České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Matematická analýza invariantních množin

Mathematical Analysis of Invariant Sets

Bakalářská práce

Autor: **Jakub Malášek**

Vedoucí práce: **prof. Dr. Ing. Michal Beneš**

Akademický rok: 2022/2023

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Jakub Malášek
Studijní program:	Aplikovaná algebra a analýza
Název práce (česky):	Matematická analýza invariantních množin
Název práce (anglicky):	Mathematical Analysis of Invariant Sets

Pokyny pro vypracování:

1) Seznamte se s odpovídajícími partiemi topologie bodových množin, geometrie v bodových množinách a teorie míry.
2) Vyhledejte příklady geometricky složitých množin z teorie funkcí, topologie a bodových množin.
3) Seznamte se se základními matematickými nástroji pro popis a analýzu geometricky složitých množin.
4) Vyhledejte nejnovější výsledky v oblasti matematické analýzy těchto množin.
5) Seznamte se s možnostmi diferenciálního a integrálního počtu na fraktálních množinách.

Doporučená literatura:

1) P. S. Aleksandrov, Úvod do obecné theorie množin a funkcí. Nakl. ČSAV, Praha, 1954.
2) G. A. Edgar, Measure, Topology and Fractal Geometry. 2nd edition, Springer Verlag, New York, 2008.
3) K. Falconer, Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. 3rd edition, John Wiley & Sons, New York, 2014.
4) K. Falconer, The Geometry of Fractal Sets. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
5) S. Krantz, H. Parks, Geometric Integration Theory. Springer Verlag, Berlin, 2008.
6) H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, Chaos and Fractals. New Frontiers of Science, Springer Verlag, New York, 1992.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

prof. Dr. Ing. Michal Beneš
Katedra matematiky Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze, Trojanova 13, 120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2022

Datum odevzdání bakalářské práce: 2.8.2023

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 31.10.2022

....
garant oboru

....
vedoucí katedry

....
děkan

Poděkování:
Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli prof. Dr. Ing. Michalu Benešovi za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce.

Čestné prohlášení:
Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 2. srpna 2023 Jakub Malášek

Název práce:
Název práce

Autor: Jakub Malášek

Obor: Aplikovaná algebra a analýza

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. Dr. Ing. Michal Beneš, Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Tato práce se zabývá základními pojmy z problematiky invariantních množin a fraktální geometrie. Jsou v ní zmíněny nejznámější fraktální množiny, popsána jejich konstrukce a vlastnosti z pohledu topologie a teorie míry. Jsou zde definovány dolní a horní induktivní dimenze, jejich vzájemné vztahy a sumační vlastnosti. Dále jsou zde uvedeny dva postupy konstrukce vnější míry a zavedení Hausdorffovy míry a Hausdorffovy dimenze. Následně je uvedena problematika systémů iterovaných funkcí a možnosti vizualizace invariantních množin. Závěrečná část se věnuje vizualizaci invariantních množin pomocí algoritmu chaos game, který využívá systémy iterovaných funkcí a vliv pravděpodobnosti výběru funkcí na zobrazení invariantních množin.

Klíčová slova: dolní induktivní dimenze, fraktální geometrie, Hausdorffova dimenze, Hausdorffova míra, chaos game, invariantní množina, systém iterovaných funkcí, topologická dimenze

Title: Mathematical Analysis of Invariant Sets
Title of the Work

Author: Jakub Malášek

Abstract: This thesis is focused on basic concepts of invariant sets and fractal geometry. The most famous fractal sets are presented here as well as their construction and properties in terms of topology and measure theory. The small and large inductive dimensions are defined as well as their relations and summation properties. Furthermore, two procedures for the construction of the outer measure and the introduction of the Hausdorff measure followed by the definition of Hausdorff dimension are presented here. Subsequently, the iterated function systems and the possibility of visualization of invariant sets is described. The final part is dedicated to the visualization of invariant sets using the chaos game algorithm which uses iterated function systems and the effect of the probability of selecting functions on the shape of invariant sets.

Key words: chaos game, fractal geometry, Hausdorff dimension, Hausdorff measure, invariant set, iterated function system, small inductive dimension, topological dimension

Obsah

Úvod

Předmětem této práce jsou invariantní množiny pro systémy iterovaných funkcí, jejich nejznámější vlastnosti a vizualizace jednoduchých fraktálních množin.

Ač je zkoumání fraktálních množin poměrně mladou disciplínou, na první takové množiny můžeme narazit již v 17. století. K výraznějšímu posunu v tomto odvětví došlo až o dvě staletí později, když Karl Weistrass představil funkci, která je všude spojitá, ale není diferencovatelná v žádném svém bodě. Nedlouho poté publikoval Georg Cantor podmnožinu reálné osy, dnes známou jako Cantorova množina, která měla neobvyklé vlastnosti, dnes už ji můžeme zařadit mezi fraktály. Tato množina a další, které z ní vycházejí, jsou představeny v první kapitole.

Bylo by vhodné definovat si, co to vůbec je fraktální množina, avšak přesná definice zatím neexistuje. Samotný termín fraktál byl zaveden Benoit Mandelbrotem v roce 1975, který rovněž představil zatím nejuspokojivější definici tohoto pojmu. Ta říká, že množina je fraktální, pokud její Hausdorffova dimenze je ostře větší než její topologická dimenze. Oba tyto pojmy budou zmíněny v této práci společně se svými základními vlastnostmi.

Na fraktální množiny lze nahlížet jako na množiny, které jsou nepravidelnější, než množiny v klasické geometrii. Na rozdíl od běžných množin jejich nepravidelnosti nemizí při změně měřítka. Tuto vlastnost nazýváme soběpodobnost a je popsána v jedné z kapitol práce. V téže kapitole je rovněž zaveden pojem systém iterovaných funkcí, který říká jakým způsobem daná množina vznikla.

V nedávné době se fraktály staly velmi populárními, a to nejen díky své vizuální působivosti, ale hlavně díky jejich využití. Jedno z takových využití je například v počítačové grafice, a proto je důležité umět fraktální množiny vizualizovat. Jeden ze způsobů vizualizace pomocí systémů iterovaných funkcí je uveden v poslední kapitole a je ukázán na několika příkladech.

Práce obsahuje kapitoly o nejznámějších fraktálních množinách spolu s jejich neobvyklými vlastnostmi, souhrn potřebných pojmů z topologie a teorie míry, zavedení topologické a Hausdorffovy dimenze, dále se pak blíže věnujeme vlastnosti soběpodobnost a poslední kapitola je zaměřena na vizualizaci invariantních množin.

Kapitola 1

Motivační příklady

V první kapitole představíme nejznámější fraktální množiny, jejich konstrukci a topologické vlastnosti. Podrobněji se budeme věnovat hlavně těm jednodušším, jako je Cantorova množina a Sierpińského trojúhelník, v poslední části pak stručně i Juliovým množinám a nejznámější z nich Mandelbrotově množině. Obrázky v prvních dvou sekcích byly vytvořeny v programu Wolfram Mathematica a v posledních dvou v programu MATLAB.

1.1 Cantorova množina

Cantorova množina, známá také jako Cantorovo diskontinuum, či Cantorův prach, je množina poprvé publikována německým matematikem Georgem Cantorem (*1845 - †1918) v roce 1883 jako příklad tzv. výjimečné množiny, to znamená množiny, která je perfektní a zároveň není hustá v žádném svém bodě. O Cantorově množině můžeme prohlásit, že je nejdůležitější ze „starých" fraktálů. V dnešní době už víme, že Cantorova množina hraje důležitou roli v různých oblastech matematiky, zejména v teorii chaosu, a můžeme její strukturu najít i ukrytou v jiných fraktálech jako Juliových množinách.

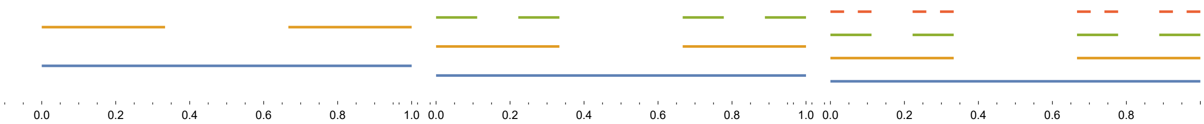
Konstrukce množiny

Začněme s uzavřeným intervalem [0, 1], prvním krokem konstrukce je vyjmutí otevřeného intervalu $(1/3, 2/3)$, a tedy získáme dva disjunktní uzavřené intervaly $[0, 1/3]$ a $[2/3, 1]$, které mají délku 1/3. V dalším kroku vyjmeme prostřední třetinu z intervalů $[0, 1/3]$ a $[2/3, 1]$ a získáme čtyři intervaly délky 1/9. První tři kroky této konstrukce jsou znázorněny v obrázku 1.1. Tedy v n-tém kroku dostáváme 2^n intervalů délky $(1/3)^n$. Cantorovým diskontinuem nazveme množinu bodů které by zůstaly po nekonečně mnoho krocích této konstrukce. Jinak řečeno pokud označíme C_i množiny které vzniknou v i-tém kroku iterace, pak pro Cantorovo diskontinuum, označme C, platí:

$$C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i.$$

Z konstrukce je zřejmé, že Cantorova množina je neprázdná, jelikož koncové body intervalů, jako 0, 1, 1/3, 2/3, 2/9... určitě obsahuje otázkou je jaké další body tam patří. Je zřejmé, že všechny tyto body souvisí s mocninami čísla 3, a proto budeme pracovat v trojkové soustavě.

Tvrzení 1. *Cantorova množina C je množina takových bodů v intervalu* $[0, 1]$*, že jejich rozvoj do trojkové soustavy neobsahuje číslici 1.*



Obrázek 1.1: První tři kroky konstrukce Cantorovy množiny

Toto tvrzení je zdánlivě v rozporu s pozorováním výše, jelikož např. $[1/3]_3 = 0{,}1$, avšak 1/3 můžeme zároveň napsat i jako $0{,}0222\bar{2}$, a tedy se tvrzení shoduje s pozorováním. Zajímavostí je i to že v Cantorově množině je pouze čtrnáct čísel, které mají konečný desetinný rozvoj a to čísla

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}, \frac{1}{40}, \frac{3}{40}, \frac{9}{40}, \frac{13}{40}, \frac{27}{40}, \frac{31}{40}, \frac{37}{40}, \frac{39}{40}.$$

Více o tomto lze nalézt v [7].

Vlastnosti Cantorovy množiny

Začneme topologickými vlastnosti Cantorovy množiny.

Tvrzení 2. *Cantorova množina je uzavřená.*

Tvrzení je zřejmé z konstrukce popsané výše. Pokud se podíváme na n-tý krok konstrukce a označme C_n, pak komplement k C_n jsou otevřené množiny $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$ a otevřené množiny, které byly odstraněny v předešlých n-1 krocích. Tvrzení pak plyne z matematické indukce v n.

Tvrzení 3. *Cantorova množina je perfektní, neboli neobsahuje žádný izolovaný bod.*

K důkazu potřebujeme pomocné tvrzení, které říká, že uzavřená množina $F \subset E_2$ je perfektní, právě tehdy když žádné dva styčné intervaly k F nemají společný konec. Důkaz tohoto tvrzení je možno nalézt například v [6] kapitole 4 . Nyní vezměme Cantorovu množinu C, která je definována jako

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Pak všechny koncové body intervalů $\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ a body 0,1 patří do C. Intervaly $\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_n}$, $(-\infty, 0)$ a $(1, \infty)$ jsou styčné k množině C a zároveň nemají společné koncové body. Z pomocného tvrzení tedy plyne, že Cantorova množina je perfektní.

Tvrzení 4. *Cantorova množina má mohutnost kontinua.*

Podívejme se nyní blíže na n-tý krok konstrukce, ozn. C_n. Je zřejmé, že dva intervaly v C_n jsou od sebe vzdálené o více než $(1/3)^n$. Proto každý bod $x \in C$ leží v jednom intervalu z prvního kroku konstrukce, ozn. Δ_{i_1}, v jednom intervalu z druhého kroku konstrukce, ozn. Δ_{i_1,i_2} a obecně v n-tém kroku v jednom intervalu $\Delta_{i_1,i_2,\dots,i_n}$. To ovšem znamená, že ke každému bodu můžeme přiřadit posloupnost indexů

$$i_1,\ i_2, \dots, \ \text{kde pro všechna } n,\ i_n \in \{0, 1, 2\}.$$

Posloupnost není přiřazena jednoznačně, jelikož koncovým bodům, tvaru $c3^{-n}$ můžeme přiřadit 2 různé posloupnosti, které mají buď $i_j = 0$ pro $j > n$, nebo $i_j = 2$ pro $j > n$. Tento problém odstraníme tak, že pokud se jedná o levý konec intervalu, zvolíme možnost s nulami a v pravém okraji s dvojkami. Neboli

Cantorovu množinu lze prostě zobrazit na množinu všech posloupností tvaru $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$, $i_n = 0$ nebo, $i_n = 1$. Tyto posloupnosti ovšem určují čísla vyjádřená v trojkové soustavě ve tvaru

$$0, i_1 i_2 \ldots i_n \ldots,\ i_j \in \{0, 1\}.$$

a tedy Cantorova množina je nespočetná.

Tvrzení 5. *Cantorova množina má nulovou Lebesgueovu míru.*

Cantorova množina bývá často uváděna jako příklad množiny, která má mohutnost kontinua a zároveň má Lebesgueovu míru rovnu 0. Pokud se opět podíváme na konstrukci množiny, tak vidíme, že vznikla odebráním množiny o délce 1/3, dvou množin o délce 1/9, 4 množin o délce 1/27 atd. Z intervalu [0, 1], a tedy

$$m_L(C) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{1 - 2/3} = 0.$$

Tvrzení 6. *Cantorova množina je soběpodobná.*

O soběpodobnosti se více dočtete v kapitole 4. Zjednodušeně abychom ukázali, že Cantorova množina C je soběpodobná potřebujeme najít takový soubor funkcí pro který platí:

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(C).$$

Zvolíme

$$f_1 = 1/3x,\ f_2 = 1/3x + 2/3$$

a pokusíme se dokázat rovnost výše. Postupovat budeme indukcí. V prvním kroku uvažujeme interval $C_0 = [0, 1]$. Působením funkcí f_1, f_2 dostaneme intervaly $[0, 1/3]$ a $[2/3, 1]$ jejichž sjednocení dává dohromady množinu C_1 vzniklou v prvním kroku konstrukce popsané výše. Dále uvažujme, že tvrzení platí pro množinu C_n a ověřme jej pro C_{n+1}. Z množiny C_n vybereme jeden z uzavřených intervalů $\Delta_{i_1,\ldots,i_n}$ a použijeme funkci f_1.

$$f_2(\Delta_{i_1,\ldots,i_n}) = \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{2i_j}{3^{j+1}}, \sum_{j=1}^{n} \frac{2i_j}{3^{j+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right].$$

Dále posunutím indexů j doprava vytvoříme nové indexy $\tilde{i}_j$, pro které platí $\tilde{i}_1 = 0$, $\tilde{i}_j = i_{j-1}$, $\forall j \in \{2, 3, \ldots, n + 1\}$. Tedy dostáváme

$$f_1(\Delta_{i_i,\ldots,i_n}) = \Delta_{\tilde{i}_1,\tilde{i}_2}, \ldots, \tilde{i}_n = \Delta_{0,i_1,i_2,\ldots,i_n}.$$

Obdobně postupujeme i pro f_2 a dostáváme

$$f_2(\Delta_{i_1,\ldots,i_n}) = \Delta_{\tilde{i}_1,\ldots,i_{n+1}} = \Delta_{1,i_1,i_2,\ldots,i_n},$$

kde index 1 odpovídá hodnotě $\tilde{i}_1$. Jelikož

$$C_n = \bigcup_{j=1}^{n} \Delta_{i_1,i_2,\ldots,i_n},$$

pak po sjednocením všech intervalů $\Delta_{1,i_1,i_2,\ldots,i_n}$ a $\Delta_{0,i_1,i_2,\ldots,i_n}$ dostáváme rovnost $C_{n+1} = f_1(C_n) + f_2(C_n)$. Nyní musíme ověřit rovnost pro samotnou Cantorovu množinu $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Rovnost dokážeme pomocí dvou inkluzí. Začněme inkluzí $C \subset f_1(C) \cup f_2(C)$. Zvolme libovolné $x \in C$, pak x leží i ve všech

C_n. To z již dokázané části znamená, že x leží i v $f_1(C_n) \cup f_2(C_n)$ pro všechna přirozená n. Bez újmy na obecnosti řekněme, že x leží v $f_1(C_n)$, pak ovšem $3x \in \bigcap_{i=1}^{n} C_i$, a tedy i $x \in C$. Pro případ $x \in f_2(C_n)$ je důkaz obdobný. Nyní ukážeme druhou inkluzi $C \supset f_1(C) \cup f_2(C)$. Opět bez újmy na obecnosti zvolme bod $x \in f_1(C)$. Pak dostáváme $3x \in C$. Z již dokázané části ale víme, že

$$3x \in C_n, \text{ což můžeme přepsat jako } x \in f_n(C_n) = C_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Z čehož už plyne

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} C_{n+1} = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_n.$$

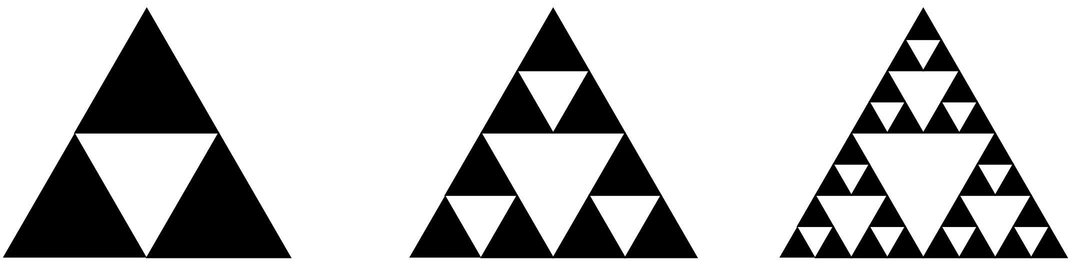
Tím je tvrzení dokázáno.

