Matematicko-fyzikální fakulta

Univerzity Karlovy

KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY

Diplomová práce

Daugavetovy prostory a operátory

Dušan Pokorný

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.

Studijní program: Matematika, Matematická analýza,
Teorie funkcí, funkcionální analýza a teorie potenciálu
PRAHA 2005

KNIHOVNA MFF UK

Dne 28.2.07 uznána diplomová práce zk. úř. komisí se práci vyhověno.

V. Miklík

Velice rád bych poděkoval panu Prof. RNDr. Jaroslavu Lukešovi, DrSc. za neocenitelnou pomoc při přípravě této práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 19.4.2005

Dušan Pokorný

OBSAH

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Název práce: Daugavetovy prostory a operátory
Autor: Dušan Pokorný
Katedra (ústav): KMA MFF UK
Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.
e-mail vedoucího: lukes@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt:

Cílem práce bylo vyšetřovat některé nové třídy Banachových prostorů majících Daugavetovu vlastnost a pokusit se dát odpovědi na nevyřešené problémy. První kapitola shrnuje základní výsledky o Daugavetových prostorech s důrazem na jejich geometrické vlastnosti. V další části věnované funkčním prostorům uvedeme po malém úvodu o Daugavetových operátorech dvě postačující podmínky pro Daugavetovu vlastnost funkčních prostorů. Jednou z nich je simplicialita, pro kterou uvedeme jednoduchý původní důkaz. Druhou je v práci zavedná podmínka (G). Poslední kapitola je pak inspirována otázkou D. Wernera. Jeden z jeho otevřených problémů zněl, zda prostor lipschitzovských funkcí na jednotkovém čtverci vybavený některou ze svých přirozených norem má Daugavetovu vlastnost. Práce dává na tuto otázku kladnou odpověď. Navíc, pro případ kompaktní podmnožiny K eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, je podána i nutná a postačující podmínka pro Daugavetovu vlastnost Banachova prostoru lipschitzovských funkcí na K. Na závěr je ukázáno, jak úvahy o prostorech lipschitzovských funkcí použít i na prostory spojitě diferencovatelných funkcí.

Klíčová slova: Daugavetovy prostory, lipschitzovské funkce

Title: Daugavet spaces and operators
Author: Dušan Pokorný
Department: KMA MFF UK
Supervisor: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.
Supervisor's e-mail address: lukes@karlin.mff.cuni.cz

Abstract:

The purpose of this work is to study certain classes of Banach spaces with the Daugavet property and to answer some open questions. In the first section we resume basic facts about Daugavet operators and also characteristics of Daugavet spaces, especialy the geometric ones. The next section is aimed to function spaces. We show two sufficient conditions which imply the Daugavet property for function spaces: the simpliciality and the property (G) which is introduced in this paper. The main result is to present the solution of an open question by D. Werner concerning spaces of Lipschitz functions. We prove that for the compact convex set K in the Banach space, the space of Lipschitz functions on K has the Daugavet property. In addition, we formulate the necessary and sufficient condition for the Daugavet property of the space of Lipschitz functions on the compact set in the case of the euclidean space

$\mathbb{R}^n$. At the end we prove the similar result for the space of continuously differentiable functions.

Keywords: Daugavet spaces, Lipschitz functions

Předmluva

Uvažujme na Banachově prostoru X operátor T a ptejme se, za jakých podmínek na Banachův prostor X a operátor T je splněna rovnost

$$\text{(DR)} \qquad \| \operatorname{Id} + T \| = 1 + \|T\| ,$$

(Id značí samozřejmě identický operátor) známá dnes jako *Daugavetova rovnice*. Název této identity je spojen se jménem I.K. Daugaveta, který ve své práci [Dau,1963] dokázal, že uvedenou rovnost splňují všechny kompaktní operátory na Banachově prostoru $\mathcal{C}([0,1])$. Operátory, které splňují Daugavetovu rovnost (DR) se nazývají dnes *Daugavetovy*. Jeho článek odstartoval zkoumání rovnosti (DR) pro další třídy Banachových prostorů a různé typy operátorů na nich. O tři roky později ukázal G.Ya. Lozanovskij ukázal v [Loz,1966], stejný výsledek i pro $L^1([0,1])$, přičemž týž výsledek obsahuje i článek V.F. Babenka a S.A. Pičugova [BaPi,1981]. A o rok později M.A. Krasnoselskij dokázal v [Kra,1967] rovnost (DR) na Banachových prostorech vektorových spojitých funkcí, pro operátory obecnější než kompaktní. P. Chauveheid ukázal v [Cha,1982], že kompaktní operátory na prostor $\mathcal{C}(K)$ splňují (DR), právě když kompakt K je perfektní a stejný výsledek i pro prostor $L^1(\mu)$, pokud míra μ je spojitá (srovnej s 2.12). Obdobné tvrzení pak platí i pro prostory $L^\infty(\mu)$. Ke stejným výsledkům dospěl i H. Kamowitz v [Kam,1984]. Z historických prací jistě stojí za to připomenout ještě článek C. Foiase a I. Singera [FoSi,1965]. Více informací lze nalézt třeba v přehledném článku D.Wernera [Wer,2001].

Yu.A. Abramovič, C.D. Aliprantis a O.Burkinshaw vyšetřovali, za jakých podmínek operátory na dedekindovsky úplných Banachových svazech splňují Daugavetovu rovnost (viz třeba [AbAlBu,1991]; v nedávno vydané monografii [AA,2002] je dokonce celá obsáhlá kapitola věnována této problematice). Další výsledky v tomto duchu získali třeba J. Holub [Hol,1986], S.I. Ansari [Ans,1993] či K.D. Schmidt [Sch,1990].

Později se ukázalo, že na Banachově prostoru třída kompaktních operátorů splňuje Daugavetovu rovnost, právě když ji splňuje každý jedno–dimensionální operátor (a to je právě v případě, kdy všechny slabě kompaktní operátory splňují (DR); srovnej s Větou 2.19). Slabě kompaktní operátory bývají pak také uvažovány jako speciálcí případ tzv. 'narrow operators' viz [KaŠvWe,2001]. Banachovým prostorům, kde jedno–dimensionální operátory splňují Daugavetovu rovnost (DR), se dnes říká *Daugavetovy*, či také prostory s *Daugavetovou vlastností.* V posledním desetiletí došlo ke zkoumání geometrie Banachových prostorů majících Daugavetovu vlastnost. Byly podány geometrické charakteristiky Daugavetových prostorů (srovnej s Lemmatem 2.11). Daugavetovy prostory nemají Radon–Nikodýmovu vlastnost (Věta 2.14), nejsou tedy ani reflexivní. Daugavetovy prostory nepatří ani do kategorie Asplundových prostorů (Poznámka 2.18). Z dalších vlastností uveďme, že obsahují kopii prostoru l^1 (Věta 2.20). Výsledky studia Daugavetových prostorů pak také nabízejí nový pohled na studium Banachových prostorů s bezpodmínečně konvergentními Schauderovými basemi (viz např. [KSŠW,2000]). Řadu prací v poslední době publikovali třeba V.M. Kadec, N.Kalton, D.Werner, R.V. Švidkoj či G.G. Sirotkin. Kromě toho jsou v poslední době studovány i prostory s tzv. *Alternativní Daugavetovou vlastností*, kde je rovnice (DR) nahrazena rovnicí

$$\max_{|\omega|=1} || \operatorname{Id} + \omega T|| = 1 + ||T||$$

(viz např. [MaOi,2004]).

Cílem práce bylo vyšetřovat další třídy Banachových prostorů majících Daugavetovu vlastnost a pokusit se dát odpovědi na nevyřešené problémy. Práce je rozdělena do několika částí. Po úvodním připomenutí původního Daugavetova důkazu následuje kapitola shrnující základní výsledky o Daugavetových prostorech s důrazem na jejich geometrické vlastnosti a na tvrzení potřebná v původní části práce. V další části věnované funkčním prostorům uvedeme po malém úvodu o Daugavetových operátorech dvě postačující podmínky pro Daugavetovu vlastnost funkčních prostorů. Jednou z nich (viz 3.8) je simplicialita, pro kterou uvedeme jednoduchý původní důkaz. Druhou je námi zavedená podmínka (G).

Poslední kapitola je pak inspirována otázkou D. Wernera z jeho článku [Wer,2001] a obsahuje nejdůležitější výsledky diplomové práce. Jeden z jeho otevřených problémů zněl, zda prostor lipschitzovských funkcí na jednotkovém čtverci vybavený některou ze svých přirozených norem má Daugavetovu vlastnost. Věta 4.3 dává na tuto otázku kladnou odpověď. Navíc pro případ kompaktní podmnožiny K eukleidovckého prostoru $\mathbb{R}^n$ je podána i nutná a postačující podmínka pro Daugavetovu vlastnost Banachova prostoru lipschitzovskch funkcí na K. Ve Větě 4.10 pak ukážeme, jak úvahy o prostorech lipschitzovských funkcí lze použít i na prostory spojitě diferencovatelných funkcí. Na závěr pak shrnujeme otevřené problémy, některé starší, některé položené v této práci.

Použité označení

V celém textu budeme používat následující značení:

B_X (resp. S_X) pro uzavřenou jednotkovou kouli (resp. sféru) Banachova prostoru X

$U(x,\varepsilon)$ (resp. $B(x,\varepsilon)$ pro otevřenou (resp. uzavřenou) kouli o středu x a poloměru ε

$\mathcal{U}(x)$ pro systém všech otevřených okolí bodu x.

