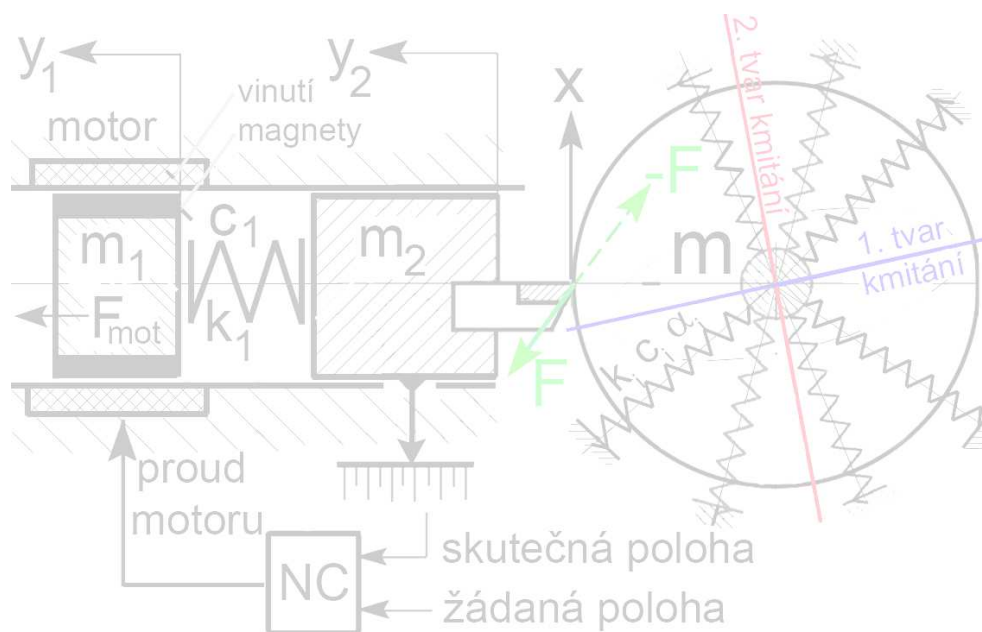


KMITÁNÍ V POHONECH VÝROBNÍCH STROJŮ



Doc.Áng.ÁPavel Souček, DrSc.
Doc.Áng.ÁAntonín Bubák, Ph.D.

Rok vydání 2021



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivatives 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/> or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Úvodní slovo k přepracovanému vydání skript

Souček, P., Bubák, A.: Vybrané statě z kmitání v pohonech výrobních strojů
(ČVUT 2008, ISBN 978-80-01-04048-5)

Tato publikace se zabývá pouze některými dílčími problémy z oblasti kmitání s hlavním zaměřením na pohony posuvů NC obráběcích strojů.

Vzhledem k tomu, že jde o dynamické vlastnosti nejen mechanických částí, ale i zpětnovazebních obvodů, je třeba při výkladu vstoupit i do oblasti **regulace a teorie signálů**. Z tohoto důvodu považujeme za účelné zařadit v úvodní **kap.1** některé partie z matematiky, bez nichž se nelze v těchto dvou souvisejících disciplínách obejít a které nebývají pro strojního inženýra (bohužel) součástí základního kurzu. Jde hlavně o funkce komplexní proměnné, Fourierovu a hlavně Laplaceovu integrální transformaci, u které je "nematematickým" způsobem naznačen i její fyzikální význam, který často studentům uniká.

Pro výklad stability (např. u výše zmíněných regulačních pohonů posuvů, ale i u modelů procesu samobuzeného kmitání při obrábění) bylo nutné zařadit Cauchyho teorém o změně argumentu a navazující Nyquistovo kritérium. Znalost Laurentovy řady a reziduové věty je prospěšná při rozboru impulzního buzení dynamických soustav v **kap.4**.

Za součást **kap.1** lze považovat i **Dodatek 1**, věnovaný metodě geometrického místa kořenů (GMK, Root Locus), která je mnohdy používána automaticky jen jako softwareová "černá skříňka" bez zamyšlení nad hlubšími souvislostmi.

Z psychologických důvodů je potřebný matematický aparát uveden hned v úvodní kapitole a čtenář, kterému se podaří úspěšně překonat odpor k jejímu přečtení, se bude v dalších kapitolách lépe orientovat.

Znalost chování jednohmotové dynamické soustavy na úrovni **kap.2** patří k základnímu vzdělání strojního inženýra. Jako příprava na rozbor soustav s více stupni volnosti je v ní uveden výpočet rovinného kmitání jednohmotového ortogonálního systému.

Výklad chování systémů s více stupni volnosti v **kap.3** je orientován na pohony posuvů NC obráběcích strojů, kde jde většinou o sériové řazení poddajných částí. Zvláštní důraz je věnován dynamické poddajnosti nejen samotné mechanické stavby, ale i poddajnosti, způsobené vlastním regulačním algoritmem zpětnovazebního polohového řízení NC stroje. Rozbor vede na obecnou matici celkové poddajnosti posuvové osy. Kmitání jedné hmoty v rovině i prostoru je uvedeno kvůli procvičení modální transformace a může pomoci při odhadu poddajnosti uložení hřídelů a vřeten obráběcích strojů.

Souvislost časových průběhů sil hnacích motorů a jejich frekvenčních spekter při buzení dynamických soustav je obsírně vysvětlena v **kap.4**. Jde o zásadní aplikaci 2.Newtonova zákona při řešení potíží s klidným rozbíháním a brzděním strojů (nevyjímaje vačkové mechanismy) bez škodlivých vibrací. Zároveň si čtenář ujasní důležitou skutečnost, že dynamický systém přijímá energii na svých vlastních kmitočtech.

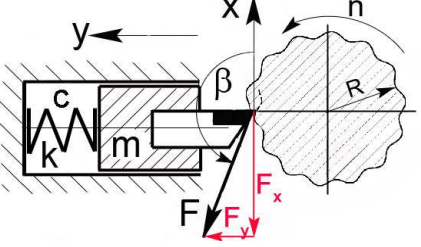
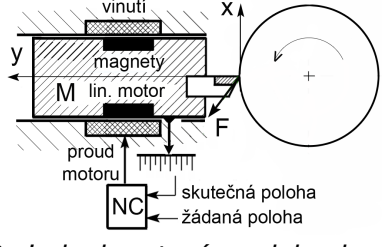
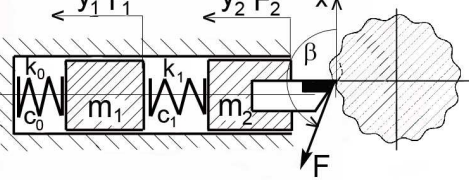
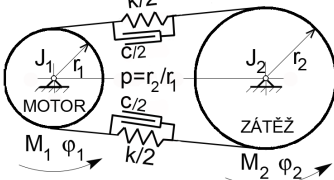
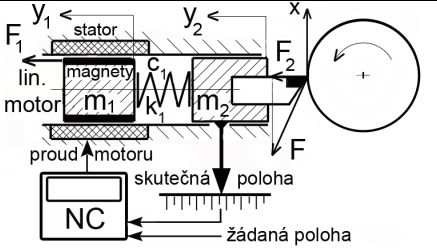
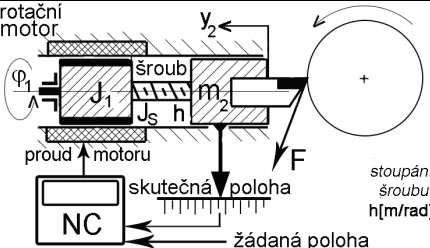
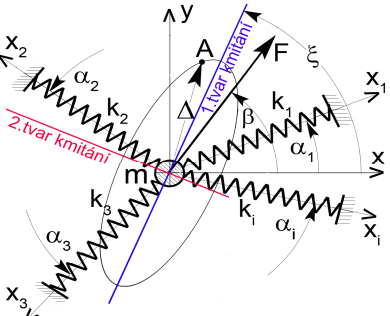
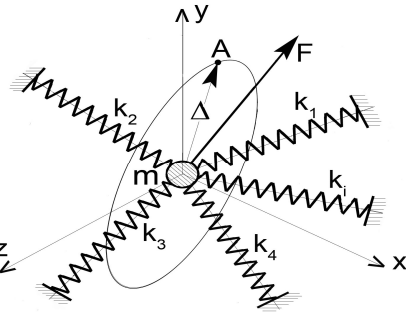
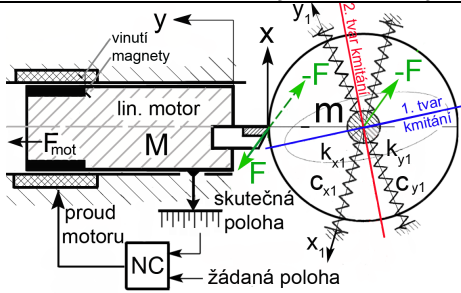
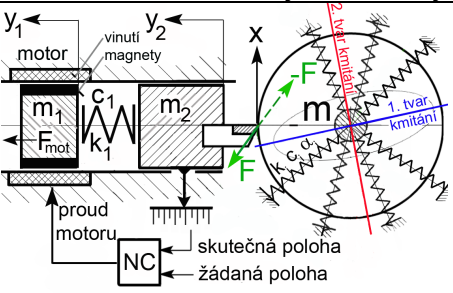
Závěrečnou **kap.5** je třeba chápat jako nejnutnější úvod pro zkoumání stability dráhového řízení NC obráběcích strojů se zahrnutím vlivu rezného procesu. Klasické metody teorie samobuzeného kmitání uvažují pouze dynamiku samotné mechanické konstrukce, resp. jejího zjednodušení na rovinný kmitavý systém, často jen jednohmotový. Do rozboru je ale nutno zahrnout i poddajnost samotné regulace hnacího motoru, která je dána regulačním algoritmem a je jakousi obdobou mechanické pružiny, ovšem se specifickým a ze strojařského hlediska netradičním chováním. Proces samobuzeného kmitání při obrábění je zpětnovazebním dějem a kvůli názornosti je vysvětlen pouze na případu ortogonálního soustružení - zapichování. Výpočet rezné síly je přitom zjednodušen na přímou úměru s průřezem třísky. Náročnější čtenář sice najde v literatuře více jiných přístupů, ale stále chybí univerzálně použitelný prostředek k predikci rezných sil, hlavně při frézování.

Formát **kap.5** byl zvolen odlišně od ostatních kapitol jen ve tvaru prezentace s minimem doprovodného textu a měl by čtenáře povzbudit ke hlubšímu a kritickému zamyšlení nad tématem, jehož výzkum není v současnosti zdaleka uzavřen.

V závěrečném **Dodatku 2** je zdůrazněna jednotná kvantifikace mechanických i elektrických přírodních dějů a čtenář si uvědomí, že při návrhu NC stroje není namístě striktní oddělování profesí "strojař - konstruktér" a "elektrikář - pohonář".

Přehled nejčastěji používaných dynamických modelů

V následující tabulce je uvedeno několik jednoduchých dynamických modelů procesu soustružení (konkrétně ortogonálního zapichování), z nichž některé budou zmíněny v dalším textu.

 <p>1. Jednohmotový pasivní systém</p>	 <p>2. Jednohmotový model pohonu</p>
 <p>3. Dvojhmotový lineární pasivní systém</p>	 <p>4. Dvojhmotový rotační systém</p>
 <p>5. Dvojhmotový model lineárního pohonu</p>	 <p>6. Dvojhmotový model rotačního pohonu</p>
 <p>7. Rovinné kmitání jedné hmoty</p>	 <p>8. Prostorové kmitání jedné hmoty</p>
 <p>9. Jednohmotový model pohonu, radiální kmitání vřetena</p>	 <p>10. Dvojhmotový model pohonu, radiální kmitání vřetena</p>

1. Matematický aparát

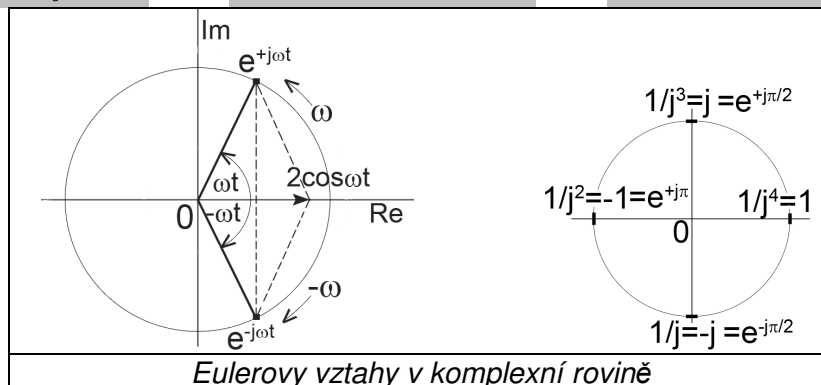
1.1 Základní pojmy z teorie signálů

Funkce času $f(t)$ (též stručně „signál“) je definována obecně v intervalu $t \in (-\infty, +\infty)$ a může být i komplexní (např. v elektrotechnice), takže je možno ji rozložit na reálnou a imaginární část a definovat komplexně sdruženou funkci $\overline{f(t)}$ a absolutní hodnotu:

$$f(t) = \operatorname{Re} f + j \operatorname{Im} f, \quad \overline{f(t)} = \operatorname{Re} f - j \operatorname{Im} f, \quad |f(t)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 f + \operatorname{Im}^2 f} \quad (1.1)$$

Poznámka: Většinou budeme vyšetřovat reálné funkce času, ale i ty lze vyjádřit v komplexním tvaru, např. harmonické funkce \sin, \cos pomocí Eulerových vztahů (1.2):

$$e^{\pm j\omega t} = \cos\omega t \pm j\sin\omega t \quad e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2\cos\omega t \quad e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = 2j\sin\omega t \quad (1.2)$$



Eulerovy vztahy v komplexní rovině

Pro $\omega t = \pi/2$ je $e^{\pm j\pi/2} = \pm j$, takže $j^2 = (e^{j\pi/2})^2 = e^{j\pi} = -1$
a například

$$j^j = (e^{j\pi/2})^j = e^{j^2\pi/2} = e^{-\pi/2} = 0,207879\dots, \text{ a dále } j^{j^j} = (e^{-\pi/2})^j = e^{-j\pi/2} = -j \text{ atd.}$$

Dále definujeme tyto pojmy:

- okamžitý výkon signálu... $|f(t)|^2 = f(t) \cdot \overline{f(t)} = \operatorname{Re}^2 f + \operatorname{Im}^2 f \quad (1.3a)$

- signálem vykonaná práce (okamžitá energie v čase t)... $E = \int_{-\infty}^t |f(t)|^2 dt \quad (1.3b)$

Na zvoleném časovém intervalu - např. $t \in \langle 0, T \rangle$ - se dále vyjadřuje

- střední hodnota signálu... $f_{STR} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (1.4)$

- střední výkon... $P = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \overline{f(t)} dt \quad (1.5a)$

- efektivní hodnota... $f_{EFF} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt} \quad (1.5b)$

Efektivní hodnota je myšlený náhradní konstantní signál, mající stejný střední výkon jako signál časově proměnný (tj. střední výkon signálu je kvadrátem jeho efektivní hodnoty).

1.2 Fourierova řada periodické funkce (kmitočtové spektrum)

Reálná periodická funkce času $f(t)$ je definována obecně v intervalu $t \in (-\infty, +\infty)$ a má dobu periody $T = 2\pi/\omega_0$, ω_0 ...úhlový kmitočet [rad/s] resp. [1/s]. Reciproká hodnota

$1/T = f$ je kmitočet v jednotkách [Hz] (pozor na záměnu s označením funkční hodnoty $f(t)$!!!). U periodické funkce je možno posouvat meze integrace:

$$f(t) = f(t+T), \int_0^T f(t) dt = \int_a^{T+a} f(t) dt$$

Funkci lze rozložit do **Fourierovy řady**

$$f(t) = f_{STR} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\omega_0 t + b_n \cos n\omega_0 t) \quad (1.6)$$

což je nekonečná řada harmonických složek, majících celistvé n -násobky základního kmitočtu ω_0 (důkaz tohoto fundamentálního tvrzení i s omezujícími podmínkami, které jsou v technické praxi většinou splněny, je v **lit.[1]**).

Reálné koeficienty řady jsou

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (1.7)$$

Protože součiny $f(t) \sin n\omega_0 t$, $f(t) \cos n\omega_0 t$ mají též periodu T , u koeficientů a_n, b_n se někdy uvádějí posunuté meze integrace $-T/2, +T/2$. Provedeme-li formální substituci

$$a_n = C_n \sin(-\varphi_n), \quad b_n = C_n \cos(-\varphi_n), \quad \varphi_n = \arctg(-a_n/b_n)$$

přejde Fourierova řada (1.6) na součet navzájem fázově posunutých složek

$$f(t) = f_{STR} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (1.8)$$

Dosadíme-li $n=0$ do (1.7), platí navíc $a_0 = 0$, $b_0 = C_0 = 2f_{STR}$, $\varphi_0 = 0$.

Zavedeme nový komplexní koeficient

$$A_n = \frac{b_n - ja_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1.9)$$

Při uvažování záporných indexů lze psát

$$a_n = -a_{-n}, \quad b_n = b_{-n}, \quad \frac{b_0 - ja_0}{2} = \frac{b_0}{2} = f_{STR}, \quad A_{-n} = \frac{b_{-n} - ja_{-n}}{2} = \frac{b_n + ja_n}{2}$$

Vztah (1.6) dále zestručníme na tvar součtu pro všechna celá čísla n včetně nuly

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1.10)$$

Koeficienty A_n, A_{-n} jsou navzájem komplexně sdružené, tj. $A_n = \overline{A_{-n}}$ a platí pro ně

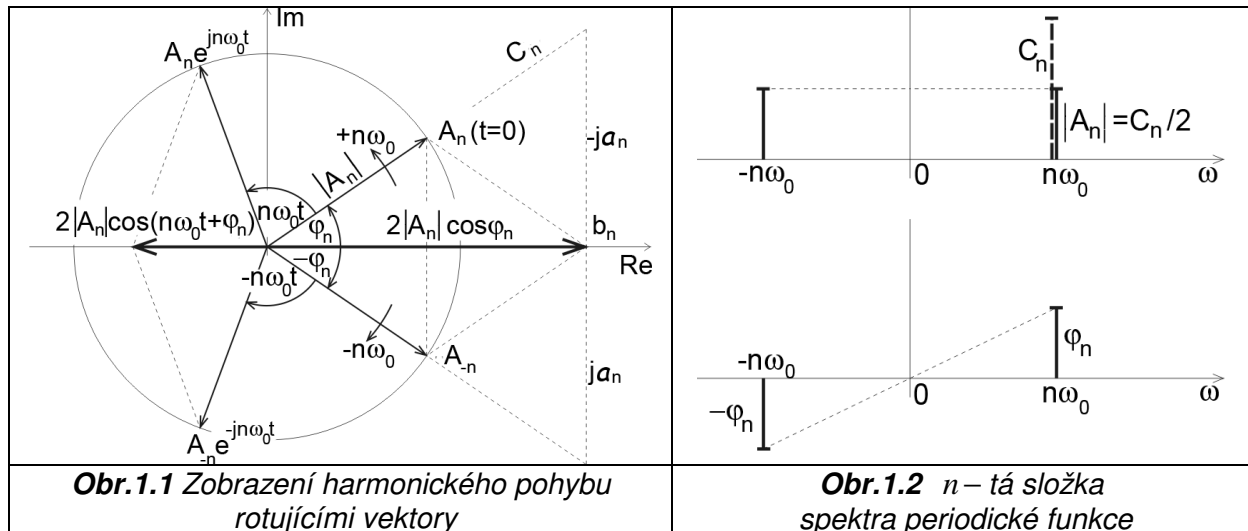
$$A_n = |A_n| \cdot e^{j\varphi_n}, \quad A_{-n} = |A_n| \cdot e^{-j\varphi_n}, \quad |A_n| = \sqrt{A_n \cdot A_{-n}} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} = \frac{C_n}{2}, \quad A_0 = f_{STR} \quad (1.10a)$$

Fourierova řada v komplexním tvaru (1.10) je součet množiny komplexně sdružených dvojic vektorů A_n, A_{-n} , rotujících protisměrně úhlovými rychlostmi $\pm n\omega_0$ (viz **obr.1.1**) a ve výsledku nutně vede zpět na reálné časové průběhy. Reálné i komplexní vyjádření Fourierovy řady (1.8) a (1.9),(1.10) jsou si zcela rovnocenná. Pod názvem **frekvenční spektrum** funkce $f(t)$ se zobrazuje zvláště průběh amplitudy i fázového posuvu. Rozlišujeme tedy spektrum

- reálné amplitudové a fázové (tzv. jednostranné): $C_n, \varphi_n = fce(\omega), n \in \langle 0, +\infty \rangle$

- komplexní amplitudové a fázové (tzv. oboustranné): $|A_n|, \varphi_n = fce(\omega), n \in (-\infty, +\infty)$.

Často se přidává přívlastek „čárové“ spektrum, neboť jde o posloupnost osamělých hodnot (spektrálních čar) na diskretní množině kmitočtů $\omega = n\omega_0$ - viz **obr.1.2**.



1.3 Střední výkon periodické funkce

I když je vyšetřovaná funkce času reálná, můžeme pomocí F. řady v komplexním tvaru (1.10) vyjádřit funkci komplexně sdruženou

$$\overline{f(t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

a dosadit do vztahu pro střední výkon (1.5a):

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \overline{f(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_{-n} e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Zaměníme pořadí sumace a integrace:

$$P = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_{-n} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_{-n} \cdot A_n = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |A_n|^2 \quad (1.11)$$

Posloupnost reálných čísel $|A_n|^2$ je tzv. **oboustranné výkonové spektrum** funkce $f(t)$. Střední výkon n -té harmonické složky P_n je třeba složit z výkonů obou komplexně sdružených částí

$$P_n = |A_n|^2 + |A_{-n}|^2 = C_n^2/2 \quad \text{a celkový střední výkon je}$$

$$P = \sum_0^n P_n \quad (1.12)$$

Důležitý vztah (1.12) – tzv. **Parsevalův teorém** – umožňuje zjistit střední výkon periodického signálu ze součtu výkonů jednotlivých harmonických složek (včetně výkonu střední hodnoty!!). Množina čísel $C_n^2/2$ je tzv. jednostranné výkonové spektrum. Efektivní hodnota n -té harmonické složky je odmocninou ze středního výkonu, tj. $f_{nEFF} = C_n/\sqrt{2}$.

Příklad 1: Pro další úvahy je důležitá znalost frekvenčního spektra časově posunuté funkce $f(t-a)$. Použitím (1.9) a substitucí $x = t-a$, $dx = dt$ vychází

$$\underline{A_n} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t-a) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{e^{-jn\omega_0 a}}{T} \cdot \int_{-a}^{T-a} f(x) \cdot e^{-jn\omega_0 x} dx$$

Protože $a = konst$ a posunutí mezi integrace nehraje roli, dostáváme

$$\underline{A}_n = A_n \cdot e^{-jn\omega_0 a}, \text{ tj. } |\underline{A}_n| = |A_n|, \varphi_n = \varphi_n - n\omega_0 a$$

Amplitudové spektrum se tedy s časovým posunem funkce nemění. Tuto vlastnost často využijeme, neboť nás budou zajímat hlavně velikosti amplitud a vhodným časovým posunem funkce lze ulehčit integraci v (1.9). **Výškovým posunutím funkce** se změní její střední hodnota, tedy pouze hodnota amplitudového spektra na nulovém kmitočtu.

Příklad 2: Spektrum nekonečné řady pravoúhlých impulzů o výšce B a šířce a - viz **obr.1.3**:

- integraci (1.9) stačí provést v intervalu $\langle -a/2, +a/2 \rangle$ a n -tý komplexní koeficient je

$$A_n = \frac{B}{T} \int_{-a/2}^{+a/2} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{2B}{n\omega_0 T} \cdot \sin(n\omega_0 a/2) = \frac{aB}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0 a/2} \quad (1.13)$$

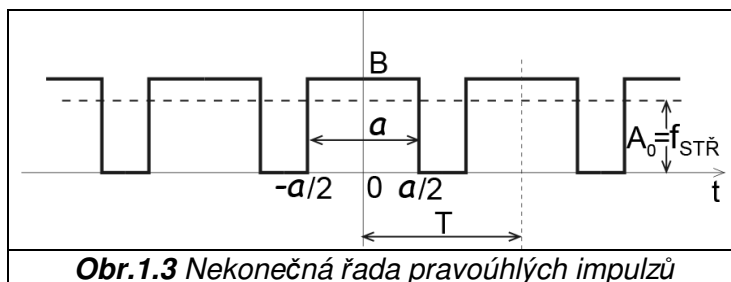
Shodou okolností zde vychází oboustranné spektrum reálné, což znamená, že v čase $t=0$ probíhají všechny vektory A_n, A_{-n} právě reálnou osou.

Zlomek je akceptovatelný i pro $n=0$ s ohledem na známou limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ takže } A_0 = aB/T, \text{ což}$$

je střední hodnota funkce. Zpětným výpočtem (1.10) získáme časový průběh

$$f(t) = \frac{aB}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0 a/2} e^{+jn\omega_0 t}$$

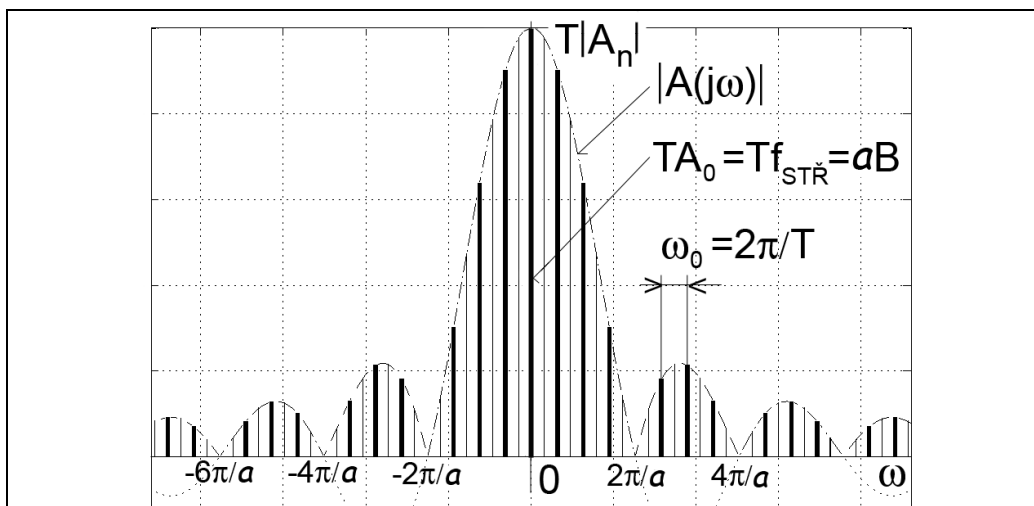


Obr.1.3 Nekonečná řada pravoúhlých impulzů

V tomto příkladu si povšimneme hodnot T - násobku amplitudového spektra:

$$T \cdot |A_n| = aB \cdot \left| \frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0 a/2} \right|, \quad T \cdot |A_0| = aB \quad \text{nebo též} \quad T \cdot |A_n| = aB \cdot \left| \frac{\sin x}{x} \right|, \quad x = n\omega_0 a/2 \quad (1.14)$$

Vychází charakteristický tvar absolutní hodnoty funkce $\frac{\sin x}{x}$ - viz **obr.1.4**, který mj. podle **příkladu 1** nezávisí na vodorovném časovém posunu řady impulzů.



Obr.1.4 T - násobek amplitudového spektra řady obdélníkových impulzů, silně - perioda T , slabě i silně - perioda $2T$ (každý druhý impulz vynechán)

Nulové hodnoty spektra by mohly nastat při kmitočtech

$$n\omega_0 = \pm 2k\pi/a, \quad n \dots \text{celé}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{ale jen když se do nich s kmitočtem } n\omega_0 \text{ „strefíme“!!}).$$

Jednotlivé spektrální čáry o výšce $T \cdot |A_n|$ jsou od sebe vzdáleny o konstantní krok ω_0 a z (1.14) je zřejmé, že jejich koncové body budou nezávisle na hodnotě T ležet na stále

stejně křivce (obálce), odpovídající spojitému průběhu funkce $aB \cdot \left| \frac{\sin x}{x} \right|$. Se zvětšením periody funkce $T = 2\pi/\omega_0$ se vzdálenosti ω_0 mezi jednotlivými spektrálními čarami zmenší, ale obálka svůj tvar nezmění. Vliv periody funkce na hustotu spektrálních čar je patrný z **obr.1.4**.

Poznámka: Na **obr.1.4** jsou slabě znázorněny další spektrální čáry, které přibudou k čarám původním tím, že ve výchozí řadě impulzů z **obr.1.3** vynecháme každý druhý, tj. zvýšíme periodu funkce $f(t)$ na dvojnásobek. Počet harmonických složek se zdvojnásobil a amplitudy poklesly na polovinu, což laikovi nemusí korespondovat s dvojnásobnou „redukcí“ původní funkce. Tento pouze zdánlivý rozpor souvisí s matematickým chápáním pojmu „nekonečno“, neboť se stále jedná o nekonečnou řadu impulzů a plocha pod čarou u jejich prořídle řady je stále nekonečná.

Výše učiněný závěr je obecně platný:

- **obálka T –násobku amplitudového spektra periodické funkce se nemění při změně periody, mění se pouze hustota spektrálních čar.**

1.4 Spektrum neperiodické funkce (Fourierova transformace)

Při rostoucí periodě se čáry v **obr.1.4** zahušťují a v mezním případě osamělého impulzu bude mezera mezi nimi (tedy přírůstek na ose kmitočtů) nekonečně malá:

$$T \rightarrow \infty, \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega, n\omega_0 = \omega \quad (1.15)$$

Průběh T –násobku čárového spektra se stane spojitou funkcí kmitočtu ω , tvar obálky zůstane zachován. Tím je též řečeno, že amplitudy $|A_n|$ jednotlivých harmonických složek budou nekonečně malé a jejich kmitočty budou ležet nekonečně blízko sebe. Toto tvrzení dokážeme pro obecnou funkci $f(t)$ limitním přechodem (1.15) ve vztazích (1.9) a (1.10), přičemž změníme hranice integrace z $0 \rightarrow T$ na $-T/2 \rightarrow T/2$:

$$f(t) = \sum_{\substack{\omega=n\omega_0 \\ n \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow -\infty}} \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \cdot e^{+jn\omega_0 t} \quad (1.16)$$

kde zavedeme označení

$$A(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \mathbf{F}\{f(t)\} \quad (1.17)$$

Spojitá funkce kmitočtu (1.17) je tzv. **Fourierův integrál** (též **F. transformace**, **F. obraz**) nebo též **frekvenční spektrum** funkce $f(t)$. Dosazením $A(j\omega)$ do (1.16) získáme postupně výraz

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{\omega=n\omega_0 \\ n \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow -\infty}} A(j\omega) \cdot e^{+jn\omega_0 t} \omega_0$$

a přechodem ze součtu na integrál vyjde konečně vztah pro tzv. **zpětnou Fourierovu transformaci** funkce $f(t)$ ve tvaru

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} A(j\omega) \cdot e^{+j\omega t} d\omega = \mathbf{F}^{-1}\{A(j\omega)\} \quad (1.18)$$

Vztahy (1.17),(1.18) vyjadřují podobně jako (1.9),(1.10) fakt, že neperiodickou funkci $f(t)$ lze nahradit nekonečným součtem dvojic protisměrně rotujících vektorů $A(\pm j\omega)$, které jsou komplexně sdružené, tj. $A(-j\omega) = \overline{A(+j\omega)}$. Jejich úhlové rychlosti (kmitočty) se ale

na rozdíl od periodické funkce liší o nekonečně malou hodnotu $d\omega$. Funkce $A(j\omega)$, $A(-j\omega)$ je možno vyjádřit též pomocí absolutní hodnoty (modulu) a úhlu (argumentu) v tzv. polárním tvaru

$$A(j\omega) = |A(j\omega)| \cdot e^{j\varphi}, \quad A(-j\omega) = |A(j\omega)| \cdot e^{-j\varphi} \quad (1.18a)$$

a podobně jako u periodických funkcí rozlišujeme tzv.

- spojitě amplitudové spektrum $|A(j\omega)|$
- spojitě fázové spektrum $\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{\text{Im}A(j\omega)}{\text{Re}A(j\omega)}$

Dosazením za $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$ do (1.17) získáme vztahy pro reálnou a imaginární část spektra

$$\text{Re} A(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad \text{Im} A(j\omega) = - \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (1.19)$$

Reálné spektrum je sudou funkcí kmitočtu, imaginární spektrum je funkcí lichou.

Poznámky: 1) Spojitá funkce kmitočtu $|A(j\omega)|$ je rovnicí obálky T – násobků spektrálních čar (viz např. obr.1.4), jak je možno zjistit srovnáním se vztahem (1.9) po převedení periody T na jeho levou stranu. Pozorný čtenář si uvědomí, že amplitudy harmonických složek neperiodické funkce musí být nekonečně malé, neboť hustota spektrálních čar roste bez omezení až ke spojitému průběhu spektra. Rozpor se skutečností, že čísla $|A(j\omega)|$ mají přesto konečnou velikost, je vysvětlen převedením zlomku $1/T = \omega_0/2\pi$ do součtu (1.16), takže se nakonec objeví v integrálu (1.18) v podobě $d\omega/2\pi$;

2) Vztahy (1.17), (1.18) jsou rovnicemi formami vyjádření téže funkce, pouze jsme přešli od času jakožto nezávisle proměnné veličiny k jeho reciproké hodnotě – kmitočtu. V mnoha technických oborech je výhodné se oprostít od vžitého pojmu „nezávisle ubíhající čas“ a pracovat raději s kmitočtem;

3) Integrace (1.17) bude u reálných technických funkcí probíhat většinou jen v intervalu $t \in \langle 0, \infty \rangle$, kdežto interval kmitočtů $\omega \in \langle -\infty, +\infty \rangle$ v (1.18) musí s ohledem na Eulerovy vztahy zůstat zachován !!

4) **Fyzikální rozměr amplitudového spektra $|A(j\omega)|$ určíme z fyzikálního rozměru původní funkce času $f(t)$ vynásobením sekundou. Je-li např. $f(t)$ průběh síly v [N], amplitudové spektrum má rozměr [Ns].**

1.5 Spektra vybraných funkcí

Protože ve výrazu (1.17) je absolutní hodnota součinitele $e^{-j\omega t}$ rovna jedné a tudíž nepřispívá k celkové divergenci integrálu, stačí k existenci Fourierova integrálu pouze podmínka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \quad \dots \text{tzv. „absolutní integrovatelnost“ funkce } f(t) \quad (1.19a)$$

Integrace (1.17) je zcela analogická jako u (1.9).

1) **Spektrum časově posunuté funkce $f(t-a)$:**

$\underline{A(j\omega)} = A(j\omega) \cdot e^{-j\omega a}$, tj. amplitudové spektrum se nemění a fázový posuv dostává navíc složku úměrně rostoucí s kmitočtem:

$$\underline{|A(j\omega)|} = |A(j\omega)|, \quad \underline{\varphi(\omega)} = \varphi(\omega) - \omega a$$

2) **Obdélníkový impulz** o výšce B a šířce a v intervalu $t \in \langle -a/2, +a/2 \rangle$ - viz obr.1.5:

$$A(j\omega) = aB \cdot \frac{\sin(\omega a/2)}{\omega a/2}, \quad A_0 = aB \quad (1.20)$$

Spektrum je v případě impulsu souměrného okolo počátku pouze reálné, srovnej s (1.13), (1.14) a s **obr.1.4**. Jeho nulové hodnoty jsou na kmitočtech $\omega = \pm 2k\pi/a$, $k = 1, 2, \dots$

Poznámka: Hodnota amplitudového spektra $|A(j\omega)|$ při nulovém kmitočtu není na rozdíl od případu periodické funkce rovna střední hodnotě funkce (ta je u osamělého obdélníkového impulsu na intervalu $t \in (-\infty, +\infty)$ nulová!!). **U neperiodické funkce je to plocha pod funkčním průběhem.** Tento poznatek je zvláště názorný v případě, že funkce $f(t)$ je silou, působící na hmotu m , neboť s ohledem na 2. Newtonův zákon $f(t)dt = d(mv)$ je

$$|A(0)| = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a d(mv) = (\text{pro } m = \text{konst}) = m(v - v_0)$$

(plocha silového impulsu je rovna přírůstku hybnosti).