1.2 Sierpińského trojúhelník

Další fraktální množinou, na kterou se zaměříme je Sierpińského trojúhelník představený polským matematikem Waclawem Sierpińskim (*1882 - †1969) v roce 1916.

Konstrukce množiny

Začněme s rovnostranným trojúhelníkem s délkou stran 1, označme S_0. V prvním kroku vyjmeme trojúhelník, který má své vrcholy ve středech stran trojúhelníku S_0. Získáme tedy tři shodné trojúhelníky o délce stran 1/2 a uprostřed prázdný trojúhelník o délce strany 1/2. Vyplněnou část označíme S_1. Ve druhém kroku proces opakujeme třikrát pro každý z menších vyplněných trojúhelníků množiny S_1. Obdobně pokračujeme pro všechna přirozená n a získáváme množiny S_n, které obsahují 3^n trojúhelníků o délkách stran $1/2^n$. První 3 kroky konstrukce jsou znázorněny v následujícím obrázku.



Obrázek 1.2: Zleva množiny S_1, S_2 a S_3 vzniklé konstrukcí výše

Dostáváme tedy posloupnost množin $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots$. Sierpińského trojúhelník S, pak definujeme jako

$$S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Vlastnosti Sierpińského trojúhelníku

Tvrzení 7. *Sierpinského trojúhelník je soběbodobný*

Podobně jako u Cantorovy množiny zvolíme soubor funkcí a ověříme zda platí

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(S).$$

Zvolíme tedy funkce

$$f_i = \frac{1}{2}(z_i + x), \text{ pro} i \in \{1, 2, 3\},$$

kde body z_i odpovídají vrcholům původního trojúhelníku. Funkce f_i jsou kontrahující zobrazení složená s posunutím k vrcholům z_i, tedy je zřejmé, že platí

$$S_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{3} f_i(C_n).$$

Zbývá ověřit rovnost pro Sierpińského trojúhelník $S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Začněme inkluzí $S \subset f_1(S) \cup f_2(S) \cup f_3(S)$. zvolme bod $x \in S$, pak určitě patří x i do množiny S_k pro všechna přirozená k. Z toho plyne, že x leží i v množině $S_{k+1} = f_1(S_k) \cup f_2(S_k) \cup f_3(S_k)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že leží v množině $f_1(S_k)$, pak ale

$$2x - z_1 \in S_k, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tudíž $x \in f_1(S)$ Obdobně se ukáží i případy pro funkce f_2 a f_3. a tedy dostáváme

$$x \in f_1(S) \cup f_2(S) \cup f_3(S).$$

Nyní dokážeme druhou inkluzi zvolme bod $x \in f_1(S) \cup f_2(S) \cup f_3(S)$. Bez újmy na obecnosti volme $x \in f_1(S)$, ostatní případy se dokazují obdobně. Jelikož $x \in f_1(S)$, pak určitě $2x - z_1 \in S$, a tedy i $2x - z_1 \in S_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. To však znamená, že

$$x \in f_1(S_k) \subset S_k + 1, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

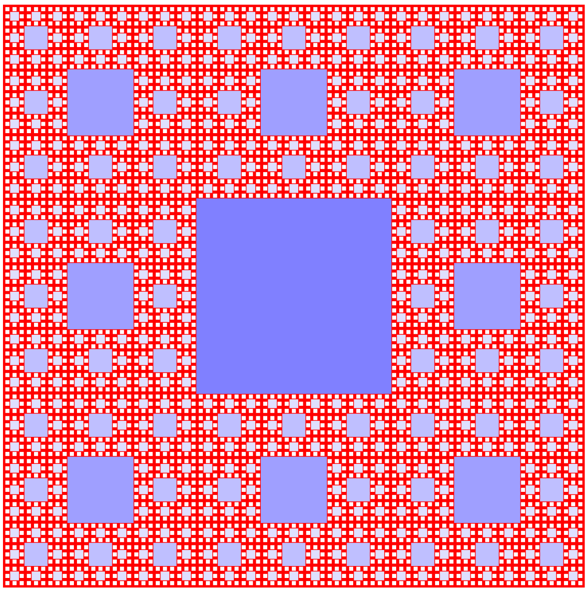
Tedy platí

$$x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} S_{k+1} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} S_k = S.$$

Sierpińského koberec

Velmi podobný postup můžeme použít k vytvoření tak, zvaného Sierpińského koberce, někdy také nazýván Sierpińského čtverec. Opět začneme s čtvercem o straně délky 1, označeném C_0. Rozdělíme jej na devět stejných čtverců o délce strany 1/3 a prostřední vyjmeme. Výslednou množinu označíme C_1. Ve druhém kroku opakujeme tento postup na všech 8 zbývajících čtverců v množině C_1. V n-tém kroku tedy máme 8^n čtverců o délce stran $1/3^n$. Tento postup opakujeme pro všchna přirozená n a získáme posloupnost $C_0 \subset C_1 \supset C_2, \ldots$. Pak Sierpińského koberec C definujeme jako

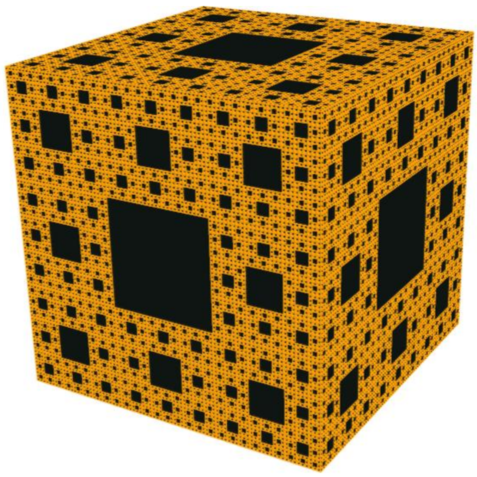
$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$



Obrázek 1.3: Množina C_4 znázorněna červeně a modře znázorněny vyjmuté čtverce

Mengerova houba

Publikována australsko-americkým matematikem Karelm Mengerem v roce 1926, při studiu topologické dimenze. Jedná se o množinu, jejíž konstrukce je podobná jako u Siepińského koberce. Začínáme s krychlí o délce hrany 1 a rozdělíme ji na 27 stejných krychlí o délce hrany 1/3. Dále vyjmeme prostřední krychli z každé straně a také krychli uprostřed. V n-tém kroku dostáváme tedy 27^n krychlí o délce hrany $1/3^n$. Opakováním tohoto postupu vznikne posloupnost množin. Pokud uděláme jejich průnik získáme Mengerovu houbu. Množina vzniklá po pátém kroku konstrukce je znázorněna v následujícím obrázku.



Obrázek 1.4: Pátý krok konstrukce Mengerovy houby

1.3 Juliovy množiny

V této kapitole se budeme věnovat o něco složitějším množinám, které jsou velmi důležité zejména v komplexní dynamice, a to tak zvaným Juliovým množinám. Poprvé byly popsány francouzským matematikem Gastonem Juliou (*1893-†1978) v práci [9] v roce 1918. Známějšímy se staly až díky Benoit Mandelbrotovi o několik let později.

Definice Juliových množin

Pro jednoduchost vezměme polynomiální funkci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stupně $n \geq 2$ s komplexními koeficienty. Dále označme f^k k-krát složenou funkci f v bodě w, neboli

$$f^k(w) = f(f(\ldots(f(w))\ldots)).$$

Nejprve definujeme vyplněné Juliovy množiny polynomu f, ozn. $K(f)$ jako

$$K(f) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, f^k(z) \nrightarrow \infty\}.$$

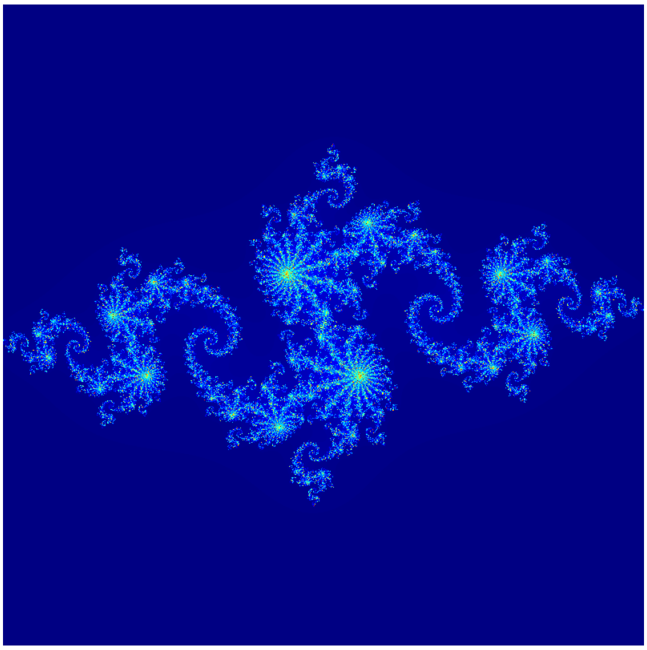
Juliovu množinu, ozn. $J(f)$ pak definujeme jako hranici vyplněné Juliovy množiny, $J(f) := K(f)$. Jinak řečeno, $z \in J(f)$, pokud v každém okolí bodu z existují body u a w tak, že $f^k(w) \to \infty$ a $f^k(u) \nrightarrow \infty$. Navíc můžeme definovat Fatouovy množiny, nebo také stabilní množiny, což jsou doplňky Juliových množin do roviny komplexních čísel. Více o Juliových množinách lze nalézt například v [9], nebo [4].

Konstrukce množiny

Konstrukce Juliových množiny vychází přímo z definice. Uvažujme zadanou funkci ve tvaru $f = z^2 + c$, kde z je komplexní proměnná a c je komplexní konstanta. Rekurzí vytvoříme posloupnosti $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \text{ kde } n \in \mathbb{N}_0,\ c \in \mathbb{C} \text{ a } z_0 \in C$$

. Pak nastanou dvě situace pro dané z_0. Posloupnost $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ buď konverguje, nebo ne. Juliova množina je pak množina takových z_0, které leží na hranici těchto dvou možností.



Obrázek 1.5: Juliova množina pro funkci $f = z^2 - 0{,}8 + 0{,}156i$

1.4 Mandelbrotova množina

Z Juiových množin vychází takzvaná Mandelbrotova množina poprvé zmíněna roku 1980 matematikem Benoit Mandelbrotem (*1924-†2010). Vztah k Juliovým množinám je v celku jednoduchý. Je to množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které jsou Juliovy množiny souvislé.

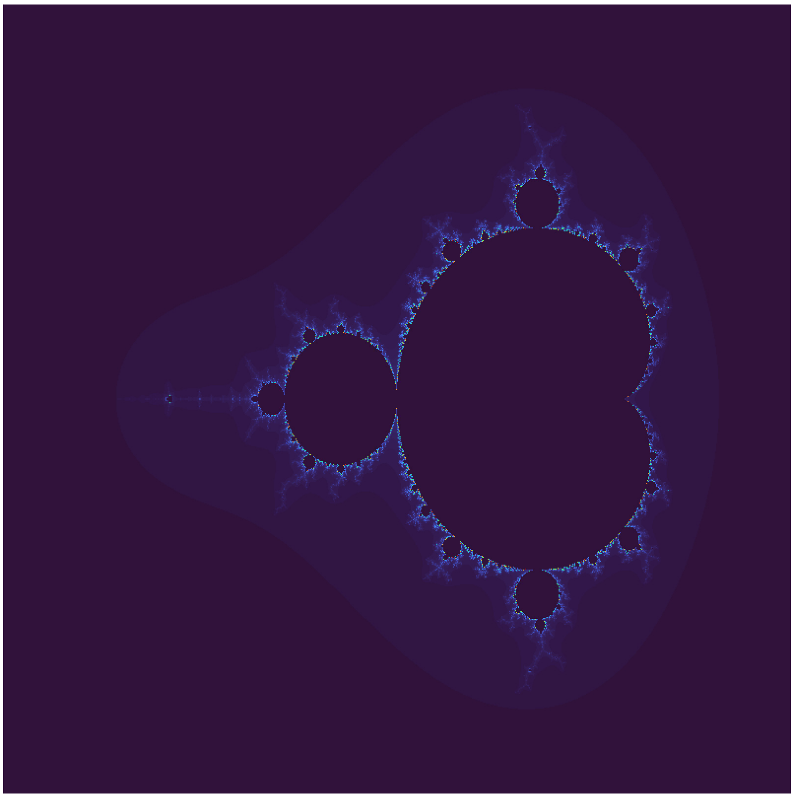
Konstrukce množiny

Konstrukce je velmi podobná Juliovým množinám. Rekurzí vytvoříme posloupnost $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$, vztahem

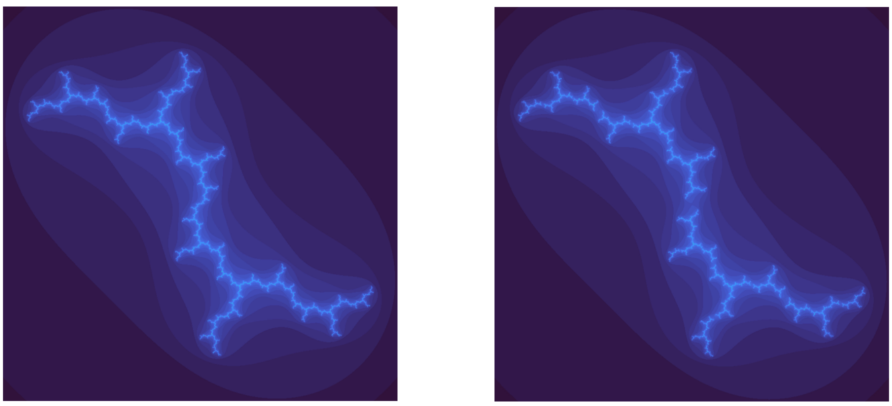
$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \text{ kde } n \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$$

. Mandelbrotova množina je pak množina všech bodů c, ve kterých posloupnost $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ nediverguje.

Pro ilustraci souvislosti Juliových množin s Mandelbrotovou množinou zvolme bod komplexní množiny i, který leží na hranici Mandelbrotovy množiny a bod $0{,}01i$, který už je mimo Mandeldrotovu množinu. V následujícím obrázku 1.7 vidíme, že Juliova množina pro konstantu $c = i$ je souvislá a Juliova množina pro konstantu $c = 1{,}01i$ se rozpadla na několik částí, a tedy souvislá není.



Obrázek 1.6: Mandenlbrotova množina



Obrázek 1.7: Juliovy množiny pro konstanty $c = i$ a $c = 1{,}01i$

Kapitola 2

Topologie a míra

V následující kapitole se podíváme na pojmy z topologie a teorie míry potřebné ke zkoumání vlastností fraktálních množin v dalších kapitolách.

2.1 Topologie

Topologie je velmi mocný nástroj ke zkoumání obecných množin a prostorů. V této části se zaměříme na obecné pojmy, jako báze topologie, axiomy oddělování, metrické prostory, nebo kompaktnost. První část o obecné topologii je spíše pro úplnost. Důležitější je pro nás hlavně část o metrických prostorech a kompaktnosti, jelikož fraktální množiny, kterým se věnujeme jsou kompaktními podmnožinami metrických prostorů $\mathbb{R}^n$, případně $\mathbb{C}^n$. Jelikož se nejedná o hlavní část práce, tak většina důkazů v této části je vynechána, důkazy a více o tomto tématu je možno nalézt například v [8], nebo [3].

2.1.1 Topologie, báze topologie

Definice 8 (Topologie, kotopologie, uzavřená, otevřená, obojetná množina)**.** Nechť $X \neq \emptyset$, systém $\tau \subset 2^X$, který splňuje následující podmínky:

- $X, \emptyset \in \tau$,
- $(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall i \in \hat{n}, A_i \in \tau \implies \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau)$,
- $(\forall I \neq \emptyset), (\forall \alpha \in I, A_\alpha \in \tau \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau)$,

nazveme *topologií* na X. Množiny z τ nazveme *otevřené*, uspořádanou dvojici (X, τ) nazveme *topologický prostor*, systém $c\tau = \{X \setminus A, A \in \tau\}$ nazveme *kotopologie* a prvky $c\tau$ nazveme *uzavřené množiny*. Pokud $A \in \tau \cap c\tau$ řekneme, že A je *obojetná množina*.

Definice 9. Nechť (X, τ) topologický prostor a $x \in X$. Libovolnou množinu A $\in \tau$, která obsahuje x, nazveme (otevřeným) *okolím bodu* x a budeme ji značit H_x.

Věta 10. *Nechť* (X, τ) *je topologický prostor a* $A \subset X$. *Potom* $A \in \tau$, *právě když* $(\forall x \in A)(\exists H_x)(H_x \subset A)$.

Definice 11 (Báze topologie)**.** Systém množin $\beta \subset \tau$ nazveme *bází topologie* (X, τ), jestliže každá množina $A \in \tau$ je sjednocením množin z β.

Věta 12. *Nechť* (X, τ) *je topologický prostor. Systém* $\beta \subset 2^X$ *je bází* (X, τ), *právě když* $(\beta \subset \tau) \wedge (\forall x \in X)(\forall H_x)(\exists B \in \beta)(x \in B \subset H_x)$.

Definice 13. Nechť (X, τ) topologický prostor A $\subset$ X. Největší otevřená podmnožina A ve smyslu inkluze se nazývá vnitřek A (značíme A°), tzn.

$$A^\circ := \bigcup_{B\subset A, B\in\tau} B \ .$$

Definice 14. Buď (X, τ) topologický prostor A $\subset$ X. Nejmenší uzavřená nadmnožina A ve smyslu inkluze se nazývá uzávěr A (značíme $\overline{A}$), tzn.

$$\overline{A} := \bigcap_{C\supset A, C\in c\tau} C \ .$$

Některé vlastnosti, které bereme jako samozřejmost, například jednoznačnost limit, nebo uzavřenost jednoprvkových množin, neplatí v obecných topologických prostorech. Proto topologické prostory můžeme rozlišovat pomocí axiomů oddělitelnosti.