$\mathcal{L}(X)$ pro Banachův prostor spojitých lineárních operátorů na Banachově prostoru X

$\mathrm{Id} \in \mathcal{L}(X)$ pro identický operátor na Banachově prostoru X

T^* pro (banachovsky) adjungovaný operátor k operátoru T

$\operatorname{rank} T$ pro dimensi obrazu operátoru T

$\sigma(T)$ pro spektrum operátoru T

$\mathcal{C}(K)$ pro prostor všech spojitých funkcí na kompaktu K opatřený sup–normou

$\mathcal{M}(K)$ pro prostor všech Radonových měr na kompaktu K

δ_x pro Diracovu míru v bodě x

$\operatorname{co} M$ (resp. $\overline{\operatorname{co}} M$) pro konvexní (resp. uzavřený konvexní) obal množiny M

$[a,b]$ (resp. (a,b)) pro úsečku spojující dva prvky a a b Banachova prostoru obsahující (resp. neobsahující) oba krajní body

χ_A pro charakteristickou funkci množiny A

∂A pro hranici množiny A

K^c pro doplněk množiny $K \subset X$ v prostoru X, tj. $K^c = X \setminus K$

$|a-b|$ pro eukleidovskou vzdálenost dvou bodů a a b v $\mathbb{R}^n$

$D_v f$ pro derivaci funkce f ve směru v

$D^k f$ pro k-tou derivaci funkce f, první derivaci budeme pro jednoduchost značit Df nebo f'

1. Daugavetův důkaz

Na začátek uveďme původní Daugavetův důkaz.

1.1. Věta. *Buď T kompaktní operátor na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$, potom platí*

$$||\operatorname{Id} + T|| = 1 + ||T||\,.$$

Daugavetův důkaz. Stačí dokázat jen nerovnost $||\operatorname{Id} + T|| \geq 1 + ||T||$, opačná nerovnost je splněna automaticky. Protože každý kompaktní operátor na $\mathcal{C}([0,1])$ je limitou konečně dimensionálních operátorů, stačí uvažovat T konečně dimensionální. Nechť tedy pro $f \in \mathcal{C}([0,1])$ platí

$$Tf = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(f)\, z_k\,,$$

kde

$$\phi_k \in (\mathcal{C}([0,1]))^*\,,\ \phi_k(f) = \int_0^1 f(t) dg_k(t)\,,\ g_k \in BV([0,1]) \text{ a } z_k \in \mathcal{C}([0,1])\,.$$

Označme

$$M = \max(||z_1||, ..., ||z_n||)$$

a volme $\varepsilon > 0$. Potom existuje $f_0 \in B_{\mathcal{C}([0,1])}$ tak, že $||Tf_0|| > ||T|| - \varepsilon/2$. Položme $F_0 = Tf_0$, potom existuje interval $[a,b] \subset [0,1]$ tak, že

$$F_0(t) \geq ||T|| - \varepsilon/2 \quad \text{pro} \quad t \in [a,b]\,.$$

Volme $m \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$m > \frac{4n^2 M}{\varepsilon} \max\Big(\bigvee_a^b g_1, ..., \bigvee_a^b g_n\Big)$$

a ekvidistantní dělení $a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b$. Potom ale existuje $i, 0 \leq i < m$ tak, že

$$\bigvee_i^{i+1} g_k \leq \frac{\varepsilon}{4nM} \quad \text{pro všechna} \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Tedy existuje $\delta > 0$ a $t_0 \in [0,1]$ tak, že $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset [a,b]$ a

$$\bigvee_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} g_k \leq \frac{\varepsilon}{4nM}$$

pro všechna $k = 1, .., n$. Definujme spojitou funkci $f_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t = t_0, \\ f_0(t) & \text{pro } t \in [0,1] \setminus [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \\ \text{lineární} & \text{jinak}. \end{cases}$$

Zřejmě $||f_1|| = 1$. Položme $F_1 = Tf_1$, potom

$$\begin{aligned} F_1 - F_0 = Tf_1 - Tf_0 &= \sum_{k=1}^{n} (\phi_k(f_1) - \phi_k(f_0) z_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} (f_1(t) - f_0(t)) dg_k(t) \right) z_k \,. \end{aligned}$$

A tedy

$$||F_1 - F_0|| \leq 2M \,.\, \frac{\varepsilon}{2nM} \,.\, n = \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Protože $t_0 \in [a, b]$, máme $F_0(t_0) \geq ||T|| - \varepsilon/2$. A tedy podle $||F_1 - F_0|| \leq \varepsilon/2$ dostáváme i $F_1(t_0) \geq ||T|| - \varepsilon$. Konečně

$$||\operatorname{Id} + T|| \geq ||(\operatorname{Id} + T) f_1|| = ||f_1 + F_1|| \geq |f_1(t_0) + F_1(t_0)| \geq 1 + ||T|| - \varepsilon \,.$$

Protože ale bylo ε libovolné, dostáváme $||\operatorname{Id} + T|| \geq 1 + ||T||$. ■

2. Základní vlastnosti Daugavetových prostorů a operátorů

2.1. Daugavetovy operátory. Buď X Banachův prostor, $T \in \mathcal{L}(X)$. Řekneme, že T splňuje Daugavetovu rovnici (je *Daugavetův*), pokud platí:

$$||T + \mathrm{Id}\,|| = ||T|| + 1\,.$$

2.2. Elementární vlastnosti Daugavetových operátorů. Začněme s několika základními poznatky o Daugavetových operátorech. Je-li $T \in \mathcal{L}(X)$ Daugavetův operátor, snadno nahlédneme, že i λT pro $\lambda > 0$ je Daugavetův. Stačí totiž uvážit, že operátor T z jednotkové sféry vyhovuje Daugavetově rovnici, právě když střed úsečky (Id, T) leží na sféře. Potom ale z konvexity normy leží na sféře celá tato úsečka.

Součet Daugavetových operátorů však již Daugavetův být nemusí. Stačí uvážit operátory T_1, T_2 na prostoru $C([0,1])$ definované předpisy

$$T_1 f = -(f\chi_{[0,1/2]} + f(1/2)\chi_{[1/2,1]})$$

a

$$T_2 f = -(f\chi_{[1/2,1]} + f(1/2)\chi_{[0,1/2]})\,,$$

které Daugavetovu rovnici splňují, ale operátor

$$T = T_1 + T_2 = -\,\mathrm{Id} - f(1/2)\chi_{[0,1]}$$

již Daugavetův není.

Také bodová limita Daugavetových operátorů nemusí být Daugavetův operátor. Jako příklad může posloužit posloupnost $\{T_n\}$ z $\mathcal{L}(C([0,1]))$ definovaná jako

$$T_n f = -(f\chi_{[0,1/n]} + f(1/n)\chi_{[1/n,1]})\,,$$

pro niž platí

$$T_n f \to -f$$

pro každé $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Samozřejmě, $-\,\mathrm{Id}$ není Daugavetův operátor.

2.3. Věta. *Buď X Banachův prostor, $T \in \mathcal{L}(X)$ takový, že $||T||$ leží ve spektru T. Potom T je Daugavetův.*

Důkaz. Ze začátku důkazu připomeňme, že *aproximativní spektrum* $\sigma_{ap}(T)$ operátoru T se definuje jako množina těch komplexních čísel λ, pro něž existuje posloupnost $\{x_n\}$ s vlastnostmi

$$||x_n|| = 1 \quad \text{a} \quad Tx_n - \lambda x_n \to 0\,,$$

a že $\partial(\sigma(T)) \subset \sigma_{ap}(T)$ (viz [Záp], 8.28.s). Předpokládáme-li tedy, že $||T|| \in \sigma(T)$, je nutně $||T|| \in \partial(\sigma(T))$ a existují tedy x_n tak, že $||x_n|| = 1$ a

$$Tx_n - ||T||x_n \to 0\,.$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} ||\operatorname{Id}+T|| \geq & ||(\operatorname{Id}+T)x_n|| \geq \big|\big|\, x_n + ||T||\, x_n\big|\big| - \big|\big|\, ||T||\, x_n - Tx_n\big|\big| \\ = & ||x_n||\,(1+||T||) - \big|\big|\, ||T||\; x_n - Tx_n\big|\big| \\ \to & 1 + ||T||\,. \end{aligned}$$

■

2.4. Poznámka. Existují Daugavetovy operátory, jejichž norma neleží v jejich spektru. Příklad lze nalézt v monografii [AA], Example 11.17. Pokud ale uvažujeme Daugavetův operátor T na uniformně konvexním prostoru, je již $||T|| \in \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$ (viz opět [AA], Theorem 11.10).

Další charakteristiku Daugavetových operátorů, tentokráte na prostorech spojitých funkcí, uvedeme ještě v následující kapitole.

2.5. Daugavetovy prostory. Buď X Banachův prostor. Řekneme, že X má *Daugavetovu vlastnost*, pokud všechny jedno–dimensionální operátory na X splňují Daugavetovu rovnici.

2.6. Poznámka. Jak později uvidíme, splňují již za podmínek uvedených výše Daugavetovu rovnici mnohem širší třídy operátorů, např. slabě kompaktní operátory.

Uveďme na začátek dva jednoduché, ale užitečné poznatky o Daugavetových prostorech.

2.7. Lemma. *Buďte X a Y isometricky isomorfní Banachovy prostory. Má-li X Daugavetovu vlastnost, potom ji má i Y.*

Důkaz. Buď $f : X \to Y$ isometrický isomorfismus X na Y a buď $T \in \mathcal{L}(Y)$ takový, že $\operatorname{rank} T{=}1$. Potom i pro $\overline{T} = f^{-1} \circ T \circ f \in \mathcal{L}(X)$ platí $\operatorname{rank}\overline{T}{=}1$, a tedy podle předpokladu máme

$$||\operatorname{Id}+T|| = ||f^{-1} \circ (\operatorname{Id}+T) \circ f|| = ||\operatorname{Id}+\overline{T}|| = 1 + ||\overline{T}|| = 1 + ||T||\,,$$

kde jsme využili zřejmé rovnosti $||L|| = ||f^{-1} \circ L \circ f||$ pro $L \in \mathcal{L}(Y)$. ■

2.8. Věta. *Nechť X je Banachův prostor. Má-li X^* Daugavetovu vlastnost, potom ji má i X.*

Důkaz. Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$, $\operatorname{rank} T = 1$. Je–li T^* adjungovaný operáror k T, potom i $\operatorname{rank} T^* = 1$ a platí

$$||T + \operatorname{Id}|| = ||T^* + \operatorname{Id}|| = ||T^*|| + 1 = ||T|| + 1\,.$$

■

2.9. Poznámka. Jsou-li X a Y jen isomorfní, potom tvrzení Lemmatu 2.7 platit nemusí. Buď $\mathcal{H}$ prostor všech lichých spojitých funkcí na intervalu $[-1,1]$ doplněných o konstanty vybavený supremovou normou. Potom $\mathcal{H}$ je isomorfní prostoru $C([0,1])$, ale například jedno–dimensionální operátor $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definovaný poředpisem

$$T(f) = -f(0).\chi_{[-1,1]}$$

Daugavetovu rovnici nesplňuje.