Interval působení síly je zde $t \in \langle 0, a \rangle$, amplitudové spektrum je ale stejné jako v případě $t \in \langle -a/2, +a/2 \rangle$!!

3) Diracův impuls (znak $\delta(t)$):

Jedná se o nekonečně úzký i vysoký obdélníkový impuls s jednotkovou plochou (bližší vysvětlení viz **kap.1.11**). Časový interval je $t \in \langle -a/2, +a/2 \rangle$, výška $B = 1/a$, $a \rightarrow 0$.

Limitním přechodem v (1.20) dostáváme

$$A(j\omega) = \mathbf{F}\{\delta(t)\} = 1 \quad (1.21)$$

Amplitudové spektrum je jednotkové - viz **obr.1.6**, fázové je nulové. Diracův impuls tedy obsahuje harmonické složky všech kmitočtů $\omega \in (-\infty, +\infty)$ se stejnou amplitudou, které jsou v čase $t = 0$ ve fázi (protisměrně rotující komplexně sdružené vektory při $t = 0$ právě procházejí reálnou osou).

Poznámky: 1) Diracův impuls je sice nerealizovatelný, jeho teoretický význam je však zásadní, jak poznáme později. Např. silovým impulzem tohoto tvaru by bylo možno vybudit mechanickou konstrukci na všech kmitočtech současně. V praxi se tento experiment realizuje alespoň v omezeném pásmu kmitočtů úderem tzv. modálního kladívka (hovoříme o širokopásmovém buzení);

2) Z **obr.1.5** a **1.6** můžeme vypožorovat, že rozšiřování impulsu (zvětšování míry a) má za následek vodorovné "smršťování" spektra a naopak (v případě nekonečně úzkého Diracova impulsu se prostřední vrchol z **obr.1.5** "roztáhne" do nekonečné šíře). To je v souladu s již dříve uvedenou poznámkou, že jsme přešli z veličiny "čas [s]" na reciprokovou veličinu "kmitočet [1/s]".

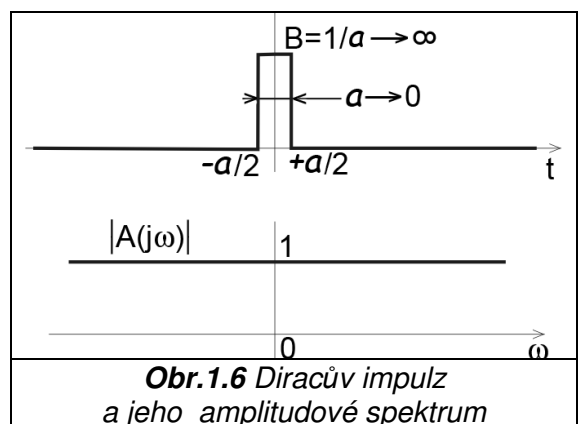
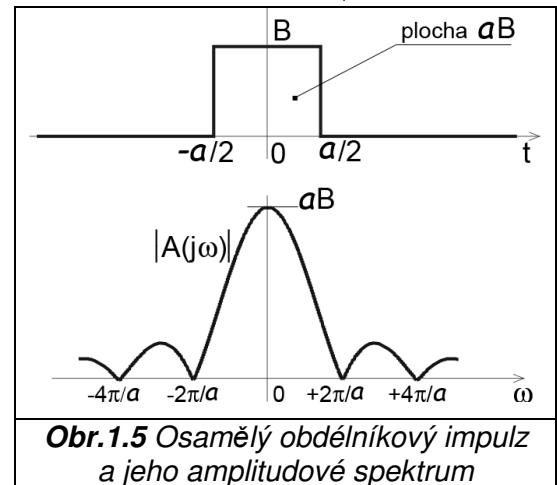
4) Spektrum součtu funkcí

Protože integrace je operací aditivní a lineární, platí po aplikaci vztahu (1.17):

- jestliže existuje dvojice funkcí $f_1(t), f_2(t)$ a jejich Fourierovy obrazy $A_1(j\omega), A_2(j\omega)$, potom platí

$$\mathbf{F}\{K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)\} = K_1 A_1(j\omega) + K_2 A_2(j\omega) \quad (1.22)$$

kde konstanty K_1, K_2 mohou být i komplexní.



5) Spektrum derivace a integrálu

Zde se omezíme na funkce, definované v intervalu $t \in (0, \infty)$ a pro $t < 0$ bude $f(t) = 0$. Integraci (1.17) provedeme per-partes:

$$\mathbf{F}\{\dot{f}(t)\} = \int_{t=0}^{t=+\infty} \dot{f}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = f(t) \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + j\omega \int_{t=0}^{t=+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

a po dosazení mezí

$$\mathbf{F}\{\dot{f}(t)\} = j\omega \cdot A(j\omega) - f(0+) \quad (1.23)$$

Podobně vychází pro integrál $\int_0^t f(\tau) d\tau$ jakožto pro funkci horní meze integrace

$$\mathbf{F}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{A(j\omega)}{j\omega} \quad (1.24)$$

V tomto případě nezáleží na počátečních podmínkách.

Poznámka: Ke stejným závěrům bychom došli i u vztahu (1.9) pro periodickou funkci:

- derivace znamená násobení původního spektra činitelem $j n \omega_0$;
- integrace znamená dělení činitelem $j n \omega_0$.

1.6 Integrace součinu funkcí, energie neperiodického signálu

V technické praxi se často vyskytuje potřeba integrovat součin dvou časových průběhů. S využitím jejich spekter (1.17) a zpětné transformace (1.18) dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) dt &= \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f_1(t) \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} A_2(j\omega) \cdot e^{+j\omega t} d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} f_1(t) \cdot A_2(j\omega) \cdot e^{+j\omega t} d\omega dt = \end{aligned}$$

(a dále po záměně pořadí integrace)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} A_2(j\omega) \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f_1(t) \cdot e^{+j\omega t} dt d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} A_2(j\omega) \cdot A_1(-j\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} A_2(j\omega) \cdot \overline{A_1(j\omega)} d\omega \quad (1.25) \end{aligned}$$

Speciálně při $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ vychází tzv. **Parsevalův** (též **Rayleighův**) **teorém** pro neperiodickou funkci

$$\boxed{\int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} |A(j\omega)|^2 d\omega} \quad (1.26)$$

vyjadřující **celkovou energii signálu** v intervalu $t \in (-\infty, +\infty)$. Výraz $|A(j\omega)|^2 d\omega$ představuje část energie, kterou přenáší složka signálu $f(t)$ na kmitočtu ω v kmitočtovém pásmu $d\omega$. Integrací (1.26) dospíváme k podobnému závěru jako u periodických funkcí – srovnej s tvrzením (1.11) a (1.12):

- celková energie signálu je součtem dílčích energií na jednotlivých kmitočtech, které ale u neperiodické funkce tvoří spojitou množinu $\omega \in (-\infty, +\infty)$.

Výraz $|A(j\omega)|^2$ nese název „spektrální hustota energie“.

1.7 Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

U spojitých signálů zpracovávaných počítačem jsou k dispozici funkční hodnoty v konečném časovém úseku T . Funkce $f(t)$ je v něm tzv. ovzorkována, tj. zachycena jako

množina hodnot $f_k = f(kT_s)$, kde $T_s = konst$ je tzv. vzorkovací perioda (matematický popis vzorkování je v **kap.1.11**). Počet funkčních hodnot (vzorků) je $N = T/T_s$, pořadové číslo vzorku $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$. Spojitě ubíhající čas t je nahrazen „diskrétním“ časem $kT_s = k \frac{T}{N}$. I když je funkce $f(t)$ neperiodická, můžeme ji s ohledem na omezený interval měření považovat za periodickou s periodou T a použít (1.9),(1.10). Je tedy

$$f_k = f(kT_s) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \cdot e^{+jn \frac{2\pi}{T} k \frac{T}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \cdot e^{\frac{2\pi j n}{N} k} \quad (1.27)$$

a n -tý koeficient převedeme z integrálního tvaru na součtový (náhradou $dt \rightarrow T_s$):

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{NT_s} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-jn \frac{2\pi}{T} k \frac{T}{N}} \cdot T_s = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-\frac{2\pi j n}{N} k} \quad (1.28)$$

k ... pořadové číslo vzorku vyšetřované funkce $f(t)$

n ... pořadové číslo harmonické složky.

Pro výpočet je výhodné, je-li počet vzorků N celistvou mocninou čísla 2, neboť vede na čtvercovou matici $N \times N$ s některými užitečnými vlastnostmi.

Příklad 3: Je k dispozici 8 vzorků funkce, $N = 8$, $k = 0, 1, 2, \dots, 7$, n -tý koeficient spektra je

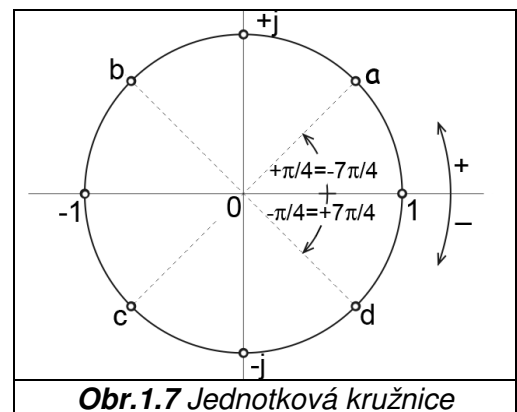
$$A_n = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 f_k \cdot e^{-j \frac{\pi}{4} nk} \quad (1.29)$$

Pro danou hodnotu n je A_n součtem 8 členů (sčítáme podle rostoucího indexu k). Zavedeme stručné označení pro základní směry (násobky $-\pi/4$):

$$e^{-j \cdot 0} = 1, \quad e^{-j \cdot \frac{\pi}{4}} = d, \quad e^{-j \cdot \frac{2\pi}{4}} = -j, \quad e^{-j \cdot \frac{3\pi}{4}} = c, \\ e^{-j \cdot \frac{4\pi}{4}} = -1, \quad e^{-j \cdot \frac{5\pi}{4}} = b, \quad e^{-j \cdot \frac{6\pi}{4}} = j, \quad e^{-j \cdot \frac{7\pi}{4}} = a$$

viz 8 bodů na jednotkové kružnici v **obr.1.7**.

Při výpočtu koeficientu A_1 krojujeme po jednotkové kružnici v záporném smyslu s přírůstkem úhlu $-\pi/4$, tj. v pořadí $1, d, -j, c, -1, \dots$. U koeficientu A_2 je úhlový krok dvojnásobný, tj. v pořadí $1, -j, -1, j, 1, \dots$, u koeficientu A_3 trojnásobný, tj. $1, c, j, d, -1, \dots$ atd. Rovnici (1.29) je možno



pro všechny koeficienty A_n najednou zapsat v maticové podobě

$$\begin{matrix} n=0 \\ \dots \\ \text{číslo} \\ \text{harm.} \\ \text{složky} \\ n \\ \dots \\ n=N-1 \end{matrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d & -j & c & -1 & b & j & a \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & c & j & d & -1 & a & -j & b \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & b & -j & a & -1 & d & j & c \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & a & j & b & -1 & c & -j & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} \begin{matrix} k=0 \\ \dots \\ \text{pořad.} \\ \text{číslo} \\ \text{vzorku} \\ k \\ \dots \\ k=N-1 \end{matrix} \quad (1.30)$$

postupné násobení k vzorků od $0 \rightarrow N-1$

Čtvercová matice o rozměru 8×8 (tzv. matice $[DFT]$) je symetrická a má další výhodné vlastnosti, zobecnitelné i na větší počet vzorků, pokud bude N celou mocninou čísla 2:

1) Protože dvojice prvků a, d a b, c jsou komplexně sdružené (a samozřejmě též $j, -j$), je 2.řádek matice komplexně sdružený s posledním, 3.řádek je komplexně sdružený s předposledním atd., takže obecně (počínaje $n=1$) je n -tý řádek komplexně sdružený s $(N-n)$ -tým. To vyplývá i z následující úpravy

$$e^{\frac{-2\pi j(N-n)k}{N}} = e^{-2\pi jk} \cdot e^{\frac{2\pi jn}{N}k} = e^{\frac{2\pi jn}{N}k}$$

jejímž výsledkem je číslo komplexně sdružené k poslednímu součiniteli v (1.28). Stejným způsobem bychom zjistili, že totéž platí i pro sloupce, tj. druhý sloupec je komplexně sdružený s posledním, třetí s předposledním atd.;

2) Funkční hodnoty f_k jsou reálné, takže musí být při komplexně sdružených řádcích sdružené i příslušné koeficienty, tj. $A_1 = \overline{A_7}$, $A_2 = \overline{A_6}$ atd., neboli

$$A_{N-n} = \overline{A_n} \quad (1.31)$$

3) Vyjmeme-li z matice $[DFT]$ první řádek i sloupec, které obsahují jen jedničky,

zůstane submatice prvků $e^{\frac{-2\pi jn}{N}k}$, která má rozměr $(N-1) \times (N-1)$ a kromě výše uvedených pravidel o komplexní sdruženosti řádků i sloupců je symetrická podle obou

diagonál. Z rovnice (1.30) je rovněž vidět, že koeficient $A_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k$ je střední hodnotou

funkce ve vyšetřovaném intervalu.

Poznámky: 1) Dokonalejší formou DFT je FFT („rychlá (fast) Fourierova transformace“), která využívá výhod speciálního tvaru matice $[DFT]$ k usnadnění součinu (1.30);

2) Program MATLAB pod procedurou FFT pouze násobí matici $[DFT]$ vektorem funkčních hodnot $[f_k]$ a neprovádí dělení počtem vzorků N jako v (1.30), takže výsledkem je

$$FFT(f_k) = N \cdot A_n$$

Platnost spektra vypočteného z DFT

Z rovnice (1.30) získáme stejný počet koeficientů spektra A_n , jako je počet zadaných vzorků f_k funkce $f(t)$ (kterých je N). Je ale třeba si uvědomit, že relevantní je pouze první polovina koeficientů, jak vyplývá z následující úvahy:

- funkce $f(t)$ je při DFT uvažována jako periodická s periodou $T = NT_s$, takže jednotlivé

vypočtené harmonické složky (spektrální čáry) leží na kmitočtech $n \cdot \frac{2\pi}{T}$, $n=0,1,2,\dots,N-1$.

Podle tzv. **Shannonova teoremu** by vzorkovací kmitočet $\omega_V = 2\pi/T_s$ měl být alespoň dvakrát vyšší než nejvyšší kmitočet, obsažený ve vzorkované funkci, tj. $\omega_V \geq 2\omega_{\max}$.

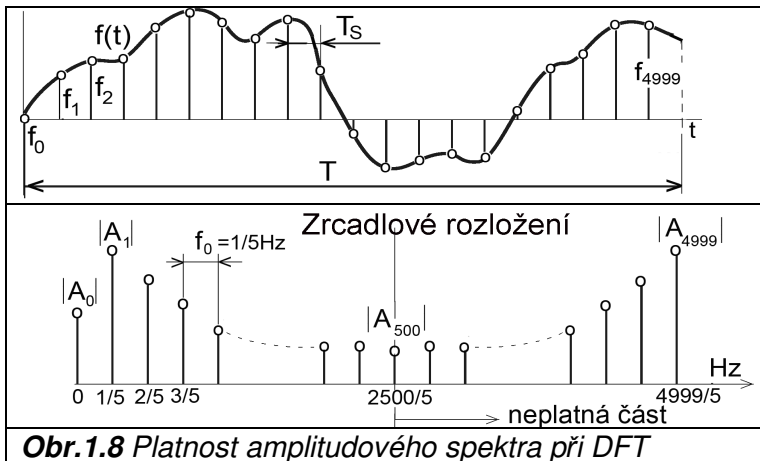
Kmitočet nejvyšší harmonické složky tak může být maximálně

$\omega_{\max} = n_{\max} \cdot \frac{2\pi}{T} \leq \frac{1}{2} \omega_V = N \cdot \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{T_s}$, takže nejvyšší pořadový index složky je

$$n_{\max} = N/2 \quad (1.32)$$

Na základě této podmínky je třeba z množiny vypočtených koeficientů A_n vyloučit všechny komplexně sdružené na vyšších kmitočtech (tj. pro $n > N/2$) – viz **obr.1.8**.

Tím se vysvětluje „nadbytečnost“ sdružených koeficientů v (1.31). Komplexně sdružené složky A_{-n} na záporných kmitočtech - viz vztah (1.10a) - jsou i nadále nedílnou součástí spektra!!



Příklad 4 (obr.1.8): Doba měření $T = 5s$, vzorkovací perioda $T_s = 0,001s$, počet získaných vzorků $N = 5000$, základní vzdálenost dvou spektrálních čar (krok) na ose kmitočtů je $f_0 = 1/T = 0,2Hz$. Pomocí FFT je

získáno 5000 hodnot $A_0 \div A_{4999}$, z nichž stačí uvažovat pouze hodnoty $A_0 \div A_{2499}$.

1.8 Laplaceova transformace

Předpoklady:

1) Funkce $f(t) = 0$ pro $t < 0$;

2) Funkce $f(t)$ a její derivace mají v čase $t = 0$ limitu zprava;

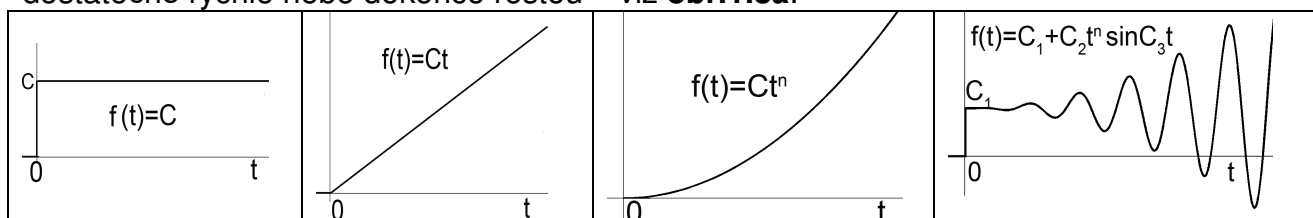
3) Funkce $f(t)$ je v čase $t > 0$ po částech spojitá až na konečný počet míst s tzv. nespojitostí 1.řádu (tam jsou limity při blíženi se zprava a zleva rozdílné, ale konečné). Někdy se požadavky zpřísňují tak, aby ve všech bodech platilo

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(t+\varepsilon) + f(t-\varepsilon)}{2}$$

V úvodu **kap.1.5** byla zmíněna podmínka (1.19a) „absolutní integrovatelnosti“ funkce $f(t)$ pro existenci Fourierova integrálu. Dále stačí uvažovat jen kladné časy

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (1.33)$$

Některé technicky důležité funkce však tuto podmínku nespĺňují, neboť s časem neklesají dostatečně rychle nebo dokonce rostou – viz **obr.1.8a**.



Obr.1.8a Příklady absolutně neintegrovatelných funkcí

V takovém případě stačí aplikovat F. transformaci (1.17),(1.18) na rychleji klesající funkci $f_{\sigma}(t) = f(t) \cdot e^{-\sigma t}$. Reálné (v tomto případě kladné) číslo σ musí být vhodně zvoleno tak, aby integrál (1.17) existoval. F. obraz této nové funkce (uvažujeme již jen definiční obor nezáporných časů) je

$$\mathbf{F}\{f_{\sigma}(t)\} = A_{\sigma}(j\omega) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \quad (1.34)$$

Zpětná transformace je $\mathbf{F}^{-1}\{A_{\sigma}(j\omega)\} = f(t) \cdot e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} A_{\sigma}(j\omega) \cdot e^{+j\omega t} d\omega$

a po úpravě $f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} A_{\sigma}(j\omega) \cdot e^{+j\omega t} d\omega$

Protože integrujeme podle ω , je možno výraz $e^{\sigma t}$ přesunout za integrál, tj.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} A_{\sigma}(j\omega) \cdot e^{\sigma t} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} A_{\sigma}(j\omega) \cdot e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega \quad (1.35)$$

Po substituci $s = \sigma + j\omega$ dostaneme z (1.34) konečný vztah

$$\mathbb{F}\{f_{\sigma}(t)\} = A_{\sigma}(j\omega) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = A(s) = L\{f(t)\} \quad (1.36)$$

Poslední integrál je formálně shodný s (1.17), protože integrujeme podle času a je možná záměna s za $j\omega$. Takto přešel F. obraz funkce $f_{\sigma}(t)$ na tzv. **Laplaceův obraz** funkce $f(t)$ (v matematickém názvosloví je $f(t)$...originál, $A(s)$...obraz).

Poznámky: 1) Směrnici pro volbu σ lze formulovat jednoduše tak, že funkce $f(t)$ musí růst pomaleji než exponenciála $e^{\sigma t}$, tj. její průběh se pod tuto exponenciálu „schová“. Číslo σ je tzv. „**exponent růstu**“ funkce, nebo též „**hranice konvergence**“ jejího Laplaceova obrazu, který je tedy definován pro všechna čísla s , jejichž reálná složka splňuje podmínku

$$\text{Re } s > \sigma$$

2) Podle poznatků z **kap.1.4** představuje funkce $A_{\sigma}(j\omega)$ množinu komplexních amplitud, příslušných harmonickým složkám s kmitočty ω . Tyto harmonické složky ve svém nekonečném součtu dají v čase t funkční hodnotu $f_{\sigma}(t) = f(t) \cdot e^{-\sigma t}$. Převedeme-li člen $e^{-\sigma t}$ na pravou stranu této pomyslné rovnosti (tj. ve tvaru $e^{+\sigma t}$), lze zjednodušeně a „nematematicky“ vyjádřit fyzikální smysl F. i L. transformace takto:

- **Fourierovou transformací je neperiodická funkce $f(t)$ rozložena na nekonečný součet harmonických složek s konstantními nekonečně malými amplitudami, jejichž kmitočty si jsou nekonečně blízké.** Tento rozklad však není možný v případě, že funkce s časem neklesá dostatečně rychle;

- **Laplaceovou transformací je neperiodická funkce $f(t)$ opět rozložena na nekonečný součet harmonických složek s nekonečně malými, ale exponenciálně se měnícími amplitudami, jejichž kmitočty si jsou nekonečně blízké.** Změna amplitud (tedy jejich nárůst při $\sigma > 0$) je dána vztahem $e^{\sigma t}$ a číslo σ je nutno volit tak, aby se funkce $f(t)$ pod funkcí $e^{\sigma t}$ „schovala“. Konverguje-li ale integrál (1.36), konverguje i jeho číselný násobek, takže podmínku pro naši funkci lze dále zmírnit a její „střechu“ zvýšit tak, aby platilo

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma t} \quad (1.36a)$$

kde M je vhodně zvolené reálné kladné číslo. Uvidíme později, že Laplaceova transformace je použitelná univerzálně i na funkce $f(t)$ s časem klesající, takže exponent růstu σ může být i záporný a funkce je rozložena na harmonické složky s amplitudami klesajícími.

3) Ze vztahu (1.36) lze dokázat platnost dvou limit

$$\begin{aligned} 1) \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ \text{Re } s > \sigma}} A(s) &= 0 \\ 2) \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \text{Re } s > \sigma}} A(s) &= \int_0^{\infty} f(t) dt \dots \text{plocha pod čarou funkce } f(t), \text{ jen pro } \sigma < 0 \end{aligned} \quad (1.36b)$$

- například funkce $\sin \Omega t$ má Laplaceův obraz $\frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}$ a hranici konvergence $\sigma = 0$ (viz pravidlo 16 v tabulce v **kap.1.12**), takže počítání druhé limity pro $s \rightarrow 0$ není korektní. Kromě toho platí, že nevlastní integrál $\int_0^{\infty} \sin \Omega t dt$ není definován. Podobné je to i u funkce \cos ;

- funkce e^{at} má Laplaceův obraz $\frac{1}{s-a}$ a hranici konvergence $\sigma = \text{Re} a$ (pravidlo 8 v téže tabulce). L.obraz funkce e^{-t} má tedy $\sigma = -1$, takže lze počítat obě limity, u funkce e^{+t} (kde je $\sigma = +1$) pouze limitu pro $s \rightarrow \infty$;

4) Pouze několik málo typů funkcí roste rychleji než exponenciála (např. e^{t^2}), takže u nich není možno uplatnit výše uvedený postup s volbou σ a stanovit L. obraz. Funkce e^{-t^2} L.obraz má a ten dokonce konverguje pro libovolné s , tj. exponent růstu $\sigma = -\infty$!!

5) Příklad exponenciálně rostoucí harmonické funkce $e^{(\sigma+j\omega)t}$ (tj. $\sigma > 0$) je na **obr.1.8b**.

1.9 Zpětná Laplaceova transformace

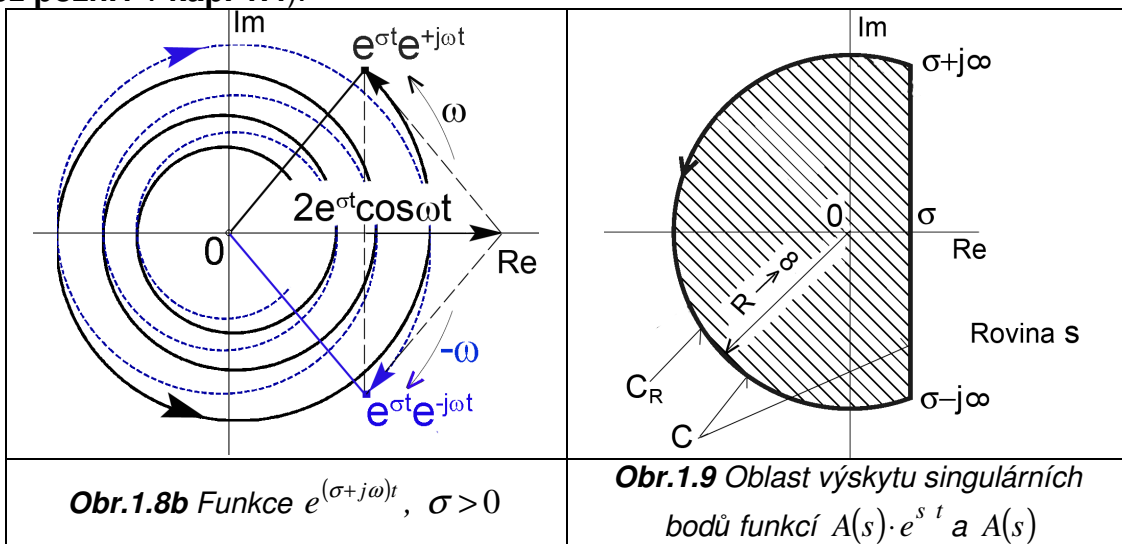
Dosazením (1.36) do (1.35) a dále $s = \sigma + j\omega$, $ds = j \cdot d\omega$ dostáváme vztah pro **zpětnou L. transformaci**, který vyjadřuje předchozí neexaktní slovní vysvětlení:

$$f(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} A(s) \cdot e^{s t} ds = L^{-1}\{A(s)\} \quad (1.37)$$

Komplexní čísla $A(s)$ jsou pro dané hodnoty σ, ω amplitudami a funkce

$$e^{s t} = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

vyjadřuje rostoucí ($\sigma > 0$) nebo klesající ($\sigma < 0$) harmonické kmity. Skutečnost, že amplitudy jsou nekonečně malé, je opět vyjádřena nepřímo diferenciálem ds a integrací (viz též **pozn.1** v **kap. 1.4**).



Obr.1.8b Funkce $e^{(\sigma+j\omega)t}$, $\sigma > 0$

Obr.1.9 Oblast výskytu singulárních bodů funkcí $A(s) \cdot e^{s t}$ a $A(s)$

Srovnáním (1.17),(1.18) a (1.36),(1.37) je vidět, že F. a L. obrazy funkce se formálně liší pouze záměnou ryze imaginární proměnné veličiny $j\omega$ za komplexní proměnnou s (skutečný hlubší rozdíl je však v podmínce absolutní integrovatelnosti funkce $f(t)$, takže oblast použití Fourierovy transformace je užší). Bylo již zmíněno, že integrál (1.36) konverguje pro všechna komplexní čísla s , pro která platí $\text{Re} s > \sigma$, tj. v části komplexní roviny vpravo od svislice $\sigma = \text{konst}$ v **obr.1.9**. To znamená, že eventuální singulární body funkce $A(s) \cdot e^{s t}$ (a zároveň i funkce $A(s)$) mohou ležet pouze vlevo od této svislice, tj. ve vyšrafované oblasti s hranicí C_R o nekonečně velkém poloměru $R \rightarrow \infty$. Tím je ulehčen výpočet integrálu (1.37) při zpětné transformaci, neboť lze použít tzv. **reziduovou větu**, viz vztah (1.39e) v dalším textu.

1.10. Křivkový integrál, Laurentova řada, reziduová věta

(podrobněji v lit.[1],[2],[9]).

Při výpočtu **křivkového integrálu funkce komplexní proměnné** $F(s)$ na oblouku C je často potřebná tzv. **věta o odhadu**:

$$\left| \int_C F(s) ds \right| \leq |F(s)|_{max} \cdot L_C \quad (1.37a)$$

kde funkce $F(s)$ je na oblouku C spojitá a omezená s maximem $|F(s)|_{max}$ a L_C je délka oblouku, který může být obecně otevřený i uzavřený s konečným i nekonečným poloměrem R .

Dále platí tzv. **reziduová věta**, podle které je možno rozvinout funkci $F(s)$ v okolí každého z jejích singulárních bodů do mocninné (tzv. **Laurentovy**) řady, mající tvar

$$F(s) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} b_n (s-p)^n \quad \text{kde } p \dots \text{singulární bod} \quad (1.38)$$

Způsob určení koeficientů b_n uvedeme pouze pro velmi časté tzv. **ryze lomené racionální funkce** (tj. podíly mnohočlenů komplexní proměnné s , kde jmenovatel má vyšší stupeň mocnin než číselník). V takovém případě je třeba nejdříve zjistit kořeny jmenovatele a provést rozklad na částečné zlomky (např. podle **kap.1.16**). Při rozvoji do Laurentovy řady lze s výhodou použít známého pravidla pro nekonečný součet **geometrické** mocninné řady s kvocientem q :

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{pro } |q| < 1 \quad (1.38a)$$

Příklad 5: Je dána ryze lomená racionální funkce

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + \Omega^2} = (\text{po rozkladu}) = \frac{j/2\Omega}{s + j\Omega} - \frac{j/2\Omega}{s - j\Omega}, \quad \Omega \dots \text{reálné kladné číslo.}$$

Singulární body (póly) jsou $p_1 = -j\Omega$, $p_2 = +j\Omega$. Chceme-li rozvést funkci $F(s)$ do Laurentovy řady např. v okolí singulárního bodu $p_1 = -j\Omega$, je třeba postupovat po mocninách členu $(s + j\Omega)$, tj. upravit druhý částečný zlomek:

$$\frac{-j/2\Omega}{s - j\Omega} = \frac{-j/2\Omega}{s + j\Omega - 2j\Omega} = \frac{-j}{2\Omega} \cdot \frac{-1}{2j\Omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{s + j\Omega}{2j\Omega}} = \frac{1}{4\Omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s + j\Omega}{2j\Omega} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j)^n}{(2\Omega)^{n+2}} (s + j\Omega)^n$$

Použití vzorce (1.38a) je dovoleno pro čísla s ležící v okolí bodu $p_1 = -j\Omega$ taková, aby pro

kvocient geometrické řady platilo $|q| = \left| \frac{s + j\Omega}{2j\Omega} \right| < 1$, tj. $|s + j\Omega| < 2\Omega$. Čísla s tedy musí ležet uvnitř

kružnice se středem v bodě $p_1 = -j\Omega$ a poloměrem 2Ω , viz **obr.1.9a**. Zahrnutím prvního částečného zlomku vychází kompletní Laurentova řada ve tvaru

$$F(s) = \frac{j/2\Omega}{s + j\Omega} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j)^n}{(2\Omega)^{n+2}} (s + j\Omega)^n = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-j)^n}{(2\Omega)^{n+2}} (s + j\Omega)^n \quad (1.38b)$$

V tomto případě nemá řada členy s exponenty $n < -1$, tj. koeficienty $b_{-2}, b_{-3}, b_{-4}, \dots$ v (1.38) jsou nulové. Existuje jediný člen se záporným exponentem a koeficientem

$$b_{-1(1)} = (-j)^{-1} / 2\Omega = j / 2\Omega$$

V okolí singulárního bodu $p_2 = +j\Omega$ je postup obdobný a čtenář si může sám odvodit výsledek

$$F(s) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(+j)^n}{(2\Omega)^{n+2}} (s - j\Omega)^n \quad (1.38c)$$

Tato řada má opět jediný člen se záporným exponentem a koeficientem $b_{-1(2)} = -j / 2\Omega$. Oblastí konvergence je kružnice se stejným poloměrem 2Ω , ale se středem v bodě $+j\Omega$.

Koeficient Laurentovy řady b_{-1} je obecně nazýván jako tzv. **reziduum** funkce v bodě p , znak $\text{rez}_p[F(s)]$.

Příslušný člen řady je $\frac{b_{-1}}{s-p}$ a lze dokázat, že při integraci funkce $F(s)$ po uzavřené křivce obkličující bod p odpadnou všechny členy kromě tohoto a výsledkem je číslo $2j\pi b_{-1}$.