Definice 15 (Axiomy oddělování)**.** Nechť (X, τ) topologický prostor, Následující výroky nazýváme axiomy oddělování:

$$\begin{aligned}
T_0 :&\quad (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x)(y \notin H_x) \vee (\exists H_y)(x \notin H_y), && \text{(Kolmogorov)}\\
T_1 :&\quad (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x, H_y)(y \notin H_x \wedge x \notin H_y), && \text{(Fréchet)}\\
T_2 :&\quad (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists H_x, H_y)(H_x \cap H_y = \emptyset), && \text{(Hausdorff)}\\
T_3 :&\quad (\forall A \in c\tau)(\forall x \notin A)(\exists H_x)(\exists U \supset A, U \in \tau)(H_x \cap U = \emptyset), && \text{(regulární)}\\
T_4 :&\quad (\forall A, B \in c\tau, A \cap B = \emptyset)(\exists U \supset A, U \in \tau)(\exists V \supset B, V \in \tau)(U \cap V = \emptyset). && \text{(normální)}
\end{aligned}$$

2.1.2 Metrické prostory a kompaktnost

Topologické prostory jsou pro naše účely až příliš obecné a abstraktní. Z toho důvodu se více zaměříme na metrické prostory, které mají zásadní výhodu v tom, že narozdíl od obecných topologických prostorů, u nich dokážeme měřit vzdálenosti pomocí funkce ρ z následující definice.

Definice 16. Nechť S$\neq \emptyset$ množina. Funkci $\rho : S \times S \to [0, +\infty)$, která splňuje :

1. $(\forall x, y \in S)(\rho(x, y) = 0$, právě když $x = y)$,
2. $(\forall x, y \in S)(\rho(x, y) = \rho(y, x))$,
3. $(\forall x, y, z \in S)(\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z))$,

nazveme *metrika* na S a uspořádanou dvojici (S, ρ) nazveme *metrický prostor*.

Abychom mohli používat poznatky z obecné topologie i v metrických prostorech musíme na nich nalézt vhodný systém, který splňuje vlastnosti topologie. K tomu potřebujeme následující definici.

Definice 17. Nechť (S, ρ) metrický prostor, x$\in$S a r $\in \mathbb{R}^+$. Pak definujeme:

1. množinu $B_x(r) := \{y \in S | \rho(x, y) < r\}$ a nazveme ji otevřenou koulí se středem v bodě x a poloměrem r (stručně r-koulí se středem v x),
2. množinu $\bar{B}_x(r) := \{y \in S | \rho(x, y) \leq r\}$.

Nyní označme $\mathcal{B} = \{B_x \,|\, x \in S,\ r > 0\}$, snadno se dokáže, že tato množina tvoří bázi nějaké topologie na S. Tuto topologii nazýváme topologii indukovanou metrikou.

Tvrzení 18. *V metrických prostorech obecně neplatí $\bar{B}_x(r) = \overline{B_x(r)}$.*

Důkaz. Budeme postupovat sporem. Mějme metrický prostor $(\{0, 1, 2, 3\}, \rho)$, kde ρ definujeme následovně:

- $\forall x, y \in X, x \neq y, \rho(x, y) = 1$,
- $\forall x, y \in X, x = y, \rho(x, y) = 0$.

Skutečně se jedná o metriku, jak jsme si ji definovali v definici 16. Uvažujme nyní kouli $B(1, 1) = \{1\}$. Dále víme, že jednobodová podmnožina metrického prostoru je uzavřená, z čehož nám plyne $B(1, 1) = \overline{B(1, 1)}$. Avšak $\bar{B}(1, 1) = \{0, 1, 2, 3\}$, čímž jsme našli metrický prostor, ve kterém neplatí rovnost $\bar{B}(x, r) = \overline{B(x, r)}$. □

Poznámka 19. Metrické prostory jsou T_4, tj. splňují všechny axiomy z definice 15.

V některých případech nám nebude stačit pouhá vzdálenost mezi dvěma body, ale budeme potřebovat i vzdálenosti mezi podmnožinami metrického prostoru.

Definice 20. Nechť (S, ρ) je metrický prostor a $\emptyset \neq A, B \subset S$. Číslo

$$\mathrm{d}(A, B) := \inf\{\rho(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

nazveme *vzdálenost množin* A a B. Dále číslo

$$\operatorname{diam} A := \sup\{\rho(x, y) | x, y \in A\}$$

nazveme *průměr množiny* A. Pro prázdnou množinu klademe $\operatorname{diam} \emptyset := 0$. Řekneme, že množina je omezená, právě když $\operatorname{diam} A < +\infty$.

Definice 21. Nechť (S, ρ) je metrický prostor, množinu $A \subset S$ nazveme *hustou* v S, pokud $\overline{A} = S$

V metrických prostorech můžeme rovněž zavést pojem limita posloupnosti.

Definice 22. Nechť (S, ρ) je metrický prostor, řekneme, že posloupnost $(x_n) \subset S$ *konverguje* k $x \in S$, pokud

$$(\forall \epsilon)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\rho(x_n, y) \leq \epsilon).$$

Definice 23. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ v metrickém prostoru (S, ρ) nazveme *cauchyovskou*, právě když

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\rho(x_n, x_m) < \epsilon).$$

Následující a pro nás velmi důležitá vlastnost je kompaktnost, která zobecňuje pojem uzavřená a omezená množina v obecných topologických (metrických) prostorech. V metrických prostorech ji definujeme následovně.

Definice 24. Metrický prostor (S, ρ) nazveme *kompaktní*, pokud pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset S$ existuje konvergentní podposloupnost.

Tato vlastnost je v obecných prostorech nazývána sekvenční kompaktnost. V obecných topologických prostorech definujeme kompaktní prostor, jako prostor, jehož každé pokrytí má konečné podpokrytí. Více o těchto vlastnostech je možno nalézt například v [8] kap. 3.

Věta 25. *Buď (S, ρ) metrický prostor a $A \subset S$ je kompaktní množina. Pak A je omezená a uzavřená.*

Poznámka 26. Opačná implikace obecně neplatí. Pokud se však omezíme na konečnědimenzionální normované prostory jsou kompaktní množiny právě ty, které jsou současně omezené a uzavřené.

Definice 27. Podmnožinu metrického prostoru nazveme *prekompaktní*, pokud její uzávěr je kompaktní.

Definice 28. Buď (S, ρ) metrický prostor. Zobrazení $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ nazýváme *kontrahující*, právě když

$$(\exists q \in [0, 1))(\forall x, y \in X)(\rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y)).$$

Další vlastností, kterou v metrických prostorech zavedeme je úplnost. Tato vlastnost nám zjednodušeně říká, že v daném metrickém prostoru nejsou„ žádné díry“. Více o úplných prostorech lze nalézst například v [8].

Definice 29. Metrický prostor (X, ρ) nazveme *úplný*, pokud každá cauchyovská posloupnost z X je konvergentní, tzn. má limitu v X.

Definice 30. Metrický prostor (S, ρ) nazveme *relativně kompaktní*, pokud pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ existuje cauchyovská podposloupnost.

Jak je z definic vidět, tak relativní kompaktnost vytváří souvislost mezi kompaktními a úplnými protory.

Věta 31. *Metrický prostor S je relativně kompaktní, právě když pro každé $\delta > 0$ existuje konečná množina $A(\delta) \subset S$ tak, že $\rho(x, A(\delta)) < \delta$ pro všechna $x \in S$.*

Důkaz. Je možno nalézt v kapitole 17 [3]. □

Následující věty jsou důležité zejména pro iterační metody numerické analýzy, které budeme používat i v této práci.

Věta 32 (Banachova o pevném bodě)**.** *Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ kontrahující zobrazení. Potom f má právě jeden pevný bod, tzn.*

$$(\exists_1 x \in X)(f(x) = x).$$

Důkaz. Lze nalézt například v [1]. □

Věta 33 (Brouwerova o pevném bodě)**.** *Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je normovaný konečnědimenzionální prostor (nad $\mathbb{R}$) a $K \subset V$ kompaktní a konvexní množina. Potom každé spojité zobrazení $f : K \to K$ má pevný bod.*

Důkaz. Lze nalézt například v [13], nebo ve speciálním případě věty v [8]. □

2.2 Míra

K popsání Hausdorffovy dimenze potřebujeme několik poznatků z teorie míry, hlavně o konstrukci vnější míry. Podíváme se na dva možné postupy konstrukce vnější míry a to Metodou I, známou například z konstrukce Lebesgueovy míry a Metodou II, důležitou pro konstrukci Hausdorffovy míry. Nejprve musíme definovat systémy množin, na kterých je vhodné zavádět míru.

Definice 34. Nechť $X \neq \emptyset$, neprázdný systém $\mathcal{A} \subset 2^X$ nazveme *σ-algebra*, právě když

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$,
2. $E \in \mathcal{A} \implies E^c \in \mathcal{A}$,
3. $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$.

Poznámka 35. V definici výše E^c značí komplement množiny E, neboli množinu $X \setminus E$.

Definice 36. Nechť $X \neq \emptyset$ a $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset 2^X$. Minimální σ-algebru obsahující systém $\mathcal{E}$, tj. systém

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{A} \,|\, \mathcal{E} \subset A,\ \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra}\},$$

nazýváme *σ-algebra generovaná systémem* $\mathcal{E}$.

Ke konstrukci míry na prostorech $\mathbb{R}^n$ použijeme následující σ-algebry.

Definice 37. Buď (X, τ) topologický prostor, σ-algebra $\mathcal{B}_X$ generovaná topologií τ se nazývá *borelovská σ-algebra* na X. Prvky $\mathcal{B}_X$ se nazývají *borelovské množiny*.

Definice 38. Nechť $\mathcal{A} \subset 2^X$ je σ-algebra na X. Množinovou funkci $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ splňující

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. Je-li $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ posloupnost po dvou disjunktních množin, potom

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \qquad (\sigma\text{-aditivita})$$

nazýváme *míra* na X. Uspořádanou dvojici (X,$\mathcal{A}$) nazýváme *měřitelný prostor*, uspořádanou trojici(X, $\mathcal{A}$, μ) nazveme *prostor s mírou* a množiny σ-algebry $\mathcal{A}$ *měřitelné množiny*.

Definice 39. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Míra μ se nazývá *úplná*, pokud platí

$$(\forall F \in \mathcal{A}, \mu(F) = 0)(E \subset F \implies E \in \mathcal{A}).$$

Dále se podíváme na metody, kterými lze míru zkonstruovat. Prvním krokem konstrukce je zavedení vnější míry.

Definice 40. Nechť $X \neq \emptyset$. Množinovou funkci $\overline{\mu} : 2^x \to [0, +\infty]$ splňující:

1. $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$,
2. je-li $A \subset B \subset X$, pak $\overline{\mu(A)} \leq \overline{\mu}(B)$,

3. je-li$\{A_n\} \subset X$, potom
$$\overline{\mu}\Bigg(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigg) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n),$$

nazveme *vnější míra* na X.

Jak je z definice vidět, tak vnější míra je zavedena podobně jako míra samotná, hlavní rozdíl je v tom, že vnější míra funguje na celé potenční množině prostoru X. Následující lemma a věta nám dává návod jak vnější míru sestrojit.

Lemma 41. *Nechť* $X \neq \emptyset$, $\mathcal{E} \subset 2^X$ *a* $\phi : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ *jsou takové, že* $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ *a* $\phi(\emptyset) = 0$. *Potom množinová funkce* $\overline{\mu}$ *definovaná vztahem*
$$\overline{\mu}(A) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \phi(E_n) \;\middle|\; \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{E} \text{ a } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right\}$$
je vnější míra na X.

Důkaz. V důkaz ověříme body (1.)–(3.) z definice 40

1. rovnost $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$ je zřejmá jelikož stačí položit $E_n := \emptyset$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a z předpokladů $\phi(\emptyset) = 0$.

2. Implikace $A \subset B \subset X \implies \overline{\mu}(A) \leq \overline{\mu}(B)$ je také zřejmá, neboť každé spočetné pokrytí $\mathcal{E}$ množiny B pokrývá i množinu A.

3. Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Zvolme $\epsilon > 0$ libovolné, pevné. Zdefinice infima plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $\{E_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ tak, že
$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^{(n)} \qquad \text{a} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \rho\ (E_j^{(n)})\ \leq \overline{\mu}(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$
Pak ovšem
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{j,n=1}^{\infty} E_j^{(n)}$$
a
$$\sum_{n,j=1}^{\infty} \phi(E_j^{(n)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n) + \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n) + \epsilon,$$
z čehož plyne
$$\overline{\mu}\Bigg(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigg) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n) + \epsilon.$$
Jelikož bylo ϵ voleno libovolně, tak dostáváme
$$\overline{\mu}\Bigg(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigg) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n).$$

□

Věta 42 (Metoda I)**.** *Nechť $X \neq \emptyset, \mathcal{A} \subset 2^X$ soubor množin, které pokrývají X a $\phi : 2^X \to [0, +\infty]$.Potom existuje jediná vnější míra $\overline{\mu}$ na X taková, že*

1. *$\overline{\mu}(A) \leq \phi(A), \forall A \in \mathcal{A}$,*
2. *Pokud $\overline{\nu}$ je další vnější míra na X splňující $\overline{\nu}(A) \leq \phi(A), \forall A \in \mathcal{A}$, pak $\overline{\nu}(B) \leq \overline{\mu}(B), \forall B \subset X$.*

Důkaz. I. jednoznačnost dokážeme jednoduše, jelikož pokud dvě míry splňují body (1), (2), tak platí, že jedna je menší nebo rovna druhé a naopak.

II. zkonstruujeme vnější míru $\overline{\mu}$ pomocí lemmatu 41 a ověříme vlastnosti (1) a (2):

1. Nechť $A \in \mathcal{A}$ a pokrytí A zvolme jako jednoprvkovou množinu $\{A\}$, pak z konstrukce $\overline{\mu}$ plyne
$$\overline{\mu}(A) \leq \sum_{B \in \{A\}} \phi(B) = \phi(A).$$
2. Nechť $\overline{\nu}$ je další vnější míra na X s vlastností $\overline{\nu}^(A) \leq \phi(A), \forall A \in \mathcal{A}$, pak pro každé spočetné pokrytí $\mathcal{D}$ množiny B množinami z $\mathcal{A}$ platí
$$\sum_{A \in \mathcal{D}} \phi(A) \geq \sum_{A \in \mathcal{D}} \overline{\nu}(A) \geq \overline{\nu}\left(\bigcup_{A \in \mathcal{D}} A \right) \geq \overline{\nu}(B).$$

Z čehož plyne $\overline{\mu}(B) \geq \overline{\nu}(B)$ □

Definice 43. Nechť $\overline{\mu}$ je vnější míra na X. Množina $A \subset X$ se nazývá $\overline{\mu}$-měřitelná právě když
$$(\forall E \subset X)(\overline{\mu}(E) = \overline{\mu}(E \cap A) + \overline{\mu}(E \cap A^c)).$$

Nyní už můžeme zkonstruovat míru pomocí následující věty.

Věta 44 (Carathéodory)**.** *Nechť $\overline{\mu}$ je vnější míra na X a $\overline{\mathcal{M}} := \{A \subset X \mid A$ je $\overline{\mu}$-měřitelná$\}$. Potom $\overline{\mathcal{M}}$ je σ-algebra a $\mu := \overline{\mu} \restriction \overline{\mathcal{M}}$ úplná míra na X.*

Důkaz. Důkaz rozdělíme na tři části:

1.) Abychom ověřili, že $\overline{\mathcal{M}}$ je σ-algebra, ukážeme, že $\overline{\mathcal{M}}$ je algebra a poté, že je uzavřená na spočetná sjednocení po dvou disjunktních množin. Víme, že $\overline{\mathcal{M}}$ je neprázdný systém, jelikož $\emptyset \in \overline{\mathcal{M}}$, dále z definice 43 vidíme, že A je $\overline{\mu}$-měřitelná, právě když A^c je $\overline{\mu}$-měřitelná, a proto je $\overline{\mathcal{M}}$ uzavřená na komplementy.
Nyní ukážeme uzavřenost na konečná sjednocení: Nechť A, B $\in \overline{\mathcal{M}}$ a E $\subset X$. Potom
$$\overline{\mu}(E) = \overline{\mu}(E \cap A) + \overline{\mu}(E \cap A^c) = \overline{\mu}(E \cap A \cap B) + \overline{\mu}(E \cap A \cap B^c) + \overline{\mu}(E \cap A^c \cap B) + \overline{\mu}(E \cap A^c \cap B^c).$$
Jelikož $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$, vyplývá ze subaditivity $\overline{\mu}$
$$\overline{\mu}(E \cap A \cap B) + \overline{\mu}(E \cap A \cap B^c) + \overline{\mu}(E \cap A^c \cap B) \geq \overline{\mu}(E \cap (A \cup B))$$
$$\begin{aligned} \overline{\mu}(A \cup B) &\geq \overline{\mu}(E \cap (A \cup B)) + \overline{\mu}(E \cap A^c \cap B^c) \\ &= \overline{\mu}(E \cap (A \cup B)) + \overline{\mu}(E \cap (A \cup B)^c). \end{aligned}$$
To znamená, že $A \cup B \in \overline{\mathcal{M}}$ a tudíž je $\overline{\mathcal{M}}$ algebra. Navíc je-li $A \cap B = \emptyset$, pak
$$\overline{\mu}(A \cup B) = \overline{\mu}((A \cup B) \cap A) + \overline{\mu}((A \cup B) \cap A^c) = \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B),$$
neboli $\overline{\mu}$ je aditivní na algebře $\overline{\mathcal{M}}$.

