), dále přirozené číslo n (může být i $n = 0$), indexy $j_1, \ldots, j_n \in J$ a nezáporné reálné skaláry $\mu_1, \ldots, \mu_n \geq 0$ tak, že $(\iota\lambda_1\alpha_{i_1} + \cdots + \iota\lambda_m\alpha_{i_m} + \iota\mu_1\beta_{j_1} + \cdots + \iota\mu_n\beta_{j_n}) \in U$. Důkaz implikace „$\Rightarrow$“ je tímto ukončen, protože skaláry $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_m$ byly zvoleny tak, aby $\iota\lambda_1\iota 1 + \cdots + \iota\lambda_m\iota 1 + \iota\mu_1\iota 0 + \cdots + \iota\mu_n\iota 0 = \iota 1 \in V$. (Zde $\iota\lambda_i\iota 1$ resp. $\iota\mu_j\iota 0$ je zobrazení vzniklé složením zobrazení $\iota 1$ a $\iota\lambda_i$ resp. $\iota 0$ a $\iota\mu_j$ pro $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$.)

Implikaci „$\Leftarrow$“ dokážeme nepřímo. Pro stručnost položme $C = \overline{\operatorname{conv} A + \operatorname{cone} B}^{\,*}$ a předpokládejme, že vztah (2) neplatí. Množina C je zřejmě slabě* uzavřená a konvexní. (Použili jsme dobře známou větu, že součet dvou konvexních množin (zde $\operatorname{conv} A$ a $\operatorname{cone} B$), jakož i uzávěr konvexní množiny v topologickém vektorovém prostoru je konvexní množina [65: věta 1.8 (na str. 17)], [86: věta 3.4-F (na str. 134)].) Užitím charakteristiky slabě* uzavřeného konvexního obalu podané v lemmatu 9.10 anebo přímo podle věty 9.6 o oddělitelnosti existuje bod $x \in X$ a reálné číslo $t \in \mathbb{R}$ tak, že $\varphi(x) \leq t < o(x) = 0$ pro všechna $\varphi \in C$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $t = -1$ (stačí položit $x := -t^{-1}x$). Potom $\varphi(x) \leq -1$ neboli $\varphi(-x) \geq 1$ pro všechna $\varphi \in C$. Pro libovolné reálné číslo $t \in \mathbb{R}$ položme $U_t = \{\, \varphi \in X^\#\,;\ \varphi(-x) < t \,\}$. Množina U_t je slabým* okolím bodu o duálu $X^\#$ pro každé kladné reálné číslo $t > 0$, nadto množina $U_1 = \{\, \varphi \in X^\#\,;\ \varphi(-x) < 1 \,\}$ neprotíná množinu C.

Dále položme $V = \big\{\, \iota t;\ t \in \mathbb{R}^+ \,\big\}$, kde $\mathbb{R}^+$ je množina všech kladných reálných čísel. Je zřejmé, že množina V je slabým* okolím bodu $\iota 1$ duálu $\mathbb{R}^\#$.

Nakonec zvolme libovolný bod $(\varphi \ \ \iota t) \in \operatorname{cone}\big(\begin{smallmatrix} A & \iota e \\ B & \iota o \end{smallmatrix}\big)$ tak, aby $\iota t \in V$, ekvivalentně $t > 0$. Zvolený bod vynásobený skalárem t^{-1} stále patří do uvažovaného kuželového obalu, tedy $(\iota t^{-1}\varphi \ \ \iota 1) \in \operatorname{cone}\big(\begin{smallmatrix} A & \iota e \\ B & \iota o \end{smallmatrix}\big)$, ekvivalentně $\iota t^{-1}\varphi \in \operatorname{conv} A + \operatorname{cone} B$. Tudíž $\iota t^{-1}\varphi \in C$, neboť C je (slabým*) uzávěrem množiny z předchozího vztahu. Následně $\iota t^{-1}\varphi \notin U_1$, ekvivalentně $\varphi \notin U_t$. Množina $U_t \times V$ (přesněji: množina $\big\{\, (\varphi \ \ \iota t)\,;\ \varphi \in U_t,$ $\iota t \in V \,\big\}$), která je slabým* okolím bodu $(o \ \ \iota 1)$, tedy neprotíná $\operatorname{cone}\big(\begin{smallmatrix} A & \iota e \\ B & \iota o \end{smallmatrix}\big)$. Odtud $(o \ \ \iota 1) \notin \overline{\operatorname{cone}}^{\,*}\big(\begin{smallmatrix} A & \iota e \\ B & \iota o \end{smallmatrix}\big)$. □

11.9. V nadcházející části tohoto paragrafu dokážeme infinitní varianty některých vět, kterými jsme se zabývali v § 5. Autor se formulací infinitní varianty Motzkinovy věty, lemmatu o základní dualitě v LP, Carverovy věty a Motzkinova kombinačního principu zabýval již na pobytu ve Vela Luce během posledních dvou týdnů července 2002, viz odstavec 6.3. Ve svém úsilí pak autor pokračoval až do konce srpna 2002 a některých výsledků dosáhl až v říjnu 2002. Lze tedy shrnout, že podstatné myšlenky příslušných částí předcházejícího paragrafu, § 10 (lemma 10.13 o základní dualitě v LP), tohoto paragrafu, § 11 (předcházející lemma 11.8, níže uvedená Motzkinova věta 11.11 (spolu s tvrzeními 11.14, 11.17, 11.19 a 11.21), Carverova věta 11.23 a Motzkinův kombinační princip 11.25) a následujícího paragrafu, § 12 (princip duality 12.9) pocházejí z uvedeného období srpna až října 2002. Dodejme, že jmenované výsledky jsou v této práci uvedeny prakticky v té podobě, v jaké je autor tehdy formuloval; autorovi se nepodařilo nalézt žádné podstatnější vylepšení jmenovaných výsledků.

11.10. Jakmile máme infinitní Farkasovo lemma 10.6, můžeme se ptát, zda jeho pomocí lze dokázat také další infinitní věty o alternativě. Jednou z prvních vět, kterou jsme v § 5 dokázali, byla Motzkinova věta 5.6. Infinitní verzi Motzkinovy věty uvádíme v následující větě 11.11. Důkaz části I. věty 11.11 využívá metodiku, kterou jsme shrnuli v poznámce 5.23. Místo Farkasova lemmatu 10.6 jako „spojovací článek“ uprostřed důkazu použijeme předcházející lemma 11.8, které je jeho variantou. Důkaz části II. následující věty 11.11 je založen na všeobecně známé metodě důkazu (finitní verze) Motzkinovy věty pomocí věty o oddělitelnosti.

11.11. Motzkinova věta. *Nechť X je reálný vektorový prostor. Mějme dvě indexové množiny I a J (lze vzít i $I = \emptyset$ nebo $J = \emptyset$) a ať $A\colon X \to \mathbb{R}^I$ a $B\colon X \to \mathbb{R}^J$ jsou dvě lineární zobrazení. Potom platí:*

I. *Soustava lineárních nerovnic*

$$\begin{array}{c} Ax < \boldsymbol{o}\,, \\ Bx \le \boldsymbol{o} \\ \hline \end{array} \tag{1}$$

nemá řešení právě tehdy, když

$$o \in \bigcap_{\boldsymbol{\varepsilon} \in (\mathbb{R}^+)^I} \overline{\operatorname{conv}(\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} A) + \operatorname{cone} B}^{*}. \tag{2}$$

II. *Jestliže indexová množina I je konečná – bez újmy na obecnosti $I = \{1, \dots, m\}$, kde m je konečné přirozené číslo –, potom soustava* (1) *nemá řešení právě tehdy, když*

$$o \in \operatorname{conv} A + \overline{\operatorname{cone}}^{*} B\,. \tag{3}$$

V obou částech platí, že o je nulový lineární funkcionál $o\colon X \to \mathbb{R}$ a uzávěr bereme ve slabé topologii $\sigma(X^{\#}, X)$ algebraického duálu $X^{\#}$.*

11.11.a. *Poznámka.* Část II. infinitní Motzkinovy věty 11.11 se – v rámci možností daných přístupem popsaným v § 8 – podobá Motzkinově větě 5.6 pro soustavy s konečným počtem nerovnic. Viz též poznámku 5.6.b.

11.11.b. *Poznámka.* Zatímco Farkasovo lemma 10.6 charakterizuje neřešitelnost soustavy $-\gamma(x) < 0$, $Ax \le \boldsymbol{o}$ (bloková soustava s právě jednou ostrou nerovnicí a obecně nekonečným počtem neostrých nerovnic), část II. uvedené Motzkinovy věty 11.11 charakterizuje neřešitelnost soustavy $Ax < \boldsymbol{o}$, $Bx \le \boldsymbol{o}$ (bloková soustava s libovolným konečným počtem ostrých nerovnic a obecně nekonečným počtem neostrých nerovnic). Na část II. Motzkinovy věty 11.11 tímto můžeme pohlížet jako na přímé zobecnění Farkasova lemmatu 10.6. Viz též poznámku 5.16.

11.11.c. *Důkaz.* I. Soustava $Ax < \boldsymbol{o}$, $Bx \le \boldsymbol{o}$ nemá řešení právě tehdy, když implikace

$$\begin{array}{rl} \iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} Ax + \iota \boldsymbol{e}(t) & \le \boldsymbol{o}\,, \\ Bx & \le \boldsymbol{o} \\ \hline \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad o(x) + \iota 1(t) = t \le 0$$

platí pro všechny body $\binom{x}{t} \in X \dot{\times} \mathbb{R}$ a pro všechny kladné sloupce $\boldsymbol{\varepsilon} \in (\mathbb{R}^+)^I$. Zde $\boldsymbol{e}$ je sloupcový vektor prostoru $\mathbb{R}^J$ sestavený pouze z jedniček (definice 10.1).

(Poznámka: Ačkoliv soustava ostrých nerovnic $Ax < \boldsymbol{o}$ může mít řešení, vztah $Ax + \iota \boldsymbol{e}(t) \le \boldsymbol{o}$ nemusí platit pro žádné kladné reálné číslo $t > 0$. Je tomu tak proto, že složky sloupcového vektoru Ax mohou jít k nule (tj., $\sup_{i \in I} \alpha_i(x) = 0$, předpokládáme-li

$A = (\alpha_i)_{i\in I}$, kde α_i jsou lineární funkcionály na prostoru X pro $i \in I$). Z tohoto důvodu každou ze složek sloupce Ax násobíme vhodným kladným „škálovacím koeficientem“ ε_i, abychom zajistili, že všechny složky budou od nuly „odražené“ záporným číslem, kupříkladu $\iota\varepsilon_i\alpha_i(x) \leq -1$ pro všechna $i \in I$. Jednotlivé „škálovací koeficienty“ ε_i pro $i \in I$ pak tvoří sloupec $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)_{i\in I}$, načež vztah $\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} Ax + \iota\boldsymbol{e}(t) \leq \boldsymbol{o}$ může být splněn i pro kladná t, například pro $t = 1$.)

Dle předcházejícího lemmatu 11.8 ekvivalentně platí, že $o \in \overline{\operatorname{conv}(\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} A) + \operatorname{cone} B}^*$ pro všechna $\boldsymbol{\varepsilon} \in (\mathbb{R}^+)^I$. Tím je důkaz první části proveden.

II. Implikace „$\Leftarrow$“ je triviální. Jestliže $o \in \operatorname{conv} A + \overline{\operatorname{cone}}^* B$, pak existuje $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ splňující $\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o}$ a $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{e} = 1$ takové, že $-\iota\boldsymbol{\lambda}^T A \in \overline{\operatorname{cone}}^* B$. Zde 1 je reálné číslo jedna a $\boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{e}$ je sloupcový vektor m po řadě nul a jedniček podle definice 1.57. Dle triviální části Farkasova lemmatu 10.6 pro každý bod $x \in X$ splňující $Bx \leq \boldsymbol{o}$ platí $-\iota\boldsymbol{\lambda}^T Ax \leq 0$ čili $\iota\boldsymbol{\lambda}^T Ax \geq 0$. Kdyby bod $x \in X$ řešil soustavu $Ax < \boldsymbol{o}$, $Bx \leq \boldsymbol{o}$, platilo by $\iota\boldsymbol{\lambda}^T Ax < 0$ – spor.

Zbývá dokázat implikaci „$\Rightarrow$“. Nemá-li soustava $Ax < \boldsymbol{o}$, $Bx \leq \boldsymbol{o}$ řešení a vybavíme-li prostor $\mathbb{R}^m$ eukleidovskou normou, potom množina

$$C = \{\, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m \,;\ \exists x \in X\colon\ Bx \leq \boldsymbol{o} \ \wedge\ Ax < \boldsymbol{\mu} \,\}$$

je otevřená, konvexní a $\boldsymbol{o} \notin C$, kde $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru $\mathbb{R}^m$. Podle věty o oddělitelnosti (bodu od otevřené konvexní množiny uzavřenou nadrovinou – Mazurova věta [67: věta 2.23.f]) existuje nenulový sloupcový vektor $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, splňující $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o}$, takový, že $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\mu} >$ > 0 pro všechna $\boldsymbol{\mu} \in C$. Odtud plyne $\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o}$, načež bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{e} = 1$.

Kdyby pro nějaké $x \in X$ platilo zároveň $Bx \leq \boldsymbol{o}$ i $\iota\boldsymbol{\lambda}^T Ax < 0$, pak pro dostatečně malé kladné reálné číslo $\varepsilon > 0$ stále platí $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\big(Ax + \iota\boldsymbol{e}(\varepsilon)\big) < 0$. To je ovšem spor, neboť $\big(Ax + \iota\boldsymbol{e}(\varepsilon)\big) \in C$. Pro všechna $x \in X$ splňující $Bx \leq \boldsymbol{o}$ tedy platí $-\iota\boldsymbol{\lambda}^T Ax \leq 0$. Podle Farkasova lemmatu 10.6 je $-\iota\boldsymbol{\lambda}^T A \in \overline{\operatorname{cone}}^* B$, tudíž $o \in \operatorname{conv} A + \overline{\operatorname{cone}}^* B$. □

11.12. V obecném případě o množině vystupující na pravé straně vztahu 11.11.(2) v Motzkinově větě 11.11 nemůžeme říci mnoho. Snad jenom tolik, že tato množina je slabě* uzavřená a konvexní (ježto je průnikem slabě* uzavřených a konvexních množin). V několika následujících tvrzeních proto uvedeme alespoň některé vlastnosti množiny z pravé strany vztahu 11.11.(3).

11.13. V předcházejícím paragrafu, § 10, jsme v tvrzení 10.9 dokázali, že konvexní obal konečné podmnožiny algebraického duálu je slabě* uzavřený. V následujícím tvrzení 11. .14 dokážeme, že tento obal je dokonce slabě* kompaktní.

11.14. Tvrzení. *Nechť X je reálný vektorový prostor. Zvolme přirozené číslo m (lze položit i $m = 0$) a ať $A = (\alpha_i)_{i=1}^m\colon X \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Zde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou lineární funkcionály definované na prostoru X. Potom množina*

$$\operatorname{conv} A$$

je slabě kompaktní.*

Kompaktnost posuzujeme ve slabé topologii $\sigma(X^{\#}, X)$ algebraického duálu $X^{\#}$.*

11.14.a. *Poznámka.* Právě uvedené tvrzení 11.14 už nemusí platit, když za těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ dosadíme neúplné lineárně uspořádané těleso F. To je rozdíl oproti tvrzení 10.9, které platí i v případě zcela libovolného tělesa F s lineárním uspořádáním.

11.14.b. *Důkaz.* Uvažujme lineární zobrazení $J\colon (\mathbb{R}^m)^\# \to X^\#$ určené předpisem $J(\varphi) = \varphi \circ A$ pro všechna $\varphi \in (\mathbb{R}^m)^\#$, kde $(\varphi \circ A)\colon X \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál vzniklý složením zobrazení $A\colon X \to \mathbb{R}^m$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

(Zde $(\mathbb{R}^m)^\#$ je algebraický duál levého vektorového prostoru $\mathbb{R}^m$. Protože na prostorech $(\mathbb{R}^m)^\#$ i $X^\#$ máme strukturu pravého vektorového prostoru, zobrazení J je pravé lineární zobrazení. Dále nahlédneme, že když $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, potom $\iota\boldsymbol{\lambda}^T \in (\mathbb{R}^m)^\#$. Navíc ke každému $\varphi \in (\mathbb{R}^m)^\#$ existuje právě jedno $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ tak, že $\varphi = \iota\boldsymbol{\lambda}^T$. O linearitě zobrazení $\hat{J}\colon \mathbb{R}^m \to X^\#$ definovaného předpisem $\hat{J}(\boldsymbol{\lambda}) = \iota\boldsymbol{\lambda}^T A$ pro $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ je ovšem (z formálního hlediska) těžké hovořit, protože $\mathbb{R}^m$ je levý vektorový prostor, kdežto $X^\#$ je pravý vektorový prostor. Srov. poznámku 4.22.a.)

Prostor $(\mathbb{R}^m)^\#$ vybavme slabou* topologií $\sigma\big((\mathbb{R}^m)^\#, \mathbb{R}^m\big)$ a prostor $X^\#$ vybavme slabou* topologií $\sigma(X^\#, X)$. Je snadné ověřit, že lineární zobrazení $J\colon (\mathbb{R}^m)^\# \to X^\#$ je slabě* spojité.

Navíc množina $S = \big\{\, \varphi \in (\mathbb{R}^m)^\# \,;\, \varphi(\boldsymbol{e}_1) \geq 0 \,\wedge\, \cdots \,\wedge\, \varphi(\boldsymbol{e}_m) \geq 0 \,\wedge\, \varphi(\boldsymbol{e}) = 1 \,\big\}$ je v prostoru $(\mathbb{R}^m)^\#$ slabě* kompaktní. Zde $\boldsymbol{e}_i$ je standardní jednotkový vektor s jedničkou na i-tém místě a nulami jinde pro $i = 1, \ldots, m$ a $\boldsymbol{e}$ je sloupec m jedniček, viz definici 1.57.

(Protože prostor $\mathbb{R}^m$ má konečnou dimenzi, jeho algebraický duál $(\mathbb{R}^m)^\#$ lze (s trochou „licence") ztotožnit opět s prostorem $\mathbb{R}^m$. Slabá* topologie $\sigma\big((\mathbb{R}^m)^\#, \mathbb{R}^m\big)$ na prostoru $(\mathbb{R}^m)^\#$ pak vlastně splývá s klasickou eukleidovskou topologií na $\mathbb{R}^m$. Vidíme, že množina S odpovídá simplexu $\{\, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m \,;\, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o} \,\wedge\, \iota\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{e} = 1 \,\}$, který v eukleidovské topologii je jistě kompaktní (přitom se využije úplnost tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$). Proto i množina S je slabě* kompaktní.)

K dokončení důkazu si už stačí pouze uvědomit, že $\operatorname{conv} A = J(S)$, a připomenout známé tvrzení, že spojitý obraz (slabě*) kompaktní množiny je (slabě*) kompaktní. □

11.14.c. *Jiný důkaz.* Prostor X vybavme slabou topologií $\sigma(X, X^\#)$ a jeho algebraický duál $X^\#$ vybavme slabou* topologií $\sigma(X^\#, X)$, viz definici 9.2. Položme $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_m\}$. Je zřejmé, že (zpětná) polára $\mathcal{A}^\circ = \big\{\, x \in X \,;\, \forall \alpha \in \mathcal{A}\colon\ \alpha(x) \leq 1 \,\big\}$ je slabým okolím počátku prostoru X. Protože slabá topologie je lokálně konvexní, podle Alaogluovy-Bourbakiho věty [67: věta 15.19] bipolára $\mathcal{A}^{\circ\circ} = \big\{\, \varphi \in X^\# \,;\, \forall x \in \mathcal{A}^\circ\colon \varphi(x) \leq 1 \,\big\}$ je slabě* kompaktní. Navíc podle známé věty o bipoláře (srov. [67: věta 15. .17]) platí, resp. pomocí lemmatu 9.10 lehce nahlédneme, že $\mathcal{A}^{\circ\circ} = \overline{\operatorname{conv}}^*\big(\mathcal{A} \cup \{o\}\big)$, kde o je počátek prostoru $X^\#$. Z tvrzení 10.9 víme, že množina $\operatorname{conv} A$ je slabě* uzavřená. Jelikož množina $\operatorname{conv} A = \operatorname{conv} \mathcal{A}$ je podmnožinou slabě* kompaktní množiny $\mathcal{A}^{\circ\circ}$, je rovněž slabě* kompaktní. □

11.14.d. *Poznámka.* Protože slabá* topologie $\sigma(X^\#, X)$ je Hausdorffova, ze slabé* kompaktnosti množiny $\operatorname{conv} A$ plyne i její slabá* uzavřenost. Srov. tvrzení 10.9.

11.15. V části IV. tvrzení 10.9 jsme uvedli, že konvexní obal konečné množiny je slabě* uzavřený. Toto tvrzení je možné zobecnit: rovněž součet konvexního obalu konečné množiny a slabě* uzavřeného kužele je slabě* uzavřený. Naznačené zobecnění formulujeme jako samostatné tvrzení 11.17. Část IV. tvrzení 10.9 je nyní speciálním případem tvrzení 11.17, jestliže jako slabě* uzavřený kužel volíme množinu $B = \{o\}$ obsahující pouze nulový funkcionál.

Ačkoliv součet kuželového obalu konečné množiny a slabě* uzavřeného kužele je někdy slabě* uzavřený – viz výsledek 10.17.(5) dosažený v poznámce 10.17.b – část II. (a tudíž ani části I. a III.) tvrzení 10.9 obdobným způsobem zobecnit nelze: součet lineárního (tedy ani kuželového nebo afinního) obalu konečné množiny a slabě* uzavřeného kužele obecně nemusí být slabě* uzavřený. To dokládá následující příklad 11.16 vycházející z [88: Příklad (3.1)] (popř. [67: příklad *14.7.h]).

11.16. Příklad. Uvažujme reálný Hilbertův prostor ℓ^2. (Prostor ℓ^2 je tvořen všemi posloupnostmi reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ takových, že řada $\sum_{n=1}^\infty x_n^2$ konverguje. Norma je dána předpisem $\|\{x_n\}_{n=1}^\infty\| = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty x_n^2}$ pro $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$.) Zvolme množiny

$$A = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2 \; ; \; x_2 = x_3 = x_4 = \dots = 0 \right\}$$

a

$$B = \left\{ \{y_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2 \; ; \; y_1 \geq n y_n \text{ pro } n = 2,\, 3,\, 4, \dots \right\}.$$

Vidíme, že $A = \operatorname{Lin}\{\boldsymbol{e}_1\}$, přičemž $\boldsymbol{e}_1$ je posloupnost mající na prvním místě jedničku a jinde nuly, tedy $\boldsymbol{e}_1 = \{\delta_{1n}\}_{n=1}^\infty$, kde δ_{1n} je Kroneckerův symbol. Množina A je zřejmě uzavřená. Dále snadno ověříme, že množina B je uzavřený kužel. (Množina B je průnikem množin $F_n = \{ \{y_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2 \; ; \; y_1 - n y_n \geq 0 \}$, z nichž každá je uzavřená a zároveň kužel pro $n = 2,\, 3,\, 4, \dots$)

Ukážeme, že součet množin $A+B$ je v prostoru ℓ^2 hustá množina. Zvolme libovolnou posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$ a kladné reálné číslo $\varepsilon > 0$. Najdeme přirozené číslo N tak, že $\sum_{n=N}^\infty z_n^2 < \varepsilon^2$. Předpokládejme, že $N \geq 2$ (je-li $N = 1$, položme $N := 2$). Zaveďme posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ předpisem

$$y_n = \begin{cases} \max_{k=2,3,\dots,N-1} k z_k & \text{pro } n = 1\,, \\ z_n & \text{pro } n = 2,\, 3, \dots, N-1\,, \\ 0 & \text{pro } n = N,\, N+1,\, N+2, \dots \end{cases}$$

Zřejmě je $\{y_n\}_{n=1}^\infty \in B$. Dále zaveďme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ předpisem

$$x_n = \begin{cases} z_1 - y_1 & \text{pro } n = 1\,, \\ 0 & \text{pro } n = 2,\, 3,\, 4, \dots \end{cases}$$

Zajisté platí $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in A$. Povšimněme si, že $z_1 = x_1 + y_1$ a $z_n = x_n + y_n$ pro $n = 2,\, 3, \dots$ $\dots, N-1$. Dále je $x_n + y_n = 0$ pro $n = N,\, N+1,\, N+2, \dots$ Odtud

$$\left\| \{z_n\}_{n=1}^\infty - \left(\{x_n\}_{n=1}^\infty + \{y_n\}_{n=1}^\infty\right) \right\| = \left(\sum_{n=1}^\infty \left(z_n - (x_n + y_n)\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=N}^\infty z_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon\,.$$

Každé ε-okolí (kde $\varepsilon > 0$) posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ množinu $A + B$ protíná, posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ tedy leží v uzávěru množiny $A+B$. To vzhledem k libovolné volbě posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$ znamená, že součet množin $A + B$ je v prostoru ℓ^2 hustý.

Nyní ukážeme, že součet množin $A+B$ v prostoru ℓ^2 není uzavřený. Jelikož uvedený součet je v prostoru ℓ^2 hustý, stačí najít libovolnou posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$, která do součtu $A + B$ nepatří. Pro příklad vezměme posloupnost

$$\{z_n\}_{n=1}^\infty = \left\{ \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \right\}_{n=1}^\infty .$$

Zajisté $\{z_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$ (řada $\sum_{n=1}^\infty 1/n^{4/3}$ konverguje) a, jelikož

$$\lim_{n\to\infty} n z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{\frac{2}{3}}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}} = +\infty\,,$$

posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ v součtu množin $A + B$ nemůže ležet. Součet $A + B$ – kde A je lineárním obalem konečné množiny a B je uzavřeným kuželem – tedy v prostoru ℓ^2 není uzavřený, což jsme chtěli ukázat.

11.17. Tvrzení. *Ať X je reálný vektorový prostor, nechť m je přirozené číslo a nechť J je indexová množina (může být i $m = 0$ nebo $J = \emptyset$). Budiž dána dvě lineární zobrazení $A\colon X \to \mathbb{R}^m$ a $B\colon X \to \mathbb{R}^J$. Potom množina*

$$\operatorname{conv} A + \overline{\operatorname{cone}}^* B$$

je slabě uzavřená.*

Uzavřenost posuzujeme ve slabé topologii $\sigma(X^\#, X)$ algebraického duálu $X^\#$.*

11.17.a. *Poznámka.* Uvedené tvrzení 11.17 zobecňuje část IV. tvrzení 10.9, jak jsme už v odstavci 11.15 naznačili. Abychom dostali část IV. tvrzení 10.9, stačí zde volit $J = \emptyset$, resp. za B stačí dosadit nulové lineární zobrazení.

11.17.b. *Důkaz.* Z tvrzení 11.14 víme, že množina $\operatorname{conv} A$ je slabě* kompaktní. Stačí se tedy odvolat na známé tvrzení, že součet kompaktní a uzavřené množiny v topologickém vektorovém prostoru je uzavřený [67: cvičení 13.15.c2, písmeno *1.16.b]. (Připomeňme důkaz: Nechť C a F je po řadě kompaktní a uzavřená podmnožina topologického vektorového prostoru a ať $\{x_\nu\}_\nu$ je konvergentní zobecněná posloupnost (síť) [67: appendix C] bodů množiny $C + F$. Její limitou budiž bod x. Existují tedy zobecněné posloupnosti $\{c_\nu\}_\nu$ a $\{f_\nu\}_\nu$ bodů množiny po řadě C a F takové, že $x_\nu = c_\nu + f_\nu$. Následně $c_\nu + f_\nu \to x$. Protože množina C je kompaktní, ze sítě $\{c_\nu\}_\nu$ je možné vybrat konvergentní podsíť. Bez újmy na obecnosti $\{c_\nu\}_\nu$ už je vybranou zobecněnou podposloupností konvergující k nějakému bodu $c \in C$. Pak $f_\nu \to x - c = f \in F$, protože množina F je uzavřená.) □

11.17.c. *Poznámka.* Předcházející důkaz 11.17.b se odvolal na obecné tvrzení platné v kterémkoliv topologickém vektorovém prostoru, že součet kompaktní a uzavřené množiny je uzavřený. Může být zajímavé uvést ještě jeden důkaz 11.17.d, v němž se uzavřenost součtu množin $\operatorname{conv} A + \overline{\operatorname{cone}}^* B$ v případě slabé* topologie dokazuje jiným (snad i elementárnějším) způsobem.

11.17.d. *Jiný důkaz.* Budiž dán bod $\gamma \in X^\# \setminus (\operatorname{conv} A + \overline{\operatorname{cone}}^* B)$. Nalezneme slabé* okolí bodu γ, které množinu $\operatorname{conv} A + \overline{\operatorname{cone}}^* B$ neprotíná. Na začátku (pomocí axiomu výběru) sestrojíme zobrazení $x_.\colon X^\# \to X$, které každému bodu $\alpha \in X^\#$ přiřadí bod $x_\alpha \in X$ tak, aby $\gamma(x_\alpha) > \alpha(x_\alpha)$ a současně $\beta(x_\alpha) \le 0$ pro všechna $\beta \in \overline{\operatorname{cone}}^* B$.

Zvolme tedy libovolný bod $\alpha \in \operatorname{conv} A$. Zřejmě $(\gamma - \alpha) \notin \overline{\operatorname{cone}}^* B$. Uvědomíme-li si, že množina $\overline{\operatorname{cone}}^* B$ je svým vlastním slabě* uzavřeným kuželovým obalem, $\overline{\operatorname{cone}}^* B = \overline{\operatorname{cone}}^* \overline{\operatorname{cone}}^* B$, pak podle lemmatu 9.12 či Farkasova lemmatu 10.6 existuje bod $x_\alpha \in X$ takový, že $(\gamma - \alpha)(x_\alpha) > 0$ a současně $\beta(x_\alpha) \le 0$ pro všechna $\beta \in \overline{\operatorname{cone}}^* B$.

Pro každé $\alpha \in \operatorname{conv} A$ položme $U_\alpha^+ = \{\, \varphi \in X^\# \,;\, \varphi(x_\alpha) > \big(\gamma(x_\alpha) + \alpha(x_\alpha)\big)/2 \,\}$ a $U_\alpha^- = \{\, \varphi \in X^\# \,;\, \varphi(x_\alpha) < \big(\gamma(x_\alpha) + \alpha(x_\alpha)\big)/2 \,\}$. Je snadné ověřit, že obě množiny U_α^+ a U_α^- jsou disjunktní, slabě* otevřené a že $\gamma \in U_\alpha^+$ a $\alpha \in U_\alpha^-$.

Odtud plyne, že kolekce slabě* otevřených množin $\{\, U_\alpha^- \,;\, \alpha \in \operatorname{conv} A \,\}$ pokrývá množinu $\operatorname{conv} A$, která podle tvrzení 11.14 je slabě* kompaktní. Existuje tedy přirozené číslo n a existují body $\alpha_1', \dots, \alpha_n' \in \operatorname{conv} A$ takové, že $\operatorname{conv} A \subseteq U_{\alpha_1'}^- \cup \dots \cup U_{\alpha_n'}^-$. Avšak kolekce $\{U_{\alpha_1'}^-, \dots, U_{\alpha_n'}^-\}$ nepokrývá jen množinu $\operatorname{conv} A$ – dokážeme, že pokrývá dokonce celý součet $\operatorname{conv} A + \overline{\operatorname{cone}}^* B$. Zvolme tedy body $\alpha \in \operatorname{conv} A$ a $\beta \in \overline{\operatorname{cone}}^* B$. Jelikož bod α byl pokryt, pro vhodné $j = 1, \dots, n$ máme $\alpha \in U_{\alpha_j'}^-$. Protože $\beta(x_{\alpha_j'}) \le 0$, máme rovněž $(\alpha + \beta) \in U_{\alpha_j'}^-$.

Nakonec množina $U = U_{\alpha_1'}^+ \cap \dots \cap U_{\alpha_n'}^+$ je slabým* okolím bodu γ, které neprotíná množinu $U_{\alpha_1'}^- \cup \dots \cup U_{\alpha_n'}^-$. Okolí U tudíž neprotíná ani množinu $\operatorname{conv} A + \overline{\operatorname{cone}}^* B$. □

11.17.e. *Poznámka.* Další důkaz tohoto tvrzení 11.17 lze založit na následujícím tvrzení 11.19, viz poznámku 11.19.a.

11.18. V následujícím tvrzení 11.19 dokážeme poměrně zajímavý vztah, který pro množinu z pravé straně podmínky 11.11.(3) Motzkinovy věty 11.11 platí. Stojí za povšimnutí, že v důkazu 11.19.b využijeme právě část II. Motzkinovy věty 11.11 jakož i lemma 11.8.

11.19. Tvrzení. *Nechť X je reálný vektorový prostor, ať m je přirozené číslo a ať J je indexová množina (může být i $m = 0$ nebo $J = \emptyset$). Mějme dvě lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \colon X \to \mathbb{R}^m$ a $B \colon X \to \mathbb{R}^J$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární funkcionály na prostoru X. Potom*

$$\overline{\operatorname{conv} A + \operatorname{cone} B}^* = \operatorname{conv} A + \overline{\operatorname{cone}}^* B\,,$$

přičemž uzávěry bereme ve slabé topologii $\sigma(X^\#, X)$ algebraického duálu $X^\#$.*

11.19.a. *Poznámka.* Z uvedeného tvrzení vyplývá, že množina $\operatorname{conv} A + \overline{\operatorname{cone}}^* B$ je slabě* uzavřená. Tento argument můžeme chápat jako další důkaz předcházejícího tvrzení 11. .17. Srov. výsledek 10.17.(5) v poznámce 10.17.b.

11.19.b. *Důkaz.* Mějme libovolný funkcionál $\gamma \in X^\#$ a položme $\mathcal{A} - \gamma = \{\alpha_1 - \gamma, \ldots$ $\ldots, \alpha_m - \gamma\}$. Pak zřejmě $\gamma \in \operatorname{conv} A + \overline{\operatorname{cone}}^* B$ právě tehdy, když $o \in \operatorname{conv}(\mathcal{A} - \gamma) +$ $+ \overline{\operatorname{cone}}^* B$, kde o je nulový lineární funkcionál $o \colon X \to \mathbb{R}$. Dle části II. Motzkinovy věty 11.11 ekvivalentně platí, že soustava nerovnic

$$\begin{aligned} -\iota\boldsymbol{e}\gamma(x) + Ax &< \boldsymbol{o}\,, \\ Bx &\le \boldsymbol{o}\,, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{e}$ je sloupcový vektor sestavený z m jedniček (definice 1.57) a $\iota\boldsymbol{e}\gamma \colon X \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení vzniklé složením lineárního funkcionálu $\gamma \colon X \to \mathbb{R}$ a zobrazení $\iota\boldsymbol{e} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, nemá řešení. Uvedená soustava je neřešitelná tehdy a jen tehdy, když implikace

$$\begin{aligned} -\iota\boldsymbol{e}\gamma(x) + Ax + \iota\boldsymbol{e}(t) &\le \boldsymbol{o}\,, \\ Bx \qquad\quad &\le \boldsymbol{o} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad o(x) + \iota 1(t) = t \le 0\,.$$

platí pro všechna $\binom{x}{t} \in X \dot{\times} \mathbb{R}$. Použitím lemmatu 11.8 ekvivalentně dostáváme, že $o \in \overline{\operatorname{conv}(\mathcal{A} - \gamma) + \operatorname{cone} B}^*$, ekvivalentně $\gamma \in \overline{\operatorname{conv} A + \operatorname{cone} B}^*$. □

11.19.c. *Poznámka.* Důkaz žádné inkluze („$\subseteq$“ ani „$\supseteq$“) v předcházejícím důkazu 11. .19.b není triviální. Při důkazu inkluze „$\supseteq$“ („shora dolů“) jsme v rámci důkazu 11.8.c lemmatu 11.8 použili netriviální část Farkasova lemmatu 10.6. Při důkazu inkluze „$\subseteq$“ („zdola nahoru“) jsme použili netriviální část části II. Motzkinovy věty 11.11. Může být proto zajímavé poznamenat, že s využitím předcházejícího tvrzení 11.17 lze alespoň inkluzi „$\subseteq$“ dokázat elementárním způsobem.

11.19.d. *Jiný důkaz inkluze „$\subseteq$“.* Zřejmě platí $\operatorname{cone} B \subseteq \overline{\operatorname{cone}}^* B$, proto

$$\operatorname{conv} A + \operatorname{cone} B \subseteq \operatorname{conv} A + \overline{\operatorname{cone}}^* B\,.$$

Dle předchozího tvrzení 11.17 víme, že množina $\operatorname{conv} A + \overline{\operatorname{cone}}^* B$ je slabě* uzavřená. Odtud

$$\overline{\operatorname{conv} A + \operatorname{cone} B}^* \subseteq \operatorname{conv} A + \overline{\operatorname{cone}}^* B\,,$$

čímž je důkaz proveden. □

11.20. Jak už jsme v odstavci 11.15 naznačili a jak z příkladu 11.16 vyplynulo, součet dvou slabě* uzavřených kuželů nemusí být slabě* uzavřený. Platí ale následující tvrzení 11.21.

11.21. Tvrzení. *Mějme reálný vektorový prostor X a dvě indexové množiny I a J (lze vzít také $I = \emptyset$ nebo $J = \emptyset$). Ať $A\colon X \to \mathbb{R}^I$ a $B\colon X \to \mathbb{R}^J$ jsou dvě lineární zobrazení. Potom*

$$\overline{\operatorname{cone} A + \operatorname{cone} B}^* = \overline{\overline{\operatorname{cone}}^* A + \overline{\operatorname{cone}}^* B}^* .$$

Všechny uzávěry bereme ve slabé topologii $\sigma(X^\#, X)$ algebraického duálu $X^\#$.

11.21.a. *Důkaz.* Nejprve dokážeme inkluzi „$\subseteq$“, která je snadná. Zajisté $\operatorname{cone} A \subseteq \subseteq \overline{\operatorname{cone}}^* A$ a $\operatorname{cone} B \subseteq \overline{\operatorname{cone}}^* B$. Tudíž

$$\operatorname{cone} A + \operatorname{cone} B \subseteq \overline{\operatorname{cone}}^* A + \overline{\operatorname{cone}}^* B ,$$

následně

$$\overline{\operatorname{cone} A + \operatorname{cone} B}^* \subseteq \overline{\overline{\operatorname{cone}}^* A + \overline{\operatorname{cone}}^* B}^* .$$

Zbývá dokázat inkluzi „$\supseteq$“. Je zřejmé, že množina $\operatorname{cone} A + \operatorname{cone} B$ i množina $\overline{\operatorname{cone}}^* A + \overline{\operatorname{cone}}^* B$ jsou kužely. Odtud

$$\overline{\operatorname{cone} A + \operatorname{cone} B}^* = \overline{\operatorname{cone}}^*(\operatorname{cone} A + \operatorname{cone} B) ,$$

$$\overline{\overline{\operatorname{cone}}^* A + \overline{\operatorname{cone}}^* B}^* = \overline{\operatorname{cone}}^*(\overline{\operatorname{cone}}^* A + \overline{\operatorname{cone}}^* B) .$$

Zvolme $\varphi \in \overline{\operatorname{cone}}^*(\overline{\operatorname{cone}}^* A + \overline{\operatorname{cone}}^* B)$. Dle triviální části Farkasova lemmatu 10.6 je implikace

$$\big(\forall \bar\alpha \in \overline{\operatorname{cone}}^* A \ \forall \bar\beta \in \overline{\operatorname{cone}}^* B\colon\ (\bar\alpha + \bar\beta)(x) \le 0\big) \implies \varphi(x) \le 0 \tag{1}$$

splněna pro všechna $x \in X$. (Zde 0 je reálné číslo nula.) Chceme dokázat, že $\varphi \in \in \overline{\operatorname{cone}}^*(\operatorname{cone} A + \operatorname{cone} B)$. S ohledem na netriviální část Farkasova lemmatu 10.6 stačí ověřit, že implikace

$$\big(\forall \alpha \in \operatorname{cone} A \ \forall \beta \in \operatorname{cone} B\colon\ (\alpha + \beta)(x) \le 0\big) \implies \varphi(x) \le 0 \tag{2}$$

platí pro všechna $x \in X$.

Zvolme tedy bod $x \in X$ pevně a nechť předpoklad implikace (2) je splněn. Je třeba ukázat, že $\varphi(x) \le 0$. Volba $\beta = o$ – kde o je nulový funkcionál $o\colon X \to \mathbb{R}$ – v předpokladu implikace (2) dává, že pro všechna $\alpha \in \operatorname{cone} A$ platí $\alpha(x) \le 0$. Užitím triviální části Farkasova lemmatu 10.6 odvodíme, že pro libovolné $\bar\alpha \in \overline{\operatorname{cone}}^* A = \overline{\operatorname{cone}}^* \operatorname{cone} A$ musí platit $\bar\alpha(x) \le 0$. Obdobně volba $\alpha = o$ dává $\beta(x) \le 0$ pro všechna $\beta \in \operatorname{cone} B$, načež pomocí triviální části Farkasova lemmatu 10.6 dostáváme, že pro kterékoliv $\bar\beta \in \overline{\operatorname{cone}}^* B = = \overline{\operatorname{cone}}^* \operatorname{cone} B$ je $\bar\beta(x) \le 0$. Shrňme tedy, že pro každé $\bar\alpha \in \overline{\operatorname{cone}}^* A$ a každé $\bar\beta \in \overline{\operatorname{cone}}^* B$ platí $\bar\alpha(x) \le 0$ a $\bar\beta(x) \le 0$, tudíž $(\bar\alpha + \bar\beta)(x) \le 0$. Vidíme, že je splněn předpoklad implikace (1), s jejíž pomocí nyní odvodíme $\varphi(x) \le 0$, což jsme měli dokázat. □

11.22. Další větou o alternativě, kterou jsme se v § 5 zabývali, byla Carverova věta 5.8. K důkazu následující infinitní Carverovy věty 11.23 opět využijeme metodiku shrnutou v poznámce 5.23.