2.10. Definice. Buď X Banachův prostor, $f \in S_{X^*}$ a $\alpha > 0$. Definujme *plátek* jednotkové koule předpisem

$$S(f,\alpha) = \{x \in B_X : 1 - \alpha \leq f(x)\}.$$

Je-li $x \in S_X$ a $\varepsilon > 0$, definujme množinu $\Delta_\varepsilon(x)$ předpisem

$$\Delta_\varepsilon(x) = \{y \in B_X : 2 - \varepsilon \leq ||y - x||\}.$$

Následující lemma shrnuje několik nejčastěji užívaných podmínek ekvivalentních Daugavetově vlastnosti. Myšlenky důkazů jsou převzaty z článku [Wer,2001].

2.11. Lemma. *Buď X Banachův prostor, $T \in \mathcal{L}(X)$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *X má Daugavetovu vlastnost,*

(ii) *pro každé $f \in S_{X^*}$, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ a každé $x \in S_X$ existuje $y \in S(f,\alpha)$ tak, že*

$$2 - \varepsilon \leq ||x + y||\,,$$

(iii) *pro všechna $x \in S_X$ a všechna $\varepsilon > 0$ platí $B_X = \overline{\text{co}}\Delta_\varepsilon(x)$,*

(iv) *pro každé $f \in S_{X^*}$, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ a každé $x \in S_X$ existuje plátek $S' \subset S(f,\alpha)$ tak, že pro každé $y \in S'$ platí*

$$2 - \varepsilon \leq ||x + y||\,.$$

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Buď $f \in S_{X^*}$, $\varepsilon > 0$ a $x \in S_X$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat $\varepsilon = \alpha$. Definujme operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ předpisem $T(u) = f(u)\,x$. Potom $\operatorname{rank} T = 1$, a tedy podle předpokladu existuje $y \in S_X$ tak, že

$$2 - \varepsilon \leq ||f(y)\,x + y|| \leq |f(y) - 1| + ||x + y||\,.$$

Nyní už stačí jen volit y tak, aby $|f(y) - 1|$ bylo dostatečně malé, což můžeme podle nerovnosti

$$2 - \varepsilon \leq ||f(y)\,x + y|| \leq |f(y)| + 1\,.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Buď tedy $y \in B_X \setminus \overline{\text{co}}\Delta_\varepsilon(x)$ pro nějaké $x \in S_X$ a $\varepsilon > 0$. Podle Hahn-Banachovy věty existuje $f \in X^*$ tak, že $f < 1 - \alpha$ na $\Delta_\varepsilon(x)$ a $f(y) > 1 - \alpha$. To je ale ve sporu s tím, že existuje $z \in S(f,\alpha)$ tak, že

$$2 - \varepsilon \leq ||z + (-x)|| = ||z - x|| < 2 - \varepsilon\,.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Buď $T \in \mathcal{L}(X)$, $||T|| = 1$, $\operatorname{rank} T = 1$, potom existují $f \in S_{X^*}$, $x \in S_X$ tak, že pro $u \in X$ platí $T(u) = f(u)\,x$. Volme tedy $\varepsilon > 0$, přičemž bez újmy na

KNIHOVNA MAT...
Matematick...
Sokolovsk...
186 75 Praha

obecnosti můžeme předpokládat $\alpha = \varepsilon$. Potom podle předpokladu existuje $y \in S_X$ tak, že $|f(y) - 1| < \varepsilon$ a platí

$$2 - \varepsilon \leq ||x + y|| \leq ||x - f(y)\,x|| + ||f(y)x + y||\,.$$

A tedy $2 - 2\varepsilon \leq ||T(y) - y||$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Nechť tedy existují $f \in S_{X^*}$, $\varepsilon > 0, x \in S_X$ tak, že pro všechna $y \in S(f, \varepsilon)$ platí $||x + y|| \leq 2 - \varepsilon$. Potom ale

$$\Delta_\varepsilon(-x) \subset B_X \setminus S(f, \varepsilon)\,,$$

a tedy i

$$\overline{\text{co}}(\Delta_\varepsilon(-x)) \subset \overline{\text{co}}(B_X \setminus S(f, \varepsilon)) \neq B_X\,.$$

(i) $\Rightarrow$ (iv). Buď $T \in \mathcal{L}(X)$, $||T|| = 1$, $\operatorname{rank} T = 1$, potom existují $f \in S_{X^*}$, $x \in S_X$ tak, že pro $u \in X$ platí $T(u) = f(u)\,x$. Volme tedy $\varepsilon > 0$, přičemž bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\alpha = \varepsilon$. Potom podle předpokladu je

$$||\operatorname{Id} + T^*|| = ||\operatorname{Id} + T|| = 2\,,$$

a tedy existuje $g \in S_{X^*}$ tak, že $||g + T^* g|| > 2 - \varepsilon$ a $g(y) \leq 0$. Položme

$$g_1 = \frac{g + T^* g}{||g + T^* g||}$$

a

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{2 - \varepsilon}{||g + T^* g||}\,.$$

Pak pro $x \in S' = S(g_1, \varepsilon_1)$ máme

$$\langle(\operatorname{Id} + T^*)g, x\rangle \geq (1 - \varepsilon_1)||g + T^* g|| = 2 - \varepsilon.$$

A tedy

$$g(x) + g(y) f(x) \geq 2 - \varepsilon,$$

což nám dává

$$g(x) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{a} \quad ||x + y|| \geq g(x) + g(y) \geq 2 - \varepsilon\,.$$

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Důkaz je zřejmý. ∎

2.12. Aplikace. Pomocí výše uvedených charakteristik snadno dokážeme, že prostor $L_1(\Omega, \mu)$, kde μ je spojitá míra, má Daugavetovu vlastnost, což jako první ukázal G.Ja. Lozanovskij v [Loz,1966] pro případ Lebesgueovy míry na intervalu $[0, 1]$. Myšlenka důkazu pochází z článku [Wer,2001]

Buď tedy $f \in B_{L^1(\Omega,\mu)}$ a $g \in B_{L^\infty(\Omega,\mu)}$. Najděme měřitelnou $M \subset \Omega$ tak, že

$$\chi_M f \leq \varepsilon \quad \text{a} \quad \chi_M g > 1 - \varepsilon/2\,.$$

Volme nyní $f_0 \in B_{L^1(\Omega,\mu)}$ tak, aby

$$\chi_M f_0 = f_0 \quad \text{a} \quad \int_\Omega f_0 g d\mu > 1 - \varepsilon\,.$$

Potom ale $2 - \varepsilon \leq ||f + f_0||$, což jsme potřebovali.

Podobně snadno ukážeme, že Daugavetovu vlastnost má i prostor $C(K)$ všech spojitých funkcí na (Hausdorffově) kompaktu K bez isolovaného bodu - to si ale necháme na následující kapitolu (viz 3.12.a).

Už z předchozího lemmatu je vidět souvislost mezi Daugavetovou vlastností a některými geometrickými vlastnostmi Banachových prostorů. Jednou z nich je také Radon-Nikodýmova vlastnost, jak ukazují následující tvrzení.

2.13. Radon–Nikodýmova vlastnost. Řekneme, že Banachův prostor X má *Radon-Nikodýmovu vlastnost*, krátce RNP, jestliže platí následující: Je-li (Ω, S, μ) prostor s konečnou mírou a $\nu : S \to X$ vektorová míra konečné variace absolutně spojitá vzhledem k μ, potom existuje bochnerovsky integrovatelná funkce $g : \Omega \to X$ taková, že pro všechny $E \in S$ platí

$$\nu E = \int_E g d\mu.$$

Poznamenejme, že každý reflexivní prostor má Radon-Nikodýmovu vlastnost. V dalším využijeme ještě následující charakteristiku prostorů s Radon-Nikodýmovou vlastností: Banachův prostor X má Radon-Nikodýmovu vlastnost, právě když každá omezená uzavřená podmnožina X je zářezová, přičemž podmnožina A Banachova prostoru je *zářezová*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_\varepsilon \in A$ tak, že $x_\varepsilon \notin \overline{\text{co}}(A \setminus U(x_\varepsilon, \varepsilon))$.

2.14. Věta. *Má-li Banachův prostor X Daugavetovu vlastnost, potom X nemá Radon-Nikodýmovu vlastnost. Speciálně, X není reflexivní.*

Důkaz. Dokážeme, že jednotková koule prostoru X není zářezová. Volme $\varepsilon = 1/7$ a $x \in B_X$. Má-li platit $x \notin \overline{\text{co}}(B_X \setminus B(x, \varepsilon))$, musí být zřejmě $B(x, \varepsilon) \cap S_X \neq \emptyset$. Potom ale podle Lemmatu 2.7 platí

$$B_X = \overline{\text{co}}\Delta_{5\varepsilon}(z) \subset \overline{\text{co}}(B_X \setminus B(x, \varepsilon))$$

pro libovolné $z \in B(x, \varepsilon) \cap S_X$. ■

2.15. Poznámka. Nechť C je konvexní podmnožina Banachova prostoru X. Bod $c \in C$ se nazývá *silně exponovaný*, jestliže existuje $f \in X^*$ tak, že

$$f(c) > f(t) \quad \text{pro každé} \quad t \in C \setminus \{c\}$$

a tak, že $x_n \to c$, kdykoliv $x_n \in C$ a $f(x_n) \to f(c)$. *Phelpsova věta* říká, že Banachův prostor X má Radon–Nikodýmovu vlastnost, právě když každá jeho neprázdná omezená uzavřená konvexní množina je rovna uzavřenému konvexnímu obalu svých silně exponovaných bodů. Podle *Wojtaszczykovy věty* z [Woj,1992] v Daugavetových prostorech uzavřené jednotkové koule nemají žádné silně exponované body. Odtud též plyne, že Daugavetovy prostory nemohou mít Radon–Nikodýmovou vlastnost.