Důkaz: Předpokládejme, že bod p je středem kružnice C o poloměru ρ , viz **obr.1.9b**. Pro komplexní čísla s ležící na kružnici platí

$$s = p + \rho \cdot e^{j\varphi}, \quad ds = j\rho \cdot e^{j\varphi} d\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Křivkový integrál funkce $F(s)$ na kružnici C je

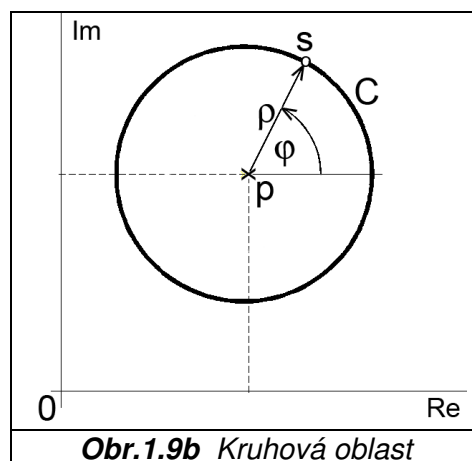
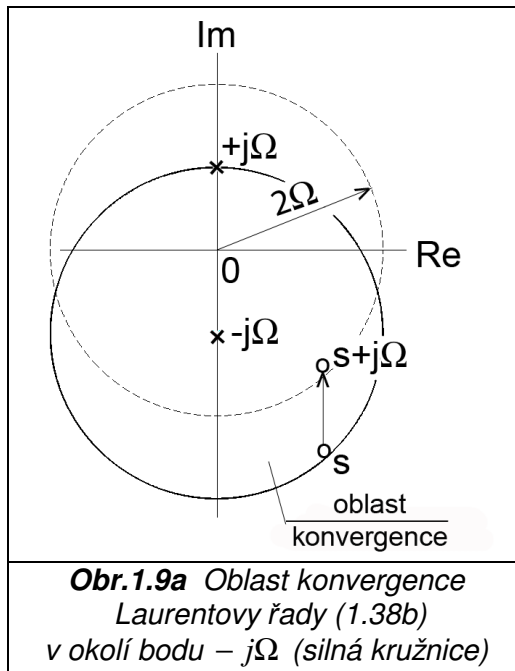
$$\oint_{C+} F(s) ds = \oint_{C+} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} b_n (s-p)^n ds = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \oint_{C+} b_n (s-p)^n ds$$

a každý jednotlivý sčítanec

$$\begin{aligned} \oint_{C+} b_n (s-p)^n ds &= b_n \int_0^{2\pi} \rho^n e^{jn\varphi} j\rho \cdot e^{j\varphi} d\varphi = \\ &= j b_n \rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{j(n+1)\varphi} d\varphi = \frac{j b_n \rho^{n+1}}{j(n+1)} e^{j(n+1)\varphi} \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \end{aligned}$$

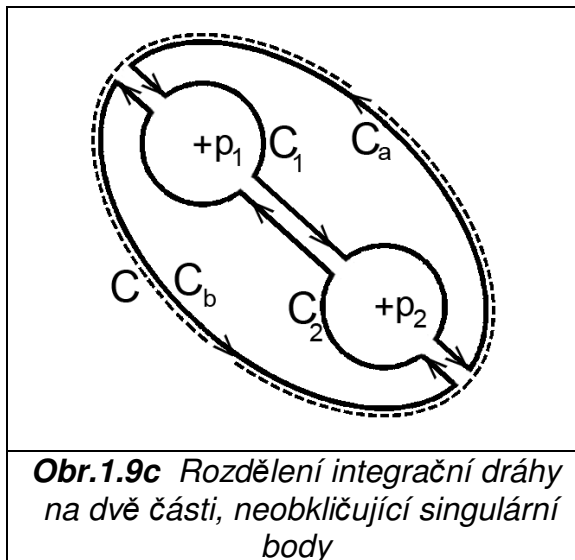
(kružnici obíháme v kladném smyslu, tj. proti směru hodin a vnitřek křivky zůstává po naší levé ruce). Pro všechna čísla $n \neq -1$ (kdy nedělíme nulou) dostáváme po dosazení mezí integrace nulu, neboť $e^{j2k\pi} = 1$ pro $k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$. Zbývá jen $n = -1$, takže

$$\oint_{C+} F(s) ds = b_{-1} \oint_{C+} \frac{ds}{s-p} = b_{-1} \int_0^{2\pi} \frac{j\rho \cdot e^{j\varphi}}{\rho \cdot e^{j\varphi}} d\varphi = 2j\pi b_{-1} \quad (1.39a)$$



Tímto je důkaz proveden pro jeden singulární bod, obklíčený kružnicí. Kružnice C může mít maximálně takový poloměr ρ , aby neobklíčila kromě bodu p ještě nějaký další singulární bod funkce $F(s)$, neboť v okolí jiného bodu je rovněž jiný tvar Laurentovy řady.

Dále vyšetříme případ, kdy uzavřená křivka C má obecný tvar a obklíčuje více singulárních bodů funkce $F(s)$ - viz např. čárkovaná čára v **obr.1.9c**. Integrační dráhu C rozdělíme řezem a vytvoříme dvě křivky C_a, C_b (silné čáry), které se vyhýbají singulárním bodům p_1, p_2 po obloucích kružnic C_1, C_2 . Postupujeme-li při integraci v kladném směru šipek, nutně platí pro součet integrálů



Obr.1.9c Rozdělení integrační dráhy na dvě části, neobklíčovující singulární body

$$\oint_{C+} = \oint_{C_{a+}} + \oint_{C_{b+}} - \oint_{C_{1-}} - \oint_{C_{2-}}$$

Integrály na přímkových úsecích se navzájem vyruší (integrujeme na nich dvakrát a v opačných směrech) a po kružnicích C_1, C_2 přitom postupujeme v záporném smyslu.

Dále využijeme tzv. **fundamentální Cauchyho integrační větu**:

- křivkový integrál funkce $F(s)$ po uzavřené křivce, uvnitř které neleží žádný singulární bod této funkce, je roven nule. Důkaz Cauchyho věty vychází ze známé vlastnosti reálných funkcí dvou proměnných, že křivkový integrál po uzavřené křivce z totálního diferenciálu je roven nule. Podle této věty jsou tedy integrály po křivkách C_a, C_b nulové a obrácením směru obíhání kružnic C_1, C_2 vychází

$$\oint_{C+} = \oint_{C_{1+}} + \oint_{C_{2+}}$$

Použitím (1.39a) na obě kružnice C_1, C_2 a zobecněním na větší počet singulárních bodů dostáváme konečně úplnou **reziduovou větu**:

- pokud uzavřená křivka C obklíčuje více singulárních bodů funkce $F(s)$, platí

$$\oint_{C+} F(s)ds = 2j\pi \sum \text{rez} \quad (1.39b)$$

kde jednotlivé sčítance (rezidua) zjistíme postupně Laurentovými rozvoji funkce $F(s)$ ve všech singulárních bodech ležících uvnitř křivky C .

Poznámky: 1) Pokud zvolíme křivku C tak, aby obklíčovala oba singulární body $p_{1,2} = \mp j\Omega$, bude v předchozím **příkladu 5** platit

$$\oint_{C+} \frac{ds}{s^2 + \Omega^2} = 2j\pi (b_{-1(1)} + b_{-1(2)}) = 0$$

2) Pozorný čtenář jistě zaznamenal, že v řešeném příkladu se jednalo o jednonásobné singulární body (póly) a obě příslušné Laurentovy řady měly pouze jeden člen se záporným exponentem. Tato souvislost není náhodná a obecně platí, že je-li pól k -násobný, má Laurentova řada k členů se záporným exponentem, tj.

$$F(s) = \sum_{n=-k}^{n=+\infty} b_n (s-p)^n \quad (1.39c)$$

3) Z příkladu je dále patrné, že konstanta v čitateli každého částečného zlomku a příslušné reziduum jsou si rovny. Jde opět o obecnou vlastnost ryze lomených racionálních funkcí, viz důkaz v **kap.1.16**;

4) Existují tři možné typy singulárních bodů funkcí komplexní proměnné:

a) **odstranitelné singularity** (vedoucí např. na neurčitý výraz $0/0$ apod.), kde existuje konečná limita funkce (viz např. Laplaceovy obrazy impulzních funkcí v **kap.1.12**). Laurentova řada nemá členy se zápornými exponenty, takže **reziduum v odstranitelné singularitě je nulové**;

b) nejčastějšími singulárními body jsou tzv. **póly**, ve kterých funkční hodnota roste nade všechny meze, což je způsobeno např. dělením nulou (to nastává ve výše řešeném příkladu nebo např. u funkce $F(s)=1/\sin s$ v bodě $s=0$). Laurentova řada má konečný počet členů se zápornými exponenty;

c) tzv. **podstatné singularity**, ve kterých má Laurentova řada nekonečný počet členů se zápornými exponenty (např funkce $F(s)=\sin(1/s)$ v bodě $s=0$).

Pro křivkový integrál funkce komplexní proměnné platí tzv. **Jordanovo lemma**, viz **lit.[9]** a **obr.1.9**: je-li na části kruhového oblouku $C_{R \rightarrow \infty}$ s nekonečně velkým poloměrem funkce $F(s)$ spojitá a dále $|F(s)| \rightarrow 0$, potom pro každé číslo $t > 0$ je nulový i křivkový integrál

$$\int_{C_{R \rightarrow \infty}} F(s) \cdot e^{s t} ds = 0 \quad (1.39d)$$

Vzhledem k tomu, že $A(\infty)=0$ (viz (1.36b)), je možno Jordanovo lemma aplikovat na L.obraz $A(s)$. Integrace proběhne v **obr.1.9** po uzavřené křivce C ve směru šipky a přitom obklíčíme všechny možné singulární body funkce $A(s) \cdot e^{s t}$ (resp. funkce $A(s)$, neboť ty jsou stejné). Při oběhu stačí ale uvažovat jen svislý přímkový úsek:

$$\oint_C A(s) \cdot e^{s t} ds = 2 j \pi \sum \operatorname{rez} [A(s) \cdot e^{s t}] = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} + \int_{C_{R \rightarrow \infty}} = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} A(s) \cdot e^{s t} ds$$

Srovnáním s (1.37) platí pro **zpětnou Laplaceovu transformaci**

$$f(t) = \sum \operatorname{rez} [A(s) \cdot e^{s t}] \quad (1.39e)$$

přičemž výpočet reziduí proběhne ve všech existujících singulárních bodech funkce $A(s) \cdot e^{s t}$ resp. $A(s)$.

Výpočet reziduí bez nutnosti rozvoje do Laurentovy řady

Jestliže bod p je k -**násobným pólem** funkce $F(s)$, má Laurentova řada tvar (1.39c) a lze použít obecný vztah pro výpočet rezidua

$$\operatorname{rez}_p [F(s)] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s \rightarrow p} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} [F(s)(s-p)^k] \quad (1.40a)$$

takže pro nejčastější případ jednonásobného pólu je

$$\operatorname{rez}_p [F(s)] = \lim_{s \rightarrow p} (s-p)F(s) \quad (1.40b)$$

(srovnej s dříve řešeným příkladem 5).

Má-li L.obraz $A(s)$ funkce $f(t)$ více jednonásobných pólů p_i , platí tedy

$$f(t) = \sum_i \operatorname{rez}_{p_i} [A(s) \cdot e^{s t}] = \sum_i \lim_{s \rightarrow p_i} (s-p_i)A(s) \cdot e^{s t} \quad (1.41)$$

Příklad 6: Laplaceův obraz $A(s) = \frac{1}{s^2 + \Omega^2} = \frac{1}{(s+j\Omega)(s-j\Omega)}$ má póly $p_{1,2} = \mp j\Omega$. Zpětná transformace pomocí reziduové věty dává

$$f(t) = \lim_{s \rightarrow -j\Omega} (s + j\Omega)A(s)e^{st} + \lim_{s \rightarrow +j\Omega} (s - j\Omega)A(s)e^{st} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow -j\Omega} \frac{e^{st}}{s - j\Omega} + \lim_{s \rightarrow +j\Omega} \frac{e^{st}}{s + j\Omega} = \frac{e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}}{2j\Omega} = \frac{1}{\Omega} \sin \Omega t$$

(viz též pravidlo 16 v kap.1.12).

Většinou se lze vyhnout integraci i výpočtu reziduí, neboť existují rozsáhlé slovníky transformačních dvojic $f(t) \Leftrightarrow A(s)$, viz např. lit.[3], [5]. Pro usnadnění práce uvedeme několik základních pravidel, z nichž některá jsou totožná s pravidly pro Fourierovu transformaci. Pouze je třeba mít na paměti, že L.transformaci lze aplikovat na funkce času definované v oblasti $t \in \langle 0, \infty \rangle$. Předem se ale zmíníme o dvou výjimečných funkcích.

1.11 Speciální funkce (distribuce)

Zvláště důležitou a výjimečnou dvojicí funkcí, které budeme dále potřebovat, je **Heavisideova funkce** $\eta(t)$ a **Diracův impuls** $\delta(t)$. Jsou používány hlavně při zkoumání dynamických soustav a jejich řízení. Operace s nimi podléhají teorii tzv. zobecněných funkcí (**distribucí**), u nichž jsou definovány abstraktnější postupy, než jsme dosud v matematické analýze poznali (hlavně u derivace a integrace nebo limity). Zde se omezíme pouze na zjednodušený výklad. Vyjděme z funkce $\tilde{\eta}(t)$ definované podle obr.1.10:

$$\tilde{\eta}(t) = 0 \text{ pro } t \in (-\infty, -a/2), \tilde{\eta}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{a}t \text{ pro } t \in \langle -a/2, +a/2 \rangle, \tilde{\eta}(t) = 1 \text{ pro } t \in (+a/2, +\infty)$$

Heavisideovu funkci získáme limitním přechodem $\eta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \tilde{\eta}(t)$, takže je třeba rozlišit tři případy:

$$\eta(t) = 0 \text{ pro } t \in (-\infty, 0)$$

$\eta(t) = 1/2$ pro $t = 0$ (viz též definici spojitosti po částech v úvodu kap.1.8);

$$\eta(t) = 1 \text{ pro } t \in (0, +\infty) \quad (1.42)$$

Diracův impuls $\delta(t)$ (též „delta funkci nultého řádu“) lze získat derivací a opět limitním přechodem

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{d\tilde{\eta}(t)}{dt} \quad (1.43)$$

Vychází nekonečně úzký i vysoký obdélníkový impuls s jednotkovou plochou v časovém intervalu $t \in \langle -a/2, +a/2 \rangle$ o výšce $B = 1/a \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$, viz

též obr.1.6.

Posuneme-li funkci $\tilde{\eta}(t)$ v obr.1.10 vpravo o čas τ , získáme funkci $\tilde{\eta}(t - \tau)$ a výsledkem popsaného postupu budou posunuté funkce $\eta(t - \tau)$ a $\delta(t - \tau)$.

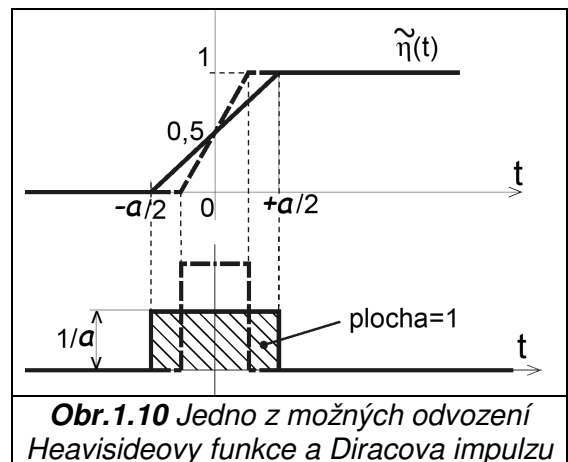
Poznámky: 1) Výše uvedená úmluva se ale často bez újmy na správnosti nedodrhuje:

- u Heavisideovy funkce $\eta(t)$ (známé též pod názvem „jednotkový skok“) se uvádí např.

$$\eta(t) = 0 \text{ pro } t \in (-\infty, 0)$$

$$\eta(t) = 1 \text{ pro } t \in (0, +\infty) \quad (1.44)$$

Někteří autoři připouštějí v čase $t = 0$ libovolnou hodnotu $0 \leq \eta(t) \leq 1$ ale dodržují velikost limity při přibližování se zprava $\eta(0+) = 1$;



2) Heavisideovu funkci často používáme v případech, kdy je třeba funkci $f(t)$, definovanou na nekonečném intervalu $t \in (-\infty, +\infty)$, upravit tak, aby byla v určitém úseku nulová. Např. funkce $f(t) \cdot \eta(t - \tau)$ je nulová v intervalu $t \in (-\infty, \tau)$.

Diracův impulz $\delta(t)$ se vymyká obvyklému rámci matematické analýzy zvláště při integraci (blíže viz lit.[3]). U L. transformace se jeho definiční obor oproti obr.1.6 a 1.10 posouvá na interval $t \in \langle 0, a \rangle$, $a \rightarrow 0$, tj. funkce $\tilde{\eta}(t)$ se posouvá o $a/2$ vpravo. Definice se někdy zjednodušuje na podmínky $\delta(t) = 0$ pro $t \neq 0$, $\delta(t) = +\infty$ pro $t = 0$. Podle obvyklých zásad by ale měl být integrál funkce, která je nenulová pouze v jediném bodě, roven nule. Proto je správnější vyjít ze vztahu (1.43) a integrovat podle obr.1.10, takže

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a} t \right) \right] dt = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a} \int_{-a/2}^{+a/2} dt \right] = 1 \quad (1.45)$$

Tentýž výsledek získáme i s posunutými mezemi integrace $0 \rightarrow a$.

Pro naše další účely postačí zjednodušené chápání derivace a integrace

$$\delta(t) = \frac{d\eta(t)}{dt} \quad \text{nebo naopak} \quad \eta(t) = \int_0^t \delta(\tau) d\tau \quad (1.46)$$

Mezemi integrace v (1.46) je vyjádřeno, že funkce $\eta(t)$ je pro $t \in (0, +\infty)$ jednotková.

Vzorkování funkce

Postupem podle (1.43) lze odvodit následující velmi důležitou tzv. **vzorkovací schopnost Diracova impulsu**:

- budeme zkoumat součin spojitě funkce $f(t)$ a Diracova impulsu posunutého o čas $\tau = \text{konst}$ vpravo. Pomocí derivace posunuté funkce $\tilde{\eta}(t - \tau)$ určíme limitu integrálu

$$\int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \delta(t - \tau) f(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{t=\tau-a/2}^{t=\tau+a/2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a} (t - \tau) \right) \right] f(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a} \int_{\tau-a/2}^{\tau+a/2} f(t) dt \right]$$

Podle věty o střední hodnotě musí v intervalu $\langle \tau - a/2, \tau + a/2 \rangle$ existovat alespoň jedno číslo c ,

které splňuje podmínku $\int_{t=\tau-a/2}^{t=\tau+a/2} f(t) dt = a \cdot f(c)$, takže

$$\int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f(t) \cdot \delta(t - \tau) dt = \lim_{a \rightarrow 0} f(c) = f(\tau) \quad (1.47)$$

Vztah (1.47) ukazuje matematický postup **vzorkování funkce** $f(t)$, tj. získání vzorku (funkční hodnoty) v daném čase τ . Z geometrického hlediska se jedná o impuls, mající nekonečně malou šířku $a \rightarrow 0$, výšku $f(\tau)/a$ a plochu $f(\tau)$. Při výpočtu **Laplaceova obrazu jednoho vzorku** podle (1.36) stačí integrovat v intervalu $t \in \langle \tau - a/2, \tau + a/2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \int_{t=\tau-a/2}^{t=\tau+a/2} \frac{f(\tau)}{a} e^{-s t} dt &= \frac{f(\tau)}{as} \left(e^{as/2} - e^{-as/2} \right) = (\text{l'Hosp. pravidlem a pro } a \rightarrow 0) = \\ &= f(\tau) \cdot e^{-s \tau} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Dále položíme $\tau = kT_s$ ($k = 0, 1, 2, \dots$ pořadové číslo vzorku, $T_s \dots$ vzorkovací perioda). Takto lze

pomocí řady posunutých Diracových impulsů $\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_s)$ nahradit funkci $f(t)$ v oboru $t \geq 0$ posloupností vzorků podle (1.47):

$$\int_{t=0}^{+\infty} f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_s) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t=0}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - kT_s) dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s) \quad (1.49)$$

Laplaceův obraz této posloupnosti vytvoříme postupem (1.48):

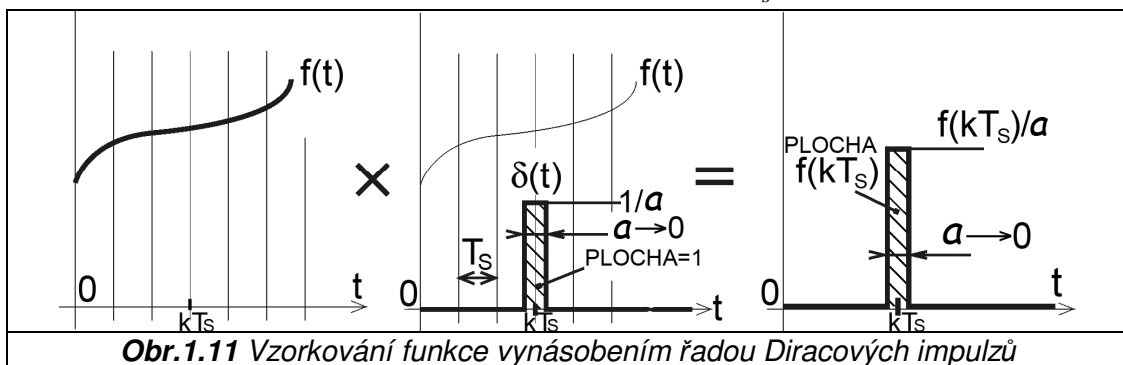
$$L\left\{\sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s) \cdot e^{-skT_s} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s) \cdot z^{-k}$$

kde jsme zavedli novou komplexní proměnnou $z = e^{+sT_s}$. Tento součet je tzv. **Z** - transformace posloupnosti funkčních hodnot $f(kT_s)$, pro kterou je zaveden symbol

$$\mathbf{Z}\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k} \quad (1.50)$$

Shrnutí: **Z** - transformace posloupnosti funkčních hodnot $\{f_k\}$ - tzv. vzorků funkce $f(t)$ - vznikla Laplaceovou transformací integrálu ze součinu funkce $f(t)$ s řadou Diracových impulzů, vytvořených v časech kT_s (viz **obr.1.11**) a zavedením nové komplexní proměnné

$$z = e^{+sT_s} \quad \text{nebo obráceně} \quad s = \frac{1}{T_s} \ln z \quad (1.51)$$



Význam **Z** - transformace vynikne u diskrétních systémů, kde místo se spojitými funkcemi a diferenciálními rovnicemi pracujeme s posloupnostmi funkčních hodnot a rovnicemi diferenčními.

1.12 Základní pravidla pro Laplaceovu transformaci

Důkazy neuvádíme, neboť jde většinou o snadnou aplikaci vztahu (1.36). Někde je přímá analogie k výpočtu podle **kap.1.5** (např. **13**), u složitějších důkazů (např. **23**) odkazujeme na **lit.[2], [3]**. Znovu poznamenáváme, že exponent růstu funkce $f(t)$ je σ , takže její L.obraz $A(s)$ konverguje pro všechna s , kde je $\text{Re } s > \sigma$. Dále platí, že $f(t) = 0$ pro $t < 0$, což se někdy zdůrazňuje součinem s Heavisideovou funkcí, tj. $f(t) \cdot \eta(t)$.

Název operace	Originál	Laplaceův obraz a oblast jeho konvergence
1. Lineárnost, aditivnost	$K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)$ K_1, K_2 též komplexní	$K_1 A_1(s) + K_2 A_2(s)$ platí větší ze σ_1, σ_2
2. Podobnost	$f(at)$ $a \dots$ reálné, kladné	$\frac{1}{a} A\left(\frac{s}{a}\right)$ $\text{Re } s > a\sigma$
3. Časové posunutí vpravo	$f(t-a)$ při $t > a \geq 0$ 0 při $t < a$	$e^{-a s} A(s)$
4. Diracův impulz $\delta(t)$	$t \in \langle 0, a \rangle, a \rightarrow 0$, výška = $1/a$	1
5. Heavisideova funkce $\eta(t)$ (jednotkový skok v počátku)	$t \in (-\infty, 0), \eta(t) = 0$ $t \in (0, +\infty), \eta(t) = 1$ $\sigma = 0$	$\frac{1}{s}$ $\text{Re } s > 0$

6. Rampová funkce	t $\sigma = 0$	$1/s^2$	$\text{Res} > 0$
7. Mocnina	$t^n, n = 0, 1, 2, \dots$ $\sigma = 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Res} > 0$
8. Exponenciála	e^{at}, a též komplexní $\sigma = \text{Re } a$	$\frac{1}{s-a}$	$\text{Res} > \text{Re } a$
9. Násobení exponenciálou	$f(t) \cdot e^{at}, a$ též komplexní	$A(s-a)$	$\text{Re } s > \sigma + \text{Re } a$
10. n-tá derivace obrazu	$(-t)^n f(t)$	$\frac{d^n A(s)}{ds^n}$	$\text{Re } s > \sigma$
11. Integrál obrazu	$f(t)/t$	$\int_s^\infty A(q) dq$	$\text{Re } s > \sigma$
12. Limita obrazu v nekonečnu		$\lim_{s \rightarrow \infty} A(s) = 0$ $\text{Re } s > \sigma$	
13. První derivace originálu	$\dot{f}(t)$	$sA(s) - f(0+)$	
14. n-tá derivace originálu	$f^{(n)}(t)$, existují derivace $\dot{f}(0+), \dots, f^{(n-1)}(0+)$	$s^n A(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \cdot f^{(k)}(0+)$	
15. Integrace originálu	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{A(s)}{s}$	
16. Sinus	$\sin \Omega t$ $\sigma = 0$	$\frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}$	$\text{Re } s > 0$
17. Násobení sinem	$f(t) \sin \Omega t$	$\frac{1}{2j} [A(s - j\Omega) - A(s + j\Omega)]$	
18. Cosinus	$\cos \Omega t$ $\sigma = 0$	$\frac{s}{s^2 + \Omega^2}$	$\text{Re } s > 0$
19. Násobení cosinem	$f(t) \cos \Omega t$	$\frac{1}{2} [A(s - j\Omega) + A(s + j\Omega)]$	
20. Počáteční hodnota originálu	$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot A(s)$		
21. Konečná hodnota originálu (pokud $f(\infty)$ existuje)	$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot A(s)$		
22. Konvoluce znak $K(t) = f_1 * f_2$	$K(t) = f_1 * f_2 =$ $= \int_{\tau=0}^{\tau=t} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$	$K(s) = A_1(s) \cdot A_2(s)$	
23. Součin originálů (též „konvoluce obrazů“)	$f_1(t) \cdot f_2(t)$ (exponenty růstu σ_1, σ_2)	$\frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} A_1(q) A_2(s-q) dq$ $\sigma_1 < \sigma < \text{Re } s - \sigma_2$	

Poznámky: 1) Dalekosáhlý význam mají pravidla 13, 14, 15, která umožňují řešit diferenciální a integrální rovnice pomocí algebraických úkonů. Jde o podobný kvalitativní posun jako u logaritmů, které umožňují přejít z násobení na sčítání;

2) Pravidlo o obrazu derivace resp. integrace originálu se potvrzuje např. srovnáním pravidel 5, 6 nebo 16, 18;

3) Laplaceův integrál (1.36) lze derivovat jako integrál závislý na parametru, takže

$$\frac{dA(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left[\int_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \right] = \int_{t=0}^{\infty} \frac{d}{ds} [f(t) \cdot e^{-st}] dt = \int_{t=0}^{\infty} -t \cdot f(t) \cdot e^{-st} dt = L\{-t \cdot f(t)\}$$

Tím jsme potvrdili pravidlo **10** pro $n=1$;

4) U funkcí $\delta(t)$ a $\eta(t)$ můžeme narazit při aplikaci některých výše uvedených pravidel na určité rozpory, které se dají exaktně vysvětlit jen s pomocí teorie distribucí - viz **lit.[3]**:

- Diracův impuls nespĺňuje pravidlo **12**;

- při uplatnění pravidla **15** na (1.46) sice rozpor nevzniká, neboť $L\left\{\int_0^t \delta(\tau) d\tau\right\} = L\{\eta(t)\} = \frac{1}{s}$, ale

podle pravidla **13** bychom obdrželi nesprávný výsledek $L\left\{\frac{d\eta(t)}{dt}\right\} = s \cdot \frac{1}{s} - \eta(0+) = 0$. Právě v tomto posledním případě není možno uvažovat limitu $\eta(0+) = 1$ (viz **lit.[3]**), neboť musí vyjít

$$L\left\{\frac{d\eta(t)}{dt}\right\} = s \cdot \frac{1}{s} = 1 = L\{\delta(t)\}$$

5) U pravidla **3** platí v souladu s úvodním předpokladem v **kap.1.8**, že posunutá funkce $f(t-a)$ je v intervalu $t \in (0, a)$ nulová. Přesto se někdy tato vlastnost zdůrazňuje rozšířeným zápisem posunuté funkce pomocí součinu s Heavisideovou funkcí ve tvaru

$$f(t-a) \cdot \eta(t-a)$$

6) Z pravidel **1** a **8** lze pomocí Eulerových vztahů (1.2) přímo odvodit pravidla **16** a **18**:

- polořme $a = \Lambda + j\Omega$, $\text{Re } a = \Lambda = 0$

$$L\{e^{at}\} = L\{e^{j\Omega t}\} = \frac{1}{s - j\Omega}, \text{ a podobně } L\{e^{-j\Omega t}\} = \frac{1}{s + j\Omega}$$

L.transformace rozdílu je

$$L\{e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}\} = L\{2j \sin \Omega t\} = \frac{1}{s - j\Omega} - \frac{1}{s + j\Omega} = \frac{2j\Omega}{s^2 + \Omega^2}$$

a transformace součtu

$$L\{e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}\} = L\{2 \cos \Omega t\} = \frac{1}{s - j\Omega} + \frac{1}{s + j\Omega} = \frac{2s}{s^2 + \Omega^2}$$

Hranice konvergence všech funkcí je stále $\sigma = \text{Re } a = 0$.

Podobně z pravidla **9** dokážeme **17** a **19**:

$$L\{f(t)e^{at}\} = L\{f(t)e^{j\Omega t}\} = A(s - j\Omega)$$

$$L\{f(t)e^{-j\Omega t}\} = A(s + j\Omega)$$

Odečtením vychází

$$L\{f(t)e^{j\Omega t} - f(t)e^{-j\Omega t}\} = L\{2j \cdot f(t) \sin \Omega t\} = A(s - j\Omega) - A(s + j\Omega)$$

a sečtením

$$L\{f(t)e^{j\Omega t} + f(t)e^{-j\Omega t}\} = L\{2f(t) \cos \Omega t\} = A(s - j\Omega) + A(s + j\Omega)$$

7) Při výpočtu Laplaceova obrazu funkce posunuté vlevo o čas a , tj. $f(t+a)$, je třeba stále respektovat interval časů $\langle 0, \infty \rangle$. Správnější by tedy bylo psát $f(t+a) \cdot \eta(t)$, aby bylo zřejmé, že úsek funkce vlevo od počátku je po posunutí vynulován, což je nutno zohlednit při integraci:

$$L\{f(t+a)\} = \int_0^{\infty} f(t+a)e^{-st} dt = (\text{po substituci } \tau = t+a, d\tau = dt) = \\ = \int_a^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau-a)} d\tau = e^{as} \int_a^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{as} \left(\int_0^{\infty} \dots - \int_0^a \dots \right) = e^{as} \left(F(s) - \int_0^a f(t)e^{-st} dt \right)$$

8) Laplaceův obraz funkce $\text{tg}(t)$ neexistuje.

Příklad 7: Funkce $f_1(t) = t$ má podle pravidla 6 L.obraz $A_1(s) = 1/s^2$, hranice konvergence $\sigma_1 = 0$. Funkce $f_2(t) = e^{at}$ má podle 8 obraz $A_2(s) = \frac{1}{s-a}$, hranice konvergence $\sigma_2 = \text{Re } a$.

Vyšetříme L.obraz součinu $f_3(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) = t \cdot e^{at}$ třemi způsoby:

a) Podle 9 je $A_3(s) = A_1(s-a) = \frac{1}{(s-a)^2}$

b) Podle 10 je $A_3(s) = -\frac{d}{ds} A_2(s) = \frac{1}{(s-a)^2}$

c) Podle pravidla 23 (někdy též nazývaného „inverzní konvoluce, konvoluce obrazů“):
- zde je s považováno za konstantu a integrační proměnnou je q , takže L.obrazy jsou

$$A_1(q) = 1/q^2, \quad A_2(q) = \frac{1}{q-a}$$

$$A_3(s) = L\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} A_1(q) A_2(s-q) dq = \frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{s-q-a} dq$$

Funkce $F(q) = \frac{1}{q^2(s-q-a)}$ má dvojnásobný pól v počátku a další pól $s-a$. Integrál vypočteme

pomocí reziduové věty, přičemž hranice σ u integrační cesty C v obr.1.9 musí splnit podmínku pravidla 23

$$\sigma_1 < \sigma < \text{Re } s - \sigma_2, \text{ tj. } 0 < \sigma < \text{Re } s - a$$

Pól $s-a$ tedy nutně leží vpravo od hranice σ , takže při aplikaci věty (1.39b) stačí uvažovat pouze dvojnásobný pól v počátku a příslušné reziduum určit podle (1.40a):

$$A_3(s) = \text{rez}_0 \left[\frac{1}{q^2(s-q-a)} \right] = \frac{1}{1!} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{d}{dq} \left[\frac{q^2}{q^2(s-q-a)} \right] = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{(s-q-a)^2} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

Zpětná transformace funkce $A_3(s)$ výpočtem rezidua v jejím dvojnásobném pólu $p=a$ dává samozřejmě výsledek

$$f_3(t) = \text{rez}_a \left[A_3(s) e^{st} \right] = \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow a} \frac{d}{ds} \left[\frac{e^{st}}{(s-a)^2} (s-a^2) \right] = \lim_{s \rightarrow a} s t \cdot e^{st} = t \cdot e^{at}$$

Příklad 8: Funkce $f_1(t) = \sin \Omega t$ má podle pravidla 16 L.obraz $A_1(s) = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}$, hranice konvergence je $\sigma_1 = 0$. Funkce $f_2(t) = t$ má podle 6 obraz $A_2(s) = 1/s^2$ a $\sigma_2 = 0$.

Vyšetříme L.obraz součinu $f_3(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) = t \sin \Omega t$ třemi způsoby:

a) Podle 10 je $A_3(s) = -\frac{d}{ds} A_1(s) = \frac{2s\Omega}{(s^2 + \Omega^2)^2}$

b) Podle 17 je $A_3(s) = \frac{1}{2j} [A_2(s-j\Omega) - A_2(s+j\Omega)] = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{(s-j\Omega)^2} - \frac{1}{(s+j\Omega)^2} \right] = \frac{2s\Omega}{(s^2 + \Omega^2)^2}$

c) Podle 23 je $A_1(q) = \frac{\Omega}{q^2 + \Omega^2} = \frac{\Omega}{(q-j\Omega)(q+j\Omega)}$

$$A_2(q) = \frac{1}{q^2}, \quad A_2(s-q) = \frac{1}{(s-q)^2}$$

$$A_3(s) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{\Omega}{(q-j\Omega)(q+j\Omega)} \cdot \frac{1}{(s-q)^2} dq$$

Funkce $F(q) = \frac{\Omega}{(q-j\Omega)(q+j\Omega)(s-q)^2}$ má jednoduché póly $\pm j\Omega$ a dvojnásobný pól s . Při integraci pomocí reziduové věty musí hranice σ u integrační cesty C v **obr.1.9** splnit podmínku $\sigma_1 < \sigma < \text{Re } s - \sigma_2$, tj. $0 < \sigma < \text{Re } s$

Pól s tedy leží vpravo od hranice σ a stačí uvažovat pouze póly $\pm j\Omega$. Podle (1.40b) je

$$\begin{aligned} A_3(s) &= \text{rez}_{+j\Omega}[F(q)] + \text{rez}_{-j\Omega}[F(q)] = \lim_{q \rightarrow +j\Omega} \left[\frac{\Omega}{(q+j\Omega)(s-q)^2} \right] + \lim_{q \rightarrow -j\Omega} \left[\frac{\Omega}{(q-j\Omega)(s-q)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2j(s-j\Omega)^2} - \frac{1}{2j(s+j\Omega)^2} = \frac{1}{2j} \cdot \frac{(s+j\Omega)^2 - (s-j\Omega)^2}{(s-j\Omega)^2(s+j\Omega)^2} = \frac{2s\Omega}{(s-j\Omega)^2(s+j\Omega)^2} = \frac{2s\Omega}{(s^2 + \Omega^2)^2} \end{aligned}$$

Poznámka: Funkce $A_3(s)$ má dva dvojnásobné póly $\pm j\Omega$, takže zpětná transformace by proběhla podle vztahu (viz (1.40a))

$$f_3(t) = \lim_{s \rightarrow +j\Omega} \frac{d}{ds} \left[\frac{2s\Omega e^{st}}{(s+j\Omega)^2} \right] + \lim_{s \rightarrow -j\Omega} \frac{d}{ds} \left[\frac{2s\Omega e^{st}}{(s-j\Omega)^2} \right] = \dots = t \sin \Omega t$$

Výpočet derivací, limit a následné úpravy přenecháváme čtenáři.

Příklad 9: Funkce $A(s) = \frac{\Omega}{s(s^2 + \Omega^2)}$ má tři jednoduché póly $p_1 = 0$, $p_{2,3} = \pm j\Omega$.