11.23. Carverova věta. *Ať X je reálný vektorový prostor a ať J je indexová množina (lze zvolit i $J = \emptyset$). Budiž dáno lineární zobrazení $A\colon X \to \mathbb{R}^J$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^J$. Potom soustava ostrých lineárních nerovnic*

$$Ax < \boldsymbol{b} \tag{1}$$

nemá řešení právě tehdy, když

$$(\,o \quad \iota 0\,) \in \bigcap_{\boldsymbol{\varepsilon} \in (\mathbb{R}^+)^J} \overline{\operatorname{conv}}^* \begin{pmatrix} \iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} A & \iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \iota \boldsymbol{b} \\ o & \iota 1 \end{pmatrix} , \tag{2}$$

kde o je nulový lineární funkcionál $o\colon X \to \mathbb{R}$, k tomu 0 a 1 je reálné číslo po řadě nula a jedna a uzávěr bereme ve slabé topologii $\sigma\big((X \dot\times \mathbb{R})^\#,\, X \dot\times \mathbb{R}\big)$ algebraického duálu $(X \dot\times \mathbb{R})^\#$.*

11.23.a. *Poznámka.* Doplňme, že $\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \iota \boldsymbol{b} = \iota(\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{b})\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^J$ (srov. pravidlo 1.41.(4) z poznámky 1.41) je lineární zobrazení vzniklé složením zobrazení $\iota \boldsymbol{b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^J$ a $\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}}\colon \mathbb{R}^J \to$ $\to \mathbb{R}^J$.

11.23.b. *Poznámka.* Použití množiny $\overline{\mathrm{conv}}^*\left(\begin{smallmatrix} \iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} A & \iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \iota \boldsymbol{b} \\ o & \iota 1 \end{smallmatrix}\right)$ vzhledem k přítomnosti řádku $(\, o \quad \iota 1 \,)$ nahrazuje jistý druh kuželového obalu. Srov. Carverovu větu 5.8.

11.23.c. *Důkaz.* Soustava $Ax < \boldsymbol{b}$ nemá řešení právě tehdy, když soustava

$$\begin{array}{r} Ax - \iota \boldsymbol{b}(t) < \boldsymbol{o}\,, \\ o(x) - \iota 1(t) < 0 \\ \hline \end{array}$$

nemá řešení, kde $t \in \mathbb{R}$ je nová proměnná. Podle části I. Motzkinovy věty 11.11 ekvivalentně platí

$$(\, o \quad \iota 0 \,) \in \bigcap_{\boldsymbol{\varepsilon} \in (\mathbb{R}^+)^J} \overline{\mathrm{conv}}^* \begin{pmatrix} \iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} A & -\iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \iota \boldsymbol{b} \\ o & -\iota 1 \end{pmatrix},$$

což je ekvivalentní s podmínkou (2). □

11.24. V § 5 jsme uvedli rovněž Motzkinův kombinační princip 5.27. Důkaz jeho infinitní verze 11.25 je opět založen na metodice z poznámky 5.23.

11.25. Motzkinův kombinační princip. *Ať X je reálný vektorový prostor. Mějme dvě indexové množiny I a J (lze vzít i $I = \emptyset$ nebo $J = \emptyset$). Nechť $A\colon X \to \mathbb{R}^I$ a $B\colon X \to \mathbb{R}^J$ jsou dvě lineární zobrazení a ať $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^I$ a $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^J$ jsou dva sloupcové vektory. Pak platí:*

I. *Soustava lineárních nerovnic*

$$\begin{array}{r} Ax < \boldsymbol{c}\,, \\ Bx \le \boldsymbol{d} \\ \hline \end{array} \tag{1}$$

nemá řešení právě tehdy, když

$$(\, o \quad \iota 0 \,) \in \bigcap_{\boldsymbol{\varepsilon} \in (\mathbb{R}^+)^I} \overline{\mathrm{conv} \begin{pmatrix} \iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} A & \iota I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \iota \boldsymbol{c} \\ o & \iota 1 \end{pmatrix} + \mathrm{cone}\,(\, B \quad \iota \boldsymbol{d} \,)}^{\,*}\,. \tag{2}$$

II. *Jestliže indexová množina I je konečná, potom soustava* (1) *nemá řešení právě tehdy, když*

$$(\, o \quad \iota 0 \,) \in \mathrm{conv} \begin{pmatrix} A & \iota \boldsymbol{c} \\ o & \iota 1 \end{pmatrix} + \overline{\mathrm{cone}}^*\,(\, B \quad \iota \boldsymbol{d} \,)\,. \tag{3}$$

V obou částech platí, že o je nulový lineární funkcionál $o\colon X \to \mathbb{R}$, dále 0 *a* 1 *je reálné číslo po řadě nula a jedna a uzávěr bereme ve slabé* topologii $\sigma\big((X \dot{\times} \mathbb{R})^\#,\, X \dot{\times} \mathbb{R}\big)$ algebraického duálu $(X \dot{\times} \mathbb{R})^\#$.*

11.25.a. *Poznámka.* Je zajímavé se vrátit k Motzkinovu kombinačnímu principu 5.27 pro soustavy s konečným počtem nerovnic a porovnat jej s jeho právě uvedenou infinitní verzí. (Viz též poznámku 11.23.b.)

11.25.b. *Důkaz.* Soustava $Ax < \boldsymbol{c}$, $Bx \le \boldsymbol{d}$ nemá řešení právě tehdy, když soustava

$$\begin{array}{r} o(x) - \iota 1(t) < 0\,, \\ Ax - \iota \boldsymbol{c}(t) < \boldsymbol{o}\,, \\ Bx - \iota \boldsymbol{d}(t) \le \boldsymbol{o} \\ \hline \end{array}$$

nemá řešení, kde $t \in \mathbb{R}$ je nová proměnná. K dokončení důkazu stačí použít Motzkinovu větu 11.11 a provést několik drobných ekvivalentních úprav. □

11.26. Poznámka. Další infinitní věty o alternativě. Část I. Pomocí metodiky shrnuté v poznámce 5.23 lze dokázat také další infinitní věty o alternativě, jako například infinitní verzi Daxovy věty 5.20, Tuckerovy věty 5.12, věty 5.29 (která Tuckerovu větu 5.12 zobecňuje) nebo věty 5.32 (která zobecňuje zmíněnou větu 5.29 i Motzkinův kombinační princip 5.27). Pro příklad v následujících dvou větách 11.27 a 11.29 uvedeme pouze (jednodušší) infinitní verzi Daxovy věty 5.20 a věty 5.32.

11.27. Daxova věta. *Nechť X je reálný vektorový prostor, dále ať J je indexová množina a n je přirozené číslo (může být i $J = \emptyset$ nebo $n = \emptyset$). Mějme dvě lineární zobrazení $A\colon X \to \mathbb{R}^J$ a $B\colon X \to \mathbb{R}^n$ a nezáporný vektor vah $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$, splňující $\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{o}$, kde $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru $\mathbb{R}^n$. K tomu budiž dán lineární funkcionál $\gamma\colon X \to \mathbb{R}$. Potom implikace*

$$Ax \leq \boldsymbol{o} \implies \gamma(x) \leq \iota \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} |Bx|$$

platí pro všechna $x \in X$ právě tehdy, když

$$\exists \boldsymbol{v},\ -\boldsymbol{w} \leq \boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{w}\colon\ \gamma - \iota \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} B \in \overline{\mathrm{cone}}^{*} A\,,$$

kde $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, dále $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru $\mathbb{R}^J$ a uzávěr bereme ve slabé topologii $\sigma(X^{\#}, X)$ algebraického duálu $X^{\#}$.*

11.28. Daxovu větu 11.27 uvádíme bez důkazu, protože její důkaz by byl obdobou důkazu 5.20.b Daxovy věty 5.20.

11.29. Věta. *Ať X je reálný vektorový prostor, dále mějme dvě přirozená čísla m a n a indexovou množinu J (lze vzít i $m = 0$ nebo $n = 0$ nebo $J = \emptyset$). Nechť $A\colon X \to \mathbb{R}^m$, dále $B\colon X \to \mathbb{R}^n$ a $\varGamma\colon X \to \mathbb{R}^J$ jsou tři lineární zobrazení, k tomu ať $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m$, dále $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^J$ jsou tři sloupcové vektory. Potom soustava*

$$\begin{aligned} Ax &< \boldsymbol{c}\,,\\ Bx &\leq \boldsymbol{d}\,,\\ Bx &\neq \boldsymbol{d}\,,\\ \varGamma x &\leq \boldsymbol{f} \end{aligned}$$

nemá řešení právě tehdy, když

$$\exists \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{o} \ \vee\ \mu \neq 0 \ \vee\ \nu \neq 0\colon$$
$$\big(\,(-\iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}A - \iota\mu\iota\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}B) \quad (-\iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\iota\boldsymbol{c} - \iota\mu\iota\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\iota\boldsymbol{d} - \iota\nu\iota 1)\,\big) \in \overline{\mathrm{cone}}^{*} \begin{pmatrix} B & \iota\boldsymbol{d} \\ \varGamma & \iota\boldsymbol{f} \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ a $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, dále $\boldsymbol{e}$ je sloupec n jedniček, k tomu 1 je reálné číslo jedna a uzávěr bereme ve slabé topologii $\sigma\big((X \dot\times \mathbb{R})^{\#}, X \dot\times \mathbb{R}\big)$ algebraického duálu $(X \dot\times \mathbb{R})^{\#}$.*

11.29.a. *Poznámka.* Význam sloupcového vektoru $\boldsymbol{e}$ je určen definicí 1.57. Doplňme, že $\big(\,(-\iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}A - \iota\mu\iota\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}B) \ \ (-\iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\iota\boldsymbol{c} - \iota\mu\iota\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\iota\boldsymbol{d} - \iota\nu\iota 1)\,\big)\colon X \dot\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zobrazení vzniklé direktním součtem zobrazení $(-\iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}A - \iota\mu\iota\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}B)\colon X \to \mathbb{R}$ a $(-\iota\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\iota\boldsymbol{c} - \iota\mu\iota\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\iota\boldsymbol{d} - \iota\nu\iota 1)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dle definice 1.53.

11.29.b. *Poznámka.* Zajisté platí $\overline{\mathrm{cone}}^{*}\big(\begin{smallmatrix} B & \iota\boldsymbol{d} \\ \varGamma & \iota\boldsymbol{f} \end{smallmatrix}\big) = \overline{\mathrm{cone}(B \ \ \iota\boldsymbol{d}) + \mathrm{cone}(\varGamma \ \ \iota\boldsymbol{f})}^{*}$. Vztah $\overline{\mathrm{cone}(B \ \ \iota\boldsymbol{d}) + \mathrm{cone}(\varGamma \ \ \iota\boldsymbol{f})}^{*} = \mathrm{cone}(B \ \ \iota\boldsymbol{d}) + \overline{\mathrm{cone}}^{*}(\varGamma \ \ \iota\boldsymbol{f})$ ovšem platit nemusí, přestože množina $\mathrm{cone}(B \ \ \iota\boldsymbol{d})$ je podle části I. tvrzení 10.9 slabě* uzavřená. Stačí se odvolat na příklad 11.16.

11.30. Také důkaz právě uvedené věty 11.29 by se provedl obdobně jako důkaz 5.32.c věty 5.32, proto jej neuvádíme.

11.31. Poznámka. Další infinitní věty o alternativě. Část II. Infinitní verzi Tuckerovy věty 5.12 ani infinitní verzi věty 5.29 (která Tuckerovu větu 5.12 zobecňuje) zde neuvádíme. Bylo by zbytečné tak činit. Jednak lze (jednodušší) infinitní verze zmíněných vět snadno odvodit, jednak jsou tyto verze důsledkem uvedené věty 11.29 (jako v poznámce 5.32.b).

11.32. Poznámky. Další infinitní věty o alternativě. Část III. Srovnáním právě uvedené Daxovy věty 11.27 a věty 11.29 s odpovídající Daxovou větou 5.20 a větou 5.32 (a srovnáním infinitního Farkasova lemmatu 10.6 a lemmatu 10.13 o základní dualitě v LP s Farkasovým lemmatem 4.15 a lemmatem 4.21) je patrné, že odvozování infinitních vět o alternativě (užitím metodiky shrnuté v poznámce 5.23) nečiní problém, dokud je nekonečný pouze počet neostrých lineárních nerovnic: zhruba lze říci, že v dané větě o alternativě namísto kuželové kombinace použijeme slabě* uzavřený kuželový obal. Vidíme, že tento dosažený závěr je v souladu s přístupem objasněným v § 8 (úvaha 8.3). K vážnějším problémům nedojde ani tehdy, když také počet ostrých lineárních nerovnic bude nekonečný: pouze bude třeba použít část I. Motzkinovy věty 11.11, takže podmínka charakterizující neřešitelnost dané infinitní soustavy se zkomplikuje. Potíže nastanou až tehdy, kdy počet neostrých nerovnic, z nichž alespoň jedna má platit jako ne-rovnost, např. ve větě 11.29, má být nekonečný; rovněž požadavek, aby zobrazení B a váhový vektor $\boldsymbol{w}$ v Daxově větě 11.27 měly nekonečný počet složek, vede k nesnázím. Tyto potíže rozebereme podrobněji v následujících dvou poznámkách 11.32.a a 11.32.b.

11.32.a. Napřed se budeme věnovat Daxově větě 11.27. Mějme reálný vektorový prostor X, indexové množiny I a J (lze vzít i $I = \emptyset$ nebo $J = \emptyset$), lineární zobrazení $A\colon X \to \mathbb{R}^I$, dále lineární funkcionály $\beta_j\colon X \to \mathbb{R}$ pro $j \in J$, nezáporný sloupcový vektor $\boldsymbol{w} = (w_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J$ a lineární funkcionál $\gamma\colon X \to \mathbb{R}$. Obdobně jako v (jednodušší) infinitní Daxově větě 11.27 bychom chtěli uvést podmínku nutnou a postačující k tomu, aby implikace

$$Ax \le \boldsymbol{o} \implies \gamma(x) \le \sum_{j\in J} \iota w_j \big|\beta_j(x)\big|$$

platila pro všechna $x \in X$. Nyní máme zřejmý problém: součet $\sum_{j\in J} \iota w_j \big|\beta_j(x)\big|$ může obsahovat nekonečný počet nenulových členů, a proto nemusí být proveditelný (může divergovat k $+\infty$).

Jako jedno řešení uvedeného problému se nabízí předpokládat, že vektor $\boldsymbol{w}$ má pouze konečný počet nenulových složek. Tím bychom se ale vrátili k Daxově větě 11. .27. Namísto toho budeme předpokládat, že v každém bodě $x \in X$ je nenulový jen konečný počet lineárních funkcionálů β_j, kde $j \in J$ (a dovolíme, aby vektor $\boldsymbol{w}$ obsahoval i nekonečný počet nenulových složek). Pro stručnost položme $\bar V = \coprod_{j\in J} \mathbb{R}_j$, kde $\mathbb{R}_j$ je aditivní grupa tělesa $\mathbb{R}$ pro $j \in J$ (definice 1.52). Budeme tedy pracovat s lineárním zobrazením $B = (\beta_j)_{j\in J}\colon X \to \bar V$, které sice je součinem lineárních funkcionálů β_j, kde $j \in J$ (definice 1.53), avšak jeho obor hodnot leží v prostoru $\bar V$, tedy $\operatorname{Rng} B \subseteq$ $\subseteq \bar V$. Na prostoru $\bar V$ (dokonce na celém prostoru $\mathbb{R}^J$) můžeme obvyklým způsobem zavést absolutní hodnotu sloupcového vektoru (srov. definici 5.18). Zobrazení $B\colon X \to$ $\to \bar V$ pak můžeme složit s absolutní hodnotou $|\cdot|\colon \bar V \to \bar V$, čímž dostaneme zobrazení $|B|\colon X \to \bar V$. Nyní uvažme, že s každou složkou w_j sloupcového vektoru $\boldsymbol{w}$ je asociováno zobrazení $\iota w_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro $j \in J$ (definice 1.39). Můžeme tedy sestavit direktní součet (definice 1.53) těchto zobrazení a položit $\iota \boldsymbol{w}^T = (\iota w_j)^T_{j\in J}$. Dříve získané zobrazení $|B|\colon X \to \bar V$ a zobrazení $\iota \boldsymbol{w}^T\colon \bar V \to \mathbb{R}$ můžeme opět složit. Vidíme, že pro každé $x \in X$ platí vztah $\iota \boldsymbol{w}^T |Bx| = \sum_{j\in J} \iota w_j \big|\beta_j(x)\big|$. Uvedený součet obsahuje pouze konečný počet nenulových členů a jen těchto konečně mnoho členů je třeba sečíst.

Máme-li tedy lineární zobrazení $B\colon X \to \bar{V}$, už se můžeme ptát, kdy implikace

$$Ax \le \boldsymbol{o} \implies \gamma(x) \le \iota \boldsymbol{w}^T |Bx| \tag{1}$$

platí pro všechna $x \in X$. Položme $Z = \{\, \boldsymbol{\zeta} = (\zeta_j)_{j\in J} \in \bar{V}\ ;\ \zeta_j = 1$ nebo $\zeta_j = -1$ nebo $\zeta_j = 0$ pro $j \in J \,\}$. Máme-li $\boldsymbol{\zeta} \in Z$, pak zobrazení $\iota I_{\boldsymbol{\zeta}}$ (definice 11.4) je sice definováno na celém prostoru $\mathbb{R}^J$ a jde do prostoru $\mathbb{R}^J$, avšak pro $\boldsymbol{\lambda} \in \bar{V}$ zřejmě platí $(\iota I_{\boldsymbol{\zeta}} \boldsymbol{\lambda}) \in \bar{V}$. Nyní způsobem obdobným jako v důkazu 5.20.b Daxovy věty 5.20 odvodíme, že implikace (1) platí pro každé $x \in X$ právě tehdy, když

$$\gamma \in \bigcap_{(\varepsilon_{\boldsymbol{\zeta}})_{\boldsymbol{\zeta}\in Z} \in (\mathbb{R}^+)^Z} \overline{\operatorname{conv}\{\, \iota\varepsilon_{\boldsymbol{\zeta}} \iota \boldsymbol{w}^T \iota I_{\boldsymbol{\zeta}} B\ ;\ \boldsymbol{\zeta} \in Z \,\} + \operatorname{cone} A}^{*}, \tag{2}$$

kde o je nulový lineární funkcionál $o\colon X \to \mathbb{R}$. Vidíme, že množinu Z používáme zároveň jako indexovou množinu, jejímiž prvky jsou indexovány složky sloupce $(\varepsilon_{\boldsymbol{\zeta}})_{\boldsymbol{\zeta}\in Z} \in (\mathbb{R}^+)^Z$. Poznamenejme, že $\iota\varepsilon_{\boldsymbol{\zeta}} \iota \boldsymbol{w}^T \iota I_{\boldsymbol{\zeta}} B\colon X \to \mathbb{R}$ je zobrazení vzniklé složením zobrazení $B\colon X \to \bar{V}$, dále $\iota I_{\boldsymbol{\zeta}}\colon \bar{V} \to \bar{V}$ (vzniklého zúžením definičního oboru zobrazení $\iota I_{\boldsymbol{\zeta}}\colon \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^J$), k tomu $\iota \boldsymbol{w}^T\colon \bar{V} \to \mathbb{R}$ a $\iota\varepsilon_{\boldsymbol{\zeta}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro $\boldsymbol{\zeta} \in Z$. Navíc pro $\boldsymbol{\zeta} \in Z$ zřejmě platí $\iota\varepsilon_{\boldsymbol{\zeta}} \iota \boldsymbol{w}^T \iota I_{\boldsymbol{\zeta}} B = \sum_{j\in J} \iota(\zeta_j w_j \varepsilon_{\boldsymbol{\zeta}})\beta_j$. Uvedený součet probíhá v algebraickém duálu $X^{\#}$ a obsahuje pouze konečný počet nenulových funkcionálů, které je třeba sečíst.

11.32.b. Nyní se zaměříme na infinitní variantu Stiemkeho věty 5.10. (Objasněme, že Stiemkeho větu 5.10 volíme pouze pro jednoduchost. Zcela obdobně bychom se mohli věnovat také obecné infinitní verzi Tuckerovy věty 5.12 nebo věty 5.29, případně dalšímu zobecnění věty 11.29.) Nechť tedy X je reálný vektorový prostor a J je indexová množina (lze zvolit i $J = \emptyset$). Mějme lineární funkcionály $\alpha_j\colon X \to \mathbb{R}$ pro $j \in J$. Ptejme se, zda existuje alespoň jedno $x \in X$ takové, aby

$$\begin{aligned} \alpha_j(x) &\le 0 \qquad \text{pro všechna } j \in J \text{ a} \\ \alpha_{j_0}(x) &\ne 0 \qquad \text{pro alespoň jedno } j_0 \in J. \end{aligned} \tag{3}$$

Z metodiky shrnuté v poznámce 5.23 víme, že bod $x \in X$ vyhovuje podmínkám (3) právě tehdy, když $\alpha_j(x) \le 0$ pro všechna $j \in J$ a $\sum_{j\in J} \alpha_j(x) < 0$. Aby uvedený součet byl proveditelný (nedivergoval k $-\infty$), budeme předpokládat, že v každém bodě $x \in X$ je nenulových pouze konečně mnoho lineárních funkcionálů α_j, kde $j \in J$. Jako v předcházející poznámce 11.32.a pro stručnost položme $\bar{V} = \coprod_{j\in J} \mathbb{R}_j$, kde $\mathbb{R}$ je aditivní grupa tělesa $\mathbb{R}$ pro $j \in J$, a budeme pracovat s lineárním zobrazením $A = (\alpha_j)_{j\in J}\colon X \to \bar{V}$. Nadto můžeme položit $\iota \boldsymbol{e}^T = (\iota 1)^T_{j\in J}$, kde 1 je reálné číslo jedna (jde o direktní součet zobrazení $\iota e_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $e_j = 1$ pro $j \in J$, podle definice 1.53). Vidíme, že lineární zobrazení $A\colon X \to \bar{V}$ a $\iota \boldsymbol{e}^T\colon \bar{V} \to \mathbb{R}$ lze složit. Pomocí Farkasova lemmatu 10.6 (a metodiky z poznámky 5.23) nyní snadno odvodíme, že soustava $Ax \le \boldsymbol{o}$, $Ax \ne \boldsymbol{o}$ nemá řešení právě tehdy, když

$$-\iota \boldsymbol{e}^T A \in \overline{\operatorname{cone}}^{*} A\,. \tag{4}$$

Podmínky odvozené v případě obecné infinitní verze Tuckerovy věty 5.12, věty 5.29 nebo zobecnění věty 11.29 by byly složitější, avšak společný problém a jeho řešení by zůstal: lineární funkcionály tvořící blok neostrých lineárních nerovnic, z nichž alespoň jedna má platit ostře, musí splňovat podmínku, že v každém bodě $x \in X$ má nenulovou hodnotu jen konečně mnoho z nich.

11.33. Dosažené výsledky. Uvedli jsme infinitní verze řady známých vět o alternativě, kterými jsme se zabývali už v § 5. Jmenovitě jde o infinitní Motzkinovu větu 11.11, infinitní Carverovu větu 11.23, infinitní Motzkinův kombinační princip 11.25, (jednodušší) infinitní Daxovu větu 11.27 (jejíž obecnou infinitní verzí jsme se zabývali v poznámce 11. .32.a) a o větu 11.29. Autorovi není známo, že by infinitní věty o alternativě ve tvaru, který je v této práci uveden, byly v literatuře publikovány. Při důkazech uvedených infinitních vět o alternativě jsme navíc hojně využívali metodiku shrnutou v poznámce 5.23, což můžeme chápat jako další potvrzení její užitečnosti. V poznámkách 11.26 a 11.31 jsme se pokusili objasnit, jakým způsobem je možné formulovat infinitní verze vět o alternativě, které jsme v tomto paragrafu, § 11, neuváděli (jde o infinitní verzi Tuckerovy věty 5.12, která zobecňuje Stiemkeho větu 5.10, a infinitní verzi věty 5.29). V poznámkách 11.32 (zejm. v poznámce 11.32.b) jsme se zabývali problémy, které nekonečná soustava typu $Ax \leq \boldsymbol{b}$, $Ax \neq \boldsymbol{b}$ při formulování obecné infinitní verze neuvedených vět o alternativě (a zobecnění Motzkinova kombinačního principu 11.25) způsobuje, a ukázali jsme, jak tyto problémy můžeme vyřešit. Kromě infinitních vět o alternativě jsme se v tomto paragrafu, § 11, zabývali vlastnostmi (slabě*) uzavřených konvexních množin (lemma 11.8 a tvrzení 11.14, 11.17, 11.19 a 11.21). Modifikací původního Tukeyova příkladu [88: Příklad (3.1)] (popř. [67: příklad *14.7.h]) jsme v příkladu 11.16 ukázali, že součet jednorozměrného podprostoru a (slabě*) uzavřeného kužele nemusí být (slabě*) uzavřený ani v Hilbertově prostoru.

§ 12 Teorie duality infinitního lineárního programování

12.1. V předcházející, první kapitole, zejména v § 6, jsme se zabývali úlohami lineárního programování s konečným počtem lineárních omezení v (obecně) nekonečněrozměrných prostorech. Připomeňme, že hlavním výsledkem § 6 byl princip duality 6.15. Je zajímavé se ptát, zda podobného (resp. vůbec nějakého) výsledku lze dosáhnout v případě, že rovněž počet lineárních omezení primární úlohy LP je nekonečný.

12.2. Úvaha. Formulace úlohy infinitního lineárního programování. Část I. Formulovat úlohu lineárního programování s (obecně) nekonečným počtem lineárních omezení v (obecně) nekonečněrozměrném vektorovém prostoru je vcelku snadné: Nechť X je reálný vektorový prostor, dále mějme indexovou množinu J (může být i $J = \emptyset$) a lineární zobrazení $A\colon X \to \mathbb{R}^J$. K tomu mějme sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^J$ a lineární funkcionál $\gamma\colon X \to \mathbb{R}$. Chceme nalézt co největší hodnotu, které cílový funkcionál γ na množině $M = \{\, x \in X \; ; \; Ax \leq \boldsymbol{b} \,\}$ může nabývat. V následujícím příkladu 12.3 ale ukážeme, že když počet lineárních omezení je nekonečný, potom cílový funkcionál γ své maximální hodnoty na množině M nemusí nabývat – nemusí existovat žádné $x^* \in M$ tak, aby $\gamma(x) \leq \gamma(x^*)$ pro všechna $x \in M$.

12.3. Příklad. V dvojrozměrném „základním“ vektorovém prostoru $X = \mathbb{R}^2$ uvažujme množinu $M = \{\, \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \geq 0 \; \wedge \; xy \leq -1 \,\}$. Vidíme, že množina M leží ve IV. kvadrantu a je ohraničena dolní větví hyperboly $y = -1/x$. Poznamenejme, že množinu M lze popsat také jako průnik nekonečného (dokonce jen spočetného) počtu polorovin. Když $y = -1/x$ chápeme jako funkci proměnné x, potom její derivace je $y' = 1/x^2$ pro $x \neq 0$. Rovnice tečny ke grafu funkce $y = -1/x$ procházející bodem o nenulové abscise x_0 je tedy $y = x/x_0^2 - 2/x_0$. Odtud plyne, že $M = \{\, \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \forall z \in \mathbb{Q}^+\colon \, y \leq x/z^2 - 2/z \,\}$, kde $\mathbb{Q}^+$ je množina všech kladných racionálních čísel. Nyní hledejme bod $\binom{x}{y} \in M$, jehož souřadnice y je maximální. Žádný takový bod $\binom{x}{y} \in M$ ale neexistuje. Vidíme však, že supremum všech hodnot y pro $\binom{x}{y} \in M$ je nula 0.

12.4. Úvaha. Formulace úlohy infinitního lineárního programování. Část II. Uvážíme-li předcházející příklad 12.3, vidíme, že hledat maximum cílového funkcionálu úlohy lineárního programování, jež může mít nekonečně mnoho lineárních omezení, obecně nemá smysl – cílový funkcionál své maximální hodnoty nemusí nabývat. Z tohoto důvodu se spokojíme pouze s hledáním suprema cílového funkcionálu. Primární úlohu infinitního lineárního programování tedy formulujeme následovně:

$$\begin{aligned} \gamma(x) &\longrightarrow \sup \\ Ax &\leq \boldsymbol{b}\,, \end{aligned}$$

kde $A\colon X \to \mathbb{R}^J$ je lineární zobrazení, dále $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^J$ je sloupcový vektor a $\gamma\colon X \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál, přičemž X je reálný vektorový prostor a J je indexová množina.

Nějakým způsobem bychom ale rádi formulovali duální úlohu. Použijeme přístup vyložený v § 8 (v úvaze 8.4). Za prvé se musíme ptát, zda duální úloha, jíž se právě snažíme formulovat, je přípustná. To znamená, že cílový funkcionál γ by měl ležet v kuželovém obalu podmínek A. Vzhledem k našim znalostem z předcházejících dvou paragrafů, § 10 a § 11, lze soudit, že příslušný kuželový obal by měl být slabě* uzavřený. Proto by měla existovat zobecněná posloupnost (síť) koeficientů kuželových kombinací taková, že po jejím aplikování na podmínky A dostaneme zobecněnou posloupnost funkcionálů slabě* konvergující k funkcionálu γ. Za druhé tutéž zobecněnou posloupnost koeficientů kuželových kombinací musíme aplikovat na sloupcový vektor pravých stran $\boldsymbol{b}$, čímž dostaneme zobecněnou posloupnost reálných čísel. Konverguje-li tato posloupnost (v klasické eukleidovské topologii na $\mathbb{R}$), její limita je hodnotou cílové funkce duální úlohy, kterou chceme minimalizovat.

Vezmeme-li v úvahu lemma 10.13 o základní dualitě v LP a poznámku 10.14, napadne nás, že tvar duální úlohy by mohl být následující:

$$\begin{aligned} z &\longrightarrow \min \\ (\,\gamma \quad \iota z\,) &\in \overline{\mathrm{cone}}^{*}\,(\,A \quad \iota\boldsymbol{b}\,)\ , \end{aligned}$$

kde uzávěr bereme ve slabé* topologii $\sigma\big((X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#},\, X \dot{\times} \mathbb{R}\big)$ algebraického duálu $(X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#}$. Připomeňme, že $\iota z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je pravá homotetie aditivní grupy tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ určená reálným číslem z (definice 1.39) a že – je-li $\boldsymbol{b} = (b_j)_{j \in J}$ – zobrazení $\iota\boldsymbol{b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^J$ je dáno předpisem $\iota\boldsymbol{b}(t) = (tb_j)_{j \in J}$ pro $t \in \mathbb{R}$ (definice 10.1, srov. definici 1.59).

12.5. Poznámka. Nechť X je reálný vektorový prostor a J je libovolná indexová množina (může být i $J = \emptyset$). Ať $A\colon X \to \mathbb{R}^J$ je lineární zobrazení a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^J$ je sloupcový vektor. K tomu mějme lineární funkcionál $\gamma\colon X \to \mathbb{R}$. Jak jsme v předcházející úvaze 12.4 naznačili, v celém tomto paragrafu se budeme zabývat následující primární úlohou infinitního lineárního programování (vlevo) a úlohou k ní duální (vpravo), kde $x \in X$ a $z \in \mathbb{R}$ jsou proměnné:

$$\text{(P)} \qquad \begin{aligned} \gamma(x) &\longrightarrow \sup \\ Ax &\leq \boldsymbol{b}\,, \end{aligned} \qquad\qquad \text{(D)} \qquad \begin{aligned} z &\longrightarrow \min \\ (\,\gamma \quad \iota z\,) &\in \overline{\mathrm{cone}}^{*}\,(\,A \quad \iota\boldsymbol{b}\,)\ , \end{aligned}$$

přičemž uzávěr bereme ve slabé* topologii $\sigma\big((X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#},\, X \dot{\times} \mathbb{R}\big)$ algebraického duálu $(X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#}$.

Nahlédněme, že obě úlohy (P) a (D) jsou speciálním případem obecné úlohy optimalizace dle definice 4.18.

Abychom dostali primární úlohu (P), v definici 4.18 stačí položit $\bar{M} = X$, dále $M = \{\, x \in X \;;\; Ax \leq \boldsymbol{b} \,\}$, k tomu $N = \mathbb{R}$ a $f = \gamma$. Primární úloha (P) je variantou obecné úlohy optimalizace, protože hledáme pouze supremum cílového funkcionálu γ.

V případě duální úlohy (D) je situace složitější. Vyjdeme z předcházející úvahy 12.4, viz též poznámku 10.14. Obecně lze říci, že $(\,\gamma \quad \iota z\,) \in \overline{\mathrm{cone}}^{*}(\,A \quad \iota\boldsymbol{b}\,)$ právě tehdy, když existuje nějaká zobecněná posloupnost (síť) bodů množiny $\operatorname{cone}(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)$ konvergující ve slabé* topologii $\sigma\big((X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#},\ X \dot{\times} \mathbb{R}\big)$ k bodu $(\,\gamma\ \ \iota z\,)$. Ekvivalentně lze říci, že existuje zobecněná posloupnost kuželových kombinací taková, že když její jednotlivé členy aplikujeme na $(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)$, dostaneme zobecněnou posloupnost konvergující k bodu $(\,\gamma\ \ \iota z\,)$.

Množinou všech přípustných řešení duální úlohy (D) by tedy měla být množina jakýchsi zobecněných posloupností kuželových kombinací. Je zřejmé, že všechny takovéto zobecněné posloupnosti v rámci Universa teorie množin tvoří (obecně pouze) třídu. Aby bylo možné dokázat, že všechny tyto zobecněné posloupnosti tvoří množinu, je nutné předpokládat, že všechny tyto posloupnosti jsou indexovány stejnou indexovou množinou. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jde o množinu (resp. kolekci množin)

$$\mathfrak{W} = \Big\{ \Big\{ (\,\varphi\ \ \iota t\,)\ ;\ \varphi \in X^{\#},\ \big|\varphi(x_1)\big| < 1\ \wedge\ \cdots\ \wedge\ \big|\varphi(x_n)\big| < 1,\ t \in \mathbb{R},\ |t| < \varepsilon \Big\}\ ; \\ \text{pro vhodné } n \in \mathbb{N}, \text{ dále } x_1, \dots, x_n \in X \text{ a kladné reálné } \varepsilon > 0 \Big\},$$

která je částečně uspořádána inkluzí (příklad 1.29). Kolekce $\mathfrak{W}$ je báze filtru všech slabých* okolí počátku $(\,o\ \ \iota 0\,)$ prostoru $(X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#}$, kde o je nulový lineární funkcionál $o\colon X \to \mathbb{R}$ a 0 je reálné číslo nula. Nyní zvolme libovolný bod $(\,\varphi_0\ \ \iota t_0\,) \in (X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#}$. Je zřejmé, že $(\,\varphi_0\ \ \iota t_0\,) \in \overline{\operatorname{cone}}^{*}(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)$ právě tehdy, když každé slabé* okolí bodu $(\,\varphi_0\ \ \iota t_0\,)$ množinu $\operatorname{cone}(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)$ protíná, ke každému $W \in \mathfrak{W}$ existuje $(\,\varphi_W\ \ \iota t_W\,) \in \operatorname{cone}(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)$ takové, že $(\,\varphi_W\ \ \iota t_W\,) - (\,\varphi_0\ \ \iota t_0\,) \in W$. Tímto jsme (pomocí axiomu výběru) sestrojili zobecněnou posloupnost $\{(\,\varphi_W\ \ \iota t_W\,)\}_{W \in \mathfrak{W}}$ konvergující k bodu $(\,\varphi_0\ \ \iota t_0\,)$.

My ovšem chceme zobecněnou posloupnost kuželových kombinací takovou, že když její jednotlivé členy aplikujeme na $(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)$, dostaneme zobecněnou posloupnost konvergující k bodu $(\,\varphi_0\ \ \iota t_0\,)$. Nejprve předpokládejme, že indexová množina J je neprázdná, $J \neq \emptyset$. Položme

$$\bar{V} = \coprod_{j \in J} \mathbb{R}_j\,,$$

kde $\mathbb{R}_j$ označuje aditivní grupu tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$ pro $j \in J$. Prostor $\bar{V}$ tedy obsahuje právě ty sloupce prostoru $\mathbb{R}^J$, které mají jen konečný počet nenulových složek. Když $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j \in J} \in \bar{V}$, pak s každou ze složek λ_j sloupce $\boldsymbol{\lambda}$ je podle definice 1.39 asociováno lineární zobrazení $\iota\lambda_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro $j \in J$. Následně dle definice 1.53 tato lineární zobrazení můžeme direktně sečíst a sestavit lineární zobrazení $(\iota\lambda_j)^T_{j \in J}\colon \bar{V} \to \mathbb{R}$ a položit $\iota\boldsymbol{\lambda}^T = (\iota\lambda_j)^T_{j \in J} = \coprod_{j \in J} \iota\lambda_j$. Jestliže indexová množina J je prázdná, $J = \emptyset$, klademe $\bar{V} = \mathbb{R}^0$, aby $\bar{V}$ byl triviální reálný vektorový prostor, a když $\boldsymbol{\lambda} \in \bar{V} = \mathbb{R}^0$, pak $\iota\boldsymbol{\lambda}^T\colon \mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}$ je nulové lineární zobrazení. (Srov. definici 1.59.)

Zvolme libovolný bod $(\,\varphi_W\ \ \iota t_W\,) \in (X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#}$. Povšimněme si, že $(\,\varphi_W\ \ \iota t_W\,) \in$ $\in \operatorname{Lin}(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)$ právě tehdy, když existuje $\boldsymbol{\lambda} \in \bar{V}$ takové, že $(\,\varphi_W\ \ \iota t_W\,) = \iota\boldsymbol{\lambda}^T(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)$. (Pro $\boldsymbol{\lambda} \in \bar{V}$ samozřejmě platí $\iota\boldsymbol{\lambda}^T(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,) = (\,\iota\boldsymbol{\lambda}^T A\ \ \iota\boldsymbol{\lambda}^T \iota\boldsymbol{b}\,)$.) Dále položme

$$\bar{V}_0^{+} = \{\,\boldsymbol{\lambda} \in \bar{V}\ ;\ \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o}\,\}\,,$$

kde $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru $\bar{V}$ (a pro $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j \in J} \in \bar{V}$ máme $\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o}$ právě tehdy, když $\lambda_j \geq 0$ pro všechna $j \in J$; srov. poznámku 10.3). Máme-li stále bod $(\,\varphi_W\ \ \iota t_W\,) \in$ $\in (X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#}$, není těžké nahlédnout, že $(\,\varphi_W\ \ \iota t_W\,) \in \operatorname{cone}(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)$ tehdy a jen tehdy, když existuje $\boldsymbol{\lambda} \in \bar{V}_0^{+}$, pro které platí $(\,\varphi_W\ \ \iota t_W\,) = \iota\boldsymbol{\lambda}^T(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)$.

V této poznámce 12.5 jsme už výše ukázali, jak (pomocí axiomu výběru) ke každému bodu $(\,\varphi_0\ \ \iota t_0\,) \in \overline{\operatorname{cone}}^{*}(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)$ najít zobecněnou posloupnost bodů $\{(\,\varphi_W\ \ \iota t_W\,)\}_{W \in \mathfrak{W}}$ množiny $\operatorname{cone}(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)$ takovou, aby konvergovala k danému bodu $(\,\varphi_0\ \ \iota t_0\,)$. Následně (opětovným užitím axiomu výběru) ke každému bodu $(\,\varphi_0\ \ \iota t_0\,) \in \overline{\operatorname{cone}}^{*}(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)$ můžeme sestrojit zobecněnou posloupnost $\{\boldsymbol{\lambda}_W\}_{W \in \mathfrak{W}}$ sloupců množiny $\bar{V}_0^{+}$ takovou, aby zobecněná posloupnost $\{\iota\boldsymbol{\lambda}_W^T(\,A\ \ \iota\boldsymbol{b}\,)\}_{W \in \mathfrak{W}}$ konvergovala k danému bodu $(\,\varphi_0\ \ \iota t_0\,)$.

Abychom jako speciální případ obecné úlohy optimalizace získali duální úlohu (D), v definici 4.18 položme

$$\bar{M} = \Big\{ \{\boldsymbol{\lambda}_W\}_{W\in\mathfrak{W}} \,;\ \text{zobecněná posloupnost } \big\{\iota\boldsymbol{\lambda}_W^T(A \quad \iota\boldsymbol{b})\big\}_{W\in\mathfrak{W}} = \\ = \big\{(\iota\boldsymbol{\lambda}_W^T A \quad \iota\boldsymbol{\lambda}_W^T\iota\boldsymbol{b})\big\}_{W\in\mathfrak{W}}, \text{kde } \boldsymbol{\lambda}_W \in \bar{V} \text{ pro } W \in \mathfrak{W}, \text{je konvergentní} \Big\},$$

přičemž konvergenci posuzujeme ve slabé* topologii $\sigma\big((X \dot{\times} \mathbb{R})^\#,\, X \dot{\times} \mathbb{R}\big)$ algebraického duálu $(X \dot{\times} \mathbb{R})^\#$. (Poznamenejme, že když konverguje zobecněná posloupnost $\big\{(\iota\boldsymbol{\lambda}_W^T A \quad \iota\boldsymbol{\lambda}_W^T\iota\boldsymbol{b})\big\}_{W\in\mathfrak{W}}$ ve slabé* topologii $\sigma\big((X \dot{\times} \mathbb{R})^\#,\, X \dot{\times} \mathbb{R}\big)$ algebraického duálu $(X \dot{\times} \mathbb{R})^\#$, potom tato posloupnost konverguje i „po složkách", tj., konvergují zobecněné posloupnosti $\{\iota\boldsymbol{\lambda}_W^T A\}_{W\in\mathfrak{W}}$ a $\{\iota\boldsymbol{\lambda}_W^T\iota\boldsymbol{b}\}_{W\in\mathfrak{W}}$ ve slabé* topologii po řadě $\sigma(X^\#, X)$ a $\sigma(\mathbb{R}^\#, \mathbb{R})$ algebraického duálu po řadě $X^\#$ a $\mathbb{R}^\#$.) K tomu položme

$$M = \Big\{ \{\boldsymbol{\lambda}_W\}_{W\in\mathfrak{W}} \in \bar{M} \,;\ \text{zobecněná posloupnost } \{\iota\boldsymbol{\lambda}_W^T A\}_{W\in\mathfrak{W}}, \\ \text{kde } \boldsymbol{\lambda}_W \in \bar{V}_0^+ \text{ pro } W \in \mathfrak{W}, \text{konverguje k bodu } \gamma \Big\},$$

přičemž konvergenci posuzujeme ve slabé* topologii $\sigma(X^\#, X)$ algebraického duálu $X^\#$. Dále položme $N = \mathbb{R}$. Cílová funkce $f\colon \bar{M} \to \mathbb{R}$ je určena předpisem $f\big(\{\boldsymbol{\lambda}_W\}_{W\in\mathfrak{W}}\big) = = \lim \iota\boldsymbol{\lambda}_W^T\boldsymbol{b}$ pro $\{\boldsymbol{\lambda}_W\}_{W\in\mathfrak{W}} \in \bar{M}$. (Jde o limitu zobecněné posloupnosti reálných čísel $\{\iota\boldsymbol{\lambda}_W^T\boldsymbol{b}\}_{W\in\mathfrak{W}}$ v klasické eukleidovské topologii na $\mathbb{R}$. Není obtížné si uvědomit, že tato zobecněná posloupnost reálných čísel je konvergentní právě tehdy, když zobecněná posloupnost $\{\iota\boldsymbol{\lambda}_W^T\iota\boldsymbol{b}\}_{W\in\mathfrak{W}}$ konverguje ve slabé* topologii $\sigma(\mathbb{R}^\#, \mathbb{R})$ algebraického duálu $\mathbb{R}^\#$. Naposledy uvedená zobecněná posloupnost ovšem skutečně konverguje, neboť $\{\boldsymbol{\lambda}_W\}_{W\in\mathfrak{W}} \in \bar{M}$, viz výše.) Duální úloha (D) je ale variantou obecné úlohy optimalizace, neboť cílová funkce se v ní minimalizuje.