2.) Ukážeme, že $\overline{\mathcal{M}}$ je uzavřená na spočetná sjednocení po dvou disjunktních množin a tudíž je σ-algebra. Nechť $\{A_n\}_{i=1}^{\infty} \subset \overline{\mathcal{M}}$ posloupnost po dvou disjunktních množin a ozačíme:

$$B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k \qquad a \qquad B := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Potom pro libovolné $E \subset X$ a $n \geq 2$ platí

$$\overline{\mu}(E \cap B_n) = \overline{\mu}(E \cap B_n \cap A_n) + \overline{\mu}(E \cap B_n \cap A_n^c) = \overline{\mu}(E \cap A_n) + \overline{\mu}(E \cap B_{n-1}),$$

z čehož indukcí vyplývá, že

$$\overline{\mu}(E \cap B_n) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu}(E \cap A_k)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Protože $B_n \in \overline{\mathcal{M}}$ dostáváme z monotonie $\overline{\mu}$, že

$$\overline{\mu}(E) = \overline{\mu}(E \cap B_n) + \overline{\mu}(E \cap B_n^c) \geq \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu}(E \cap A_k) + \overline{\mu}(E \cap B^c)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pošleme-li $n \to +\infty$, dostaneme

$$\overline{\mu}(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu}(E \cap A_k) + \overline{\mu}(E \cap B^c) \geq \overline{\mu}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E \cap A_k\Big) + \overline{\mu}(E \cap B^c) = \overline{\mu}(E \cap B) + \overline{\mu}(E \cap B^c) \geq \overline{\mu}(E).$$

Z toho plyne, že $B \in \overline{\mathcal{M}}$, a tedy $\overline{\mathcal{M}}$ je σ-algebra. Navíc platí

$$\overline{\mu}(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu}(E \cap A_k) + \overline{\mu}(E \cap B^c)$$

pro každé $E \subset X$. Pokud položíme $E = B$, pak

$$\overline{\mu}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \overline{\mu}(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu}(B \cup A_k) + \overline{\mu}(B \cap B^c) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_k).$$

To znamená, že $\overline{\mu}$ je σ-aditivní na $\overline{\mathcal{M}}$, a proto je $\mu := \overline{\mu} \restriction \overline{\mathcal{M}}$ míra.

3.) Zbývá dokázat, že μ je úplná míra. Předpokládejme, že $A \in \overline{\mathcal{M}}$ taková, že $\mu(A) = 0$, Buď $B \subset A$, potom je $\overline{\mu}(B) \leq \overline{\mu}(A) = \mu(A)$, tedy $\overline{\mu}(B) = 0$, Dále pro libovolné $E \subset X$ vyplývá z vlastností vnější míry $\overline{\mu}$, že

$$\overline{\mu}(E) \leq \overline{\mu}(E \cap B) + \overline{\mu}(E \cap B^c) \leq \overline{\mu}(B) + \overline{\mu}(E \cap B^c) = \overline{\mu}(E \cap B^c) \leq \overline{\mu}(E),$$

z čehož plyne, že $B \in \overline{\mathcal{M}}$.

□

Definice 45. Nechť (X, ρ) metrický prostor s vnější mírou $\overline{\mu}$. Řekneme, že $\overline{\mu}$ je metrická vnější míra, právě když

$$\overline{\mu}(A \cup B) = \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$$

pro všechny $A, B \subset S$, splňující $\mathrm{d}(A, B) > 0$.

V některých případech konstrukce vnější míry metodou I neposkytuje míru, která dokáže měřit otevřené množiny, příklady těchcto případů lze nalézt například v [1]. Existuje však alternativní konstrukce, která vychází z metody I, která tento problém řeší.

Věta 46 (Metoda II)**.** *Nechť (S,ρ) metrický prostor, $\mathcal{A} \subset 2^S$, $\phi : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ dále předpokládejme, že*

$$(\forall x \in S)(\forall \epsilon > 0)(\exists A \in \mathcal{A}, x \in A \wedge \operatorname{diam} A \leq \epsilon),$$

definujme pro všechna $\epsilon > 0$

$$\mathcal{A}_\epsilon := \{A \in \mathcal{A} \mid diamA \leq \epsilon\}$$

a označme $\overline{\mu}_\epsilon$ vnější míru zadanou funkcí ϕ na $\mathcal{A}_\epsilon$ pomocí Metody I 42. Potom

$$\overline{\mu}(E) := \lim_{\epsilon \to 0} \overline{\mu}_\epsilon$$

je metrická vnější míra na S.

Důkaz.

1. Ověříme, že $\overline{\mu}$ splňuje definici 40:
   (a) první bod je triviální, jelikož $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$
   (b) body 2) a 3) platí jelikož je splňuje $\overline{\mu}_\epsilon$ a provedeme limitní přechod pro $\epsilon \to 0$.
2. Nechť $A, B \subset S, \mathrm{d}(A,B) > 0$, jelikož $\overline{\mu}$ je vnější míra, tak platí $\overline{\mu}(A \cup B) \leq \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$. Zbývá dokázat opačnou nerovnost. Buď $\epsilon > 0$ tak , že $\epsilon < \operatorname{dist}(A,B)$ a $\mathcal{D}$ nějaké spočetné pokrytí $A \cup B$ množinami z $\mathcal{A}_\epsilon$. Jelikož množiny $D \in \mathcal{D}$ mají průměr menší než $\mathrm{d}(A,B)$, tak má D neprázdný průnik nejvýše s jednou z množin A, B, tudíž můžeme $\mathcal{D}$ rozdělit na dvě disjuktní pokrytí $\mathcal{D}_1$ pokrývající A a $\mathcal{D}_2$ pokrývající B, pak

$$\sum_{D \in \mathcal{D}} \rho(D) = \sum_{D \in \mathcal{D}_1} \rho(D) + \sum_{D \in \mathcal{D}_2} \rho(D) \geq \overline{\mu}_\epsilon(A) + \overline{\mu}_\epsilon(B).$$

   Pokud vezmeme infimum přes všechna pokrytí dostáváme $\overline{\mu}_\epsilon(A \cup B) \geq \overline{\mu}_\epsilon(A) + \overline{\mu}_\epsilon(B)$, následně provedeme limitní přechod $\epsilon \to 0$ a dostáváme $\overline{\mu}(A \cup B) \geq \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$.

□

Kapitola 3

Dimenze

Jak už bylo v úvodu zmíněno, tak nejvhodnější definice fraktálu je množina, která má vyšší Hausdorffovu dimenzi, než topologickou dimenzi. V této části se zaměříme na jejich definice, konstrukci a jejich základní vlastnosti.

3.1 Topologická dimenze

Nejprve se blíže podíváme na topologickou dimenzi. V obecné topologii nefunguje pojem dimenze stejně jako například v lineární algebře, kde jsme zvyklí, že body mají dimenzi 0, křivky 1 atd. V topologických prostorech totiž musíme zkoumat i množiny, které neodpovídají žádnému z těchto označení. Existuje hned několik způsobů zavedení topologické dimenze, v této části se hlavně zaměříme na induktivní dimenze. Jak název napovídá jsou zaváděny induktivně, tedy zavede se dimenze prázdné množiny jako -1 a pak se postupuje přes všechna přirozená čísla až k nekonečnu. Více o induktivních dimenzích a topologických dimenzích lze nalézt například v [1], nebo [2].

3.1.1 Prostory dimenze nula

Jak již bylo zmíněno, abychom mohli studovat vyšší dimenze nejprve musíme zavést co to znamená, když má prostor dimenzi 0. Příkladem takové množiny je například Cantorovo diskontinuum, důkaz této vlastnosti lze nalézt například v [1]. V této části se omezíme pouze na separabilní metrické prostory, obecná tvrzení lze nalézt například v [1].

Definice 47. Buď S separabilní metrický prostor pak S má dimenzi 0, pokud existuje báze topologie $\mathcal{B}$ taková, že $(\forall B \in \mathcal{B})$(B je obojetná).

Tato definice, jak bude vidět v sekci o horní induktivní dimenzi, platí pro všechny topologické dimenze zmíněné v této práci.

Poznámka 48. Rozklad S tvořený obojetnými množinami je takové pokrytí S obojetnými množinami, které jsou disjunktní.

Věta 49. *Nechť S je separabilní metrický prostor, pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1. *S je prostor dimenze 0*

2. *Pokud* $\{U_1, \ldots, U_k\}$ *konečné otevřené pokrytí S, pak existují množiny* $B_1 \subset U_1, \ldots, B_k \subset U_k$ *tak, že* $\{B_1, \ldots, B_k\}$ *je rozklad S tvořený obojetnými množinami.*

3. *Pokud* $\{U, V\}$ *je otevřené pokrytí S, pak existují otevřené množiny* $A \subset U$ *a* $B \subset V$ *tak, že* $A \cup B = S$ *a* $A \cap B = \emptyset$*.*

4. *Pokud* $\{U, V\}$ *je otevřené pokrytí S, pak existují uzavřené množiny* $A \subset U$ *a* $B \subset V$ *tak, že* $A \cup B = S$ *a* $A \cap B = \emptyset$*.*

Důkaz. Je možno nalézt například v [1]. □

Věta 50. *Kompaktní metrický prostor S má dimenzi nula, právě když každé otevřené pokrytí má konečné podpokrytí, které je rozkladem S obojetnými množinami.*

Důkaz.

1. Nechť $\mathcal{B}$ je báze topologie na S tvořená obojetnými množinami a $\mathcal{A}$ libovolné pokrytí S. Pak pro každé $x \in S$ existuje $A \in \mathcal{A}$, které obsahuje x a zároveň $B \in \mathcal{B}$, pro které platí $x \in B \subset A$. Pro každé $x \in S$ zvolíme takové B a označíme B_x. Pak

$$\mathcal{A}_1 = \{B_x | \, x \in S\}$$

je otveřené pokrytí S. Jelikož S je kompaktní, tak existuje konečné podpokrytí S, které označíme $\mathcal{A}_2 = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$, nyní označme množiny

$$J_1 = B_1, J_2 = B_2 \setminus J_1, \ldots J_k = B_k \setminus J_{k-1}.$$

Pak $\mathcal{A}_3 = \{J_1, \ldots, J_k\}$ je pokrytí S obojetnými množinami, které jsou disjunktní, a tedy je rozkladem S tvořeným obojetnými množinami.

2. Naopak nechť $U \subset S$ je otevřená množina, $x_0 \in U$ a označme $r := \mathrm{d}(x_0, S \setminus U) > 0$. Pak S je pokryto množinami U a $V = \{x \in S | \rho(x, x_0) > r/2\}$. Z předpokladů můžeme nají rozklad S tvořený obojetnými množinami $\mathcal{A}$. Z toho už plyne existence báze tvořené obojetnými množinami.

□

Poznámka 51. Z důkazu výše plyne, že implikace zprava doleva platí i v obecných metrických prostorech.

Věta 52. *Nechť S je separabilní metrický prostor, pak S má dimenzi nula, právě když pro všechny uzavřené disjunktní množiny A,B existují obojetné množiny U a* $V := S \setminus U$ *tak, že* $U \supset A$ *a* $V \supset B$*.*

Důkaz.

1. Nechť S je prostor dimenze 0, A,B disjunktní uzavřené množiny. Pak jejich doplňky jsou otevřené. Jelikož $A \cap B = \emptyset$, pak $A^c \cup B^c = S$ a z bodu 3 věty 49 plyne, že existují otevřené množiny U$\subset B^c$ a V$\subset A^c$, $U \cup V$ = S, U∩V = ∅. Takže U,V jsou obojetné a $U \supset A$ a $V \supset B$.

2. naopak nechť $\{U_1, U_2\}$ otevřené pokrytí S. pak $A = S \setminus U_1, B = S \setminus U_2$ jsou disjunktní uzavřené množiny. Pak existují obojetné množiny U a V = S\V , U⊃B, V⊃A, a tedy V⊂ U_1 a U⊂ U_2. Tvrzení plyne opět z bodu 3 věty 49.

□

Věta 53. *Nechť S separabilní metrický prostor a pro všechna otevřená pokrytí S existuje konečné podpokrytí z disjunktních obojetných množin, pak S je prostor dimenze 0.*

Důkaz. Lze nalézt například v [1]. □

Věta 54. *Reálná osa* $\mathbb{R}$ *není prostor dimenze 0.*

Důkaz. Dokážeme, že jediné dvě obojetné množiny v $\mathbb{R}$ jsou $\emptyset$ a $\mathbb{R}$. Nechť $\emptyset \neq$ A $\subset \mathbb{R}$ je obojetná, zvolme c $\in \mathbb{R}$, pro spor přdpokládejme, že c $\notin$ A. Bez újmy na obeecnosti předpokládejme a<c a definujeme

$$S := \{x \in A | x < c\} = A \cap (-\infty, c).$$

Dále označme

$$y = \sup S.$$

Zřejmě y $\leq$ c. Protože c $\notin$ A, můžeme psát $S = A \cap (-\infty, c]$. Z čehož plyne, že S je uzavřená, jelikož A je uzavřená, proto y $\in \bar{S} = S$, neboli y <c. Jelikož A je i otevřená a y $\in$S$\subset$A, tak existuje ϵ tak, že $(y - \epsilon, y + \epsilon) \subset$ A. Pak ale prvek $z := y + \epsilon/2 \in A$. Což je spor s tím, že $y = \sup S$. Tím je věta dokázána. □

Důsledek 55. Nechť (a, b) interval, kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Pak (a, b) nemá dimenzi 0.

Poznámka 56. Všecny diskrétní metrické prostory mají dimenzi 0.

Důkaz. Nechť X je diskrétní metrický prostor, pak každá množina A$\subset$X je otevřená, jelikož každý bod leží v ní i s nějakým svým okolím. Pak tedy i $X \setminus A$ je otevřená. Pro každý bod můžeme vzít například okolí

$$H_x = \{y \in a \,|\, y < \min_{z \in A} \rho(x, z)/2\},$$

tedy každá podmnožina diskrétního prostoru je obojetná, což implikuje tvrzení. □

3.1.2 Dolní induktivní dimenze

První topologickou dimenzí, kterou si přestavíme je dolní induktivní dimenze, která se zakládá na bázi topologie.

Definice 57. Nechť S metrický prostor. Pak definujeme dolní induktivní dimenzi S následovně:

- $\operatorname{ind} S = -1$, jestliže S = $\emptyset$,
- $\operatorname{ind} S \leq$ k, jestliže $(\exists \mathcal{B}$ báze $S)(\forall B \in \mathcal{B})(\operatorname{ind} \partial B \leq k - 1)$,
- $\operatorname{ind} S = k$, jestliže $\operatorname{ind} S \leq k$ a $\operatorname{ind} S \not\leq k - 1$,
- $\operatorname{ind} S = \infty$, jestliže pro všechna k $\in \mathbb{N}$ platí $\operatorname{ind} S \not\leq k)$.

Následující věta nám říká, že na dolní induktivní dimenzi můžeme nahlížet jako na topologickou vlastnost.

Věta 58. *Buď S a T homeomorfní metrické prostory. Pak* $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$.

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí.

- Případ $S = \emptyset$ je triviální, jelikož pak i $T = \emptyset$.

- Předpokládejme, že věta platí pro $\operatorname{ind} S < k$. Vezměme prostor S, pro který platí $\operatorname{ind} S = k+1$, a homeomorfismus h: $S \to T$. Z definice existuje báze $\mathcal{B}$ prostoru S, pro kterou platí $\forall B \in \mathcal{B}$, $\operatorname{ind} \partial B \leq k$. Pak
$$\{h[B| B \in \mathcal{B}]\}$$
je báze topologie na T a platí $h[\partial B] = \partial h[B]$. Z indukčního předpokladu víme, že
$$\operatorname{ind} \partial h[B] = \operatorname{ind} \partial B \leq k.$$
Tedy báze T je tvořena množinami, jejichž dimenze hranice je menší, nebo rovna k. Z matematické indukce pak plyne tvrzení pro všechna $k < \infty$.

- Pokud $\operatorname{ind} S = \infty$, pak $\operatorname{ind} T \neq k$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, takže $\operatorname{ind} T = \infty$.

□

Věta 59. *Nechť S metrický prostor a $T \subset S$. Pak* $\operatorname{ind} S \leq \operatorname{ind} T$.

Poznámka 60. Pomocné tvrzení : $T \subset S$, $U \subset S$, pak $\operatorname{ind} \partial_T U \leq \operatorname{ind} \partial_S \tilde{U} \leq k$. je zde bráno jako fakt, důkaz lze nalézt například ve 2. kapitole [1].

Důkaz. Tvrzení je triviální pro $\operatorname{ind} S = \infty$, takže předpokládejme $\operatorname{ind} S < \infty$. Budeme opět dokazovat indukcí:

- Pokud $S = \emptyset$, pak jediná podmnožina prázdné množiny je prázdná, a tedy $\operatorname{ind} S \leq \operatorname{ind} T$.

- Předpokládejme, že tvrzení platí pro $\operatorname{ind} S \leq k$ a vezměme S tak, že $\operatorname{ind} S = k+1$ a $T \subset S$. Zvolme bod $x \in T$ a V oteřenou množinu v T tak, že $x \in V \subset T$. Jelikož V je otevřená v T, pak existuje i $\tilde{V}$ tak, že $V = \tilde{V} \cap T$. Jelikož $\operatorname{ind} S = k+1$, tak existuje otevřená množina v S $\tilde{U} \subset \tilde{V}$, která obsahuje x, označme $U = \tilde{U} \cap T$, $\operatorname{ind} \partial_S \tilde{U} \leq k$. Pak U je otevřená v T a $x \in U \subset V$. Dále víme, že $\partial_T U \subset \partial_S \tilde{U}$, Z indukčního předpokladu
$$\operatorname{ind} \partial_T U \leq \operatorname{ind} \partial_S \tilde{U} \leq k,$$
a tedy existuje báze T z množin U tak, že $\operatorname{ind} \partial_T U \leq k$, a tedy $\operatorname{ind} T \leq k + 1$.

□

Příkald 61. Dolní induktivní dimenze $\mathbb{R} = 1$.