Zpětná transformace pomocí reziduové věty proběhne podle vztahu

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{p_{1,2,3}} \text{rez} \left[\frac{\Omega e^{st}}{s(s^2 + \Omega^2)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\Omega e^{st}}{s^2 + \Omega^2} \right] + \lim_{s \rightarrow +j\Omega} \left[\frac{\Omega e^{st}}{s(s+j\Omega)} \right] + \lim_{s \rightarrow -j\Omega} \left[\frac{\Omega e^{st}}{s(s-j\Omega)} \right] = \\ &= \frac{1}{\Omega} - \frac{e^{j\Omega t}}{2\Omega} - \frac{e^{-j\Omega t}}{2\Omega} \quad \text{neboli} \quad \boxed{f(t) = \frac{1}{\Omega} (1 - \cos \Omega t)} \end{aligned} \quad (1.51a)$$

V **kap.1.13** ukážeme další možnost zpětné transformace pomocí konvoluce a v **kap.2.3** poznáme, že v tomto příkladu se jedná o problém kmitání netlumeného systému hmota - pružina při vybuzení skokem síly - srovnej (1.51a) s (2.9c) při $k = \Omega$.

U L.obrazů ve tvaru racionálních funkcí (podílů polynomů proměnné s) platí, že zpětná transformace je možná jen v případě, že stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele (tzv. ryze lomené racionální funkce) a je možný rozklad na částečné zlomky (viz **kap.1.16**). Ve výjimečném případě, kdy stupeň čitatele i jmenovatele jsou stejné, je ale možno využít Diracova impulzu $\delta(t)$:

$$\textbf{Příklad 10:} \quad L^{-1} \left\{ \frac{s+a}{s} \right\} = L^{-1} \left\{ 1 + \frac{a}{s} \right\} = \delta(t) + a \cdot \eta(t) \quad (1.51b)$$

(viz pravidla **1, 4, 5** a **obr.1.15** dole).

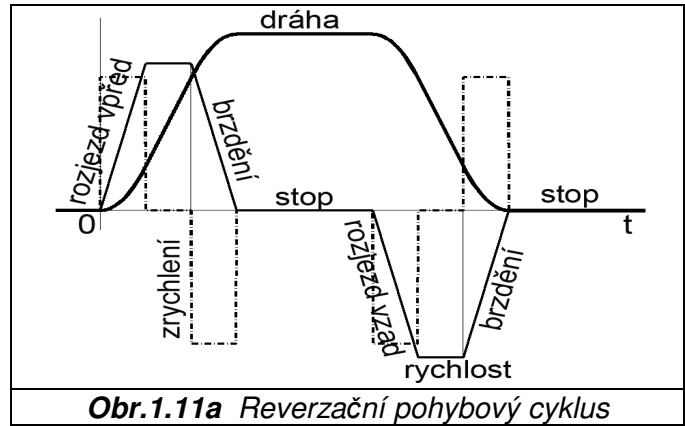
$$\textbf{Příklad 11:} \quad L^{-1} \left\{ \frac{s}{s+a} \right\} = L^{-1} \left\{ 1 - \frac{a}{s+a} \right\} = \delta(t) - a \cdot e^{-at} \quad (\text{viz pravidlo } \mathbf{8}).$$

Výpočty limit obrazů pro $s \rightarrow 0$ a $s \rightarrow \infty$ zde nepodléhají obecným pravidlům, zmíněným v **kap.1.8**, neboť Diracův impulz je speciální funkcí (distribucí) a není např. možná ani zpětná transformace pomocí výpočtu reziduí podle (1.39e).

Obrazy některých impulzních funkcí (blíže viz **kap.4**)

Při rozbíhání a zastavování strojů se často vyskytuje typický průběh rychlosti a zrychlení ve tvaru konečných impulzů např. podle **obr.1.11a**.

Zde se jedná o reverzační pohyb tam – zpět, vyvolaný pomocí obdélníkových impulzů síly motoru (tj. jeho zrychlení), např. u obráběcího stroje. Dále uvedeme L. obrazy několika typických impulzů, definovaných na konečném intervalu $t \in \langle 0, a \rangle$. Některé z nich (pilový, trojúhelníkový, obdélníkový) vycházejí z obecného lichoběžníku – viz **obr.1.12a**.



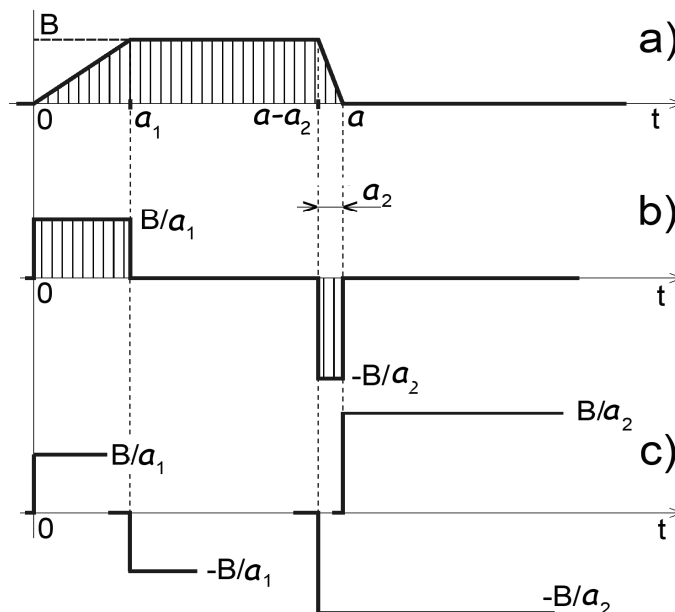
Obr.1.11a Reverzační pohybový cyklus

Délka lichoběžníkového impulzu je a , výška B , trvání náběžné hrany a_1 , sestupné hrany a_2 . Impulz lze získat integrací dvojice obdélníkových impulzů z **obr.1.12b**, které opět vzniknou sečtením čtyř posunutých Heavisideových funkcí z **obr.1.12c**.

L. obrazem lichoběžníku je tedy obraz integrálu sečtených Heavisideových funkcí

$$L \left\{ \int_0^t \left[\frac{B}{a_1} \eta(\tau) - \frac{B}{a_1} \eta(\tau - a_1) - \frac{B}{a_2} \eta(\tau - (a - a_2)) + \frac{B}{a_2} \eta(\tau - a) \right] d\tau \right\} = \text{(podle pravidel 3, 5, 15)}$$

$$= \frac{B}{s} \left(\frac{1}{a_1 s} - \frac{e^{-a_1 s}}{a_1 s} - \frac{e^{-(a-a_2)s}}{a_2 s} + \frac{e^{-as}}{a_2 s} \right) = \frac{B}{s^2} \left(\frac{1 - e^{-a_1 s}}{a_1} + e^{-as} \cdot \frac{1 - e^{+a_2 s}}{a_2} \right) \quad (1.52)$$



Obr.1.12a,b,c Odvození lichoběžníku integrací součtu skoků

Z obecného vztahu (1.52) je možno získat např. L. obraz

- obdélníku pro $a_1 = a_2 = 0$ (zde je třeba použít známou limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\pm x}}{x} = \mp 1$)
- souměrného trojúhelníku pro $a_1 = a_2 = a/2$
- vzestupného (sestupného) pilového impulzu pro $a_1 = a, a_2 = 0$ resp. $a_1 = 0, a_2 = a$.

Tyto a další tvary impulzů jsou uvedeny v následující tabulce.

Poznámky: 1) Pokud je to možné, určujeme nejnadhěji L.obrazy impulzů s konečnou délkou prostou integrací (1.36) na konečném časovém intervalu, tj.

$$\int_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-s t} dt = \int_{t=0}^a f(t) \cdot e^{-s t} dt$$

Protože integrand je po uplynutí času a identicky nulový, **Laplaceovy obrazy konečných impulzů nutně konvergují v celé komplexní rovině pro libovolnou hodnotu s a jejich hranice konvergence je vždy $\sigma = -\infty$** . Singulárními body v následující tabulce jsou sice $s = 0$ (pravidla 24, 26÷28), $s = b$ (pravidlo 25) a $s = \pm j\Omega$ (pravidlo 29), jedná se ale o **odstranitelné singularity**, jak snadno dokážeme limitními přechody $s \rightarrow 0$, $s \rightarrow b$, $s \rightarrow \pm j\Omega$ (např. pomocí l'Hospitalova pravidla);

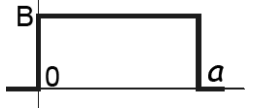
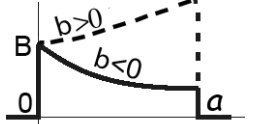
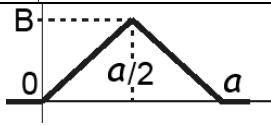
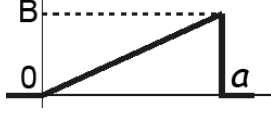
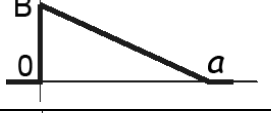
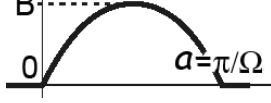
2) U zmíněných konečných impulzů si čtenář může dokázat, že limitní hodnota L.obrazů pro $s \rightarrow 0$ je $A(0) = \int_0^{\infty} f(t)dt$, viz (1.36b). Jedná se tedy o plochu pod čarou funkce $f(t)$;

3) Protože jde o časové průběhy s konečnou plochou pod čarou, je splněna podmínka absolutní integrovatelnosti (1.33) a existují u nich rovněž Fourierovy obrazy (frekvenční spektra). V příslušných vztazích tedy lze navzájem zaměňovat $s \leftrightarrow j\omega$;

4) Rovnici konečného impulzu lze získat „vyříznutím“ úseku ze základní (tzv. „vytvěřující“) funkce, definované na nekonečném časovém intervalu, pomocí součinu s funkcí

$$\gamma(t) = \eta(t) - \eta(t-a) \quad (1.52a)$$

což je rovnice pravoúhlého impulzu o jednotkové výšce a délce a . Podrobný postup vytvoření impulzu bude vysvětlen v **kap.4**.

24. Obdélníkový impulz výška B , délka a $B[\eta(t) - \eta(t-a)] = B \cdot \gamma(t)$		$B \cdot \frac{1 - e^{-a s}}{s}$
25. Exponenciální impulz Be^{bt} délka a		$B \cdot \frac{1 - e^{(b-s)a}}{s - b}$
26. Souměrný trojúhelníkový impulz výška B , délka a		$\frac{2B}{a} \cdot \frac{(1 - e^{-a s/2})^2}{s^2}$
27. S časem rostoucí pilový impulz výška B , délka a		$\frac{B}{a} \cdot \frac{1 - e^{-a s} (1 + as)}{s^2}$
28. S časem klesající pilový impulz výška B , délka a		$\frac{B}{a} \cdot \frac{as + e^{-a s} - 1}{s^2}$
29. Sinusový impulz $B \sin \Omega t$ jedna půlvlna, délka $a = \pi/\Omega$		$B\Omega \cdot \frac{1 + e^{-a s}}{s^2 + \Omega^2}$

Použití reziduové věty při zpětné transformaci L.obrazů konečných impulzů podle (1.39e) není možné, neboť v odstranitelných singularitách jsou rezidua nulová a vyšla by identicky nula!! Protože obrazy obsahují transcendentní funkci e^{-as} , je nutno aplikovat Heavisideovu funkci $\eta(t)$ včetně pravidla 3 o posunutí. Správný postup ukážeme na příkladech:

Příklad 12: Obdélníkový impulz (pravidlo 24): $A(s) = B \cdot \frac{1 - e^{-a s}}{s} = \frac{B}{s} - \frac{Be^{-a s}}{s}$

První člen je podle pravidla 5 obrazem Heavisideovy funkce $B\eta(t)$ a druhý podle pravidla 3 obrazem posunuté Heavisideovy funkce $B\eta(t-a)$, takže správný výsledek (rovnice obdélníkového impulzu v časové oblasti) je

$$L^{-1} \left\{ B \cdot \frac{1 - e^{-a s}}{s} \right\} = B[\eta(t) - \eta(t-a)] = B \cdot \gamma(t)$$

Příklad 13: Exponenciální impuls s počáteční výškou $B=1$ (pravidlo 25):

$$A(s) = \frac{1 - e^{(b-s)a}}{s-b} = \frac{1}{s-b} - \frac{e^{b a}}{s-b} e^{-a s} = A_1(s) - A_2(s)$$

Na první člen lze použít pravidlo 8 přímo, u druhého je nutno uplatnit pravidlo 3 a vyjádřit posunutí vpravo o čas a pomocí posunuté Heavisideovy funkce. Rovnice exponenciálního impulsu je

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}\{A_1(s) - A_2(s)\} = e^{b t} - e^{b a} \cdot e^{b(t-a)} \cdot \eta(t-a) = e^{b t} - e^{b t} \cdot \eta(t-a) = \\ &= e^{b t} [\eta(t) - \eta(t-a)] = e^{b t} \cdot \gamma(t) \end{aligned}$$

Příklad 14: Vzestupný pilový impuls (pravidlo 29): $A(s) = \frac{B}{as^2} - \frac{Be^{-a s}}{as^2} - \frac{Be^{-a s}}{s}$

První člen představuje rampovou funkci se směrnici B/a (pravidlo 6), druhý tutéž funkci posunutou vpravo o čas a a třetí posunutou Heavisideovu funkci o výšce B . Rovnice pilového impulsu je

$$f(t) = \frac{B}{a}t - \frac{B}{a}(t-a) \cdot \eta(t-a) - B \cdot \eta(t-a) = \frac{B}{a}t - \frac{B}{a}t \cdot \eta(t-a) = \frac{B}{a}t [\eta(t) - \eta(t-a)] = \frac{B}{a}t \cdot \gamma(t)$$

Riziko omylu při použití reziduové věty na zpětnou L. transformaci obrazů konečných impulsů přiblíží následující příklad:

Příklad 15: Funkce $A(s) = \Omega \frac{1 - e^{-a s}}{s(s^2 + \Omega^2)}$ má tři jednoduché póly $p_1 = 0$, $p_{2,3} = \pm j\Omega$, stejně jako funkce v příkladu 9. Zpětná transformace pomocí reziduové věty by vyžadovala součet tří limit:

$$\begin{aligned} f(t) &= \Omega \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-a s}) e^{st}}{s^2 + \Omega^2} + \lim_{s \rightarrow +j\Omega} \frac{(1 - e^{-a s}) e^{st}}{s(s + j\Omega)} + \lim_{s \rightarrow -j\Omega} \frac{(1 - e^{-a s}) e^{st}}{s(s - j\Omega)} \right) = \\ &= -\frac{(1 - e^{-j\Omega a}) e^{j\Omega t}}{2\Omega} - \frac{(1 - e^{j\Omega a}) e^{-j\Omega t}}{2\Omega} = \frac{1}{\Omega} \left[\frac{e^{j\Omega(t-a)} + e^{-j\Omega(t-a)}}{2} - \frac{e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{\Omega} [\cos\Omega(t-a) - \cos\Omega t] \end{aligned} \quad (1.52b)$$

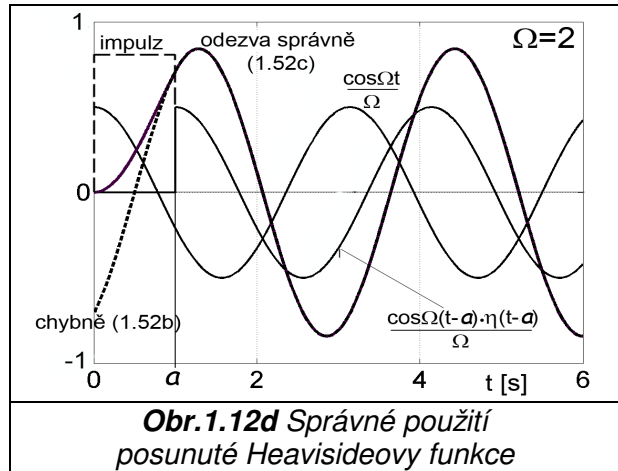
Výsledek není správný, neboť nezohledňuje základní předpoklad Laplaceovy transformace, podle kterého musí být funkce $\cos\Omega t$ pro záporné časy nulová, takže posunutá funkce $\cos\Omega(t-a)$ je nulová až do času a . Funkci $A(s)$ ale můžeme rozložit na dva sčítance

$$A(s) = \frac{\Omega}{s(s^2 + \Omega^2)} - \frac{\Omega e^{-a s}}{s(s^2 + \Omega^2)}$$

Při zpětné transformaci prvního sčítance lze použít výsledek z příkladu 9, u druhého je nutno aplikovat pravidlo 3 o posunutí. Správný postup je následující:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\Omega} [1 - \cos\Omega t] \cdot \eta(t) - \frac{1}{\Omega} [1 - \cos\Omega(t-a)] \cdot \eta(t-a) = \\ &= \frac{1}{\Omega} [\eta(t) - \eta(t-a) + \cos\Omega(t-a) \cdot \eta(t-a) - \cos\Omega t \cdot \eta(t)] \end{aligned} \quad (1.52c)$$

Na **obr.1.12d** jsou zobrazeny výsledky obou způsobů výpočtu: chybného (1.52b) a správného (1.52c) pro hodnoty $\Omega = 2$, $a = 1$ s. Srovnáním grafů zjišťujeme, že po uplynutí času posunutí a nastane shoda chybného i správného výpočtu !! V **kap.4.2** ukážeme, že tento poznatek lze zobecnit na všechny L.obrazy, které lze rozložit na součin dvou výrazů, z nichž jeden je obrazem konečného impulsu o délce a. V našem případě jde o obdélníkový impuls podle pravidla **24** a celá funkce $A(s)$ je L.obrazem kmitavého pohybu netlumené soustavy hmota-pružina s vlastním kmitočtem Ω při zapůsobení impulsu síly:



Obr.1.12d Správné použití posunuté Heavisideovy funkce

$$A(s) = A_1(s) \cdot A_2(s) = \frac{1 - e^{-a s}}{s} \cdot \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}$$

Zajímá-li nás tedy průběh pohybu hmoty až po zániku síly, stačí výpočet pomocí reziduové věty, který bývá u některých složitějších mechanických systémů jednodušší.

1.13 Konvoluční integrál, součin obrazů

Protože konvoluční integrál z pravidla **22**

$$K(t) = f_1 * f_2 = \int_{\tau=0}^{\tau=t} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \quad (1.53)$$

má zásadní význam (umožňuje totiž **výpočet originálu k součinu dvou L.obrazů**), uvedeme příslušný důkaz. Jedná se o integrál závislý na parametru t , integrační proměnnou je τ . Prozatím uvažujme horní mez integrace v (1.53) rovnu $\tau = \infty$. Laplaceův obraz s upravenou horní mezí je podle (1.36)

$$\int_{t=0}^{\infty} \left[\int_{\tau=0}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right] \cdot e^{-s t} dt = \int_{t=0}^{\infty} \int_{\tau=0}^{\infty} f_1(t-\tau) \cdot e^{-s t} f_2(\tau) d\tau dt =$$

(a po záměně pořadí integrace)

$$= \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} f_1(t-\tau) \cdot e^{-s t} f_2(\tau) dt d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} f_2(\tau) \left[\int_{t=0}^{\infty} f_1(t-\tau) e^{-s t} dt \right] d\tau =$$

(v hranaté závorce je L.obraz posunuté funkce, viz pravidlo **3**)

$$= \int_{\tau=0}^{\infty} f_2(\tau) A_1(s) \cdot e^{-\tau s} d\tau = A_1(s) \int_{\tau=0}^{\infty} f_2(\tau) \cdot e^{-\tau s} d\tau = A_1(s) \cdot A_2(s)$$

Dále platí po rozepsání mezí integrace

$$\int_{\tau=0}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_{\tau=t}^{\infty} = K(t) + \int_{\tau=t}^{\infty} 0 \cdot f_2(\tau) d\tau$$

neboť při $\tau < 0$ je $f_1(\tau) = 0$, takže při $\tau > 0$ je $f_1(-\tau) = 0$ a o čas t posunutá funkce $f_1(t-\tau)$ je nulová při $\tau > t$ (viz **obr.1.13**). Druhý sčítanec tedy odpadá a pravidlo **22** je potvrzeno. Hodnota $K(t)$ je dána vyčárkovanou plochou v obrázku dole.

Konvoluce funkce s Diracovým impulzem (vzorkování):

- pro konvoluci funkce $f(t)$ s Diracovým impulzem $\delta(t)$ platí podle pravidel 22 a 4

$$L\{\delta * f\} = L\{\delta(t)\} \cdot L\{f(t)\} = L\{f(t)\}$$

což znamená, že

$$\delta * f = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \delta(t-\tau) f(\tau) d\tau = f(t) \quad (1.53a)$$

Takto jsme získali vzorek funkce v čase t .

Poznámky: 1) Pozorný čtenář zjistí, že vztah (1.53a) je až na integrační meze a pořadí proměnných t a τ v závorce shodný se vztahem pro vzorkování funkce (1.47). Oba postupy jsou správné, jak se lze přesvědčit i z grafické interpretace na **obr.1.13**, ve kterém za funkci f_1 položíme Diracův impulz δ . Pro něj totiž platí, že $\delta(t) = \delta(-t)$ a potažmo i

$$\delta(t-\tau) = \delta(\tau-t);$$

2) Konvoluce je stejně jako násobení L. obrazů operací komutativní, tj. $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$, neboli

$$\int_{\tau=0}^{\tau=t} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^{\tau=t} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

což si čtenář sám snadno dokáže substitucí $t-\tau = w$.

3) Funkci $A(s)$ z **příkladu 9** můžeme rozložit na součin dvou obrazů, jejichž originály známe z pravidel 5 a 16:

$$A(s) = A_1(s) \cdot A_2(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}, \quad f_1(t) = \eta(t), \quad f_2(t) = \sin \Omega t$$

a pro zpětnou transformaci lze použít i pravidlo 22 pro konvoluci:

$$K(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \eta(t-\tau) \sin \Omega \tau d\tau$$

Funkce $\eta(t-\tau)$ představuje jednotkový skok, který je podobně jako v **obr.1.13** nahoře převrácen okolo svislé osy a posunut vpravo o délku t , takže integrací vyjde opět (1.51a):

$$K(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \sin \Omega \tau d\tau = -\frac{\cos \Omega \tau}{\Omega} \Big|_0^t = \frac{1}{\Omega} (1 - \cos \Omega t)$$

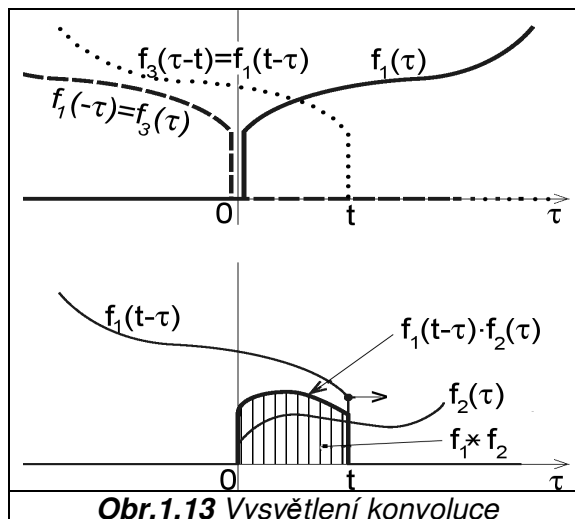
1.14 Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Při rozboru kmitání mechanických soustav se budeme zabývat rovnicemi převážně 2.řádu. Pozorný čtenář ale může získat rámcový návod k vyšetřování lineárních spojitéch dynamických systémů i z jiných technických oblastí (např. elektrotechniky a regulace), kde může být řád první nebo naopak vyšší než 2. Jedná se o rovnice, mající obecný tvar

$$\sum_{i=0}^n b_i y^{(i)}(t) = u(t) \quad (1.54)$$

$u(t)$vstupní (budicí) signál, $y(t)$výstupní signál (odezva). Konstanty b_i budou u technických aplikací většinou reálné, ale obecně mohou být komplexní. Přestože půjde o rovnice popisující chování reálných fyzikálních systémů v čase, vstupní (budicí) funkce $u(t)$ na pravé straně může být i komplexní. Pro určení odezvy $y(t)$ je výhodné využívat následující obecné vlastnosti těchto rovnic:

A) Princip superpozice a lineárnost: odezva při současném působení jednotlivých vstupů $u_i(t)$ je rovna součtu odezev na jednotlivé vstupy $y_i(t)$, tj. je-li $u(t) = \sum u_i(t)$, potom $y(t) = \sum y_i(t)$. Dále platí, že odezva na K -násobek vstupního signálu je K -násobkem odezvy: $K \cdot u(t) \Rightarrow K \cdot y(t)$, kde konstanta K může být i komplexní;



Obr.1.13 Vysvětlení konvoluce

B) Zachování kmitočtu a exponentu růstu amplitudy: má-li budicí funkce tvar harmonických kmitů s obecně komplexní a exponenciálně proměnnou amplitudou, v řešení se kmitočty i exponent růstu amplitudy zachovávají (viz lit.[4]):

$$\begin{aligned} u(t) &= K_1 \cdot e^{s t} = |K_1| \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} \\ y(t) &= K_2 \cdot e^{s t} = |K_2| \cdot e^{j\varphi_2} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (1.55)$$

(konstanty $K_{1,2} = |K_{1,2}| \cdot e^{j\varphi_{1,2}}$ jsou komplexní čísla, komplexní je i exponent $s = \sigma + j\omega$, σ ...reálná konstanta – tzv. exponent růstu kmitů, ω ...kmitočet). Mezi odezvou a buzením je fázový posuv $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$;

C) Bude-li pravá strana komplexně sdružená k původní budicí funkci z (1.55), řešení je opět komplexně sdružené:

$$\begin{aligned} \overline{u(t)} &= |K_1| \cdot e^{-j\varphi_1} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} \\ \overline{y(t)} &= |K_2| \cdot e^{-j\varphi_2} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} \end{aligned} \quad (1.56)$$

D) Je-li odezva na budicí funkci $u(t)$ rovna $y(t)$, potom odezva na funkci $\dot{u}(t)$ je $\dot{y}(t)$ („odezva na derivaci je derivace odezvy“).

Poznámky: 1) I když fyzikální význam mají pouze kladné kmitočty, s ohledem na Eulerovy vztahy (1.2) je výhodné pracovat i s kmitočty zápornými, tj. s komplexně sdruženými vektory. Většinou budeme průběhy fyzikálních veličin rozkládat do harmonických složek s konstantní amplitudou (exponent růstu kmitů $\sigma = 0$). Pouze při vytváření Laplaceových obrazů funkcí je nutno přijmout předpoklad $\sigma \neq 0$;

2) U periodického buzení je možno s výhodou zvolit poměry tak, že pro $t = 0$ leží vektor K_1 v kladné reálné ose, tj. $\varphi_1 = 0$, $\varphi = \varphi_2$;

3) Všechny uvedené vlastnosti platí po odeznění přechodového děje (po tzv. „zakmitání“). Tento ustálený stav nastane teoreticky v čase $t \rightarrow \infty$.

1.15 Váhová a přechodová funkce, přenos

Na vlastnosti 22 L. transformace je založen postup práce s tzv. **přenosy** (přenosovými funkcemi), který slouží ke hledání odezev dynamických systémů, popsáných rovnicemi typu (1.54). Uvedeme hlavní myšlenku postupu:

- zavedeme označení pro L. obrazy funkcí $u(t) \rightarrow U(s)$, $y(t) \rightarrow Y(s)$

- uvažujeme v praxi nejčastější případ nulových počátečních podmínek funkce $y(t)$:

$$\dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0 \quad (1.57)$$

- použitím pravidla 14 o n -té derivaci na rovnici (1.54) a vytknutím $Y(s)$ vychází

$$Y(s) \cdot \sum_{i=0}^n b_i s^i = U(s) \quad \text{neboli} \quad Y(s) = U(s) \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^n b_i s^i}$$

- zavedeme označení pro nově vzniklou funkci (L.obraz)

$$G(s) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n b_i s^i} \quad (1.58)$$

Takto jsme získali součin dvou L.obrazů

$$Y(s) = U(s) \cdot G(s) \quad (1.59)$$

Zpětnou transformací výrazu $G(s)$ lze získat originál $g(t)$ a použitím pravidla 22 o konvoluci vychází návod, jak dospět k řešení rovnice (1.54):

$$y(t) = u * g = \int_{\tau=0}^{\tau=t} u(t-\tau)g(\tau)d\tau = g * u = \int_{\tau=0}^{\tau=t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (1.60)$$

Pro funkci $g(t)$ je zaveden název **váhová funkce** a postup jejího získání zpětnou transformací bude popsán později. Váhová funkce má zásadní význam, neboť umožňuje

zjistit odezvu systému na libovolný vstupní signál $u(t)$. Úloha stanovení odezvy je převedena buď na algebraický úkon (1.59), tj. násobení L.obrazů a následnou zpětnou transformaci $Y(s) \Rightarrow y(t)$ (pokud je tato schůdná), nebo na integraci podle (1.60).

Geometrická interpretace integrace (1.60) je zřejmá z **obr.1.13**: je-li f_2 váhovou funkcí g a f_1 funkcí budící u , okamžitá hodnota odezvy y v čase t je dána vyčárkovanou plochou. Celý časový průběh odezvy $y(t)$ získáme při posouvání křivky $f_1(t-\tau)$ směrem vpravo počínaje časem $t=0$.

Zbývá objasnit fyzikální smysl váhové funkce $g(t)$:

- použijme Diracův impulz $\delta(t)$ jako budící funkci v rovnici (1.54):

$$\sum_{i=0}^n b_i y^{(i)}(t) = \delta(t)$$

Vztah (1.59) přejde na tvar $Y(s) = G(s)$, takže $y(t) = g(t)$, což nás opravňuje prohlásit:

a) váhová funkce $g(t)$ je odezvou systému na Diracův impulz $\delta(t)$ (odtud též její alternativní název **impulzní funkce**).

Důležitou a na rozdíl od váhové funkce v praxi i měřitelnou charakteristikou lineárního dynamického systému je **průběh odezvy na Heavisideovu funkci** (jednotkový skok) $\eta(t)$, kterou označíme $h(t)$ a její L.obraz $H(s)$ (tzv. **přechodová funkce**). Je-li $a = konst$, z principu superpozice a lineárnosti (viz vlastnost **A**) v **kap.1.14**) vyplývá, že odezva na skokovou funkci $\frac{1}{a}\eta(t)$ je $\frac{1}{a}h(t)$ a dále odezva na o čas a posunutou skokovou funkci

$\frac{1}{a}\eta(t-a)$ je $\frac{1}{a}h(t-a)$. Odezva na rozdíl obou funkcí $\frac{\eta(t)-\eta(t-a)}{a}$ je tedy $\frac{h(t)-h(t-a)}{a}$.

Limitním přechodem $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\eta(t)-\eta(t-a)}{a}$ vzniká Diracův impulz $\delta(t)$ a odezva na něj je

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{h(t)-h(t-a)}{a} = (\text{podle definice derivace}) = \dot{h}(t) \quad (1.61)$$

b) váhová funkce je zároveň derivací přechodové funkce: $g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$ – srovnej se

vztahem (1.46) mezi příslušnými budícími funkcemi $\delta(t)$, $\eta(t)$ a vlastností **D**) v **kap.1.14**.

Pro L.obrazy přechodové a váhové funkce platí souvislost (při nulových počátečních podmínkách), že

$$G(s) = sH(s) \quad (1.61a)$$

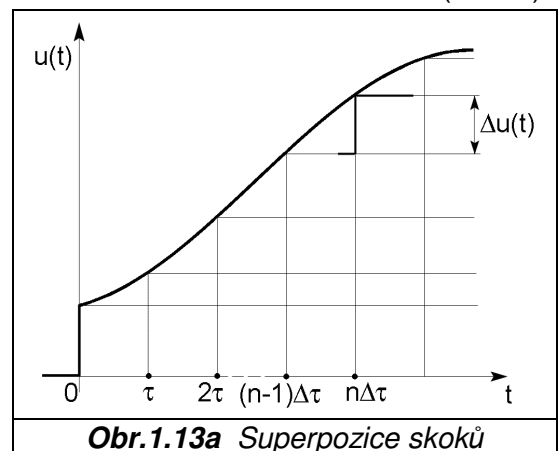
Pomocí přechodové funkce lze vysvětlit i význam konvoluce - viz **obr.1.13a**. Obecný vstupní signál $u(t)$ nahradíme součtem dílčích skokových změn $\Delta u(t)$, posunutých mezi sebou o elementární časové úseky $\Delta \tau$. Je-li $h(t)$ přechodová funkce systému, potom odezva na dílčí skok $\Delta u(t)$, posunutý o čas $n\Delta \tau$, je rovna

$$h_n(t) = \Delta u(n\Delta \tau) \cdot h(t - n\Delta \tau)$$

Pomocí superpozice získáme celou odezvu

$$y(t) = \sum_n h_n = \sum_n \Delta u(n\Delta \tau) \cdot h(t - n\Delta \tau)$$

Zároveň platí, že $\Delta u(n\Delta \tau) = \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=n\Delta \tau} \cdot \Delta \tau$, neboli



Obr.1.13a Superpozice skoků

$$y(t) = \sum_n \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=n\Delta\tau} \cdot h(t - n\Delta\tau) \cdot \Delta\tau$$

a limitním přechodem $\Delta\tau \rightarrow d\tau$, $n\Delta\tau \rightarrow \tau$ přejde suma na integrál

$$y(t) = \int_0^t \dot{u}(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

což je definiční vztah **22** pro konvoluci funkcí $\dot{u}(t)$ a $h(t)$. Platí tedy

$$L\{y(t)\} = L\{\dot{u}(t)\} \cdot L\{h(t)\}, \text{ neboli } Y(s) = sU(s) \cdot H(s) = U(s) \cdot G(s)$$

Poznámky: 1) Výše uvedená tvrzení **a), b)** jsou přesná pouze v oblasti časů $t > 0$. Pro $t = 0$ může dojít k rozporu s teorií distribucí, který však z hlediska technické praxe není důležitý;

2) I když realizace nekonečně úzkého i vysokého Diracova impulsu není možná, odezvu systému na něj je možno stanovit nepřímo derivací přechodové funkce, která je v některých případech (zvláště v elektrotechnice) snadno měřitelná;

3) Alternativní přívlástek „**impulzní**“ nebudeme u váhové funkce používat kvůli nebezpečí záměny s odezvami systémů na budící funkce, mající tvar osamělých impulsů **konečné** výšky i délky;

4) Tvrzení **b)** o souvislosti váhové a přechodové funkce lze ověřit i z výpočtu odezvy na jednotkový skok podle (1.60) a **obr.1.13**, kde místo f_1, f_2 dosadíme η, g :

$$h(t) = \eta * g = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \eta(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_{\tau=0}^{\tau=t} g(\tau)d\tau \quad \text{a derivováním vyjde} \quad g(t) = \dot{h}(t).$$

1.16 Rozklad na částečné zlomky

L. obraz $G(s)$ váhové funkce, související s diferenciální rovnicí systému podle vztahů (1.58) a (1.59), lze chápat jako součinitel mezi obrazy vstupního a výstupního signálu. V jeho jmenovateli je tzv. charakteristický polynom P_n stupně n komplexní proměnné s , jehož kořeny (tzv. póly p_i) budeme předpokládat jednonásobné, což je v technické praxi nejčastější případ:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^n b_i s^i} = \frac{1}{P_n(s)} = \frac{1}{b_n} \cdot \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (1.62)$$

Funkci $G(s)$ je možno po zjištění pólů rozložit na součet parciálních zlomků:

$$G(s) = \frac{1}{P_n(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{s - p_i} \quad (1.63)$$

Pokud se vyskytne dvojice komplexně sdružených kořenů $p_i, \overline{p_i}$, jsou i příslušné konstanty $C_i, \overline{C_i}$ komplexně sdružené. Pro výpočet konstant v případě jednonásobných pólů platí jednoduchý postup, založený na faktu, že výraz $\frac{s - p_i}{P_n(s)}$ je nenulový pro $s = p_i$.