Abychom mohli hovořit o linearitě cílové funkce $f\colon \bar{M} \to \mathbb{R}$ duální úlohy (D), na množině $\bar{M}$ musíme zavést strukturu (levého) reálného vektorového prostoru. To ovšem není těžké. Povšimněme si, že množina $\bar{M}$ je podprostorem vektorového prostoru $\prod_{W\in\mathfrak{W}} \bar{V}_W$, kde $\bar{V}_W = \bar{V}$ pro $W \in \mathfrak{W}$. Strukturu vektorového prostoru na množině $\bar{M}$ tedy můžeme získat přirozeným zúžením struktury prostoru $\prod_{W\in\mathfrak{W}} \bar{V}_W$ na $\bar{M}$, viz poznámku 1.16. Protože těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ je komutativní, cílová funkce $f\colon \bar{M} \to \mathbb{R}$ duální úlohy (D) je lineární. (Srov. poznámku 6.4.)

12.6. Nyní ukážeme, že pro úlohy (P) a (D) z předcházející poznámky 12.5 platí věta 12.7 o slabé dualitě – jíž autor publikoval, viz [10: Tvrzení 5].

12.7. Tvrzení. Věta o slabé dualitě. *Nechť X je reálný vektorový prostor. Budiž dána indexová množina J (může být i $J = \emptyset$), lineární zobrazení $A\colon X \to \mathbb{R}^J$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^J$. K tomu mějme lineární funkcionál $\gamma\colon X \to \mathbb{R}$.*

Jestliže bod $x \in X$ splňuje $Ax \le \boldsymbol{b}$ a reálné číslo $z \in \mathbb{R}$ je takové, že $(\gamma \quad \iota z) \in \in \overline{\operatorname{cone}}^*(A \quad \iota\boldsymbol{b})$, potom

$$\gamma(x) \le z\,.$$

Doplňme, že uzávěr bereme ve slabé topologii $\sigma\big((X \dot{\times} \mathbb{R})^\#,\, X \dot{\times} \mathbb{R}\big)$ algebraického duálu $(X \dot{\times} \mathbb{R})^\#$.*

12.7.a. *Důkaz.* Jestliže $(\gamma \quad \iota z) \in \overline{\operatorname{cone}}^*(A \quad \iota\boldsymbol{b})$, pak podle triviální inkluze lemmatu 9.12 anebo podle triviální části Farkasova lemmatu 10.6 implikace

$$(A \quad \iota\boldsymbol{b})\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = Ax + \iota\boldsymbol{b}(t) \le \boldsymbol{o} \implies (\gamma \quad \iota z)\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma(x) + \iota z(t) \le 0$$

platí pro všechna $\binom{x}{t} \in X \dot{\times} \mathbb{R}$. Zvolme $t = -1$. (Zde $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru $\mathbb{R}^J$ a 0 a -1 je reálné číslo po řadě nula a minus jedna.) Jelikož máme $Ax \le \boldsymbol{b}$, ekvivalentně $Ax + \iota\boldsymbol{b}(-1) \le \boldsymbol{o}$, uvedená implikace dává $\gamma(x) + \iota z(-1) \le 0$, ekvivalentně $\gamma(x) \le z$. Tím je důkaz proveden. $\square$

12.7.b. *Poznámka.* Uvedená věta 12.7 o slabé dualitě plyne také z triviální implikace Haarovy věty 10.17. (Srov. začátek jejího důkazu 10.17.c.)

12.8. Nyní dokážeme princip duality 12.9 pro úlohy infinitního lineárního programování, který je dalším z ústředních výsledků této práce. Metoda, jíž jsme dokazovali princip duality 6.15 pro úlohy LP s konečným počtem lineárních omezení, v případě úloh LP s nekonečným počtem omezení selhává. Z tohoto důvodu, jak jsme již v poznámce 4.32 naznačili, důkaz následujícího principu duality 12.9 založíme na použití Haarovy věty 10. .17. Myšlenkově důkaz části I. principu duality 12.9, tedy vlastně důkaz 10.17.c Haarovy věty 10.17, vychází z [58: „lemma 4“].

Zmiňme, že princip duality 12.9 autor publikoval, viz [10: Teorém 2].

12.9. Princip duality. *Nechť X je reálný vektorový prostor a ať J je indexová množina (může být i $J = \emptyset$). Budiž dáno lineární zobrazení $A\colon X \to \mathbb{R}^J$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^J$. K tomu mějme lineární funkcionál $\gamma\colon X \to \mathbb{R}$. Uvažujme následující primární úlohou infinitního lineárního programování (vlevo) a úlohou k ní duální (vpravo), kde $x \in X$ a $z \in \mathbb{R}$ jsou proměnné:*

$$\begin{array}{llcll} \text{(P)} & \gamma(x) \longrightarrow \sup & \qquad & \text{(D)} & z \longrightarrow \min \\ & \quad Ax \leq \boldsymbol{b}\,, & & & (\,\gamma \quad \iota z\,) \in \overline{\operatorname{cone}}^{*}\,(\,A \quad \iota\boldsymbol{b}\,)\,, \end{array}$$

přičemž uzávěr bereme ve slabé topologii $\sigma\big((X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#},\, X \dot{\times} \mathbb{R}\big)$ algebraického duálu $(X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#}$. Potom platí:*

I. *Jestliže konečné reálné číslo z^* je optimální hodnotou primární úlohy (tj. supremem), potom z^* je rovněž optimální hodnotou duální úlohy (tj. minimem).*

II. *Jestliže konečné reálné číslo z^* je optimální hodnotou duální úlohy (tj. minimem), potom z^* je rovněž optimální hodnotou primární úlohy (tj. supremem).*

12.9.a. *Důkaz.* I. Protože supremum z^* je konečné (tudíž $z^* > -\infty$), soustava $Ax \leq \boldsymbol{b}$ má alespoň jedno řešení. Jelikož reálné číslo z^* je supremem primární úlohy, implikace

$$Ax \leq \boldsymbol{b} \implies \gamma(x) \leq z^*$$

platí pro všechna $x \in X$. Podle Haarovy věty 10.17 existuje konečné reálné číslo $\tilde{z} \leq z^*$ takové, že

$$(\,\gamma \quad \iota\tilde{z}\,) \in \overline{\operatorname{cone}}^{*}\,(\,A \quad \iota\boldsymbol{b}\,)\,.$$

Podle věty 12.7 o slabé dualitě pro každé $x \in X$ splňující $Ax \leq \boldsymbol{b}$ platí $\gamma(x) \leq \tilde{z}$, takže $z^* \leq \tilde{z}$ (neboť z^* je supremum). Dostáváme $\tilde{z} = z^*$ a $(\,\gamma \;\; \iota z^*\,) \in \overline{\operatorname{cone}}^{*}(\,A \;\; \iota\boldsymbol{b}\,)$.

Jestliže reálné číslo $\hat{z} < z^*$, pak existuje $\hat{x} \in X$ splňující $A\hat{x} \leq \boldsymbol{b}$ a takové, že $\gamma(\hat{x}) > \hat{z}$ (protože z^* je supremum). S ohledem na větu 12.7 o slabé dualitě platí $(\,\gamma \;\; \iota\hat{z}\,) \notin \overline{\operatorname{cone}}^{*}(\,A \;\; \iota\boldsymbol{b}\,)$. Vidíme, že reálné číslo z^* je optimální hodnotou (minimem) duální úlohy.

II. Povšimněme si nejdříve, že primární úloha je přípustná. Kdyby soustava $Ax \leq \boldsymbol{b}$ byla neřešitelná, podle lemmatu 10.13 o základní dualitě v LP by platilo $(\,o \;\; \iota(-1)\,) \in \in \overline{\operatorname{cone}}^{*}(\,A \;\; \iota\boldsymbol{b}\,)$. Protože z^* je optimální hodnotou duální úlohy (minimem), máme rovněž $(\,\gamma \;\; \iota z^*\,) \in \overline{\operatorname{cone}}^{*}(\,A \;\; \iota\boldsymbol{b}\,)$. Následně bychom měli $(\,\gamma \;\; \iota(z^* - t)\,) \in \overline{\operatorname{cone}}^{*}(\,A \;\; \iota\boldsymbol{b}\,)$ pro libovolné nezáporné reálné číslo $t \geq 0$, takže z^* by nemohlo být optimální hodnotou duální úlohy. (Srov. poznámku v důkazu 6.15.c principu duality 6.15.)

Protože $(\,\gamma \;\; \iota z^*\,) \in \overline{\operatorname{cone}}^{*}(\,A \;\; \iota\boldsymbol{b}\,)$, pomocí věty 12.7 o slabé dualitě odvodíme, že implikace

$$Ax \leq \boldsymbol{b} \implies \gamma(x) \leq z^*$$

platí pro všechna $x \in X$. Kdyby existovalo reálné číslo $\hat{z} < z^*$ takové, aby pro všechna $x \in X$ splňující $Ax \leq \boldsymbol{b}$ platilo $\gamma(x) \leq \hat{z}$, podle Haarovy věty 10.17 by existovalo konečné reálné číslo $\tilde{z} \leq \hat{z} < z^*$ takové, že $(\,\gamma \;\; \iota\tilde{z}\,) \in \overline{\operatorname{cone}}^{*}(\,A \;\; \iota\boldsymbol{b}\,)$, načež z^* by nemohlo být minimální hodnotou duální úlohy. Vidíme, že reálné číslo z^* je optimální hodnotou (supremem) primární úlohy. $\square$

12.10. Poznámka. Existence optimálního řešení primární úlohy infinitního lineárního programování. Mějme reálný vektorový prostor X, indexovou množinu J (třeba i $J = \emptyset$), lineární zobrazení $A\colon X \to \mathbb{R}^J$, sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^J$ a lineární funkcionál $\gamma\colon X \to \mathbb{R}$. Jak jsme v příkladu 12.3 viděli, primární úloha infinitního LP supremalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $Ax \le \boldsymbol{b}$ nemusí mít optimální řešení, nemusí existovat žádné $x^* \in X$ takové, aby $Ax^* \le \boldsymbol{b}$ a aby pro všechna $x \in X$ splňující $Ax \le \boldsymbol{b}$ platilo $\gamma(x) \le \gamma(x^*)$. (V některých případech lze existenci optimálního řešení primární úlohy infinitního LP přece jen dokázat. Viz např. článek [10], kde autor využil speciálních vlastností řešeného problému, aby dokázal, že zkoumaná primární úloha semiinfinitního LP má právě jedno optimální řešení.)

Je proto namístě se ptát, můžeme-li rozhodnout, zda předložená primární úloha infinitního lineárního programování

$$\begin{aligned} \gamma(x) &\longrightarrow \sup \\ Ax &\le \boldsymbol{b} \end{aligned} \tag{1}$$

má optimální řešení. Nechť z^* je supremum této úlohy. Předpokládejme, že supremum z^* je konečné. Pak předložená primární úloha (1) má optimální řešení právě tehdy, když soustava lineárních nerovnic $\gamma(x) \ge z^*$, $Ax \le \boldsymbol{b}$, tedy

$$\begin{aligned} -\gamma(x) &\le -z^*, \\ Ax &\le \boldsymbol{b} \end{aligned} \tag{2}$$

má řešení. (Vskutku: Pro každé $x \in X$ splňující $Ax \le \boldsymbol{b}$ platí $\gamma(x) \le z^*$, neboť z^* je supremem úlohy (1). Nyní mějme bod $x^* \in X$ splňující $Ax^* \le \boldsymbol{b}$. Potom zřejmě $\gamma(x^*) \ge$ $\ge z^*$, právě když $\gamma(x^*) = z^*$, právě když x^* je optimálním řešením úlohy (1).) Dle lemmatu 10.13 o základní dualitě v LP uvedená soustava (2) má řešení tehdy a jen tehdy, když $(\, o \;\; -\iota 1\,) \notin \overline{\mathrm{cone}}^*\left(\begin{smallmatrix}-\gamma & -\iota z^* \\ A & \iota \boldsymbol{b}\end{smallmatrix}\right)$. Protože z^* je konečným supremem primární úlohy (1), podle části I. principu duality 12.9 je i konečným minimem duální úlohy, takže $(\,\gamma \;\; \iota z^*\,) \in \overline{\mathrm{cone}}^*(\,A \;\; \iota \boldsymbol{b}\,)$.

Na druhou stranu, když z^* je jakékoliv reálné číslo takové, že platí $(\,\gamma \;\; \iota z^*\,) \in$ $\in \overline{\mathrm{cone}}^*(\,A \;\; \iota \boldsymbol{b}\,)$ a soustava (2) má řešení, potom s ohledem na větu 12.7 o slabé dualitě je z^* minimem duální úlohy. Dle části II. principu duality 12.9 je z^* současně konečným supremem primární úlohy (1) a řešení soustavy (2) je jejím optimálním řešením.

Odvodili jsme následující výsledek: *Ať z^* je libovolné konečné reálné číslo. Potom z^* je supremem primární úlohy* (1) *a tato úloha má optimální řešení (tj., volně řečeno, suprema se nabývá) právě tehdy, když*

$$(\,\gamma \quad \iota z^*\,) \in \overline{\mathrm{cone}}^*\,(\,A \quad \iota \boldsymbol{b}\,) \qquad \text{a} \qquad (\,o \quad -\iota 1\,) \notin \overline{\mathrm{cone}}^*\begin{pmatrix}-\gamma & -\iota z^* \\ A & \iota \boldsymbol{b}\end{pmatrix}, \tag{3}$$

kde o je nulový lineární funkcionál $o\colon X \to \mathbb{R}$, dále 1 je reálné číslo jedna a uzávěry bereme ve slabé topologii $\sigma\big((X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#}, X \dot{\times} \mathbb{R}\big)$ algebraického duálu $(X \dot{\times} \mathbb{R})^{\#}$.*

Lze tedy říci, že primární úloha (1) má optimální řešení právě tehdy, když existuje reálné číslo z^* splňující podmínku (3). (Takové číslo z^* je pak i supremem primární úlohy (1).) Současně ale platí, že podmínka (3) může být splněna pro nejvýše jedno reálné číslo z^*, (!) protože primární úloha (1) má nejvýše jedno konečné supremum. (Jestliže z^* je konečným supremem primární úlohy (1), pak podmínka (3) je splněna v závislosti na tom, zda úloha (1) má, anebo nemá optimální řešení. Jestliže z^* není konečným supremem úlohy (1), pak podmínka (3) určitě neplatí.)

Podmínka (3) je poněkud komplikovaná. Mohlo by být zajímavé nalézt další (třeba jen postačující) podmínky, které by zaručily, že primární úloha (1) má optimální řešení. (Inspiraci lze hledat například v [1: Sekce 3.7]. V knize [1] je ovšem použit poněkud jiný přístup. Podmínky uvedené v [1: Sekce 3.7] se tedy týkají jiné úlohy. Viz též poznámku 13.4.)

12.11. V závěrečné části tohoto paragrafu se budeme věnovat otázce vynechávání nadbytečných omezujících podmínek primární úlohy (infinitního) lineárního programování.

12.12. Poznámka. Mějme reálný vektorový prostor X, indexovou množinu J (lze vzít i $J = \emptyset$), lineární zobrazení $A = (\alpha_j)_{j\in J}: X \to \mathbb{R}^J$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} = (b_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J$. Zde α_j a b_j jsou po řadě lineární funkcionály definované na prostoru X a reálná čísla pro $j \in J$. Dále mějme libovolnou podmnožinu $I \subseteq J$. Zavedeme následující označení, které použijeme v níže uvedených úvahách 12.13 a 12.14 i tvrzení 12.16.

Jestliže indexová množina I je neprázdná, $I \neq \emptyset$, potom význam sloupce $(b_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ je dán definicí 1.52 a význam součinu $(\alpha_i)_{i\in I}$ lineárních forem α_i, kde $i \in I$, je dán definicí 1.53, načež máme lineární zobrazení $(\alpha_i)_{i\in I}: X \to \mathbb{R}^I$. Jestliže indexová množina I je prázdná, $I = \emptyset$, potom sloupec $(b_i)_{i\in I}$ je počátkem triviálního prostoru $\mathbb{R}^I$ a $(\alpha_i)_{i\in I}$ budiž nulovým lineárním zobrazením $(\alpha_i)_{i\in I}: X \to \mathbb{R}^I$. V obou případech pak klademe

$$A_I = (\alpha_i)_{i\in I}: X \to \mathbb{R}^I \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{b}_I = (b_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I,$$

kde $(\alpha_i)_{i\in I}$ a $(b_i)_{i\in I}$ mají výše zavedený význam. V úvahách 12.13 a 12.14 jakož i tvrzení 12.16 toto označení použijeme, když budeme pracovat s množinou $I = J \setminus J'$, kde $J' \subseteq J$ je vhodná podmnožina množiny J. (Srov. definici 6.9 a poznámku 6.10, viz též poznámku 10.3.)

12.13. Úvaha. Vynechávání nadbytečných podmínek. Část I. Nechť X je reálný vektorový prostor a ať J je indexová množina (může být i $J = \emptyset$). Ať $A = (\alpha_j)_{j\in J}: X \to \mathbb{R}^J$ je lineární zobrazení a nechť $\boldsymbol{b} = (b_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J$ je sloupcový vektor, kde α_j a b_j jsou po řadě lineární funkcionály na X a reálná čísla pro $j \in J$. K tomu mějme lineární funkcionál $\gamma: X \to \mathbb{R}$. Uvažujme primární úlohu infinitního LP supremalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $Ax \leq \boldsymbol{b}$. Optimální hodnotou (tj. supremem) této úlohy budiž konečné reálné číslo z^*.

Je možné, že existuje vhodná podmnožina $J' \subseteq J$ taková, že číslo z^* je stále supremem (zmenšené) úlohy supremalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $A_{J\setminus J'}x \leq \boldsymbol{b}_{J\setminus J'}$. To znamená, že podmínky s indexy z množiny J' jsou nadbytečné a lze je vynechat, aniž by došlo ke změně optimální hodnoty z^*.

Poznamenejme, že vynecháním nadbytečných podmínek se daná úloha může výrazně zjednodušit. To nás motivuje k položení otázky, jak nadbytečné podmínky dané úlohy rozpoznat. Položené otázce se budeme věnovat v následující úvaze 12.14.

12.14. Úvaha. Vynechávání nadbytečných podmínek. Část II. Nechť X, J, $A = (\alpha_j)_{j\in J}$, $\boldsymbol{b} = (b_j)_{j\in J}$, γ a z^* má stejný význam jako v předcházející úvaze 12.13, kde jsme položili otázku, zda můžeme rozpoznat nadbytečné omezující podmínky úlohy supremalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $Ax \leq \boldsymbol{b}$.

Odpověď na danou otázku je jednoduchá, jestliže celkový počet omezujících podmínek dané úlohy je konečný, tj., indexová množina J je konečná. V takovém případě má daná úloha optimální řešení $x^* \in X$. (Z části I. principu duality 12.9 vyplývá, že z^* je optimální hodnotou (minimem) duální úlohy a že minima se nabývá, takže duální úloha má optimální řešení. Část II. principu duality 6.15 pak dává, že primární úloha má optimální řešení $x^* \in X$ splňující $Ax^* \leq \boldsymbol{b}$ a $\gamma(x^*) = z^*$.)

Následně z lemmatu 6.12 plyne, že optimální hodnota dané úlohy se nezmění (a bod x^* zůstane optimálním řešením zmenšené úlohy), jestliže vynecháme (třeba i) všechny podmínky, které v bodě x^* nejsou aktivní. (Pojem aktivní a neaktivní podmínky je zaveden v níže uvedené definici 14.11, popř. ve zmíněném lemmatu 6.12.)

Ať tedy J' jsou indexy všech podmínek $\alpha_j(x) \leq b_j$, kde $j \in J$, které v bodě x^* nejsou aktivní. Poznamenejme, že zmenšená úloha supremalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $A_{J\setminus J'}x \leq \boldsymbol{b}_{J\setminus J'}$ může mít oproti původní úloze supremalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $Ax \leq \boldsymbol{b}$ větší množinu optimálních řešení, tj., některá optimální řešení zmenšené úlohy mohou být v původní úloze nepřípustná. Nechceme-li, aby se množina optimálních řešení zvětšila, potom množina J' smí obsahovat pouze indexy takových podmínek, které nejsou aktivní v žádném optimálním řešení původní úlohy.

12.15. V předcházející úvaze 12.14 jsme poměrně uspokojivě zodpověděli otázku položenou na konci úvahy 12.13 – týkající se rozpoznávání nadbytečných podmínek primární úlohy infinitního LP – v případě, že počet omezujících podmínek dané úlohy je konečný.

V případě, že počet omezujících podmínek dané úlohy je nekonečný, položenou otázku částečně zodpovídá následující tvrzení 12.16, které je nepatrným zobecněním autorova publikovaného výsledku [10: Teorém 1].

12.16. Tvrzení. *Nechť X je reálný vektorový prostor, mějme indexovou množinu J (lze vzít i $J = \emptyset$), dále ať $A = (\alpha_j)_{j\in J}\colon X \to \mathbb{R}^J$ je lineární zobrazení a $\boldsymbol{b} = (b_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J$ je sloupcový vektor, kde α_j a b_j jsou po řadě lineární funkcionály definované na prostoru X a reálná čísla pro $j \in J$. K tomu mějme lineární funkcionál $\gamma\colon X \to \mathbb{R}$. Předpokládejme, že úloha supremalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $Ax \le \boldsymbol{b}$ má optimální řešení $x^* \in X$. Máme tedy $Ax^* \le \boldsymbol{b}$ a pro každé $x \in X$ splňující $Ax \le \boldsymbol{b}$ platí $\gamma(x) \le \gamma(x^*)$. Ať $J' \subseteq J$ je libovolná podmnožina indexů množiny J. Budiž splněny následující dva předpoklady:*

(a) *Podmínky $\alpha_j(x) \le b_j$ pro $j \in J'$ jsou v bodě x^* silně neaktivní. To znamená, že existuje kladné reálné číslo $\varepsilon > 0$ takové, že $\alpha_j(x^*) + \varepsilon \le b_j$ pro všechna $j \in J'$.*

(b) *Množina $\{\, \alpha_j \,;\ j \in J' \,\}$ je slabě* omezená (při zanedbání množiny $\{\, x \in X \,;\ \gamma(x) \le 0 \,\}$). To znamená, že pro všechna $x \in X$ splňující $\gamma(x) > 0$ je $\sup_{j\in J'} \alpha_j(x) <$ $< +\infty$.*

Potom podmínky s indexy z množiny J' jsou nadbytečné, tedy je lze vynechat, a bod x^* zůstane optimálním řešením zmenšené úlohy supremalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $A_{J\setminus J'}x \le \boldsymbol{b}_{J\setminus J'}$. Pro každé $x \in X$ splňující $A_{J\setminus J'}x \le \boldsymbol{b}_{J\setminus J'}$ tedy platí $\gamma(x) \le \gamma(x^*)$.

12.16.a. *Poznámka.* Jestliže počet podmínek původní úlohy (supremalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $Ax \le \boldsymbol{b}$), které jsou v bodě x^* neaktivní, je konečný – např. proto, že celkový počet omezení této úlohy je konečný, indexová množina J je konečná – potom tyto podmínky jsou v bodě x^* silně neaktivní a množina jimi tvořená je slabě* omezená. Uvedené tvrzení 12.16 tedy zobecňuje výsledek získaný v úvaze 12.13.

Zmenšená úloha supremalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $A_{J\setminus J'}x \le \boldsymbol{b}_{J\setminus J'}$ ale oproti původní úloze supremalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $Ax \le \boldsymbol{b}$ může mít větší množinu optimálních řešení, tj., některá optimální řešení zmenšené úlohy mohou být v původní úloze nepřípustná.

12.16.b. *Poznámka.* Bylo by zajímavé prozkoumat, zda je možné obdobné tvrzení formulovat i tehdy, když úloha supremalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $Ax \le \boldsymbol{b}$ má pouze konečné supremum z^* (a žádné optimální řešení x^*).

12.16.c. *Důkaz.* Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje bod $\hat{x} \in X$ takový, že $\alpha_j(\hat{x}) \le b_j$ pro všechna $j \in J \setminus J'$, avšak $\gamma(\hat{x}) > \gamma(x^*)$. Je tedy $\gamma(\hat{x} - x^*) > 0$. Podle předpokladu (b) existuje reálné číslo K takové, že $\alpha_j(\hat{x} - x^*) \le K$ pro všechna $j \in J'$. Bez újmy na obecnosti smíme předpokládat, že $K \ge \varepsilon$, kde konstanta $\varepsilon > 0$ je dána předpokladem (a). (Kdyby $K < \varepsilon$, stačí položit $K := \varepsilon$.) Pro stručnost položme $\lambda = \varepsilon/K$. Zřejmě platí $0 < \lambda \le 1$ a $\lambda\alpha_j(\hat{x} - x^*) \le \varepsilon$ pro všechna $j \in J'$. Nyní uvažme konvexní kombinaci $(1-\lambda)x^* + \lambda\hat{x}$. Máme

$$\alpha_j\big((1-\lambda)x^* + \lambda\hat{x}\big) = \alpha_j(x^*) + \lambda\alpha_j(\hat{x} - x^*) \le \alpha_j(x^*) + \varepsilon \le b_j$$

pro všechna $j \in J'$, dále

$$\alpha_j\big((1-\lambda)x^* + \lambda\hat{x}\big) = (1-\lambda)\alpha_j(x^*) + \lambda\alpha_j(\hat{x}) \le (1-\lambda)b_j + \lambda b_j = b_j$$

pro všechna $j \in J \setminus J'$, k tomu

$$\gamma\big((1-\lambda)x^* + \lambda\hat{x}\big) = \gamma(x^*) + \lambda\gamma(\hat{x} - x^*) > \gamma(x^*)\,,$$

což je spor s předpokladem, že bod x^* je optimálním řešením úlohy supremalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $Ax \le \boldsymbol{b}$. Tím je tvrzení dokázáno. $\square$

12.17. Dosažené výsledky. V úvaze 12.4 (a poznámce 12.5) jsme formulovali primární úlohu infinitního lineárního programování a úlohu k ní duální. Pak jsme pro tyto úlohy formulovali větu 12.7 o slabé dualitě i princip duality 12.9, jenž je jeden z hlavních výsledků této práce. V poznámce 12.10 jsme se pokusili formulovat podmínku zaručující, že primární úloha infinitního LP má optimální řešení. Nakonec jsme se v úvaze 12.14 a tvrzení 12.16 věnovali otázce vynechávání nadbytečných omezujících podmínek primární úlohy. Zmiňme, že větu 12.7 o slabé dualitě, princip duality 12.9 a tvrzení 12.16 autor publikoval ve svém článku, po řadě [10: Tvrzení 5], [10: Teorém 2] a [10: Teorém 1].

§ 13 Výsledky jiných autorů

13.1. Autor prakticky ihned po dosažení některých podstatných výsledků uvedených v této práci (viz odstavce 6.3 a 11.9) začal podrobněji zkoumat, jaké obdobné výsledky už byly v literatuře publikovány.

V případě soustav s konečným počtem lineárních omezení (tímto tématem jsme se zabývali v předcházející, první kapitole) se autorovi podařilo nalézt (resp. získat) pouze dva relevantní odkazy na literaturu: [35] (a [37]) a [22]. Za relevantní na tomto místě považujeme pouze ty práce (tj. odkazy na literaturu), v nichž se téma soustav lineárních nerovnic s konečným počtem omezení zkoumá v prostředí (obecně) nekonečněrozměrného „základního“ vektorového prostoru. (Odkazy na jiné práce, v nichž se diskutovaná problematika zkoumá jen v reálném vektorovém prostoru konečné dimenze, jsou uvedeny v poznámce 4.2.a.) Zopakujme, že Fan [35] (a [37]) pracuje v kontextu „základního“ vektorového prostoru nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ (kde za prostor „cílových hodnot“ je dosazena aditivní grupa tělesa $\mathbb{R}$). Černikov (Черников) [22] už pracuje v obecnějším kontextu „základního“ vektorového prostoru nad obecným (komutativním) lineárně uspořádaným tělesem (přičemž za prostor „cílových hodnot“ je stále dosazena aditivní grupa daného lineárně uspořádaného tělesa). Připomeňme ale, že v § 4 a § 6 jsme pracovali v ještě obecnějším kontextu „základního“ vektorového prostoru W nad (ne nutně komutativním) lineárně uspořádaným tělesem F, kde za prostor „cílových hodnot“ bylo možné dosadit libovolný lineárně uspořádaný vektorový prostor V nad daným lineárně uspořádaným tělesem F.

V případě soustav s (obecně) nekonečným počtem lineárních omezení (tímto tématem se zabýváme v této, druhé kapitole) je situace odlišná. Chápeme-li nyní diskutované téma v tom smyslu, že se chceme zabývat (konvexními) množinami bodů – které (obecně) nelze popsat jako množinu řešení soustavy lineárních nerovnic s konečným počtem omezení (přičemž, je-li možné danou množinu přece jen popsat jako řešení soustavy s konečným počtem omezení, pak musíme dostat výsledky obdobné těm, které už známe z teorie soustav s konečným počtem omezení) – potom v literatuře lze dohledat celou řadu prací. Ihned je ale nutné říci, že v těchto pracích je použit zcela jiný přístup. Pro ilustraci tohoto (odlišného) přístupu ze zmíněné řady vybíráme práci Duffina [34], Schirotzeka [83] a výsledky z knihy Andersona a Nashe [1].

13.2. Poznámka. Duffinovy výsledky [34]. Duffinův článek [34] je jednou z vůbec prvních prací zabývajících se infinitním lineárním programováním. Ukažme, jak Duffin [34] formuluje primární a duální úlohu infinitního LP: Nechť X a Y jsou dva reálné lokálně konvexní topologické vektorové prostory a ať X^* a Y^* jsou jejich odpovídající topologické duály (tj. prostory všech spojitých lineárních funkcionálů na po řadě X a Y). Nechť $P \subseteq X$ a $Q \subseteq Y$ jsou konvexní kužely a $-P^* = \{\, \xi \in X^* ;\ \forall p \in P\colon\ \xi(p) \geq 0 \,\}$ a $-Q^* = \{\, \upsilon \in Y^* ;\ \forall q \in Q\colon\ \upsilon(q) \geq 0 \,\}$ jsou kužely opačné ke kuželům k nim polárním. (Znak „υ“ je řecké písmeno „ypsílon“.) [Duální prostor X^* vybavme slabou* topologií $\sigma(X^*, X)$. K tomu ať X^{**} označuje topologický duál prostoru X^*, tj. prostor všech slabě* spojitých lineárních funkcionálů na X^*. Snadno nahlédneme, že kanonické vnoření $\varepsilon: X \to X^{**}$ je *na*, takže můžeme pracovat i s jeho inverzí $\varepsilon^{-1}: X^{**} \to X$.] Ať $A: X^* \to Y$ je [spojité] lineární zobrazení a nechť $\bar{A}': Y^* \to X$ je zobrazení k němu banachovsky adjungované složené s inverzí ε^{-1} kanonického vnoření ε. (Banachovsky adjungované zobrazení $A': Y^* \to X^{**}$ je dáno předpisem $(A'\upsilon)(\xi) = \upsilon(A\xi)$ pro $\xi \in X^*$ a $\upsilon \in Y^*$. Funkcionál $A'\upsilon = \upsilon \circ A$ je slabě* spojitý na X^*, načež klademe $\bar{A}'\upsilon = \varepsilon^{-1}(A'\upsilon)$ pro $\upsilon \in Y^*$. Je tedy $\bar{A}' = \varepsilon^{-1} \circ A'$. Povšimněme si, že $\xi(\bar{A}'\upsilon) = \upsilon(A\xi)$ pro všechna $\xi \in X^*$ a $\upsilon \in Y^*$.) Zvolme $b \in Y$ a $c \in X$. Položme $b + Q = \{\, b + q\,;\ q \in Q \,\}$ a $c - P = \{\, c - p\,;\ p \in P \,\}$. Nyní můžeme formulovat primární (vlevo) a duální (vpravo) úlohu infinitního lineárního programování, kde $\xi \in X^*$ a $\upsilon \in Y^*$ jsou proměnné:

$$
\begin{aligned}
&\xi(c) \longrightarrow \inf \\
&\quad A\xi \in b + Q\,, \\
&\quad \xi \in -P^*,
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&\upsilon(b) \longrightarrow \sup \\
&\quad \bar{A}'\upsilon \in c - P, \\
&\quad \upsilon \in -Q^*.
\end{aligned}
$$

Kromě konzistence primární úlohy (musí existovat $\xi \in -P^*$ splňující $A\xi \in b + Q$) a její optimální hodnoty (příslušné infimum) DUFFIN [34] zavádí pojem subkonzistence duální úlohy (musí existovat zobecněná posloupnost (síť) $\{\upsilon_\nu\}$ bodů $-Q^*$ a zobecněná posloupnost $\{p_\nu\}$ bodů P tak, že $\lim \bar{A}'\upsilon_\nu + p_\nu = c$) a její subhodnoty (supremum hodnot $\limsup \upsilon_\nu(b)$ přes různé sítě $\{\upsilon_\nu\}$ dosvědčující subkonzistenci; srov. poznámku 12.5). Následně DUFFIN [34: Teorém 1] uvádí následující výsledek, který je principem duality pro dané dvě úlohy: *Primární úloha je konzistentní a její hodnota je konečná právě tehdy, když duální úloha je subkonzistentní a její subhodnota je konečná. Je-li primární úloha konzistentní a duální úloha subkonzistentní, potom hodnota primární úlohy a subhodnota duální úlohy si jsou rovny.*

Volíme-li $X = \mathbb{R}^m$ a $Y = \mathbb{R}^n$ (kde m a n jsou přirozená čísla, přičemž na X a Y uvažujeme eukleidovskou topologii), k tomu P a Q volíme jako nezáporné ortanty v těchto prostorech a místo „inf“ a „sup“ píšeme „min“ a „max“, dostáváme duální úlohy klasického finitního lineárního programování, kde duální úloha (vpravo) je v kanonickém tvaru.

13.3. Poznámky. Schirotzekovy výsledky [83]. Po zveřejnění Duffinova článku [34] (viz předcházející poznámku 13.2) se stejným tématem začala zabývat řada dalších autorů. Jednou z těchto prací je i Schirotzekův článek [83], který uvádíme proto, že mnohé před ním dosažené výsledky zobecňuje.

13.3.a. Ukažme, jak SCHIROTZEK [83: Teorém 3 (i)] zobecňuje Farkasovo lemma: Ať X a Y jsou reálné vektorové prostory a nechť $X^* \subseteq X^\#$ a $Y^* \subseteq Y^\#$ jsou podprostory algebraických duálů takové, že (X, X^*) a (Y, Y^*) jsou dvojice (páry) prostorů v dualitě. (To znamená, že ke každému nenulovému vektoru $x \in X$ existuje $\xi \in X^*$ takové, že číslo $\xi(x)$ je nenulové; obdobně ke každému nenulovému $y \in Y$ existuje $\upsilon \in Y^*$ tak, že $\upsilon(y)$ je nenulové. Navíc na X^* a Y^* zavádíme strukturu (pravého) vektorového prostoru tím, že struktury algebraických duálů $X^\#$ a $Y^\#$ dle poznámky 1.16 zúžíme přirozeným způsobem na X^* a Y^*.) Prostory X a Y vybavme odpovídající slabou topologií $\sigma(X, X^*)$ a $\sigma(Y, Y^*)$. Nechť $P \subseteq X$ a $Q \subseteq Y$ jsou slabě uzavřené konvexní kužely a nechť $A: X \to Y$ je lineární slabě spojité zobrazení. Potom platí

$$\big(P \cap A^{-1}(Q)\big)^* = \overline{P^* + A'(Q^*)}^{\,*},$$

kde A' je zobrazení banachovsky adjungované k A a uzávěr na pravé straně bereme ve slabé* topologii $\sigma(X^*, X)$ prostoru X^*, dále $C^* = \{\, \xi \in X^*\,;\ \forall c \in C\colon\ \xi(c) \le 0 \,\}$ je polární kužel množiny $C \subseteq X$ (zde za množinu C volíme jednak kužel $P \cap A^{-1}(Q)$, jednak kužel P); obdobně $Q^* = \{\, \upsilon \in Y^*\,;\ \forall q \in Q\colon\ \upsilon(q) \le 0 \,\}$ je kužel polární ke kuželi Q. K tomu samozřejmě $A^{-1}(Q)$ je vzor kužele Q a $A'(Q^*)$ je obraz kužele Q^*.

(Poznámka: SCHIROTZEK [83: Teorém 3 (i)] ve skutečnosti dokázal poněkud obecnější výsledek. Zde jsme jej pro větší názornost zjednodušili.)

Volíme-li $X = \mathbb{R}^n$ a $Y = \mathbb{R}^m$ (kde n a m jsou přirozená čísla, načež jako jediná volba X^* a Y^* přichází v úvahu $X^* = (\mathbb{R}^n)^\#$ a $Y^* = (\mathbb{R}^m)^\#$), dále $P = \mathbb{R}^n$ a Q jako nekladný ortant prostoru $\mathbb{R}^m$, dostáváme klasické finitní Farkasovo lemma 1 (z úvodní kapitoly této práce).

13.3.b. Nyní se podívejme, jakým způsobem Schirotzek [83] formuluje primární a duální úlohu infinitního LP: Nechť X, Y, X^*, Y^* má stejný význam jako v předcházející poznámce 13.3.a, takže (X, X^*) a (Y, Y^*) jsou dva páry prostorů v dualitě. Ať $P \subseteq X$ a $Q \subseteq Y$ jsou libovolné konvexní kužely, k tomu $P^* = \{\, \xi \in X^* \,;\ \forall p \in P\colon\ \xi(p) \le 0 \,\}$ a $Q^* = \{\, \upsilon \in Y^* \,;\ \forall q \in Q\colon\ \upsilon(q) \le 0 \,\}$ jsou kužely k nim polární. Prostory X a Y nyní vybavme odpovídající slabou topologií $\sigma(X, X^*)$ a $\sigma(Y, Y^*)$. Mějme slabě spojité lineární zobrazení $A\colon X \to Y$, slabě spojitý lineární funkcionál $\gamma\colon X \to \mathbb{R}$, neboli $\gamma \in X^*$, a bod $b \in Y$. Položíme-li ještě $b + Q = \{\, b + q \,;\ q \in Q \,\}$ a $\gamma - P^* = \{\, \gamma - \pi \,;\ \pi \in P^* \,\}$, pak primární (vlevo) a duální (vpravo) úlohu infinitního LP, kde $x \in X$ a $\upsilon \in Y^*$ jsou proměnné, formulujeme následovně:

$$
\begin{aligned}
\gamma(x) &\longrightarrow \sup & \qquad\qquad \upsilon(b) &\longrightarrow \min\\
Ax &\in b + Q\,, & A'\upsilon &\in \gamma - P^*,\\
x &\in P, & \upsilon &\in Q^*,
\end{aligned}
$$

kde A' je zobrazení banachovsky adjungované k zobrazení A. Schirotzek má následující výsledek, který je principem duality pro uvedené dvě úlohy [83: Teorém 4]: *Nechť slabý vnitřek* $\operatorname{int} Q$ *kužele* Q *je neprázdný a nechť existuje* $x_0 \in P$ *takové, že* $(Ax_0) \in b + \operatorname{int} Q = \{\, b + q \,;\ q \in \operatorname{int} Q \,\}$. *Jestliže duální úloha je přípustná, existuje* $\upsilon \in Q^*$ *splňující* $A'\upsilon \in \gamma - P^*$, *potom minima v duální úloze se nabývá a optimální hodnoty obou úloh (supremum primární úlohy a minimum duální úlohy) jsou si rovny.*

(Poznámka: Opět platí, že Schirotzek [83: Teorém 4] dokázal obecnější výsledek, který jsme zde pro větší názornost zjednodušili.)

Jestliže $X = \mathbb{R}^n$ a $Y = \mathbb{R}^m$ (kde n a m jsou přirozená čísla, načež nutně $X^* = (\mathbb{R}^n)^\#$ a $Y^* = (\mathbb{R}^m)^\#$), k tomu P je nezáporný ortant prostoru $\mathbb{R}^n$, dále Q je nekladný ortant prostoru $\mathbb{R}^m$ a místo „sup“ píšeme „max“, dostáváme duální úlohy klasického finitního lineárního programování, kde primární úloha (vlevo) je v kanonickém tvaru.

13.4. Poznámka. Andersonovy-Nashovy výsledky [1]. Anderson a Nash [1: Sekce 3.3] formulují primární a duální úlohu infinitního LP takto: Nechť X, Y, X^*, Y^*, P, A, γ, b a $\gamma - P^*$ má stejný význam jako v předcházející poznámce 13.3.b. Připomeňme, že (X, X^*) a (Y, Y^*) jsou páry prostorů v dualitě, dále $P \subseteq X$ je libovolný kužel, k tomu $A\colon X \to Y$ je slabě spojité lineární zobrazení a $\gamma \in X^*$ a $b \in Y$ je pevně zvoleno. Primární (vlevo) a duální (vpravo) úloha infinitního LP, kde $x \in X$ a $\upsilon \in Y^*$ jsou proměnné, pak vypadají následovně:

$$
\begin{aligned}
\gamma(x) &\longrightarrow \inf & \qquad\qquad \upsilon(b) &\longrightarrow \sup\\
Ax &= b\,, & A'\upsilon &\in \gamma - P^*,\\
x &\in P, & &
\end{aligned}
$$

kde A' je zobrazení banachovsky adjungované k zobrazení A.