2.16. Problém. Zatím nevíme, zda by Banachovy prostory s Daugavetovou vlastností mohly mít Krejn–Milmanovu vlastnost. Připomeňme, že Banachův prostor X má *Krejn–Milmanovu vlastnost*, jestliže každá jeho neprázdná omezená uzavřená konvexní množina je rovna uzavřenému konvexnímu obalu svých extremálních bodů. Banachovy prostory s Radon–Nikodýmovou vlastností mají i Krejn–Milmanovu vlastnost. Neví se však, zda tyto vlastnosti jsou ekvivalentní.

Důkaz následující věty pochází od D. Wernera (viz [Wer,1997]).

2.17. Věta. *Nechť X má Daugavetovu vlastnost, potom X^* nemá RNP.*

Důkaz. Předpokládejme tedy pro spor, že X^* má RNP. Potom jednotková koule B_{X^*} obsahuje w^*-silně exponovaný bod f ([Phe,1993], Th. 5.12). Tedy existuje $f \in X^*$ takové, že platí

$$f(x_0) = ||f|| = ||x_0|| = 1$$

a pro každou posloupnost $\{f_n\}$ z X^* takovou, že $||f_n|| \leq 1$, $f_n(x_0) \to 1$, platí

$$||f_n - f|| \to 0 \,.$$

Definujme operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ předpisem $T(x) = f(x)\, x_0$, $x \in X$. Podle předpokladu potom platí $||\,\mathrm{Id} - T|| = 1 + ||T||$. Tedy

$$||f_n - T^* f_n|| \to 2$$

pro nějakou posloupnost $\{f_n\}$ z B_{X^*}, a tedy $||T^* f_n|| \to 1$. Vidíme, že $|f_n(x_0)| \to 1$ a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f_n(x_0) \to \alpha$ pro nějaké $|\alpha| = 1$. Potom ale $(\alpha^{-1} f_n)(x_0) \to 1$, a tedy i $||\alpha^{-1} f_n - f|| \to 0$. Máme

$$2 = \lim_{n\to\infty} ||f_n - T^* f_n|| = ||\alpha f - T^*(\alpha f)|| = 0 \,,$$

což je spor. ∎

2.18. Poznámka. *Asplundovy prostory* jsou charakterizovány podmínkou, že jejich duál má Radon–Nikodýmovu vlastnost (viz třeba [Záp], *21.11). Tedy Banachovy prostory s Daugavetovou vlastností nejsou Asplundovy.

Následuje jedna ze základních postačujících podmínek, pro platnost Daugavetovy rovnice pro operátory na Daugavetově porstoru. Uvedený elementární důkaz pochází z článku [GSŠW,2000].

2.19. Věta. *Má-li Banachův prostor X Daugavetovu vlastnost, potom každý slabě kompaktní operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ splňuje Daugavetovu rovnici.*

Důkaz. Buď $T \in \mathcal{L}(X)$ slabě kompaktní operátor takový, že $||T|| = 1$. Potom množina $K = \overline{T(B_X)}$ je slabě kompaktní a tedy je rovna uzavřenému konvexnímu obalu svých silně exponovaných bodů (viz [Záp,*18.4.e]). Pro $\varepsilon > 0$ volme silně exponovaný bod $y \in K$ tak, že $||y|| > 1 - \varepsilon$. Potom pro nějaké $0 < \delta < \varepsilon$ existuje řez

$$S = \{z \in K; f(z) \geq 1 - \delta\}$$

obsahující y a mající průměr menší než ε. Položíme-li $g = T^* f$, potom $||g|| = 1$ a platí $||Tx - y|| < \varepsilon$, kdykoliv $x \in B_X$, $g(x) > 1 - \delta$. Podle podmínky (ii) z výše uvedeného Lemmatu 2.11 existuje $x \in S_X$ tak, že

$$g(x) > 1 - \delta \quad \text{a} \quad ||Tx - y|| < \varepsilon.$$

Potom ale

$$||\,\mathrm{Id} + T|| \geq ||x + Tx|| \geq ||x + y|| - ||y - Tx|| > 2 - 3\varepsilon.$$

■

2.20. Věta. *Nechť X je Banachův prostor s Daugavetovou vlastností, potom X obsahuje podprostor isometricky isomorfní l_1.*

Důkaz. Důkaz je netriviální, viz [Wer,2001]. ■

2.21. Poznámka. Je známo, že na každém separabilním Banachově prostoru (třeba na $C(K)$ pro metrizovatelný kompakt K) existuje ekvivalentní striktně konvexní norma. Z předchozí věty ale plyne, že žádný prostor s Daugavetovou vlastností nemůže být striktně konvexní. Dostáváme tedy, že Daugavetova vlastnost se nemusí zachovávat při přechodu k ekvivalentní normě.

3. Funkční prostory

3.1. Úmluva. V celé kapitole budeme uvažovat pouze kompaktní prostory, které jsou Hausdorffovy.

Ve svém článku [Wer,1996] uvádí D. Werner následující velmi užitečný přístup k charakterizaci Daugavetových operátorů na prostoru $\mathcal{C}(K)$.

3.2. Definice. Buď K kompaktní topologický prostor a $T \in \mathcal{L}(C(K))$. Definujme *stochastické jádro* operátoru T jako systém měr $\{\mu_x\}_{x\in K}$ definovaných předpisem $\mu_x = T^*\delta_x$. Poznamenejme, že při tomto označení pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(K)$ platí

$$\int_K f d\mu_x = \langle f, \mu_x \rangle = \langle Tf, \delta_x \rangle = Tf(x).$$

Navíc je $||T|| = \sup_{x\in K} ||\mu_x||$ a funkce $x \to \mu_x$ je w*-spojitá (pro detaily viz [DS]).

Důkaz následujících dvou tvrzení je obsažen právě v článku [Wer,1996].

3.3. Tvrzení. *Buď K kompaktní topologický prostor a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(K))$. Navíc $(\mu_x)_{x\in K}$ buď stochastické jádro operátoru T. Potom T je Daugavetův, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ platí*

$$\sup\{\mu_x(\{x\}) : x \in K,\ ||\mu_x|| > ||T|| - \varepsilon\} \geq 0.$$

Důkaz. Volme $\varepsilon > 0$ a položme

$$U = \{x \in K : ||\mu_x|| > ||T|| - \varepsilon\}$$

a

$$M = \{x \in U : \mu_x(\{x\}) \geq -\varepsilon\}.$$

Potom máme

$$\begin{aligned}
||\operatorname{Id} + T|| &\geq \sup_{x\in U} ||\delta_x + \mu_x|| \geq \sup_{x\in U}(|1 + \mu_x| + |\mu_x|(K \setminus \{x\})) \\
&\geq \sup_{x\in M}(1 + \mu_x(\{x\}) + |\mu_x|(K \setminus \{s\})) \\
&= \sup_{x\in M}(1 + \mu_x(\{x\}) + ||\mu_x|| - |\mu_x|(\{x\})) \\
&\geq \sup_{x\in M}(1 + ||\mu_x||) + \mu_x(\{x\} - |\mu_x(\{x\})|) \\
&\geq 1 + ||T|| - \varepsilon + \sup_{x\in M}(\mu_x(\{x\}) - |\mu_x(\{x\})|) \\
&\geq 1 + ||T|| - 3\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Buď naopak T Daugavetův a nechť pro nějaké $\varepsilon > 0$ platí

$$\sup\{\mu_x(\{x\}) : x \in K,\ ||\mu_x|| > ||T|| - \varepsilon\} < 0\,.$$

Potom máme

$$\begin{aligned} 1 + ||T|| &= \sup_{x\in U}(1 + ||\mu_x||) = \sup_{x\in U}(1 + |\mu_x(\{x\})| + |\mu_x|(K \setminus \{x\})) \\ &> \sup_{x\in U}(|1 + \mu_x(\{x\})| + |\mu_x|(K \setminus \{x\})) = \sup_{x\in U} ||\delta_x + \mu_x|| \\ &= ||\operatorname{Id} + T||\,, \end{aligned}$$

což je spor. ■

3.4. Poznámka. Pomocí uvedené charakteristiky jsou pak pro prostory spojitých funkcí podány jednoduché důkazy několika obecných výsledků. Než uvedeme jeden z nich poznamenejme, že tento přístup byl dále zobecňován (viz [Wer,1997]).

3.5. Tvrzení. *Buď K kompaktní topologický prostor a $T \in \mathcal{L}(C(K))$, potom platí*

$$\max\{||\operatorname{Id} + T||, ||\operatorname{Id} - T||\} = 1 + ||T||.$$

Důkaz. Buď $\{\mu_x\}_{x\in K}$ reprezentujcí jádro operátoru T. Potom

$$\begin{aligned} \max_{\pm} ||\operatorname{Id} \pm T|| &= \max_{\pm} \sup_{x\in K} ||\delta_x \pm \mu_s|| = \sup_{x\in K} \max_{\pm}(|\delta_x \pm \mu_x|(\{x\}) + |\delta_x \pm \mu_x|(K \setminus \{x\})) \\ &= \sup_{x\in K} \max_{\pm}(|1 \pm \mu_x|(\{x\}) + |\delta_x \pm \mu_x|(K \setminus \{x\})) \\ &= \sup_{x\in K}(1 + |\mu_x(\{x\})| + |\mu_x|(K \setminus \{x\})) = \sup_{x\in K}(1 + ||\mu_x||) \\ &= 1 + ||T||. \end{aligned}$$

■

3.6. Poznámka. Uvedené Tvrzení 3.5 náleží původně R. Holubovi (viz [Hol,1986]). V současné terminologii říká, že každý spojitý lineární operátor na prostoru $\mathcal{C}(K)$ splňuje tzv. *alternativní Daugavetovu rovnici*

$$\max_{|\omega|=1} ||\operatorname{Id} + \omega T|| = 1 + ||T||\,.$$

Obraťme nyní pozornost k funkčním prostorům. Ovšem nejprve o nich zopakujme několik základních informací.