Vynásobením (1.63) výrazem $(s - p_i)$ a limitním přechodem $s \rightarrow p_i$ vychází

$$C_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{s - p_i}{P_n(s)} = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) \cdot G(s) \quad (1.64)$$

Protože je ale $P_n(p_i) = 0$, je možno výraz (1.64) upravit a použít definici derivace:

$$C_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \left[\frac{P_n(s) - P_n(p_i)}{s - p_i} \right]^{-1} = \frac{1}{dP_n(s)/ds} \Big|_{s=p_i} \quad (1.65)$$

Váhovou funkci zjistíme z (1.63) pomocí pravidla **8**:

$$g(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} \quad (1.66)$$

Laplaceův obraz váhové funkce (1.62) resp. (1.63) je tzv. **přenos (přenosová funkce)** lineárního dynamického systému, popsaného rovnicí (1.54).

Čítec L. obrazu váhové funkce v (1.62) je sice jednotkový (nebo konstantní), ale nemusí tomu tak být vždy. U systémů popsaných integro-diferenciálními rovnicemi (např. v elektrotechnice) může výsledná dif. rovnice obsahovat na pravé straně i derivace budící funkce. Totéž může nastat u složeného systému popsaného soustavou dílčích dif. rovnic po přechodu na jedinou výslednou rovnici mezi vstupem a výstupem. **Obecný tvar přenosu je** v takovém případě (opět za předpokladu nulových počátečních podmínek funkcí $u(t), y(t)$) **podílem dvou polynomů** stupně m a n . U reálných systémů může být $m \leq n$, nejčastěji je $m < n$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i s^i}{\sum_{i=0}^n b_i s^i} = \frac{P_m(s)}{P_n(s)} \quad (1.67)$$

Pokud je racionální funkce funkce $G(s)$ ryze lomená (tj. $m < n$), je při znalosti kořenů p_i jmenovatele opět možný její rozklad na částečné zlomky výše uvedeným postupem:

$$G(s) = \frac{P_m(s)}{P_n(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{s - p_i} \quad (1.68)$$

$$C_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{(s - p_i) P_m(s)}{P_n(s)} = \left. \frac{P_m(s)}{dP_n(s)/ds} \right|_{s=p_i}$$

a nadále platí vztah (1.66).

Poznámky: 1) Srovnáním (1.64) a (1.40b) zjišťujeme, že **konstanty C_i jsou rezidua funkce komplexní proměnné $G(s)$ v jejích pólech p_i** , takže váhovou funkci lze určit též integrací (1.37) pomocí reziduové věty:

$$g(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G(s) \cdot e^{s \cdot t} ds = \frac{2j\pi}{2j\pi} \sum \operatorname{rez}_{p_i} [G(s) \cdot e^{s \cdot t}] = \lim_{s \rightarrow p_i} \sum_{i=1}^n (s - p_i) G(s) \cdot e^{s \cdot t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}$$

2) Podle základního kurzu diferenciálních rovnic je výraz (1.66) podobný k řešení rovnice (1.54) bez pravé strany. Je třeba ale rozlišit, že u rovnice bez pravé strany jsou konstanty C_i závislé na zadaných počátečních podmínkách $\dot{y}(0), \ddot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$, kdežto při stanovení váhové funkce jsou tyto předpokládány nulové a rovnice má pravou stranu $\delta(t)$, takže konstanty C_i vyjdou jiné;

3) Při řešení rovnice (1.54) s nenulovými počátečními podmínkami se L. transformací podle pravidla 14 objeví na levé straně další členy s mocninami nejvýše řádu $n-1$, které shrneme do polynomu počátečních podmínek $Q_{n-1}(s)$:

$$Y(s) \cdot \sum_{i=0}^n b_i s^i + Q_{n-1}(s) = U(s) \quad \text{a L. obraz řešení je}$$

$$Y(s) = \frac{U(s) - Q_{n-1}(s)}{\sum_{i=0}^n b_i s^i} = U(s)G(s) - Q_{n-1}(s)G(s)$$

Pokud vyjde racionální ryze lomená funkce, je znovu možný rozklad na parciální zlomky podle schématu (1.68). Výsledné řešení má dvě složky, které se odečítají:

- a) řešení rovnice s pravou stranou a s nulovými poč. podmínkami (odpovídá 1.sčítanci);
- b) řešení rovnice bez pravé strany a s nenulovými poč. podmínkami (odpovídá 2.sčítanci);

4) Porovnáním (1.62) a (1.67) je vidět, že jmenovatel přenosu je charakteristický polynom rovnice (1.54);

5) Pomocí pravidel **A) ÷ D)** v kap. 1.14 je k pojmu **přenos** možno dospět logickým úsudkem bez exaktních postupů a znalostí Laplaceovy transformace. Tato cesta bude demonstrována v **kap.2** na dynamickém systému 2.řádu.

Použití rovnice (1.59) se dá rozšířit i na několik dílčích subsystémů s obecně označenými přenosy $F_1(s), F_2(s), \dots$, které jsou spojeny za sebou, takže výstup předcházejícího je vstupem systému následujícího. Přitom je nutno zaručit, že jde o tzv. „neintervenující“ systémy, jejichž přenosy se vzájemným spojením nezmění. Na jednotlivé přenosy $F_1(s), F_2(s), \dots$ je možno se dívat jako na algebraické součinitele a příslušné toky signálů znázorňovat blokovými schématy. Bloky lze spojovat i paralelně a jejich výstupy sčítat. Některá nejpotřebnější pravidla tzv. „algebry blokových schémat“ jsou uvedena v následující tabulce. Při úpravách schémat je nutno dodržovat základní aritmetická pravidla pro práci se závorkami atd.

Rovnocenná zapojení přenosových funkcí

30. Seriové zapojení		
31. Paralelní zapojení		
32. Sloučení dvou vstupů		
33. Rozdělení na dva výstupy		
34. Posunutí bloku za sčítací uzel		
35. Předsunutí bloku před rozvětvací uzel		
36. Zpětnovazební (antiparalelní) zapojení		

Příklad 16: Zapojení 36 se zápornou zpětnou vazbou (někdy též „antiparalelní zapojení“) je zobrazeno v posledním řádku tabulky vlevo. Jeho algebraický zápis zní

$$(u - F_2 y) F_1 = y$$

a po úpravě získáme důležitou přenosovou funkci ve tvaru

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)} \quad (1.68a)$$

1.17 Frekvenční přenos

Vedle váhové a přechodové funkce je další důležitou charakteristikou dynamického systému **odezva na harmonické buzení**, využívající vlastnosti B) pohybové rovnice v **kap.1.14**. Na rozdíl od (1.55) budeme předpokládat reálnou a konstantní amplitudu

budicí funkce, tj. $\sigma=0$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\varphi$. Po odeznění přechodového děje (v tzv. „zakmitaném“ stavu) platí

$$\begin{aligned} u(t) &= |K_1| \cdot e^{j\omega t} \\ y(t) &= |K_2| \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (1.69)$$

Derivace jsou

$$\begin{aligned} u^{(i)}(t) &= (j\omega)^i \cdot |K_1| \cdot e^{j\omega t} = (j\omega)^i \cdot u(t) \\ y^{(i)}(t) &= (j\omega)^i \cdot |K_2| \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} = (j\omega)^i \cdot y(t) \end{aligned}$$

Předpokládáme-li obecně, že na pravé straně rovnice (1.54) se mohou vyskytovat i derivace budicí funkce až do stupně m , násobené konstantami a_i , vychází z původní rovnice po dosazení a úpravě

$$y(t) \sum_{i=0}^n b_i(j\omega)^i = u(t) \sum_{i=0}^m a_i(j\omega)^i \quad (1.70)$$

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i(j\omega)^i}{\sum_{i=0}^n b_i(j\omega)^i} = \left| \frac{K_2}{K_1} \right| \cdot e^{j\varphi} = G(j\omega) \quad (1.70a)$$

Tímto jsme zjistili amplitudu odezvy $|K_2|$ a její fázový posuv φ vůči budicímu signálu. Je zřejmé, že komplexní číslo $G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\varphi}$ vzniklo z Laplaceova obrazu váhové funkce (přenosu) pouhou záměnou $s \Rightarrow j\omega$, srovnej s (1.67). Odtud se odvozuje i název **frekvenční přenos**, který je vyjádřen jako funkce kmitočtu, tj. množina čísel $G(j\omega)$ na celém intervalu $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Graficky se zobrazuje nejlépe v komplexní rovině jako tzv. **frekvenční charakteristika** nebo nadvakrát jako průběh absolutní hodnoty a fázového posuvu v závislosti na kmitočtu (amplitudová a fázová charakteristika) podobně jako u frekvenčních spekter.

Poznámky: 1) Při znalosti váhové funkce $g(t)$ by podle (1.60) platilo

$$y(t) = |K_1| \cdot e^{j\omega t} * g(t) = |K_1| \int_{\tau=0}^{\tau=t} e^{j\omega(t-\tau)} g(\tau) d\tau = |K_1| \cdot e^{j\omega t} \int_{\tau=0}^{\tau=t} g(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau =$$

(po rozdělení na dva úseky integrace)

$$= u(t) \cdot \left[\int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau - \int_{\tau=t}^{\infty} \dots \right] = u(t) \cdot G(j\omega) - u(t) \cdot \int_{\tau=t}^{\infty} g(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Je nutno připomenout, že stále pracujeme s Laplaceovou transformací a předpokládáme, že $u(t)=0$ pro $t < 0$. První integrál v závorce je ale L. obrazem váhové funkce pro $s = j\omega$ (tedy zároveň i jejím Fourierovým obrazem, pokud ovšem váhová funkce splňuje podmínku absolutní integrovatelnosti (1.33)!!). Po integraci druhého sčítance bychom obdrželi úplný vztah pro odezvu $y(t)$ včetně přechodového děje při startu kmitání. Amplituda kmitů odezvy se ustálí v čase $t \rightarrow \infty$, ale po dosazení spodní meze $\tau = t \rightarrow \infty$ vychází druhý integrál nulový. Tím se potvrzuje rovnice (1.70a), která byla odvozena pro ustálený stav;

2) Frekvenční přenos je podílem dvou polynomů, o jejichž členech vždy platí, že

- sudé mocniny $(j\omega)^{2k}$, $k=1,2,\dots$ jsou pro kladné i záporné hodnoty kmitočtu reálné shodné;

- liché mocniny $(j\omega)^{2k-1}$ jsou pro kladné a záporné hodnoty kmitočtu ryze imaginární a komplexně sdružené. Odtud vyplývá obecný závěr, že jak čítec a jmenovatel zvlášť, tak celý frekvenční přenos lze rozložit na reálnou a ryze imaginární část, přičemž

- reálná část je sudou funkcí kmitočtu, $\operatorname{Re} G(-j\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega)$

- imaginární část je lichou funkcí kmitočtu, $\operatorname{Im} G(-j\omega) = -\operatorname{Im} G(j\omega)$, neboli

$$G(\pm j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{\pm j\varphi} = \operatorname{Re} G(j\omega) \pm j \operatorname{Im} G(j\omega) \quad (1.71)$$

(srovnej s analogickými vlastnostmi (1.19) Fourierova obrazu funkce $f(t)$).

Hodnoty frekvenčního přenosu pro kladné a záporné kmitočty jsou komplexně sdružené, tj. $G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)}$ a pro záporné kmitočty je zbytečné je uvádět. Též s ohledem na Eulerovy vztahy (1.2) je možno se omezit na interval kmitočtů $\omega \in (0, +\infty)$ a pracovat pouze s budící funkcí $\sin \omega t$ nebo $\cos \omega t$, která je při experimentech na strojích realizována speciálními vibrátory.

Měření frekvenční charakteristiky

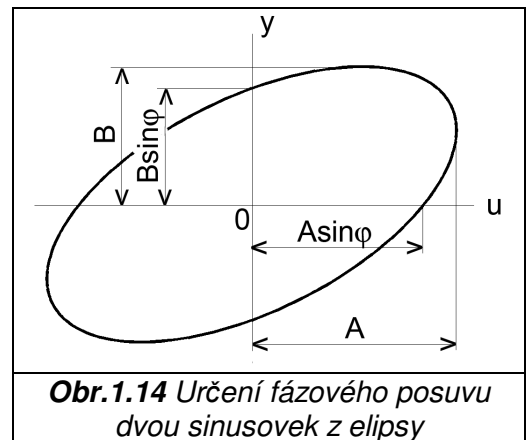
A) Vedle měření odezvy na jednotkový skok se otevírá další možnost zjištění váhové funkce pomocí umělého rozkmitávání systému na různých kmitočtech a určování amplitudy a fázového posuvu odezvy. Amplitudy a fázový posuv dvou harmonických signálů

$$u = A \sin \omega t, \quad y = B \sin(\omega t + \varphi)$$

určíme ze záznamu v souřadném systému u, y , kterým je elipsa podle **obr.1.14**:

- je-li $u = 0$, je též $t = 0$, takže $y = B \sin \varphi$

- je-li $y = 0$, je $\omega t = -\varphi$, takže $u = -A \sin \varphi$



Obr.1.14 Určení fázového posuvu dvou sinusovek z elipsy

Experimenty s vibrátory jsou však pracné a časově náročné, nemluvě o možnosti poškození zkoumaného stroje dlouhodobými vynucenými kmity. Existují však humánnější postupy vůči stroji, jak vyplývá z následující úvahy:

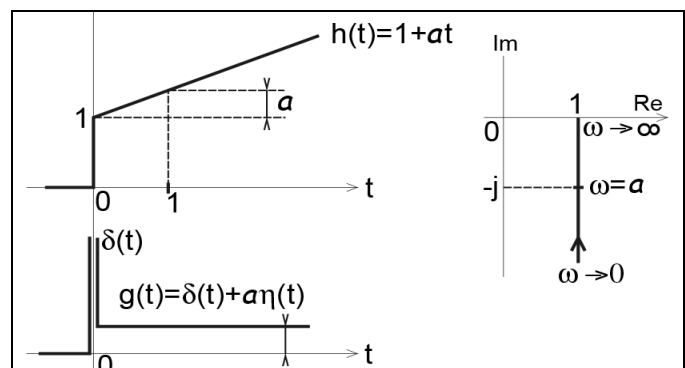
B) Je-li splněna podmínka absolutní integrovatelnosti (1.33), frekvenční přenos $G(j\omega)$ je zároveň Fourierovým obrazem váhové funkce $g(t)$, neboť vznikl z $G(s)$ pouhou záměnou $s \Rightarrow j\omega$. Pokud bychom byli schopni vybudit dynamický systém čistým Diracovým impulzem (tedy na všech kmitočtech a se stejnou amplitudou – viz **obr.1.6**), Fourierovou transformací změřené odezvy $g(t)$ získáme najednou všechny hodnoty funkce $G(j\omega)$.

Poznámky: 1) Při délce měření T a použitím **DFT** – viz **kap.1.7** – určíme pouze hodnoty $G(j\omega_n)$

pro kmitočty $\omega_n = n \cdot \frac{2\pi}{T}$, $n = 0, 1, 2, \dots, N/2$, $N \dots$ počet změřených vzorků odezvy;

2) V některých případech ale funkce $g(t)$ absolutně integrovatelná není. Typickým případem je L. obraz v (1.51b). Jedná se o velmi častý tzv. **proporcionálně – integrační přenos** $\frac{s+a}{s}$, který se v elektrotechnické praxi realizuje obvodem složeným z odporů, kondenzátorů a operačních zesilovačů. Pomocí napětového skoku na vstupu lze změřit přechodovou funkci napětí na výstupu a z její derivace určit i funkci váhovou – viz **obr.1.15**.

Fourierův integrál váhové funkce sice pro $\omega \rightarrow 0$ nekonverguje, ale pro frekvenční přenos je přesto možné psát



Obr.1.15 Přechodová a váhová funkce (vlevo), frekvenční charakteristika (vpravo) proporcionálně integračního členu

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + a}{j\omega} \quad (1.72)$$

s tím, že $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 - j\infty$. V technické praxi to znamená, že při $\omega \rightarrow 0$ je amplitudové zesílení nekonečné a odezva se opožďuje za buzením o $-\pi/2$;

3) Stejná situace s konvergencí nastává u všech přenosů, kde je možno ve jmenovateli vytknout samostatný součinitel s (tzv. „**astatické přenosové funkce**“):

- předpokládejme obecný tvar přenosu (1.67). Je-li možno ve jmenovateli vytknout s , je koeficient $b_0 = 0$ a podle věty 21 o konečné hodnotě originálu v **kap.1.12** platí

$$g(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \sum_{i=0}^m a_i s^i}{s \sum_{i=1}^n b_i s^{i-1}} = \frac{a_0}{b_1} \neq 0$$

a tudíž nemůže být splněna podmínka absolutní integrovatelnosti (1.33).

Při buzení strojů reálným „rozmazaným“ impulzem (např. úderem modálního kladívka) je třeba provést F. transformaci obou signálů a frekvenční přenos vyhodnotit vzájemným srovnáváním na jednotlivých kmitočtech podle vztahu

$$G(j\omega_n) = \frac{Y(j\omega_n)}{U(j\omega_n)} \quad (1.73)$$

Tento postup může selhávat u konstrukcí se spoji nebo vzájemně pohyblivými díly. Ve styčných plochách se projeví výraznější tlumení (vlivem tření nebo olejového filmu) a při slabém úderu klesne velikost amplitud v odezvě pod práh rozlišení snímáče.

C) Současné změření většího počtu hodnot frekvenčního přenosu je možné též s využitím principu superpozice, kdy budicí signál je „namíchan“ ze souboru harmonických složek v potřebném kmitočtovém pásmu (tzv. „oknu“). Vzniklý signál s charakterem šumu může být při kratším trvání intenzivnější a ve Fourierově obrazu odezvy se zvolené kmitočty opět objeví, takže vyhodnocení probíhá podle (1.73).

1.18 Stabilita

Obecnou podmínkou stability systému popsaného lineární diferenciální rovnicí (1.54) je, že její charakteristická rovnice

$$P_n(s) = \sum_{i=0}^n b_i s^i = 0$$

musí mít kořeny se zápornou reálnou částí (tzv. stabilní póly), tj.

$$\operatorname{Re}(p_i) < 0 \quad (1.74)$$

Řešení obsahuje výrazy $e^{p_i t}$, pro které potom platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{p_i t} = 0$$

Pokud by kořeny byly ryze imaginární (např. $p_i = \pm j\Omega$ kde Ω je reálné číslo), řešení by mělo tvar monotónních harmonických kmitů s kmitočtem Ω (viz Eulerovy vztahy (1.2)) a systém by se nalézal na mezi stability. Většina známých kritérií stability různým způsobem řeší podmínku (1.74). Při vyšetřování stability zpětnovazebních obvodů je velmi užitečné Nyquistovo kritérium, využívající tzv. Cauchyho teorém, obecně platící pro funkce komplexní proměnné (což jsou i dříve zmíněné přenosové funkce).

1.18.1 Cauchyho teorém o změně argumentu

1) Předpokládejme, že funkce komplexní proměnné $F(s)$ nemá uvnitř nějaké uzavřené křivky C žádné singulární body, pouze k_1 – násobný nulový bod a_1 . Lze ji proto vyjádřit ve tvaru

$$F(s) = (s - a_1)^{k_1} \Phi_1(s)$$

kde funkce $\Phi_1(s)$ rovněž nemá singulární body a je nenulová uvnitř C . Singulární body nemá tedy ani funkce $\Phi_1'(s)$. Tzv. "**logaritmická derivace**" funkce $F(s)$ je

$$[\ln F(s)]' = \frac{1}{F(s)} \cdot F'(s) \quad (1.75)$$

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{k_1(s-a_1)^{k_1-1}\Phi_1(s) + \Phi_1'(s)(s-a_1)^{k_1}}{(s-a_1)^{k_1}\Phi_1(s)} = \frac{k_1}{s-a_1} + \frac{\Phi_1'(s)}{\Phi_1(s)}$$

Tato funkce má jediný singulární bod a_1 (pól 1. řádu) a jejím rozvojem do Laurentovy řady zjistíme, že reziduum je

$$\operatorname{rez}_{a_1} \left[\frac{F'(s)}{F(s)} \right] = k_1$$

2) Má-li funkce $F(s)$ uvnitř křivky C pouze k_2 -násobný pól a_2 , její Laurentův rozvoj obsahuje k_2 členů se záporným exponentem - viz (1.39c)

$$F(s) = \sum_{n=-k_2}^{+\infty} b_n(s-a_2)^n = \frac{b_{-k_2} + b_{-k_2+1}(s-a_2) + b_{-k_2+2}(s-a_2)^2 + \dots}{(s-a_2)^{k_2}} = (s-a_2)^{-k_2} \Phi_2(s)$$

Funkce $\Phi_2(s)$ a $\Phi_2'(s)$ nemají singulární body a jsou nenulové uvnitř křivky C .
Logaritmická derivace

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{-k_2(s-a_2)^{-k_2-1}\Phi_2(s) + \Phi_2'(s)(s-a_2)^{-k_2}}{(s-a_2)^{-k_2}\Phi_2(s)} = \frac{-k_2}{s-a_2} + \frac{\Phi_2'(s)}{\Phi_2(s)}$$

má opět pouze jeden singulární bod a_2 a reziduum je

$$\operatorname{rez}_{a_2} \left[\frac{F'(s)}{F(s)} \right] = -k_2$$

3) Pokud bude mít funkce $F(s)$ uvnitř křivky C k_1 -násobný nulový bod a_1 i k_2 -násobný pól a_2 , křivkový integrál z logaritmické derivace při oběhu C v kladném směru (proti směru hodin) bude s použitím reziduové věty (1.39b)

$$\oint_{C^+} \frac{F'(s)}{F(s)} ds = 2j\pi \sum \operatorname{rez}_{a_1, a_2} \left[\frac{F'(s)}{F(s)} \right] = 2j\pi(k_1 - k_2)$$

Po zobecnění tohoto závěru na větší počet nulových bodů i pólů uvnitř C platí

$$\oint_{C^+} \frac{F'(s)}{F(s)} ds = 2j\pi(N - P) \quad (1.76)$$

kde N je součet násobností všech nulových bodů a P součet násobností všech pólů. Dále vyjádříme funkci $F(s)$ ve tvaru

$$F(s) = |F(s)|e^{j\varphi}$$

$$\ln F(s) = \ln|F(s)| + j\varphi$$

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = [\ln F(s)]' = \frac{d[\ln F(s)]}{ds} = \frac{d[\ln|F(s)|] + j d\varphi}{ds}$$

Integrací vychází

$$\oint_{C^+} \frac{F'(s)}{F(s)} ds = \oint_{C^+} d[\ln|F(s)|] + j \oint_{C^+} d\varphi = j(\varphi_2 - \varphi_1)$$

kde φ_1 je počáteční úhel (argument) čísla $F(s)$ a φ_2 jeho konečný úhel při oběhu čísla s po křivce C v kladném směru.

Poznámka: Křivkový integrál z totálního diferenciálu $d[\ln|F(s)|]$ po uzavřené křivce je nula!!

Změna argumentu funkce $F(s)$ mezi výchozím stavem φ_1 a konečným stavem φ_2 je po srovnání s (1.76) rovna

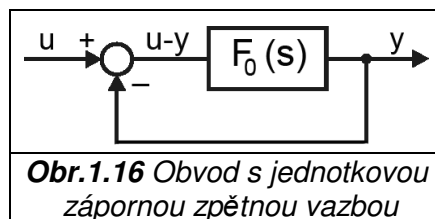
$$\Delta \arg F(s) = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi(N - P) \quad (1.77)$$

Vztahem (1.77) je vyjádřen tzv. Cauchyho teorém o změně argumentu:

Oběhne-li číslo s křivku C v kladném smyslu, přírůstek argumentu čísla $F(s)$ je roven $2\pi(N - P)$, kde N je součet násobností nulových bodů funkce $F(s)$ a P je součet násobností jejích pólů, ležících uvnitř C . Je-li např. $N=1$ a $P=3$, číslo $F(s)$ změní argument o -4π , tj. oběhne dvakrát počátek ve směru hodin.

1.18.2 Nyquistovo kritérium stability

Toto kritérium vychází ze znalosti přenosové funkce rozpojeného obvodu (otevřené smyčky), na základě které lze usuzovat na stabilitu obvodu se zápornou zpětnou vazbou (viz pravidlo **36** a přenos (1.68a)). Stabilita musí být zaručena v kterémkoliv místě obvodu, takže ji lze vyšetřovat například na výstupu přenosu $F_2(s)$. V **obr.1.16** jsou proto oba přenosy sloučeny do jediného, který je označen symbolem $F_0(s)$ (tzv. přenos otevřené smyčky) a stačí zkoumat obvod s jednotkovou zpětnou vazbou.



Obr.1.16 Obvod s jednotkovou zápornou zpětnou vazbou

Přenos otevřené smyčky je podílem dvou polynomů

$$F_0(s) = \frac{Q_m(s)}{Q_n(s)}, \quad m \leq n \quad (1.78)$$

Kořeny rovnic $Q_m(s)=0$, $Q_n(s)=0$ jsou nulové body a póly otevřené smyčky. Přenosová funkce uzavřené smyčky je

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{F_0(s)}{1 + F_0(s)} = \frac{Q_m(s)}{Q_m(s) + Q_n(s)} \quad (1.79)$$

Poznámky: 1) Stupeň jmenovatele v (1.78) i (1.79) je stále roven n , jinými slovy počet pólů (tzv. řád systému) se uzavřením zpětné vazby nezmění (velikost pólů samozřejmě ano!!);

2) Přenosové funkce otevřené i uzavřené smyčky mají stejné čitatele, tj. stejné nulové body.

Charakteristická rovnice uzavřené smyčky je

$$1 + F_0(s) = 1 + \frac{Q_m(s)}{Q_n(s)} = \frac{Q_m(s) + Q_n(s)}{Q_n(s)} = 0 \quad (1.79a)$$

Má-li být uzavřená smyčka stabilní, nesmí ležet kořeny její charakteristické rovnice $1 + F_0(s) = 0$ v kladné komplexní polorovině. Hranicí zakázané oblasti pro výskyt nulových bodů funkce $1 + F_0(s)$ (což jsou zároveň póly přenosu (1.79) uzavřené smyčky) je tedy křivka C na **obr.1.17**, tvořená imaginární osou a nekonečně velkým obloukem, tj. množinou čísel $s = Re^{j\varphi}$, kde $R \rightarrow \infty$ a $\varphi \in (-\pi/2, +\pi/2)$.

Poznámka: Bod $s = 0$ je ze zakázané oblasti vyjmut tím, že křivka C se mu vyhýbá nekonečně malým obloučkem $s = re^{j\varphi}$, kde $r \rightarrow 0$. Systém s pólem $s = 0$ totiž není nestabilní, nýbrž astatický (má integrační charakter). Nelze srovnávat nestabilní obvod (jehož výstup narůstá nade všechny meze i při absenci vstupního signálu) s obvodem integračním, jehož výstup je integrálem vstupu a tedy narůstá nade všechny meze pouze v případě trvalého, byť malého nebo velmi pomalu se měnícího vstupu. Astatické obvody bývají někdy zahrnovány do kategorie obvodů stabilních.

Cauchyho teorém aplikovaný na křivku C a funkci $1 + F_0(s)$ zní

$$\Delta \arg[1 + F_0(s)] = 2\pi(N - P)$$

Podle výše uvedeného zákazu ale musí být $N = 0$, takže podmínka stability uzavřené smyčky je

$$\Delta \arg[1 + F_0(s)] = -2\pi P, \quad N = 0 \quad (1.80)$$

neboli počet oběhů čísla $1 + F_0(s)$ okolo počátku v záporném smyslu je roven součtu násobností P všech pólů funkce $1 + F_0(s)$, ležících uvnitř C .

Funkce $F_0(s)$ a $1 + F_0(s)$ mají ale tytéž jmenovatele - viz (1.78), (1.79a), tedy i póly včetně součtu jejich násobností. Dále platí, že počet oběhů funkce $1 + F_0(s)$ okolo počátku je roven počtu oběhů $F_0(s)$ okolo bodu -1 , takže Nyquist mohl formulovat své kritérium stability následovně:

A) Pro stabilitu uzavřené smyčky je nutné, aby při oběhu čísla s v kladném smyslu po křivce C , obkličující celou kladnou komplexní polorovinu, byl počet oběhů čísla $F_0(s)$ okolo bodu -1 v záporném smyslu roven součtu násobností P nestabilních pólů otevřené smyčky, tj.

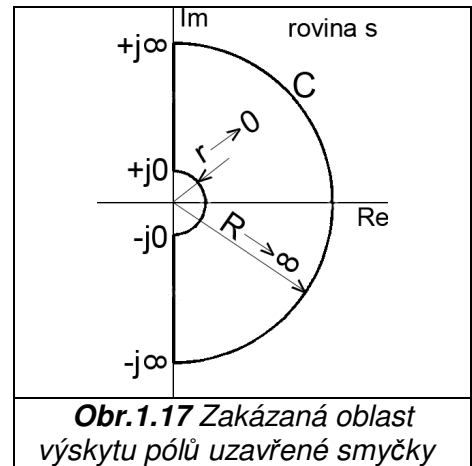
$$\Delta \arg_{C^+}[F_0(s)] = -2\pi P \quad (1.81a)$$

Toto tvrzení je založeno na tzv. konformním zobrazení, pomocí kterého je určitá množina bodů z tzv. "roviny s " zobrazena na jinou množinu bodů v "rovině $F_0(s)$ ". Konformním obrazem celé křivky C z **obr.1.17**, kde zobrazující funkcí je přenos otevřené smyčky $F_0(s)$, je tzv. **Nyquistova křivka**. Zdůrazněné smysly oběhu mají pro posouzení stability zásadní důležitost, je však možné je navzájem zaměnit a Nyquistovo kritérium vyslovit i jinak:

B) Pro stabilitu uzavřené smyčky je nutné, aby při oběhu čísla s v záporném smyslu po křivce C , obkličující celou kladnou komplexní polorovinu, byl počet oběhů čísla $F_0(s)$ okolo bodu -1 v kladném smyslu roven součtu násobností P nestabilních pólů otevřené smyčky, tj.

$$\Delta \arg_{C^-}[F_0(s)] = +2\pi P \quad (1.81b)$$

Záporný smysl oběhu hranice C (verze **B**) totiž lépe odpovídá zavedené zvyklosti postupu po imaginární ose v pořadí $s = -j\infty, j0_-, j0_+, +j\infty$. Tato samotná se zobrazí na množinu $F_0(j\omega)$, tj. na frekvenční charakteristiku otevřené smyčky, zmíněnou v **kap.1.17**. Příklady jsou na **obr.1.15** nebo **obr.2.8** a **obr.2.16**, kde ovšem do úplnosti chybí obrazy záporné části imaginární osy.



Obr.1.17 Zakázaná oblast výskytu pólů uzavřené smyčky

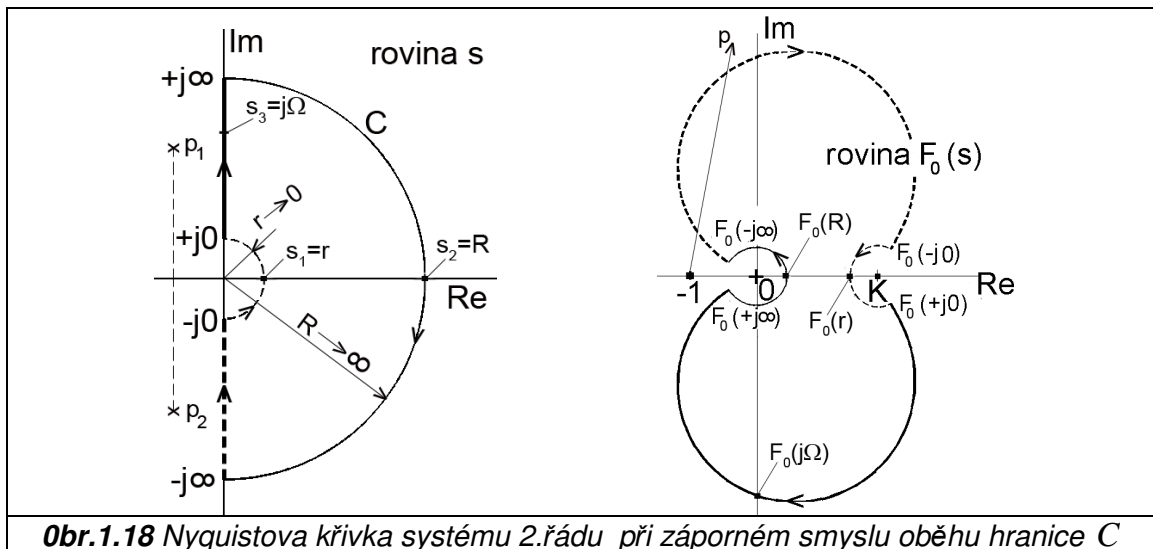
Poznámka: V literatuře se někdy rozlišuje Nyquistova křivka (konformní obraz celé hranice C , ať již při kladném nebo záporném smyslu jejího oběhu) a frekvenční charakteristika, která je obrazem pouze imaginární osy. Pro zjištění počtu oběhů okolo bodu -1 je výhodné uvádět úplný průběh.

Nejasnosti okolo zobrazení kruhových oblouků s poloměry $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ budou objasněny v následujících příkladech. Zobrazení půlkruhu $s = Re^{j\varphi}$ nečiní potíže, neboť u přenosových funkcí reálných systémů je vždy $m \leq n$, takže limita pro $R \rightarrow \infty$ dává vždy konečné číslo. Určení obrazu půlkruhu $r \rightarrow 0$ ale může vést na dělení nulou (u astatických přenosů, obsahujících čisté integrační členy).

Příklad 17: Ukážeme konformní obraz křivky C při jejím záporném smyslu oběhu (ve směru hodin), viz **obr.1.18** vlevo. Zobrazující funkcí je přenos 2. řádu, který bude podrobně zkoumán v **kap.2** (viz např. (2.17)):

$$F_0(s) = \frac{K}{s^2/\Omega^2 + 2\zeta s/\Omega + 1} \quad (1.82)$$

Všechny konstanty jsou kladné: $K > 0, \Omega > 0, \zeta > 0$. Úplný obraz křivky C (Nyquistova křivka funkce $F_0(s)$) je na **obr.1.18** vpravo. Odpovídající si úseky vzoru i obrazu jsou vytaženy stejným typem čar. Úseky C na imaginární ose (tj. čísla $s = j\omega$ v pořadí $-j\infty, -j0, +j0, +j\infty$) se zobrazí do silných čar, z nichž pro praxi je relevantní pouze plně vytažená část, která je obrazem kladné imaginární osy (srovnej s **obr.2.8**).



Obr.1.18 Nyquistova křivka systému 2.řádu při záporném smyslu oběhu hranice C

Pro kruhové oblouky r, R dosadíme do rovnice (1.82) vztahy

$$s = re^{j\varphi}, \quad \varphi \in (-\pi/2, +\pi/2) \dots \text{slabá čárkovaná čára}$$

$$s = Re^{j\varphi}, \quad \varphi \in (+\pi/2, -\pi/2) \dots \text{slabá plná čára.}$$

Obrazy těchto oblouků jsou slabě vytažené obloučky, které pro limitní hodnoty $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ splynou do bodů K a 0 . Obrázek dokládá obecný typický rys Nyquistových křivek, kterým je souměrnost okolo reálné osy, neboť komplexně sdružené dvojice čísel s se zobrazí opět do komplexně sdružených dvojic $F_0(s)$.

Smysl obíhání malých obloučků okolo bodů K a 0 v pravém obrázku si ujasníme dosazením nějakých kladných reálných čísel $s_1 = r \ll 1, s_2 = R \gg 1$ do (1.82). Pouhým odhadem zjistíme, že jejich obrazy budou opět kladná reálná čísla $F_0(r) < K$ a $F_0(R) \ll K$. Číslo $s_3 = j\Omega$ se zobrazí do bodu na záporné imaginární ose $F_0(j\Omega) = \frac{-jK}{2\zeta}$ (viz též (22a)).