Rozličné podmínky zaručující, že optimální hodnoty obou úloh jsou si rovny, tedy principy duality pro uvedené úlohy, lze nalézt v [1: Sekce 3.6]. Navíc lze v [1: Sekce 3.7] nalézt několik podmínek postačujících k tomu, aby se infima v primární úloze nabývalo.

Volíme-li $X = \mathbb{R}^n$ a $Y = \mathbb{R}^m$ (kde n a m jsou přirozená čísla, načež $X^* = (\mathbb{R}^n)^\#$ a $Y^* = (\mathbb{R}^m)^\#$), k tomu P je nezáporný ortant prostoru $\mathbb{R}^n$ a místo „inf“ a „sup“ píšeme „min“ a „max“, dostáváme duální úlohy klasického finitního lineárního programování, kde primární úloha (vlevo) je ve standardním tvaru.

13.5. Úvaha. Srovnání výsledků této práce s výsledky jiných autorů. V předcházejících třech paragrafech, § 10, § 11 a § 12, především ale v principu duality 12.9 jsme pracovali v kontextu jednoho „základního“ vektorového prostoru X nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ (jako prostor „cílových hodnot“ jsme používali aditivní grupu tělesa $\mathbb{R}$). K tomu jsme pracovali s lineárním zobrazením $A\colon X \to \mathbb{R}^J$, kde J je indexová množina. O zobrazení A jsme nepředpokládali, že by mělo být spojité – na „základním“ prostoru X jsme ostatně neuvažovali žádnou topologii. Dále byl dán sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^J$, načež množina všech přípustných řešení primární úlohy byla popsána jako množina všech řešení soustavy lineárních nerovnic $Ax \le \boldsymbol{b}$.

Naproti tomu jsme v předcházejících třech poznámkách 13.2, 13.3 a 13.4 viděli, že jiní autoři obvykle pracují v kontextu dvou párů reálných vektorových prostorů v dualitě (X, X^*) a (Y, Y^*). Prostor X má význam „základního“ či „nosného“ vektorového prostoru (tj. stejný jako v přístupu použitém v této práci; prostorem „cílových hodnot“ je opět aditivní grupu tělesa $\mathbb{R}$). Prostor X^* je vhodným podprostorem algebraického duálu $X^{\#}$ (v této práci jsme pro jednoduchost pracovali s celým algebraickým duálem, volili jsme $X^* = X^{\#}$, což není na újmu obecnosti, jak jsme v poznámce 10.7 odůvodnili). Kromě toho jiní autoři pracují s lineárním zobrazením $A\colon X \to Y$, o kterém předpokládají, že je slabě spojité. K tomu volí (libovolné) konvexní kužely $P \subseteq X$ a $Q \subseteq Y$ a bod $b \in Y$, načež množina přípustných řešení primární úlohy je množina bodů vyhovujících podmínkám $Ax \in b + Q$ (popř. $Ax = b$) a $x \in P$.

Je zřejmé, že prostoru Y, který jiní autoři používají, v této práci odpovídá výše zmíněný prostor $\mathbb{R}^J$, avšak prostor Y^* v této práci nemá protějšek. (!) Slabě spojitému lineárnímu zobrazení $A\colon X \to Y$ pak v této práci odpovídá lineární zobrazení $A\colon X \to \mathbb{R}^J$, jehož spojitost zde nepředpokládáme. (Abychom mohli hovořit o spojitosti zobrazení $A\colon X \to \mathbb{R}^J$, na prostorech X a $\mathbb{R}^J$ bychom napřed museli zavést topologie. Nečiní žádný problém na prostoru X zavést slabou topologii $\sigma(X, X^*)$, když napřed zvolíme vhodný podprostor X^* algebraického duálu $X^{\#}$, např. $X^* = X^{\#}$, viz odstavec 9.1. Naproti tomu není jasné, jakou topologii bychom měli zavést na prostoru $\mathbb{R}^J$ – zda indiskrétní, slabou (jak zvolíme podprostor Y^* algebraického duálu $(\mathbb{R}^J)^{\#}$?) anebo jinou. Protože $A\colon X \to \mathbb{R}^J$ je obecné lineární zobrazení, už nemusí být spojité, jestliže na $\mathbb{R}^J$ volíme jinou než indiskrétní topologii.) Kuželi P v této práci odpovídá celý prostor X (tj. volba $P = X$), kuželi Q v této práci odpovídá nekladný ortant $(\mathbb{R}_0^-)^J = \{\, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^J ;\ \boldsymbol{\lambda} \le \boldsymbol{o} \,\}$ prostoru $\mathbb{R}^J$.

Na základě uvedených skutečností vidíme, že přístup použitý v této práci a přístup jiných autorů jsou vzájemně „neporovnatelné“ – nelze říci, že jeden z těchto přístupů by byl obecnější než druhý. (Jiní autoři požadují, aby zobrazení A bylo spojité, zde tento předpoklad nepotřebujeme. Jiní autoři mohou kužely P a Q volit libovolně, zde je musíme volit předem stanoveným způsobem. Poznamenejme, že „neporovnatelnost“ obou přístupů neodůvodňujeme argumentem, že jiní autoři mohou volit libovolný prostor Y, zatímco zde musíme pracovat s prostorem $\mathbb{R}^J$: Je-li prostor Y triviální, pak je izomorfní s prostorem $\mathbb{R}^{\emptyset}$. Je-li prostor Y netriviální, pak podle Zornova lemmatu 1.31 (resp. tvrzení 1.32) má neprázdnou bázi B a podle části II. tvrzení 1.70 je prostor Y izomorfní s prostorem $\coprod_{v\in B} \mathbb{R}_v$, kde $\mathbb{R}_v$ je aditivní grupa tělesa $\mathbb{R}$ pro $v \in B$. Nosná množina prostoru $\coprod_{v\in B} \mathbb{R}_v$ je ale podprostorem prostoru $\mathbb{R}^B$. Vidíme, že vhodnou volbou indexové množiny J ($J = B$, kde B je báze prostoru Y) lze dosáhnout toho, že prostor Y je „vnořen“ do prostoru $\mathbb{R}^J$, načež místo zobrazení $A\colon X \to Y$ stačí pracovat se zobrazením $A\colon X \to \mathbb{R}^J$. Dodejme, že prostor Y^*, se kterým musí jiní autoři pracovat, v této práci nepotřebujeme.)

Stačí ale „dodatečný předpoklad“, aby kužely P a Q byly (slabě) uzavřené, abychom mohli tvrdit, že přístup popsaný v této práci pokrývá (tj. zobecňuje) přístup jiných autorů. Jsou-li totiž kužely P a Q (slabě) uzavřené a $A\colon X \to Y$ je slabě spojité lineární zobrazení, potom množina $M = \{\, x \in X ;\ Ax \in b + Q \wedge x \in P \,\}$ (popř. $M = \{\, x \in X ;\ Ax = b \wedge x \in P \,\}$) přípustných řešení primární úlohy je zřejmě konvexní a slabě uzavřená. Následně $M = \bigcap_{\varphi \in X^*} \{ x \in X \; ; \; \varphi(x) \le \sup_{m \in M} \varphi(m) \}$, viz lemma 9.10. Vidíme, že množinu M lze popsat jako množinu všech řešení soustavy lineárních nerovnic $\Phi x \le \boldsymbol{b}$, kde $\Phi \colon X \to \mathbb{R}^{X^*}$ je zobrazení vzniklé součinem všech funkcionálů z prostoru X^*, tedy $\Phi = (\varphi)_{\varphi \in X^*}$, viz definici 1.53, a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} = (b_\varphi)_{\varphi \in X^*} \in \mathbb{R}^{X^*}$ je volen tak, aby $b_\varphi = \sup_{m \in M} \varphi(m)$ pro $\varphi \in X^*$. Úlohu lineárního programování s omezujícími podmínkami tvaru $x \in M$ lze tedy převést na tvar, kterým jsme se v § 12 podrobně zabývali, totiž na primární úlohu lineárního programování s (obecně) nekonečným počtem lineárních omezení $\Phi x \le \boldsymbol{b}$.

13.6. Úvaha. Úloha LP s podmínkami na nezápornost. V poznámce 6.2 jsme slíbili ukázat, jakým způsobem lze úlohy s podmínkami na nezápornost tvaru $x \in P$, kde P je konvexní kužel, převést na úlohy infinitního lineárního programování. Můžeme postupovat obdobně jako na konci předcházející úvahy 13.5. (Pro jiný přístup viz poznámku 16.10.)

Mějme reálný vektorový prostor X, indexovou množinu J (lze vzít i $J = \emptyset$), dále lineární zobrazení $A \colon X \to \mathbb{R}^J$, lineární funkcionál $\gamma \colon X \to \mathbb{R}$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^J$. Zvolme vhodný podprostor X^* algebraického duálu $X^\#$, např. $X^* = X^\#$, viz odstavec 9.1 (viz též poznámku 10.7), a prostor X vybavme slabou topologií $\sigma(X, X^*)$. Nechť $P \subseteq X$ je (slabě) uzavřený konvexní kužel. Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} \gamma(x) &\longrightarrow \sup \\ Ax &\le \boldsymbol{b}\,, \\ x &\in P\,, \end{aligned} \tag{1}$$

která je primární úlohou infinitního LP s podmínkami na nezápornost ve tvaru $x \in P$. Stačí se ale vrátit k lemmatu 9.12, abychom nahlédli, že pro $x \in X$ platí $x \in P$ právě tehdy, když $\pi(x) \le 0$ pro všechna $\pi \in P^*$, kde $P^* = \{ \pi \in X^* \; ; \; \forall p \in P \colon \pi(p) \le 0 \}$ je kužel polární ke kuželi P a 0 je reálné číslo nula. Vidíme, že uzavřený kužel P je množinou právě všech řešení soustavy lineárních nerovnic $\Pi x \le \boldsymbol{o}$, kde $\Pi \colon X \to \mathbb{R}^{P^*}$ je zobrazení vzniklé součinem všech funkcionálů z polárního kužele P^*, tedy $\Pi = (\pi)_{\pi \in P^*}$, viz definici 1.53, a $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor prostoru $\mathbb{R}^{P^*}$. Úlohu (1) tedy můžeme převést na tvar

$$\begin{aligned} \gamma(x) &\longrightarrow \sup \\ Ax &\le \boldsymbol{b}\,, \\ \Pi x &\le \boldsymbol{o}\,, \end{aligned}$$

kterým jsme se v § 12 zevrubně zabývali. Podle principu duality 12.9 úlohou duální k uvedené úloze, a tedy i k úloze (1), je úloha

$$\begin{aligned} z &\longrightarrow \min \\ (\gamma \quad \iota z) &\in \overline{\operatorname{cone}}^* \begin{pmatrix} A & \iota \boldsymbol{b} \\ \Pi & \iota \boldsymbol{o} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zřejmě platí vztahy

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{cone}}^* \begin{pmatrix} A & \iota \boldsymbol{b} \\ \Pi & \iota \boldsymbol{o} \end{pmatrix} &= \overline{\operatorname{cone}\,(A \quad \iota \boldsymbol{b}) + \operatorname{cone}\,(\Pi \quad \iota \boldsymbol{o})}^* = \\ &= \overline{\overline{\operatorname{cone}}^*\,(A \quad \iota \boldsymbol{b}) + \overline{\operatorname{cone}}^*\,(\Pi \quad \iota \boldsymbol{o})}^*\,, \end{aligned}$$

kde poslední rovnost je odůvodněna tvrzením 11.21. Vzhledem ke způsobu zavedení zobrazení Π je ovšem zřejmé, že

$$\overline{\operatorname{cone}}^*\,(\Pi \quad \iota \boldsymbol{o}) = \{ (\pi \quad \iota 0) \; ; \; \pi \in P^* \}\,,$$

kde 0 je reálné číslo nula. Protože P^* – kužel polární ke kuželi P – je slabě* uzavřený kužel, snadno se přesvědčíme, že množina $\{\,(\pi \;\; \iota 0)\,;\ \pi \in P^*\,\}$ je rovněž slabě* uzavřený kužel. Dostáváme tak následující tvar úlohy duální k úloze (1):

$$\begin{aligned} &z \longrightarrow \min \\ &\quad (\gamma \quad \iota z) \in \overline{\overline{\mathrm{cone}}^*(A \quad \iota \boldsymbol{b}) + \{\,(\pi \quad \iota 0)\ ;\ \pi \in P^*\,\}}^{\,*}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

S ohledem na příklad 11.16 v obecnosti nelze očekávat, že součet množin $\overline{\mathrm{cone}}^*(A \;\; \iota\boldsymbol{b}) + \{\,(\pi \;\; \iota 0)\,;\ \pi \in P^*\,\}$ bude (slabě*) uzavřený, ačkoliv obě množiny jsou (slabě*) uzavřené kužely. (Obecně lze tedy říci pouze tolik, že uvedený součet je kužel.) Podmínky postačující k tomu, aby součet dvou uzavřených množin byl uzavřený, lze nalézt v článcích [36: Sekce 3] nebo [32: Tvrzení 1] (bez důkazu též [83: Lemma 2]). Kdyby diskutovaný součet množin byl (slabě*) uzavřený, duální úloha by získala tvar

$$\begin{aligned} &z \longrightarrow \min \\ &\quad (\gamma \quad \iota z) \in \overline{\mathrm{cone}}^*(A \quad \iota \boldsymbol{b}) + \{\,(\pi \quad \iota 0)\ ;\ \pi \in P^*\,\}, \end{aligned} \tag{3}$$

který připomíná tvar duální úlohy (jako úloha (1) má téměř tvar primární úlohy) z poznámky 13.3.b.

Ukázali jsme, že úlohou duální k úloze (1) s podmínkami na nezápornost ve tvaru $x \in P$, kde $P \subseteq X$ je konvexní kužel, je úloha (2) (která za jistých předpokladů splývá s úlohou (3)). Ze způsobu odvození rovněž plyne, že pro obě úlohy (1) a (2) (popř. (1) a (3)) platí tvrzení principu duality 12.9.

13.7. Dosažené výsledky. V poznámkách 13.2, 13.3 a 13.4 jsme shrnuli výsledky, kterých dosáhli jiní autoři (DUFFIN [34], SCHIROTZEK [83] a ANDERSON a NASH [1]) a které s tématem této práce souvisejí. V navazující úvaze 13.5 jsme přístup používaný jinými autory srovnali s přístupem použitým v této práci. Vyšlo najevo, že oba přístupy jsou na sobě „nezávislé“ (resp. „neporovnatelné“), neboť nelze tvrdit, že jeden z těchto přístupů by zobecňoval druhý. V poslední úvaze 13.6 jsme se zabývali otázkou, jaký tvar získá duální úloha, jestliže k primární úloze infinitního LP s (obecně) nekonečným počtem lineárních omezení přidáme podmínky na nezápornost tvaru $x \in P$, kde P je (uzavřený) konvexní kužel.

Kapitola III.

Simplexová metoda a další teorie lineárního programování v případě konečného počtu omezujících podmínek

V této, třetí kapitole se budeme se zabývat velmi dobře známým tématem, jímž je simplexová metoda. Při tom budeme uvádět řadu výsledků, které jsou známy už z teorie finitního (tj. konečněrozměrného) lineárního programování, avšak tyto výsledky uvedeme v novém tvaru: budeme totiž pracovat ve stejném kontextu, ve kterém jsme pracovali už v první kapitole, tedy v kontextu „základního“ nebo „nosného“ vektorového prostoru W nad tělesem F a vektorového prostoru „cílových hodnot“ V nad tímtéž lineárně uspořádaným tělesem F. Hlavní přínos této, třetí kapitoly – obdobně jako v první kapitole, viz § 7 – tedy můžeme spatřovat v tom, že na tak dobře známé téma, jakým simplexová metoda je, přinese nový pohled. Protože výsledky, jež v této kapitole budeme uvádět jsou snadné (jde o obdoby dobře známých výsledků z teorie konečněrozměrného LP), důkazy tvrzení a vět v této kapitole budeme pouze naznačovat.

V § 14 zavedeme základní geometrické pojmy, jakým je například pojem konvexního polyedru a jeho stěny, a popíšeme jejich některé základní vlastnosti. V závěru § 14 uvedeme základní větu lineárního programování.

V § 15 se budeme věnovat simplexové metodě. Jak známo, simplexové metody jsou ve skutečnosti dvě: primární a duální. V § 15 popíšeme obě tyto metody, přičemž – aby bylo umožněno lepší srovnání obou metod – výklad duální a primární simplexové metody povedeme pokud možno souběžně. Rovněž uvedeme základní větu lineárního programování, která rozšíří základní větu LP z § 14. Kromě toho v § 15 dokážeme větu o existenci optimálních řešení pro úlohy lineárního programování, která je doplňkem k principu duality z § 6.

V § 16 zavedeme pojem úlohy celočíselného lineárního programování v nekonečněrozměrném prostoru. K tomu naznačíme, že Gomoryho algoritmy pro řešení úloh celočíselného LP lze použít dokonce v nekonečněrozměrných prostorech.

§ 14 Základní geometrické pojmy

14.1. Definice. Poloprostor, nadrovina a konvexní polyedr. Nechť W je vektorový prostor nad tělesem F. Podmnožina $M \subseteq W$ prostoru W je *nadrovina* právě tehdy, když existuje nenulová lineární forma $\alpha\colon W \to F$, splňující $\alpha(x) \neq 0$ pro alespoň jedno $x \in W$, a skalár $b \in F$ tak, že $M = \{\, x \in W\,;\ \alpha(x) = b \,\}$. Každá nadrovina je afinním podprostorem prostoru W a zaměřením nadroviny M je podprostor $\operatorname{Ker} \alpha = \{\, x \in W\,;\ \alpha(x) = 0 \,\}$.

Nadále předpokládejme, že těleso F je lineárně uspořádané. Ať tedy W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Podmnožina $M \subseteq W$ prostoru W je *(uzavřený) poloprostor* tehdy a jen tehdy, když existuje nenulová lineární forma $\alpha\colon W \to F$, splňující $\alpha(x) \neq 0$ pro alespoň jedno $x \in W$, a skalár $b \in F$ tak, že $M = \{\, x \in W\,;\ \alpha(x) \leq b \,\}$. Povšimněme si, že každá nadrovina je průnikem dvou poloprostorů: $\{\, x \in W\,;$

$\alpha(x) = b \} = \{ x \in W \,;\; \alpha(x) \le b \} \cap \{ x \in W \,;\; -\alpha(x) \le -b \}$, srov. poznámku 3.127.

Podmnožinu $M \subseteq W$ vektorového prostoru W nad lineárně uspořádaným tělesem F nazveme *konvexním polyedrem* právě tehdy, když existuje vhodné přirozené číslo m (může být i $m = 0$), existuje lineární zobrazení $A: W \to F^m$ a existuje sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$ tak, že $M = \{ x \in W \,;\; Ax \le \boldsymbol{b} \}$. O soustavě lineárních nerovnic $Ax \le \boldsymbol{b}$ hovoříme jako o *omezujících podmínkách*, které popisují konvexní polyedr M. Jestliže vektorový prostor W je netriviální, potom množina M je konvexním polyedrem tehdy a jen tehdy, když ji lze vyjádřit jako průnik konečně mnoha poloprostorů (a nadrovin). (Je-li prostor W je triviální, potom v něm žádné nadroviny ani poloprostory neexistují.) Prázdná množina, celý prostor W, každý poloprostor i každá nadrovina jsou konvexními polyedry. Také průnik dvou konvexních polyedrů je konvexní polyedr. Navíc je zřejmé, že konvexní polyedr je (ve smyslu definice 3.42) konvexní.

14.2. Definice. Lineární a kuželový obal lineárního zobrazení $A: W \to F^m$. Nechť W a V jsou vektorové prostory nad lineárně uspořádaným tělesem F. Budiž dáno přirozené číslo m (může být i $m = 0$) a lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární formy definované na prostoru W.

Máme-li jakoukoliv podmnožinu $M \subseteq W^\#$ algebraického duálu $W^\#$, pak dle definic 1.25, 3.38 a 1.46 umíme sestavit lineární obal $\operatorname{Lin} M$, kuželový obal $\operatorname{cone} M$ a V-lineární obal $\operatorname{Lin}_V M$ této množiny. Nyní, když $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ je lineární zobrazení, pro stručnost klademe

$$\begin{aligned} \operatorname{Lin} A &= \operatorname{Lin}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}\,, \\ \operatorname{cone} A &= \operatorname{cone}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}\,, \\ \operatorname{Lin}_V A &= \operatorname{Lin}_V\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}\,. \end{aligned}$$

Množina $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ je podmnožinou algebraického duálu $W^\#$ a význam jejího lineárního, kuželového a V-lineárního obalu je zaveden zmíněnými definicemi 1.25, 3.38 a 1.46. Význam zápisů $\operatorname{Lin} A$, $\operatorname{cone} A$ a $\operatorname{Lin}_V A$, kde $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ je lineární zobrazení, je stanoven právě uvedenými rovnicemi.

Úmluvu zavedenou touto definicí 14.2 používáme také pro součiny zobrazení (definice 1.53). Jsou-li tedy m a n přirozená čísla (může být i $m = 0$ a $n = 0$) a $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ a $B = (\beta_j)_{j=1}^n : W \to F^n$ dvě lineární zobrazení, klademe

$$\begin{aligned} \operatorname{Lin} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \operatorname{Lin}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n\}\,, \\ \operatorname{cone} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \operatorname{cone}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n\}\,. \end{aligned}$$

Srov. definici 10.2.

14.3. Definice. Algebraický doplněk. Kodimenze a dimenze množiny. Mějme vektorový prostor W nad tělesem F.

Ať nejprve A je libovolným podprostorem vektorového prostoru W. *Algebraickým doplňkem* podprostoru A rozumíme každý podprostor B prostoru W takový, že $W = A \oplus B$, kde „$\oplus$“ označuje direktní součet podprostorů, definice 1.68. (Pomocí Zornova lemmatu 1.31 snadno odůvodníme, že algebraický doplněk existuje ke každému podprostoru A: Přirozeným zúžením struktury vektorového prostoru W zavedeme na A strukturu vektorového prostoru nad tělesem F, viz poznámku 1.16. Užitím Zornova lemmatu 1.31 (popř. tvrzení 1.32) najdeme alespoň jednu bázi B_A (pod)prostoru A. Opětovným použitím Zornova lemmatu 1.31 najdeme alespoň jednu bázi B' prostoru W obsahující B_A, aby $B_A \subseteq B'$. Nyní stačí položit $B_B = B' \setminus B_A$ a $B = \operatorname{Lin} B_B$.)

Nechť A je stále podprostorem vektorového prostoru W. Pojem dimenze podprostoru A jsme zavedli už v definici 1.33 – podprostor A stačí považovat za vektorový prostor nad tělesem F. *Kodimenzí* podprostoru A rozumíme dimenzi kteréhokoliv jeho algebraického doplňku B (kde $W = A \oplus B$).

Nyní ať A je afinním podprostorem vektorového prostoru W a lineární podprostor L budiž jeho zaměřením, viz definici 1.35. Pak *dimenzí* resp. *kodimenzí* afinního podprostoru A rozumíme po řadě dimenzi resp. kodimenzi jeho zaměření L. Kodimenze celého prostoru W je rovna nule, kodimenze nadroviny je rovna jedné. Obecně platí, že když afinní podprostor A je roven průniku n navzájem různých nadrovin, potom jeho kodimenze je rovna n. (Zde n je přirozené číslo. Je-li A afinním podprostorem, potom $A \neq \emptyset$. Aby průnik n různých nadrovin byl neprázdný, žádné dvě z nich nesmí být rovnoběžné, mít stejné zaměření.)

Nakonec zvolme libovolnou neprázdnou podmnožinu $A \subseteq W$ vektorového prostoru W, aby $A \neq \emptyset$. Pak *dimenzí* resp. *kodimenzí* neprázdné množiny A rozumíme po řadě dimenzi resp. kodimenzi jejího afinního obalu $\operatorname{Aff} A$. (Dimenzi ani kodimenzi prázdné množiny nedefinujeme.)

Dimenzi resp. kodimenzi neprázdné podmnožiny $A \subseteq W$ značíme po řadě $\dim A$ resp. $\operatorname{codim} A$. Jestliže vektorový prostor W je konečněrozměrný, jeho dimenze je rovna přirozenému číslu N, máme např. $W = F^N$, potom platí vztah $\dim A + \operatorname{codim} A = N$.

V této definici 14.2 jsme předpokládali, že W je levý vektorový prostor. Kdyby W byl pravý vektorový prostor, postupovali bychom obdobně.

14.4. V definici 14.1 jsme zavedli pojem konvexního polyedru. Nyní budeme chtít dospět k pojmu stěny konvexního polyedru.

14.5. Definice. Úsečka. Mějme vektorový prostor W nad lineárně uspořádaným tělesem F. Zvolme dva body $a, b \in W$. *Úsečku* spojující body a a b označíme $[a, b]$ a rozumíme jí množinu bodů

$$[a, b] = \operatorname{conv}\{a, b\} = \{\, \lambda a + \mu b\,;\ \lambda, \mu \in F,\ \lambda, \mu \geq 0,\ \lambda + \mu = 1 \,\}\,.$$

Vnitřní část úsečky spojující body a a b označíme (a, b) a rozumíme jí množinu bodů

$$(a, b) = \{\, \lambda a + \mu b\,;\ \lambda, \mu \in F,\ \lambda, \mu > 0,\ \lambda + \mu = 1 \,\}\,.$$

Bod $x \in W$ nazveme *vnitřním bodem* úsečky spojující body a a b právě tehdy, když $x \in (a, b)$.

Úsečka $[a, b]$ spojující body a a b je *vlastní* právě tehdy, když $a \neq b$. Úsečka $[a, b]$ je *nevlastní* (nebo *degenerovaná*) právě tehdy, když $a = b$. Poměrně lehce nahlédneme, že

$$\operatorname{Aff}[a, b] = \operatorname{Aff}(a, b) = \{\, \lambda a + \mu b\,;\ \lambda, \mu \in F,\ \lambda + \mu = 1 \,\}\,.$$

Je-li $a \neq b$, pak $\operatorname{Aff}[a, b] = \operatorname{Aff}(a, b)$ je *přímka* určená (tj. procházející) body a a b. Jestliže však $a = b$, potom máme $\operatorname{Aff}[a, b] = \operatorname{Aff}(a, b) = [a, b] = (a, b) = \{a\}$.

14.6. Definice. Extremální bod. Nad lineárně uspořádaným tělesem F budiž dán vektorový prostor W, ve kterém máme neprázdnou a konvexní množinu $M \subseteq W$. Zvolme libovolný bod $x \in M$. Pak bod x je *extremálním bodem* množiny M právě tehdy, když není vnitřním bodem žádné vlastní úsečky spojující dva body M. Jinými slovy, bod x je extremálním bodem množiny M právě tehdy, když pro každé dva body $x_1, x_2 \in M$ a každé dva kladné skaláry $\lambda_1, \lambda_2 \in F$, aby $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, splňující $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ platí, že když $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x$, potom $x_1 = x = x_2$. Není těžké nahlédnout, že bod x konvexní množiny M je jejím extremálním bodem právě tehdy, když množina M po jeho odebrání zůstává konvexní, množina $M \setminus \{x\}$ je konvexní. (Srov. [67: definice 18.1 nebo 21.1] nebo [65: definice 2.2 (na str. 63)].)

14.7. Definice. Extremální útvar. Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Zvolme libovolnou podmnožinu $M \subseteq W$ prostoru W, k tomu zvolme libovolnou podmnožinu $T \subseteq M$ množiny M. Množina M budiž konvexní. Pak množina T je *extremálním útvarem* množiny M právě tehdy, když neexistuje úsečka spojující body M, jejíž vnitřní část množinu T protíná a neleží v T. Množina T je tedy extremálním útvarem množiny M tehdy a jen tehdy, když pro každé dva body $a, b \in M$ zvolené tak, aby $(a, b) \cap T \neq \emptyset$, platí $(a, b) \subseteq T$. (Srov. [67: důkaz věty 18.3].)

Jestliže však $(a, b) \subseteq T$, potom $(a, b) \cap T = (a, b) \neq \emptyset$. Můžeme tedy říci, že množina T je extremálním útvarem množiny M tehdy a jenom tehdy, když pro každé dva body $a, b \in M$ platí, že $(a, b) \cap T \neq \emptyset$ právě tehdy, když $(a, b) \subseteq T$.

Povšimněme si, že prázdná množina $T = \emptyset$ a celá množina $T = M$ jsou extremálními útvary množiny M. Je zřejmé, že když množina M je neprázdná a máme její bod $x \in M$, pak bod x je extremálním bodem množiny M tehdy a jen tehdy, když jednoprvková množina $T = \{x\}$ je extremálním útvarem množiny M. Rovněž snadno nahlédneme, že podmnožina $T \subseteq M$ je extremálním útvarem množiny M právě tehdy, když její doplněk $M \setminus T$ je extremálním útvarem množiny M. Dodejme, že když množina T je extremálním útvarem množiny M, tak z toho to ještě neplyne, že T je konvexní. (!)

Název „extremální útvar" jsme volili pro značnou obecnost tohoto pojmu. Jestliže extremální útvar T množiny M je úsečka resp. přímka apod., říkáme, že T je *extremální úsečka* resp. *extremální přímka* apod. množiny M.

14.8. Definice. Stěna konvexního polyedru. Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Podmnožina $M \subseteq W$ prostoru W budiž konvexním polyedrem. Dále zvolme libovolnou podmnožinu $T \subseteq M$ množiny M. Pak množina T je *stěnou* polyedru M právě tehdy, když jsou splněny následující tři podmínky: (1) platí $T \neq \emptyset$, dále (2) množina T je extremálním útvarem polyedru M a (3) platí $T = M \cap \operatorname{Aff} T$.

Z podmínek (1) a (2) plyne, že když konvexní polyedr M má alespoň jednu stěnu T, potom polyedr M je neprázdný. Podmínka (3) zaručuje, že stěna T je „rovná" („lineární"). Navíc z podmínky (3) plyne, že každá stěna T polyedru M je konvexní, protože množiny M i $\operatorname{Aff} T$ jsou konvexní. Poznamenejme, že inkluze „$\subseteq$" je v podmínce (3) vždy splněna, protože $T \subseteq M$ i $T \subseteq \operatorname{Aff} T$. Podstatná je tedy pouze inkluze „$\supseteq$".

Stěna T konvexního polyedru M je *vlastní* právě tehdy, když $T \neq M$. Stěna T je *nevlastní* právě tehdy, když $T = M$. (Snadno ověříme, že když konvexní polyedr M je neprázdný, $M \neq \emptyset$, potom $T = M$ je rovněž stěnou. Odtud plyne, že konvexní polyedr je neprázdný právě tehdy, když má alespoň jednu stěnu.)

Stěna konvexního polyedru, jejíž dimenze je rovna nule resp. jedné, se nazývá po řadě *vrchol* resp. *hrana*. Vrchol polyedru je tedy jednoprvková množina; pro úplnost dodejme, že *vrcholem* často rozumíme též prvek této jednoprvkové množiny, tj. extremální bod polyedru M. Dva vrcholy konvexního polyedru jsou *sousední* právě tehdy, když jsou podmnožinou (resp. jsou prvkem, tj., leží) na stejné hraně. Maximální vlastní stěna konvexního polyedru je *faseta*. Formálně řečeno, stěna T konvexního polyedru M je faseta právě tehdy, když $T \neq M$ a pro každou další vlastní stěnu T' obsahující T, aby $T \subseteq T' \neq M$, už platí $T' = T$. (Pro zajímavost dodejme, že název „faseta" je odvozen od názvu plošky vybroušeného diamantu (briliantu) nebo jiného drahokamu.)

14.9. Poznámka. Stěna konvexní množiny. Obdobným způsobem, jakým jsme v předcházející definici 14.8 zavedli pojem stěny konvexního polyedru, by bylo možné zavést pojem stěny libovolné konvexní množiny.

14.10. Připomeňme značení, které jsme zavedli už v definici 6.9 (viz též poznámku 6.10, srov. poznámku 12.12). Když máme lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$, sloupcový vektor $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$ a množinu indexů $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, potom máme též lineární zobrazení $A_I = (\alpha_i)_{i \in I} : W \to F^I$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b}_I = (b_i)_{i \in I} \in F^I$.

14.11. Definice. Podmínky aktivní a neaktivní v bodě a na konvexní množině. Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Mějme přirozené číslo m (může být i $m = 0$), lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$.

O soustavě nerovnic $Ax \leq \boldsymbol{b}$ můžeme hovořit jako o (omezujících) podmínkách, protože množina $\{\, x \in W \; ; \; Ax \leq \boldsymbol{b} \,\}$ je konvexním polyedrem, viz definici 14.1. Obdobně, když $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ je libovolná podmnožina množiny indexů $\{1, \ldots, m\}$ (lze položit také $I = \emptyset$), pak o soustavě $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ lze rovněž hovořit jako o (omezujících) podmínkách, neboť tyto jsou (alespoň intuitivně) částí omezujících podmínek $Ax \leq \boldsymbol{b}$; jiný argument spočívá v tom, že i množina $\{\, x \in W \; ; \; A_I x \leq \boldsymbol{b}_I \,\}$ je konvexním polyedrem.

Předpokládejme napřed, že přirozené číslo m je nenulové, abychom mohli zvolit libovolné $i = 1, \ldots, m$. Dále zvolme kterýkoliv bod $x^* \in W$. Řekneme, že podmínka $\alpha_i(x) \leq b_i$ je v bodě x^* *aktivní* právě tehdy, když je v něm splněna jako rovnost, platí $\alpha_i(x^*) = b_i$. Podmínka $\alpha_i(x) \leq b_i$ je *neaktivní* v bodě x^* právě tehdy, když v něm není aktivní, platí $\alpha_i(x^*) \neq b_i$. (Srov. lemma 6.12.) Nyní zvolme libovolnou konvexní podmnožinu $T \subseteq W$ (lze položit i $T = \emptyset$) prostoru W. Řekneme, že podmínka $\alpha_i(x) \leq b_i$ je *aktivní na množině* T právě tehdy, když je aktivní v každém jejím bodě, $\alpha_i(x_0) = b_i$ pro všechna $x_0 \in T$. Podmínka $\alpha_i(x) \leq b_i$ není aktivní na množině T právě tehdy, když $\alpha_i(x_0) \neq b_i$ pro alespoň jedno $x_0 \in T$ (takže množina T je neprázdná).

Nyní ať m je libovolné přirozené číslo a $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ je libovolná podmnožina množiny indexů $\{1, \ldots, m\}$ (může být i $m = 0$ nebo $I = \emptyset$). K tomu mějme libovolnou konvexní podmnožinu $T \subseteq W$ (lze vzít i $T = \emptyset$) prostoru W. Řekneme, že podmínky $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ jsou *aktivní na množině* T právě tehdy, když $T \subseteq \{\, x \in W \; ; \; A_I x = \boldsymbol{b}_I \,\}$, tj. právě tehdy, když každá z podmínek $\alpha_i(x) \leq b_i$ je aktivní na T pro $i \in I$. Řekneme, že *žádná z podmínek* $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ *není aktivní na množině* T právě tehdy, když existují body $x_i \in T$ splňující $\alpha_i(x_i) \neq b_i$ pro $i \in I$, tj. právě tehdy, když žádná z podmínek $\alpha_i(x) \leq b_i$ není aktivní na T pro $i \in I$. Povšimněme si, že když množina I je prázdná, $I = \emptyset$, potom platí současně, že podmínky $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ jsou aktivní na T i že žádná z podmínek $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ není aktivní na T. Je-li $T = \emptyset$, potom podmínky $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ jsou vždy aktivní na T a žádná z podmínek $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ není aktivní na T právě tehdy, když $I = \emptyset$.

Stále mějme konvexní množinu $T \subseteq W$ a množinu indexů $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, kde m je přirozené číslo. Množina I budiž neprázdná (takže přirozené číslo m je nenulové). Předpokládejme, že množina I má právě m_1 prvků, kde přirozené číslo $m_1 = 1, \ldots, m$ je vhodně zvoleno. Pro jednoduchost nechť $I = \{1, \ldots, m_1\}$. K tomu předpokládejme, že pro každý bod $x_0 \in T$ platí $A_I x_0 \leq \boldsymbol{b}_I$ a že žádná z podmínek $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ není aktivní na množině T. Potom množina T je nutně neprázdná, $T \neq \emptyset$, protože existují body $x_1, \ldots, x_{m_1} \in T$ tak, aby $\alpha_i(x_i) < b_i$ pro $i = 1, \ldots, m_1$ (přičemž přirozené číslo m_1 je nenulové). Uvažujme bod $x_0 = (m_1 \times 1)^{-1}(x_1 + \cdots + x_{m_1})$, kde 1 je jednotka tělesa F a znak „$\times$“ značí celistvý násobek (považujeme-li přirozené číslo m_1 za číslo celé; viz definici 3.25). Je zřejmé, že bod x_0 je konvexní kombinací bodů $x_1, \ldots, x_{m_1}$. Protože množina T je dle předpokladu konvexní, máme $x_0 \in T$. Dále vidíme, že $A_I x_0 < \boldsymbol{b}_I$. Odvodili jsme, že když množina I je neprázdná a žádná z podmínek $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ není aktivní na T, potom existuje bod $x_0 \in T$ splňující $A_I x_0 < \boldsymbol{b}_I$. Na druhou stranu, máme-li bod $x_0 \in T$ splňující $A_I x_0 < \boldsymbol{b}_I$, pak žádná z podmínek $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ není aktivní na množině T (může se ale stát, že $I = \emptyset$). Lze tedy shrnout, že když pro každý bod $x_0 \in T$ platí $A_I x_0 \leq \boldsymbol{b}_I$ a množina $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ je zvolena libovolně, potom žádná z podmínek $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ není aktivní na konvexní množině T právě tehdy, když množina I je prázdná nebo existuje bod $x_0 \in T$ splňující $A_I x_0 < \boldsymbol{b}_I$.

14.12. Platí následující věta 14.13 podávající charakteristiku stěny konvexního polyedru. (Srov. [76: Definice FA (i) (v Subsekci 7.2.1 na str. 134)].)

14.13. Věta. *Ať W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Budiž dáno přirozené číslo m (může být i $m = 0$). Nechť $A: W \to F^m$ je lineární zobrazení a $\boldsymbol{b} \in F^m$ je sloupcový vektor. Uvažujme konvexní polyedr $M = \{\, x \in W \,;\ Ax \le \boldsymbol{b} \,\}$. Zvolme libovolnou jeho podmnožinu $T \subseteq M$.*

Potom množina T je stěnou polyedru M tehdy a jen tehdy, když existuje lineární forma $\gamma: W \to F$ taková, že množina T je neprázdnou množinou právě všech optimálních řešení úlohy maximalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $Ax \le \boldsymbol{b}$.

14.13.a. *Poznámka.* Ekvivalentně lze říci, že množina T je stěnou polyedru M právě tehdy, když je neprázdná, $T \ne \emptyset$, a existují lineární forma $\gamma: W \to F$ a skalár $z^* \in F$ tak, že pro všechna $x \in M \setminus T$ platí $\gamma(x) < z^*$ a pro všechna $x^* \in T$ platí $\gamma(x^*) = z^*$. Skalár z^* je tedy optimální hodnotou výše uvedené úlohy.

14.13.b. *Poznámka.* Je zajímavé, že uvedená věta 14.13 souvisí s větami o alternativě prvního druhu, poznámka 5.21, poněvadž do její formulace lze „vsunout“ prostor „cílových hodnot“ V: Jestliže V je netriviální lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F, potom množina T je stěnou konvexního polyedru M tehdy a jen tehdy, když existuje lineární zobrazení $\gamma: W \to V$ takové, že T je neprázdnou množinou právě všech optimálních řešení úlohy maximalizovat $\gamma(x)$ za podmínek $Ax \le \boldsymbol{b}$, tj. právě tehdy, když existuje lineární zobrazení $\gamma: W \to V$ a vektor $z^* \in V$ tak, že pro všechna $x \in M \setminus T$ platí $\gamma(x) \prec z^*$ a pro všechna $x^* \in T$ platí $\gamma(x^*) = z^*$. (Srov. poznámky 2.11.a a 4.21.a.) Důkaz vysloveného tvrzení se provede obdobně jako důkaz věty 14.13.

14.13.c. *Náznak důkazu.* Implikace „$\Leftarrow$“ je snadná. Ověříme rovnost $T = M \cap \operatorname{Aff} T$. Máme $T = M \cap S$, kde $S = \big\{\, x \in W \,;\ \gamma(x) = z^* \,\big\}$. Následně $\operatorname{Aff} T = \operatorname{Aff}(M \cap S) = (\operatorname{Aff} M) \cap S$, přičemž poslední rovnost (inkluze „$\supseteq$“) je odůvodněna tím, že $\gamma(x) \le z^*$ pro $x \in M$. Odtud $M \cap \operatorname{Aff} T = M \cap (\operatorname{Aff} M) \cap S = T$. Extremalita množiny T je zřejmá. Abychom dokázali implikaci „$\Rightarrow$“, najdeme množinu $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ a položíme $J = \{1, \dots, m\} \setminus I$ tak, aby podmínky $A_I x \le \boldsymbol{b}_I$ byly aktivní na stěně T a žádná z podmínek $A_J x \le \boldsymbol{b}_J$ nebyla aktivní na stěně T. Nyní stačí použít lemma 6.12 podávající charakteristiku optimálního řešení úlohy LP. □

14.14. Níže uvedeme několik jednoduchých lemmat. S jejich pomocí pak odvodíme charakteristiku fasety konvexního polyedru, dokážeme užitečné tvrzení o minimálních stěnách konvexního polyedru a dospějeme k základní větě lineárního programování.