Báze $\mathbb{R}$ je tvořena všemi reálnými intervaly, vezměme například otevřený interval (a,b), pak $\partial(a, b) = \{a, b\}$. Z poznámky 56 víme, že pro $X = \{a, b\}$, $\operatorname{ind} X = 0$. Z definice pak $\operatorname{ind} \mathbb{R} \leq 1$ a z věty 54 plyne, že $\operatorname{ind} \mathbb{R} = 1$.

3.1.3 Horní induktivní dimenze

Dále se podíváme na horní induktivní dimenzi, někdy také Čechova dimenze, která se zakládá na oddělování množin. Nejprve definujeme, co je oddělující množina.

Definice 62. Buď A, B disjunktní podmnožiny metrického prostoru S. Řekneme, že množina L *odděluje* A a B, jestliže
$$(\exists H_A, H_B \text{ otevřená okolí A,B })(L = S \setminus (H_A \cup H_B)).$$

Definice 63. Nechť S metrický prostor. Pak definujeme horní induktivní dimenzi S, $\operatorname{Ind} S = n \in \mathbb{N}_0$ tak, že:

- $\operatorname{Ind} S = -1$, jestliže S = $\emptyset$,
- $\operatorname{Ind} S \leq$ k, jestliže ($\forall A, B$ disjunktní uzavřené podmnožiny S)($\exists L$ oddělující A,B)($\operatorname{Ind} L \leq k-1$),
- $\operatorname{Ind} S = k$, jestliže $\operatorname{Ind} S \leq k$ a $\operatorname{Ind} S \nleq k-1$,
- $\operatorname{Ind} S = \infty$, jestliže pro všechna k $\in \mathbb{N}$ platí $\operatorname{Ind} S \nleq k$).

Nyní se zaměřme na vztahy mezi dolní a horní induktivní dimenzí. Jak je z názvů patrné, tak obecně platí, že horní induktivní dimenze je menší než dolní induktivní dimenze.

Věta 64. *Buď S metrický prstor. Pak* $\operatorname{ind} S \leq \operatorname{Ind} S$.

Důkaz. Nechť S je metrický prostor s $\operatorname{Ind} S = k$. K důkazu použijeme matematickou indukci v k.

- Pro $S = \emptyset$ je tvrzení zřejmé z definic.
- Nechť tedy tvrzení platí pro všechny metrické prostory, které mají $\operatorname{Ind} S < k$. Vezměme libovolný bod množiny S, ozn. x a uzavřenou množinu $A \subset S$ tak, že $x \notin A$. Pak existují okolí H_x a H_A, které odděluje množina L a platí $\operatorname{Ind} L \leq k-1$. Zároveň však
$$\partial H_x \subset L,$$
a tedy z indukčního předpokladu $\operatorname{ind} H_x \leq \operatorname{ind} L \leq \operatorname{Ind} L \leq k-1$. Tento postup zopakujeme pro všechna $x \in S$ a všechny množiny $A \subset S$, $x \notin A$ získáme soubor okolí bodů, které označíme $\mathcal{B}$.
- ověříme, že $\mathcal{B}$ je báze. Určitě platí
$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = S.$$
Ověříme tedy pouze podmínku
$$(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B})(B_1 \cup B_2 \neq \emptyset)(\exists B_3 \in \mathcal{B})(B_3 \subset B_1 \cap B_2).$$
Zvolme tedy B_1 a B_2, $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Dále zvolme bod $x \in B_1 \cap B_2$ a množinu $A = S \setminus B_1 \cap B_2$. Nyní stačí zopakovat postup z již dokázaného bodu 2. Tvrzení je tímto dokázané.

□

V kapitole o prostorech dimenze 0 bylo zmíněno, že dimenzi nula můžeme definovat stejně pro horní i pro dolní induktivní dimenzi, toto tvrzení obhajuje následující věta.

Věta 65. *Nechť S je separabilní metrický prostor. Pak* $\operatorname{ind} S = 0$, *právě když* $\operatorname{Ind} S = 0$

K důkazu potřebujeme následující lemma:

Lemma 66. *Nechť S separabilní metrický prostor, pak*

$$\operatorname{ind} S = 0 \implies (\forall A, B \subset S \text{ disjunktní})(\exists H_A, H_B)(H_A \cap H_B = 0 \wedge H_A \cup H_B = S).$$

Důkaz. Nechť tedy $\operatorname{ind} S = 0$, A,B disjuntkní množiny v S , pak z definice existuje $\mathcal{B}$ báze topologie tvořená otevřenými množinami. Mohou nastat následující 3 možnosti:

1. $x \in S \setminus B \implies (\exists U(x) \in \mathcal{B})(x \in U(x) \subset X \setminus B)$
2. $x \in S \setminus A \implies (\exists U(x) \in \mathcal{B})(x \in U(x) \subset X \setminus A)$
3. $x \in S \setminus A \cup B \implies (\exists U(x) \in \mathcal{B})(x \in U(x) \subset X \setminus A \cup B)$

Celkem dostáváme, že pro všechna x v S existuje množina U(x) z báze $\mathcal{B}$ tak, že $U(x) \cap A = \emptyset$, nebo $U(x) \cap B = \emptyset$. Pak systém $\{U(x)\}_{x \in S}$ pokrývá S a jelikož S je separabilní, tak existuje spočetné podpokrytí $\{U(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dále označme množiny

$$V_1 = U(x_1),\ V_2 = U(x_2) \setminus V_1,\ V_3 = U(x_3) \setminus V_1 \cup V_3,\ \ldots V_k = U(x_k) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} V_j,\ \ldots .$$

Pak $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pokrývá S a obsahuje po dvou disjunktní množiny. Nakonec definujeme

$$H_A := \bigcup_{V_n \cap B = \emptyset} V_n \text{ a } H_B := \bigcup_{V_n \cap A = \emptyset} V_n,$$

pro které platí $H_A \cap H_B = \emptyset$, $B \subset H_B$, $A \subset H_A$ a $H_A \cup H_B \supset S$. □

Důkaz. Nyní dokážeme původní tvrzení.

- Nechť $\operatorname{ind} S = 0$, pak platí

$$(\forall A, B \subset S \textit{ disjunktní })(\exists H_A, H_B)(H_A \cap H_B = 0 \wedge H_A \cup H_B = S),$$

  z čehož plyne $L = S \setminus H_A \cup H_B = \emptyset$, a tedy $\operatorname{Ind} S \le 0$, jelikož S je neprázdná množina, tak $\operatorname{Ind} S = 0$.

- Naopak, nechť $\operatorname{Ind} S = 0$, pak zřejmě $S \neq \emptyset$ a z věty 64 plyne $\operatorname{ind} S = 0$.

□

Poznámka 67. Všimněme si v lemmatu 66, že parvá strana implikuje, že S není souvislý. Což ekvivalentně znamená, že pokud separabilní prostor S není souvislý, pak nemá dimenzi 0.

3.1.4 Sumační věty

V této části se zaměříme na vlastnosti induktivních dimenzí ve vztahu ke sjednocení množin.

Lemma 68. *Buď S metrický prostor, A a B disjunktní uzavřené množiny a $T \subset S$.*

(a) Nechť U a V otevřené množiny, $U \supset A$, $V \supset B$ a $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Pokud $\tilde{L} \subset T$ odděluje v T množiny $T \cap \overline{U}$ a $T \cap \overline{V}$. Pak existuje množina $L \subset S$, která odděluje A a B v S a platí $L \cap T \subset \tilde{L}$.

(b) Nechť navíc T je uzavřená. Pak pro každou množinu $\tilde{L} \subset T$ oddělující $T \cap A$ a $T \cap B$ v T existuje $L \subset S$ oddělující A a B v S a platí $L \cap T \subset \tilde{L}$.

Důkaz. (a) Nechť $\tilde{L}$ odděluje $T \cap \overline{U}$ a $t \cap \overline{V}$, pak $T \setminus \tilde{L} = \tilde{U} \cap \tilde{V}$, kde $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ otevřené v T a

$$\tilde{U} \supset T \cap \overline{U},\ \tilde{V} \supset T \cap \overline{V}.$$

Platí, že $A \cap \overline{\tilde{V}} = \emptyset$. Skutečně

$$U \cap \tilde{V} = T \cap U \cap \tilde{v} \subset \tilde{U} \cap \tilde{V}$$

a jelikož U je otevřená, tak

$$U \cap \overline{\tilde{V}} = \emptyset,$$

z čehož plyne $A \cap \overline{\tilde{V}} = \emptyset$. Obdobně se ukáže $A \cap \overline{\tilde{V}} = \emptyset$. Pak ale $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ jsou disjunktní a otevřené v $\tilde{U} \cup \tilde{V}$, a tedy

$$\tilde{U} \cap \overline{\tilde{V}} = \emptyset \text{ a } \tilde{V} \cap \overline{\tilde{U}} = \emptyset.$$

Z čehož dostáváme

$$\begin{aligned}(A \cup \tilde{U}) \cap \overline{(B \cup \tilde{V})} &= (A \cup \tilde{U}) \cap (\overline{B} \cup \overline{\tilde{V}}) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap \overline{\tilde{V}}) \cup (\tilde{U} \cap B) \cup (\tilde{U} \cap \overline{\tilde{V}}) \\ &= \emptyset,\end{aligned}$$

obdobně $\overline{(A \cup \tilde{U})} \cap (B \cup \tilde{V}) = \emptyset$. Díky tomu však musí existovat disjunktní otevřené množiny $\hat{U}\hat{V}$, pro které platí $A \cup \tilde{U} \subset \hat{U}$ a $B \cup \tilde{V} \subset \hat{V}$. Pak označme množinu $L = S \setminus (\hat{U} \cup \hat{V})$ oddělující A,B, navíc

$$T \cap L = T \setminus (\hat{U} \cup \hat{V}) \subset T \setminus (\tilde{U} \cup \tilde{V}) = \tilde{L}.$$

(b) Jelikož $\tilde{L}$ odděluje $T \cap A$ a $T \cap B$ v T, tak existují disjunktní množiny $\tilde{U}$ a $\tilde{V}$ otevřené v T a platí

$$T \cap A \subset \tilde{U},\ T \cap B \subset \tilde{V} \text{ a } T \setminus (\tilde{U} \cup \tilde{V}) = \tilde{L}.$$

Z toho plyne, že množiny A a $(T \setminus \tilde{U}) \cup B$ jsou disjunktní a uzavřené, takže existuje otevřená množina $\hat{U}$ tak, že

$$A \subset \hat{U} \subset \overline{\hat{U}} \subset S \setminus ((T \setminus \tilde{U}) \cup B).$$

Obdobně pro B a $(T \setminus \tilde{V}) \cup \overline{\hat{U}}$ nalezneme otevřenou množinu $\hat{V}$. A tedy získáváme $A \subset \hat{U}$, $B \subset \hat{V}$ a $\overline{\hat{U}} \cap \overline{\hat{V}} = \emptyset$. Nakonec stačí použít již dokázané tvrzení (a).

□

Poznámka 69. Nechť S separabilní metrický prostor, A,B disjunktní uzavřené množiny v S a $T \subset S$ s $\operatorname{ind} T = 0$. Pak existuje množina L, která odděluje A a B v S tak, že $L \cap T = \emptyset$.

Důkaz. Zvolme množiny U a V tak, že $A \subset U$, $B \subset V$ a $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Množiny $\overline{U} \cap T$ a $\overline{V} \cap T$ jsou uzavřené a disjunktní v T, které má dimenzi 0, tudíš jou odděleny prázdnou množinou. Nyní stačí použít lemma výše a získáme množinu L oddělující A a B, navíc$L \cap T \subset \emptyset$. □

Věta 70. *Buď S separabilní metrický prostor a nechť $A, B \subset S$. Pak $\in (A \cup B) \leq 1 + \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B$.*

Důkaz. Pokud $\operatorname{ind} A = +\infty$, nebo $\operatorname{ind} B = +\infty$, pak je tvrzení zřejmé. Nechť tedy $\operatorname{ind} A = m < +\infty$ a $\operatorname{ind} B = n < +\infty$. Dále budeme pokračovat indukcí v m + n.

- Pokud m + n = -2, pak obě množiny jsou prázdné, a tedy i $A \cup B$ je prázdná a $\operatorname{ind}(A \cup B) = -1 = 1 + (-1) + (-1)$.
- Předpokládejme, že známe výsledek pro menší sumy. Nechť $x \in A \cup B$. Pak buď $x \in A$, nebo $x \in B$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $x \in A$. Nechť V je otevřená množina v $A \cup B$ a $x \in V$, pak množiny $\{x\}$ a $A \setminus V$ jsou odděleny v A množinou $\tilde{L}$ s $\operatorname{ind} \tilde{L} \leq m - 1$. Takže z lemmatu 68 plyne, že existuje množina L, která odděluje$\{x\}$ a $(A \cup B) \setminus V$ v $A \cup B$ a $L \cap A \subset \tilde{L}$. Jelikož $L = (L \cap A) \cup (L \cap B)$, tak z indukčního předpokladu $\operatorname{ind} L \leq 1 + (m - 1) + n$, a tedy jsme ukázali, že $\operatorname{ind}(A \cup B) \leq 1 + m + n$.

$\square$

Důsledek 71. Sjednocení n+1 množin dimenze nula v separabilním metrickém prostoru má dolní induktivní dimenzi menší, nebo rovnu n.

Lemma 72. *Nechť S je separabilní metrický prostor a* $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ *soubor uzavřených podmnožin v S. Pak*

$$\operatorname{ind} T_n = 0 \implies \operatorname{ind} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n = 0.$$

Důkaz. K důkazu použijeme větu 52.

- Nechť tedy A,B jsou uzavřené disjunktní podmnožiny T_1 a
  $\operatorname{ind} T_1 = 0$, pak $(\exists A_1$ obojetná v $T_1)(A_1 \supset A \wedge T_1 \setminus A_1 \supset B)$. Pak množiny $A \cup A_1$ a $B \cup (T_1 \setminus A_1)$ jsou disjunktní a uzavřené. Pak

  $$(\exists U_1, V_1 \subset S \text{ otevřené, } \overline{U_1} \cap \overline{V_1} = \emptyset)(A \cup A_1 \subset U_1 \wedge F \cup (T_1 \setminus A_1) \subset V_1).$$

- Dále nechť $\operatorname{ind} T_2 = 0$. Pak $(\exists A_2$ obojetná v $T_2)(\overline{U_1} \cup A_1 \subset U_2 \wedge B \cup (T_1 \setminus A_1) \subset V_2)$.

- Obdobně pokračujeme pro další $n \in \mathbb{N}$ a dostáváme posloupnosti $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definujeme $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, $V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Pak U,V jsou disjunktní otevřené množiny $A \subset U$ a $B \subset V$, zároveň však paltí $(U_n \cup V_n) \cap T_n = T_n$, z čehož plyne $T \subset (U \cup V)$. Pak ale oddělující množina $L = T \setminus (U \cup V) \cup T = \emptyset$. A tedy $\operatorname{Ind} T = \operatorname{ind} T = 0$. $\square$

Věta 73. *Nechť* $k \in \mathbb{N}_0$ *a S je separabilní metrický prostor. Dále nechť uzavřené množiny* $T_n \subset S$ *splňují* $\operatorname{ind} T_n \le k$ *pro* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *. Pak*

$$\operatorname{ind} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n \le k.$$

Důkaz. Označme $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$. Tvrzení je zřejmé pro k = +∞. Předpokládejme tedy, že k je konečné. Důkaz provedeme indukcí v k.

- Případ k = 0 byl dokázán v předchozím lemmatu.

- Předpokládejme tedy $k \ge 1$ a tvrzní platí pro menší hodnoty. Platí tedy:

  $$(\forall n \in N)(\exists \mathcal{B}_n \text{ báze na } \tau(T_N))(\forall B \in \mathcal{B}_n)(\operatorname{ind} \partial_{T_n} B \le k-1).$$

  Z indukčního předpokladu víme, že

  $$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{B\in\mathcal{B}_n} \partial_{T_n} B$$

  má také $\operatorname{ind} Y \le k-1$. Dále označíme $Z_n = T_n \setminus Y$, který má bázi topologie $\{B \setminus Y \,|\, B \in \mathcal{B}_n\}$. Množiny $B \setminus Y$ jsou otevřené v Z_n, jelikož $B \setminus Y = B \cap (T_n \setminus Y) = B \cap Z$.
  Abychom dokázali, že jsou i uzavřené definujme $V := Z_n \setminus (B \setminus Y) \subset Z_n$ a vezměme $x \in Z_n$, platí

  $$x \in T_n,\ x \notin Y,\ x \notin B,$$

  a tedy $x \notin \partial_{T_n} B$. Potom však $(\exists H_x(\epsilon))(H_x(\epsilon) \cap U = \emptyset)$. Pak $H := H_x(\epsilon) \cap Z_n$ je otevřená množina v Z_n, a zároveň $H \cap (B \setminus Y) = \emptyset$. Z tohoplyne, že V je otevřená v Z_n, a tedy $B \setminus Y$ je uzavřená v Z_n. Báze Y je tedy tvořena obojetnými množinami, což z definice znamená, že $\operatorname{ind} Z_n \leq 0$.Dále definujeme množinu

$$Z := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n.$$

Každá z množin Z_n je uzavřená v Z, a tedy $\operatorname{ind} Z \leq 0$. Nakonec z věty 70 dostáváme

$$\operatorname{ind} T = \operatorname{ind}(Y \cup Z) \leq 1 + (k-1) + 0 = k.$$

□

Důsledek 74. Buď S separabilní metrický prostor s konečnou dolní induktivní dimenzí. Pak je S sjednocením k+1 množin dimenze 0.