Doplňme-li přenos $F_0(s)$ zápornou zpětnou vazbou podle **obr.1.21** (bez integračního členu, tj. $k=0$), nebude stabilita uzavřené smyčky při libovolné kladné velikosti konstant K, Ω, ζ ohrožena. Póly funkce (1.82) jsou $p_{1,2} = -\zeta\Omega \pm j\Omega\sqrt{1-\zeta^2}$ a mají vždy zápornou reálnou část, takže nemohou ležet uvnitř C a při kontrole stability podle Nyquistova kritéria dosazujeme $P=0$. Počet oběhů Nyquistovy křivky okolo bodu -1 je evidentně též nulový, takže podmínka (1.81b) je splněna.

Stanovení počtu oběhů okolo bodu -1

U složitějších průběhů Nyquistových křivek je pro stanovení smyslu a počtu oběhů okolo bodu -1 užitečná následující grafická pomůcka:

- z bodu -1 vedeme polopřímku p v libovolném směru a při postupu po ní směrem z počátku registrujeme její průsečíky s Nyquistovou křivkou přibíhající zprava i zleva

- počet průsečíků zprava zmenšený o počet zleva je počtem oběhů v kladném smyslu. V **obr.1.18** je tímto způsobem potvrzena hodnota $\Delta \arg_{C-}[F_0(s)] = 0$.

Nestabilní otevřená smyčka

Nastane-li případ, že póly přenosu $F_0(s)$ otevřené smyčky leží uvnitř C , je tato sama o sobě nestabilní. Z předchozího výkladu je ale zřejmé, že její nestabilita nevyklučuje stabilitu smyčky uzavřené - viz další příklad.

Příklad 18: Přenosová funkce otevřené smyčky je

$$F_0(s) = K \frac{s+0,2}{s(s-1)}, \quad K > 0 \quad (1.83)$$

Nulový bod je $n_1 = -0,2$ a póly $p_1 = 0, p_2 = 1$. V zakázané oblasti leží jednonásobný pól p_2 , takže otevřená smyčka je vždy nestabilní a pro určení stability uzavřené smyčky je směrodatná hodnota $P=1$. Zvolíme kladný smysl oběhu hranice C , viz **obr.1.19** vlevo, takže je relevantní varianta **A** Nyquistova kritéria. Úplný tvar Nyquistových křivek pro dvě vybrané hodnoty konstanty K je na **obr.1.19** uprostřed a vpravo. Při zobrazení kruhových oblouků křivky C jsou na rozdíl od **příkladu 17** převráceny hranice intervalů úhlu φ :

$$s = re^{j\varphi}, \quad \varphi \in (+\pi/2, -\pi/2)$$

$$s = Re^{j\varphi}, \quad \varphi \in (-\pi/2, +\pi/2)$$

Číslo $s = re^{j\varphi}$ se vyhýbá počátku malým obloučkem $r \rightarrow 0$ v záporném smyslu pod úhlem $\varphi \in (+\pi/2, -\pi/2)$ a při jeho zobrazení je třeba vyšetřit dělení nulou pomocí limity

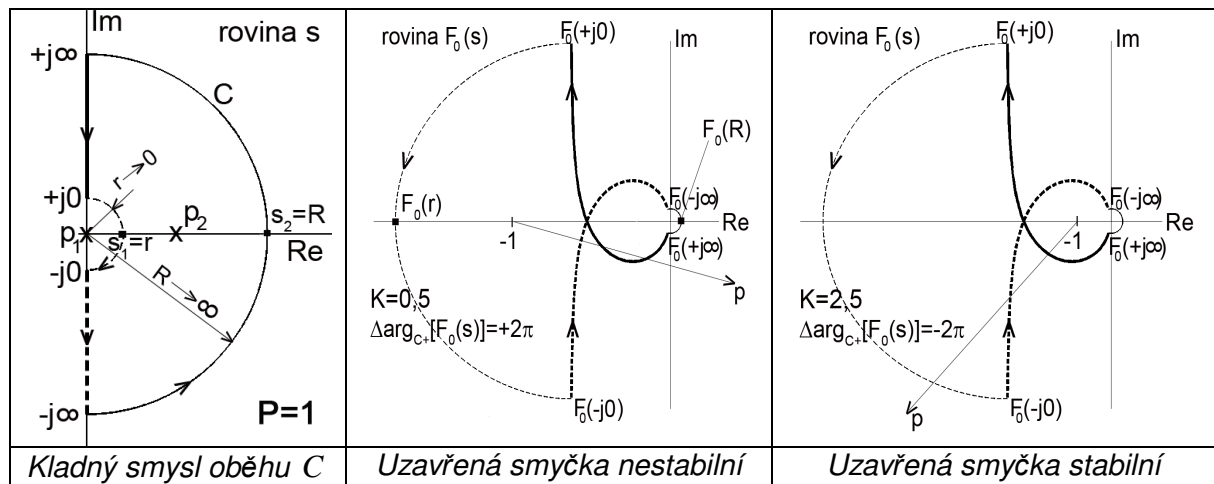
$$\lim_{r \rightarrow 0} F_0(re^{j\varphi}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{K(re^{j\varphi} + 0,2)}{re^{j\varphi}(re^{j\varphi} - 1)} = -0,2K \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{-j\varphi}}{r}$$

Výsledkem je komplexní číslo s nekonečně velkým modulem $\left| F_0(re^{j\varphi}) \right| = \frac{0,2K}{r} \Big|_{r \rightarrow 0} \rightarrow \infty$, které se

pohybuje po nekonečně velké půlkružnici ve smyslu kladném (proti směru hodin) v intervalu argumentů $\psi \in (+\pi/2, -\pi/2)$. Úvahu lze zkontrolovat dosazením nějakého malého kladného reálného čísla $s_1 = r \rightarrow 0_+$ do (1.83). Výsledkem je opět reálné, ale velké záporné číslo

$F_0(r) = \frac{-0,2K}{r} \rightarrow -\infty$. Naopak oblouk s velkým poloměrem $R \rightarrow \infty$ se zobrazí do nekonečně malého obloučku okolo počátku, probíhajícího bodem na kladné reálné ose

$$F_0(R) = K \frac{R+0,2}{R(R-1)} \rightarrow 0.$$



Obr. 1.19 Kladný smysl oběhu hranice C , Nyquistovy křivky nestabilní otevřené smyčky

Změna konstanty K ovlivní pouze měřítko souřadných os, nikoliv tvar křivky. Dojde pouze k pohybu bodu -1 po reálné ose, čímž se může změnit počet jeho oběhů. Např. pro $K = 0,5$ zjistíme výše uvedenou grafickou metodou jeden oběh v kladném smyslu, tj. $\Delta \arg_{C+}[F_0(s)] = +2\pi$, takže podmínka (1.81a) není pro $P=1$ splněna a uzavřená smyčka bude nestabilní. Pro $K = 2,5$ zjistíme jeden oběh v záporném smyslu a podmínka stability je splněna, neboť $\Delta \arg_{C+}[F_0(s)] = -2\pi P = -2\pi$. S nárůstem konstanty K (tzv. "statického zesílení") je tedy uzavřená smyčka stabilizována.

Pokud bychom obrátili smysl oběhu hranice C na záporný, obrátí se i smysl šipek u Nyquistovy křivky a podle vztahu (1.81b) varianty **B** dojdeme ke stejným závěrům.

Stabilitu je možno kontrolovat i algebraicky výpočtem kořenů charakteristické rovnice uzavřené smyčky podle (1.79a):

$$1 + F_0(s) = 1 + K \frac{s + 0,2}{s(s - 1)} = 0$$

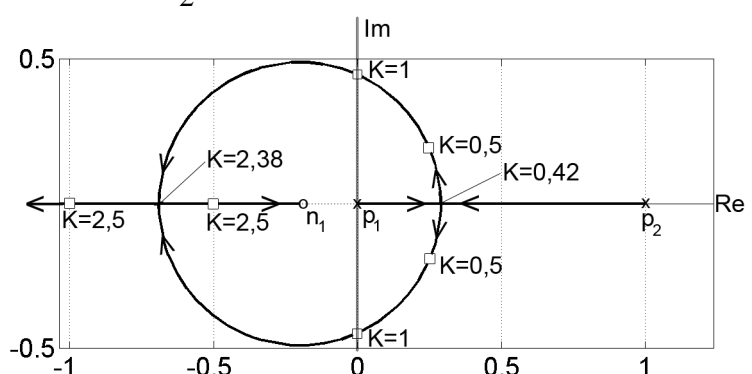
a úprava vede na snadno řešitelnou kvadratickou rovnici

$$s^2 + (K - 1)s + 0,2K = 0 \quad (1.83a)$$

Kořeny (póly uzavřené smyčky) jsou

$$s_{1,2} = \frac{1 - K \pm \sqrt{K^2 - 2,8K + 1}}{2} \quad (1.83b)$$

Pro různé hodnoty zesílení v intervalu $K \in \langle 0, \infty \rangle$ vyplní čísla s_1, s_2 v komplexní rovině tzv. geometrické místo kořenů uzavřené smyčky (zkratka **GMK**) - viz silně vytažené čáry v **obr. 1.20**. Pro $K = 0$ je z (1.83a) zřejmé, že kořeny uzavřené i otevřené smyčky se shodují, tj. $s_1 = p_1, s_2 = p_2$. Zvyšováním K bychom zjistili, že čísla s_1, s_2 "startují" z bodů p_1, p_2 ve směru šipek, postupně se přemístí na kružnici se středem v nulovém bodě otevřené smyčky n_1 a pro $K \rightarrow \infty$ skončí pól s_1 v bodě n_1 a pól s_2 v záporném nekonečnu. Pro vybrané hodnoty K jsou čísla $s_{1,2}$ vyznačena čtverečky a z (1.83b) je ihned patrné, že podmínka stability $\text{Re}(s_{1,2}) < 0$ je splněna pro $K > 1$.

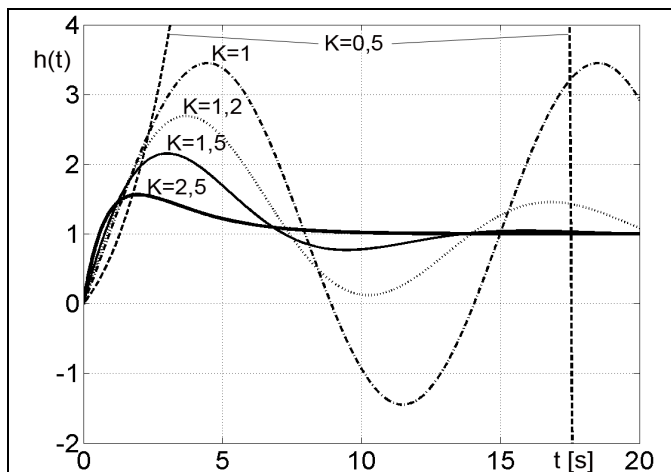


Obr. 1.20 GMK uzavřené smyčky, otevřená smyčka (1.83)

V případě $K = 1$ (tzv. "kritické zesílení") platí

$$s_{1,2krit} = \pm j\sqrt{0,8} / 2 = \pm 0,447j$$

Uzavřená smyčka je právě na mezi stability a kmitá monotónními kmity s kmitočtem $0,447 \text{ rad/s}$. Nyquistova křivka otevřené smyčky by v tomto případě probíhala právě bodem -1 , takže by nebylo možné jednoznačně stanovit počet jeho oběhů. Na **obr.1.20a** jsou odezvy na jednotkový skok (přechodové funkce) uzavřené smyčky pro různé velikosti zesílení K .



Obr.1.20a Přechodové funkce uzavřené smyčky, otevřená smyčka (1.83)

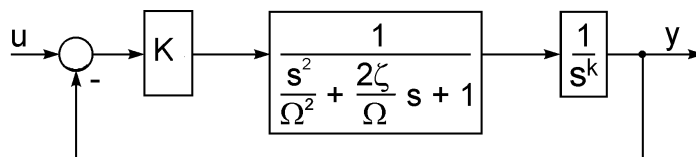
Otevřená smyčka s vícenásobným astatizmem

Jeden integrační člen (jednonásobný astatizmus) v přenosu (1.83) způsobil dělení nulou, takže počátek komplexní roviny se v **obr.1.19** zobrazil na čárkovanou půlkružnici s nekonečně velkým poloměrem. Ukážeme dále vliv vícenásobného astatizmu.

Příklad 19: Otevřená smyčka obsahuje přenos 2.řádu a k - násobnou integraci

$$F_0(s) = \frac{K}{s^k (s^2/\Omega^2 + 2\zeta s/\Omega + 1)} \quad (1.84)$$

Jde o velmi častý a důležitý typ přenosu, vyskytující se zvláště v oblasti elektrických a hydraulických regulačních pohonů v případě, že $k = 1$. Přenos (1.82) byl zvláštním případem pro $k = 0$. Vyšetříme stabilitu úplného zpětnovazebního obvodu podle **obr.1.21**.



Obr.1.21 Obvod s k - násobnou integrací a s jednotkovou zápornou zpětnou vazbou

Zvolíme záporný smysl oběhu křivky C stejně jako v **obr.1.18**. Nejasnosti v konformním zobrazení mohou vzniknout pouze u půlobloučku okolo počátku, kde je třeba určit limitu

$$\lim_{r \rightarrow 0} F_0(re^{j\varphi}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{K}{r^k e^{jk\varphi} (r^2 e^{2j\varphi}/\Omega^2 + 2\zeta r e^{j\varphi}/\Omega + 1)} = K \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{-jk\varphi}}{r^k}$$

takže modul obrazu je $|F_0(s)| = \frac{K}{r^k} \rightarrow \infty$. Číslo s se na křivce C lokálně vyhýbá počátku v

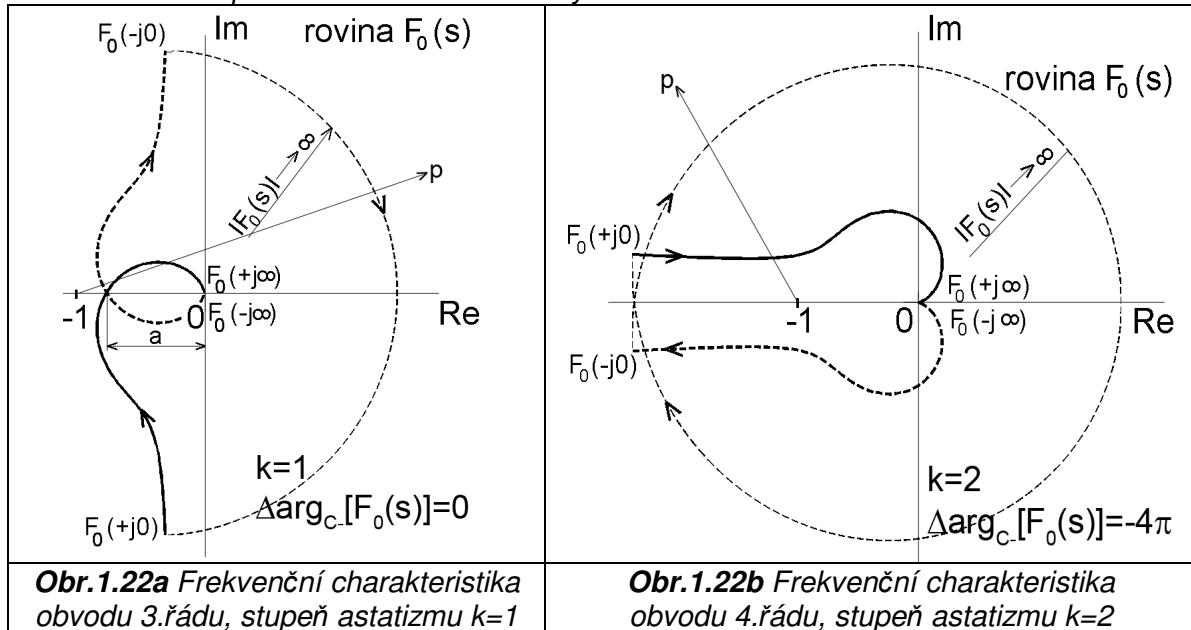
kladném smyslu s úhlem $\varphi \in (-\pi/2, +\pi/2)$, takže číslo $F_0(s)$ proběhne úhel $\psi \in (+k\pi/2, -k\pi/2)$ ve smyslu záporném, tedy k - krát po nekonečně velké půlkružnici ve směru hodin. Na **obr.1.22a,b** jsou zobrazeny dva případy pro stupně astatizmu $k = 1$, $k = 2$. Vždy je vidět, že uzavřená křivka C se zobrazí opět na uzavřenou Nyquistovu křivku, což je další z obecných vlastností konformního zobrazení. Počet oběhů bodu -1 na **obr.1.22a** je $\Delta \arg_{C-}[F_0(s)] = 0$, u **obr.1.22b** vycházejí dva záporné oběhy, tj.

$$\Delta \arg_{C-}[F_0(s)] = -4\pi.$$

Přenos otevřené smyčky (1.84) má póly $p_{1,2} = -\zeta\Omega \pm j\Omega\sqrt{1-\zeta^2}$ a dále k - násobný pól v počátku $p_3, p_4, \dots = 0$. Všechny póly tedy leží vně hranice C , takže pro rozhodování o stabilitě uzavřené smyčky je směrodatná hodnota $P = 0$ (v takovém případě je lhostejné, obíháme-li křivku C v kladném nebo záporném smyslu, neboť vztahy (1.81a) i (1.81b) jsou pro $P = 0$ totožné!!).

Pro stabilitu uzavřené smyčky je třeba, aby počet oběhů křivky $F_0(s)$ okolo bodu -1 byl rovněž nulový.

V případě $k=1$ na **obr.1.22a** leží průsečík Nyquistovy křivky s reálnou osou vpravo od bodu -1 a pomocí grafické metody s polopřímku p zjistíme, že podmínka stability je splněna. Nemusí tomu ale být vždy, protože při zvětšení konstanty K se úměrně zvětší všechny hodnoty čísel $F_0(s)$ (jinými slovy změní se měřítko souřadných os) a bod -1 se posune doprava. Bude-li pro polohu průsečíku a platit, že $|a| > 1$, počet oběhů se zvětší na dva v záporném smyslu a uzavřená smyčka se stane nestabilní. Poměr $1/|a|$ je tzv. bezpečnost zesílení a udává, kolikrát je možno zvětšit konstantu K pro dosažení meze stability.



V případě $k=2$ na **obr.1.22b** je bod -1 obklopen frekvenční charakteristikou otevřené smyčky stále dvakrát bez ohledu na svoji polohu, takže uzavřená smyčka bude vždy nestabilní, ať je konstanta K jakákoliv.

Příklad 20: Otevřená smyčka obsahuje přenos 2.řádu a 1 - násobnou integraci

Algebraický výpočet kořenů charakteristické rovnice uzavřené smyčky je na rozdíl od **příkladu 18** ztížen tím, že jde o rovnici nejméně 3.stupně. Ukážeme ale jednoduchý způsob, jak určit alespoň mez stability pro případ jednonásobného astatizmu, který vede na rovnici kubickou:

- dosazením (1.84) do (1.79a) a po úpravě pro $k=1$ vychází

$$s^3 + 2\zeta\Omega s^2 + \Omega^2 s + \Omega^2 K = 0 \tag{1.85}$$

Kořeny uzavřené smyčky označíme $s_{1,2,3}$, takže možný tvar rovnice je též

$$(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = 0 \tag{1.85a}$$

Při řešení je sice možno použít známé Cardanovy vztahy, ale pro nalezení meze stability lze tento nepohodlný postup urychlit, neboť alespoň jeden kořen bude ryze imaginární (přesněji řečeno budou existovat dva kořeny komplexně sdružené $s_{1,2} = \pm j\omega_0$) a musí platit identita

$$(j\omega_0)^3 + 2\zeta\Omega(j\omega_0)^2 + \Omega^2 j\omega_0 + \Omega^2 K = 0$$

Rovnici rozložíme na dvě samostatné podmínky pro reálnou a imaginární část

$$\begin{aligned} (j\omega_0)^3 + \Omega^2 j\omega_0 &= 0 \\ 2\zeta\Omega(j\omega_0)^2 + \Omega^2 K &= 0 \end{aligned} \tag{1.85b}$$

kde hledanými veličinami jsou ω_0 (kmitočet uzavřené smyčky na mezi stability) a příslušné "kritické" zesílení K . Řešením vychází

$$\omega_{krit} = \omega_0 = \Omega \tag{1.86}$$

$$K_{krit} = 2\zeta\Omega \quad (1.86a)$$

První dva kořeny charakteristické rovnice uzavřené smyčky na mezi stability jsou tedy $s_{1,2} = \pm j\Omega$ a třetí zjistíme roznásobením (1.85a) a srovnáním s (1.85):

$$-s_1 s_2 s_3 = \Omega^2 K_{krit}$$

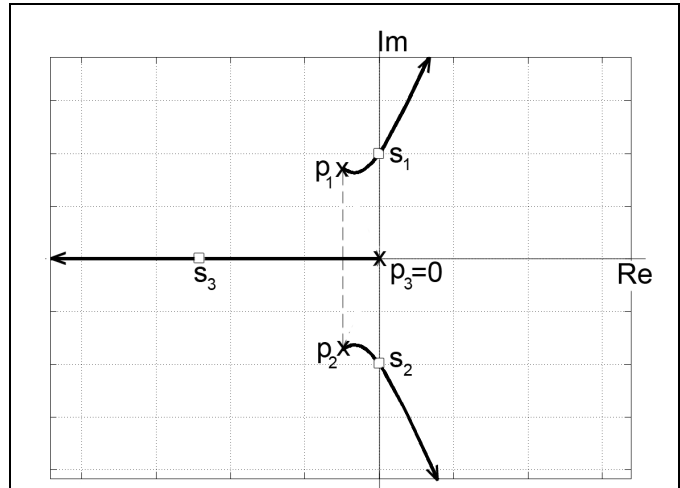
Dosažením $s_{1,2}$ vychází $s_3 = -K_{krit}$. Uzavřená smyčka bude stabilní při $K < K_{krit}$.

Geometrické místo kořenů uzavřené smyčky

Na **obr.1.23** je šipkami na silných čarách znázorněn pohyb kořenů uzavřené smyčky při změně zesílení K . Je uvažován v praxi nejčastější případ, kdy $\zeta < 1$ (tzv. podkritické

poměrné tlumení - viz **kap.2**). Pro $K = 0$ jsou kořeny char. rovnice uzavřené smyčky (1.85) totožné s póly otevřené smyčky, takže stejné jako v **příkladu 18** na **obr.1.20** startují čísla $s_{1,2,3}$ při $K = 0$ z bodů $p_{1,2,3}$. Jejich poloha na mezi stability při kritickém zesílení K_{krit} je vyznačena čtverečky a pro $K \rightarrow \infty$ ubíhají po všech třech větvích GMK do nekonečna.

Poznámka: Povšimněme si rozdíl u **příkladech 18, 19** ve vlivu zesílení K na stabilitu. Jeho nárůst v přenosu (1.83) vede ke stabilizaci uzavřené smyčky (kořeny $s_{1,2}$ se v **obr.1.20** posouvají do levé komplexní poloroviny), kdežto u přenosu (1.84) je tomu naopak. Kořen s_3 je sice na **obr.1.23** stále



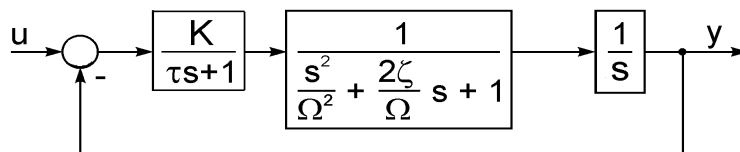
Obr.1.23 GMK uzavřené smyčky při přenosu otevřené smyčky (1.84), $k = 1$, $\zeta < 1$

vlevo od imaginární osy, stabilita je ale ohrožena přemístěním kořenů $s_{1,2}$ vpravo při $K > K_{krit}$.

Příklad 21: Otevřená smyčka obsahuje přenosy 1. a 2.řádu a 1 - násobnou integraci

$$F_0(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)\left(\frac{s^2}{\Omega^2} + 2\zeta \frac{s}{\Omega} + 1\right)} \quad (1.86b)$$

Blokové schéma je na **obr.1.23a**. Jedná se o častý případ elektrohydraulického pohonu, kde přenosem 1.řádu je vystiženo chování řídicího ventilu (tzv. servoventilu) a přenosem 2.řádu je popsán hydromotor. Postup nalezení meze stability je podobný k **příkladu 20**.



Obr.1.23a Obvod s jednonásobnou integrací a přenosy 1. a 2.řádu

Charakteristická rovnice uzavřené smyčky je

$$s(\tau s + 1)\left(\frac{s^2}{\Omega^2} + \frac{2\zeta}{\Omega} s + 1\right) + K = \frac{\tau}{\Omega^2} s^4 + \left(\frac{2\zeta\tau}{\Omega} + \frac{1}{\Omega^2}\right) s^3 + \left(\tau + \frac{2\zeta}{\Omega}\right) s^2 + s + K = 0$$

Dosažením hledaného ryze imaginárního kořenu $s = j\omega$, který přísluší mezi stability, získáme dvě podmínky pro reálnou a imaginární část

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\Omega^2} \omega^4 - \left(\tau + \frac{2\zeta}{\Omega}\right) \omega^2 + K &= 0 \\ -j\left(\frac{2\zeta\tau}{\Omega} + \frac{1}{\Omega^2}\right) \omega^3 + j\omega &= 0 \end{aligned}$$

Úpravou druhé podmínky vychází kmitočet na mezi stability

$$\omega_{krit} = \frac{\Omega}{\sqrt{2\zeta\tau\Omega + 1}} \quad (1.86c)$$

Jeho dosazením do první podmínky a po úpravách vychází kritické zesílení

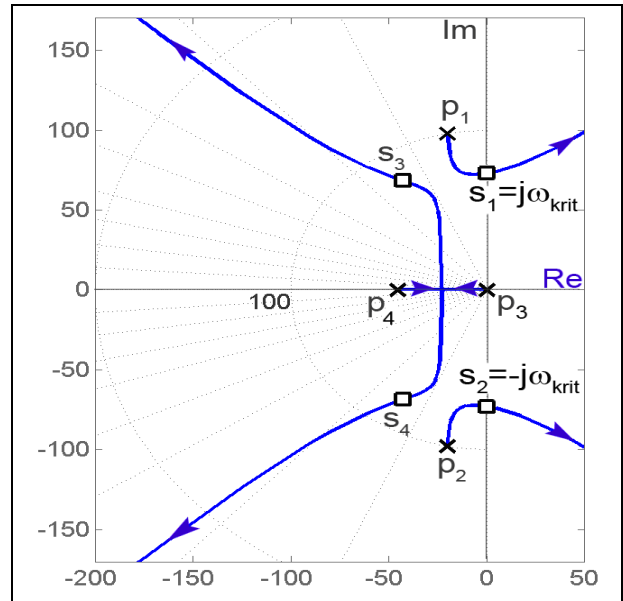
$$K_{krit} = 2\zeta\Omega \frac{\tau^2\Omega^2 + 2\zeta\tau\Omega + 1}{(2\zeta\tau\Omega + 1)^2} \quad (1.86d)$$

Při $\tau = 0$ se nutně vracíme ke vztahům (1.86) a (1.86a) z příkladu 20.

Geometrické místo kořenů uzavřené smyčky je na obr.1.23b. Na rozdíl od obr.1.23 přibyl jeden pól otevřené smyčky $p_4 = -1/\tau$ a tím i další větev, na které se nalézají kořeny uzavřené smyčky s_3, s_4 . O stabilitě rozhodují nadále kořeny s_1, s_2 . Při jiném rozložení pólů $p_{1,2,4}$ ale může dojít k „přehození“ směrů větví GMK a rozhodovat budou kořeny s_3, s_4 .

Poznámka: Velmi často bývá $\tau\Omega = 1$ a $\zeta = 0,5$.

Potom je $\omega_{krit} = \Omega/\sqrt{2}$ a $K_{krit} = 0,75\Omega$ (na rozdíl od příkladu 20, kde by vyšlo $\omega_{krit} = K_{krit} = \Omega$).



Obr.1.23b GMK uzavřené smyčky obvodu s otevřenou smyčkou podle (1.86b)

Mez útlumu při regenerativním rozkmitávání

V některých technických aplikacích (např. u tzv. samobuzeného kmitání obráběcích strojů - viz **kap.5**) nastává situace, kdy vstupním signálem stabilního obvodu se stává jeho vlastní výstupní signál, vzniklý v předchozím pracovním cyklu. Vzniká tak riziko postupného narůstání amplitudy kmitů na výstupu. Obecná podmínka stability (1.74) je sice splněna, ale musí být dále zpřísněna podmínkou, aby při harmonickém buzení obvodu libovolným kmitočtem nedošlo ke zvýšení amplitudy kmitání na výstupu. U frekvenčního přenosu (1.70a) tedy musí pro všechny kmitočty ω platit

$$|G(j\omega)| \leq 1 \quad (1.87)$$

Poznámka: Tento požadavek nevyklučuje přítomnost rezonančního převýšení na amplitudové frekvenční charakteristice!!

Jedná-li se o zpětnovazební obvod s přenosem otevřené smyčky $F_0(s)$ podle **obr.1.16**, musí frekvenční přenos uzavřené smyčky (1.79) vyhovět rovnici

$$\left| \frac{F_0(j\omega)}{1 + F_0(j\omega)} \right| \leq 1 \quad (1.87a)$$

neboli $|F_0(j\omega)| \leq |1 + F_0(j\omega)|$ a po vyjádření absolutních hodnot

$$\sqrt{\text{Re}^2 F_0 + \text{Im}^2 F_0} \leq \sqrt{(1 + \text{Re} F_0)^2 + \text{Im}^2 F_0}$$

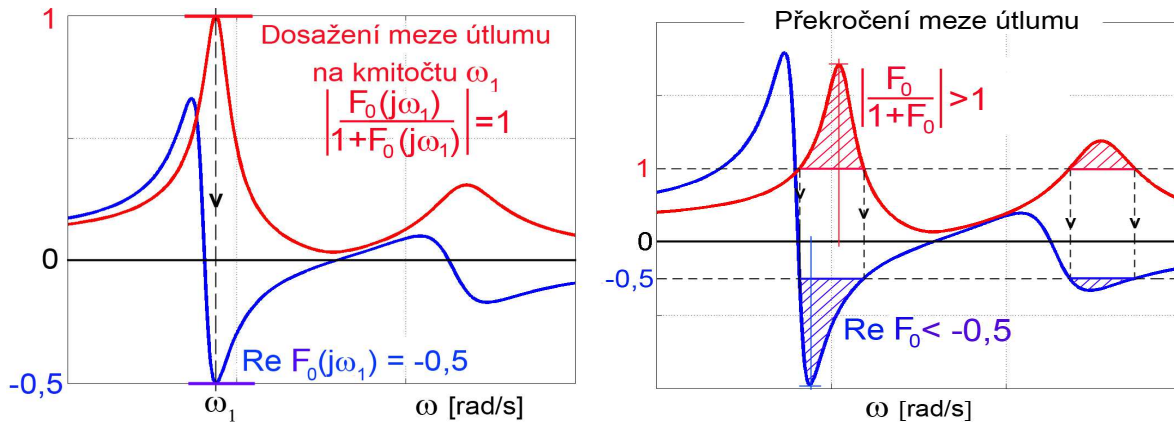
Povýšením na druhou a jednoduchou úpravou získáme podmínku potlačení regenerativního rozkmitání uzavřené smyčky

$$\text{Re} F_0(j\omega) \geq -1/2 \quad (1.88)$$

Ze vztahů (1.87a) a (1.88) vyplývá obecné pravidlo pro tzv. **mez útlumu**:

Má-li být regenerativní rozkmitávání zpětnovazebního obvodu utlumen, musí být absolutní hodnota (amplituda) frekvenčního přenosu uzavřené smyčky menší než jedna, neboli reálná část přenosu otevřené smyčky musí být větší než $-1/2$.

Mezní případ je znázorněn na **obr.1.23bb** vlevo. Frekvenční charakteristika uzavřené smyčky se právě dotýká jednotkové úrovně na kmitočtu ω_1 , takže při regenerativním procesu se kmitání výstupního signálu ustálí na konstantní amplitudě a kmitočtu ω_1 . Vpravo je zachycen případ překročení meze útlumu a riziková oblast kmitočtů, které jsou regenerativním procesem zesilovány, je vyšrafována.



Obr.1.23bb Mez útlumu (vlevo) a její překročení (vpravo)

Zjednodušené Nyquistovo kritérium

Výsledky příkladu 19 svádějí často k nepřesné a zjednodušené formulaci Nyquistova kritéria, která je pravdivá pouze pro $P=0$, tj. v případě, že otevřená smyčka $F_0(s)$ je stabilní (nebo má navíc astatizmus):

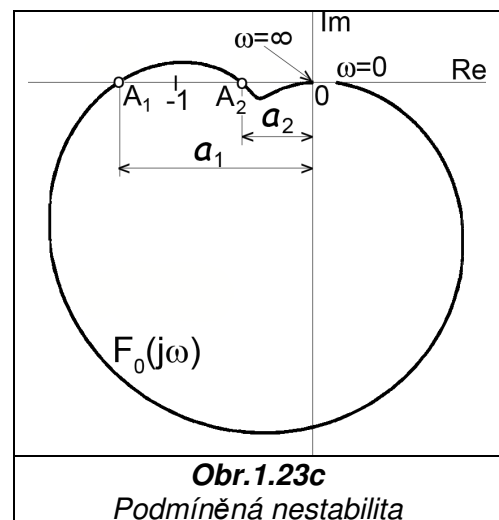
Pro stabilitu uzavřené smyčky je třeba, aby frekvenční charakteristika otevřené smyčky $F_0(j\omega)$ neobkličovala bod -1 . Smysl obíhání hranice C je přitom lhostejný.

Na **obr.1.23c** je znázorněn případ, kdy frekvenční charakteristika otevřené smyčky $F_0(j\omega)$ dvakrát protíná zápornou reálnou osu a obkličuje bod -1 , takže uzavřená smyčka je nestabilní. Přidáme-li do přímé větve v **obr.1.16** konstantní přenos (zesílení) K , bude celkový přenos otevřené smyčky roven $KF_0(j\omega)$ a v **obr.1.23c** se to projeví pouze změnou měřítka v obou souřadných osách.

Při hodnotě $K = K_{A1} = 1/a_1$ se průsečík A_1 přemístí vpravo do bodu -1 a dalším snížením na $K < K_{A1}$ bude uzavřená smyčka stabilizována. Stabilizace je však možná i zvýšením zesílení na hodnotu $K_{A2} = 1/a_2$ tak, aby se do bodu -1 přemístil bod A_2 . V oblasti hodnot zesílení $K_{A1} < K < K_{A2}$ je uzavřená smyčka tzv. podmíněně nestabilní.

Závěr

Nyquistovo kritérium má velký význam hlavně v oblasti experimentální při zapojování a oživování zpětnovazebních obvodů. Otevřená regulační smyčka bývá často realizována jen sériovým spojením prvků, jejichž vlastnosti jsou buď předem známé nebo snadno a bez rizika experimentálně zjistitelné. Většinou je též stabilní a lze tedy aplikovat zjednodušenou verzi pro $P=0$. Průběh její frekvenční charakteristiky okolo bodu -1 je následně možno upravovat přidavnými členy tak, aby se mu vhodným způsobem vyhnula.



Obr.1.23c
Podmíněná nestabilita

1.18.3 Aproximace dopravního zpoždění

Základem pro odvození obecného Nyquistova kritéria je Cauchyho teorém o změně argumentu, který platí pro funkce komplexní proměnné, nemající podstatné singularity. Tento okruh funkcí byl ale v dalších krocích důkazu zúžen na racionální přenosové funkce, tedy na lineární obvody. Přesto bývá kritérium aplikováno (z hlediska matematického někdy ne zcela správně) i na obvody s jinými typy přenosů.