14.15. Lemma první. *Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F a ať m je přirozené číslo (může být i $m = 0$). Budiž dáno lineární zobrazení $A: W \to F^m$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$. Uvažujme konvexní polyedr $M = \{\, x \in W \,;\ Ax \le \boldsymbol{b} \,\}$. Určeme množinu $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ a položme $J = \{1, \dots, m\} \setminus I$ tak, aby podmínky $A_I x \le \boldsymbol{b}_I$ byly aktivní na polyedru M a žádná z podmínek $A_J x \le \boldsymbol{b}_J$ nebyla aktivní na polyedru M. Potom $\operatorname{Aff} M = \{\, x \in W \,;\ A_I x = \boldsymbol{b}_I \,\}$.*

14.15.a. *Náznak důkazu.* Inkluze „$\subseteq$“ je jasná, stačí dokázat inkluzi „$\supseteq$“. Tvrzení je zřejmé, je-li $J = \emptyset$. Proto předpokládejme, že $J \ne \emptyset$, takže polyedr M je neprázdný a existuje bod $x_0 \in M$ splňující $A_J x_0 < \boldsymbol{b}_J$. K tomu máme $A_I x_0 = \boldsymbol{b}_I$. Zvolme $x \in W$ takové, že $A_I x = \boldsymbol{b}_I$. Pro dostatečně malé kladné $\lambda \in F$ platí $A_J\big(x_0 + \lambda(x - x_0)\big) < \boldsymbol{b}_J$, tudíž $\big(x_0 + \lambda(x - x_0)\big) \in M$, odkud $\lambda^{-1}\big(x_0 + \lambda(x - x_0)\big) + (1 - \lambda^{-1})x_0 = x \in \operatorname{Aff} M$. □

14.16. První lemma 14.15 (srov. [76: bod 7.2(g) (v Subsekci 7.2.1 na str. 138)]) platí také obráceně.

14.17. Lemma druhé. *Ať W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F, mějme přirozené číslo m (lze vzít i $m = 0$), k tomu budiž dáno lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$. Uvažujme konvexní polyedr $M = \{\, x \in W \,;\ Ax \leq \boldsymbol{b} \,\}$. Zvolme libovolnou množinu $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ a položme $J = \{1, \ldots, m\} \setminus I$. Jestliže $\operatorname{Aff} M = \{\, x \in W \,;\ A_I x = \boldsymbol{b}_I \,\}$, potom podmínky $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ jsou aktivní na polyedru M.*

Platí-li navíc, že žádná z podmínek $A_J x \leq \boldsymbol{b}_J$ není aktivní na množině $\operatorname{Aff} M$, tj., existují body $x_j \in \operatorname{Aff} M$ splňující $\alpha_j(x_j) \neq b_j$ pro $j \in J$, potom žádná z podmínek $A_J x \leq \boldsymbol{b}_J$ není aktivní ani na polyedru M.

14.17.a. *Náznak důkazu.* První tvrzení je triviální: jestliže podmínky $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ jsou splněny jako rovnost na $\operatorname{Aff} M$, potom jsou aktivní i na menší množině M.

První lemma 14.15 ve své podstatě říká, že když daná podmínka $\alpha_i(x) \leq b_i$ je aktivní na polyedru M, potom je aktivní na celém afinním obalu $\operatorname{Aff} M$, kde $i = 1, \ldots$ $\ldots, m$. Druhé tvrzení, které chceme dokázat, říká, že když daná podmínka není aktivní na $\operatorname{Aff} M$, potom není aktivní ani na M. Vidíme, že jde toliko o obměnu prvního lemmatu 14. .15. Podáme rovněž formální důkaz. Najděme podmnožinu $I' \subseteq \{1, \ldots, m\}$ a položme $J' = \{1, \ldots, m\} \setminus I'$ tak, aby podmínky $A_{I'} x \leq \boldsymbol{b}_{I'}$ byly aktivní na M a žádná z podmínek $A_{J'} x \leq \boldsymbol{b}_{J'}$ nebyla aktivní na M. Zřejmě je $I' \supseteq I$ a $J' \subseteq J$. Dle prvního lemmatu 14.15 platí $\operatorname{Aff} M = \{\, x \in W \,;\ A_{I'} x = \boldsymbol{b}_{I'} \,\}$, dále ke každému $j \in J \setminus J' = J \cap I'$ existuje $x_j \in \operatorname{Aff} M$ takové, že $\alpha_j(x_j) \neq b_j$. Je tedy nutně $J' = J$. □

14.18. Třetí lemma 14.19 podává důležitou charakteristiku stěny konvexního polyedru. (Srov. [76: bod 7.2(e) (v Subsekci 7.2.1 na str. 135)]. Jinou charakteristiku stěny konvexního polyedru známe už z věty 14.13.)

14.19. Lemma třetí. *Mějme vektorový prostor W nad lineárně uspořádaným tělesem F, přirozené číslo m (lze položit i $m = 0$), lineární zobrazení $A: W \to F^m$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$. Uvažujme konvexní polyedr $M = \{\, x \in W \,;\ Ax \leq \boldsymbol{b} \,\}$ a zvolme libovolnou jeho podmnožinu $T \subseteq M$. Potom T je stěna polyedru M právě tehdy, když T je neprázdná, $T \neq \emptyset$, a existuje podmnožina $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ taková, že, položíme-li $J = \{1, \ldots, m\} \setminus I$, pak $T = \{\, x \in W \,;\ A_I x = \boldsymbol{b}_I,\ A_J \leq \boldsymbol{b}_J \,\}$, podmínky $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ jsou aktivní na T a žádná z podmínek $A_J x \leq \boldsymbol{b}_J$ není aktivní na T.*

14.19.a. *Náznak důkazu.* Implikace „$\Leftarrow$“ je lehká. Dle prvního lemmatu 14.15 máme $\operatorname{Aff} T = \{\, x \in W \,;\ A_I x = \boldsymbol{b}_I \,\}$, odkud $T = M \cap \operatorname{Aff} T$. Neprázdnost T je zaručena předpokladem a extremalita T se ověří snadno.

Ukažme důkaz implikace „$\Rightarrow$“. Zvolme $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ a položme $J = \{1, \ldots, m\} \setminus I$ tak, aby podmínky $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ byly aktivní na T a žádná z podmínek $A_J x \leq \boldsymbol{b}_J$ nebyla aktivní na T. Položíme-li pro stručnost $M' = \{\, x \in W \,;\ A_I x = \boldsymbol{b}_I,\ A_J \leq \boldsymbol{b}_J \,\}$, máme dokázat, že $T = M'$. Inkluze „$\subseteq$“ je zřejmá, je třeba dokázat inkluzi „$\supseteq$“. Protože T je stěna, je neprázdná. Jelikož žádná z podmínek $A_J x \leq \boldsymbol{b}_J$ není aktivní na T, existuje bod $x_0 \in T$ splňující $A_J x_0 < \boldsymbol{b}_J$. Zvolme $\hat{x} \in M'$, takže máme $A_J \hat{x} \leq \boldsymbol{b}_J$. (Předpokládejme, že $\hat{x} \neq x_0$, protože jinak $\hat{x} = x_0 \in T$.) Pro vhodné (absolutní hodnotou) malé záporné $\lambda \in F$ platí $A_J\bigl(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)x_0\bigr) < \boldsymbol{b}_J$. (Nakreslíme-li si obrázek, bod $\bigl(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)x_0\bigr)$ leží na polopřímce vycházející z bodu $\hat{x}$ a procházející bodem x_0 kousek „za“ bodem x_0.) Úsečka $\bigl(\hat{x},\ \lambda\hat{x} + (1-\lambda)x_0\bigr)$ tedy stěnu T protíná, v průniku leží například bod $x_0 \in$ $\in T \cap \bigl(\hat{x},\ \lambda\hat{x} + (1-\lambda)x_0\bigr)$. (Volíme-li $\mu = -\lambda(1-\lambda)^{-1}$, máme $\mu\hat{x} + (1-\mu)\bigl(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)x_0\bigr) =$ $= x_0$. Zřejmě je $0 < \mu < 1$, protože $\lambda < 0$.) Protože stěna T je extremální, úsečka $\bigl(\hat{x},\ \lambda\hat{x} + (1-\lambda)x_0\bigr)$ v ní leží celá. Odtud plyne, uvažujeme-li přímku $P = \bigl\{\, \mu\hat{x} + (1-\mu)x_0 \,;$ $\mu \in F \,\bigr\} = \operatorname{Aff}\bigl(\hat{x},\ \lambda\hat{x} + (1-\lambda)x_0\bigr)$, že $P \subseteq \operatorname{Aff} T$. Ovšem $M \cap \operatorname{Aff} T = T$, tudíž $P \cap M \subseteq T$. Protože $\hat{x} \in P$ i $\hat{x} \in M$, máme $\hat{x} \in T$. □

14.20. Následující tvrzení 14.21 je snadné.

14.21. Tvrzení. *Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F, dále m je přirozené číslo (lze vzít i $m = 0$), k tomu $A\colon W \to F^m$ je lineární zobrazení a $\boldsymbol{b} \in F^m$ je sloupcový vektor. Uvažujme konvexní polyedr $M = \{ x \in W \; ; \; Ax \leq \boldsymbol{b} \}$. Jestliže $\operatorname{Aff} M = \{ x \in W \; ; \; Ax = \boldsymbol{b} \}$ a $\operatorname{Aff} M \neq \emptyset$, potom $\operatorname{codim} M = \dim \operatorname{Lin} A$.*

14.21.a. *Náznak důkazu.* Tvrzení je zřejmé, jsou-li (volněji řečeno) všechny omezující podmínky lineárně nezávislé (přesněji: $\dim \operatorname{Lin} A = m$). Přidáním lineárně závislých podmínek se $\operatorname{codim} M$ ani $\dim \operatorname{Lin} A$ nezmění. □

14.22. Spojením dosud uvedených výsledků dostáváme následující větu 14.23 podávající charakteristiku fasety (tj. maximální vlastní stěny) i minimální stěny konvexního polyedru. (Část III. následující věty 14.23 lze srovat s [76: bod 7.2(f) (v Subsekci 7.2.1 na str. 136)].)

14.23. Věta. *Nechť W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F, dále m je přirozené číslo (lze vzít i $m = 0$), k tomu $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \colon W \to F^m$ je lineární zobrazení a $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$ je sloupcový vektor. Uvažujme konvexní polyedr $M = \{ x \in W \; ; \; Ax \leq \boldsymbol{b} \}$. Zvolme libovolnou podmnožinu $T \subseteq M$, která budiž stěnou polyedru M. Pak platí tato tři tvrzení:*

I. *Máme $T = M$ právě tehdy, když $\operatorname{codim} T = \operatorname{codim} M$.*

II. *Stěna T je faseta polyedru M právě tehdy, když $\operatorname{codim} T = \operatorname{codim} M + 1$.*

III. *Stěna T je minimální stěnou polyedru M (jestliže $T' \subseteq M$ je další stěna a platí $T' \subseteq T$, potom $T' = T$) právě tehdy, když $\operatorname{codim} T = \dim \operatorname{Lin} A$.*

14.23.a. *Náznak důkazu.* Najdeme podmnožinu $I_0 \subseteq \{1, \ldots, m\}$ a položíme $J_0 = \{1, \ldots \ldots, m\} \setminus I_0$ tak, aby podmínky $A_{I_0} x \leq \boldsymbol{b}_{I_0}$ byly aktivní na celém polyedru M a žádná z podmínek $A_{J_0} x \leq \boldsymbol{b}_{J_0}$ nebyla aktivní na M. Dále podle třetího lemmatu 14.19 můžeme najít podmnožinu $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ a položit $J = \{1, \ldots, m\} \setminus I$ tak, aby $T = \{ x \in W \; ; \; A_I x = \boldsymbol{b}_I, \, A_J \leq \boldsymbol{b}_J \}$, podmínky $A_I x \leq \boldsymbol{b}_I$ byly aktivní na T a žádná z podmínek $A_J x \leq \boldsymbol{b}_J$ nebyla aktivní na T. Zvolme ještě libovolnou další stěnu $T' \subseteq M$ polyedru M. Opětovným užitím třetího lemmatu 14.19 najdeme podmnožinu $I' \subseteq \{1, \ldots, m\}$ a položíme $J' = \{1, \ldots, m\} \setminus I'$ tak, aby $T' = \{ x \in W \; ; \; A_{I'} x = \boldsymbol{b}_{I'}, \, A_{J'} \leq \boldsymbol{b}_{J'} \}$, podmínky $A_{I'} x \leq \boldsymbol{b}_{I'}$ byly aktivní na T' a žádná z podmínek $A_{J'} x \leq \boldsymbol{b}_{J'}$ nebyla aktivní na T'.

Použitím prvního lemmatu 14.15 a předchozího tvrzení 14.21 dostáváme $\operatorname{codim} M = \dim \operatorname{Lin} A_{I_0}$, dále $\operatorname{codim} T' = \dim \operatorname{Lin} A_{I'}$ a $\operatorname{codim} T = \dim \operatorname{Lin} A_I$.

Triviálně platí, že když $T = T'$, potom $\operatorname{codim} T = \operatorname{codim} T'$. Dále je zcela snadné nahlédnout, že platí-li $T \subseteq T'$, potom $\operatorname{codim} T \geq \operatorname{codim} T'$. Nyní nahlédneme, že když $T \subset T'$ (tj., $T \subseteq T'$ a $T \neq T'$), potom $\operatorname{codim} T > \operatorname{codim} T'$. (Máme $T = M \cap \operatorname{Aff} T \subset M \cap \operatorname{Aff} T' = T'$, tudíž $\operatorname{Aff} T \subset \operatorname{Aff} T'$. Odtud už plyne, že $\operatorname{codim} T = \operatorname{codim} \operatorname{Aff} T > \operatorname{codim} \operatorname{Aff} T' = \operatorname{codim} T'$.)

Po provedení těchto úvah jsou části I. a II. zřejmé. Podívejme se na část III. Vzhledem k volbě množin I a J ze třetího lemmatu 14.19 vyplývá, že T je minimální stěnou polyedru M právě tehdy, když soustava rovnic $A_I x = \boldsymbol{b}_I$, $\alpha_j(x) = b_j$ nemá řešení pro žádné $j \in J$. K tomu z Fredholmovy věty 2.11 vzhledem volbě množin I a J plyne, že soustava $A_I x = \boldsymbol{b}_I$, $\alpha_j(x) = b_j$ nemá řešení pro žádné $j \in J$ právě tehdy, když $\alpha_j \in \operatorname{Lin} A_I$ pro $j \in J$, což nastává tehdy a jen tehdy, když $\dim \operatorname{Lin} A_I = \dim \operatorname{Lin} A$. □

14.24. Důsledkem části III. poslední věty 14.23 je níže uvedená věta 14.25. Další věta 14. .26 je důsledkem třetího lemmatu 14.19.

14.25. Věta. *Všechny minimální stěny konvexního polyedru mají stejnou kodimenzi.*

14.25.a. *Poznámka.* Jestliže daný konvexní má alespoň jeden vrchol (který je rovněž minimální stěnou, jejíž kodimenze je rovna dimenzi celého základního vektorového prostoru), potom všechny minimální stěny daného polyedru jsou vrcholy.

14.25.b. *Důkaz.* Podle části III. předcházející věty 14.23 je kodimenze každé minimální stěny daného konvexního polyedru rovna přirozenému číslu $\dim \operatorname{Lin} A$.

Předpokládali jsme ovšem, že pracujeme s polyedrem $M = \{\, x \in W \,;\ Ax \leq \boldsymbol{b} \,\}$, kde $A\colon W \to F^m$ je lineární zobrazení, dále $\boldsymbol{b} \in F^m$ je sloupcový vektor, k tomu m je přirozené číslo (může být i $m = 0$) a W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. □

14.26. Věta. *Počet všech stěn konvexního polyedru je konečný.*

14.26.a. *Důkaz.* Tvrzení plyne ze třetího lemmatu 14.19, neboť množinu indexů $\{1,\dots$ $\dots, m\}$ lze na dvě části $I, J \subseteq \{1,\dots,m\}$ takové, aby $I \cap J = \emptyset$ a $I \cup J = \{1,\dots,m\}$, rozdělit jen konečně mnoha způsoby.

Zde m je přirozené číslo (lze vzít i $m = 0$), přičemž pracujeme s polyedrem $M =$ $= \{\, x \in W \,;\ Ax \leq \boldsymbol{b} \,\}$, kde $A\colon W \to F^m$ je lineární zobrazení, k tomu $\boldsymbol{b} \in F^m$ je sloupcový vektor a W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. □

14.27. Tímto se dostáváme k hlavní větě tohoto paragrafu, totiž následující základní větě 14.28 lineárního programování.

14.28. Základní věta lineárního programování. *Nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F a nechť W je vektorový prostor nad tělesem F. Budiž dáno přirozené číslo m (může být i $m = 0$) a nechť $A\colon W \to F^m$ a $\gamma\colon W \to V$ jsou lineární zobrazení a $\boldsymbol{b} \in F^m$ je sloupcový vektor. Uvažujme konvexní polyedr $M = \{\, x \in W \,;\ Ax \leq \boldsymbol{b} \,\}$ a (primární) úlohu lineárního programování*

$$\begin{aligned} \gamma(x) &\longrightarrow \max \\ Ax &\leq \boldsymbol{b}\,, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $x \in W$ je proměnná.

Jestliže daná úloha (1) *má optimální řešení, potom optimální hodnoty se nabývá i na alespoň jedné minimální stěně konvexního polyedru M.*

(Formálně: Nechť existuje $x^* \in M$ takové, že $\gamma(x) \preceq \gamma(x^*)$ pro všechna $x \in M$. Potom existuje alespoň jedna minimální stěna $T \subseteq M$ konvexního polyedru M (jestliže $T' \subseteq M$ je stěna a $T' \subseteq T$, potom $T' = T$) taková, že $\gamma(x) = \gamma(x^*)$ pro všechna $x \in T$.)

14.28.a. *Poznámka.* V klasickém (konečněrozměrném) lineárním programování se základní věta LP formuluje následovně: Nechť konvexní polyedr, který je množinou přípustných řešení, má alespoň jeden vrchol. Jestliže daná úloha LP má optimální řešení, potom se optima nabývá i v alespoň jednom vrcholu. Abychom z podané základní věty 14.28 lineárního programování obdrželi její klasickou formulaci, stačí přihlédnout k větě 14.25 (resp. poznámce 14.25.a).

14.28.b. *Důkaz.* Sestrojíme konečnou posloupnost $T_1, \dots, T_N$ stěn konvexního polyedru M. Zde N je vhodné konečné přirozené číslo. Nechť $T_1 = \big\{\, x \in M \,;\ \gamma(x) = \gamma(x^*) \,\big\}$ je množina všech optimálních řešení dané úlohy (1). Věta 14.13 (resp. poznámka 14. .13.b) dává, že množina T_1 je stěnou polyedru M. Jestliže T_1 je minimální stěnou, jsme hotovi (položíme $N = 1$). Nyní předpokládejme, že máme stěnu T_i, kde i je přirozené číslo, a že stěna T_i není minimální. Existuje tedy stěna T_{i+1} konvexního polyedru M taková, že $T_{i+1} \subset T_i$ (tj., $T_{i+1} \subseteq T_i$ a $T_{i+1} \neq T_i$). Protože celkový počet stěn konvexního polyedru M je dle předcházející věty 14.26 konečný, po konečném počtu kroků získáme minimální stěnu. □

14.29. Poznámka. Základní věta 14.28 poskytuje jednoduchý způsob, jak najít optimální řešení dané (primární) úlohy LP – předpokládáme-li ovšem, že alespoň jedno takové řešení existuje: stačí projít všechny minimální stěny množiny přípustných řešení (pomocí třetího lemmatu 14.19 a části III. věty 14.23) a vybrat tu stěnu, kde cílová funkce nabývá nejlepší hodnoty.

Obdobný postup vlastně poskytuje už věta 14.13: Když máme úlohu LP, o které předpokládáme, že má optimální řešení, potom množina všech jejích optimálních řešení tvoří stěnu množiny přípustných řešení. Stačí tedy projít všechny stěny množiny přípustných řešení (pomocí třetího lemmatu 14.19).

14.30. Dosažené výsledky. Zavedli jsme pojem konvexního polyedru a jeho stěny popř. stěny libovolné konvexní množiny v (obecně) nekonečněrozměrném vektorovém prostoru, definice 14.1 a 14.8, poznámka 14.9. (Zmiňme též větu 14.13 podávající charakteristiku stěny konvexního polyedru.) Dále jsme se věnovali různým vlastnostem konvexních polyedrů a jejich stěn, první až třetí lemma 14.15, 14.17 a 14.19, věta 14.23. Zatímco běžně se v literatuře (např. [76: Sekce 7.2 a 7.3]) pracuje s pojmem dimenze (konvexního polyedru nebo jeho stěny), v tomto paragrafu, § 14, vyšlo najevo, že je daleko výhodnější pracovat s pojmem kodimenze (konvexního polyedru nebo jeho stěny). Kromě toho jsme pojem vrcholu, se kterým se v literatuře obvykle pracuje, nahradili pojmem minimální stěny. V závěru jsme dospěli k základní větě 14.28 lineárního programování v (obecně) nekonečněrozměrném prostoru.

§ 15 Simplexová metoda

15.1. Poznámka. Původ a současnost simplexové metody (a lineárního programování). Simplexovou metodu na konci 40. a počátku 50. let 20. století popsal George DANTZIG. V roce 1941, kdy Spojené státy vstoupily do 2. světové války, se DANTZIG jako civilista dal do služeb Amerického vojenského letectva. Tam v rámci Ústředí statistické kontroly působil až do roku 1946 jako vedoucí pobočky analýzy bojových akcí. Při tom ostatním oddělením pomáhal sestavovat plány – kterým se tam říkalo „programy“. Šlo o podrobné programování (tj. plánování) dodávek letadel a všeho možného; přitom v plánech vystupovalo řádově stovky tisíc různých druhů hmotných statků a kolem padesáti tisíc druhů pracovních činností. Díky tomu DANTZIG ovládl ruční techniky, pomocí kterých bylo možné plánování provádět. V polovině roku 1946 jej kolegové z Pentagonu požádali, zda by se ujal práce na mechanizování procesu plánování. Ještě ten rok byl DANTZIG jmenován matematickým poradcem na americkém Ministerstvu obrany a na daném úkolu začal pracovat. [74].

DANTZIG [24: poznámka pod čarou [1] (na str. 339)] uvádí, že jeho práce na simplexové metodě má původ v několika diskusích s Marshallem WOODEM na jaře roku 1947. Základní popis metody pak za přispění Tjallinga KOOPMANSE, nositele Nobelovy ceny za ekonomii, byl hotov už na počátku podzimu roku 1947. Původ slova „simplex“ (resp. „simplexová“) v názvu metody je objasněn na konci článku [24].

Ještě na podzim roku 1947 byla simplexová metoda vyzkoušena při řešení první velké úlohy, jíž byla úloha o dietě (čítající 9 rovnic a 77 neznámých). Výpočtu se ujal Jack LADERMAN. Výpočet se prováděl na ručně ovládaných stolních kalkulátorech a trval přibližně 120 člověkodní. [74].

DANTZIG tedy zmechanizoval proces plánování tím, že zavedl „programování v lineární struktuře“. Pojem „programování“ zde má svůj původní vojenský význam, viz výše, a znamená „plánování“ (výcviku, logistických dodávek, rozmístění mužstva apod.). Název „lineární programování“ navrhnul Tjalling KOOPMANS, když DANTZIG roku 1948 navštívil výzkumné středisko RAND v Santa Monice, aby tam diskutoval o svých myšlenkách. [74].

Jednou z prvních prací, kde je simplexová metoda popsána, je Dantzigův článek [24] z roku 1951. Od svého prvního zveřejnění simplexová metoda prošla značným vývojem. Popis této metody, který již přihlíží k otázkám efektivní implementace na prostředcích výpočetní techniky (počítačích) a některým otázkám numerické stability výpočtu, lze nalézt v knize Manfreda PADBERGA [76].

15.2. Poznámka. George Bernard DANTZIG (1914–2005), americký matematik. Podle jeho vlastních slov k rozvoji jeho schopností analytického myšlení nejvíce přispěla skutečnost, že už během studia na střední škole mu otec dával k vyřešení tisíce příkladů z geometrie. Po dokončení univerzitního studia se zajímal o statistiku, dva roky působil na americkém Úřadu statistiky práce. Další dva roky pokračoval doktorským studiem na univerzitě v Berkeley. V roce 1941 jako civilista přešel k Americkému vojenskému letectvu, viz předcházející poznámku 15.1. Po pěti letech, v roce 1946, se vrátil do Berkeley, aby tam dokončil své doktorské studium. V polovině roku 1946 nastoupil na americké Ministerstvo obrany jako matematický poradce, opět viz předcházející poznámku 15.1. V roce 1952 začal působit ve výzkumném středisku RAND v Santa Monice, kde vedl práci na implementaci simplexové metody na počítačích. Pak v roce 1960 přešel na univerzitu v Berkeley. Od roku 1966 pracoval na Stanfordově univerzitě, kde již setrval. [74].

George DANTZIG je znám především pro svůj popis simplexové metody a jako zakladatel lineárního programování. (Podíl na těchto výsledcích má i americký ekonom nizozemského původu Tjalling KOOPMANS. Dodejme, že nezávisle a dokonce o několik let dříve obdobné myšlenky formuloval už ruský matematik Leonid KANTOROVIČ (Леонид КАНТОРОВИЧ). Tjalling KOOPMANS i Leonid KANTOROVIČ v roce 1975 obdrželi Nobelovu cenu za ekonomii.) George DANTZIG za položení základů lineárního programování a rozpracování simplexové metody obdržel řadu ocenění. [74].

15.3. V následující poznámce 15.4 objasníme terminologii, kterou ve zbytku tohoto paragrafu budeme používat.

15.4. Poznámka. Velká změna v označení: primární* a duální* simplexová metoda a jiné pojmy. Uvažujme nějakou konečněrozměrnou úlohu klasického lineárního programování. Chtějme tuto úlohu vyřešit užitím simplexové metody. Potom, jak je všeobecně známo (a jak se v klasické literatuře o LP uvádí), úlohu je nejprve nutné převést do standardního tvaru (P′), popřípadě do tvaru (D′), který je k němu duální:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{P}') \qquad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \longrightarrow \min &\qquad& (\mathrm{D}') \qquad \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \longrightarrow \max\\
&\qquad\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,, && \qquad\qquad \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} \le \boldsymbol{c}^T,\\
&\qquad\qquad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{o}\,,
\end{aligned}
$$

kde $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je matice typu $m \times n$, dále $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ je sloupcový vektor, k tomu $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ je další sloupcový vektor a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ jsou proměnné, přičemž m a n jsou přirozená čísla a $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor prostoru $\mathbb{R}^n$. Simplexovou metodu pak aplikujeme na úlohu (P′), ve skutečnosti ale tato metoda řeší obě úlohy (P′) i (D′) najednou. (Algoritmus simplexové metody pro řešení konečněrozměrných úloh (P′) a (D′) je všeobecně znám, viz např. [24], [58] nebo [76], proto jej na tomto místě neuvádíme.) Připomeňme, že o úloze (P′) se v kontextu simplexové metody hovoří jako o úloze *primární* a že o úloze (D′) se v kontextu simplexové metody hovoří jako o úloze *duální*. *Báze* je vhodná množina sloupců matice $\boldsymbol{A}$ resp. množina indexů těchto sloupců. Zmiňme ještě, že algoritmy simplexové metody jsou ve skutečnosti dva: primární a duální. *Primární simplexová metoda* v každém kroku výpočtu pracuje s primárně přípustnou bází, tedy s řešením $\boldsymbol{x}$, které je určeno aktuální bází a je přípustným řešením primární úlohy (P′), a s nějakým řešením $\boldsymbol{u}$, které je rovněž určeno aktuální bází ale nemusí být přípustným řešením duální úlohy (D′). *Duální simplexová metoda* v každém kroku výpočtu pracuje s duálně přípustnou bází, tedy s nějakým řešením $\boldsymbol{x}$, které je určeno aktuální bází ale nemusí být přípustným řešením primární úlohy (P′), a s řešením $\boldsymbol{u}$, které je rovněž určeno aktuální bází a je přípustným řešením duální úlohy (D′). (Hovoří-li se pouze o „simplexové metodě“, obvykle se míní primární simplexová metoda.)

V § 6 této práce jsme ale studovali následující primární úlohu (P) a úlohu (D), která je k ní duální:

$$\text{(P)} \qquad \begin{aligned} \gamma(x) &\longrightarrow \max \\ Ax &\leq \boldsymbol{b}, \end{aligned} \qquad\qquad\qquad \text{(D)} \qquad \begin{aligned} \iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} &\longrightarrow \min \\ \iota\boldsymbol{u}^T A &= \gamma, \\ \boldsymbol{u} &\succeq \boldsymbol{o}, \end{aligned}$$

kde $A\colon W \to F^m$ a $\gamma\colon W \to V$ jsou lineární zobrazení, dále $\boldsymbol{b} \in F^m$ je sloupcový vektor a $x \in W$ a $\boldsymbol{u} \in F^m$ jsou proměnné, přičemž m je přirozené číslo, k tomu V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F, dále W je vektorový prostor nad tělesem F a $\boldsymbol{o}$ je počátek prostoru V^m.

Zaměříme-li svoji pozornost na úlohy (P′) a (D′) a na úlohy (P) a (D) a srovnáme-li (za pomoci § 7, zejm. písmene 7.1.f) jednotlivé tyto úlohy navzájem, zjistíme, že primární úloha (P′) odpovídá duální úloze (D) a že duální úloha (D′) odpovídá primární úloze (P). (!!) Nacházíme se tedy v poněkud nepříjemné situaci: Na straně jedné – vzhledem k téměř nepřebernému množství už existující literatury o simplexové metodě – bychom o úlohách (P′) a (D) měli hovořit jako o úlohách primárních a o úlohách (D′) a (P) bychom měli hovořit jako o úlohách duálních. Na straně druhé jsme v § 6 uvedli základní teorii (duality) pro primární úlohu (P) a úlohu (D) k ní duální – viz též poznámku 6.4 – a tuto teorii bychom nyní chtěli rozšířit. To znamená, že o primární simplexové metodě, primárně přípustné bázi (určující přípustné řešení (ve skutečnosti) duální úlohy (P′) resp. (D)) apod. bychom měli hovořit jako o po řadě duální simplexové metodě, duálně přípustné bázi apod., obdobně o duální simplexové metodě, duálně přípustné bázi (určující přípustné řešení (ve skutečnosti) primární úlohy (D′) resp. (P)) apod. bychom měli hovořit jako o po řadě primární simplexové metodě, primárně přípustné bázi apod. Učinili-li bychom tak, vzhledem k množství už existující literatury o simplexové metodě by to znamenalo velký zmatek v terminologii. Musíme proto najít jiné východisko.

Jedním z řešení popsané situace je velká změna v označení: značení použité v úlohách (P) a (D) upravíme tak, aby odpovídalo značení z úloh (D′) a (P′). Objasněme tedy, jak symboly z úloh (P) a (D) odpovídají symbolům z úloh (D′) a (P′): lineární zobrazení γ odpovídá sloupci $\boldsymbol{b}$; sloupcový vektor $\boldsymbol{b}$ odpovídá sloupcovému vektoru $\boldsymbol{c}$; jednotlivé „řádky“ resp. lineární formy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, ze kterých je lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m$ sestaveno, odpovídají sloupcům $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ matice $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$; proměnná x odpovídá proměnné $\boldsymbol{u}$; proměnná $\boldsymbol{u}$ odpovídá proměnné $\boldsymbol{x}$; přirozené číslo m odpovídá číslu n. Je-li „základní“ prostor W nekonečněrozměrný, pak číslo m v úlohách (P′) a (D′) bude nekonečné, takže matice $\boldsymbol{A}$ může být „nekonečně vysoká“, avšak bude mít jen konečný počet sloupců. Dále bychom pracovali výhradně s úlohami (P′) a (D′) a používali bychom už ustálenou terminologii simplexové metody; pouze bychom měli na zřeteli, že můžeme pracovat rovněž s obecnými úlohami (P) a (D). Provádět uvedenou „velkou změnu v označení“ je snad výhodné na přednáškách kursu lineárního programování pro studenty, aby při samostudiu mohli použít některou z řady už napsaných knih o lineárním programování a simplexové metodě. V této práci se ale použití popsaného přístupu nejeví vhodné, neboť bychom ztratili návaznost na § 6.

Při výkladu simplexové metody v tomto paragrafu, § 15, tedy chceme zachovat označení použité v úlohách (P) a (D). Současně ale chceme používat už ustálenou terminologii simplexové metody, aby bylo možné využít už existující literaturu o této metodě. Oběma uvedeným požadavkům vyhovíme tak, že význam úloh (P) a (D) zaměníme pouze částečně: budeme pracovat s úlohami

$$
\begin{array}{llll}
(\mathrm{P}^*) & \iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \longrightarrow \min & (\mathrm{D}^*) & \gamma(x) \longrightarrow \max \\
 & \iota\boldsymbol{u}^T A = \gamma\,, & & Ax \leq \boldsymbol{b}\,. \\
 & \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}\,, & &
\end{array}
$$

Dále budeme používat už ustálenou terminologii simplexové metody, avšak na odlišnost použitého významu budeme upozorňovat tím, že slova „primární“ a „duální“ opatříme hvězdičkou „*“. O úloze (P^*) tedy budeme hovořit jako o úloze *primární**, o úloze (D^*) budeme hovořit jako o úloze *duální**. K tomu budeme hovořit o *primární* / duální* simplexové metodě* či *primárně* / duálně* přípustné bázi* apod. O lineárních formách $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, z nichž je lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m$ sestaveno a které odpovídají sloupcům matice $\boldsymbol{A}$, budeme hovořit také jako o *sloupcích**, tj., hvězdičku „*“ přidáme také ke slovu „sloupec“.

15.5. Poznámka. Nechť F je těleso s lineárním uspořádáním, ať W je vektorový prostor nad tělesem F a nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Mějme přirozené číslo m (lze vzít i $m = 0$), lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m\colon W \to F^m$, sloupcový vektor $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$ a lineární zobrazení $\gamma\colon W \to V$. Zde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární formy definované na prostoru W a $b_1, \ldots, b_m$ jsou skaláry z tělesa F. Jak jsme v předcházející poznámce 15.4 uvedli, v tomto paragrafu budeme pracovat s následující primární* úlohou (vlevo) a úlohou k ní duální* (vpravo), kde $\boldsymbol{u} \in V^m$ a $x \in W$ jsou proměnné:

$$
\begin{array}{llll}
(\mathrm{P}^*) & \iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \longrightarrow \min & (\mathrm{D}^*) & \gamma(x) \longrightarrow \max \\
 & \iota\boldsymbol{u}^T A = \gamma\,, & & Ax \leq \boldsymbol{b}\,. \\
 & \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}\,, & &
\end{array}
$$

Poznamenejme, že primární* úloha (P^*) a duální* úloha (D^*) je po řadě duální úloha (D) a primární úloha (P) z poznámky 6.4.

15.6. Po úvodních poznámkách přejdeme k zavádění základních pojmů simplexové metody. V následující definici 15.7 zavedeme všeobecně známý pojem báze.

15.7. Definice. Báze (lineárního zobrazení). Nechť W je vektorový prostor nad tělesem F. Ať m je přirozené číslo (může být i $m = 0$) a ať $A = (\alpha_i)_{i=1}^m\colon W \to F^m$ je lineární zobrazení, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární formy definované na prostoru W. Zvolme libovolnou podmnožinu $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$ množiny indexů $\{1, \ldots, m\}$.

Množina indexů B je *báze* (lineárního zobrazení A) právě tehdy, když množina sloupců* resp. lineárních forem $\{\, \alpha_i \,;\, i \in B \,\}$ tvoří bázi (ve smyslu definice 1.25) prostoru $\operatorname{Lin} A$. (Množina $\operatorname{Lin} A$, viz definici 14.2, je podprostorem algebraického duálu $W^{\#}$. Podprostor $\operatorname{Lin} A$ tedy vybavíme strukturou (pravého) vektorového prostoru nad tělesem F tím, že strukturu algebraického duálu $W^{\#}$ zúžíme na podprostor $\operatorname{Lin} A$, viz poznámku 1.16.)

Ekvivalentně lze říci, že množina indexů B je báze právě tehdy, když je to maximální možná podmnožina množiny indexů $\{1, \ldots, m\}$ taková, že množina sloupců* $\{\, \alpha_i \,;\, i \in B \,\}$ je ještě (v duálu $W^{\#}$) lineárně nezávislá. Poznamenejme, že někdy se bází (lineárního zobrazení A) nemyslí množina indexů B, nýbrž zmíněná množina sloupců* $\{\, \alpha_i \,;\, i \in B \,\}$. (Srov. [46: Kapitola I Sekce 5 „Jak dělat fázi II“ (na str. 36)].)

15.8. Zatímco pojmy bazického řešení a jeho degenerace, které v následující definici 15.9 připomeneme, jsou všeobecně známé, zdá se být účelné zavést rovněž pojem duálně* bazického řešení a duální* degenerace.

15.9. Definice. Bazické řešení a (primární*) degenerace. Duálně* bazické řešení a duální* degenerace. Ať W a V jsou vektorové prostory nad tělesem F. Mějme přirozené číslo m (lze vzít i $m = 0$) a dvě lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ a $\gamma: W \to V$, přičemž $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární formy definované na prostoru W. Položme pro stručnost $N = \dim \operatorname{Lin} A$ (definice 14.2 a 14.3).

Nechť sloupec vektorů $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$ splňuje rovnici $\iota \boldsymbol{u}^T A = \gamma$. Množina $B' = \{\, i \in \{1, \ldots, m\} \,;\ u_i \neq 0 \,\}$ budiž množinou indexů všech nenulových složek sloupce $\boldsymbol{u}$, kde 0 je nulový vektor prostoru V. Řekneme, že sloupec $\boldsymbol{u}$ je *bazickým řešením* rovnice $\iota \boldsymbol{u}^T A = \gamma$, právě tehdy, když množina sloupců* $\{\, \alpha_i \,;\ i \in B' \,\}$ je lineárně nezávislá. Bazické řešení $\boldsymbol{u}$ je *degenerované* právě tehdy, když množina sloupců* $\{\, \alpha_i \,;\ i \in B' \,\}$ ještě netvoří bázi prostoru $\operatorname{Lin} A$, počet prvků této množiny je menší než N.

Řešení $\boldsymbol{u}$ rovnice $\iota \boldsymbol{u}^T A = \gamma$ je *nebazické* právě tehdy, když není bazické. Bazické řešení $\boldsymbol{u}$ této rovnice je *nedegenerované* tehdy a jen tehdy, když není degenerované. Pro zdůraznění se zdá být účelné o bazickém řešení hovořit jako o *primárně* bazickém řešení* (vzhledem ke zobrazení A a γ). Je-li dané bazické řešení degenerované, jde o degenerované primárně* bazické řešení.

Stále mějme vektorový prostor W nad tělesem F, přirozené číslo m (lze vzít i $m = 0$) a lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární formy definované na prostoru W. Navíc mějme sloupcový vektor $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$, kde $b_1, \ldots, b_m$ jsou skaláry z tělesa F. Pro stručnost opět položme $N = \dim \operatorname{Lin} A$.

Zvolme libovolný bod $x \in W$. Ať $B' = \{\, i \in \{1, \ldots, m\} \,;\ \alpha_i(x) = b_i \,\}$ je množinou indexů všech podmínek, které jsou ve zvoleném bodě x aktivní. (Poznámka: Kdyby těleso F bylo lineárně uspořádané, byla by řeč o omezujících podmínkách $Ax \leq \boldsymbol{b}$. Srov. duální* úlohu (D*) z poznámky 15.5.) Pak zvolený bod x je *duálně* bazickým řešením* (vzhledem k zobrazení A a sloupcovému vektoru $\boldsymbol{b}$) právě tehdy, když lineární obal množiny sloupců* $\{\, \alpha_i \,;\ i \in B' \,\}$ je roven celému prostoru $\operatorname{Lin} A$. Duálně* bazické řešení x je *degenerované* právě tehdy, když množina sloupců* $\{\, \alpha_i \,;\ i \in B' \,\}$ už netvoří bázi prostoru $\operatorname{Lin} A$, počet prvků této množiny je větší než N.

15.10. Připomeňme označení, které jsme zavedli v definici 6.9, viz též navazující poznámku 6.10. Nechť F je těleso s lineárním uspořádáním, ať W je vektorový prostor nad tělesem F a nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Budiž dáno přirozené číslo m (může být i $m = 0$), lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$, sloupcový vektor $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$ a sloupec vektorů $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$. Zde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární formy definované na prostoru W, dále $b_1, \ldots, b_m$ jsou skaláry z tělesa F a $u_1, \ldots, u_m$ jsou vektory z prostoru V. Mějme libovolnou podmnožinu $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ množiny indexů $\{1, \ldots, m\}$. Potom máme

$$A_I = (\alpha_i)_{i \in I} : W \to F^I, \qquad \boldsymbol{b}_I = (b_i)_{i \in I} \in F^I, \qquad \boldsymbol{u}_I = (u_i)_{i \in I} \in V^I,$$

tedy po řadě lineární zobrazení, sloupcový vektor a sloupec vektorů.

15.11. Následující základní věta 15.12 lineárního programování je rozšířením základní věty 14.28 lineárního programování, kterou už známe.