Věta 75. *Buď S separabilní metrický prostor, A,B disjunktní uzavřené podmnožiny S. Dále nechť $T \subset S$ má dolní induktivní dimenzi $k \geq 0$. Pak existuje množina L oddělující A a B a platí*

$$\operatorname{ind}(T \cap L) \leq k - 1.$$

Důkaz. Případ $k = 0$ byl dokázán v poznámce 69. Předpokládejme tedy $k \geq 1$. Z předchozího výsledku můžeme T zapsat jako $T = Y \cup Z$, kde $\operatorname{ind} Y = k - 1$ a $\operatorname{ind} Z = 0$. Nyní opět z poznámky 69 získáme množinu L oddělující A a B a platí $L \cap Z = \emptyset$, $L \cap Z \subset Y$. Získáváme tedy $\operatorname{ind}(L \cap T) \leq \operatorname{ind} Y \leq k - 1$. □

3.1.5 Ekvivalence induktivních dimenzí

Již bylo zmíněno v první kapitole, že existuje několik různých definic topologické definice. Velmi používaná je také (Lebesgueova) pokrývací dimenze.

Definice 76. Nechť S metrický prostor, pak definujeme pokrývací dimenzi prostoru S, značíme $\operatorname{Cov} S$, tak, že:

- $\operatorname{Cov} S = -1$, pokud $S = \emptyset$,
- $\operatorname{Cov} S \leq n$, pokud každé konečné pokrytí má konečné podpokrytí řádu menšího, nebo rovo n,
- $\operatorname{Cov} S = n$, pokud $\operatorname{Cov} S \leq n$ a $\operatorname{Cov} S \nleq n - 1$,
- $\operatorname{Cov} S = +\infty$, pokud pro všechna $n = -1, 0, 1, \ldots$ platí $\operatorname{Cov} S \nleq n$.

Více o pokrývací dimenzi lze nalézt například v [1], nebo [2].
Rovnost induktivních dimenzí pro dimenzi 0 jsme již dokázali dříve, teď by nás však zajímalo, zdali v nějakém speciálním případě platí i pro vícedimenzionální prostory. Odpověď na tuto otázku dávají následující věty.

Věta 77. *Nechť S je separabilní metrický prostor. Pak* $\operatorname{Ind} S \leq \operatorname{ind} S$.

Důkaz. Důkaz je zřejmý pro $\operatorname{ind} S = \infty$. Předpokládejme tedy $\operatorname{ind} S \geq 1$ konečné, jelikož případ $\operatorname{ind} S = 0$ byl dokázán ve větě 65. Budeme pokračovat matematickou indukcí v k. Nechť tedy tvrzení platí pro $\operatorname{ind} S \leq k - 1$ a předpokládejme $\operatorname{ind} S = k$. Nechť A, B disjunktní uzavřené množiny v S. Pak z věty 75 nalezne množinu L, $\operatorname{ind} L = k - 1$ oddělující množiny A,B. Z indukčního předpokladu platí

$$\operatorname{Ind} L \leq k - 1$$

a z definice $\operatorname{Ind} S \leq k$, což dokazuje tvrzení. □

Věta 78. *Nechť S separabilní metrický prostor, pak* $\operatorname{ind} S = \operatorname{Ind} S$.

Důkaz. Věta je přímým důsledkem vět 64 a 77. □

Věta 79. *Buď S separabilní metrický prostor, pak:*

- $\operatorname{Cov} S \leq \operatorname{ind} S$.
- *Pokud navíc je S kompaktní. Pak* $\operatorname{ind} S = \operatorname{Ind} S = \operatorname{Cov} S$.

Důkaz. naleznete například v [1]. □

Tato věta je pro nás důležitá, jelikož budeme pracovat výhradně s kompaktními množinami, a tedy můžeme dále používat libovolnou ze tří uvedených definic topologické dimenze.

3.2 Hausdorffova dimenze

Druhý pojem z Mandelbrotovy definice fraktálních množin, který je třeba zavést je Hausdorffova dimenze.

3.2.1 Hausdorffova míra

Jak později uvidíme, tak Hausdorffova dimenze stojí na Hausdorffově míře, kterou definujeme následovně.

Definice 80. Buď S metrický prostor a $s > 0$. Pak vnější míru vytvořenou podle Metody II 46, definovanou pomocí množinové funkce

$$c_s = (\operatorname{diam} A)^s,$$

nazveme s-dimenzionální Hausdorffova vnější míra a značíme ji $\overline{\mathcal{H}}^s$.

Z této definice je zřejmé, že pro obecnou množinu je složité získat její Hausdorffovu dimenzi. V další kapitola však ukážeme, že to jde velmi snadno pro množiny, které mají vlastnost soběpodobnosti.

Poznámka 81. Pro prostory dimenze nula použijeme funkci $c_0(A) = 1$ pro A neprázdné a $c_0(\emptyset) = 0$.

Věta 82. *V metrickém prostoru* $\mathbb{R}$ *se jednodimenzionální Hausdorffova míra shoduje s Lebesgueovou mírou.*

Důkaz.

- Pokud $A \subset \mathbb{R}$ má konečný průměr r, pak $\sup A - \inf A = r$, a tedy je obsažena v uzavřeném intervalu $\mathcal{I}$ délky r a pro Lebesgueovu míru platí

$$\mathcal{L}(A) \leq \mathcal{L}(\mathcal{I}) = r.$$

Z konstrukce Metodou I 42 pro $\overline{\mathcal{H}}^1_\epsilon$ plyne, že míra $\overline{\mathcal{H}}^1_\epsilon$ je největší vnější míra splňující

$$\overline{\mathcal{M}}(A) \leq \operatorname{diam} A$$

pro všechny množiny A s průměrem menším, než ϵ. Tedy $\overline{\mathcal{H}}^1_\epsilon(F) \geq \overline{\mathcal{L}}(F)$ pro všechna $F \subset \mathbb{R}$. Tudíž i $\overline{\mathcal{H}}^1(F) \geq \overline{\mathcal{L}}(F)$.

- Pokud $[a, b)$ je polouzavřený interval a $\epsilon > 0$,pak můžeme najít body

$$a = x_0 < x_1 < x_2, \dots, x_n = b, \text{ kde } x_j - x_{j-1} < \epsilon, \forall j \in \hat{n}.$$

Interval $[a, b)$ je tedy pokrytý intervaly $[x_j, x_{j-1}]$, navíc platí

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{diam}[x_{j-1} - x_j] = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = b - a.$$

Tudíž $\overline{\mathcal{H}}^1_\epsilon([a, b)) \leq b - a$. Z Metody I 42, tentokrát pro vnější míru $\overline{\mathcal{L}}$, plyne, že $\overline{\mathcal{L}}$ je největší vnější míra taková, že $\overline{\mathcal{L}}([a, b)) \leq b - a$ pro všechny polouzavřené intervaly v $\mathbb{R}$. Tedy $\overline{\mathcal{L}}(F) \geq \overline{\mathcal{H}}^1(F)$, $\forall F \subset \mathbb{R}$. Jelikož se vnější míry $\overline{\mathcal{L}}$ a $\overline{\mathcal{H}}^1$ shodují, tak se shodují i míry $\mathcal{L}$ a $\mathcal{H}^1$.

□

Věta 83. *Buď S metrický prostor dimenze 0 a $A \subset S$. Pokud A má konečně mnoho prvků, pak $\overline{\mathcal{H}}^0(A) = n$, pokud A je nekonečná, pak $\overline{\mathcal{H}}^0(A) = +\infty$.*

Důkaz. Budeme postupovat podle konstrukce Metodou II. Nechť tedy S je metrický prostor dimenze 0, $A \subset S$ a $\mathcal{B} \subset 2^S$, definujeme pro všechna ϵ ϵ-pokrytí

$$\mathcal{B}_\epsilon = \{B \in \mathcal{B} \mid \mathrm{diam}\, B \leq \epsilon\}.$$

Pak

$$\overline{\mathcal{H}}^0(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \inf \sum_{B \in \mathcal{B}} c_0(B).$$

1. Pokud má A konečně mnoho prvků, pak od jistého ϵ bude každá množina v $\mathcal{B}_\epsilon$ nejvýše jednobodová. Pak tedy $\overline{\mathcal{H}}^0(S) = |A|$
2. Pokud má A spočetně mnoho prvků, pak od jistého ϵ obsahují množiny z $\mathcal{B}_\epsilon$ konečný počet prvků, a tedy $\overline{\mathcal{H}}^0(A) = +\infty$.
3. Pro případ, že A má nespočetně mnoho prvků, tak z ní vybereme spočetnou podmnožinu a použijeme na ni dokázaný bod 2. Tvrzení pak plyne z monotonie vnější míry.

□

Věta 84. *Nechť S je metrický prostor, $F \subset S$ a $s > 0$. Pokud F je konečná, pak $\overline{\mathcal{H}}^s(F) = 0$.*

Důkaz. Jelikož F je konečná pak od jistého $\epsilon > 0$ bude pokrytí množiny F $\mathcal{A}_\epsilon$ obsahovat pouze jednobodové množiny, a tedy $\mathrm{diam}\, A = 0$, $\forall A \in \mathcal{A}_\epsilon$. Z toho plyne

$$\overline{\mathcal{H}}^s(F) = \lim_{\epsilon \to 0} \inf \sum_{A \in \mathcal{A}_\epsilon} (\mathrm{diam}\, A)^s = 0.$$

□

Věta 85. *Buď F Borelovská množina a $0 \leq s < t$. Pokud $\mathcal{H}^s < +\infty$, pak $\mathcal{H}^t = 0$. Pokud $\mathcal{H}^t > 0$, pak $\mathcal{H}^s = +\infty$.*

Důkaz. Z vět výše plyne tvrzení pro s = 0. Nechť tedy s> 0, pak pokud $\operatorname{diam} A \leq \epsilon$, pak

$$\overline{\mathcal{H}}^t_\epsilon(A) \leq (\operatorname{diam} A)^t \leq \epsilon^{t-s} (\operatorname{diam} A)^s.$$

Tedy z Metody I 42 plyne, že $\overline{\mathcal{H}}^t_\epsilon(F) \leq \epsilon^{t-s} \overline{\mathcal{H}}^s_\epsilon(F)$ pro všechna F. Nechť tedy $\overline{\mathcal{H}}^s_\epsilon(F) < +\infty$, pak

$$\mathcal{H}^t(F) \leq \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{t-s} \overline{\mathcal{H}}^s_\epsilon(F) = 0.$$

Druhé tvrzení se dokáže obdobně. □

Důsledek 86. Z předchozí věty je patrné, že pro borelovskou množinu F platí:

$$0 \leq s < t \implies \overline{\mathcal{H}}^s(F) \leq \overline{\mathcal{H}}^t(F).$$

Poznámka 87. Z věty výše zároveň víme, že pro borelovskou množinu F existuje $s_0 \in [0, +\infty]$ tak, že

$$\overline{\mathcal{H}}^s = 0, \ \forall s \leq s_0 \text{ a } \overline{\mathcal{H}}^s = +\infty, \ \forall s \geq s_0.$$

Poznámka 88. Pro obecné množiny je výpočet Hausdorffovy míry velmi složitý a většinou není známá ani její přesná hodnota. Například pro Sierpińského trojúhelník, ačkoliv známe hodnotu $s = \log 3/ \log 2$, tak přesná hodnota Hausdorffovy míry je zatím neznámá, ale je k dispozici odhad:

$$0,77 \leq \mathcal{H}^s(S) \leq 0,817161232881177.$$

O těchto odhadech se více dočtete v [10].

3.2.2 Hausdorffova dimenze

Definice 89. Hodnotu s_0 z poznámky 87 nazveme Hausdorffovou dimenzí množiny F, neboli

$$\dim_{\mathcal{H}}(F) := \inf\{s \in [0\,;\, +\infty] \,|\, \overline{\mathcal{H}}^s(F) = 0.\}$$

Věta 90. *Pro Hausdorffovu dimenzi platí:*

1. *Pokud E, F borelovské množiny a $E \subset F$, pak* $\dim_{\mathcal{H}}(E) \leq \dim_{\mathcal{H}}(F)$.
2. *Pokud $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ je posloupnost borelovských množin, pak*

$$\dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq j < +\infty} \{\dim_{\mathcal{H}} F_i.\}$$

Důkaz. 1. První tvrzení plyne z monotonie Hausdorffovy míry $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$, $\forall s \geq 0$.

2. U druhého tvrzení ověříme dvě nerovnosti
   - Nerovnost $\dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{i=1}^\infty F_i \geq \dim_{\mathcal{H}} F_j$ plyne z dokázaného prvního bodu věty.
   - Naopak pokud $s > \dim_{\mathcal{H}} F_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, pak $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$, a tedy i $\mathcal{H}^s\Big(\bigcup_{i=1}^\infty F_i\Big) = 0$, což implikuje tvrzení.

□

Poznámka 91. Pokud je γ hladká křivka v $\mathbb{R}^n$, pak $\dim_{\mathcal{H}}[\gamma] = 1$.

Důkaz. Důkaz plyne ze shodnosti Lebesgueovy a Hausdorffovy míry 82. □

Věta 92. *Buď $f : S \to T$ podobnostní funkce s podobnostním koeficientem $r > 0$, $s > 0$ reálné číslo a $F \subset S$. Pak*

$$\overline{\mathcal{H}}^s(f[F]) = r^s \overline{\mathcal{H}}^s(F).$$

Neboli $\dim_{\mathcal{H}}(F) = \dim_{\mathcal{H}}(f[F])$.

Důkaz. Předpokládejme, že $f[S] = T$. pak f má inverzní funkci f^{-1}. Pro množinu $A \subset S$ platí $\operatorname{diam} f[A] = r \operatorname{diam} A$, a tedy i

$$(\operatorname{diam} f[A])^s = r^s (\operatorname{diam} A)^s.$$

Nyní aplikujeme větu 42 a získáme

$$\overline{\mathcal{H}}^s_\epsilon(f[F]) = r^s \overline{\mathcal{H}}^s_\epsilon(F),$$

a tedy i

$$\overline{\mathcal{H}}^s(f[F]) = r^s \overline{\mathcal{H}}^s(f[F]),$$

z čehož už plyne $\dim_{\mathcal{H}}(f[F]) = \dim_{\mathcal{H}}(F)$. □

Kapitola 4

Soběpodobnost

Soběpodobnost je vlastnost množin, která vyjadřuje, že množina je podobná své části, nebo alespoň přibližně podobná. Zjednodušeně řečeno, pokud přiblížíme, případně i zrotujeme, nějakou část soběpodobné množiny, tak získáme strukturu, která vypadá stejně jako množina samotná.

Tuto vlastnost nemusíme hledat pouze u abstraktních množin, jako Cantorovo diskontinuum, nebo Sierpińského trojúhelník, ale můžeme ji pozorovat i u objektů, se kterými se setkáváme v běžném životě. Příklady těchto objektů mohou být sněhové vločky, stromy, nebo květák. Soběpodobnost těchto množin se však musí brát s mírným nadhledem, jelikož podobnost nemusí být úplně přesná.

4.1 Systémy iterovaných funkcí

Soběpodobnost množin můžeme zkoumat pomocí systémů iterovaných funkcí (IFS), které nám říkají, pomocí jakých transformací daná množina vznikla a díky tomu můžeme počítat i jejich Hausdorffovu dimenzi.

Definice 93. Nechť S je metrický prostor. Pak zobrazení $f : S \to S$ nazveme podobnost, pokud

$$(\forall x, y \in S)(\exists r > 0)(\rho(f(x), f(y)) = r\rho(x, y)).$$

Navíc pokud $r < 1$, pak zobrazení f nazveme kontrahující.

Definice 94. Nechť S je metrický prostor. Množinu zobrazení $\{f_1, f_2, \dots f_n\}$, kde $n \geq 2$, nazveme systém iterovaných funkcí (IFS). Kompaktní množinu $T \subset S$ nazveme invariantní vůči IFS, pokud platí

$$T = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(T).$$

Definice 95. Nechť S je metrický prostor, pak řekneme, že IFS $\{f_1, f_2, \dots f_n\}$ splňuje podmínku pro otevřenou množinu, pokud existuje omezená otevřená množina V tak, že

$$V \supset \bigcup_{i=1}^{n} S_i(V).$$

Věta 96. *Buď S metrický prostor a $F \subset S$. Pokud F je invariantní vůči IFS $\{f_1, f_2, \dots f_n\}$ s podobnostními koeficienty $\{c_1, c_2, \dots c_n\}$, pak $\dim_{\mathcal{H}} F = s$, kde s je dáno rovnicí*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^s = 1.$$

Navíc pro tuto hodnotu s platí $0 < \mathcal{H}^s < +\infty$.

Důkaz. Například v kapitole 9 [4]. □

Poznámka 97. Hodnota s z předchozí věty se někdy nazývá podobnostní dimenze množiny F.

Příkald 98. Cantorovo diskontinuum má Hausdorffovu dimenzi $\log 2/\log 3$.

Z kapitoly 1.1 víme, že Cantorovo diskontinuum je invariantní vůči IFS

$$f_1 = \frac{x}{3},\ f_2 = \frac{(x+2)}{3}, \text{ kde } c_1 = \frac{1}{3},\ c_2 = \frac{1}{3}.$$

Tedy z věty výše řešíme rovnici

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1,$$

a tedy $s = \log 2/\log 3$.

4.2 Hausdorffův nadprostor

V dalších částech se budeme věnovat konstrukci invariantních množin k danému IFS. K tomuto potřebujeme zavést pojem Hausdorffův nadprostor a Hausdorffova metrika.

Definice 99. Buď (S, ρ) metrický prostor a . Označme množinu

$$S^* = \{A \subset S \mid \emptyset \neq A \text{ kompaktní } \}.$$

Dále označme funkci

$$u(A, B) = \max\{\rho(x, B) \mid x \in A\}, \text{ kde } A, B \in S^*.$$

Potom definujeme *Hausdorffovu metriku*

$$\rho^* := \max\{u(A, B),\ u(B, A)\}$$

a uspořádanou dvojici (S^*, ρ^*) nazveme *Hausdorffův nadprostor*.

Z definice není zřejmé, zdali funkce ρ^* je skutečně metrikou, na tuto otázku odpoví následující věta.