Častým případem je obvod s dopravním zpožděním. Je-li vstupním signálem funkce $u(t)$, výstupem je táž funkce, ale posunutá o čas a vpravo, tj. $y(t) = u(t - a)$, samozřejmě s respektováním podmínky, že $y(t) = 0$ pro $t < a$!! Použitím pravidla 3 v **kap.1.12** obdržíme transcendentní přenosovou funkci

$$\frac{y(s)}{u(s)} = e^{-as} \quad (1.89)$$

Frekvenční charakteristikou přenosu dopravního zpoždění $e^{-aj\omega}$ v komplexní rovině je jednotková kružnice (viz **obr.1.24a**), tj. amplituda je stále jednotková a fázový posuv roste lineárně s kmitočtem:

$$\varphi = -a\omega \quad (1.89a)$$

Pokud potřebujeme vyjádřit dopravní zpoždění lineárním způsobem, tj. racionální přenosovou funkcí, nabízejí se pro vztah (1.89) různé způsoby přibližné aproximace, z nichž zmíníme dvě. Podmínkou je, aby stupeň čitatele byl maximálně stejně velký jako stupeň jmenovatele - viz (1.78):

1) Použití rozvoje do Taylorovy mocninné řady podle známého vztahu

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Funkci e^{-as} proměnné s upravíme předem do tvaru

$$e^{-as} = \frac{e^{-as/2}}{e^{+as/2}}$$

a rozvineme zvlášť čitatele i jmenovatele. Výsledkem je podíl dvou nekonečných řad

$$e^{-as} \approx \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-as)^n}{2^n \cdot n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(+as)^n}{2^n \cdot n!}} = \frac{1 - as/2 + (as)^2/8 - (as)^3/48 + \dots}{1 + as/2 + (as)^2/8 + (as)^3/48 + \dots} \quad (1.90a)$$

Řád Taylorovy aproximace (maximální hodnotu n) volíme podle přípustné chyby fázového posuvu. Pohodlný výpočet pólů a nulových bodů je možný ještě pro $n = 2$:

$$e^{-as} \approx \frac{1 - as/2 + (as)^2/8}{1 + as/2 + (as)^2/8} \quad (1.90b)$$

ale chyba fáze je zde příliš velká.

2) Přesnější výsledky dává Padého rozvoj n -tého řádu (Henri Padé, 1863÷1953):

$$e^{-as} \approx \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k c_k (as)^k}{\sum_{k=0}^n c_k (as)^k} \quad \text{kde koeficienty } c_k \text{ jsou } c_k = \frac{(2n-k)!n!}{2n!k!(n-k)!} \quad (1.90c)$$

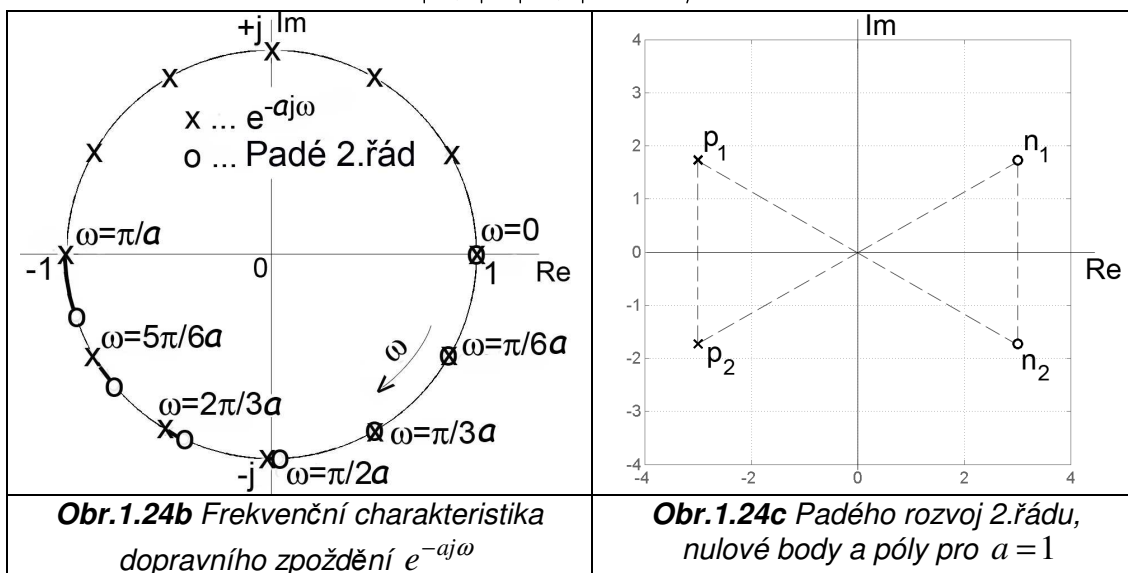
Velmi často se používá rozvoj pouze 2.řádu, kde vychází podobný vztah k (1.90b):

$$e^{-as} \approx \frac{1 - as/2 + (as)^2/12}{1 + as/2 + (as)^2/12} \quad (1.90d)$$

Jeho frekvenční charakteristikou v komplexní rovině je stejně jako u (1.89) a (1.90a,b,c) jednotková kružnice a z poloh křížků a kroužků v **obr.1.24a** je patrné, že do kmitočtu

$\omega = \pi/2a$ (tj. do fázového zpoždění $-\pi/2$) je chyba oproti (1.89a) zanedbatelná. Z čitatele i jmenovatele (1.90d) zjistíme, že při zařazení Padého rozvoje 2.řádu do regulačního obvodu přibudou dva komplexně sdružené nulové body $n_{1,2} = \frac{+3 \pm j\sqrt{3}}{a}$ a dva póly $p_{1,2} = \frac{-3 \pm j\sqrt{3}}{a}$, viz **obr.1.24b**. Jejich vzdálenost od počátku komplexní roviny je

$$|n_{1,2}| = |p_{1,2}| = \sqrt{12}/a$$



Pokud chceme dále zmenšovat fázovou chybu, používáme Padého aproximace vyšších řádů, ale výpočet pólů a nul je již nepohodlný.

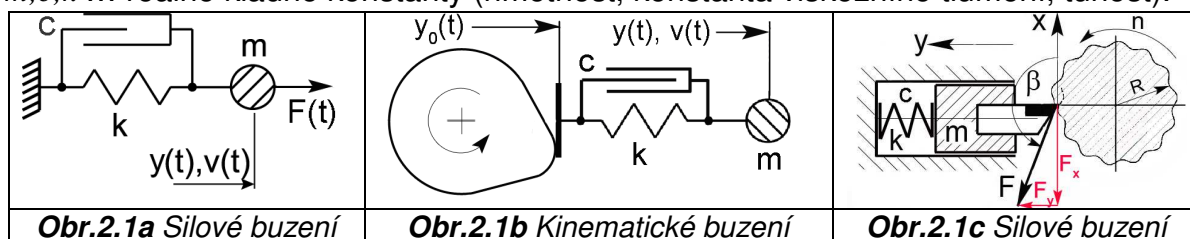
2. Jednohmotový dynamický systém

2.1 Pohybová rovnice

Jednohmotový dynamický systém hmota – pružina – tlumič buzený silou $F(t)$ na **obr.2.1a** je popsán lineární diferenciální rovnicí 2.řádu

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F \quad (2.1a)$$

$m, c, k \dots$ reálné kladné konstanty (hmotnost, konstanta viskozního tlumení, tuhost).



Poznámky: 1) Uvažujeme vedení hmoty ve vodorovném směru a bez tření, aby nebylo nutno do výpočtů zahrnovat gravitační sílu;

2) Na **obr.2.1b** je znázorněn případ tzv. kinematického buzení, kde je místo síly předepsán časový průběh zdvihu $y_0(t)$ na levém konci pružiny. Tento způsob buzení je obvyklý např. u vačkových mechanismů. Pohybová rovnice je

$$m\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{y}_0) + k(y - y_0) = 0 \quad \text{neboli} \quad m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = c\dot{y}_0 + ky_0$$

takže po dosazení $F = c\dot{y}_0 + ky_0$ se z formálního hlediska oproti (2.1a) nic nezměnilo. Dále se budeme věnovat pro pohony typičtějším buzení silovému.

3) Na **obr.2.1c** je jednohmotový dynamický model soustružení zapichováním. Řezná síla může kolísat se zvlněním soustruženého povrchu. Relevantní je vodorovná složka síly F_x .

Rovnici (2.1a) upravíme na tvar

$$\ddot{y} + 2\zeta\Omega\dot{y} + \Omega^2 y = \frac{1}{m} F, \quad \text{kde} \quad \frac{c}{m} = 2\zeta\Omega \quad (2.1b)$$

resp.
$$\frac{\ddot{y}}{\Omega^2} + \frac{2\zeta}{\Omega}\dot{y} + y = \frac{1}{k} F \quad (2.1c)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \dots \text{vlastní kmitočet}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \dots \text{poměrné tlumení (též „útlum“)} \quad (2.2)$$

Charakteristická rovnice je

$$s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2 = 0 \quad \text{nebo též} \quad (s - p_1)(s - p_2) = 0 \quad (2.3)$$

Při výpočtu kořenů $p_{1,2}$ nastanou čtyři případy podle velikosti poměrného útlumu ζ :

a) nadkritické ($\zeta > 1$), dva reálné různé kořeny $p_{1,2} = -\zeta\Omega \pm \Omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$

b) kritické ($\zeta = 1$), dvojnásobný reálný kořen $p_{1,2} = -\Omega$

c) podkritické ($\zeta < 1$), dva komplexně sdružené kořeny $p_{1,2} = -\zeta\Omega \pm j\Omega\sqrt{1 - \zeta^2}$

kde je patrný další kmitočet $\Omega_\zeta = \Omega\sqrt{1 - \zeta^2}$ (2.4)

d) nulové ($\zeta = 0$), dva ryze imaginární komplexně sdružené kořeny $p_{1,2} = \pm j\Omega$.

Poloha kořenů v komplexní rovině pro různé velikosti útlumu je patrná z **obr.2.2**. Při kritickém nebo podkritickém útlumu (tj. $\zeta \leq 1$) platí, že vzdálenost kořenů od počátku je $|p_{1,2}| = \Omega$ a úhel mezi průvodičem a zápornou reálnou osou $\gamma = \arccos\zeta$, jak lze snadno dokázat pomocí Pythagorovy věty. V dalším textu se

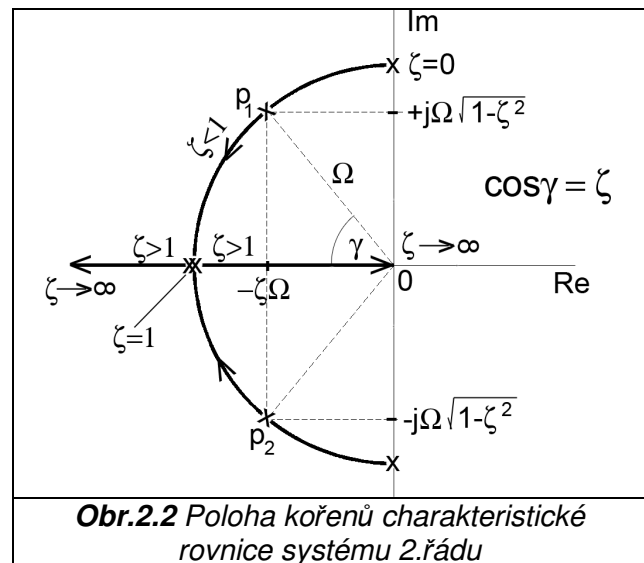
budeme zabývat případem c) s podkritickým útlumem $\zeta < 1$, který je u mechanických systémů nejčastější.

Poznámky: 1) Kořeny nemohou ležet v pravé komplexní polorovině, což je obecná vlastnost všech kvadratických rovnic s nezápornými koeficienty;

2) U automaticky řízených strojů je síla F vyvozována pohonem většinou prostřednictvím el. proudu (u elektromotorů) nebo tlaku kapaliny (u hydromotorů) a představuje řídicí veličinu. Z hlediska regulace je tedy možno podíl F/m na pravé straně (2.1b) chápat jako řídicí signál požadovaného zrychlení hmoty a podíl F/k ve (2.1c) jako řídicí signál požadované výchylky.

3) Jednoduchou úpravou zjistíme, že

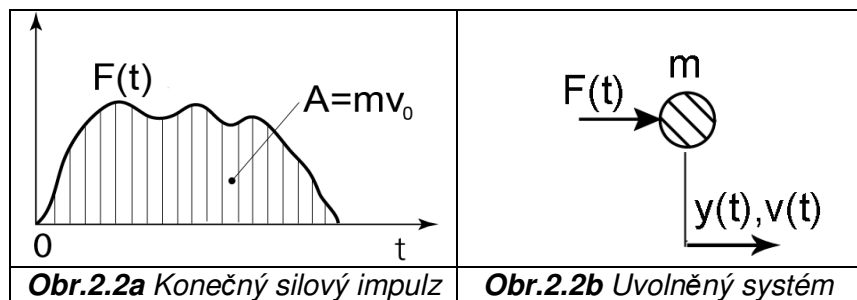
$$p_1 + p_2 = -2\zeta\Omega \quad \text{a} \quad p_1 p_2 = \Omega^2$$



2.2 Buzení Diracovým impulzem síly - váhová funkce

Úvodem zopakujeme použití 2. Newtonova zákona na **buzení volného systému** ($k = 0, c = \zeta = 0$)

obecným silovým impulzem podle **obr.2.2a,b**. Jedná se o



izolovanou hmotu zcela uvolněnou od rámu. Po udělení časově omezeného impulzu síly $A = \int_0^{T_0} F(t) dt$ se hmota bude pohybovat konstantní rychlostí, kterou určíme integrací druhého Newtonova zákona

$$\int F dt = \int d(mv)$$

Pro konstantní hmotnost a nulovou počáteční rychlost vychází konečná rychlost po zániku silového impulzu

$$v_0 = \frac{1}{m} \int_0^{T_0} F dt = \frac{A}{m}$$

kde $A = mv_0$ je plocha pod časovým průběhem impulzu z **obr.2.2a**. Hmotě byla impulzem udělena hybnost $A = mv_0$ a její kinetická energie je

$$E_{Kin} = \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{A^2}{2m}$$

V mezním případě **Diracova impulzu** $F(t) = \delta(t)$ (viz např. **obr.1.6**) je plocha A jednotková a hmota dosáhne konečnou rychlost

$$v_{0Dirac} = \frac{1}{m}$$

již v čase $t \rightarrow 0$. Udělená energie je

$$E_{KinDirac} = \frac{1}{2m}$$

Poznámky: 1) Při energetických výpočtech je třeba důsledně vycházet z výchozího tvaru pohybové rovnice (2.1a), nikoliv z (2.1b,c). Rozdíl ukážeme na příkladu:

- pohyb volné hmoty m je popsán rovnicí

$$m\ddot{y} = F$$

a při konečném impulzu síly $A = \int_0^{T_0} F dt$ platí výše uvedené vztahy pro rychlost i energii.

Upravená rovnice

$$\ddot{y} = \frac{F}{m} \quad \text{neboli} \quad m_0\ddot{y} = m_0 \frac{F}{m}, \quad m_0 = 1 \text{kg}$$

platí pro systém s jednotkovou hmotností a m – krát menším impulzem síly. Jejím řešením získáme opět stejné (a samozřejmě správné) vztahy pro dráhu i rychlost, ale výpočet energie dává jiný výsledek:

- impulz síly je
$$\int_0^{T_0} \frac{F}{m} dt = 1 \int_0^{v_0} dv$$

- konečná rychlost
$$v_0 = \int_0^{T_0} \frac{F}{m} dt = \frac{A}{m}$$

je stejná jako u původního systému, ale kinetická energie jednotkové hmoty je jiná !!!

$$E_{Kin} = \frac{1}{2} v_0^2 = \frac{A^2}{2m^2}$$

2) Při stejném impulzu síly A jsou rychlosti i kinetické energie dvou různých hmot v obráceném poměru hmotností:

$$A = m_1 v_1 = m_2 v_2$$

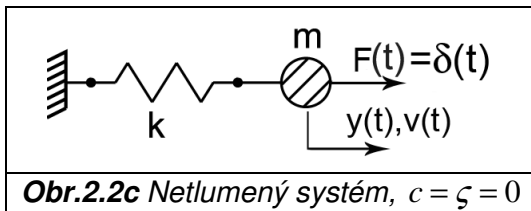
$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{A^2}{2m_1}, \quad E_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{A^2}{2m_2}, \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

2.2.1 Netlumený systém $k \neq 0, c = \zeta = 0$, viz obr.2.2c

Na rozdíl od předchozího případu je hmota k rámu zakotvena pružinou. Obecná rovnice (2.1a) přejde na tvar

$$m\ddot{y} + ky = \delta(t)$$

Laplaceův obraz Diracova impulzu je jedna, takže obraz polohy hmoty je



Obr.2.2c Netlumený systém, $c = \zeta = 0$

$$L\{y(t)\} = \frac{1}{ms^2 + k} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + \Omega^2}$$

Pro zpětnou transformaci použijeme pravidlo **16** v **kap.1.12**:

$$y_{Dirac} = \frac{1}{m\Omega} \sin \Omega t = \frac{1}{\sqrt{mk}} \sin \Omega t \quad (2.4a)$$

Pro rychlost platí

$$v_{Dirac} = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{m} \cos \Omega t$$

Povšimněme si, že počáteční rychlost v čase $t=0$ (a tím i udělená kinetická energie) je stejná jako v předchozím případě volné hmoty, tj.

$$v_{Dirac} \Big|_{t \rightarrow 0} = \frac{1}{m}, \quad E_{KinDirac} \Big|_{t \rightarrow 0} = \frac{1}{2m} \quad (2.4b)$$

s tím rozdílem, že dojde k periodickému „přelévání“ z formy kinetické do potenciální energie napjatosti pružiny. V úvratí pohybu je veškerá energie akumulována v pružině, tj.

$$E_{KinDirac} = \frac{1}{2m} = E_{PotDirac} = \frac{1}{2}ky_{\max}^2$$

Srovnáním obou forem energie vychází amplituda kmitů polohy (srovnej s (2.4a))

$$y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{mk}}$$

Poznámka: Případ volné hmoty lze vyšetřovat jako speciální případ hmoty pružně ukotvené pro $k \rightarrow 0$, tj. $\Omega \rightarrow 0$. Poznáme později, že obecně N – hmotový systém má N vlastních kmitočtů, ale jedná-li se o systém neukotvený (který se jako celek může pohybovat), je jeden z vlastních kmitočtů nulový.

2.2.2 Tlumený systém $k \neq 0$, $\zeta \neq 0$, viz obr.2.1

Podle **kap.1.15** je odezvou soustavy na Diracův impuls při nulových počátečních podmínkách tzv. váhová funkce $g(t)$. Řešení rovnice (2.1a) v plném tvaru i s tlumením provedeme rozkladem přenosové funkce na částečné zlomky:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = \delta(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

L. obraz váhové funkce je

$$G(s) = L\{y(t)\} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2} = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} \quad (2.5)$$

Konstanty určíme např. postupem podle (1.65):

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{2jm\Omega\sqrt{1-\zeta^2}}$$

V případě $\zeta < 1$ jsou konstanty komplexní a stejně jako póly i komplexně sdružené. Podle (1.66) je váhová funkce

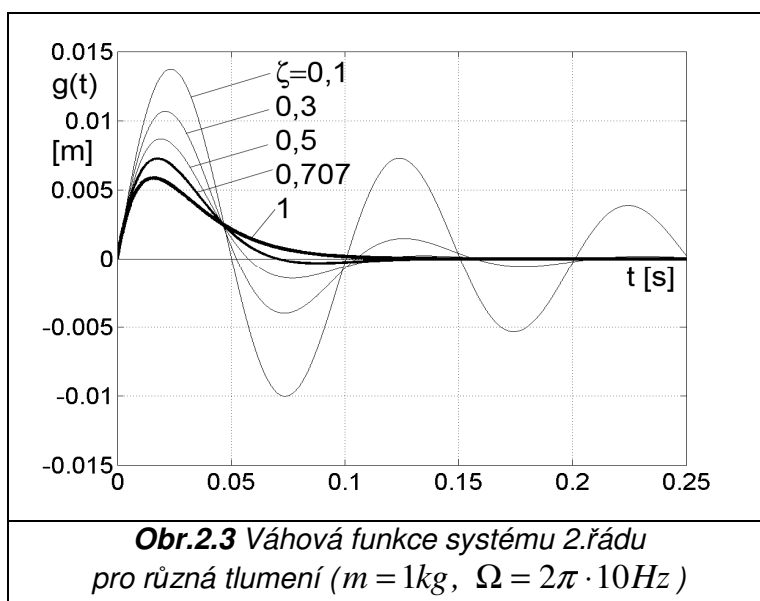
$$g(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} = \frac{e^{-\zeta\Omega t}}{2jm\Omega\sqrt{1-\zeta^2}} \left(e^{j\Omega\sqrt{1-\zeta^2} t} - e^{-j\Omega\sqrt{1-\zeta^2} t} \right)$$

a pomocí Eulerových vztahů (1.2) vychází

$$g(t) = \frac{e^{-\zeta\Omega t}}{m\Omega\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\Omega\sqrt{1-\zeta^2} t) = \frac{e^{-\zeta\Omega t}}{m\Omega\zeta} \sin \Omega_{\zeta} t \quad (2.6)$$

(srovnej s (2.4a) pro $\zeta \rightarrow 0$).

Váhová funkce má exponenciálně dozívající kmitavý průběh s kmitočtem $\Omega_{\zeta} = \Omega\sqrt{1-\zeta^2}$ - viz **obr.2.3**, který je dán imaginární složkou kořenů $p_{1,2}$ v **obr.2.2** a je vždy nižší než kmitočet vlastní. U mechanických systémů s malým tlumením se oba kmitočty prakticky neliší (úhel γ se blíží k $\pi/2$ a v příslušném trojúhelníku splývá odvěsna s přeponou). U kmitavých systémů obráběcích strojů s montážními spoji se



udává $\zeta = 0,02 \div 0,1$, u kontaktů těles z kalené oceli (např. u valivých ložisek) dokonce $\zeta = 0,002$ i méně a koeficient $\sqrt{1-\zeta^2}$ není třeba vůbec uvažovat (např. pro $\zeta = 0,1$ je rozdíl obou kmitočtů jen 0,5%).

Poznámky: 1) Derivací vztahu (2.6) vychází počáteční hodnota rychlosti při buzení Diracovým impulzem

$$v_{Dirac} = \left. \frac{d}{dt} g(t) \right|_{t \rightarrow 0} = \frac{1}{m}$$

takže udělená kinetická energie je stejná jako u volné nebo pružně ukotvené netlumené hmoty, viz (2.4b). Vysvětlení spočívá v tom, že vůči nekonečně vysokému Diracovu impulzu je možno sílu pružiny i tlumiče v době jeho trvání zanedbat;

2) Známe-li váhovou funkci, je možno určit pohyb hmoty při libovolném časovém průběhu budící síly s využitím konvolučního integrálu (viz **kap.1.15**), ať již exaktně integrací (1.60) nebo graficky podle **obr.1.13**;

3) Je třeba důsledně rozlišovat mezi **váhovou funkcí** a **volným pohybem** systému, jehož průběh získáme podle základního kurzu diferenciálních rovnic řešením homogenní rovnice (rovnice bez pravé strany). Toto řešení se sice udává rovněž ve tvaru

$$y = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \quad (2.7)$$

ale konstanty C_1, C_2 vyjdou jinak, neboť jsou v tomto případě dány počátečními podmínkami, které mohou na rozdíl od váhové funkce být i nenulové!! V případě komplexně sdružených pólů vyjdou konstanty též komplexně sdružené, tj.

$$C_1 = |C| e^{j\varphi}, \quad C_2 = |C| e^{-j\varphi}$$

Dosazením z (2.4) do (2.7) vychází rovnice vlastního pohybu

$$y = e^{-\zeta\Omega t} \left[C_1 e^{+j\Omega\sqrt{1-\zeta^2} t} + C_2 e^{-j\Omega\sqrt{1-\zeta^2} t} \right] = |C| e^{-\zeta\Omega t} \left[e^{j(\Omega\sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi)} + e^{-j(\Omega\sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi)} \right]$$

$$y = 2|C| e^{-\zeta\Omega t} \cos(\Omega\sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi) \quad (2.8)$$

Dvě neznámé veličiny $|C|, \varphi$ určíme ze zadaných počátečních podmínek $y(0), \dot{y}(0)$.

2.3 Buzení jednotkovým skokem - přechodová funkce

Na rozdíl od váhové funkce je přechodová funkce v praxi realizovatelná, neboť jednotkový skok síly $F_0 = 1N$ je možno vyvodit (počáteční podmínky jsou opět nulové, $y(0) = \dot{y}(0) = 0$). Rovnice (2.1a) bude mít tvar

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = \eta(t) = 1 \quad (\text{pro } t > 0)$$

a po Laplaceově transformaci vychází obraz přechodové funkce

$$H(s) = L\{y(t)\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{ms} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2} = \frac{C_0}{s - p_0} + \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2}$$

K původním dvěma pólům (2.4) přistoupil další pól v počátku $p_0 = 0$, takže rozklad na parciální zlomky má tři sčítance. Postupem podle (1.65) určíme konstanty

$$C_0 = \frac{1}{k}, \quad C_{1,2} = \frac{-\sqrt{1-\zeta^2} \pm j\zeta}{2k\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad |C_{1,2}| = \frac{1}{2k\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Dále je výhodné převést komplexně sdružené konstanty $C_{1,2}$ do exponenciálního tvaru

$$C_{1,2} = |C| e^{\pm j\varphi} = \frac{1}{2k\sqrt{1-\zeta^2}} e^{\pm j\varphi}$$

$$\sin \varphi = \frac{\text{Im}C_1}{|C|} = \zeta, \quad \cos \varphi = \frac{\text{Re}C_1}{|C|} = -\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{\text{Im}C_1}{\text{Re}C_1} = \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(viz **obr.2.4**). Přechodovou funkci získáme zpětnou L. transformací

$$h(t) = C_0 + |C|e^{j\varphi} \cdot e^{p_1 t} + |C|e^{-j\varphi} \cdot e^{p_2 t} = \\ = C_0 + |C|e^{-\zeta\Omega t} \left(e^{j(\Omega\sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi)} + e^{-j(\Omega\sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi)} \right)$$

$$h(t) = \frac{1}{k} + \frac{e^{-\zeta\Omega t}}{k\sqrt{1-\zeta^2}} \cos\left(\Omega\sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi\right) \quad (2.9a)$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Zavedením úhlu $\psi = \varphi - \pi/2$ je možno vztah (2.9a) převést na obvyklejší tvar

$$h(t) = \frac{1}{k} - \frac{e^{-\zeta\Omega t}}{k\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\Omega\sqrt{1-\zeta^2} t + \psi\right), \quad \psi = \text{arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad (2.9b)$$

Snadno se lze přesvědčit, že derivací přechodové funkce vznikne funkce váhová.

Poznámka: Pro $\zeta = 0$ (netlumený systém) je $\varphi = \pi$, takže $h(t) = \frac{1}{k}(1 - \cos \Omega t)$ (2.9c)

(viz též **příklad 9** v **kap.1.12**).

Z lokálních extrémů přechodové funkce je možno zpětně určit poměrné tlumení i vlastní kmitočet systému. Místní maxima přechodové funkce nastávají v časech

$$t_{n\text{MAX}} = \frac{(2n-1)\pi}{\Omega\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad n=1,2,3,\dots \quad (2.10a)$$

Poměr dvou po sobě následujících překmitů přes ustálenou hodnotu $h(\infty) = 1/k$ je

$$\frac{h(t_n) - h(\infty)}{h(t_{n+1}) - h(\infty)} = \exp\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (2.10b)$$

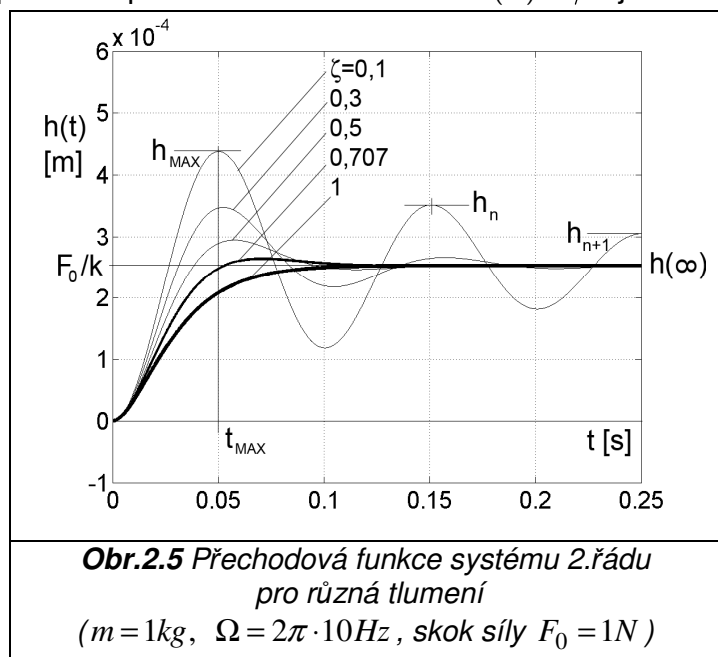
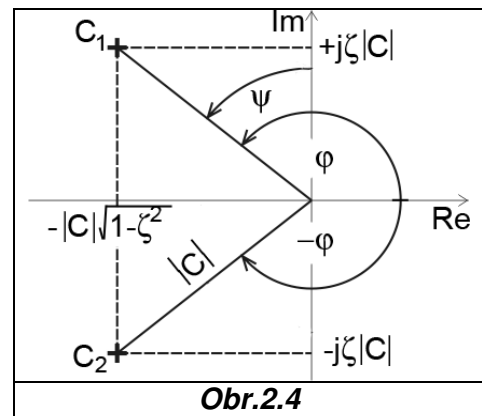
Maximum přechodové funkce je

$$\frac{h(t)_{\text{MAX}}}{h(\infty)} = 1 + \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (2.10c)$$

a nastává při prvním překmitu v čase

$$t_{\text{MAX}} = \frac{\pi}{\Omega\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.10d)$$

Uvedené vztahy mohou dobře posloužit při vyhodnocování naměřených průběhů u reálných systémů a verifikaci jejich tlumení i vlastního kmitočtu, viz **obr.2.5**.



2.4 Harmonické buzení – ustálené vynucené kmity

Poznámka: V této a dalších kapitolách bude na systému 2.řádu konkretizován obecný postup z kap.1.14 a 1.17.

Je-li na pravé straně rovnice (2.1) reálná harmonická funkce (např. $\cos \omega t$), na základě vlastností **A),B),C)** z kap.1.14 lze řešení provést nadvakrát pomocí Eulerova vztahu (1.2)

$$\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} \right) / 2 = \cos \omega t$$

(s tím, že jde o ustálené kmitání, tj. $\sigma = 0$) a obě řešení sečíst. Komplexně sdružená („zrcadlová“) složka řešení pro záporný kmitočet $-\omega$ se ale pro stručnost nemusí uvádět. Bude-li tedy systém v obr.2.1 buzen silou $F = F_0 \cos \omega t$ s reálnou amplitudou

$F_0 = konst$, stačí uvažovat funkci $F = F_0 e^{j\omega t}$

(dělení dvěma není třeba uvažovat). Podle (1.69) je odezva též harmonická

$$y = Y_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (2.11)$$

přičemž amplituda Y_0 i fázový posuv φ jsou dány kmitočtem ω . Výchylka se opoždí za silou, takže $\varphi < 0$ (pouze při $\omega = 0$ je $\varphi = 0$ a statická výchylka je $Y_{0STAT} = F_0/k$). Grafická interpretace tohoto postupu ve formě dvojic protisměrně rotujících komplexně sdružených vektorů (bez dělení dvěma) je na obr.2.6.

Poznámka: Stále platí, že **kladná změna úhlu nastává proti směru rotace u hodin**.

Do pohybové rovnice (2.1) dosadíme derivace

$$\dot{y} = j\omega Y_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega y$$

$$\ddot{y} = (j\omega)^2 Y_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = (j\omega)^2 y$$

$$\frac{(j\omega)^2}{\Omega^2} y + \frac{2\zeta j\omega}{\Omega} y + y = \frac{1}{k} F \quad (2.12)$$

Pro celé pásmo kmitočtů $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$ tak získáme množinu komplexních čísel

$$\frac{Y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{F_0 e^{j\omega t}} = \frac{Y_0}{F_0} e^{j\varphi} = G(j\omega) = \frac{1/k}{\frac{(j\omega)^2}{\Omega^2} + \frac{2\zeta j\omega}{\Omega} + 1} = |G(j\omega)| \cdot e^{j\varphi} = \text{Re} G + j \text{Im} G \quad (2.13)$$

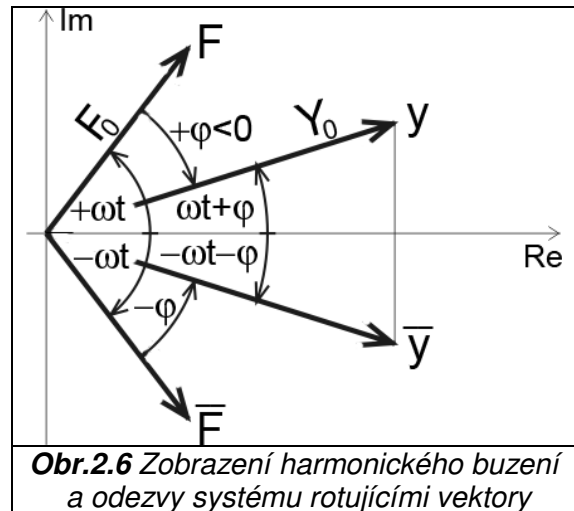
Komplexní funkce $G(j\omega)$ reálné nezávisle proměnné veličiny ω je **frekvenční přenos** systému (někdy též **frekvenční dynamická poddajnost** nebo **receptance**, neboť jde o poměr výchylky a síly). Funkční hodnota pro daný kmitočet ω představuje komplexní konstantu úměrnosti mezi harmonickým vstupem (buzením) a odezvou systému. Časový průběh pohybu hmoty při působení jednotlivé harmonické budící síly s kmitočtem ω určíme prostým vynásobením

$$F_0 e^{j\omega t} \cdot G(j\omega) = Y_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (2.14)$$

Přeloženo do „řeči reálných čísel“ to znamená, že má-li síla průběh $F = F_0 \cos \omega t$, poloha se mění podle vztahu $y = Y_0 \cos(\omega t + \varphi)$, kde

$$Y_0 = F_0 \cdot |G(j\omega)|$$

$$\varphi = \arctg(\text{Im}G/\text{Re}G)$$



Obr.2.6 Zobrazení harmonického buzení a odezvy systému rotujícími vektory

2.5 Obecné buzení

Při neharmonickém průběhu budící síly $F(t)$ je možno využít již jednou zmíněného principu superpozice:

1) Síla $F(t)$ je periodická s periodou ω_0 :

- rozložíme ji do nekonečného součtu harmonických složek (Fourierovy řady) podle vztahu (1.10): $F(t) = \sum F_n = \sum F_{0n} e^{j\omega_n t}$, $\omega_n = n\omega_0$

- pomocí součinu (2.14) zjistíme jednotlivé odezvy y_n na každou složku síly F_n

- výsledný pohyb je dán součtem jednotlivých odezev podle vztahu

$$\sum F_n G(j\omega_n) = \sum y_n = \sum Y_{0n} e^{j(\omega_n t + \varphi_n)} \quad (2.15)$$

2) V případě neperiodické síly lze opět použít superpozici. Rozklad funkce $F(t)$ na jednotlivé harmonické složky nyní vede na **Fourierův integrál** $F(j\omega)$ (též F. obraz funkce $F(t)$, viz (1.17)), což je spojitá funkce kmitočtu. Namísto s jednotlivými harmonickými složkami pracujeme se spojitými funkcemi kmitočtu $F(j\omega), G(j\omega)$ a součet součinů (2.15) přejde na tvar

$$F(j\omega) \cdot G(j\omega) = Y(j\omega) \quad (2.16)$$

Výraz $Y(j\omega)$ je Fourierův obraz odezvy, ze kterého není možno zjistit její časový průběh $y(t)$ přímým součtem jako v (2.15), ale je třeba použít zpětnou Fourierovu transformaci (1.18).