3.7. Funkční prostory. Buď K kompaktní topologický prostor. Řekneme, že $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(K)$ je *funkční prostor* na K, pokud $\mathcal{H}$ je uzavřený podprostor $\mathcal{C}(K)$ obsahující konstantní funkce a oddělující body K (tj. pro každé $x, y \in K$ takové, že $x \neq y$ existuje $f \in \mathcal{H}$ tak, že $f(x) \neq f(y)$).

Pro $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ budeme říkat, že μ reprezentuje x, pokud pro všechny $h \in \mathcal{H}$ platí

$$h(x) = \int_K h\,d\mu.$$

Množinu všech měr reprezentujících bod x budeme značit $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$.

Dále definujme *Choquetovu hranici* prostoru $\mathcal{H}$ jako množinu $Ch_{\mathcal{H}}(K) \subset K$ určenou předpisem

$$Ch_{\mathcal{H}}(K) = \{x \in K : \mathcal{M}_x(\mathcal{H}) = \{\delta_x\}\}.$$

Definujme prostor všech spojitých $\mathcal{H}$-*afinních funkcí* $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ předpisem

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(K) : f(x) = \int_K f d_\mu \quad \text{pro každé } x \in K \text{ a } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H}) \right\}$$

Poznamenejme, že za těchto podmínek je $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ taktéž uzavřeným podprostorem $\mathcal{C}(K)$ a v případě metrisovatelného kompaktu K je Choquetova hranice $Ch_{\mathcal{H}}(K)$ typu G_δ.

Funkční prostor na metrisovatelném kompaktu K budeme nazývat *simpliciální*, pokud pro každé $x \in K$ existuje právě jedna repezentující míra $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ nesená Choquetovou hranicí $Ch_{\mathcal{H}}(K)$.

Uveďme ještě jednu podmínku ekvivalentní simplicialitě pro metrisovatelné prostory, kterou využijeme v důkazu následující věty. Funkční prostor $\mathcal{H}$ na metrisovatelném kompaktu K je simpliciální, právě když platí následující: pro každou $F \subset Ch_{\mathcal{H}}(K)$ uzavřenou a f spojitou funkci na F existuje $h \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ tak, že $h = f$ na F a platí $||h||_K = ||f||_F$.

Následují dvě postačující podmínky implikující Daugavetovu vlastnost u funkčních prostorů.

3.8. Věta. *Buď K metrisovatelný kompaktní topologický prostor a $\mathcal{H}$ funkční prostor na K, který je simpliciální. Předpokládejme, že $Ch_{\mathcal{H}}(K)$ nemá isolované body. Potom $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ má Daugavetovu vlastnost.*

Důkaz. Buď tedy $F \in S^\star_{\mathcal{H}}$, $F(f) = \mu(f).g$, kde $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Nejprve poznamenejme, že míru μ lze volit tak, aby platilo

$$\mu(K \setminus Ch_{\mathcal{H}}(K)) = 0$$

(viz [Phe,2001], str. 32). Nyní dokážeme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $f \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ takové, že

$$\big|\, ||F|| + 1 - ||F(f) + f||\, \big| \leq \varepsilon.$$

Volme tedy $\varepsilon > 0$ pevné. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $||g|| = 1$ a $g(x) = 1$. Pro nějaké $x \in Ch_{\mathcal{H}}(K)$ jistě existuje okolí $U \in \mathcal{U}(x)$ tak, že $|g - 1| \leq \varepsilon$ na U. Protože μ je konečná a $Ch_{\mathcal{H}}(K)$ nemá isolované body, existuje $y \in U \cap Ch_{\mathcal{H}}(K)$ takové, že $|\mu|(\{y\}) < \varepsilon$. Potom ale existuje $V \in \mathcal{U}(y)$ tak, že $|\mu|(V) < 2\varepsilon$. Protože μ je Radonova, existuje kompakt K_ε takový, že

$$K_\varepsilon \subset Ch_{\mathcal{H}}(K) \quad \text{a} \quad \mu(Ch_{\mathcal{H}}(K) \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon\,.$$

Buď nakonec $\{f_i\}$ nějaká posloupnost z $\mathcal{H}$ taková, že $\lim_{i\to\infty} ||F(f_i)|| = ||F||$. Volme $j \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\big|||F(f_j)|| - ||F||\big| \leq \varepsilon\,.$$

Protože $\mathcal{H}$ je podle předpokladu simpliciální, existuje $f \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ taková, že

$$f = f_j \quad \text{na} \quad K_\varepsilon \setminus V\ , \ f(y) = 1 \ \text{ a } \ ||f|| = 1\,.$$

Nyní máme

$$\begin{aligned} \big|\,||F(f)+f|| - (||F||+1)\big| &\le \big|\mu(f).g(y) + 1 - (||F||+1)\big| \le |g(y)|.|\mu(f) - \mu(f_j)| + \\ &+ |\mu(f_j)|.|g(y) - 1| + \big|\mu(f_j) - ||F||\big| \\ &\le 3\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \le 5\varepsilon. \end{aligned}$$

■

3.9. Poznámka. Věta 3.8 platí i bez předpokladu metrisovatelnosti, ale důkaz je pak mnohem složitější a využívá hlubších vět z Choquetovy teorie funkčních prostorů.

3.10. Definice. Buď $\mathcal{H}$ funkční prostor na kompaktu K. Řekneme, že $\mathcal{H}$ splňuje *podmínku* (G), pokud pro všechna $\varepsilon > 0$ a pro všechny množiny $M \subset K$ otevřené takové, že $M \cap Ch_{\mathcal{H}}(K) \neq \emptyset$ existuje nezáporná $f \in S_{\mathcal{H}}$ taková, že $f \le \varepsilon$ na $Ch_{\mathcal{H}}(K) \setminus M$.

3.11. Věta. *Buď $\mathcal{H}$ funkční prostor na kompaktu K splňující podmínku (G). Nechť $Ch_{\mathcal{H}}(K)$ neobsahuje isolované body. Potom $\mathcal{H}$ má Daugavetovu vlastnost.*

Důkaz. Důkaz podáme pro ilustraci pomocí geometrické podmínky (iii) z Lemmatu 2.11. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\overline{Ch_{\mathcal{H}}(K)} = K$, jinak přejdeme k funkčnímu prostoru $\overline{\mathcal{H}}$ na kompaktu $\overline{Ch_{\mathcal{H}}(K)}$, sestávajícího z restrikcí funkcí z $\mathcal{H}$ na $\overline{Ch_{\mathcal{H}}(K)}$, a použijeme Lemma 2.7.

Buď tedy $f \in S_{\mathcal{H}}$ a $\varepsilon > 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f(x) = -1$ pro nějaké $x \in K$. Buď

$$U := f^{-1}(\{x \in K : f(x) < -1 + \varepsilon\})\,.$$

Dokážeme, že $B_{\mathcal{H}} = \overline{\text{co}}\Delta_\varepsilon(f)$. Buď tedy $n \in \mathbb{N}$ a $g \in B_{\mathcal{H}}$. Volme $U_i^n \subset U$ neprázdné otevřené, $i = 1, \ldots, n$, tak, aby platilo

$$U_i^n \cap U_j^n = \emptyset \quad \text{pro} \quad i \neq j\,.$$

Položme $\varepsilon_n = 1/n^2$. Podle předpokladu existují kladné funkce $h_i^n \in S_{\mathcal{H}}$, $i = 1, \ldots, n$, takové, že

$$h_i^n \le \varepsilon_n \quad \text{na} \quad K \setminus U_i^n\,.$$

Pak ale existují konstanty c_i^n tak, že

$$g_i^n = (1 - n\varepsilon_n)g + c_i^n h_i^n \in \Delta_\varepsilon(f)\,.$$

Položme

$$g_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i^n \in \text{co}\,\Delta_\varepsilon(f).$$

Protože pro $x \in K \setminus \bigcup U_i^n$ je

$$|g(x) - g_n(x)| \leq 2n\varepsilon_n$$

a pro $x \in U_i^n$ platí

$$|g(x) - g_n(x)| \leq \left| n\varepsilon_n g(x) + \frac{1 + n\varepsilon_n}{n} \right| \leq (n+1)\varepsilon_n + \frac{1}{n}$$

máme celkem

$$\|g - g_n\| \leq 2n\varepsilon_n + \frac{1}{n} = \frac{3}{n},$$

což nám stačí. ∎

3.12. Příklady. (a) Samotný prostor $\mathcal{C}(K)$ pro K bez isolovaných bodů splňuje předpoklady obou předchozích vět, a tedy má Daugavetovu vlastnost.

(b) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená omezená množina. Potom prostor $H(\Omega)$ všech funkcí harmonických na Ω a spojitých na $\overline{\Omega}$ splňuje předpoklady předchozí věty, a tedy má Daugavetovu vlastnost.

(c) Uvažme prostor všech funkcí $f \in C([0,1])$ takových, že

$$f(0) + f(1) = 2f(1/2) = f(1/4) + f(3/4)\,.$$

Ten není simpliciální, ale má Daugavetovu vlastnost.

(d) Buď $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}([0,1])$ funkční prostor obsahující pouze všechny polynomy 2. stupně. Potom $\mathcal{H}$ je simpliciální a prostor $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \mathcal{C}([0,1])$ Daugavetovu vlasnost má, $\mathcal{H}$ však jakožto konečně–dimensionální prostor ne.