15.12. Základní věta lineárního programování. *Ať V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F a ať W je vektorový prostor nad tělesem F. Nechť m je přirozené číslo (může být i $m = 0$), nechť $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ a $\gamma: W \to V$ jsou lineární zobrazení a $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$ je sloupcový vektor, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární formy definované na prostoru W a $b_1, \ldots, b_m$ jsou skaláry z tělesa F. Uvažujme následující primární* (vlevo) a duální* (vpravo) úlohu lineárního programování, kde $\boldsymbol{u} \in V^m$ a $x \in W$ jsou proměnné:*

$$\text{(P*)} \quad \begin{aligned} \iota \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} &\longrightarrow \min \\ \iota \boldsymbol{u}^T A &= \gamma\,, \\ \boldsymbol{u} &\succeq \boldsymbol{o}\,, \end{aligned} \qquad\qquad \text{(D*)} \quad \begin{aligned} \gamma(x) &\longrightarrow \max \\ Ax &\leq \boldsymbol{b}\,. \end{aligned}$$

Potom platí:

I. *Jestliže úloha* (P*) *má alespoň jedno přípustné řešení, potom má i alespoň jedno přípustné primárně* bazické řešení.*

II. *Jestliže úloha* (D*) *má alespoň jedno přípustné řešení, potom má i alespoň jedno přípustné duálně* bazické řešení.*

III. *Jestliže úloha* (P*) *má alespoň jedno optimální řešení, potom má i alespoň jedno optimální primárně* bazické řešení.*

IV. *Jestliže úloha* (D*) *má alespoň jedno optimální řešení, potom má i alespoň jedno optimální duálně* bazické řešení.*

15.12.a. *Náznak důkazu.* I. Stačí vzít jakékoliv přípustné řešení $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$ primární* úlohy, splňující $\iota\boldsymbol{u}^T A = \gamma$ a $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$, které má co největší počet nulových složek, množina $N = \{\, i \in \{1,\ldots,m\}\ ;\ u_i = 0 \,\}$ má co největší počet prvků. Pro spor předpokládejme, že takové řešení $\boldsymbol{u}$ není bazické, takže množina sloupců* $\{\, \alpha_i\ ;\ i \in B \,\}$, kde jsme položili $B = \{1,\ldots,m\} \setminus N$, je lineárně závislá. Existuje tedy nenulový sloupcový vektor $\boldsymbol{\lambda}_B = (\lambda_i)_{i\in B} \in F^B$ takový, že $\iota\boldsymbol{\lambda}_B^T A_B = o$, kde $o\colon W \to F$ je nulová lineární forma. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\lambda_i > 0$ pro alespoň jedno $i \in B$ (jinak vezmeme $\boldsymbol{\lambda}_B := -\boldsymbol{\lambda}_B$). Položme $v = \min\{\, \lambda_i^{-1} u_i\ ; i \in B,\ \lambda_i > 0 \,\}$. Najdeme tedy index $j \in B$ tak, aby $\lambda_j > 0$ a $v = \lambda_j^{-1} u_j \preceq \lambda_i^{-1} u_i$ pro všechna $i \in B$, pro něž $\lambda_i > 0$. Nyní určíme sloupec vektorů $\hat{\boldsymbol{u}} = (\hat{u}_i)_{i=1}^m \in V^m$ tak, aby $\hat{u}_i = u_i - \lambda_i v$ pro $i \in B$ a $\hat{\boldsymbol{u}}_N = \boldsymbol{o}_N$, kde $\boldsymbol{o}_N$ je nulový vektor prostoru V^N. Pak máme

$$\iota\hat{\boldsymbol{u}}^T A = \iota\hat{\boldsymbol{u}}_B^T A_B + \iota\hat{\boldsymbol{u}}_N^T A_N = \iota\hat{\boldsymbol{u}}_B^T A_B = \iota\boldsymbol{u}_B^T A_B - \iota v \iota\boldsymbol{\lambda}_B^T A_B = \gamma - o = \gamma\,,$$

kde $o\colon W \to V$ je nulové lineární zobrazení. Vzhledem k volbě vektoru v máme $\hat{\boldsymbol{u}} \succeq \boldsymbol{o}$ a oproti sloupci $\boldsymbol{u}$ má sloupec $\hat{\boldsymbol{u}}$ o alespoň jednu nulovou složku více – je $\hat{u}_j = 0$, přičemž $j \in B$ – spor. (Srov. [76: část (a) Teorému 1 (v Sekci 3.1 na str. 36)] nebo [46: Kapitola I Sekce 4 první část Teorému (na str. 29)].)

II. Z definice duálně* bazického řešení a části III. věty 14.23 (s přihlédnutím k prvnímu a třetímu lemmatu 14.15 a 14.19 a čtvrtému tvrzení 14.21) plyne, že dané řešení je přípustné duálně* bazické řešení právě tehdy, když je prvkem minimální stěny. Ovšemže každý neprázdný konvexní polyedr má alespoň jednu minimální stěnu, neboť počet všech jeho stěn je konečný (věta 14.26). (Lze postupovat obdobně jako v důkazu 14.28.b základní věty 14.28 LP. Vlastně jde o důsledek této věty 14.28, hledáme-li maximum nulové funkce.) Protože každá (minimální) stěna musí být neprázdná, plyne odtud, že alespoň jedno přípustné duálně* bazické řešení existuje.

III. Ze všech optimálních řešení $\boldsymbol{u}^* = (u_i^*)_{i=1}^m \in V^m$ primární* úlohy vezmeme to, které má co největší počet nulových složek, aby množina $N = \{\, i \in \{1,\ldots,m\};\ u_i^* = 0 \,\}$ měla co největší počet prvků. Není-li řešení $\boldsymbol{u}^*$ bazické, množina sloupců* $\{\, \alpha_i\ ;\ i \in B \,\}$ je lineárně závislá, existuje nenulové $\boldsymbol{\lambda}_B = (\lambda_i)_{i\in B} \in F^B$ splňující $\iota\boldsymbol{\lambda}_B^T A_B = o$, kde $B = \{1,\ldots,m\} \setminus N$ a $o\colon W \to F$ je nulová lineární forma. Ukážeme, že $\iota\boldsymbol{\lambda}_B^T \boldsymbol{b}_B = 0$.

Kdyby $\iota\boldsymbol{\lambda}_B^T \boldsymbol{b}_B \neq 0$, pak bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\iota\boldsymbol{\lambda}_B^T \boldsymbol{b}_B > 0$ (jinak vezmeme $\boldsymbol{\lambda}_B := -\boldsymbol{\lambda}_B$). Nyní stačí vzít sloupec vektorů $\hat{\boldsymbol{u}} = (\hat{u}_i)_{i=1}^m \in V^m$ takový, aby $\hat{u}_i = u_i^* - \lambda_i v$ pro $i \in B$ a aby $\hat{\boldsymbol{u}}_N = \boldsymbol{o}_N$, přičemž kladný vektor $v \in V$, tedy $v \succ 0$, volíme tak, aby platilo $\hat{\boldsymbol{u}} \succeq \boldsymbol{o}$. (Poznamenejme, že alespoň jeden kladný vektor $v \in V$ existuje, neboť vektorový prostor V je netriviální, ježto množina B je neprázdná, protože řešení $\boldsymbol{u}^*$ je nebazické. Je-li $\boldsymbol{\lambda}_B \leq \boldsymbol{o}_B$, zvol $v \succ 0$ libovolně. Jinak vezmi $v = \min \iota_{i\in I} \lambda_i^{-1} u_i$, kde $I = \{\, i \in B\ ;\ \lambda_i > 0 \,\}$.) Pak máme $\iota\hat{\boldsymbol{u}}^T A = \gamma$ a

$$\begin{aligned}\iota\hat{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{b} = \iota\hat{\boldsymbol{u}}_B^T \boldsymbol{b}_B + \iota\hat{\boldsymbol{u}}_N^T \boldsymbol{b}_N = \iota\hat{\boldsymbol{u}}_B^T \boldsymbol{b}_B = \iota{\boldsymbol{u}_B^*}^T \boldsymbol{b}_B - \iota v \iota\boldsymbol{\lambda}_B^T \boldsymbol{b}_B \prec\\ \prec \iota{\boldsymbol{u}_B^*}^T \boldsymbol{b}_B = \iota{\boldsymbol{u}_B^*}^T \boldsymbol{b}_B + \iota{\boldsymbol{u}_N^*}^T \boldsymbol{b}_N = \iota{\boldsymbol{u}^*}^T \boldsymbol{b}\,,\end{aligned}$$

což je spor s optimalitou řešení $\boldsymbol{u}^*$. Platí tedy, že $\iota\boldsymbol{\lambda}_B^T \boldsymbol{b}_B = 0$.

Nyní stačí zopakovat část I. Bez újmy na obecnosti máme $\lambda_i > 0$ pro alespoň jedno $i \in B$, určíme vektor $v \in V$ a najdeme index $j \in B$ splňující $\lambda_j > 0$ a $v = \lambda_j^{-1} u_j \preceq \lambda_i^{-1} u_i$

pro všechna $i \in B$ taková, že $\lambda_i > 0$. Určíme sloupec vektorů $\hat{\boldsymbol{u}} = (\hat{u}_i)_{i=1}^m \in V^m$ tak, aby $\hat{u}_i = u_i - \lambda_i v$ pro $i \in B$ a $\hat{\boldsymbol{u}}_N = \boldsymbol{o}_N$. Potom $\iota\hat{\boldsymbol{u}}^T A = \gamma$ a $\hat{\boldsymbol{u}} \succeq \boldsymbol{o}$, navíc $\iota\hat{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{b} = \iota\boldsymbol{u}^{*T}\boldsymbol{b}$, přičemž sloupec $\hat{\boldsymbol{u}}$ má oproti sloupci $\boldsymbol{u}^*$ o alespoň jednu nulovou složku více – $\hat{u}_j = 0$ – spor. (Srov. [76: část (b) Teorému 1 (v Sekci 3.1 na str. 36)] nebo [46: Kapitola I Sekce 4 druhá část Teorému (na str. 29)].)

IV. Vzhledem k části III. věty 14.23 (s přihlédnutím k prvnímu a třetímu lemmatu 14.15 a 14.19 a čtvrtému tvrzení 14.21) jde jen o jinou formulaci základní věty 14.28. □

15.13. Ve výše uvedených definicích 15.7 a 15.9 jsme zavedli pojem báze a bazického řešení; zavedli jsme rovněž pojem primární* i duální* degenerace bazického řešení. V následující definici 15.14 ukážeme, jakým způsobem každá báze určuje primární* a duální* řešení; k tomu zavedeme pojem přípustnosti a optimality báze.

15.14. Definice. Primární* řešení určené bází, primárně* přípustná báze. Duální* řešení určené bází, duálně* přípustná báze. Optimální báze. Nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F a nechť W je vektorový prostor nad tělesem F. Budiž dáno přirozené číslo m (může být také $m = 0$), k tomu mějme dvě lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ a $\gamma : W \to V$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární formy definované na prostoru W. Předpokládejme, že $\gamma \in \mathrm{Lin}_V A$, takže $\gamma = \iota\tilde{\boldsymbol{u}}^T A$ pro alespoň jedno $\tilde{\boldsymbol{u}} \in V^m$. Dále zvolme libovolnou bázi $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$ lineárního zobrazení A a položme $N = \{1, \ldots, m\} \setminus B$.

Hledejme sloupec vektorů $\boldsymbol{u} \in V^m$ tak, aby $\iota\boldsymbol{u}_B^T A_B = \gamma$ a aby $\boldsymbol{u}_N = \boldsymbol{o}_N$, kde $\boldsymbol{o}_N$ je nulový vektor prostoru V^N. (Poznamenejme, že ke každému $\gamma \in \mathrm{Lin}_V A$ existuje právě jedno $\boldsymbol{u}_B \in V^B$ tak, aby $\iota\boldsymbol{u}_B^T A_B = \gamma$. Když $\boldsymbol{u}_B, \boldsymbol{v}_B \in V^B$ jsou taková, že $\iota\boldsymbol{u}_B^T A_B = \gamma$ a $\iota\boldsymbol{v}_B^T A_B = \gamma$, potom $\iota(\boldsymbol{u}_B - \boldsymbol{v}_B)^T A_B = o$. Kdyby $\boldsymbol{u}_B - \boldsymbol{v}_B \neq \boldsymbol{o}_B$, pak vektorový prostor V by byl netriviální a vzhledem k tvrzení 2.23 by B nebyla báze. Tím jsme odůvodnili jednoznačnost. Zbývá dokázat existenci. Máme $\tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{u}_i)_{i=1}^m \in V^m$ splňující $\gamma = \iota\tilde{\boldsymbol{u}}^T A$. Protože B je báze, ke každému $j \in N$ existuje (právě jeden) sloupcový vektor $\boldsymbol{\lambda}_j = (\lambda_{ji})_{i\in B} \in F^B$ takový, že $\alpha_j = \iota\boldsymbol{\lambda}_j^T A_B$. Má-li platit $\iota\boldsymbol{u}_B^T A_B = \gamma$, potom sloupec $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$ stačí volit tak, aby $u_i = \tilde{u}_i + \sum_{j\in N} \lambda_{ji}\tilde{u}_j$ pro $i \in B$.)

Shrňme, že každá báze B určuje právě jedno $\boldsymbol{u} \in V^m$ takové, že $\iota\boldsymbol{u}_B^T A_B = \gamma$ a $\boldsymbol{u}_N = \boldsymbol{o}_N$, a toto $\boldsymbol{u}$ nazýváme *primárním* řešením určeným bází B*. Povšimněme si, že získané řešení $\boldsymbol{u}$ je (primárně*) bazické. (Primárně* bazické řešení $\boldsymbol{u}$ může nebo nemusí být degenerované. Na druhou stranu, máme-li primárně* bazické řešení $\boldsymbol{u}$, potom existuje báze B, kterou je řešení $\boldsymbol{u}$ určeno; taková báze B existuje právě jedna tehdy a jen tehdy, když řešení $\boldsymbol{u}$ je nedegenerované.) Řekneme, že báze B je *primárně* přípustná* (vzhledem ke zobrazení A a γ) právě tehdy, když získané řešení $\boldsymbol{u}$ je nezáporné, $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$, kde $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor prostoru V^m.

Protože $\boldsymbol{u}_N = \boldsymbol{o}_N$, k primární* přípustnosti báze B stačí, aby $\boldsymbol{u}_B \succeq \boldsymbol{o}_B$. Dodejme, že když $\iota\boldsymbol{u}_B^T A_B = \gamma$ a $\boldsymbol{u}_N = \boldsymbol{o}_N$, potom $\iota\boldsymbol{u}^T A = \iota\boldsymbol{u}_B^T A_B + \iota\boldsymbol{u}_N^T A_N = \iota\boldsymbol{u}_B^T A_B = \gamma$.

Chápeme-li sloupec $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$ jako sloupec proměnných, potom proměnné u_i, kde $i \in B$, nazýváme *bazickými proměnnými* (vzhledem k bázi B) a proměnné u_j, kde $j \in N$, nazýváme *nebazickými proměnnými* (vzhledem k bázi B).

Ať stále W je vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F, dále m je přirozené číslo (může být i $m = 0$) a $A : W \to F^m$ je lineární zobrazení. Navíc budiž dán sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$. Opět zvolme libovolnou bázi $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$ lineárního zobrazení A a položme $N = \{1, \ldots, m\} \setminus B$.

Hledejme bod $x \in W$ tak, aby $A_B x = \boldsymbol{b}_B$. (Poznamenejme, že soustava lineárních rovnic $A_B x = \boldsymbol{b}_B$ má alespoň jedno řešení pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b}_B \in F^B$. To plyne z „Fredholmovy alternativy“ 2.20, protože B je báze.)

Vidíme, že každá báze B určuje (ne nutně jednoznačně, tj.) alespoň jeden bod $x \in W$ takový, že $A_B x = \boldsymbol{b}_B$, a tento bod x nazveme *duálním* řešením určeným bází B*. Je zřejmé, že řešení x je duálně* bazické. (Přičemž duálně* bazické řešení x může nebo nemusí být degenerované. Máme-li duálně* bazické řešení x, potom existuje báze B, jíž je řešení x určeno; taková báze B existuje právě jedna tehdy a jen tehdy, když řešení x není degenerované.) Řekneme, že báze B je *duálně* přípustná* (vzhledem k zobrazení A a sloupcovému vektoru $\boldsymbol{b}$) tehdy a jen tehdy, když pro získané řešení x platí $Ax \leq \boldsymbol{b}$.

Ježto $A_B x = \boldsymbol{b}_B$, k duální* přípustnosti báze B postačuje, aby $A_N x \leq \boldsymbol{b}_N$.

Stále mějme lineárně uspořádané těleso F, vektorový prostor W nad tělesem F, vektorový prostor V s lineárním uspořádáním nad lineárně uspořádaným tělesem F, přirozené číslo m (lze vzít i $m = 0$), dvě lineární zobrazení $A\colon W \to F^m$ a $\gamma\colon W \to V$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$, přičemž $\gamma \in \operatorname{Lin}_V A$. Budiž dána báze $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$ lineárního zobrazení A a položme $N = \{1, \ldots, m\} \setminus B$.

Řekneme že báze B je *optimální* (vzhledem ke zobrazení A a γ a sloupcovému vektoru $\boldsymbol{b}$) právě tehdy, když je primárně* přípustná (vzhledem ke zobrazení A a γ) a současně duálně přípustná (vzhledem k zobrazení A a sloupcovému vektoru $\boldsymbol{b}$).

Nechť B je nějaká báze (ne nutně primárně* přípustná, ne nutně duálně* přípustná, ne nutně optimální). Ať $\boldsymbol{u} \in V$ a $x \in W$ je po řadě primárním* a duálním* řešením určeným bází B. Povšimněme si, že

$$\begin{aligned}\gamma(x) = \iota\boldsymbol{u}_B^T A_B x &= \iota\boldsymbol{u}_B^T A_B x + \iota\boldsymbol{u}_N^T A_N x = \iota\boldsymbol{u}^T A x = \\ &= \iota\boldsymbol{u}_B^T \boldsymbol{b}_B = \iota\boldsymbol{u}_B^T \boldsymbol{b}_B + \iota\boldsymbol{u}_N^T \boldsymbol{b}_N = \iota\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b}\,,\end{aligned}$$

tedy $\gamma(x) = \iota\boldsymbol{u}^T A x = \iota\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b}$. Je-li báze B optimální, potom řešení $\boldsymbol{u}$ a x jsou přípustnými řešeními úloh (P^*) a (D^*) z poznámky 15.5, platí $\gamma(x) = \iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b}$, načež podle věty 6.6 o slabé dualitě (poznámka 6.7.a) jsou $\boldsymbol{u}$ a x optimálními řešeními úloh (P^*) a (D^*). Vidíme, že pojmenování optimální báze – pro bázi, která je současně primárně* i duálně* přípustná – je odůvodněné.

15.15. Poznámka. V běžně dostupné literatuře o lineárním programování (např. [76: začátek Kapitoly 3]), kde se studují úlohy (P') a (D') konečněrozměrného LP z poznámky 15.4, se obvykle předpokládá, že číslo m je menší než číslo n a že hodnost matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je rovna číslu m. Tím se zaručí, že soustava rovnic $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je proměnná, má alespoň jedno řešení, ať už je pravá strana $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ zvolena jakkoliv. (Znaky m, n, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x}$ mají stejný význam jako na začátku poznámky 15.4.) Dále jsme v poznámce 15.4 uvedli, že přirozené číslo m ve skutečnosti může být větší než n, dokonce si můžeme představovat, že sloupce matice $\boldsymbol{A}$ jsou „nekonečně vysoké“. To naznačuje, že použitý předpoklad o hodnosti matice $\boldsymbol{A}$ je možná zbytečně silný. V předcházející definici 15.14 jsme ostatně žádný takový předpoklad nečinili, ve skutečnosti by to v přístupu, který v tomto paragrafu používáme, ani nebylo možné (nepracujeme s maticí $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, nýbrž s lineárním zobrazením $A\colon W \to F^m$). Diskutovaný předpoklad o hodnosti matice $\boldsymbol{A}$ ovšem nelze zcela zanedbat: na počátku předcházející definice 15.14 jsme jej použili v jiné podobě, resp. nahradili jsme jej předpokladem, že $\gamma \in \operatorname{Lin}_V A$.

15.16. Nyní můžeme přistoupit k popisu běžného kroku simplexové metody. Začneme primární* simplexovou metodou.

15.17. Běžný krok (tj. fáze II) primární* simplexové metody. Nechť F je těleso s lineárním uspořádáním. Ať W je vektorový prostor nad tělesem F a ať V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Budiž dáno přirozené číslo m (lze vzít i $m = 0$), dvě lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m\colon W \to F^m$ a $\gamma\colon W \to V$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$. Zde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární formy na prostoru W a $b_1, \ldots, b_m$ jsou skaláry z tělesa F. Předpokládejme, že $\gamma \in \operatorname{Lin}_V A$ a že vektorový prostor V je netriviální.

15.17.a. Mějme bázi $B \subseteq \{1,\dots,m\}$ lineárního zobrazení A. Položme $N = \{1,\dots,m\} \setminus B$. Báze B budiž primárně* přípustná, nechť $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$ je primární* řešení určené touto bází B. Máme tedy $\iota \boldsymbol{u}_B^T A_B = \iota \boldsymbol{u}^T A = \gamma$ a $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$, k tomu $\boldsymbol{u}_N = \boldsymbol{o}_N$.

15.17.b. Ptáme se, zda báze B je i duálně* přípustná. Řešíme tedy soustavu $A_B x = \boldsymbol{b}_B$. (Alespoň jedno řešení existuje.) Nyní se ptáme, zda $Ax \leq \boldsymbol{b}$. (Poznámka: Rozdíl $\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{b} - Ax$ se v literatuře nazývá *vektorem redukovaných cen.* Ptáme se tedy, zda sloupcový vektor redukovaných cen je nezáporný, $\tilde{\boldsymbol{c}} \geq \boldsymbol{o}$. Redukované ceny bazických proměnných jsou ovšem vždy nulové, $\tilde{\boldsymbol{c}}_B = \boldsymbol{o}_B$.) Rozlišíme dvě možnosti:

15.17.c. Jestliže $A_N x \leq \boldsymbol{b}_N$, potom báze B je optimální, jí určená řešení $\boldsymbol{u}$ a x jsou optimálními řešeními úloh (P*) a (D*) z poznámky 15.5 a s tímto závěrem výpočet ukončíme.

15.17.d. Jestliže vztah $A_N x \leq \boldsymbol{b}_N$ neplatí, pak ať $j \in N$ je index nebazické proměnné takový, že $\alpha_j(x) > b_j$ (redukovaná cena proměnné u_j je záporná).

Lineární formu α_j vyjádříme jako lineární kombinaci ostatních forem z báze, tj. množiny $\{\alpha_i\,;\ i \in B\}$, hledáme $\boldsymbol{\lambda}_B = (\lambda_i)_{i\in B} \in F^B$ tak, aby $\alpha_j = \iota \boldsymbol{\lambda}_B^T A_B$. (Takové $\boldsymbol{\lambda}_B \in F^B$ existuje právě jedno, protože B je báze.)

Povšimněme si, že pro každý vektor $v \in V$ platí $\iota v \alpha_j + (\iota \boldsymbol{u}_B^T A_B - \iota v \iota \boldsymbol{\lambda}_B^T A_B) = \gamma$. Zde $\iota v \iota \boldsymbol{\lambda}_B^T A_B\colon W \to V$ je zobrazení vzniklé složením zobrazení $A_B\colon W \to F^B$, dále $\iota \boldsymbol{\lambda}_B^T\colon F^B \to F$ a $\iota v\colon F \to V$. Dodejme, že $\iota v \iota \boldsymbol{\lambda}_B^T = (\lambda_i v)_{i\in B}^T$. Dále máme $b_j < \alpha_j(x) = \iota \boldsymbol{\lambda}_B^T A_B x = \iota \boldsymbol{\lambda}_B^T \boldsymbol{b}_B$, odtud $\iota v b_j + (\iota \boldsymbol{u}_B^T \boldsymbol{b}_B - \iota v \iota \boldsymbol{\lambda}_B^T \boldsymbol{b}_B) \prec \iota \boldsymbol{u}_B^T \boldsymbol{b}_B$ pro každý kladný vektor $v \in V$, splňující $v \succ 0$. Vektor $v \succeq 0$ nyní budeme zvětšovat tak dlouho, jak to jen půjde, dokud sloupec $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\mu}$, kde $\boldsymbol{\mu} = (\lambda_i v)_{i=1}^m$, bude přípustným řešením primární* úlohy (P*). Opět rozlišíme dvě možnosti:

15.17.e. Buď vztah $\boldsymbol{\lambda}_B \leq \boldsymbol{o}_B$ platí. Pak $v \succ 0$ lze zvětšovat libovolně. Zadaná úloha (P*) z poznámky 15.5 nemá optimální řešení, protože její cílová funkce – při rostoucím $v \succ 0$, je-li ovšem prostor V netriviální, protože jinak žádný závěr nelze učinit – neomezeně klesá. Odtud plyne (poznámka 6.7.c), že úloha (D*) z poznámky 15.5 není přípustná. S tímto zjištěním výpočet ukončíme.

15.17.f. Anebo vztah $\boldsymbol{\lambda}_B \leq \boldsymbol{o}_B$ neplatí, je tedy $\lambda_i > 0$ pro alespoň jedno $i \in B$. Pak $v \succeq 0$ volíme co největší tak, aby ještě platilo $\boldsymbol{u}_B - \boldsymbol{\mu}_B \succeq \boldsymbol{o}$, kde $\boldsymbol{\mu}_B = (\lambda_i v)_{i\in B}$. Položme $v = \min\{\lambda_i^{-1} u_i\,; i \in B,\ \lambda_i > 0\}$. Najdeme tedy (alespoň jeden) index $k \in B$ tak, aby $\lambda_k > 0$ a $v = \lambda_k^{-1} u_k \preceq \lambda_i^{-1} u_i$ pro všechna $i \in B$, pro něž $\lambda_i > 0$. (Je-li výběr indexu k dvojznačný, volíme kterýkoliv z nich; následující primárně* bazické řešení bude degenerované – což ještě nemusí vadit.) Index j zařadíme do báze B a index k z ní vyřadíme. Proměnná u_j se stane bazickou, proměnná u_k se stane nebazickou. Tím máme novou bázi B, klademe $B := B \cup \{j\} \setminus \{k\}$, a vracíme se do kroku 15.17.a.

Ještě bychom měli ověřit, že nové B je báze. Položme $B' = B \setminus \{j\}$. Kdyby nové $B = B' \cup \{j\}$ nebylo báze, existovalo by $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{B'} \in F^{B'}$ takové, že $\alpha_j = \iota \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{B'}^T A_{B'}$. Z kroku 15.17.d ovšem máme (právě jedno) $\boldsymbol{\lambda}_{B'\cup\{k\}} \in F^{B'\cup\{k\}}$ splňující $\alpha_j = \iota \boldsymbol{\lambda}_{B'\cup\{k\}}^T A_{B'\cup\{k\}}$. Odtud plyne $\lambda_k = 0$, což je spor, protože máme $\lambda_k > 0$.

15.18. Poznámka. Konečnost algoritmu primární* simplexové metody. Degenerace a cyklus. Jestliže v posledním kroku 15.17.f primární* simplexové metody určíme $v \succ 0$, potom hodnota cílové funkce v novém bazickém řešení ostře poklesne (viz výpočty v kroku 15.17.d), takže nová báze dosud nebyla zkoumána. Podaří-li se nám v každé iteraci simplexové metody v kroku 15.17.f určit $v \succ 0$, potom každá možná báze bude během výpočtu zkoumána nejvýše jednou. Protože všech možných bází $B \subseteq \{1,\dots,m\}$ lineárního zobrazení A je konečný počet, jmenovitě $\binom{m}{N}$, kde $N = \dim \operatorname{Lin} A$, znamená to, že primární* simplexová metoda skončí po konečném počtu iterací (ať už v kroku 15.17.c anebo 15.17.e).

Jestliže však v posledním kroku 15.17.f určíme $v = 0$, potom hodnota cílové funkce nepoklesne. Stane-li se tato událost v několika po sobě jdoucích iteracích primární* simplexové metody, už nelze zaručit že zkoumané báze se neopakují a může dojít k *cyklu*: výpočet se zacyklí. Zmiňme některé souvislosti cyklu simplexové metody s degenerací.

Jestliže určíme $v = 0$, potom nové primárně* bazické řešení (určené v kroku 15.17.a následující iterace) bude degenerované, neboť určené v bude hodnotou nové bazické proměnné $u_j = v = 0$. Nadto, jestliže jsme určili $v = 0$, potom už současné primárně* bazické řešení muselo být degenerované, protože $v = \lambda_k^{-1} u_k = 0$, tudíž $u_k = 0$. Podaří-li se tedy zaručit, že žádné z primárně* bazických řešení nebude během výpočtu degenerované, potom vždy budeme určovat jen $v \succ 0$ a k cyklu nedojde.

Je všeobecně známo, že pokud v kroku 15.17.f dojde k dvojznačné volbě indexu k, který opouští bázi, potom následující primárně* bazické řešení bude určitě degenerované. (Tvrzení platí také obráceně: jestliže primárně* bazické řešení z první iterace nebylo degenerované a během výpočtu nastane degenerace, mohlo to být jedině z důvodu dvojznačné volby indexu k v kroku 15.17.f.) Na druhou stranu, jak jsme v kroku 15.17.f poznamenali, degenerace následujícího primárně* bazického řešení nemusí vadit: ačkoliv pracujeme s degenerovaným řešením, v kroku 15.17.f se nám nakonec vždy po čase může podařit určit $v \succ 0$, a k cyklu tudíž nedojde. Ve skutečnosti je dosti obtížné najít příklad, který by dosvědčil, že primární* simplexová metoda se může zacyklit (viz však [76: komentář na konci Sekce 5.5]!!). Jeden takový příklad lze nalézt v [76: Sekce 5.5].

15.19. Poznámka. Odstranění degenerace v primární* simplexové metodě. Lexikografická pravidla. V předcházející poznámce 15.18 jsme odvodili, že když primárně* bazické řešení v žádné iteraci simplexové metody nebude degenerované, potom k cyklu nedojde. Nyní si povšimněme, že když bude splněna následující podmínka (1), potom žádné primárně* bazické řešení nebude degenerované (a tudíž k cyklu nedojde):

Jestliže pro $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^m \in V^m$ *platí* $\iota \boldsymbol{u}^T A = \gamma$, *potom alespoň* $N = \dim \operatorname{Lin} A$ *složek sloupce* $\boldsymbol{u}$ *je nenulových, množina* $\big\{ i \in \{1, \dots, m\} \,;\, u_i \neq 0 \big\}$ *má alespoň* N *prvků.* (1)

Jedním ze způsobů, jak uvedenou podmínku (1) splnit, je použití tzv. *lexikografických pravidel*, viz známý článek [25].

Nechť znaky W, V, F, m, A, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, $\boldsymbol{b}$ a γ mají stejný význam jako v poznámce 15.5, k tomu uvažujme úlohy (P*) a (D*) z téže poznámky 15.5. Ať $B \subseteq \{1, \dots, m\}$ je libovolná báze lineárního zobrazení A. Položme $\bar{V} = V \dot{\times} F^B$ – jde o součin prostorů dle definice 1.52. Prostor F^B lexikograficky uspořádáme (jako v příkladu 3.17), načež lexikograficky uspořádáme rovněž prostor $\bar{V}$ (pro $\binom{u}{\boldsymbol{\lambda}} \in \bar{V} = V \dot{\times} F^B$ bude $\binom{u}{\boldsymbol{\lambda}} \succ \binom{0}{\boldsymbol{o}}$ právě tehdy, když $u \succ 0$ anebo $u = 0$ a $\boldsymbol{u} \succ \boldsymbol{o}$, kde 0 a $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor prostoru po řadě V a F^B). Dále položme $\Gamma = \binom{\gamma}{(\alpha_i)_{i \in B}} \colon W \to \bar{V}$ – nyní jde o součin lineárního zobrazení $\gamma \colon W \to V$ a lineárního zobrazení $(\alpha_i)_{i \in B} \colon W \to F^B$, které je součinem lineárních forem α_i, kde $i \in B$, dle definice 1.53. Od původních úloh (P*) a (D*) z poznámky 15.5 přejdeme k níže uvedené primární* (tj. ve skutečnosti duální, vlevo) a duální* (tj. ve skutečnosti primární, vpravo) úloze (lexikografického) lineárního programování, kde $\boldsymbol{u} \in \bar{V}^m$ a $x \in W$ jsou proměnné:

$$
(\mathrm{P}^*_{lex}) \quad \begin{aligned} \iota \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} &\longrightarrow \operatorname{lex\,min} \\ \iota \boldsymbol{u}^T A &= \Gamma, \\ \boldsymbol{u} &\succeq \boldsymbol{o}, \end{aligned} \qquad\qquad (\mathrm{D}^*_{lex}) \quad \begin{aligned} \Gamma(x) &\longrightarrow \operatorname{lex\,max} \\ Ax &\leq \boldsymbol{b}. \end{aligned}
$$

Není těžké nahlédnout, že když úloha (P*) je přípustná, potom též úloha (P^*_{lex}) je přípustná. (Následně vidíme, že úloha (P*) resp. (D*) je přípustná právě tehdy, když úloha po řadě (P^*_{lex}) resp. (D^*_{lex}) je přípustná.) Za pozornost rovněž stojí, že obě uvedené úlohy (P^*_{lex}) a (D^*_{lex}) jsou toliko speciálním případem už zkoumaných úloh (P*) a (D*) z poznámky 15.5 – v poznámce 15.5 stačí položit $V := \bar{V}$ a $\gamma := \Gamma$. Úlohy (P^*_{lex}) a (D^*_{lex}) tedy lze řešit primární* simplexovou metodou popsanou v odstavci 15.17. Dále si povšimněme, že úlohy (P^*_{lex}) a (D^*_{lex}) splňují výše uvedenou podmínku (1) – neboť výše zvolené B je báze –, takže žádné primárně* bazické řešení během výpočtu nebude degenerované. Ve výpočtu primární* simplexové metody tedy nedojde k cyklu. Nakonec poznamenejme, že když $\binom{u_i^*}{\boldsymbol{\lambda}_i^*}_{i=1}^m \in \bar{V}^m$ a $x^* \in W$ jsou optimálními řešeními úloh (P^*_{lex}) a (D^*_{lex}), potom $(u_i^*)_{i=1}^m \in V^m$ a $x^* \in W$ jsou optimálními řešeními úloh (P^*) a (D^*).

Použití uvedených lexikografických pravidel není jediným způsobem, kterým lze cyklu u primární* simplexové metody zabránit. Jiným způsobem je použití kombinatorických pravidel: zmiňme Blandovo pravidlo spočívající v tom, že indexy j a k se v krocích 15.17.d a 15.17.f volí jako nejmenší možné [18], [76: Sekce 5.6]. (Správnost Blandova pravidla je dokázána [18], [76: Sekce 5.6], jestliže vektorový prostor W je konečněrozměrný a za prostor V je dosazena aditivní grupa tělesa F s jeho uspořádáním. Bylo by vhodné ověřit, zda Blandovo pravidlo zaručí konečnost simplexové metody také v obecném případě, kdy vektorový prostor W může být nekonečněrozměrný a V je libovolný lineárně uspořádaný vektorový prostor.)

15.20. Primární* simplexová metoda popsaná v odstavci 15.17 umožňuje dokázat následující důležitou větu 15.21 o existenci optimálních řešení pro úlohy lineárního programování. Věta 15.21, kterou nyní uvedeme, významným způsobem doplňuje princip duality 6.15. (Srov. [49: Teorémy 1 a 2 (v Části 2)].)

15.21. Věta o existenci optimálních řešení pro úlohy lineárního programování. *Nechť F je těleso s lineárním uspořádáním. Ať W je vektorový prostor nad tělesem F a nechť V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Budiž dáno přirozené číslo m (může být i $m = 0$). K tomu budiž dána dvě lineární zobrazení $A\colon W \to F^m$ a $\gamma\colon W \to V$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$. Jestliže existuje (vůbec nějaký) bod $x \in W$ splňující $Ax \leq \boldsymbol{b}$ a sloupec vektorů $\boldsymbol{u} \in V^m$ takový, že $\iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A = \gamma$ a $\boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o}$, potom existuje bod $x^* \in W$ splňující $Ax^* \leq \boldsymbol{b}$ a sloupec vektorů $\boldsymbol{u}^* \in V^m$ takový, že $\iota{\boldsymbol{u}^*}^{\mathrm{T}}A = \gamma$ a $\boldsymbol{u}^* \succeq \boldsymbol{o}$, přičemž navíc platí $\gamma(x^*) = \iota{\boldsymbol{u}^*}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$.*

15.21.a. *Poznámka.* Uvedená věta 15.21 říká, že když obě úlohy (P^*) a (D^*) z poznámky 15.5 jsou přípustné, potom obě úlohy mají i optimální řešení $\boldsymbol{u}^*$ a x^*.

15.21.b. *Náznak důkazu.* Tvrzení věty je zřejmé, jestliže vektorový prostor V je triviální. Předpokládejme proto, že vektorový prostor V je netriviální. Důkaz provedeme použitím primární* simplexové metody 15.17. Abychom zabránili degeneraci, využijeme též lexikografická pravidla z poznámky 15.19. Protože úloha (P^*) je přípustná, úloha (P^*_{lex}) z poznámky 15.19 je rovněž přípustná a podle části I. základní věty 15.12 lineárního programování má alespoň jedno přípustné primárně* bazické řešení. Nechť $\mathfrak{B}$ je množina všech primárně* přípustných bází. Každá báze $B \in \mathfrak{B}$ určuje (právě jedno) přípustné primárně* bazické řešení $\binom{u_i^B}{\boldsymbol{\lambda}_i^B}_{i=1}^m \in \bar{V}^m$, kde $\bar{V}$ má význam z poznámky 15.19. Nechť $U = \left\{ \binom{u_i^B}{\boldsymbol{\lambda}_i^B}_{i=1}^m ;\ B \in \mathfrak{B} \right\}$ je množina všech přípustných primárně* bazických řešení. Zavedená množina U je neprázdná a konečná, protože množina $\mathfrak{B}$ je neprázdná a konečná. (Z definice 15.14 víme, že přípustné primárně* bazické řešení (jehož existenci jsme již odůvodnili) je určeno alespoň jednou primárně* přípustnou bází, proto $\mathfrak{B} \neq \emptyset$. Protože všech možných bází je konečný počet, množina $\mathfrak{B}$ je konečná.) Najdeme tudíž alespoň jedno $\binom{u_i^{B^*}}{\boldsymbol{\lambda}_i^{B^*}}_{i=1}^m \in U$ takové, že $\left(\binom{\iota u_i^{B^*}}{\iota\boldsymbol{\lambda}_i^{B^*}}_{i=1}^m\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \preceq \left(\binom{\iota u_i}{\iota\boldsymbol{\lambda}_i}_{i=1}^m\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ pro všechna $\binom{u_i}{\boldsymbol{\lambda}_i}_{i=1}^m \in U$. Ke sloupci $\binom{u_i^{B^*}}{\boldsymbol{\lambda}_i^{B^*}}_{i=1}^m$ existuje alespoň jedna báze $B^* \in \mathfrak{B}$, která jej určuje. Tvrdíme, že báze B^* je optimální: Provedeme jeden běžný krok primární* simplexové metody 15.17. Kdyby báze B^* nebyla optimální, výpočet se v kroku 15.17.c nezastaví. Protože duální* úloha (D^*), a tudíž i úloha (D^*_{lex}) z poznámky 15.19, je přípustná, výpočet se nezastaví ani v kroku 15.17.e. Pak ovšem v kroku 15.17.f najdeme novou bázi $\hat{B}$, určující přípustné primárně* bazické řešení $\binom{u_i^{\hat{B}}}{\boldsymbol{\lambda}_i^{\hat{B}}}_{i=1}^m \in U$, tak, že $\left(\binom{\iota u_i^{\hat{B}}}{\iota\boldsymbol{\lambda}_i^{\hat{B}}}_{i=1}^m\right)^T \boldsymbol{b} \prec \left(\binom{\iota u_i^{B^*}}{\iota\boldsymbol{\lambda}_i^{B^*}}_{i=1}^m\right)^T \boldsymbol{b}$. (Ostrý pokles hodnoty cílové funkce je zaručen použitím lexikografických pravidel, která zabraňují degeneraci.) Obdrželi jsme spor s volbou řešení $\binom{u_i^{B^*}}{\boldsymbol{\lambda}_i^{B^*}}_{i=1}^m$. Báze B^* je tedy optimální, načež sloupec $(u_i^{B^*})_{i=1}^m \in V^m$ je optimálním řešením úlohy (P*). Optimální řešení $x^* \in W$ úlohy (D*) získáme provedením kroku 15.17.b. (Alternativně lze použít část II. principu duality 6.15.) □

15.22. Nyní přistoupíme k výkladu běžného kroku duální* simplexové metody.

15.23. Běžný krok duální* simplexové metody. Budiž dáno lineárně uspořádané těleso F, vektorový prostor W nad tělesem F a vektorový prostor V s lineárním uspořádáním nad lineárně uspořádaným tělesem F. Nechť m je přirozené číslo (může být i $m = 0$), ať $A = (\alpha_i)_{i=1}^m : W \to F^m$ a $\gamma : W \to V$ jsou dvě lineární zobrazení a $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$ je sloupcový vektor. Zde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou lineární formy na prostoru W a $b_1, \ldots, b_m$ jsou skaláry z tělesa F. Předpokládejme, že $\gamma \in \mathrm{Lin}_V A$.

15.23.a. Mějme bázi $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$ lineárního zobrazení A. Položme $N = \{1, \ldots, m\} \setminus$ $\setminus B$. Báze B budiž duálně* přípustná, nechť $x \in W$ je duální* řešení určené touto bází B. Máme tedy $A_B x = \boldsymbol{b}_B$ a $Ax \le \boldsymbol{b}$. (Jinými slovy, vektor redukovaných cen $\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{b} - Ax$ je nezáporný.)

15.23.b. Ptáme se, zda báze B je i primárně* přípustná. Hledáme proto sloupec $\boldsymbol{u} =$ $= (u_i)_{i=1}^m \in V^m$ tak, aby $\iota \boldsymbol{u}_B^T A_B = \gamma$ (takové $\boldsymbol{u}_B \in V^B$ existuje právě jedno) a $\boldsymbol{u}_N = \boldsymbol{o}_N$, kde $\boldsymbol{o}_N$ je nulový vektor prostoru V^N. Rozlišíme dvě možnosti:

15.23.c. Jestliže $\boldsymbol{u}_B \succeq \boldsymbol{o}_B$, potom báze B je optimální a jí určená řešení $\boldsymbol{u}$ a x jsou optimálními řešeními úloh (P*) a (D*) z poznámky 15.5. S tímto závěrem výpočet ukončíme.

15.23.d. Jestliže vztah $\boldsymbol{u}_B \succeq \boldsymbol{o}_B$ neplatí, potom najdeme $k \in B$ takové, že $u_k \prec 0$, kde 0 je nulový vektor prostoru V. (Bazická proměnná u_k je záporná.)

Řešíme soustavu $A_B y = (\delta_{ik})_{i \in B}$, kde $y \in W$ je proměnná a δ_{ik} je Kroneckerovo delta. (Alespoň jedno řešení soustavy $A_B y = (\delta_{ik})_{i \in B}$ existuje. Připomeňme, že pro $i \in B$ máme $\delta_{ik} = 1$ (jednotka tělesa F) právě tehdy, když $i = k$, a $\delta_{ik} = 0$ (nula tělesa F) právě tehdy, když $i \ne k$.)