Věta 100. *Nechť (S, ρ) je metrický prostor a S^*, ρ^* jsou definovány jako výše. Pak ρ^* je metrika na S^*.*

Důkaz. Ověříme tři vlastnosti metriky z definice 16.

1. Ověříme, že ρ^* zobrazuje na množinu $[0, +\infty]$. Nechť $A, B \in S^*$, $A \neq B$, pak buď $A \setminus B \neq \emptyset$, a tedy $u(A, B) > 0$, nebo $B \setminus A \neq \emptyset$, a tedy $u(B, A) > 0$. Z obou případů plyne, že $\rho^*(A, B) > 0$.

2. Ověříme, že $\rho(A, B) = 0$, právě když $A = B$. Implikace $\rho^*(A, B) = 0$, pak $A = B$ je zřejmá z definice a vlastností původní metriky $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$. Naopak pokud $A = B$, pak $u(A, B) = 0 = u(B, A)$.

3. Symetrie plyne přímo z definice.

4. Zbývá dokázat trojúhelníkovou nerovnost. Ta zřejmě, z trojúhelníkové nerovnosti pro původní ρ, platí pro funkci u. Z definice pak vlastnost plyne i pro ρ^*.

□

Věta 101. *Nechť* (S, ρ) *je relativně kompaktní metrický prostor. Pak* (S^*, ρ^*) *je relativně kompaktní metrický prostor.*

Důkaz. Zvolme libovolné $\delta > 0$. Pak z věty 31, existuje konečná množina $K \subset S$ taková, že $\rho(x, K) < \delta$, $\forall x \in S$. Dále označme množinu všech neprázdných podmnožin K jako $\mathcal{R}$. Zvolme libovolnou množinu $A \subset S^*$ a označme množinu

$$B = \{x \in K \,|\, \rho(x, A) < \delta\}.$$

Zřejmě platí, že $x \in \mathcal{R}$ a $\rho^*(A, B) < \delta$. Tvrzení pak plyne z věty 31. □

Obdobné tvrzení platí i pro úplné, kompaktní, nebo separabilní metrické prostory. Důkazy těchto tvrzení lze nalézt například v [3].

4.3 Konstrukce invariantních množin

V této kapitole se zaměříme na konstrukci invariantních množin. Nejprve se podíváme na to, kdy k danému IFS existuje invariantní množina.

Věta 102. *Buď* (S, ρ) *úplný metrický prostor a* $\{f_1, f_2, \dots f_n\}$ *systém kontrahujících zobrazení s podobnostními koeficienty* $\{r_1, r_2, \dots r_n\}$. *Pak existuje jediná množina* $\emptyset \neq K \in S^*$ *taková, že*

$$K = \bigcup_{k=1}^{n} f_k(K).$$

Důkaz. Definujeme funkci $\Phi : S^* \to S^*$ jako

$$\Phi(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j(A).$$

Potřebujeme ověřit podmínky Banachovy věty 32 pro funkci Φ. Z předchozí kapitoly víme, že Hausdorffův nadprostor úplného prostoru je úplný. Nyní ověříme, že funkce Φ je kontrahující zobrazení, neboli $\rho^*(\Phi(A), \Phi(B)) \leq r\rho^*(A, B)$. Zvolme $r = \max\{r_1, r_2, \dots r_n\}$ a libovolné $q > \rho^*(A, B)$. Pokud $x \in \Phi(A)$, pak existuje $\tilde{x}$ tak, že $x = f_i(\tilde{x})$, pro nějaké $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Jelikož $q > \rho^*(A, B)$, tak existuje $\tilde{y} \in B$ tak, že $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) < q$. Pak ale nutně $y = f_i(\tilde{y}) \in \Phi(B)$ splňuje $\rho(x, y) = r_i\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) < rq$. Jelikož bylo x voleno libovolně, tak toto platí pro všechna $x \in \Phi(A)$. Obdobně se tato vlastnost ukáže i pro všechna $y \in \Phi(B)$. Z čehož plyne

$$\rho^*(\Phi(A), \Phi(B)) \leq rq, \ \forall q > \rho^*(A, B).$$

Pak ale

$$\rho^*(\Phi(A), \Phi(B)) \leq r\rho^*(A, B),$$

a tedy Φ je kontrahující zobrazení. Věta pak plyne z Banachovy věty 32. □

Věta nám zároveň říká, jakým způsobem lze iterativně vytvořit invariantní množiny. Uvažujme, že prostor (S, ρ) a IFS $\{f_1, f_2, \dots f_n\}$ splňuje podmínky věty výše. Nyní definujme posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ pomocí rekurence

$$A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A_k),$$

kde A_0 je libovolná kompaktní podmnožina S. Pak posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v Hausdorffově metrice k invariantní množině vůči danému IFS.

Lemma 103. *Nechť* (S, ρ) *je úplný metrický prostor, funkce* $f : S \to S$ *je kontrahující zobrazení s podobnostním koeficientem* $0 \leq r < 1$ *a* $x_0 \in S$ *je pevným bodem funkce* f*. Pak platí*

$$\rho(x, x_0) \leq (1 - r)^{-1} \rho(x, f(x)), \text{ pro všechna } x \in S.$$

Důkaz. Pro pevně zvolený bod $a \in S$ je funkce $\rho(a, b)$ spojitá v proměnné b, z čehož plyne

$$\begin{aligned}\rho(x, x_0) &= \rho(x, \lim_{n\to\infty} f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} \rho(x, f^n(x)) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \rho(f^{m-1}(x), f^m(x)) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \rho(x, f(x))(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) \leq (1 - s)^{-1} \rho(x, f(x)).\end{aligned}$$

Tím je lemma dokázáno. □

Následující věta je klíčová pro vykreslování invariantních množin, jelikož nám říká, jak se množina transformovaná IFS blíží k invariantní množině.

Věta 104 (The Collage Theorem)**.** *Buď* (s, ρ) *úplný metrický prostor,* $L \in S^*$ *a* $\epsilon \geq 0$*. Pak pro soubor iterovaných funkcí* $\{f_1, f_2, \ldots f_N\}$ *s podobnostními koeficienty* $r_i < 1$*, které splňují*

$$\rho^*\left(L, \bigcup_{n=1}^{N} f_n(L)\right) \leq \epsilon$$

platí

$$\rho^*(L, A) \leq \epsilon/(1 - s).$$

Kde A je invariantní vůči $\{f_1, f_2, \ldots f_n\}$*.*

Důkaz. Důkaz plyne přímo z lemmatu 103. □

Kapitola 5

Vizualizace invariantních množin

V této kapitole se zaměříme na vykreslování geometricky složitých množin pomocí tzv. přímého algoritmu, v literatuře často nazýván Chaos game. Všchny obrázky v této kapitole byly vytvořeny v programovém prostředí MATLAB.

Přímý algoritmus

Pokud chceme vytvořit invariantní množinu vůči IFS ve tvaru $(f_1, f_2, \dots f_n)$ za pomocí přímého algoritmu postupujeme následovně. Zvolíme libovolný bod $x = (x_0, y_0)$ z $\mathbb{R}^2$(případně bod z $\mathbb{R}^n$) a působíme na něj náhodně vybranou funkcí z daného IFS a získáme bod

$$f_k(x_0, y_0).$$

Tento postup opakujeme pro x_1 a další takto vytvořené body. Obecně se funkce mohou libovolně opakovat, avšak při zavedené různých pravidel pro jejich opakování můžeme získat různé množiny s odlišnými vlastnostmi od původní invariantní množiny. Nyní se tento algoritmus pokusíme aplikovat na několik množin.

5.1 Sierpińského trojúhelník

S Sierpińského trojúhelníkem jsme se již seznámili v části 1.2. A odvodili jsme IFS tvaru:

Sierpińského trojúhelník

IFS: $f_i = \mathbb{A}x_i + b_i$

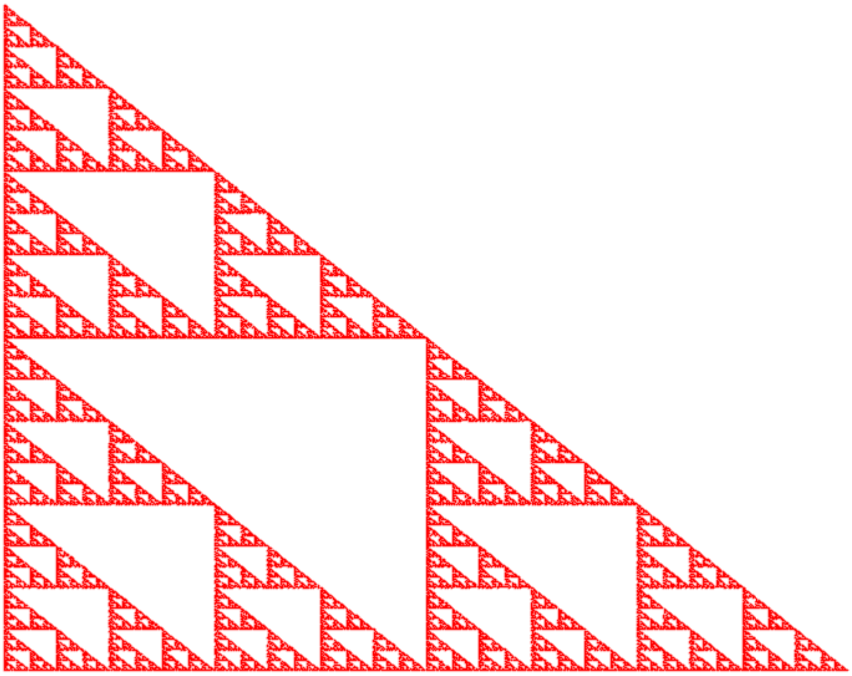
$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

počet iterací: $n = 10^8$

Počáteční bod: $x_0 = 0,\ y_0 = 1$



Obrázek 5.1: Sierpińského trojúhelník při použití přímého algoritmu 5 s počtem iterací 10^8

5.2 Kochova sněhová vločka

Další fraktální množinou, na kterou se zaměříme je Kochova sněhová vločka. Nejprve však musíme definovat Kochovu křivku. Kochova křivka, představena švédským matematikem Helge von Kochem v roce 1904, jako spojitá křivka, která nemá derivaci v žádném ze svých bodů. Její konstrukce vychází z Cantorova diskontinua 1.1. Stejně jako v každém kroku konstrukce cantorovy množiny začínáme s úsečkou a vyjmeme její prostřední část. V tomto případě ji však nenecháme prázdnou, ale nahradíme ji rameny rovnostranného trojúhelníku. Konečná množina je zobrazena v obrázku 5.2.

Kochova křivka

IFS: $f_i = \mathbb{A}x_i + b_i$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

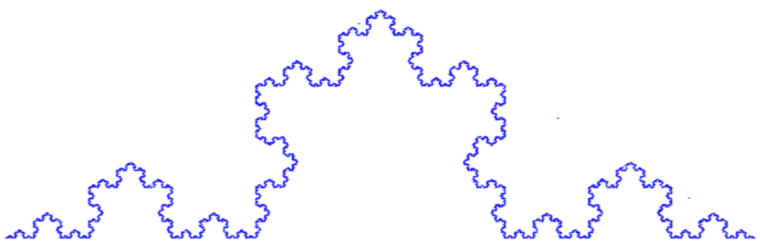
$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 1/6 & -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 & 1/6 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 1/6 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 & 1/6 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0. \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Počet iterací: $n = 10^8$

Počáteční bod: $x_0 = 0, y_0 = 1$



Obrázek 5.2: Kochova křivka, při použití algoritmu 5

Kochova vločka je pak zkonstruována aplikací stejného postupu na tři strany rovnostranného trojúhelníku. Vločka má jisté podobnosti s reálnými sněhovými vločkami, více lze nalézt například v [14], nebo [15].

Kochova vločka

IFS: $f_i = \mathbb{A}x_i + b_i$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 & 0,5 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0. \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

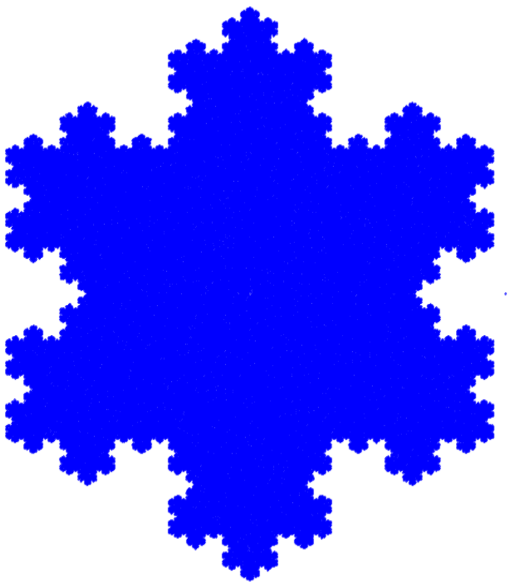
$$\mathbb{A}_5 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad b_5 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_6 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0. \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad b_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_7 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0. \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad b_7 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Počet iterací: $n = 10^8$

Počáteční bod: $x_0 = 0,\ y_0 = 1$



Obrázek 5.3: Kochova vločka, při použití algoritmu 5

5.3 Dürerův pětiúhelník

Poslední množinou, pro kterou využijeme přímý algoritmus je Dürerův pětiúhelník. Narozdíl od ostatních množin v této práci Dürerova vločka nevzešla z prací matematiků. Vychází z konstrukce pravidelného pětiúhelníku publikované německým malířem Albrechtem Dürerem už v roce 1525. Více lze nalézt v [15]

Dürerův pětiúhelník

IFS: $f_i = \mathbb{A}x_i + b_i$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 0,382 & 0 \\ 0 & 0,382 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0,309 \\ 0,570 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 0,118 & -0,3633 \\ 0,3633 & 0,118 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0,3633 \\ 0,3306 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} -0,309 & -0,224 \\ 0,224 & -0,309 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0,607 \\ 0,309 \end{pmatrix}$$

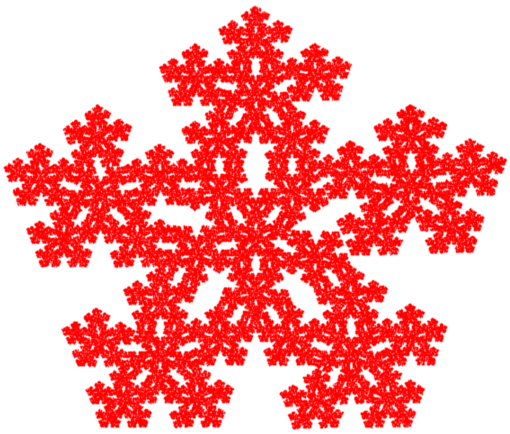
$$\mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 0,118 & 0,3633 \\ -0,3363 & 0,118 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 0,5187 \\ 0,694 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_5 = \begin{pmatrix} -0,309 & 0,2245 \\ -0,2245 & -0,309 \end{pmatrix}, \qquad b_5 = \begin{pmatrix} 0,7016 \\ 0,5335 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_6 = \begin{pmatrix} 0,382 & 0 \\ 0 & 0,382 \end{pmatrix}, \qquad b_6 = \begin{pmatrix} 0,309 \\ 0,677 \end{pmatrix}$$

Počet iterací: $n = 10^7$

Počáteční bod: $x_0 = 0,\ y_0 = 1$



Obrázek 5.4: Dürerův pětiúhelník s použitím algoritmu 5

5.4 Barnsleyova kapradina

První invariantní množinou, která do jisté míry odpovídá přírodním tvarům je tzv. Barnsleyho kapradina publikovaná Michaelem Barnsleym.

Barnsleyova kapradina

IFS: $f_i = \mathbb{A}x_i + b_i$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,16 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,04 \\ -0,04 & 0,858 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,26 \\ 0,23 & 0,22 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} -0,15 & 0,28 \\ 0,26 & 0,24 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,44 \end{pmatrix}$$

Počet iterací: $n = 10^8$

Počáteční bod: $x_0 = 0,\ y_0 = 1$

Pokusíme se k této množině přistoupit podobně jako k výše uvedenému Sierpińského trojúhelníku, tedy dané funkce budeme volit libovolně.

V obrázku 5.5 vidíme, že tento postup není úplně ideální. Ačkoliv určité části zejména tedy v dolní části v okolí stonku vypadají uspokojivě, tak jak se posouváme obrázkem výše, tak stonek i listy postupně řídnou, až k úplně horní části, která se nevykreslila téměř vůbec. Musíme tedy využít jiný postup, abychom dosáhli rovnoměrnějšího rozdělení bodů.

Přímý algoritmus s využitím pravděpodobností

Postup je prakticky stejný jako u přímého algoritmu popsaném výše, s jediným rozdílem, funkcím daného IFS přidělíme různé pravděpodobnosti podle toho kterou část grafu vykreslují.

Aplikujme tedy tento postup na Barnsleyho kapradinu. Nejprve si musíme uvědomit co dělají jednotlivé funkce. Funkce f_1 vykresluje hlavní a vedlejší stonky, což je v celku jednoduchá struktura, tedy stačí volit nízkou pravděpodobnost jejího vybrání. Funkce f_2 vytváří „podlisty“, neboli menší listy na vedlejších stoncích. V obrázku 5.5 vidíme, že tato funkce dělá velké problémy, zejména na lístcích daleko od hlavního stonku.Musíme jí tedy přiřadit vyšší pravděpodobnost. Funkce f_3 a f_4 plní symetrickou funkci, vytváří pravou, resp. levou část kapradiny, a tedy jim přiřadíme stejnou pravděpodobnost.