4. Lipschitzovské funkce

4.1. Základní definice a značení. Buď X Banachův prostor, $A \subset X$ a buď $0 < \alpha \leq 1$. Funkci $f : A \to \mathbb{R}$ nazveme α-hölderovskou na A, pokud existuje $H_\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\frac{f(x) - f(y)}{||x - y||^\alpha} \leq H_\alpha$$

pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$. Nejmenší konstantu H_α, pro kterou tato nerovnost platí, budeme nazývat *optimální α-hölderovskou konstantou* funkce f a značit $H_\alpha(f)$.

Je-li $K \subset X$ kompaktní a $z \in K$, potom množiny

$$H^\alpha(K) = \{f : f \text{ je } \alpha\text{-hölderovská na } K\}$$

resp.

$$H_z^\alpha(K) = \{f : f \text{ je } \alpha\text{-hölderovská na } K,\ f(z) = 0\}$$

vybavené normami

$$||f||_\alpha = |f(z)| + H_\alpha(f) = |f(z)| + \sup_{x,y \in K, x \neq y} \frac{f(x) - f(y)}{||x - y||^\alpha},$$

resp.

$$||f||_{\alpha,z} = H_\alpha(f)$$

jsou Banachovy prostory (detaily viz [Wer,2005]). Místo 1-hölderovská bedeme říkat *lipschitzovská* a $H^1(K)$ (resp. $H_z^1(K)$) budeme značit $Lip(K)$ (resp. $Lip_z(K)$). Místo $H_1(f)$ píšeme krátce $L(f)$.

4.2. Lemma. *Buď K kompaktní, konvexní a alespoň dvoubodová podmnožina Banachova prostoru X, f lipschitzovská funkce na K a $\varepsilon > 0$. Potom existuje směr $v \in S_X$ a nekonečná množina $M \subset K$ tak, že platí*

$$D_v f(x) \geq L(f) - \varepsilon.$$

Důkaz. Podle předpokladu existují $a, b \in K$ taková, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{||b - a||} > L(f) - \varepsilon.$$

Položme $d = ||b - a||$ a definujme $g : [0, d] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g(x) = f\left(a + x\frac{b - a}{d}\right), \quad x \in [0, d].$$

Potom g je lipschitzovská na $[0,d]$, a proto i absolutně spojitá na $[0,d]$. Navíc $L(g) > L(f) - \varepsilon$. Tedy g' existuje skoro všude v $[0,d]$ a platí

$$g(d) - g(0) = \int_0^d g'.$$

Předpokládejme, že $g' < L(f) - \varepsilon$ s.v. v $[0,d]$. Potom ale

$$g(d) - g(0) = \int_0^d g' < |b-a|(L(f) - \varepsilon),$$

což je spor. Tedy existuje množina $N \subset [0,d]$ kladné jednorozměrné Lebesgueovy míry taková, že $g'(x) \geq L(f) - \varepsilon$ pro všechna $x \in N$. K dokončení důkazu už jen stačí položit

$$v = \frac{b-a}{d} \quad \text{a} \quad M = \left\{a + x\,\frac{b-a}{d} : x \in N\right\}.$$

■

Následující věta podává positivní řešení otázky o lipschitzovských funkcích formulované D. Wernerem v článku [Wer,2001]. Původní znění problému bylo následující: Má Banachův prostor lipschitzovských funkcí na jednotkovém čtverci, vybavený některou ze svých přirozených norem, Daugavetovu vlastnost?

4.3. Věta. *Buď K kompaktní, konvexní a alespoň dvoubodová podmnožina Banachova prostoru X a $z \in K$. Potom prostor $Lip_z(K)$ má Daugavetovu vlastnost*

Důkaz. Ukážeme, že $Lip_z(K)$ splňuje geometrickou podmínku (iii) z Lemmatu 2.11, tedy že pro libovolné $\varepsilon > 0$ a $f \in Lip_z(K)$, $||f|| = 1$ a při značení

$$\Delta_\varepsilon(f) = \{g \in Lip_z(K) : ||g|| \leq 1, ||f - g|| \geq 2 - \varepsilon\}$$

platí

$$\overline{\text{co}}(\Delta_\varepsilon(f)) = B_{Lip_z(K)}.$$

Volme tedy $\varepsilon > 0$, $f, g \in Lip_z(K)$, kde $||f|| = 1$ a $||g|| \leq 1$. Podle předchozího Lemmatu 4.2 nalezneme množinu $M \subset K$ a směr $v \in S_X$ pro funkci f a zvolené ε. Volme $k \in \mathbb{N}$ a volme k různých bodů z M, navíc ještě různých od z. Označme je $x_1, ..., x_k$. Dále položme

$$d = \min_{i \neq j} ||x_i - x_j||, \quad d' = \min_i ||x_i - z|| \quad \text{a} \quad \delta = \min(d, d')$$

a pro $i = 1, ..., k$ označme κ_i funkce definované předpisem

$$\kappa_i(x) = -||x - x_i|| + g_k(x_i),$$

pro $x \in K$, kde

$$g_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right) g.$$

Potom pro $i = 1, \ldots, k$ je $\kappa_i \in Lip(K)$ a platí $L(\kappa_i) = 1$ a $\kappa_i(x) \leq g_k(x)$ pro všechna $x \in K$, přičemž rovnost nastává pouze pro $x = x_i$. Nyní pro každé $i = 1, ..., k$ zvolme $p_i > 0$ tak, aby platilo

$$\kappa_i(x) + p_i \leq g_k(x)$$

pro všechna $x \in K \setminus B(x_i, \delta/3)$. Pro $i = 1, ..., k$ definujme funkci $h_i : K \to \mathbb{R}$ předpisem

$$h_i(x) = \max(\kappa_i(x) + p_i, g_k(x)).$$

Potom platí $h_i \in Lip_z(K)$, $||h_i|| = 1$ a

$$||h_i - f|| = L(h_i - f) \geq |D_v(h_i - f)(x_i)| \geq 2 - \varepsilon\,,$$

a tedy $h_i \in \Delta_\varepsilon(f)$. Konečně pro

$$H_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} h_i \in \operatorname{co} \Delta_\varepsilon(f)$$

máme

$$||H_k - g|| \leq ||H_h - g_k|| + ||g_k - g|| \leq \frac{2}{k} + \frac{1}{k} \leq \frac{3}{k},$$

což nám stačí. ■

4.4. Poznámky. Položme $I = [0, 1]$. Prostor $Lip(I)$ s normou $||f|| = |f(0)| + L(f)$ Daugavetovu vlastnost nemá: Volme $f = \chi_I \in Lip(I)$ a $1/2 > \varepsilon > 0$. Potom $||f|| = 1$, $L(f) = 0$ a pro každou $g \in \Delta_\varepsilon(f)$ platí

$$g(0) \leq \varepsilon.$$

Dostáváme tedy, že například $f \notin \overline{\operatorname{co}} \Delta_\varepsilon(f)$.

Buď $0 < \alpha < 1$, potom prostor $H_0^\alpha(I)$ opět Daugavetovu vlastnost nemá: Definujme $f : I \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = x$. Potom $f \in H_0^\alpha(I)$ a $||f|| = 1$. Volme $1 > \varepsilon > 0$ a $x, y \in I$ taková, aby platilo

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \geq 1 - \varepsilon.$$

Potom máme

$$1 - \varepsilon \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} = \frac{|x - y|}{|x - y|^\alpha} = |x - y|^{1-\alpha}.$$

Odtud dostáváme, že $|x - y| \geq \delta(\varepsilon)$, kde $\delta(\varepsilon) = (1 - \varepsilon)^{\alpha - 1}$. Přitom ale $\delta(\varepsilon) \to 1$ pro $\varepsilon \to 0$. Můžeme tedy zvolit $1 > \varepsilon > 0$ tak, aby $\delta(\varepsilon) \geq 1 - (1/8)^{\frac{1}{\alpha}}$. Ukážeme, že $f \notin \overline{\operatorname{co}} \Delta_\varepsilon(f)$, čímž budeme hotovi. Volme tedy $g \in \Delta_\varepsilon(f)$. Protože $||g|| \leq 1$ a $g(0) = 0$ je

$$\sup_{x \in U(0, 1 - \delta(\varepsilon))} g(x) \leq 1/8.$$

Podle předchozího tedy musí existovat $x \in U(1, 1-\delta(\varepsilon))$ takové, že $g(x) \leq 1/8$. Potom ovšem

$$\sup_{x \in U(1,1-\delta(\varepsilon))} g(x) \leq 1/4.$$

Dostáváme tedy, že pro každou $h \in \overline{\text{co}}\Delta_\varepsilon(f)$ platí

$$\sup_{x \in U(1,1-\delta(\varepsilon))} h(x) \leq 1/4.$$

Protože však $f(1) = 1$, není ani $f \in \overline{\text{co}}\Delta_\varepsilon(f)$.