Uvažujme bod $x - \lambda y$ pro nezáporné skaláry $\lambda \in F$, splňující $\lambda \ge 0$. Geometricky lze říci, že se pohybujeme po hraně (resp. stěně kodimenze $\operatorname{codim} \mathrm{Lin}\, A - 1$) vycházející z vrcholu x (resp. minimální stěny, jejíž kodimenze je $\operatorname{codim} \mathrm{Lin}\, A$, obsahující bod x) množiny $M = \{\, x \in W;\ Ax \le \boldsymbol{b} \,\}$ všech přípustných řešení úlohy (D*) z poznámky 15.5. Podmínky $A_{B'} x \le \boldsymbol{b}_{B'}$, kde $B' = B \setminus \{k\}$, jsou na této hraně (resp. stěně) stále aktivní, podmínka $\alpha_k(x) \le b_k$ už na této hraně (resp. stěně) není aktivní. Povšimněme si, že když $\lambda \in F$ je kladné, $\lambda > 0$, potom $\gamma(x - \lambda y) = \gamma(x) - \lambda\gamma(y) = \gamma(x) - \lambda \iota \boldsymbol{u}_B^T A_B y = \gamma(x) -$ $- \lambda u_k \succ \gamma(x)$. Nyní $\lambda \ge 0$ budeme zvětšovat tak dlouho, jak to jen půjde, dokud bod $x - \lambda y$ zůstane přípustným řešením duální* úlohy (D*). Položme $\tilde{\boldsymbol{b}}_N = (\tilde{b}_j)_{j \in N} = A_N y$. Rozlišíme dvě možnosti:

15.23.e. Buď máme $\tilde{\boldsymbol{b}}_N \ge \boldsymbol{o}_N$. Pak $\lambda > 0$ lze zvětšovat neomezeně, načež cílová funkce duální* úlohy (D*) z poznámky 15.5 nenabývá své maximální hodnoty (jestliže prostor V je slabě archimedovský, potom cílová funkce duální* úlohy (D*) není shora omezená) a primární* úloha (P*) z poznámky 15.5 není přípustná. (Víme, že duální* úloha (D*) je přípustná. Kdyby rovněž primární* úloha (P*) byla přípustná, potom podle věty 15.21 by obě úlohy měly optimální řešení x^* a $\boldsymbol{u}^*$. Jenomže $A(x^* - \lambda y) \le \boldsymbol{b}$ pro kterékoliv nezáporné $\lambda \in F$, např. pro $\lambda = 1$, a $\gamma(x^* - y) \succ \gamma(x^*)$ – spor. Primární* úloha (P*) tedy není přípustná. Proto cílová funkce duální* úlohy (D*) nenabývá své maximální hodnoty.) S těmito závěry výpočet ukončíme.

15.23.f. Anebo vztah $\tilde{\boldsymbol{b}}_N \geq \boldsymbol{o}_N$ neplatí, takže $\tilde{b}_i = \alpha_i(y) < 0$ pro alespoň jedno $i \in N$. Položme $\lambda = \min\{\, (b_i - \alpha_i(x))(-\tilde{b}_i)^{-1}\,; i \in N,\, \tilde{b}_i < 0\,\}$. Najdeme tedy (alespoň jeden) index $j \in N$ tak, aby $\tilde{b}_j < 0$ a $\lambda = (b_j - \alpha_j(x))(-\tilde{b}_j)^{-1} \leq (b_i - \alpha_i(x))(-\tilde{b}_i)^{-1}$ pro všechna $i \in N$, pro která $\tilde{b}_i < 0$. (Je-li výběr indexu j dvojznačný, volíme kterýkoliv z nich; následující duálně* bazické řešení bude degenerované – což ještě nemusí vadit.) Index k vyřadíme z báze B a index j do ní zařadíme. Proměnná u_k se stane nebazickou, proměnná u_j se stane bazickou. Tím máme novou bázi B, klademe $B := B \cup \{j\} \setminus \{k\}$, a vracíme se do kroku 15.23.a.

Zbývá odůvodnit, že nové B je báze. Položme $B' = B \setminus \{j\}$. Z kroku 15.23.d máme $y \in W$ takové, že $A_{B'\cup\{k\}}y = (\delta_{ik})_{i\in B'\cup\{k\}}$, tudíž $A_{B'}y = \boldsymbol{o}_{B'}$, kde $\boldsymbol{o}_{B'}$ je počátek prostoru $F^{B'}$. Kdyby nové $B = B' \cup \{j\}$ nebylo báze, kdyby existovalo $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{B'} \in F^{B'}$ takové, že $\alpha_j = \iota\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{B'}^T A_{B'}$, platilo by $\tilde{b}_j = \alpha_j(y) = 0$, tudíž by nemohlo platit $\tilde{b}_j < 0$.

15.24. Poznámka. Konečnost algoritmu duální* simplexové metody. Degenerace a cyklus. Jestliže v posledním kroku 15.23.f duální* simplexové metody určíme $\lambda > 0$, potom hodnota cílové funkce v novém bazickém řešení ostře vzroste (viz výpočty v kroku 15.23.d), takže nová báze dosud nebyla zkoumána. Podaří-li se v každé iteraci simplexové metody v kroku 15.23.f určit $\lambda > 0$, každá báze bude během výpočtu zkoumána nejvýše jednou. Protože všech bází $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$ lineárního zobrazení A je konečný počet, právě $\binom{m}{N}$, kde $N = \dim \operatorname{Lin} A$, znamená to, že duální* simplexová metoda skončí po konečném počtu iterací (ať už v kroku 15.23.c anebo 15.23.e).

Jestliže v posledním kroku 15.23.f určíme $\lambda = 0$, potom hodnota cílové funkce nepoklesne. Stane-li se tak v několika po sobě jdoucích iteracích duální* simplexové metody, už nelze zaručit že zkoumané báze se neopakují a výpočet se může zacyklit, dojde k *cyklu*.

Určíme-li $\lambda = 0$, potom nové duálně* bazické řešení (určené v kroku 15.23.a následující iterace) bude degenerované. Určené λ totiž vyjadřuje „délku posunu“ po hraně vycházející z původního duálně* bazického řešení. Je-li $\lambda = 0$, pak „zůstáváme na místě“. Omezující podmínka $\alpha_k(x) \leq b_k$ zůstává aktivní v novém duálně* bazickém řešení – které je rovno původnímu duálně* bazickém řešení, kde i podmínka $\alpha_j(x) \leq b_j$ je aktivní. To dosvědčuje (duální*) degeneraci aktuálního duálně* bazického řešení. Podaří-li se zaručit, že žádné z duálně* bazických řešení nebude během výpočtu degenerované, potom vždy budeme určovat jen $\lambda > 0$ a cyklu se vyhneme.

Není těžké nahlédnout, že když v kroku 15.23.f dojde k dvojznačné volbě indexu j, který vstupuje do báze, potom následující duální* bazické řešení bude degenerované. (Rovněž obráceně: jestliže přípustné duálně* bazické řešení z první iterace nebylo degenerované a během výpočtu nastane degenerace, může to být jedině z důvodu dvojznačné volby indexu j v kroku 15.23.f.) Degenerace následujícího duálně* bazického řešení ale nemusí vadit: přestože máme degenerované řešení, v kroku 15.23.f se nám po čase může (anebo také nemusí) podařit určit $\lambda > 0$, takže k cyklu (snad) nedojde.

15.25. Poznámka. Odstranění degenerace v duální* simplexové metodě. ε-modifikace. V předcházející poznámce 15.24 jsme odvodili, že pokud duálně* bazické řešení v žádné iteraci simplexové metody nebude degenerované, potom k cyklu nedojde. Povšimněme, že když bude splněna následující podmínka (1), potom žádné duálně* bazické řešení nebude degenerované (a tudíž se cyklu vyhneme):

> *Jestliže bod $x \in W$ splňuje $Ax \leq \boldsymbol{b}$, potom nejvýše $N = \dim \operatorname{Lin} A$ z uvedených podmínek je v bodě x aktivních, množina $\{\, i \in \{1, \ldots, m\}\,;\ \alpha_i(x) = b_i \,\}$ má nejvýše N prvků.* (1)

Jedním ze způsobů, jak uvedenou podmínku (1) splnit, je použití tzv. *ε-modifikace*.

Znaky W, V, F, m, A, $\boldsymbol{b}$, b_1, $\ldots$, b_m a γ ať mají stejný význam jako v poznámce 15.5. Dále uvažujme úlohy (P*) a (D*) z téže poznámky 15.5. Zvolme malý kladný skalár $\varepsilon \in F$. (Ve skutečnosti za skalár ε není nutné dosazovat žádnou konkrétní hodnotu. Stačí si pouze představovat, že $\varepsilon > 0$ může být libovolně malé, $\varepsilon \searrow 0$.) Položme $\boldsymbol{b}_\varepsilon = (b_i + \varepsilon^i)_{i=1}^m$, kde ε^i znamená celistvou mocninu skaláru ε (definice 3.25, když číslo i považujeme za číslo celé). Od původních úloh (P*) a (D*) z poznámky 15.5 přejdeme k níže uvedené primární* (vlevo) a duální* (vpravo) ε-modifikované úloze (P$^*_\varepsilon$) a (D$^*_\varepsilon$), kde $\boldsymbol{u} \in V^m$ a $x \in W$ jsou proměnné:

$$(\mathrm{P}^*_\varepsilon) \qquad \begin{aligned} \iota \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b}_\varepsilon &\longrightarrow \min \\ \iota \boldsymbol{u}^T A &= \gamma\,, \\ \boldsymbol{u} &\succeq \boldsymbol{o}\,, \end{aligned} \qquad\qquad (\mathrm{D}^*_\varepsilon) \qquad \begin{aligned} \gamma(x) &\longrightarrow \max \\ Ax &\le \boldsymbol{b}_\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Jestliže úloha (D$^*_\varepsilon$) je přípustná pro každé $\varepsilon > 0$, potom též úloha (D*) je přípustná. (Nyní je zřejmé, že úloha (P$^*_\varepsilon$) resp. (D$^*_\varepsilon$) je přípustná pro všechna $\varepsilon > 0$ právě tehdy, když úloha po řadě (P*) resp. (D*) je přípustná.) Povšimněme si, že ε-modifikované úlohy (P$^*_\varepsilon$) a (D$^*_\varepsilon$) splňují výše uvedenou podmínku (1). (Geometricky lze říci, že ε-modifikace omezující podmínky duální* úlohy (D*) „nepatrně posune“, čímž případnou degeneraci některých duálně* bazických řešení „rozruší“.) Řešíme-li tedy úlohy (P$^*_\varepsilon$) a (D$^*_\varepsilon$) pomocí duální* simplexové metody, pak během výpočtu nezaznamenáme žádné duálně* bazické řešení, které by bylo degenerované, takže k cyklu nedojde. Zbývá dodat, že pokud $\boldsymbol{u}^* \in V^m$ a $x^* \in W$ jsou optimálními řešeními úloh (P$^*_\varepsilon$) a (D$^*_\varepsilon$), když $\varepsilon \searrow 0$ (zopakujme, že za $\varepsilon > 0$ nedosazujeme žádnou konkrétní hodnotu, ale představujeme si, že $\varepsilon > 0$ je libovolně malé), potom $\boldsymbol{u}^* \in V^m$ a $x^* \in W$ jsou optimálními řešeními úloh (P*) a (D*).

Kromě ε-modifikace lze konečnost duální* simplexové metody zajistit také použitím kombinatorických pravidel: jde o obdobu Blandova pravidla, kdy indexy k a j v krocích 15.23.d a 15.23.f volíme jako nejmenší možné [76: Subsekce 6.4.1]. (Správnost uvedeného pravidla je dokázána [76: Subsekce 6.4.1] v případě, že prostor W je konečněrozměrný a za prostor V je dosazena aditivní grupa tělesa F s jeho uspořádáním. Opět by bylo vhodné ověřit, zda zmíněné pravidlo [76: Subsekce 6.4.1] zaručí konečnost simplexové metody také v obecném případě, kdy prostor W může být nekonečněrozměrný a za V lze dosadit libovolný vektorový prostor s lineárním uspořádáním.)

15.26. Poznámka. Souvislost lexikografických pravidel a ε-modifikace. Nechť m je (nenulové) přirozené číslo a F je lineárně uspořádané těleso. Prostor F^m vybavme lexikografickým uspořádáním „$\preceq$“ (jako v příkladu 3.17). Zvolme dva sloupcové vektory $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{i=1}^m \in F^m$. Povšimněme si, že $\boldsymbol{\lambda} \preceq \boldsymbol{\mu}$ právě tehdy, když

$$\lambda_1\varepsilon^1 + \cdots + \lambda_m\varepsilon^m \le \mu_1\varepsilon^1 + \cdots + \mu_m\varepsilon^m, \tag{1}$$

přičemž $\varepsilon \searrow 0$. Jinými slovy, $\boldsymbol{\lambda} \preceq \boldsymbol{\mu}$ právě tehdy, když existuje kladný skalár $\varepsilon_0 \in F$ takový, že vztah (1) platí pro všechna $\varepsilon \in F$ splňující $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

15.27. V poslední části tohoto paragrafu ukážeme, jakým způsobem zahajujeme výpočet primární* a duální* simplexové metody, když neznáme žádnou primárně* nebo duálně* přípustnou bázi.

15.28. Poznámka. Výchozí krok (inicializace) primární* simplexové metody. Fáze I. Metoda velkého M. Nechť znaky F, W, V, m, A, $\boldsymbol{b}$, a γ mají stejný význam jako v poznámce 15.5, k tomu uvažujme úlohy (P*) a (D*) ze zmíněné poznámky 15.5. Abychom tyto úlohy mohli vyřešit primární* simplexovou metodou 15.17, musíme napřed znát primárně* přípustnou bázi $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$. Známe-li alespoň nějaké přípustné řešení $\boldsymbol{u} \in V^m$ primární* úlohy (P*), pak postupem obdobným jako v důkazu 15.12.a části I. základní věty 15.12 LP můžeme najít i přípustné primárně* bazické řešení úlohy (P*); tím najdeme i primárně* přípustnou bázi. Jestliže neznáme ani primárně* přípustnou bázi a nemáme ani žádné přípustné řešení, pak můžeme použít buď tzv. *fázi I primární* simplexové metody*, anebo tzv. *metodu velkého M*. Obě tyto metody nyní popíšeme. Začneme popisem fáze I simplexové metody.

Předpokládejme, že vektorový prostor W je konečněrozměrný. Pro jednoduchost budiž $W = F^n$, kde n je přirozené číslo (může být i $n = 0$). Potom lineární zobrazení $\gamma: W \to V$, tj. $\gamma: F^n \to V$, lze vyjádřit jako „řádek vektorů", existuje právě jedno $\boldsymbol{g} = (g_j)_{j=1}^n \in V^n$ takové, že $\gamma = \iota \boldsymbol{g}^T$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že sloupec vektorů $\boldsymbol{g}$ je nezáporný, $\boldsymbol{g} \succeq \boldsymbol{o}$, tj., každá jeho složka je nezáporná, $g_j \succeq 0$ pro $j = 1, \dots, n$. (Lineární zobrazení $A: F^n \to F^m$ můžeme chápat jako matici typu $m \times n$. Kdyby pro nějaké $j = 1, \dots, n$ bylo $g_j \prec 0$, pak složce g_j a současně všem složkám j-tého sloupce matice A změníme znaménko.) Nechť $I: W \to F^n$, tj. $I: F^n \to F^n$, je identické zobrazení a nechť $\boldsymbol{e} = (1)_{j=1}^n \in F^n$ je sloupcový vektor sestávající z n jedniček tělesa F (definice 1.57). Místo úloh (P*) a (D*) uvažujme následující umělé úlohy (P_I^*) a (D_I^*), kde $\boldsymbol{u} \in V^m$, $\boldsymbol{s} \in V^n$ a $x \in W = F^n$ jsou proměnné (přičemž proměnné $\boldsymbol{s}$ jsou umělé):

$$
\begin{array}{llll}
(\mathrm{P}_\mathrm{I}^*) & \iota \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{o} + \iota \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{e} \longrightarrow \min & \qquad (\mathrm{D}_\mathrm{I}^*) & \iota \boldsymbol{g}^T(x) \longrightarrow \max \\
 & \iota \boldsymbol{u}^T A + \iota \boldsymbol{s}^T I = \iota \boldsymbol{g}^T, & & Ax \leq \boldsymbol{o}\,, \\
 & \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o},\ \boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{o}, & & Ix \leq \boldsymbol{e}\,.
\end{array}
$$

Umělé úlohy (P_I^*) a (D_I^*) sice nejsou přesně ve tvaru úloh (P*) a (D*) z poznámky 15.5, avšak na tento tvar je lze snadno převést (viz poznámku 3.125). Je-li $\boldsymbol{g} \succeq \boldsymbol{o}$, pak primárně* přípustná báze v umělých úlohách (P_I^*) a (D_I^*) je nasnadě: proměnné $\boldsymbol{s}$ učiníme bazickými a proměnné $\boldsymbol{u}$ učiníme nebazickými. Umělé úlohy (P_I^*) a (D_I^*) pak řešíme primární* simplexovou metodou 15.17 – tomuto běhu říkáme *fáze I primární* simplexové metody.*

Jestliže výsledná optimální hodnota je $\succ 0$, potom primární* úloha (P*) není přípustná. Chceme-li zjistit zda duální* úloha (D*) je přípustná, zda soustava $Ax \leq \boldsymbol{b}$ má řešení, musíme provést další výpočty. S těmito závěry svoji snahu o nalezení optimální řešení původních úloh (P*) a (D*) ukončíme.

Jestliže optimální hodnota je $= 0$, pak máme primárně* přípustnou bázi původních úloh (P*) a (D*). Stačí jen odstranit umělé proměnné $\boldsymbol{s}$, změnit cílovou funkci umělé primární* úlohy a provést potřebné úpravy v duální* úloze tak, abychom se vrátili k úlohám (P*) a (D*), a pokračovat ve výpočtu primární* simplexovou metodou 15.17 – tomuto běhu říkáme *fáze II primární* simplexové metody.* (Poznámka: Některé z umělých proměnných $\boldsymbol{s}$ v posledním kroku mohou být bazické (takže poslední primárně* bazické řešení je degenerované). Bazických proměnných ze sloupce $\boldsymbol{u}$ pak může být příliš málo na to, aby v úlohách (P*) a (D*) určily bázi. V takovém případě některé (vcelku libovolně zvolené) nebazické proměnné ze sloupce $\boldsymbol{u}$ učiníme bazickými tak, abychom dostali bázi. Jinými slovy, zbytek původní báze (po odstranění proměnných $\boldsymbol{s}$) doplníme tak, abychom opět získali bázi.)

V metodě velkého M se postupuje obdobně. Ať W, n a $\boldsymbol{g}$ má stejný význam jako výše, kde jsme objasňovali fázi I. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\boldsymbol{g} \succeq \boldsymbol{o}$. Nechť $M \in F$ je velký kladný skalár. (Za $M > 0$ žádnou konkrétní hodnotu nedosazujeme. Pouze si představujeme, že $M > 0$ je velmi velké.) Položme $\boldsymbol{M} = \iota \boldsymbol{e}(M)$. Sloupcový vektor $\boldsymbol{M}$ je tedy sestaven z m skalárů M, máme $\boldsymbol{M} = (M)_{i=1}^m$. Od úloh (P*) a (D*) přejdeme k následujícím umělým úlohám (P_M^*) a (D_M^*), kde $\boldsymbol{u} \in V^m$, $\boldsymbol{s} \in V^n$ a $x \in$ $\in W = F^n$ jsou proměnné (proměnné $\boldsymbol{s}$ jsou umělé):

$$
\begin{array}{llll}
(\mathrm{P}_M^*) & \iota \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} + \iota \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{M} \longrightarrow \min & \qquad (\mathrm{D}_M^*) & \iota \boldsymbol{g}^T(x) \longrightarrow \max \\
 & \iota \boldsymbol{u}^T A + \iota \boldsymbol{s}^T I = \iota \boldsymbol{g}^T, & & Ax \leq \boldsymbol{b}\,, \\
 & \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o},\ \boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{o}, & & Ix \leq \boldsymbol{M}\,.
\end{array}
$$

Umělé úlohy (P_M^*) a (D_M^*) opět řešíme primární* simplexovou metodou 15.17, na počátku volíme proměnné $\boldsymbol{s}$ jako bazické a proměnné $\boldsymbol{u}$ jako nebazické. Je-li výpočet ukončen z důvodu, že cílová funkce umělých úloh neomezeně klesá, pak původní úloha

(D*) není přípustná. (Chceme-li zjistit, zda úloha (P*) není přípustná anebo její cílová funkce neomezeně klesá, použijeme fázi I simplexové metody.) Podaří-li se nám získat optimální řešení umělých úloh, jsou dvě možnosti: Jestliže optimální hodnota závisí na M, potom původní úloha (P*) není přípustná (jde o obdobu případu, kdy ve fázi I vyjde optimální hodnota $\succ 0$). Je-li optimální hodnota na M nezávislá, pak optimální řešení úlohy (P*) získáme pouhým odstraněním proměnných $\boldsymbol{s}$ a optimální řešení úlohy (D$^*_M$) je současně optimálním řešením úlohy (D*).

Rozdíl mezi použitím fáze I s fází II a použitím metody velkého M je ve své podstatě malý: metoda velkého M obě fáze jakoby „slučuje“ a provádí je „najednou“.

15.29. Poznámka. Výchozí krok (inicializace) duální* simplexové metody. Znaky F, W, V, m, A, $\boldsymbol{b}$, a γ ať mají stejný význam jako v poznámce 15.5. Uvažujme rovněž úlohy (P*) a (D*) z téže poznámky 15.5. Chceme-li tyto úlohy řešit duální* simplexovou metodou 15.23, pak předem musíme znát nějakou duálně* přípustnou bázi. Jestliže žádnou takovou bázi neznáme, ale známe aspoň nějaké přípustné řešení $x \in W$ duální* úlohy (D*), pak postupem obdobným jako v důkazu 15.12.a části II. základní věty 15.12 LP (resp. jako v důkazu 14.28.b základní věty 14.28 LP) najdeme přípustné duálně* bazické řešení úlohy (D*). Tím získáme i duálně* přípustnou bázi. Neznáme-li ani přípustné řešení duální* úlohy (D*), podíváme se na následující dvě umělé úlohy (P**) a (D**), kde K je velký kladný skalár (za $K > 0$ žádnou konkrétní hodnotu nedosazujeme, pouze si představujeme, že $K > 0$ je velmi vysoké), k tomu 1 je jednotka tělesa F, dále $\boldsymbol{e} = (1)_{i=1}^m \in F^m$ je sloupcový vektor sestávající z m jednotek tělesa F, navíc $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor prostoru V^m (definice 1.57), dále $o\colon W \to F$ je nulová lineární forma, k tomu 0 je buď nula tělesa F anebo nulový vektor prostoru V a $x \in W$, $t \in F$ a $\boldsymbol{u} \in V^m$, $v \in V$ jsou proměnné:

$$\begin{array}{llcll}
(\mathrm{P}^{**}) & \iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} + \iota v(0) \longrightarrow \min & \qquad & (\mathrm{D}^{**}) & \gamma(x) - \iota K(t) \longrightarrow \max \\
& \iota\boldsymbol{u}^T A + \iota v o \;\;= \gamma\,, & & & Ax - \iota\boldsymbol{e}(t) \leq \boldsymbol{b}\,, \\
& \iota\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{e} + \iota v(1) = K\,, & & & o(x) - \iota 1(t) \leq 0\,. \\
& \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o},\ v \succeq 0\,, & & &
\end{array}$$

Umělá úloha (D**) je zřejmě přípustná, dokonce ke každému $x \in W$ (např. $x = 0$) existuje nezáporné $t \in F$ takové, že bod $\binom{x}{t}$ je přípustným řešením úlohy (D**). Postupem z důkazu 15.12.a části II. základní věty 15.12 LP (resp. důkazu 14.28.b základní věty 14.28 LP) najdeme duálně přípustnou* bázi, načež úlohy (P**) a (D**) můžeme vyřešit duální* simplexovou metodou 15.23. Jestliže je výpočet ukončen z důvodu, že cílová funkce duální* úlohy (D**) nenabývá maximální hodnoty, potom původní úloha (P*) není přípustná. (Chceme-li zjistit, zda původní duální* úloha (D*) je přípustná, zda soustava $Ax \leq \boldsymbol{b}$ má řešení, musíme provést další výpočty.) Nyní předpokládejme, že $\binom{\boldsymbol{u}^*}{v^*} \in V^m \dot{\times} V$ a $\binom{x^*}{t^*} \in W \dot{\times} F$ jsou optimální řešení umělých úloh (P**) a (D**). Jestliže $t^* = 0$, potom $\boldsymbol{u}^*$ a x^* jsou optimální řešení původních úloh (P*) a (D*). Je-li $t^* > 0$, potom duální* úloha (D*) není přípustná, z podmínky komplementarity plyne $v^* = 0$, takže primární* úloha (P*) je přípustná a její cílová funkce není omezená zdola.

15.30. Dosažené výsledky. O simplexové metodě, kterou jsme se v tomto paragrafu, § 15, zabývali, je už napsána celá řada prací. Zde ale bylo záměrem podívat se na simplexovou metodu zcela novým způsobem, který by byl v souladu s ostatní teorií lineárního programování z § 6 této práce. Těžkosti, které z tohoto záměru plynou, jsou popsány v poznámce 15.4 – potíže způsobuje především záměna významu primární a duální úlohy lineárního programování. Vzniklé potíže jsme se rozhodli vyřešit tím, že jsme používali značení zavedené v § 6 a terminologii, která se v literatuře běžně používá. Na změnu významu použitého pojmu jsme upozorňovali připojením hvězdičky „*“ – hovořili jsme například o primární* úloze lineárního programování, primární* simplexové metodě, duální* úloze lineárního programování, duální* simplexové metodě apod.

V definici 15.7 jsme zavedli pojem báze, načež v definici 15.9 jsme zavedli pojem primárně* a duálně* bazického řešení a jeho (primární* a duální*) degenerace. Pojem primárně* a duálně* přípustné báze jsme zavedli až v definici 15.14. Dokázali jsme rovněž základní větu 15.12 lineárního programování, která rozšiřuje základní větu 14.28 LP z předcházejícího paragrafu, § 14. V odstavcích 15.17 a 15.23 jsme popsali běžný krok primární* a duální* simplexové metody, v poznámkách 15.18 a 15.24 jsme se zabývali otázkou konečnosti primární* a duální* simplexové metody, jakož i souvislosti položené otázky s problémem (primární* a duální*) degenerace. Díky tomu, že výklad primární* a duální* simplexové metody byl veden téměř souběžně a navíc v dosti obecném kontextu („základního" vektorového prostoru W, lineárně uspořádaného vektorového prostoru „cílových hodnot" V, kde oba prostory jsou nad společným lineárně uspořádaným tělesem F), můžeme mnohem snáze rozpoznat jednotlivé rozdíly mezi oběma metodami. V poznámkách 15.19 a 15.25 jsme ukázali, jakým způsobem lze odstranit (primární* a duální*) degeneraci, a zajistit tak konečnost algoritmu primární* a duální* simplexové metody. Vyšlo najevo, že primární* degeneraci lze odstranit pomocí lexikografických pravidel a že duální* degeneraci lze odstranit pomocí ε-modifikace. Ačkoliv lexikografická pravidla a ε-modifikace spolu souvisejí, viz poznámku 15.26, lexikografická pravidla jsou při odstraňování duální* degenerace neúčinná, jako ε-modifikace je neúčinná při odstraňování primární* degenerace. V posledních poznámkách 15.28 a 15.29 jsme popsali výchozí krok primární* a duální* simplexové metody. Je zajímavé, že v poznámce 15.28 bylo nutné předpokládat, že „základní" vektorový prostor W je konečněrozměrný, kdežto v poznámce 15.29 tohoto předpokladu nebylo třeba.

Zmiňme, že zcela jiný přístup k simplexové metodě v nekonečněrozměrných prostorech, který vyhovuje přístupu z poznámky 13.4, lze nalézt v knize [1: Kapitola 2].

Samostatnou zmínku si zaslouží dokázaná věta 15.21 o existenci optimálních řešení pro úlohy LP, která je významným doplňkem k principu duality 6.15 z § 6.

§ 16 Poznámka o celočíselném lineárním programování a Gomoryho algoritmech

16.1. Definice. Úloha celočíselného lineárního programování (v konečněrozměrném prostoru). Budiž dána dvě (nenulová) přirozená čísla m a n, matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ typu $m\times n$, dále n-složkový sloupcový vektor $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$), k tomu m-složkový sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ (resp. $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$) a přirozené číslo $n_1 = 1, \dots, n$. Pak úlohu *celočíselného lineárního programování*, kde $\boldsymbol{x} = (x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\boldsymbol{x} = (x_{j1})_{j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$) je proměnná, zapisujeme například takto:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \longrightarrow \max\\
&\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\,,\\
&\quad\ x_j \in \mathbb{Z} \quad \text{pro } j = 1, \dots, n_1\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Je-li $n_1 = n$, pak jde o úlohu *čistého celočíselného lineárního programování*, v opačném případě (když $1 \le n_1 < n$) jde o úlohu *smíšeného celočíselného lineárního programování.* Objasněme, že úloha (1) celočíselného LP je speciálním případem obecné úlohy optimalizace 4.18.(1) z definice 4.18. Abychom dostali úlohu (1), v definici 4.18 stačí položit $\bar{M} = \mathbb{R}^n$ (resp. $\bar{M} = \mathbb{R}^{n\times 1}$) a $M = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,;\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \,\wedge\, x_j \in \mathbb{Z} \text{ pro } j = 1, \dots, n_1 \,\}$, dále $N = \mathbb{R}$ (resp. $N = \mathbb{R}^{1\times 1}$) a cílová funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je určena předpisem $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

16.2. Gomoryho algoritmy. Úvod. První metody pro řešení celočíselných úloh 16.1..(1) z předcházející definice 16.1 se začaly objevovat ve druhé polovině 50. let 20. století. Byly to tzv. *metody sečných nadrovin.* První metodou sečných nadrovin, jejíž konečnost se podařilo dokázat, je slavný první Gomoryho algoritmus [51], [52], [54], viz též [3], který je určen pro řešení úloh čistého celočíselného LP. Pro řešení úloh smíšeného celočíselného LP lze použít druhý Gomoryho algoritmus [53], viz též jeho rozšíření resp. zobecnění [23]. Třetí Gomoryho algoritmus [55], který při výpočtech používá pouze celá čísla (odtud jeho přívlastek „all-integer“), je opět určen pro řešení úloh čistého celočíselného LP.

16.3. Gomoryho algoritmy. Lexikografická (primární* / duální*?) simplexová metoda. Všeobecně se má zato, že Gomoryho algoritmy sečných nadrovin jsou založeny na „lexikografické duální* simplexové metodě“. Z předcházejícího paragrafu, § 15, ale víme, že použití lexikografických pravidel je v duální* simplexové metodě neúčinné – použít lexikografická pravidla má smysl jen v primární* simplexové metodě – viz poznámky 15.19 a 15.25 a odstavec 15.30. Pozorným srovnáním Gomoryho algoritmů [51], [52], [53], [54], [55] (viz též [3], [23]) s primární* a duální* simplexovou metodou 15.17 a 15.23 zjistíme, že diskutované Gomoryho algoritmy jsou ve skutečnosti založeny na primární* (nikoliv duální*) simplexové metodě 15.17.

16.4. Gomoryho algoritmy. Směrem k nekonečněrozměrným prostorům. Dalším srovnáním Gomoryho algoritmů stručně uvedených v odstavci 16.2 (při vědomí, že jsou založeny na primární* simplexové metodě 15.17, jak jsme v předcházejícím odstavci 16.3 odvodili) s úlohou celočíselného lineárního programování 16.1.(1) z definice 16.1 (a s úlohami (P) a (D) z poznámky 6.4 resp. úlohami (D*) a (P*) z poznámky 15.5) – vlastně jde o stejný druh srovnání, pomocí kterého jsme v úvodní kapitole této práce dospěli od Farkasova lemmatu 1 a základního lemmatu 2 a 3 k obecnějšímu Farkasovu lemmatu 4 – zjistíme, že úlohu celočíselného lineárního programování lze formulovat i v (obecně) nekonečněrozměrném vektorovém prostoru. Učiníme tak v následující definici 16.5.

16.5. Definice. Úloha celočíselného lineárního programování. Nechť W je reálný vektorový prostor. Mějme přirozené číslo m (může být i $m = 0$), lineární zobrazení $A = (\alpha_i)_{i=1}^m \colon W \to \mathbb{R}^m$ a sloupcový vektor $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou lineární funkcionály definované na prostoru W a $b_1, \dots, b_m$ jsou reálná čísla. K tomu mějme lineární funkcionál $\gamma \colon W \to \mathbb{R}$. Ať n_1 je (nenulové) přirozené číslo a $\eta_1, \dots, \eta_{n_1} \colon W \to \mathbb{R}$ jsou další lineární funkcionály. (Předpokládejme, že funkcionály $\eta_1, \dots, \eta_{n_1}$ jsou lineárně nezávislé.) Pak úlohu *celočíselného lineárního programování*, kde $x \in W$ je proměnná, zapisujeme například takto:

$$\begin{aligned} &\gamma(x) \longrightarrow \max \\ &\quad Ax \le \boldsymbol{b}\,, \\ &\quad \eta_j(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{pro } j = 1, \dots, n_1\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Uvedená úloha (1) je speciálním případem obecné úlohy optimalizace 4.18.(1): v definici 4.18 stačí položit $\bar{M} = W$ a $M = \{\, x \in W;\ Ax \le \boldsymbol{b} \wedge \eta_j(x) \in \mathbb{Z} \text{ pro } j = 1, \dots, n_1 \,\}$, dále $N = \mathbb{R}$ a $f = \gamma$. Poznamenejme, že úloha 16.1.(1) celočíselného LP z definice 16.1 je speciálním případem zde uvedené úlohy (1): abychom obdrželi úlohu 16.1.(1), v této definici 16.5 stačí položit $W = \mathbb{R}^n$, cílový funkcionál γ určíme předpisem $\gamma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a funkcionály $\eta_1, \dots, \eta_{n_1}$ zavedeme předpisem $\eta_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}_j^T\boldsymbol{x}$ pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a $j = 1, \dots, n_1$. Zde $\boldsymbol{e}_j \in \mathbb{R}^n$ je standardní jednotkový vektor mající jedničku na j-tém místě a jinde nuly pro $j = 1, \dots, n_1$, viz definici 1.57.

16.6. Gomoryho algoritmy v (obecně) nekonečněrozměrných prostorech. Na základě odstavců 16.2 a 16.3 můžeme soudit, že pomocí Gomoryho algoritmů lze řešit i obecnou úlohu 16.5.(1) z předcházející definice 16.5, tedy úlohy celočíselného lineárního programování v (obecně) nekonečněrozměrném prostoru. Ukažme alespoň v základních rysech, jakým způsobem je možné řešit úlohu 16.5.(1) užitím prvního Gomoryho algoritmu [51], [52], [54], viz též [3].

16.6.a. Nechť znaky W, m, A, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\boldsymbol{b}$, $b_1, \ldots, b_m$, γ, n_1, $\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}$ mají stejný význam jako v předcházející definici 16.5. Předpokládejme, že pro každé $x \in W$ splňující $Ax \leq \boldsymbol{b}$ a $\eta(x) \in \mathbb{Z}$ pro $j = 1, \ldots, n_1$ platí rovněž $\big(b_i - \alpha_i(x)\big) \in \mathbb{Z}$ pro $i = 1, \ldots, m$. (Dále předpokládejme, že pro každé $x \in W$ splňující $Ax \leq \boldsymbol{b}$ a $\eta(x) \in \mathbb{Z}$ pro $j = 1, \ldots, n_1$ platí $\gamma(x) \in \mathbb{Z}$ a že cílový funkcionál γ – přestože hledáme jeho maximum – je na množině $\{\, x \in W\,;\ Ax \leq \boldsymbol{b} \,\}$ zdola omezený. (Druhý předpoklad je vzhledem k Haarově větě 4.30 splněn tehdy a jen tehdy, když existuje nezáporné $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$, aby $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{o}$, pro které platí $\iota \boldsymbol{u}^T A = -\gamma$.) K tomu ať $\mathrm{Lin}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} = \mathrm{Lin}\{\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}\}$.)

16.6.b. Pro stručnost položme $\eta_0 = \gamma$. Nechť $\Gamma = (\eta_j)_{j=0}^{n_1}\colon W \to \mathbb{R}^{1+n_1}$ je zobrazení vzniklé součinem lineárních funkcionálů γ a $\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}$ dle definice 1.53. Zpočátku (ať už primární* nebo duální* simplexovou metodou 15.17 nebo 15.23) řešíme úlohu (lexikograficky) maximalizovat $\Gamma(x)$ za podmínek $Ax \leq \boldsymbol{b}$. (Provádíme-li výpočet primární* simplexovou metodou 15.17, potom během výpočtu nedojde k degeneraci, protože $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_m \in \mathrm{Lin}\{\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}\}$, viz poznámku 15.19.) Nechť $x^* \in W$ je optimálním řešením této úlohy a nechť $B^* \subseteq \{1, \ldots, m\}$ je příslušná optimální báze.

16.6.c. Jestliže platí $\eta_j(x^*) \in \mathbb{Z}$ pro $j = 1, \ldots, n_1$, potom bod x^* je optimálním řešením úlohy 16.5.(1) a výpočet ukončíme.

16.6.d. Předpokládejme, že $\eta_\ell(x^*) \notin \mathbb{Z}$ pro alespoň jedno $\ell = 1, \ldots, n_1$. (Potom volíme co nejmenší $\ell = 0, \ldots, n_1$ – ano, připouštíme i $\ell = 0$ – tak, aby $\eta_\ell(x^*) \notin \mathbb{Z}$.) Lineární funkcionál η_ℓ vyjádříme jako lineární kombinaci prvků báze resp. funkcionálů α_i, kde $i \in B^*$. Najdeme reálná čísla $\lambda_i \in \mathbb{R}$, kde $i \in B^*$, tak, aby $\eta_\ell = \sum_{i \in B^*} \iota \lambda_i \alpha_i$. (Připomeňme, že $\eta_1, \ldots, \eta_{n_1} \in \mathrm{Lin}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Protože bod x^* je optimální, musí platit i $\gamma \in \mathrm{cone}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$.) K omezujícím podmínkám $Ax \leq \boldsymbol{b}$ přidáme podmínku

$$\sum_{i \in B^*} \iota\{\lambda_i\}\alpha_i(x) \leq -\Big\{\sum_{i \in B^*} \iota \lambda_i b_i\Big\} + \sum_{i \in B^*} \iota\{\lambda_i\} b_i\,. \tag{1}$$

Zde $[\lambda]$ a $\{\lambda\}$ je po řadě celá a desetinná část daného reálného čísla $\lambda \in \mathbb{R}$, aby $\lambda = [\lambda] + \{\lambda\}$ a k tomu $[\lambda] \in \mathbb{Z}$ a $0 \leq \{\lambda\} < 1$. Symbol „ι“ má význam podle definice 1.39.

Po přidání omezující podmínky (1) pokračujeme ve výpočtu: primární* simplexovou metodou 15.17 řešíme úlohu (lexikograficky) maximalizovat $\Gamma(x)$ za podmínek $Ax \leq \boldsymbol{b}$ a (1). (Jakmile podmínka (1) „vystoupí z báze“ – jí odpovídající nová proměnná se stane nebazickou – lze podmínku (1) vynechat. [51], [52], [54], [3].) Tím dospějeme k novému optimálnímu řešení x^{**}. Pokud řešení x^{**} ještě nesplňuje podmínky celočíselnosti $\eta_j(x^{**}) \in \mathbb{Z}$ pro $j = 1, \ldots, n_1$, pak přidáme další podmínku tvaru (1) a postup se opakuje.

Odůvodněme, proč vztah (1) – píšeme-li v něm znak „=“ místo „≤“ a za předpokladu, že $\{\lambda_i\} \neq 0$ pro alespoň jedno $i \in B^*$ – je rovnicí sečné nadroviny, která „odsekává“ současné neceločíselné řešení x^*, avšak ostatní přípustná celočíselná řešení ponechává. Nejprve odůvodníme, že řešení x^* nesplňuje podmínku (1). Protože x^* je primárním* řešením určeným bází B^*, máme $\alpha_i(x^*) = b_i$ pro $i \in B^*$. Následující dva vztahy jsou proto ekvivalentní:

$$\sum_{i \in B^*} \iota\{\lambda_i\}\alpha_i(x^*) \leq -\Big\{\sum_{i \in B^*} \iota \lambda_i b_i\Big\} + \sum_{i \in B^*} \iota\{\lambda_i\} b_i\,,$$

$$0 \leq -\Big\{\sum_{i \in B^*} \iota \lambda_i b_i\Big\}\,.$$

Ovšem $\sum_{i\in B^*} \iota\lambda_i b_i = \sum_{i\in B^*} \iota\lambda_i \alpha_i(x^*) = \eta_\ell(x^*) \notin \mathbb{Z}$, tudíž $-\bigl\{\sum_{i\in B^*} \iota\lambda_i b_i\bigr\} < 0$. Vidíme, že současné řešení x^* je podmínkou (1) skutečně „odseknuto". Nyní ať $x' \in W$ je libovolný bod takový, že $Ax' \leq \boldsymbol{b}$ a $\eta_j(x') \in \mathbb{Z}$ pro $j = 1, \ldots, n_1$. Ptáme se, zda platí

$$\sum_{i\in B^*} \iota\{\lambda_i\}\alpha_i(x') \leq -\Bigl\{\sum_{i\in B^*} \iota\lambda_i b_i\Bigr\} + \sum_{i\in B^*} \iota\{\lambda_i\} b_i\,,$$

$$0 \leq -\Bigl\{\sum_{i\in B^*} \iota\lambda_i b_i\Bigr\} - \sum_{i\in B^*} \iota\{\lambda_i\}\bigl(\alpha_i(x') - b_i\bigr)\,.$$

S využitím vztahu $\{\lambda\} = \lambda - [\lambda]$ pro $\lambda \in \mathbb{R}$ můžeme upravit pravou stranu poslední nerovnice následovně:

$$\begin{aligned}
&-\Bigl\{\sum_{i\in B^*} \iota\lambda_i b_i\Bigr\} - \sum_{i\in B^*} \iota\{\lambda_i\}\bigl(\alpha_i(x') - b_i\bigr) = \\
&\quad = \Bigl[\sum_{i\in B^*} \iota\lambda_i b_i\Bigr] + \sum_{i\in B^*} \iota[\lambda_i]\bigl(\alpha_i(x') - b_i\bigr) - \sum_{i\in B^*} \iota\lambda_i b_i - \sum_{i\in B^*} \iota\lambda_i\bigl(\alpha_i(x') - b_i\bigr) = \\
&\quad = \Bigl[\sum_{i\in B^*} \iota\lambda_i b_i\Bigr] + \sum_{i\in B^*} \iota[\lambda_i]\bigl(\alpha_i(x') - b_i\bigr) - \sum_{i\in B^*} \iota\lambda_i \alpha_i(x') = \\
&\quad = \Bigl[\sum_{i\in B^*} \iota\lambda_i b_i\Bigr] + \sum_{i\in B^*} \iota[\lambda_i]\bigl(\alpha_i(x') - b_i\bigr) - \eta_\ell(x')\,.
\end{aligned}$$

Z předpokladů plyne, že $\bigl(\alpha_i(x') - b_i\bigr) \in \mathbb{Z}$ pro $i = 1, \ldots, m$, k tomu $\eta_\ell(x') \in \mathbb{Z}$. Poslední tři členy jsou celá čísla, takže na pravé straně naposledy uvedené nerovnice stojí celé číslo. Dále pro $i = 1, \ldots, m$ máme $\alpha_i(x') - b_i \leq 0$, tudíž $-\bigl\{\sum_{i\in B^*} \iota\lambda_i b_i\bigr\} - \sum_{i\in B^*} \iota\{\lambda_i\}\bigl(\alpha_i(x') - b_i\bigr) \geq -\bigl\{\sum_{i\in B^*} \iota\lambda_i b_i\bigr\} > -1$. Protože pravá strana poslední nerovnice je současně celočíselná, musí být ≥ 0, což jsme chtěli dokázat. Jinými slovy, řešení x' splňuje nerovnici (1), přípustná celočíselná řešení jsou ponechána.