Obrázek 5.5: Barnsleyvo kapradina připoužití přímého algoritmu 5 s počtem iterací 10^8

Barnsleyho kapradina

IFS: $f_i = \mathbb{A}x_i + b_i$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,16 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0,858 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

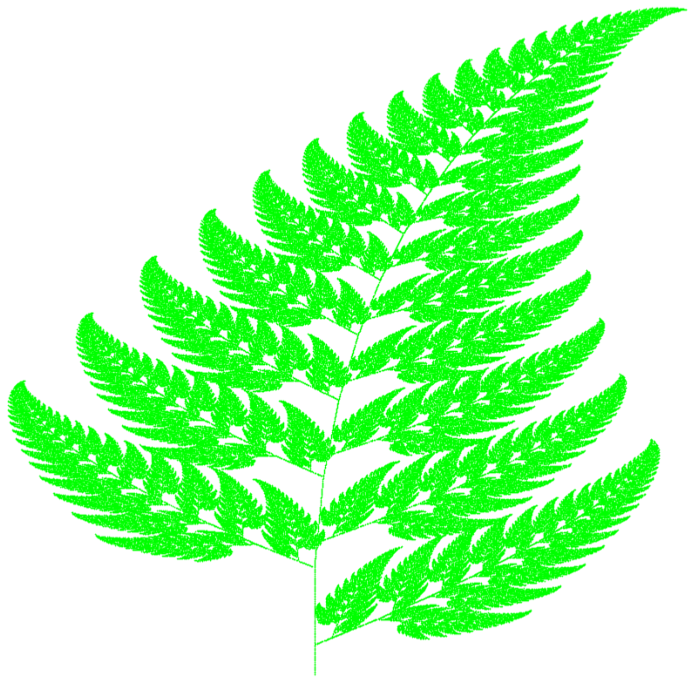
$$\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,26 \\ 0,23 & 0.22 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} -0,15 & 0,28 \\ 0,26 & 0,24 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,44 \end{pmatrix}$$

Počet iterací: $n = 10^8$

Pravděpodobosti: $p_1 = 0,01,\ p_2 = 0,85,\ p_3 = 0,07,\ p_4 = 0,07$

Počáteční bod: $x_0 = 0,\ y_0 = 1$



Obrázek 5.6: Barnsleyova kapradina při použití modifikovaného algoritmu 5.4 s počtem iterací 10^6

V obrázku výše byly použity pravděpodobnosti $p_1 = 0,01$; $p_2 = 0,85$; $p_3 = 0,07$; $p_4 = 0,07$. Na první pohled je zřejmé, že rozložení bodů je rovnoměrnější než v obrázku 5.5 i přesto, že bylo použito sto-krát méně iterací. V dalších příkladech uvidíme, že tato metoda je obecně vhodnější pro invariantní množiny, které odpovídají přírodním tvarům. Více o Barnsleyho kapradině lze nalézt v [11].

5.5 Javorový list

Dalším přírodním útvarem, kterým se budeme zajímat je javorový list. Publikován rovněž M. F. Barnsleym v [11].

Javorový list

IFS: $f_i = \mathbb{A}x_i + b_i$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 0,49 & 0 \\ 0 & 0,51 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 1.62 \end{pmatrix}$$

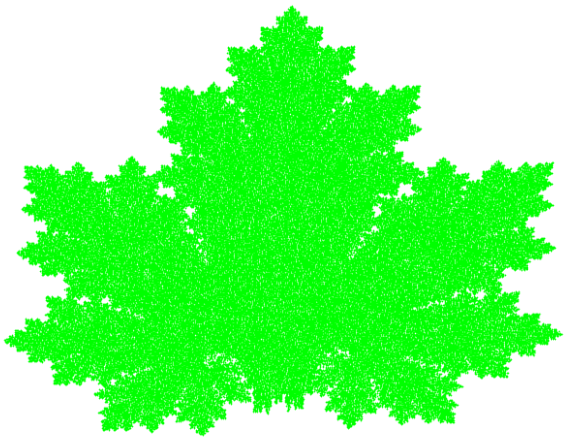
$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 0,14 & 0,01 \\ 0 & 0,51 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -0,08 \\ -1,31 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 0,43 & -0,52 \\ -0,45 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1,49 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 0,45 & -0,49 \\ 0,47 & 0,47 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} -1,62 \\ -0,74 \end{pmatrix}$$

Počet iterací: $n = 10^7$

Počáteční bod: $x_0 = 0,\ y_0 = 1$



Obrázek 5.7: Javorový list při použití přímého algoritmu 5 s počtem iterací 10^7

Jak vidíme v obrázku 5.7, tak přímý algoritmus funguje o něco lépe než u barnsleyho kapradiny, avšak i tady lze nalézt jisté problémy. Například mezi jednotlivými podlisty se tvoří mezery, a tedy konečný obraz vypadá mírně roztrhaně. Abychom toto vyřešily musíme zvýšit pravděpodobnost výběru funkcí, které vykreslují levou, resp. pravou část podlistů, tj. funkcí f_3 a f_4. Volíme tedy pravděpodobnosti $p_1 = 0,22,\ p_2 = 0,02,\ p_3 = 0,38,\ p_4 = 0,38$.

Javorový list

IFS: $f_i = \mathbb{A}x_i + b_i$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 0,49 & 0 \\ 0 & 0,51 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 1.62 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 0,14 & 0,01 \\ 0 & 0,51 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -0,08 \\ -1,31 \end{pmatrix}$$

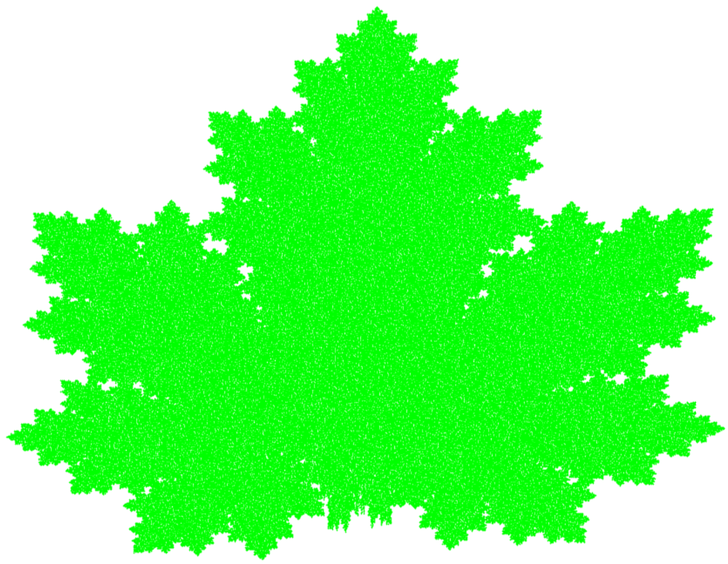
$$\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 0,43 & -0,52 \\ -0,45 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1,49 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 0,45 & -0,49 \\ 0,47 & 0,47 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} -1,62 \\ -0,74 \end{pmatrix}$$

Počet iterací: $n = 10^6$

Pravděpodobnosti: $p_1 = 0,2,\ p_2 = 0,02,\ p_3 = 0,38,\ p_4 = 0,38$

Počáteční bod: $x_0 = 0,\ y_0 = 1$



Obrázek 5.8: Javorový list při použití modifikovaného algoritmu 5.4 s počtem iterací 10^6

V obrázku 5.8 je patrné, že problematické části se mírně vylepšily. Zajímavější je ale fakt, že k tomu došlo i přesto, že bylo použito 10-krát méně iterací.

5.6 Fraktální strom

V dřívějších sekcích jsme ukázali, jak lze pomocí pravděpodobností výběrů funkcí vylepšit vzhled invariantních množin. V této části postoupíme ještě o kousek dál a pomocí změn pravděpodobností se vytváříme zcela nové obrazce. Budeme vycházet z javorového listu představeném v předchozí sekci a budeme postupně snižovat pravděpodobnost výběru první funkce, která množinu roztahuje dále od středu.

IFS: $f_i = \mathbb{A} x_i + b_i$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 0,49 & 0 \\ 0 & 0,51 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 1.62 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 0,14 & 0,01 \\ 0 & 0,51 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -0,08 \\ -1,31 \end{pmatrix}$$

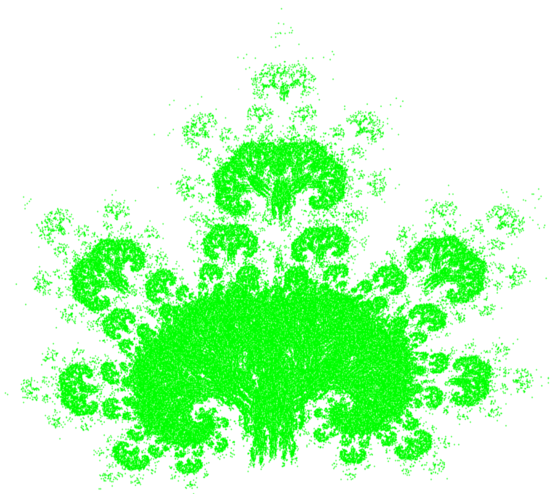
$$\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 0,43 & -0,52 \\ -0,45 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1,49 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 0,45 & -0,49 \\ 0,47 & 0,47 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} -1,62 \\ -0,74 \end{pmatrix}$$

Počet iterací: $n = 10^7$

Pravděpodobnosti: $p_1 = 0,01$ $p_2 = 0,23,$ $p_3 = 0,38,$ $p_4 = 0,38$

Počáteční bod: $x_0 = 0,$ $y_0 = 1$



Obrázek 5.9: Struktura popsaná tabulkou výše, s počtem iterací 10^7

Například při volbě pravděpodobností $p_1 = 0,01,\ p_2 = 0,24,\ p_3 = 0,38,\ p_4 = 0,38$ získáme úplně nový tvar, viz 5.9, který se od původního listu výrazně liší. Touto problematikou se rovněž zabýval M. F. Barnsley ve své práci [12], kde je dokázána i obdoba Collage theorem pro IFS s přidělenými pravděpodobnostmi.

IFS: $f_i = \mathbb{A}x_i + b_i$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 0,49 & 0 \\ 0 & 0,51 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 1.62 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 0,14 & 0,01 \\ 0 & 0,51 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -0,08 \\ -1,31 \end{pmatrix}$$

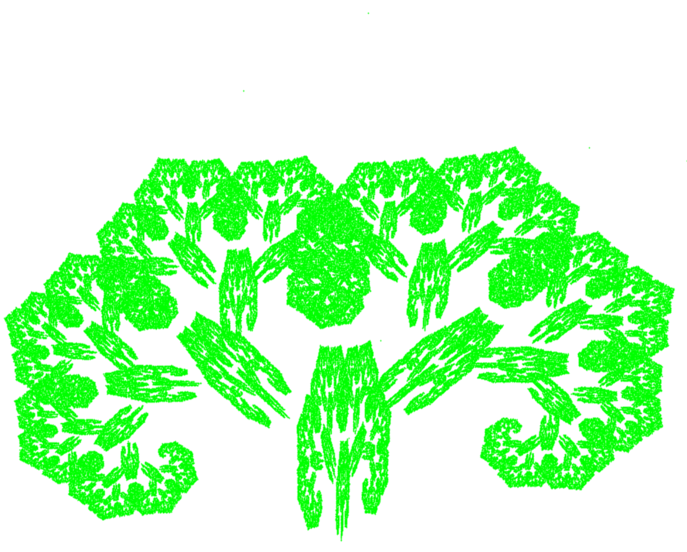
$$\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 0,43 & -0,52 \\ -0,45 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1,49 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 0,45 & -0,49 \\ 0,47 & 0,47 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} -1,62 \\ -0,74 \end{pmatrix}$$

Počet iterací: $n = 10^7$

Pravděpodobnosti: $p_1 = 0,\ p_2 = 0,24,\ p_3 = 0,38,\ p_4 = 0,38$

Počáteční bod: $x_0 = 0,\ y_0 = 1$



Obrázek 5.10: Fraktální strom popsaný tabulkou výše

Pokud bychom tento postup chtěli dohnat do extrému, můžeme první funkci vynechat úplně a získáme tvar podobný koruně stromu. Tento tvar je už ale novou množinou, která je invariantní pouze vůči funkcím f_2, f_3, a f_4. Z obrázků 5.9 a 5.10 můžeme prohlásit, že čím více se odchýlíme od optimálního rozložení pravděpodobností původní množiny, tím více se nám množina změní.

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se základními pojmy týkající se fraktálních množin, jako jsou topologie, konstrukce vnější míry, nebo zavedení topologické a Hausdorffovy dimenze. Následně jsme se zabývali vizualizací fraktálních množin pomocí přímého algoritmu a vlivem pravděpodobnosti na výsledný obraz.

V první kapitole byly představeny některé ze známých fraktálních množin. Důraz byl kladen hlavně na jejich konstrukci, u Cantorovy množiny pak také na některé vlastnosti z teorie míry a topologie. Krátce byly rovněž představeny i množiny z komplexní dynamiky.

Dále jsme se zabývali potřebnými nástroji ke zkoumání fraktálních množin. Nejprve na pojmy z topologie, zejména na vlastnosti metrických prostorů, dále pak na teorii míry, zejména na dva postupy konstrukce vnější míry.

Další kapitoly se pak zaměřily na pojmy z Mandelbrotovy definice fraktálu. Topologickou a následně i Hausdorffovu dimenzi. Jako první byly představeny topologické dimenze, zejména dolní a horní induktivní dimenze. Zaměřili jsme se na prostory nulové dimenze a ukázali, že nulová dolní induktivní dimenze je ekvivalentní nulové horní induktivní dimenzi. Dále byly představeny sumační vlastnosti induktivních dimenzí, které udávají, jaké platí vztahy pro dimenzi sjednocení množin. Na konci kapitoly byla zavedena Lebesgueova pokrývací míra a byly uvedeny případy, kdy platí ekvivalence tří zmíněných dimenzí. Další kapitola byla pak zaměřena na vlastnosti Hausdorffovy míry a následnou definici Hausdorffovy dimenze.

Důležitou vlastností fraktálních množin je soběpodobnost. V kapitole zabývající se tímto tématem byl definován pojem systém iterovaných funkcí (IFS), a invariantní množina vůči IFS. Dále jsme se pak zabývali problematikou, jak pomocí IFS vytvořit danou invariantní množinu a byl dokázán Collage theorem, představen M. Barnsleym, který tuto problematiku řeší.

V závěrečné kapitole jsme se zabýváme vizualizací konkrétních fraktálních množin. Byl představen přímý algoritmus, často nazýván jako chaos game, který je postaven na vlastnostech systémů iterovaných funkcí dokázaných dříve. Pomocí tohoto algoritmu jsme dokázali konstruovat jednoduché fraktální množiny založené na mnohoúhelnících. Pro složitější fraktální množiny byl algoritmus mírně modifikován pomocí pravděpodobností výběrů funkcí, který vylepšil rozložení bodů v daných množinách. V poslední části této kapitoly jsme z javorového listu, pomocí výrazných změn pravděpodobností, vytvořili nové invariantní množiny, které se od původního obrazu výrazně liší.

V současné době se matematické metody v fraktální geometrii hojně využívají v různých odvětvích, jako například v biologii, fyzice, nebo dynamice tekutin. V souvislosti s těmito odvětvími vzniká potřeba zavedení diferenciálního počtu na fraktálních množinách. Existuje hned několik definic fraktální derivace, jako například Hausdorffova derivace, založená na Hausdorffově míře, zavedena v [16]. Tato derivace má praktická využití i v dalších vědeckých disciplínách jako například v medicíně (popsáno v [19]), kde je využita při zkoumání negaussovských difúzí v mozku pomocí magnetické rezonance. Více o Hausdorffově počtu lze nalézt v [18].

Aktuálním tématem je i zavedení integrálního počtu na fraktálních množinách. V této práci bylo již zmíněno, že je velmi obtížné přesně vypočítat Hausdorffovu míru fraktálních množin, což je problematické pro analytický výpočet integrálů. Více o výpočtu Hausdorffovy míry a numerických výpočtech Hausdorffových integrálů lze nalézt v [20].

Literatura

[1] G. A. Edgar: *Topology and Fractal Geometry*. Springer 2nd edition, 2008.

[2] R. Engelking: *Dimension Theory*. North-Holland publishing company, 1978.

[3] E. Čech and V. Jarník: *Bodové množiny*. Jednota Československých matematiků a fysiků, 1936.

[4] K. Falconer: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 3rd edition, 2014.

[5] K. Falconer: *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 1985.

[6] P. S. Alexandrov: *Úvod do obecné theorie množin a funkcí*. Nakl. ČSAV, 1954.

[7] C. R. Wall: *Terminating decimals in the Cantor ternary set*. Fibonacci Quarterly, 28(2):98–101, 1990.

[8] J.R. Munkres: *Topology*. Prentice Hall, 1975.

[9] G. Julia, *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*. Journal de Math. Pure et Appl, 8:47–245, 1918.

[10] P. Móra: *Estimate of the Hausdorff measure of the Sierpinski triangle*. Fractals 17: 137-148, 2009.

[11] M. F. Barnsley: *Fractals Everywhere*. Academic Press, 2nd edition, 1993.

[12] M. F. Barnsley, J. H. Elton and D. P. Hardin: *Recurrent iterated function systems.* Constructive Approximation, 5: 3-31, 1989.

[13] R. P. Agarwal, M. Meehan , D. O'Regan: *Fixed point theory and applications, Cambridge Tracts in Mathematics*, 141, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[14] H. O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe: *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 2004

[15] L. Riddle: *Classic Iterated Function Systems*. Agnes Scott College, 2022. https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/ifs.htm

[16] W. Chen, *Time-space fabric underlying anomalous diffusion*. Chaos Solitons Fractals 28, 923–929, 2006.

[17] A. S. Balankin, B. E. Elizarraraz, *Map of fluid flow in fractal porous medium into fractal continuum flow*. Phys Rev E 85, 2012.

[18] Y. Liang, W. Chen and W. Cai: *Hausdorff calculus: Applications to fractal systems*. De Gruyter, 2019.

[19] Y. Liang,A. Q. Ye, W. Chen W, et al.: *A fractal derivative model for the characterization of anomalous diffusion in magnetic resonance imaging*. Commun Nonlinear Sci 39, 529–537, 2016.

[20] M. Diasová *Diplomová páce - Systémy iterovaných funkcí, jejich invariantní množiny a míra*. FJFI ČVUT, Praha, 2023.