4.5. Lemma. *Buď X Banachův prostor, $K \subset X$ kompakt a $x, y \in K$. Potom prostory $Lip_x(K)$ a $Lip_y(K)$ jsou isometricky isomorfní.*

Důkaz. Definujme $\Psi : Lip_x(K) \to Lip_y(K)$ předpisem $\Psi(f) = f - f(y)$. Potom Ψ je hledaný isometrický isomorfismus. ■

4.6. Definice. Buď $a, b \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$. Definujme množiny $D(a,b,d), E(a,b,d) \subset \mathbb{R}^n$ předpisy

$$D(a,b,d) = \bigcup_{s \in (a,b)} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x-s) \perp (a-b) \ , |x-s| < 2d \, \frac{\min(|a-s|, |b-s|)}{|a-b|} \right\}$$

a

$$E(a,b,d) = \bigcup_{s \in (a,b)} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x-s) \perp (a-b) \ , |x-s| < d \, \frac{|b-s|}{|a-b|} \right\}.$$

4.7. Lemma. *Buď $n \in \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{R}^n$ nekonvexní uzavřená. Potom existují $a, b \in K$ a $d \in \mathbb{R}$ tak, že $D(a,b,d) \cap K = \emptyset$.*

Důkaz. Podle předpokladu existují $x, y \in K$ takové, že $[x,y] \not\subset K$. Volme $u, v \in [x,y]$ tak, že $(u,v) \cap K = \emptyset$. Protože K^c je otevřená a $\frac{u+v}{2} \in K^c$, existuje $\delta > 0$ takové, že $U(\frac{u+v}{2}, 2\delta) \subset K^c$. Položme

$$r = \sup\left\{ y \geq 0 : E\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2} + y(u-v), \delta\right) \cap K = \emptyset \right\}$$

a

$$s = \sup\left\{ y \geq 0 : E\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2} + y(v-u), \delta\right) \cap K = \emptyset \right\}.$$

Zřejmě $0 < r, s \leq 1/2$ a navíc

$$\partial E\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2} + r(u-v), \delta\right) \cap K \neq \emptyset$$

a

$$\partial E\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2} + s(v-u), \delta\right) \cap K \neq \emptyset.$$

Nyní už jen stačí zvolit

$$a \in \partial E\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2} + r(u-v), \delta\right) \cap K$$

a

$$b \in \partial E\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2} + s(v-u), \delta\right) \cap K$$

libovolně a $d > 0$ takové, aby platilo

$$D(a,b,d) \subset E\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2} + r(u-v), \delta\right) \cup E\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2} + s(v-u), \delta\right).$$

■

4.8. Věta. *Buď $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní a alespoň dvoubodová, $z \in K$. Potom prostor $Lip_z(K)$ má Daugavetovu vlastnost, právě když K je konvexní.*

Důkaz. S ohledem na výše dokázanou Větu 4.3 zbývá ukázat, že pro nekonvexní K prostor $Lip_z(K)$ Daugavetovu vlastnost nemá.

Podle předchozího Lemmatu 4.7 nalezneme $a, b \in K$ a $d \in \mathbb{R}$ tak, že $D(a,b,d) \cap K = \emptyset$. Ukážme-li, že prostor $Lip_a(K)$ Daugavetovu vlastnost nemá, pak podle Lemmat 4.5 a 2.7 ji nemá ani prostor $Lip_z(K)$.

Definujme funkci $f : D(a,b,d/2)^c \to \mathbb{R}$ následovně: buď $x \in D(a,b,d/2)^c$. Protože

$$D(a,b,d/2)^c = \bigcup_{\alpha \geq 0} \partial D\left(a + \alpha\frac{a-b}{2}, b + \alpha\frac{b-a}{2}, (1+\alpha)\frac{d}{2}\right),$$

existuje $\alpha \geq 0$ takové, že

$$x \in \partial D\left(a + \alpha\frac{a-b}{2}, b + \alpha\frac{b-a}{2}, (1+\alpha)\frac{d}{2}\right).$$

Potom existuje $s \in [a + \alpha\frac{a-b}{2}, b + \alpha\frac{b-a}{2}]$ takové, že $(x-s) \perp (a-b)$. Položme

$$f(x) = |a-b| \frac{|a + \alpha\frac{a-b}{2} - s|}{|a + \alpha\frac{a-b}{2} - (b + \alpha\frac{b-a}{2})|}.$$

Nejprve ukážeme, že pro libovolná $x, y \in D(a,b,d/2)^c$, $x \neq y$, platí

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq 1.$$

Volme tedy $x, y \in D(a,b,d/2)^c$, $x \neq y$. Je-li $f(x) = f(y)$, pak není co dokazovat. Buď tedy $f(x) \neq f(y)$. Snadno nalezneme $u, v \in \partial D(a,b,d/2)$ tak, že $f(u) = f(x)$,

$f(v) = f(y)$ a $|u - v| \leq |x - y|$. Volme $r, s \in [a, b]$, tak, aby $(u - r) \perp (a - b)$ a $(v - s) \perp (a - b)$. Potom platí

$$|f(x) - f(y)| = |f(u) - f(v)| = |r - s| \leq |u - v| \leq |x - y|,$$

což už dává požadovanou nerovnost. Protože však navíc

$$\frac{f(b) - f(a)}{|b - a|} = 1$$

máme $L(f) = 1$.

Buď nyní $\alpha \geq 0$, $\alpha_1 \geq \alpha$, $\alpha_2 \geq \alpha$,

$$x \in \partial D\left(a + \alpha_1 \frac{a - b}{2}, b + \alpha_1 \frac{b - a}{2}, (1 + \alpha_1)\frac{d}{2}\right)$$

a

$$y \in \partial D\left(a + \alpha_2 \frac{a - b}{2}, b + \alpha_2 \frac{b - a}{2}, (1 + \alpha_2)\frac{d}{2}\right).$$

Jako v předchozím nalezneme

$$u, v \in \partial D\left(a + \alpha \frac{a - b}{2}, b + \alpha \frac{b - a}{2}, (1 + \alpha)\frac{d}{2}\right)$$

tak, aby platilo $f(u) = f(x)$, $f(v) = f(y)$ a $|u - v| \leq |x - y|$.

Volme opět $r, s \in [a + \alpha\frac{a-b}{2}, b + \alpha\frac{b-a}{2}]$, aby bylo $(u - r) \perp (a - b)$ a $(v - s) \perp (a - b)$. Potom máme

$$|f(x) - f(y)| = |f(u) - f(v)| = \frac{|r - s|}{1 + \alpha} \leq \frac{|u - v|}{1 + \alpha} \leq \frac{|x - y|}{1 + \alpha},$$

a tedy celkem

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \frac{1}{1 + \alpha} = 1 - \frac{\alpha}{\alpha + 1}.$$

Buďte opět $x, y \in D(a, b, d/2)^c$, $x \neq y$, navíc splňující buď $f(x) \geq 1/2$ a $f(y) \geq 1/2$ nebo $f(x) \leq 1/2$ a $f(y) \leq 1/2$. Potom z Pythagorovy věty dostáváme

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \sqrt{1 - \frac{d^2}{|a - b|^2 + d^2}}\ .$$

Jinak řečeno, existuje konstanta $\gamma > 0$, že platí

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq 1 - \gamma\,.$$

Nyní definujme funkci $g : D(a,b,d)^c \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g = f|_{D(a,b,d)^c} .$$

Volme $\varepsilon > 0$ tak, aby navíc bylo $\varepsilon < \gamma$, a volme $x, y \in D(a,b,d)^c$, aby platilo

$$\frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} > 1 - \varepsilon .$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $g(x) \leq g(y)$. Potom

$$g(x) \leq 1/2 \leq g(y)$$

a navíc

$$x, y \in D(a,b,d)^c \cap D\Big(a + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{a-b}{2}, b + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{b-a}{2}, (1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon})\frac{d}{2}\Big).$$

Dostáváme tedy, že $x \in U(a, \delta(\varepsilon))$ a $y \in U(b, \delta(\varepsilon))$, kde

$$\delta(\varepsilon) = \operatorname{diam}\Big(D(a,b,d)^c \cap E\Big(\frac{a+b}{2}, b + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{b-a}{2}, (1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon})\frac{d}{2}\Big)\Big).$$

Dále máme $\delta(\varepsilon) \to 0$ pro $\varepsilon \to 0$. Definujme funkci $h : K \to \mathbb{R}$ jako $h = g|_K$. Potom $h(a) = f(a) = 0$ a $L(h) = L(f) = 1$. Tedy $h \in Lip_a(K)$ a $||h|| = 1$. Volme $1 \geq \varepsilon > 0$ tak, aby $\delta(\varepsilon) < \frac{|a-b|}{8}$. Ukážeme, že $h \notin \overline{\text{co}}\Delta_\varepsilon(h)$. Buď tedy $\phi \in \Delta_\varepsilon(h)$. Protože $||\phi|| \leq 1$ a $\phi(a) = 0$ je

$$\sup_{x \in U(a,\delta(\varepsilon))} \phi(x) \leq \delta(\varepsilon) < \frac{|a-b|}{8}.$$

Protože $\varepsilon \leq 1$ musí existovat $x \in U(b, \delta(\varepsilon))$ takové, že $\phi(x) \leq \delta(\varepsilon) < \frac{|a-b|}{8}$. Odtud dostáváme, že pro každou $\psi \in \Delta_\varepsilon(h)$ platí

$$\sup_{x \in U(b,\delta(\varepsilon))} \psi(x) \leq 3\delta(\varepsilon) < \frac{3|a-b|}{8}.$$

Tedy i pro každou $\xi \in \overline{\text{co}}\Delta_\varepsilon(h)$ je

$$\sup_{x \in U(b,\delta(\varepsilon))} \xi(x) \leq \frac{3|a-b|}{8}.$$

Protože ale $h(b) = |a-b|$, nemůže být $h \in \overline{\text{co}}\Delta_\varepsilon(h)$. ∎

4.9. Označení. Buď $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená oblast, $K = \overline{\Omega}$ a $z \in K$. Banachův prostor všech funkcí $f : K \to \mathbb{R}$ spojitě diferencovatelných na K - tj. takových, že existuje $U \supset K$ otevřená a $f_0 : U \to \mathbb{R}$ spojitě diferencovatelná na U taková, že $f_0 = f$ na K - splňujících navíc $f(z) = 0$, vybavený normou

$$||f|| = \max_{x \in K} ||Df_0(x)||$$

budeme značit $C^1_z(K)$.