16.7. Uveďme několik závěrečných poznámek.

16.8. Poznámka. Konečnost Gomoryho algoritmů. Zbývá dokázat, že první Gomoryho algoritmus, který jsme v předpředchozím odstavci 16.6 nastínili, je konečný – že buď v konečném počtu kroků najde optimální řešení úlohy 16.5.(1), anebo v konečném počtu kroků zjistí, že žádné takové řešení neexistuje. Lze očekávat, že při důkazu bude možné postupovat obdobně jako v [54: Sekce 8 první způsob důkazu] nebo v [3: paragraf 5.3]. Důkaz je ovšem nutné provést celý znovu (nebo alespoň důkladně revidovat), protože původně byl tento důkaz ([54: Sekce 8 první způsob důkazu] a [3: paragraf 5.3]) podán pro případ konečněrozměrného prostoru a práce s „lexikografickou duální* simplexovou metodou". V odstavci 16.6 jsme ale první Gomoryho algoritmus formulovali v (obecně) nekonečněrozměrném prostoru a využili jsme při tom (lexikografickou) primární* simplexovou metodou.

16.9. Poznámka. Další metody řešení úloh celočíselného LP. V odstavci 16.6 se nám podařilo první Gomoryho algoritmus ([51], [52], [54], [3]) formulovat v (obecně) nekonečněrozměrném prostoru. Naskýtá se tak otázka, zda totéž lze provést i s jinými známými algoritmy pro řešení úloh celočíselného lineárního programování – například s druhým Gomoryho algoritmem [53], třetím Gomoryho algoritmem [55], Daltonovým-Llewellynovým algoritmem [23], dalšími metodami sečných nadrovin, známou metodou větvení a mezí (anglicky „branch & bound") popř. s jinými metodami pro řešení úloh celočíselného LP. (Není těžké nahlédnout, že s metodou větvení a mezí to možné je, metodu větvení a mezí lze použít i v nekonečněrozměrném prostoru.)

16.10. Poznámka. Podmínky na nezápornost. Srovnejme úlohy 16.1.(1) a 16.5. .(1) z definic 16.1 a 16.5. Vidíme, že podmínky na celočíselnost proměnných $x_j \in \mathbb{Z}$ pro $j = 1, \dots, n_1$ z úlohy 16.1.(1) jsme v nekonečněrozměrném prostoru vyjádřili pomocí lineárních funkcionálů: v úloze 16.5.(1) požadujeme, aby $\eta_j(x) \in \mathbb{Z}$ pro $j = 1, \dots, n_1$.

Nyní se vraťme k primární úloze (vlevo) z poznámky 6.2, kde požadujeme, aby proměnné byly nezáporné, aby $x_j \geq 0$ pro $j = 1, \dots, n$. Napadne nás, že v nekonečněrozměrném prostoru bychom podmínky na nezápornost mohli také vyjádřit pomocí lineárních forem: požadovali bychom, aby $\eta_j(x) \geq 0$ pro $j = 1, \dots, n$.

Ukažme tedy, jak by úloha lineárního programování s podmínkami na nezápornost a úloha k ní duální vypadala: Nechť F je lineárně uspořádané těleso, nechť W je vektorový prostor nad tělesem F a ať V je lineárně uspořádaný vektorový prostor nad lineárně uspořádaným tělesem F. Mějme dvě přirozená čísla m a n (lze vzít i $m = 0$ nebo $n = 0$). Ať $A\colon W \to F^m$ a $H\colon W \to F^n$ jsou dvě lineární zobrazení, k tomu budiž dán sloupcový vektor $\boldsymbol{b} \in F^m$ a lineární zobrazení $\gamma\colon W \to V$. Potom primární úlohu LP s podmínkami na nezápornost (vlevo), kde $x \in W$ je proměnná, a úlohu k ní duální (vpravo; podle principu duality 6.15), kde $\boldsymbol{u} \in V^m$ a $\boldsymbol{v} \in V^n$ jsou proměnné, formulujeme následovně:

$$
\begin{aligned}
\gamma(x) &\longrightarrow \max \qquad\qquad & \iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} &\longrightarrow \min \\
Ax &\leq \boldsymbol{b}\,, & \iota\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A - \iota\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}H &= \gamma\,, \\
Hx &\geq \boldsymbol{o}\,, & \boldsymbol{u} \succeq \boldsymbol{o},\ \boldsymbol{v} &\succeq \boldsymbol{o}\,.
\end{aligned}
$$

Jiný přístup k formulaci úloh LP s podmínkami na nezápornost je uveden v úvaze 13.6.

16.11. Dosažené výsledky. V definici 16.5 jsme zavedli pojem úlohy celočíselného lineárního programování v (obecně) nekonečněrozměrných prostorech. V následujícím odstavci 16.6 jsme první Gomoryho algoritmus formulovali tak, aby pomocí něj bylo možné řešit i zavedené úlohy celočíselného LP v nekonečněrozměrných prostorech. Důležité otázky zmíněné v poznámkách 16.8 a 16.9 týkající se konečnosti prvního Gomoryho algoritmu nebo použitelnosti a konečnosti dalších známých metod pro řešení úloh celočíselného LP v nekonečněrozměrných prostorech zůstávají zatím nezodpovězeny. V odstavci 16.3 (viz též odstavec 16.6) jsme dospěli k poněkud překvapivému závěru, že Gomoryho algoritmy – navzdory obecně rozšířenému názoru – jsou založeny na lexikografické primární* simplexové metodě (tj. nikoliv na „lexikografické duální* simplexové metodě“). V poslední poznámce 16.10 jsme ukázali, jakým způsobem (odlišným oproti úvaze 13.6) lze v nekonečněrozměrném prostoru formulovat úlohu lineárního programování s podmínkami na nezápornost.

Závěr

V předložené práci jsme se zabývali Farkasovým lemmatem, dalšími větami o alternativě a lineárním programováním v nekonečněrozměrných prostorech. Mezi ústřední výsledky této práce počítáme lemma 4.9, Farkasovo lemma 4.15, princip duality 6.15 a větu 15.21 o existenci optimálních řešení pro úlohy lineárního programování; dalším ústředním výsledkem je princip duality 12.9 pro úlohy infinitního lineárního programování.

Pomocí Farkasova lemmatu 4.15 lze snadno odvodit další výsledky, jako například lemma 4.21 o základní dualitě v lineárním programování (viz též poznámky 4.22), Haarovu větu 4.30 nebo další věty o alternativě, kterými jsme se zabývali v § 5. Při tom vyšlo najevo, že věty o alternativě je účelné rozdělit na věty o alternativě prvního druhu a věty o alternativě druhého druhu, poznámka 5.21. Obecnou metodiku důkazů vět o alternativě jsme shrnuli v poznámce 5.23; jejím užitím jsme pak snadno dokázali i zcela nové věty o alternativě 5.29 a 5.32, o kterých autorovi není známo, že by v literatuře byly publikovány. Větami o alternativě jsme se (s využitím metodiky z poznámky 5.23) zabývali rovněž v infinitním případě: kromě infinitního lemmatu 10.13 o základní dualitě v lineárním programování a infinitní Haarovy věty 10.17 jsme další infinitní věty o alternativě rozebírali v § 11.

Ve třetí kapitole – která doplňuje první kapitolu této práce – jsme hlouběji studovali teorii lineárního programování. Na straně jedné jsme se v § 14 a § 15 zabývali tak důvěrně známými tématy, jako je geometrie konvexních polyedrů a simplexová metoda, v doplňujícím § 16 jsme se stručně zabývali jiným zdánlivě zřejmým tématem, totiž formulací úlohy celočíselného lineárního programování a možností jejího řešení pomocí Gomoryho algoritmů (popř. jiných metod); na straně druhé jsme se jmenovanými tématy zabývali v nekonečněrozměrných prostorech. V první a třetí kapitole – tudíž i v § 14, § 15 a § 16 – jsme většinu studovaných témat zkoumali ve velmi obecném kontextu, a sice v kontextu jednoho „základního“ (resp. „nosného“) vektorového prostoru W, vektorového prostoru „cílových hodnot“ V s lineárním uspořádáním, kde oba prostory W i V jsou nad společným lineárně uspořádaným tělesem F, viz komutativní diagram v poznámce 2.4 nebo 4.16. To umožnilo podívat se na dosud známé výsledky zcela novým způsobem, podrobněji viz § 7, někdy též dospět k překvapivým závěrům: V § 15, poznámka 15.4, vyšlo najevo, že simplexová metoda, která je obecně nazývána jako „primární“ resp. „duální“, ve skutečnosti v každé své iteraci pracuje s řešením, jež je přípustným řešením po řadě duální resp. primární úlohy lineárního programování; na změnu významu slov „primární“ a „duální“ v této práci upozorňujeme připojením hvězdičky „*“, poznámka 15.4. V § 16, odstavce 16.3 a 16.6, zase vyšlo najevo, že Gomoryho algoritmy (popř. jiné metody sečných nadrovin) ve skutečnosti nejsou založeny na „lexikografické duální* simplexové metodě“, jak se obecně soudí, nýbrž na lexikografické primární* simplexové metodě.

Kromě dosud rozebíraných hlavních výsledků a jejich důsledků je do předložené práce zahrnuta řada dalších výsledků, jejichž význam je menší anebo pomocný. Pro příklad uveďme alespoň zobecnění základního lemmatu 2.3 lineární algebry, které jsme ovšem využili při důkazu jednoho ze stěžejních výsledků, jímž je Farkasovo lemma 4.15. Pak jsme v § 2 uvedli některé důsledky základního lemmatu 2.3, například Fredholmovu větu 2.11. Jiným příkladem jsou výsledky z § 3 týkající se lexikografického uspořádání nebo výsledky z § 11 o některých vlastnostech (slabě*) uzavřených konvexních množin. (Všechny výsledky tohoto druhu zde není možné vyjmenovat; zajímavější výsledky jsou v práci shrnovány průběžně na konci každého paragrafu v odstavci „Dosažené výsledky“.) Důkazy zmíněných výsledků jsou (v rámci možností) vedeny elementárním způsobem, anebo způsobem, který se v literatuře běžně nepoužívá. Důležitost pomocných výsledků je jasná: jde o výsledky, o něž se opírají důkazy hlavních výsledků této práce. Přínos ostatních výsledků spočívá v tom, že dosažené hlavní výsledky pomáhají zasadit do mnohem širších souvislostí.

Účelem této práce nebylo pouze dosažení nějakých „abstraktních“ výsledků (jako např. zobecnění Farkasova lemmatu 4.15, zobecnění řady dalších vět o alternativě, viz § 5, zobecnění principu duality 6.15 apod.), ale rovněž tyto výsledky postavit na pevný formální základ. Uvedenému účelu v této práci slouží § 1 a § 3. Záměrem bylo v § 1 shrnout základní dovednosti při práci s tělesy a vektorovými prostory, v § 3 pak shrnout základní dovednosti při práci s tělesy a vektorovými prostory s lineárním uspořádáním. Až při psaní § 3 vyšlo najevo, o jak náročný úkol jde. V důsledku toho bylo nutné do práce zařadit také dodatečnou definici 6.9, poznámku 6.10, definici 10.1, vysvětlující poznámku 10.3 a poznámku 12.12. (Právě vyjmenované definice a poznámky se váží k jednomu z ústředních a v této práci hojně používaných pojmů, kterým je pojem soustavy lineárních rovnic a nerovnic: soustavy lineárních rovnic a nerovnic vystupují například v každé větě o alternativě v § 5 nebo § 11.) Poznamenejme ještě, že § 3 mohl být pojat i trochu jiným způsobem: Mnohé pojmy (jako např. archimedovské uspořádání nebo úplnost) byly v § 3 studovány jen v případě lineárně uspořádaných těles anebo lineárně uspořádaných vektorových prostorů. Ve skutečnosti však některé vlastnosti lineárně uspořádaných těles nebo vektorových prostorů plynou přímo z vlastností lineárně uspořádaných grup. Zdá se tedy, že výklad v § 3 na některých místech mohl být poněkud jednodušší (nebo obecnější), kdyby pozornost namísto k tělesům a vektorovým prostorům s lineárním uspořádáním byla obrácena k lineárně uspořádaným grupám.

Otázky zkoumané v této práci se odvíjejí od jejího ústředního tématu (kterým je otázka možnosti zobecnění Farkasova lemmatu, dalších vět o alternativě a principu duality pro úlohy lineárního programování, viz Farkasovo lemma 4.15, dále § 5 a § 11 a principy duality 6.15 a 12.9) anebo s ústředním tématem souvisejí. Převážnou většinu těchto otázek se podařilo zodpovědět úspěšně. Některé však zůstaly bez odpovědi, v rejstříku viz heslo „problém otevřený (?)“, a mohou tak sloužit jako motivace dalšího výzkumu.

Literatura

K některým položkám – například [2] nebo [16] – se zdálo být účelné doplnit další informace formou poznámky pod čarou. Na tuto poznámku se odkazujeme uvedením stejného čísla položky v hranatých závorkách, avšak v horním indexu – například [2] nebo [16] nevyjadřují položku literatury, nýbrž příslušnou poznámku pod čarou.

[1] Anderson, E. J. – Nash, P. *Linear Programming in Infinite-Dimensional Spaces.* Chichester: Wiley, c1987. (Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization.) A Wiley-Interscience publication. ISBN 0-471-91250-6.

[2] Balcar, B. – Štěpánek, P. *Teorie množin.* 1. vydání. Praha: Academia, 1986.[2]

[3] Bartl, D. *Gomoryho algoritmy a jejich konečnost.* Praha, srpen 1998. Diplomová práce na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Vedoucí diplomové práce doc. RNDr. Libuše Grygarová, CSc.

[4] Bartl, D. *Some Notes on Farkas' Lemma in Infinite-Dimensional Spaces* [přednáška]. Konference Mathematical Methods in Economics 2002. Ostrava, 3.–5. září 2002.

[5] Bartl, D. *Několik poznámek o Farkasově lemmatu v nekonečněrozměrných prostorech* [přednáška]. Konference Matematické modelování a jeho prostředky aneb počítání s velkými soustavami, teorie v matematickém modelování, aplikace apod. Brušperk, 14.–15. listopadu 2002.[5]

[6] Bartl, D. *Farkas' Lemma, Other Theorems of the Alternative, and Linear Programming in Infinite-Dimensional Spaces* [přednáška]. Konference Mathematical Methods in Economy and Industry 2003. Hejnice, 26.–30. května 2003.

[7] Bartl, D. *Lexicographic Linear Programming and Simplex Method (in Infinite--Dimensional Spaces)* [přednáška]. Konference Mathematical Methods in Economics 2003. Praha, 10.–12. září 2003.

[8] Bartl, D. Lexicographic Linear Programming and Simplex Method (in Infinite--Dimensional Spaces). In *Mathematical Methods in Economics 2003. Proceedings of Abstracts.* Prague: Czech University of Agriculture in Prague, 2003, s. 10. ISBN 80-213-1047-2.

[9] Bartl, D. *An Application of Semi-Infinite Linear Programming: Approximation of a Continuous Function by a Polynomial* [přednáška]. Konference Mathematical Methods in Economics 2004. Brno, 15.–17. září 2004.

[2] Existuje též 2., opravené a rozšířené vydání (Praha: Academia, 2001; ISBN 80-200--0470-X).

[5] Abstrakt publikován v [11].

[10] Bartl, D. An Application of Semi-Infinite Linear Programming: Approximation of a Continuous Function by a Polynomial. *Acta Mathematica Universitatis Ostraviensis*, 2004, Vol. 12, No. 1, s. 3–11. ISSN 1214-8148. ISBN 80-7368-056-4.

[11] Bartl, D. Několik poznámek o Farkasově lemmatu v nekonečněrozměrných prostorech. In *Matematické modelování a jeho prostředky aneb počítání s velkými soustavami, teorie v matematickém modelování, aplikace apod. Konference k 11. výročí založení Svatoplukova centra. Sborník abstraktů. Brušperk, 14.–15. listopadu 2002.* Ed. D. Bartl. Brušperk: Lašské společenství, 2004, s. 35–36. ISBN 80--903537-0-3.[11]

[12] Bartl, D. *Farkas' Lemma and Linear Programming in Linearly Ordered Vector Spaces* [přednáška]. Konference Mathematical Methods in Economy and Industry 2005. Arnstadt, 23.–27. května 2005.

[13] Bartl, D. *Farkas' Lemma and Linear Programming in Linearly Ordered Vector Spaces* [přednáška]. Konference Mathematical Methods in Economics 2005. Hradec Králové, 14.–16. září 2005.

[14] Bartl, D. Farkas' Lemma and Linear Programming in Linearly Ordered Vector Spaces. In *23rd International Conference Mathematical Methods in Economics 2005. Book of Abstracts. Hradec Králové, 14th–16th September 2005.* Hradec Králové: Gaudeamus, Univerzita Hradec Králové, 2005, s. 9. ISBN 80-7041-547-9.

[15] Bartl, D. Farkas' Lemma, Other Theorems of the Alternative, and Linear Programming in Infinite-Dimensional Spaces: A Purely Linear-Algebraic Approach. *Linear and Multilinear Algebra.* Submitted.[15]

[16] Bengtsson, V. *Fredholm's Theorem* [on-line]. Správcem stránky je Eric W. Weisstein. [cit. leden 2005]. Dostupné z URI ⟨`http://mathworldld.wolfram..com/FredholmsTheorem.html`⟩.[16]

[17] Ben-Israel, A. *Motzkin's Transposition Theorem, and the Related Theorems of Farkas Gordan and Stiemke* [on-line]. June 28, 2000 [cit. září 2005]. Dostupné z URI ⟨`http://rutcor.rutgers.edu/~bisrael/MOTZKIN.ps`⟩.[17]

[18] Bland, R. G. New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method. *Mathematics of Operations Research*, May 1977, Vol. 2, No. 2, s. 103–107.

[19] Broyden, G. C. A Simple Algebraic Proof of Farkas's Lemma and Related Theorems. *Optimization Methods and Software*, 1998, Vol. 8, s. 185–199.

[11] Jde o abstrakt přednášky [5].

[15] Článek odeslán k publikaci na konci srpna (začátku září) 2004. Rozhodnutí editora (resp. recenzentů) o přijetí či nepřijetí článku ke zveřejnění dosud [leden 2006] není k dispozici.

[16] Uvedený odkaz je součástí pozoruhodného souboru stránek, jehož citaci uvádíme:

> Weisstein, E. W. et al. *MathWorld. A Wolfram Web Resource* [on-line]. c1999–2005 [cit. leden 2005]. Dostupné z URI ⟨`http://mathworldld..wolfram.com/`⟩.

[17] Stránka ⟨`http://rutcor.rutgers.edu/~bisrael/AB-I.html`⟩ [cit. září 2005], která na ⟨`http://rutcor.rutgers.edu/~bisrael/MOTZKIN.ps`⟩ odkazuje, uvádí, že uvedený článek [17] má být (snad již byl) publikován v *Encyclopedia of Mathematics* (Kluwer).

[20] Carver, W. B. Systems of Linear Inequalities. *Annals of Mathematics*, 1923, Vol. 23, s. 212–220.

[21] Craven, B. D. – Koliha, J. J. Generalizations of Farkas' theorem. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, November 1977, Vol. 8, No. 6, s. 983–997.

[22] Черников, С. Н. *Линейные неравенства.* Москва: Наука, 1968. (Современная алгебра.) [Černikov, S. N. *Linejnye neravenstva.* Moskva: Nauka, 1968. (Sovremennaja algebra.)]

[23] Dalton, R. E. – Llewellyn, R. W. An Extension of the Gomory Mixed-Integer Algorithm to Mixed-Discrete Variables. *Management Science*, March 1966, Vol. 12, No. 7, s. 569–575.

[24] Dantzig, G. B. Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities. Chapter XXI. In *Activity Analysis of Production and Allocation.* Ed. T. C. Koopmans. New York: Wiley; London: Chapman, 1951, s. 339–347.

[25] Dantzig, G. B. – Orden, A. – Wolfe, P. The Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form under Linear Inequality Restraints. *Pacific Journal of Mathematics*, June 1955, Vol. 5, No. 2, s. 183–195.

[26] Davis, M. *Applied Nonstandard Analysis.* New York: Wiley, c1977. (Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts.) A Wiley-Interscience publication. ISBN 0-471-19897-8.

[27] Dax, A. A New Theorem of the Alternative. *Mathematical Programming*, May 1990, Vol. 47, No. 1–3, s. 297–299.

[28] Dax, A. The relationship between theorems of the alternative, least norm problems, steepest descent directions, and degeneracy: A review. *Annals of Operations Research*, 1993, Vol. 46, s. 11–60.

[29] Dax, A. An Elementary Proof of Farkas' Lemma. *SIAM Review*, September 1997, Vol. 39, No. 3, s. 503–507.

[30] Dax, A. – Sreedharan, V. P. Theorems of the Alternative and Duality. *Journal of Optimization Theory and Applications*, September 1997, Vol. 94, No. 3, s. 561––590.

[31] Dhompongsa, S. – Kreinovich, V. – Nguyen, H. T. *Interval Mathematics: Algebraic Aspects.* El Paso: The University of Texas at El Paso. Department of Computer Science, October 2001. Technical Report UTEP-CS-01-29. Dostupné také on-line z URI ⟨`http://www.cs.utep.edu/vladik/2001/tr01-29.pdf`⟩ [cit. duben 2005].[31]

[31] Kromě PDF verze je ze („základní“) adresy ⟨`http://www.cs.utep.edu/vladik/2001/`⟩ dostupná také PS verze ⟨.../`tr01-29.ps.gz`⟩ [cit. duben 2005]. Stránka ⟨.../`abstr01.html`⟩ [cit. duben 2005], která na ⟨.../`tr01-29.pdf`⟩ i na ⟨.../`tr01-29.ps.gz`⟩ odkazuje, dále uvádí, že uvedená technická zpráva [31] byla publikována také v „*Proceedings of the Second International Conference on Intelligent Technologies InTech'2001*, Bangkok, Thailand, November 27–29, 2001, pp. 30–38“. Místo třech teček a lomítka (.../) se vždy doplní výše uvedená základní adresa.

[32] DIEUDONNÉ, J. Sur la Séparation des Ensembles Convexes. *Mathematische Annalen*, 1966, Band 163, Heft 1, s. 1–3.[32]

[33] DRÁPAL, A. *Algebra* [*pro informatiky*] [on-line]. [1994–1996?] Skripta. Dostupné z URI ⟨`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~drapal/`⟩, zvolit odkaz „Algebra pro informatiky“ [cit. leden 2005], anebo použít přímo URI ⟨`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~drapal/skripta/`⟩ [cit. leden 2005].[33]

[34] DUFFIN, R. J. Infinite Programs. In *Linear Inequalities and Related Systems.* Ed. H. W. KUHN, A. W. TUCKER. Princeton: Princeton Univ. Press, 1956, s 157–170. (Annals of Mathematics Studies; No. 38.)

[35] FAN, K. On Systems of Linear Inequalities. In *Linear Inequalities and Related Systems.* Ed. H. W. KUHN, A. W. TUCKER. Princeton: Princeton Univ. Press, 1956, s. 99–156. (Annals of Mathematics Studies; No. 38.)

[36] FAN, K. A generalization of the Alaoglu-Bourbaki theorem and its applications. *Mathematische Zeitschrift*, 1965, Band 88, Heft 1, s. 48–60.[36]

[37] FAN, K. – GLICKSBERG, I. – HOFFMAN, A. J. Systems of Inequalities Involving Convex Functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, June 1957, Vol. 8, s. 617–622.

[38] FARKAS, G. A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásai. [Aplikace Fourierova mechanického principu. V maďarštině.] *Mathematikai és Természettudományi Értesitő*, 1894, Vol. 12, s. 457–472.[38]

[39] FARKAS, G. A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásainak algebrai alapjáról. [Algebraický základ aplikací Fourierova mechanického principu. V maďarštině.] *Mathematikai és Physikai Lapok*, 1896, Vol. 5, s. 49–54.[39]

[40] FARKAS, G. A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapja. [Algebraický základ aplikace Fourierova mechanického principu. V maďarštině.] *Mathematikai és Természettudományi Értesitő*, 1898, Vol. 16, s. 361–364.[40]

[32] Laskavostí Göttingenského digitalizačního centra (viz poznámku pod čarou [44]) jsou téměř všechny svazky časopisu „Mathematische Annalen“ dostupné v digitalizované podobě on-line. (Digitalizováno není jen několik posledních svazků.) Kompletní svazek č. 163 uvedeného časopisu v digitalizované podobě je dostupný z URI ⟨`http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache/toc/D62531.html`⟩ [cit. prosinec 2005].

[33] V položce [33] je citována v současné době aktuální verze těchto skript. Autor ve skutečnosti pracoval s poněkud starší verzí uvedených skript, viz též poznámku na konci příkladu 3.16.a.

[36] Laskavostí Göttingenského digitalizačního centra (viz poznámku pod čarou [44]) jsou téměř všechny svazky časopisu „Mathematische Zeitschrift“ dostupné v digitalizované podobě on-line. (Digitalizováno není jen několik posledních svazků.) Kompletní svazek č. 88 uvedeného časopisu v digitalizované podobě je dostupný z URI ⟨`http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache/toc/D168663.html`⟩ [cit. prosinec 2005].

[38] Článek vyšel také německy, viz [41]. – Odkaz je převzat z [77], [69].

[39] Článek vyšel také německy, viz [42]. – Odkaz je převzat z [77].

[40] Článek vyšel také německy, viz [43]. – Odkaz je převzat z [77], [69].

[41] Farkas, J. Ueber die Anwendungen des mechanischen Princips von *Fourier*. *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, 1895, Vol. 12, s. 263–281.[41]

[42] Farkas, J. Die algebraischen Grundlagen der Anwendungen des *Fourier*schen Princips in der Mechanik. *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, 1898, Vol. 15, s. 25–40.[42]

[43] Farkas, J. Die algebraische Grundlage der Anwendungen des mechanischen Princips von *Fourier*. *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, 1899, Vol. 16, s. 154–157.[43]

[44] Farkas, J. Theorie der einfachen Ungleichungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1902, Band 124, Heft 1, s. 1–27.[44]

[45] Faure, R. – Heurgonová, E. *Uspořádání a Booleovy algebry.* Z francouzského originálu „Structures ordonnées et algèbres de Boole" (Paris: Gauthier-Vilars, 1971) přeložil Ladislav Beran. 1. vydání. Praha: Academia, 1984.

[46] Franklin, J. *Methods of Mathematical Economics: Linear and Nonlinear Programming, Fixed-Point Theorems.* New York: Springer, c1980. ISBN 0-387-90481-6.[46]

[47] Fredholm, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Mathematica*, 30 mars 1903, Band = Tome 27, s. 365–390.

[48] Gale, D. *The Theory of Linear Economic Models.* New York: McGraw-Hill, 1960.

[49] Goldman, A. J. – Tucker, A. W. Theory of Linear Programming. In *Linear Inequalities and Related Systems.* Ed. H. W. Kuhn, A. W. Tucker. Princeton: Princeton Univ. Press, 1956, s. 53–97. (Annals of Mathematics Studies; No. 38.)

[50] Good, R. A. Systems of Linear Relations. *SIAM Review*, January 1959, Vol. 1, No. 1, s. 1–31.

[51] Gomory, R. E. Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, September 1958, Vol. 64, No. 5, s. 275–278.

[41] Článek původně vyšel maďarsky, viz [38]. – Odkaz je převzat z [77], [44], [69].

[42] Článek původně vyšel maďarsky, viz [39]. – Odkaz je převzat z [77], [44].

[43] Článek původně vyšel maďarsky, viz [40]. – Odkaz je převzat z [77], [44], [69].

[44] Laskavostí Göttingenského digitalizačního centra (Göttingen Digitalisierungs-Zentrum ⟨`http://gdz.sub.uni-goettingen.de/`⟩ [cit. srpen 2005]) Dolnosaské státní a univerzitní knihovny v Göttingenu (Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen ⟨`http://www.sub.uni-goettingen.de/`⟩ [cit. srpen 2005]) jsou téměř všechny svazky časopisu „Journal für die reine und angewandte Mathematik" dostupné v digitalizované podobě on-line. (Digitalizováno není jen několik posledních svazků.) Kompletní svazek č. 124 uvedeného časopisu (včetně titulního listu) v digitalizované podobě je dostupný z URI ⟨`http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache/toc/D261361.html`⟩ [cit. srpen 2005].

[46] Kromě uvedeného amerického vydání existuje také evropské vydání (Heidelberg: Springer, [c1980]; ISBN 3-540-90481-6).

[52] Gomory, R. E. An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. Princeton: [Princeton Unversity. IBM Mathematics Research Project?], November 17, 1958. IBM Mathematics Research Project Technical Report Number 1.[52]

[53] Gomory, R. E. *An Algorithm for the Mixed Integer Problem.* Santa Monica: RAND Corporation, July 7, 1960. Research Memorandum RM-2597.[53]

[54] Gomory, R. E. An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. Chapter 34. In *Recent Advances in Mathematical Programming.* Ed. R. L. Graves, P. Wolfe. McGraw-Hill: New York, 1963, s. 269–302.[54]

[55] Gomory, R. E. An All-integer Integer Programming Algorithm. Chapter 13. In *Industrial Scheduling.* Ed. J. F. Muth, G. L. Thompson. Prentice-Hall: Englewood Cliffs (New Jersey), 1963, s. 193–206.[55]

[56] Gordan, P. Ueber die Aufösung linearer Gleichungen mit reellen Coefficienten. *Mathematische Annalen*, 1873, Band VI, Heft 1, s. 23–28.[56]

[57] Greenberg, H. J. *Mathematical Glossary Supplement: Alternative Systems* [on--line]. c1996–2004, last updated on Wednesday, August 20, 2003 [cit. leden 2005]. Dostupné z URI ⟨`http://carbon.cudenver.edu/~hgreenbe/glossary/second.php?page=alterntv.html`⟩.[57]

[58] Grygarová, L. *Úvod do lineárního programování.* Praha: SPN, 1975.

[59] Haar, A. A lineáris egyenlőtlenségekről. [O lineárních nerovnostech. V maďarštině.] *Mathematikai és Természettudományi Értesitő*, 1918, Vol. 36, s. 279–296.[59]

[60] Haar, A. Über lineare Ungleichungen. *Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio Scientiarum Mathematicarum*, 1924, Vol. 2, s. 1–14.[60]

[52] Tato práce byla později přetištěna v [54]. – Odkaz je převzat z [54], [55].

[53] Odkaz je převzat z [54], [23].

[54] Článek byl původně zpracován jako výzkumná zpráva [52].

[55] Podle [55: poznámka pod čarou (na str. 193)] byl výzkum, jehož se uvedená práce týká, proveden v „IBM Research Center, Yorktown Heights (New York)“ a oznámen v „*IBM Research Report* RC-189, January 29, 1960“.

[56] Laskavostí Göttingenského digitalizačního centra (viz poznámku pod čarou [44]) jsou téměř všechny svazky časopisu „Mathematische Annalen“ dostupné v digitalizované podobě on-line. (Digitalizováno není jen několik posledních svazků.) Kompletní svazek č. VI uvedeného časopisu v digitalizované podobě je dostupný z URI ⟨`http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache/toc/D38653.html`⟩ [cit. září 2005].

[57] Uvedený odkaz je jen jednou z celého souboru stránek, jehož citaci uvádíme:

> Greenberg, H. J. *Mathematical Glossary* [on-line]. c1996–2004 [cit. leden 2005]. Dostupné z URI ⟨`http://carbon.cudenver.edu/~hgreenbe/glossary/`⟩. Mirror na URI ⟨`http://orion.math.uwaterloo.ca/~hwolkowi/mirror.d/glossary/`⟩.

Poznámky: Hlavní stránka uvedeného *Glossary* je dostupná také z URI ⟨`.../glossary.html`⟩. V listopadu 2002 byl odkaz [57] dostupný z URI ⟨`.../alterntv.html`⟩, které – v omezené míře – je funkční dodnes [leden 2005]. Místo třech teček a lomítka (`.../`) se doplní výše uvedená základní adresa stránek.

[59] Článek vyšel také německy, viz [60]. – Odkaz je převzat z [77], [69].

[60] Článek původně vyšel maďarsky, viz [59]. – Odkaz je převzat z [77].

[61] Ikramov, H. D. *Linear Algebra: Problems Book.* Z ruského originálu „Задачник по линейной алгебре“ (Москва: Наука, 1975) [„Zadačnik po linejnoj algebre“ (Moskva: Nauka, 1975)] – jehož autorem je Хаким Даджанович Икрамов [Chakim Dadžanovič Ikramov] – přeložil Oleg Efimov. 1st publication. Moscow: Mir, 1983.

[62] Jarník, V. *Diferenciální počet (I).* 7., nezměněné vydání. Praha: Academia, 1984, c1963.

[63] Jarník, V. *Diferenciální počet (II).* 4. vydání. Praha: Academia, 1984, c1976.

[64] Korovkin, P. P. *Nerovnosti.* Z ruského originálu „Neravenstva“ (Moskva: Gostechizdat, [1952?]) přeložil Milan Ullrich. 2. vydání. Praha: SNTL, červen 1957. (Populární přednášky o matematice; sv. 5.)

[65] Kosmák, L. *Konvexita.* 1. vydání. Praha: Academia, 1992. ISBN 80-200-0330-4.

[66] Kosmák, L. – Potůček, R. *Metrické prostory.* 1. vydání. Praha: Academia, 2004. ISBN 80-200-1202-8.

[67] Lukeš, J. *Zápisky z funkcionální analýzy.* 1. vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-597-3.[67]

[68] Lukeš, J. – Malý, J. *Measure and Integral.* 1st edition. Prague: Matfyzpress, 1995. ISBN 80-85863-06-5.

[69] Monhor, D. Comment on the Theorems of Farkas and Haar. *Periodica Mathematica Hungarica*, 1983, Vol. 14, No. 2, s. 147–154.

[70] Motl, L. – Zahradník, M. *Pěstujeme lineární algebru.* Dotisk [prvního vydání]. Praha: Karolinum, 1997, c1995. ISBN 80-7184-186-2.[70]

[71] Motzkin, T. S. *Beiträge zur Theorie der linearen Ungleichungen.* Basel 1934. Doktorská disertační práce na Universitě v Basileji. Jerusalem: Azriel, 1936.[71]

[72] Motzkin, T. S. *Contributions to the Theory of Linear Inequalities.* Z německého originálu „Beiträge zur Theorie der linearen Ungleichungen“ (Basel 1934. Doktorská disertační práce na Universitě v Basileji. Jerusalem: Azriel, 1936) přeložil D. R. Fulkerson. Santa Monica: RAND Corporation, 7 March 1952. RAND Corporation Translation 22.[72]

[67] Existuje též dotisk 1. vydání (Praha: Karolinum, 2002; ISBN 80-7184-597-3).

[70] Existuje též 1. vydání (Praha: Karolinum, 1995; ISBN 80-7184-186-2), 2. vydání (Praha: Karolinum, 1999; ISBN 80-7184-815-8) a 3. vydání (Praha: Karolinum, 2002; ISBN 80-246-0421-3).

[71] Práce byla přeložena do angličtiny, viz [72].

[72] Reprint uvedeného překladu spolu s reprinty řady dalších publikovaných Motzkinových prací (článků) lze nalézt v knize, jejíž citaci uvádíme:

> *Theodore S. Motzkin: Selected Papers.* Ed. David Cantor, Basil Gordon, Bruce Rothschild. Boston: Birkhäuser, 1983. (Contemporary Mathematicians.) ISBN 3-7643-3087-2.

Reprint uvedeného překladu je v této knize na stranách 1–80.

[73] O'Connor, J. J. – Robertson, E. F. *Erik Ivar Fredholm* [on-line]. November 2002 [cit. červen 2005]. Dostupné z URI ⟨`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Fredholm.html`⟩.[73]

[74] O'Connor, J. J. – Robertson, E. F. *George Dantzig* [on-line]. April 2003 [cit. prosinec 2005]. Dostupné z URI ⟨`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Dantzig_George.html`⟩.[74]

[75] O'Connor, J. J. – Robertson, E. F. *Gyula Farkas* [on-line]. March 2004 [cit. srpen 2005]. Dostupné z URI ⟨`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Farkas.html`⟩.[75]

[76] Padberg, M. *Linear Optimization and Extensions.* 2nd, revised and expanded edition. Berlin: Springer, c1999. (Algorithms and Combinatorics; 12.) ISBN 3-540-65833-5.

[77] Prékopa, A. On the Development of Optimization Theory. *The American Mathematical Monthly*, August–September 1980, Vol. 87, s. 527–542.

[78] Procházka, L. et al. *Algebra.* 1. vydání. Praha: Academia, 1990. ISBN 80-200-0301-0.

[79] Ramík, J. *Duality in Fuzzy Linear Programming: Some New Results* [přednáška]. Konference Mathematical Methods in Economics 2003. Praha, 10.–12. září 2003.

[80] Ramík, J. Duality in Fuzzy Linear Programming: Some New Results. In *Mathematical Methods in Economics 2003. Proceedings of the 21st International Conference. Prague, Czech Republic, 10th–12th September 2003.* Prague: Czech University of Agriculture in Prague, 2003, s. 224–229. ISBN 80-213-1046-4.

[81] Reisenauer, R. [Kapitola] Matematika a výpočetní technika. [Podkapitola] Významní matematikové. In *Co je co? (3) Příručka pro každý den.* 2., přepracované a doplněné vydání. Praha: Pressfoto, 1984, s. 62–69.

[82] Roos, C. – Terlaky, T. Note on a paper of Broyden. *Operations Research Letters*, 1st November 1999, Vol. 25, No. 4, s. 183–186.

[83] Schirotzek, W. On Farkas Type Theorems. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 1981, Vol. 22, No. 1, s. 1–14.

[84] Smítal, J. *O funkciách a funkcionálnych rovniciach.* 1. vydanie. Bratislava: Alfa, september 1984.

[73] Uvedený odkaz je součástí souboru stránek, kde lze nalézt životopisy mnoha známých matematiků a další historické články matematické povahy a jehož citaci uvádíme:

> O'Connor, J. J. – Robertson, E. F. *The MacTutor History of Mathematics archive* [on-line]. Naposledy revidováno v květnu 2005 [May 2005] [cit. červen 2005]. Dostupné z URI ⟨`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/`⟩ (nebo z URI ⟨`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html`⟩).

[74] Viz poznámku pod čarou [73].

[75] Viz poznámku pod čarou [73].

[85] Stiemke, E. Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen. *Mathematische Annalen*, 1915, Band 76, Heft 2, s. 340–342.[85]

[86] Taylor, A. E. *Úvod do funkcionální analýzy.* Z anglického originálu (6th Printing; Wiley: New York, 1967) přeložili Miroslav Hušek a Alois Kufner. 1. vydání. Praha: Academia, 1973.

[87] Tucker, A. W. Dual Systems of Homogeneous Linear Relations. In *Linear Inequalities and Related Systems.* Ed. H. W. Kuhn, A. W. Tucker. Princeton: Princeton Univ. Press, 1956, s. 3–18. (Annals of Mathematics Studies; No. 38.)

[88] Tukey, J. W. Some Notes on the Separation of Convex Sets. *Portugaliae Mathematica*, Junho 1942, Vol. 3, Fasc. 2, s. 95–102.

[89] Wesolowsky, G. O. – Love, R. F. The Optimal Location of New Facilities Using Rectangular Distances. *Operations Research*, 1971, Vol. 19, s. 124–130.

[90] *Wikipedia, the free encyclopedia. Cluj-Napoca* [on-line]. Last modified 10:30, 21 August 2005 [cit. srpen 2005]. Dostupné z URI ⟨`http://en.wikipedia.org//wiki/Cluj-Napoca`⟩.

[85] Laskavostí Göttingenského digitalizačního centra (viz poznámku pod čarou [44]) jsou téměř všechny svazky časopisu „Mathematische Annalen“ dostupné v digitalizované podobě on-line. (Digitalizováno není jen několik posledních svazků.) Kompletní svazek č. 76 uvedeného časopisu v digitalizované podobě je dostupný z URI ⟨`http:////dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache/toc/D28936.html`⟩ [cit. září 2005].

Rejstřík

Odkazy, které za každým heslem následují, jsou tří popř. čtyř druhů: Nejčastěji jde o odkaz na konkrétní odstavec popř. písmeno práce; takový odkaz má tvar $x.y$ popř. $x.y.z$, kde x je číslo paragrafu, k tomu y je číslo odstavce v rámci paragrafu x a z je písmeno v rámci odstavce $x.y$. Je-li danému heslu věnován celý paragraf, je uveden odkaz tvaru § x, kde x je číslo paragrafu. Jde-li o odkaz na místo, které není součástí žádného paragrafu, např. na místo v úvodní nebo závěrečné kapitole této práce, je uvedeno pouze číslo příslušné stránky: je tedy uveden odkaz ve tvaru n, kde n je číslo stránky; odkazy na několik po sobě jdoucích stránek jsou sloučeny do jediného odkazu tvaru m–n, kde m a n je číslo po řadě počáteční a koncové stránky daného úseku po sobě jdoucích stránek. Jestliže podhesla některého hesla pokračují v dalším sloupci (popř. na další stránce), příslušné heslo je na začátku sloupce (resp. stránky) zopakováno a je za něj připojena poznámka „(*pokrač.*)“ – „pokračování“.

Na začátku rejstříku je seznam matematických značek, které jsou v práci použity. Značky jsou jen zhruba roztříděny do pěti skupin: (1) množiny a prostory, (2) znaky operací a relací, (3) operace a relace s uvedenými argumenty, (4) označení, které má v této práci ustálený význam, a (5) lineární zobrazení. Po seznamu matematických značek následuje seznam jednotlivých předmětových i jmenných hesel, která jsou v práci použita anebo zmíněna, v abecedním pořadí.