Jemnou modifikací důkazu Daugavetovy vlastnosti pro lipschitzovské funkce dostaneme následující větu:

4.10. Věta. *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^l$ omezená oblast, $K = \overline{\Omega}$, $z \in K$, $l \in \mathbb{N}$. Potom prostor $C^1_z(K)$ má Daugavetovu vlastnost.*

Důkaz. Volme $f \in C^1_z(K)$, $||f|| = 1$ a $\varepsilon > 0$. Ukážeme, že

$$\overline{\text{co}}\Delta_\varepsilon(f) = B_{C^1_z(K)}\,.$$

Buď tedy $g \in B_{C^1_z(K)}$ a $y \in K$ takové, že $||Df(y)|| = 1$. Protože y není podle předpokladu isolovaný bod a Df je spojitá, existuje nekonečná spočetná množina $M \subset \Omega$ a směr $v \in S^{l-1}$ tak, že pro každé $x \in M$ je

$$D_v f(x) \geq 1 - \varepsilon/2\,.$$

Volme $n \in \mathbb{N}$, body $y_1, ..., y_n \in M$ a položme

$$d = \min_{i,j=1,\dots,n\ ,i\neq j} |y_i - y_j|\,,\ d' = \min_{i=1,\dots,n} |y_i - z|\,,\ \delta = \min(d, d')$$

a $g \in C^1_z(K)$, $||g|| \leq 1$. Nalezněme ještě $\lambda > 0$ tak, aby pro všechna $i = 1, ..., n$ bylo $U(y_i, \lambda) \subset \Omega$ a navíc pro všechna $u \in U(y_i, \lambda)$ platilo $D_v f(u) \geq 1 - \varepsilon$. Definujme funkce $\kappa_i : K \to \mathbb{R}$, $i = 1, .., n$, předpisem

$$\kappa_i(x) = -|x - y_i| + g_n(y_i),$$

pro $x \in K$, kde

$$g_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)g.$$

Nalezněme $p_i > 0$ tak, aby

$$\kappa_i(x) - p_i \leq g_n(x)$$

pro všechna $x \in K \setminus B(x_i, \delta/6)$. Volme $\mu > 0$ a $\nu > 0$ tak, aby pro všechna $i = 1, ..., n$ platilo

$$\{x \in K : |\kappa_i(x) - p_i - g_n(x)| \leq \mu\} \subset (U(x_i, \delta/3) \setminus U(x_i, \nu))\,.$$

Položme $\beta = \min(\nu/2, \lambda/2)$, a definujme funkce $\eta_i : K \to \mathbb{R}$ a $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro $i = 1, .., n$ a $x \in K$ předpisy

$$\eta_i(x) = \begin{cases} \kappa_i(x) + p_i & \text{když } |x - y_i| \geq \beta, \\ -\frac{|x-y_i|^2}{2\beta} - \frac{\beta}{2} + p_i & \text{když } |x - y_i| \leq \beta, \end{cases}$$

a funkci Φ pro $w \in \mathbb{R}$ následovně:

$$\Phi(w) = \begin{cases} |w| & \text{když } |w| \geq \mu, \\ \frac{w^2}{2\mu} + \frac{\mu}{2} & \text{když } |w| \leq \mu\,. \end{cases}$$

A konečně definujme pro $i = 1, ..., n$ funkce $H_i : K \to \mathbb{R}$ předpisem

$$H_i = \frac{\eta_i + g_n + \Phi(\eta_i - g_n)}{2}.$$

Volme $i \in \{1, \ldots, n\}$ pevně. Zřejmě $H_i \in C_x^1(K)$. Dokážeme, že $||H_i|| \leq 1$. Volme tedy $u \in S^{l-1}$. Na množině

$$\{x \in K : |\eta_i(x) - g_n(x)| > \beta\}$$

je

$$|D_u H_i| \leq \max(|D_u \eta_i|, |D_u g_n|) \leq 1 \,.$$

Na množině

$$\{x \in K : |\eta_i(x) - g_n(x)| \leq \beta\}$$

pak máme

$$\begin{aligned}
|D_u H_i| &= \left| D_u \frac{\eta_i + g_n + \Phi(\eta_i - g_n)}{2} \right| \\
&= \frac{1}{2} \left| D_u \eta_i + D_u g_n + (D_u \eta_i - D_u g_n) \frac{\eta_i - g_n}{\beta} \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \left| D_u \eta_i . \left(1 + \frac{\eta_i - g_n}{\beta}\right) + D_u g_n . \left(1 - \frac{\eta_i - g_n}{\beta}\right) \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \left(|D_u \eta_i| . \left| 1 + \frac{\eta_i - g_n}{\beta} \right| + |D_u g_n| . \left| 1 - \frac{\eta_i - g_n}{\beta} \right| \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\eta_i - g_n}{\beta} + 1 - \frac{\eta_i - g_n}{\beta} \right) = 1.
\end{aligned}$$

Navíc platí

$$||f - H_i|| \geq \sup_{x \in U(x_i, \lambda)} |D_v(f - H_i)(x)| \geq 2 - \varepsilon,$$

a tedy $H_i \in \Delta_\varepsilon(f)$. Pro

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} H_i \in \operatorname{co} \Delta_\varepsilon(f)$$

pak platí

$$||H - g|| \leq ||H - g_n|| + ||g_n - g|| \leq \frac{3}{n}.$$

■

4.11. Problém. V souvislosti s předchozí větou se naskýtá přirozená otázka, jestli by nebylo možné dokázat podobný výsledek pro prostory k-krát spojitě diferencovatelných funkcí. Přesná formulace problému je následující: Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená oblast, $K = \overline{\Omega}$ a $z \in K$. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme C_z^k Banachův prostor všech k-krát spojitě diferencovatelných funkcí na K takových, že $f(z) = 0$ a pro všechna $i = 1, .., k$ je $||D^i f(z)|| = 0$, vybavený normou

$$||f||_k = \max_{x \in K} ||D^k f(x)|| \,.$$

Otázka zní, zda má C_z^k Daugavetovu vlastnost.

5. Otevřené problémy

Zde uvádíme seznam některých otevřených problémů.

1. Existuje Banachův prostor X takový, že jeho druhý duál X^{**} má Daugavetovu vlastnost? (D. Werner [Wer,2001])

2. Může existovat Daugavetův prostor s Krejn-Milmanovou vlastností?

3. Nebylo by možné nalézt třídu funkčních prostorů majících Daugavetovu vlastnost, která by obsahovala jak simpliciální prostory, tak prostory s vlastností (G)?

4. Mají prostory k-krát spojitě diferencovatelných funkcí Daugavetovu vlastnost?

Literatura

Y.A. ABRAMOVICH, C.D. ALIPRANTIS
[AA] *An invitation to operator theory*, AMS, 2002.

Y.A. ABRAMOVICH, C.D. ALIPRANTIS, O. BURKINSHAW
[AbAlBu,1991] *The Daugavet equation in uniformly convex Banach spaces*, J. Funct. Anal. **97**, 215 - 230.

S.I.ANSARI
[Ans,1993] *Essential disjointness and the Daugavet equation*, Houston J. Math. **19**, 587 - 601.

V.F.BABENKO, S.A.PIČUGOV
[BaPi,1981] *On a property of compact operators in the space of integrable functions*, Ukrain, Mat. Zh. **33**, 491 – 492.

P.CHAUVEHEID
[Cha,1982] *On a property of compact operators in Banach spaces*, Bull. Soc. Roy. Sci Liege **51**, 371 – 378.

I.K. DAUGAVET
[Dau,1963] *On a property of compact operators in the space $\mathcal{C}$*, Uspekhi Mat. Nauk **18**, 157 – 158.

N. DUNFORD, J.T.SCHWARTZ
[DS] *Linear operators I.*, Wiley-Interscience, New York, 1958.

C. FOIAŞ , I. SINGER
[FoSi,1965] *Points of diffusion of linear operators and almost diffuse operators in spaces of continuous functions*, Math. Z. **87**, 434 – 450.

J.R. HOLUB
[Hol,1986] *A property of weakly compact operators on $C[0,1]$*, Proc. Amer. Math. Soc. **97**, 396 – 398.

V.M.KADEC, G.G.SIROTKIN, R.V.ŠVIDKOJ, D.WERNER
[KSŠW,2000] *Banach spaces with the Daugavet property*, Trans. Amer. Math. Soc. **352**, 855 – 873.

V.M.KADEC, R.V.ŠVIDKOJ, D.WERNER
[KaŠvWe,2001] *Narrow operators and rich subspaces of Banach spaces with the Daugavet property*, Studia Math. **47**, 269 – 298.

H. KAMOWITZ
[Kam,1984] *A property of compact operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **91**, 231 – 236.

M.A.KRASNOSELSKIJ
[Kra,1967] *A class of linear operators in space of abstract continuous functions*, Mat. Zametki **2**, 599 – 604.

G. JA. LOZANOVKIJ
[Loz,1966] *On almost integral operators in KB-spaces*, Vestnik Leningrad. Univ. **21**, 35 – 44.

J. LUKEŠ
[Záp] *Zápisky z funkcionální analýzy*, skripta, UK Praha, 2003.

M. MARTÍN, T. OIKHBERG
[MaOi,2004] *An alternative Daugavet Property*, J. Math. Anal. Appl. **294**, 158 – 180.

R.R.PHELPS
[Phe,1993] *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Lecture Notes in Math. 1364, Springer–Verlag.

R.R.PHELPS
[Phe,2001] *Lectures on Choquet's theorem*, Springer–Verlag, 2001.

K.D.SCHMIDT
[Sch,1990] *Daugavet's equation and ortomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. **108**, 905 - 911.

D. WERNER
[Wer,1996] *An elementary approach to the Daugavet equation*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **175**, 449 – 454.

D.WERNER
[Wer,1997] *The Daugavet equation for operators on function spaces.*, J. Funct. Anal. **143**, 117 - 128.

D. WERNER
[Wer,2001] *Recent progres on the Daugavet property*, Irish Math. Soc. Bull. **46**, 77 – 97.

D. WERNER
[Wer,2005] *Funktionalanalysis*, Springer–Verlag, 2005, 5. vydání.

P. WOJTAZCZYK
[Woj,1992] *Some remarks on the Daugavet equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **115**, 1047 – 1052.

KNIHOVNA MAT.-FYZ. FAKULTY
Matematické oddělení
Sokolovská 83
186 75 Praha 8