3) Superpozice platí i pro soubor harmonických funkcí s exponenciálně se měnícími amplitudami. Je-li jednotlivá složka buzení popsána vztahem

$$F = e^{\sigma t} F_0 e^{j\omega t} = F_0 e^{s t}, \quad s = \sigma + j\omega$$

dílčí odezva bude podle pravidla o zachování exponentu růstu σ mít tvar

$$y = e^{\sigma t} Y_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = Y_0 e^{s t} e^{j\varphi} \quad \text{a dále} \quad \dot{y} = s Y_0 e^{s t} e^{j\varphi} = s y, \quad \ddot{y} = s^2 Y_0 e^{s t} e^{j\varphi} = s^2 y$$

Dosazením do (2.1c) vychází obecnější tvar, zvaný pouze **přenos**

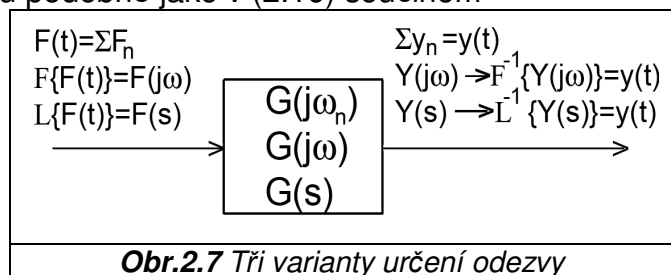
$$G(s) = \frac{1/k}{s^2/\Omega^2 + 2\zeta s/\Omega + 1} \quad (2.17)$$

Rozklad budící síly $F(t)$ na harmonické složky s exponenciálně proměnnou amplitudou je nutno provést v případě, že nelze určit její Fourierův obraz (není-li splněna podmínka absolutní integrovatelnosti (1.33)). Takto jsme dospěli k **Laplaceově transformaci**, která byla podrobněji a matematicky přesněji vysvětlena v **kap.1.8**. Srovnáním (2.13) a (2.17) je vidět, že došlo pouze k formální záměně ryze imaginární nezávisle proměnné veličiny $j\omega$ za obecnou komplexní proměnnou $s = \sigma + j\omega$. Superpozicí účinku množiny dílčích budících funkcí s exponenciálně proměnnou amplitudou získáme odezvu podobně jako v (2.16) součinem

$$F(s) \cdot G(s) = Y(s)$$

kde $F(s), Y(s)$ jsou Laplaceovy obrazy buzení a odezvy. Výpočet časového průběhu $y(t)$ vyžaduje znalost zpětné L. transformace. Logika všech tří výše uvedených postupů je patrná z **obr.2.7**.

Protože v (2.17) jde o podíl L.obrazů výchylky a síly, je používán též název „**zobecněná dynamická poddajnost**“. Podle (2.5) a (2.6) je to tedy L.obraz váhové funkce.



Poznámka: U vačkového mechanismu na obr.2.1b můžeme vyjádřit přenos mezi rozměrem vačky a pohybem hmoty jako podíl dvou mnohočlenů

$$\frac{Y(s)}{Y_0(s)} = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k} = \frac{\frac{c}{k}s + 1}{\frac{s^2}{\Omega^2} + \frac{2\zeta}{\Omega}s + 1} \quad (2.17a)$$

Kořeny jmenovatele $p_{1,2}$ (póly) se oproti přenosu (2.17) nezměnily – viz (2.4), čitatel má jeden kořen (tzv. nulový bod) $n_1 = -k/c$. Konstanta $c/k = 2\zeta/\Omega$ má fyzikální rozměr $\left[\frac{Ns/m}{N/m}\right] = [s]$ a proto někdy nese název **časová konstanta** – znak τ .

2.6 Frekvenční charakteristika systému 2.řádu

Zlomek (2.13) lze upravit usměrněním:

$$G(j\omega) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - \omega^2/\Omega^2 - j2\zeta\omega/\Omega}{(1 - \omega^2/\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2/\Omega^2} \quad (2.18a)$$

Průběh funkce $G(j\omega)$ v komplexní rovině je tzv. **frekvenční charakteristika** (viz kap.1.17), která má podobu podle obr.2.8. Stejně jako harmonické složky buzení a odezvy, tak i funkci $G(j\omega)$ nezobrazujeme pro záporné kmitočty. Snadno lze dokázat, že jde o hodnoty komplexně sdružené

$$\begin{aligned} G(-j\omega) &= \overline{G(j\omega)} \\ \operatorname{Re} G(-j\omega) &= \operatorname{Re} G(j\omega) \\ \operatorname{Im} G(-j\omega) &= -\operatorname{Im} G(j\omega) \end{aligned}$$

Dále platí, že pro $\omega = 0$ je $G(0) = 1/k$. Pro $\omega \rightarrow \infty$ je

$$G(j\infty) = 0 \cdot e^{-j\pi}$$

Frekvenční charakteristika tedy

směřuje do počátku vodorovně. Reálná a imaginární část funkce (2.18a) je

$$\operatorname{Re} G = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - \omega^2/\Omega^2}{(1 - \omega^2/\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2/\Omega^2} \quad (\text{sudá funkce kmitočtu}) \quad (2.19)$$

$$\operatorname{Im} G = \frac{1}{k} \cdot \frac{-2\zeta\omega/\Omega}{(1 - \omega^2/\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2/\Omega^2} \quad (\text{lichá funkce kmitočtu}) \quad (2.20)$$

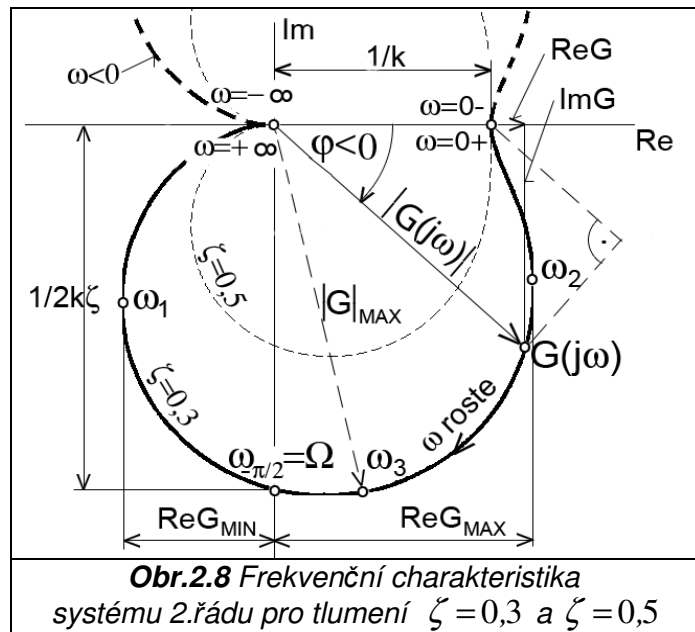
Podle obecných pravidel pro počítání s komplexními čísly platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} G}{\operatorname{Re} G}, \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} G}{|G(j\omega)|}, \quad \cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} G}{|G(j\omega)|}$$

kde absolutní hodnota

$$|G(j\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re} G)^2 + (\operatorname{Im} G)^2} = \frac{1/k}{\sqrt{(1 - \omega^2/\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2/\Omega^2}} \quad (2.21)$$

je sudou funkcí kmitočtu.



Kromě frekvenční charakteristiky na **obr.2.8** se vynášejí v závislosti na kmitočtu i další průběhy (rovněž jen pro $\omega \geq 0$):

$$|G(j\omega)| = fce(\omega)$$

$$\varphi = fce(\omega)$$

(amplitudová a fázová charakteristika - viz soustavu křivek pro různé hodnoty tlumení ζ v **obr.2.9**), dále

$$\text{Re } G = fce(\omega)$$

(reálná charakteristika – viz **obr.2.10** nahoře), a konečně imaginární charakteristika

$$\text{Im } G = fce(\omega)$$

- viz **obr.2.10** dole).

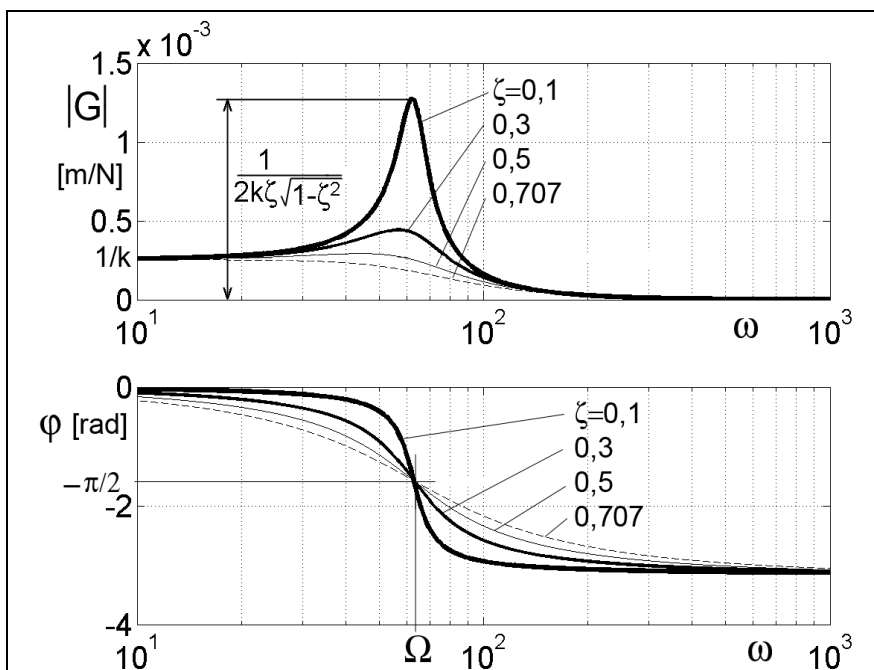
Poznámka: Frekvenční charakteristika vznikne i sečtením komplexních čísel jakožto vektorů v rovnici (2.12).

Konstrukci provedeme v komplexní rovině, která rotuje kladnou úhlovou rychlostí ω (proti směru hodin!!). Vektor síly

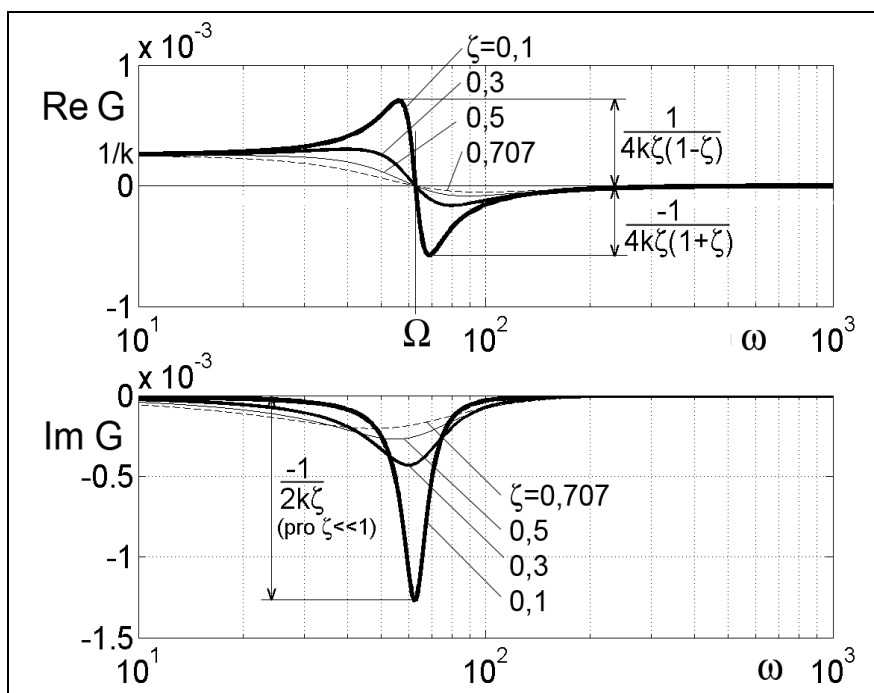
$F = F_0 e^{j\omega t}$ položíme v čase $t=0$ do její kladné reálné osy. Součet tří vektorů na levé straně musí tedy pro každou hodnotu ω skončit na reálné ose v bodě F_0/k . Násobením imaginární jednotkou způsobuje natočení o úhel $+\pi/2$ a platí, že

$e^{j\pi/2} = \cos \pi/2 + j \sin \pi/2 = j$, takže vždy musí vzniknout pravouhlý lichoběžník (viz **obr.2.11**) a vektor y může pro libovolnou hodnotu ω ležet pouze ve 3. nebo 4. kvadrantu, tj. $\varphi \in (0, -\pi)$. Tuto konstrukci lze zobecnit na všechny fyzikální systémy, popsané lineárními diferenciálními rovnicemi n -tého řádu s konstantními koeficienty typu (1.54) a vyplývá z ní, že fázové zpoždění výstupu za vstupem se pro $\omega \rightarrow \infty$ blíží hodnotě $-n \cdot \pi/2$.

Znalost jediného bodu frekvenční charakteristiky systému 2.řádu (změřeného pro určitý kmitočet ω) umožňuje experimentálně stanovit koeficienty pohybové rovnice porovnáním stran lichoběžníka. Například pro bod ležící v **obr.2.11** na imaginární ose ($\text{Re } G = 0$) je fázový posuv $\varphi = -\pi/2$, příslušný kmitočet označíme $\omega = \omega_{-\pi/2}$ a vzniká obdélník.

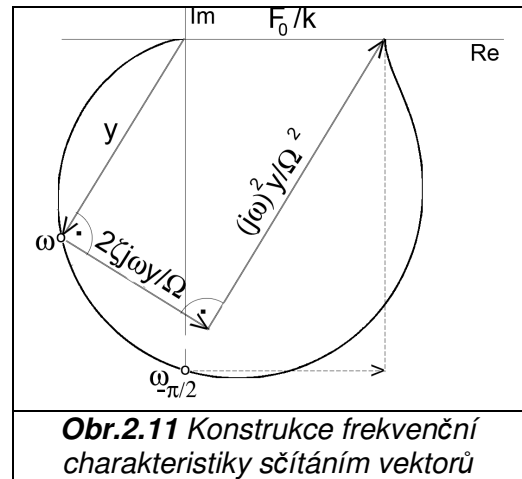


Obr.2.9 Amplitudová a fázová charakteristika systému 2.řádu ($m = 1\text{kg}$, $\Omega = 2\pi \cdot 10\text{Hz}$)



Obr.2.10 Reálná a imaginární charakteristika systému 2.řádu ($m = 1\text{kg}$, $\Omega = 2\pi \cdot 10\text{Hz}$)

Srovnáním jeho svislých stran zjistíme, že platí $\omega_{-\pi/2} = \Omega$ (vlastní kmitočet) a podíl délek svislé a vodorovné strany je roven právě $1/2\zeta$. Tyto dvě souvislosti vyplývají i z rozboru vztahů (2.19) a (2.20)). Protože se jedná o lineární systém, amplituda F_0 ovlivní měřítko v obou souřadných osách stejně a je tedy výhodné volit $F_0 = 1$ (srovnej s **obr.2.8** a **2.12**).



Obr.2.11 Konstrukce frekvenční charakteristiky sčítáním vektorů

Pro další úvahy bude užitečné určit některé význačné body na frekvenční charakteristice v **obr.2.8**. Její průsečík s imaginární osou (tj. bod, kde je $\text{Re } G = 0$, $\varphi = -\pi/2$) má souřadnici

$$\text{Im } G = -1/2k\zeta \quad \text{při kmitočtu } \omega_{-\pi/2} = \Omega \quad (2.22a)$$

Extrémní hodnoty reálné složky frekvenčního přenosu zjistíme z podmínky $\partial \text{Re } G / \partial \omega = 0$

$$\text{Re } G|_{\text{MIN}} = \frac{-1}{4k\zeta(1+\zeta)} \quad \text{při kmitočtu } \omega_1 = \Omega\sqrt{1+2\zeta} \approx \Omega(1+\zeta) \quad (2.22b)$$

$$\text{Re } G|_{\text{MAX}} = \frac{+1}{4k\zeta(1-\zeta)} \quad \text{při kmitočtu } \omega_2 = \Omega\sqrt{1-2\zeta} \approx \Omega(1-\zeta) \quad (2.22c)$$

(tato hodnota má ale význam jen pro $\zeta \leq 1/2$!!!).

Maximum amplitudy frekvenčního přenosu je dáno podmínkou $\frac{\partial |G(j\omega)|}{\partial \omega} = 0$:

$$|G(j\omega)|_{\text{MAX}} = \frac{1}{2k\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{při kmitočtu } \omega_3 = \Omega\sqrt{1-2\zeta^2} \quad (2.22d)$$

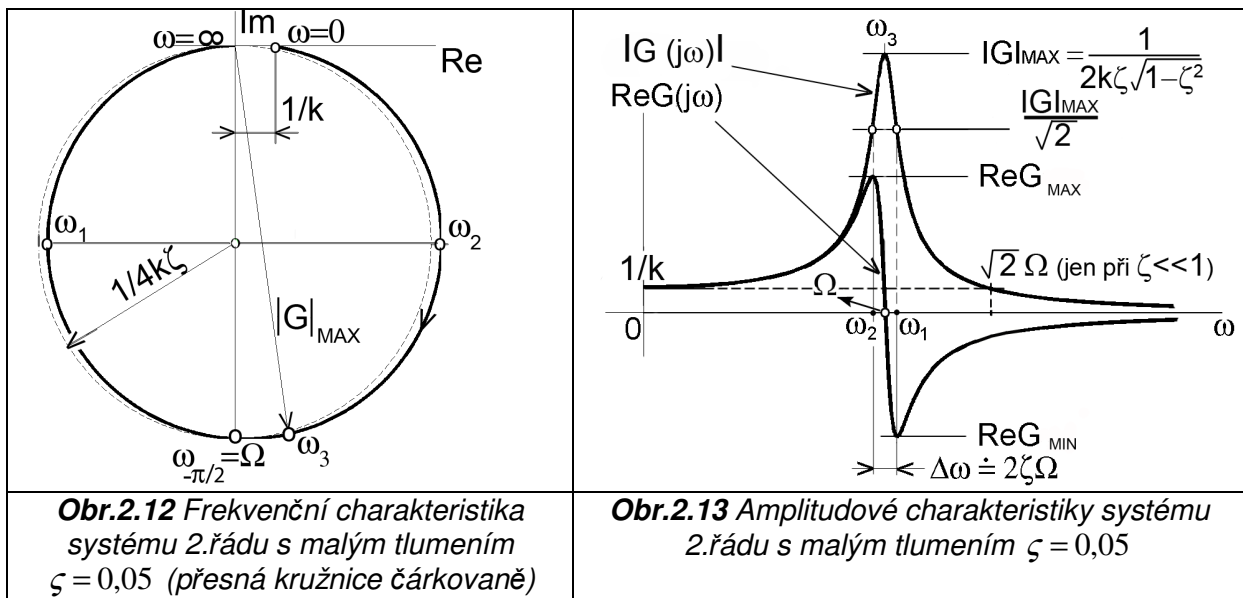
Poznámky: 1) U málo tlumeného systému se kmitočty ω_3, Ω a příslušné hodnoty funkce $|G(j\omega)|$ téměř shodují: např. pro $\zeta = 0,05$ je $\omega_3 = 0,9975\Omega$ a po dosazení za $\omega = \Omega$ do (2.21) vychází $|G(j\omega_3)| = 1,0013 \cdot |G(j\Omega)|$;

2) Vztah (2.22d) dává smysl pouze pro $\zeta \leq 1/\sqrt{2}$. Pro tlumení větší než je tato tzv. **hranice rezonance** nelze při harmonickém buzení dosáhnout větší amplitudy odezvy, než je statická výchylka $Y_{0\text{STAT}} = F_0/k$.

2.7 Systém 2.řádu s malým tlumením

U velmi málo tlumených mechanických systémů ($\zeta \ll 1$, $\zeta^2 \ll \ll 1$) se frekvenční charakteristika z **obr.2.8** asymptoticky přibližuje kružnici procházející počátkem, mající střed na záporné imaginární poloose v bodě $-1/4k\zeta$, takže pro $\zeta \rightarrow 0$ roste poloměr nade všechny meze – viz **obr.2.12**. Při $\zeta \ll 1$ je možno z výrazů (2.22b,c,d) vyloučit odmocniny i závorky a skutečně zjistíme, že všechny čtyři identifikované význačné body leží na této kružnici, přičemž jim příslušné kmitočty $\omega_{-\pi/2}$, $\omega_{1,2,3}$ jsou prakticky shodné s vlastním kmitočtem Ω . Tento poznatek je potvrzen průběhem fázové charakteristiky, na které pro $\zeta \ll 1$ nastává okolo kmitočtu Ω prudká (v mezním případě $\zeta = 0$ skoková) změna fázového posuvu z hodnoty 0 na $-\pi$, viz **obr.2.9** dole.

Dosazením $\zeta \rightarrow 0$ do (2.21) zjistíme, že funkce $|G(j\omega)|$ nabývá hodnoty $1/k$ nejen při nulovém kmitočtu (statická poddajnost), ale také při $\omega = \Omega\sqrt{2}$ - viz **obr.2.13**.



Při praktických měřeních na velmi málo tlumených systémech je možno určit hodnotu tlumení ζ z rozdílu kmitočtů, příslušných extrémům reálné charakteristiky v tomtéž obrázku. Použitím přibližné verze vztahů (2.22b,c) vychází $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \approx 2\zeta \Omega$. Z vlastností kružnice v **obr.2.12** též vyplývá, že rozdíl $\Delta\omega$ přísluší vodorovnému řezu amplitudové charakteristiky $|G(j\omega)|$ na úrovni $\frac{|G(j\omega)|_{MAX}}{\sqrt{2}}$. Oba postupy jsou dostatečně přesné pro hodnoty tlumení $\zeta < 0,2$ (při $\zeta = 0,2$ by vyšlo 0,21).

Poznámka: Doporučený praktický postup identifikace systému z naměřených charakteristik je tento:

- 1) Určení vlastního kmitočtu Ω podle **obr.2.10** a **obr.2.13** (z podmínky $\text{Re } G = 0$ přesně, z polohy špiček $\text{Im } G$ nebo $|G|$ přibližně);
- 2) určení poměrného tlumení ζ z hodnoty $\Delta\omega$ v **obr.2.13**;
- 3) určení tuhosti k ze špičky $\text{Im } G$ na **obr.2.10** nebo z hodnoty $\text{Re } G$ resp. $|G|$ při $\omega = 0$ (viz **obr.2.13**);
- 4) event. kontrola zjištěných hodnot ζ, k ze špičky $|G|$;
- 5) určení hmotnosti ze vztahu $m = k/\Omega^2$.

2.8 Rovinné kmitání jednohmotového ortogonálního systému

Je uvažován rovinný jednohmotový systém podle **obr.2.14a**, buzený obecně natočenou silou $F(t)$ a mající dva vzájemně kolmé (tzv. hlavní) směry poddajnosti x_1, y_1 , opět obecně natočené vůči základnímu souřadnému systému x, y . Příslušné tuhosti a koeficienty viskozního tlumení jsou $k_{x1}, k_{y1}, c_{x1}, c_{y1}$. Tímto jednoduchým způsobem může být modelováno např. chování svislého vřetená frézky při jeho radiálním zatížení. Směry os x, y by odpovídaly pohybovým osám pohonů křížového stolu, nalézajícího se pod vřetenem. Ukážeme dále, že pohyby v obou osách je možno popsat dvěma vzájemně nezávislými rovnicemi, takže zatím nebude nutné pracovat s jejich maticovými zápisy a modální analýzou. Obecnější postup bude podán v **kap.3.6**.

2.8.1 Statické chování

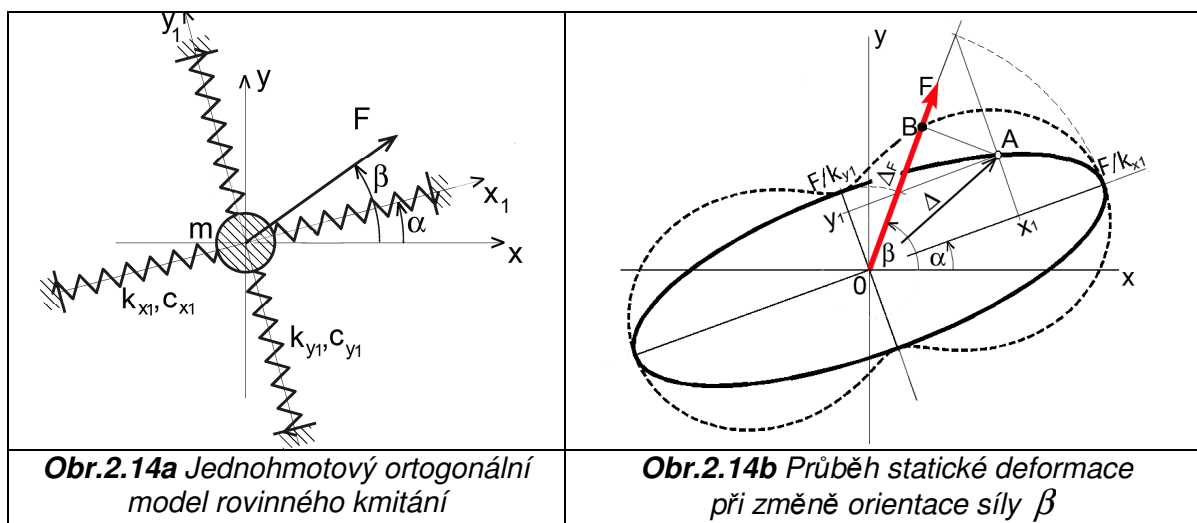
Předpokládáme, že deformace pružin jsou vůči jejich délkám malé, takže neovlivňují jejich úhlovou orientaci. Přemístění hmoty (působíště síly) v hlavních směrech x_1, y_1 určíme z tuhostí k_{x1}, k_{y1} rozkladem síly F na složky F_{x1}, F_{y1} :

$$\begin{aligned} k_{x1}x_1 &= F_{x1} = F\cos(\beta - \alpha) \\ k_{y1}y_1 &= F_{y1} = F\sin(\beta - \alpha) \end{aligned} \quad (2.23a)$$

Umocněním a sečtením vychází rovnice elipsy s poloosami $F/k_{x1}, F/k_{y1}$:

$$\frac{x_1^2}{(F/k_{x1})^2} + \frac{y_1^2}{(F/k_{y1})^2} = 1 \quad (2.23b)$$

Působíště se bude při změně úhlu β pohybovat po tzv. elipse statické poddajnosti s poloosami F/k_{x1} pro $\beta = \alpha$, resp. F/k_{y1} pro $\beta = \alpha + \pi/2$, viz bod **A** v obr.2.14b.



Poznámka: Elipsa poddajnosti se většinou udává pro jednotkovou sílu $F = 1N$, takže její poloosy jsou přímo hlavními poddajnostmi vyšetřovaného systému.

Celková deformace $\Delta = \overline{OA}$ má obecně jiný směr než nositelka síly F . Grafická konstrukce bodu **A** (x_1, y_1) vychází z rovnic (2.23a) a je zřejmá z obrázku:

- 1) úsečku F/k_{x1} ztotožníme s nositelkou síly F a její pravoúhlý průmět do hlavní poloosy je souřadnicí x_1 ;
- 2) úsečku F/k_{y1} ztotožníme s nositelkou síly F a její pravoúhlý průmět do vedlejší poloosy je souřadnicí y_1 .

Určení posuvu působíště síly ve směru její nositelky $\Delta_F = \overline{OB}$ je zřejmé z pravoúhlého trojúhelníku OBA . Bod **B** opisuje se změnou úhlu β čárkovanou křivku podobnou osmičce a jeho grafická konstrukce je snadnější než výpočet, který znepříjemňují trigonometrické vztahy. Nejschůdnější exaktní cestou je použití 1.Castiglianovy věty, podle které posuv působíště síly ve směru její nositelky je roven parciální derivaci energie napjatosti pružné soustavy podle této síly. Celková energie napjatosti (potenciální energie) je součtem energií obou pružin:

$$E_p = \frac{1}{2}[x_1 F \cos(\beta - \alpha) + y_1 F \sin(\beta - \alpha)] = \frac{F^2 \cos^2(\beta - \alpha)}{2k_{x1}} + \frac{F^2 \sin^2(\beta - \alpha)}{2k_{y1}}$$

$$\Delta_F = \frac{\partial E_P}{\partial F} = F \left[\frac{\cos^2(\beta - \alpha)}{k_{x1}} + \frac{\sin^2(\beta - \alpha)}{k_{y1}} \right] \quad (2.24)$$

Poměr Δ_F/F je tzv. přímá statická poddajnost a její průběh při změně úhlu β se může v případě velkého rozdílu mezi tuhostmi k_{x1}, k_{y1} podstatně lišit od elipsy poddajnosti, viz **obr.2.15**.

Obě křivky vždy mají čtyři společné body na obou poloosách elipsy. Čárkovanou křivku přímé poddajnosti můžeme zobrazit přímo v polárních souřadnicích podle (2.24) nebo v pravouhlých souřadnicích parametricky s parametrem β :

$$\text{- v souřadném systému } (x, y) \dots\dots x = \Delta_F \cos \beta, \quad y = \Delta_F \sin \beta \quad (2.24a)$$

$$\text{- v souřadném systému } (x_1, y_1) \dots\dots x_1 = \Delta_F \cos(\beta - \alpha), \quad y_1 = \Delta_F \sin(\beta - \alpha) \quad (2.24b)$$

2.8.2 Dynamické chování

Ortogonální systém je popsán dvěma nezávislými pohybovými rovnicemi 2.řádu, které vzniknou doplněním (2.23a) o tlumicí a zrychlující síly:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + c_{x1}\dot{x}_1 + k_{x1}x_1 &= F_{x1}(t) = F(t)\cos(\beta - \alpha) \\ m\ddot{y}_1 + c_{y1}\dot{y}_1 + k_{y1}y_1 &= F_{y1}(t) = F(t)\sin(\beta - \alpha) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Po Laplaceově transformaci vyjádříme přenosové funkce mezi souřadnicemi x_1, y_1 a průměty F_{x1}, F_{y1} budící síly, což jsou přímé (hlavní) dynamické poddajnosti

$$\begin{aligned} G_{x1}(s) &= \frac{x_1(s)}{F_{x1}(s)} = \frac{x_1(s)}{F(s)\cos(\beta - \alpha)} = \frac{1}{ms^2 + c_{x1}s + k_{x1}} = \frac{1/k_{x1}}{\frac{s^2}{\Omega_{x1}^2} + \frac{2\zeta_{x1}}{\Omega_{x1}}s + 1} \\ G_{y1}(s) &= \frac{y_1(s)}{F_{y1}(s)} = \frac{y_1(s)}{F(s)\sin(\beta - \alpha)} = \frac{1}{ms^2 + c_{y1}s + k_{y1}} = \frac{1/k_{y1}}{\frac{s^2}{\Omega_{y1}^2} + \frac{2\zeta_{y1}}{\Omega_{y1}}s + 1} \end{aligned} \quad (2.26)$$

(srovnej s (2.17)). Vlastní kmitočty příslušející oběma hlavním směřům kmitání jsou

$$\Omega_{x1} = \sqrt{k_{x1}/m}, \quad \Omega_{y1} = \sqrt{k_{y1}/m} \quad (2.27)$$

Transformace do základních souřadnic

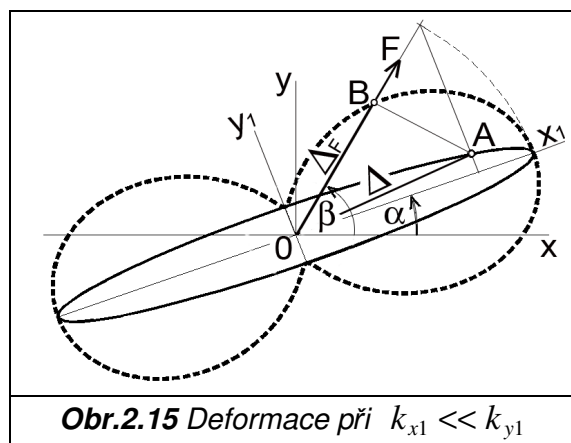
V praxi se obvykle hlavní směry poddajnosti x_1, y_1 neshodují se základním souřadným systémem stroje x, y . Pro transformaci souřadnic platí rovnice

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{neboli } \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}_1 \quad (2.28)$$

Poznámka: Transformační matice $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ je ortogonální, neboť její inverze i transpozice dávají stejný výsledek. Pro zpětnou transformaci platí vztah

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.28a)$$



Transformaci souřadnic využíváme při rozboru kmitání obráběcích strojů, kde hlavní poddajnosti konstrukční skupiny nástroje (např. vřetena frézky, nožového držáku soustruhu) obvykle nesouhlasí se směry posuvů nástroje vůči obrobku. Navíc se může během obrábění měnit i orientace řezné síly β (např. u dvojbřité frézy nebo u nože na vyvrtávací tyči).

Dosazením z (2.26) do (2.28) přejdeme na L.obrazy základních souřadnic x, y :

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_{x1}(s)\cos(\beta - \alpha) \\ G_{y1}(s)\sin(\beta - \alpha) \end{bmatrix} \cdot F(s) \quad (2.29)$$

Roznásobením a převedením $F(s)$ na levou stranu vycházejí vztahy

$$\begin{aligned} \frac{x(s)}{F(s)} &= G_{x1}(s)\cos \alpha \cos(\beta - \alpha) - G_{y1}(s)\sin \alpha \sin(\beta - \alpha) \\ \frac{y(s)}{F(s)} &= G_{x1}(s)\sin \alpha \cos(\beta - \alpha) + G_{y1}(s)\cos \alpha \sin(\beta - \alpha) \end{aligned} \quad (2.30)$$

což jsou přenosové funkce mezi budicí silou F a základními souřadnicemi x, y (tzv. orientované (směrové) dynamické poddajnosti), které označíme symboly $G_x(s), G_y(s)$.

Jejich úplný tvar získáme dosazením z (2.26):

$$G_x(s) = \frac{x(s)}{F(s)} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos(\beta - \alpha)}{ms^2 + c_{x1}s + k_{x1}} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin(\beta - \alpha)}{ms^2 + c_{y1}s + k_{y1}} \quad (2.31a)$$

$$G_y(s) = \frac{y(s)}{F(s)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos(\beta - \alpha)}{ms^2 + c_{x1}s + k_{x1}} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin(\beta - \alpha)}{ms^2 + c_{y1}s + k_{y1}} \quad (2.31b)$$

Směrové poddajnosti (2.31a,b) ve vlastním souřadném systému stroje x, y nás z hlediska jeho provozu zajímají nejvíce. V laboratorní praxi je ale snadnější měření tzv. přímé dynamické poddajnosti (tj. přenosu mezi silou F a výchylkou Δ_F , měřenou ve směru β nositelky síly, viz **obr.2.14b**), neboť používané silové budiče (elektrohydraulické nebo elektrické vibrátory) bývají vybaveny i osovým akcelerometrem, z jehož údaje po dvojnásobné integraci lze určit výchylku. Přímou dynamickou poddajnost odvodíme z obou směrových poddajností G_x, G_y aplikací 1.řádku z transformační rovnice (2.28a) pro směr β :

$$\Delta_F(s) = x(s)\cos\beta + y(s)\sin\beta$$

a po dosazení za $x(s), y(s)$ z (2.31a,b) a úpravě vyjde přímá dynamická poddajnost jakožto součet dvou dílčích přenosů 2.řádu s tzv. směrovými koeficienty, danými úhlovou orientací síly β a orientacemi hlavních směrů kmitání $\alpha, \alpha + \pi/2$:

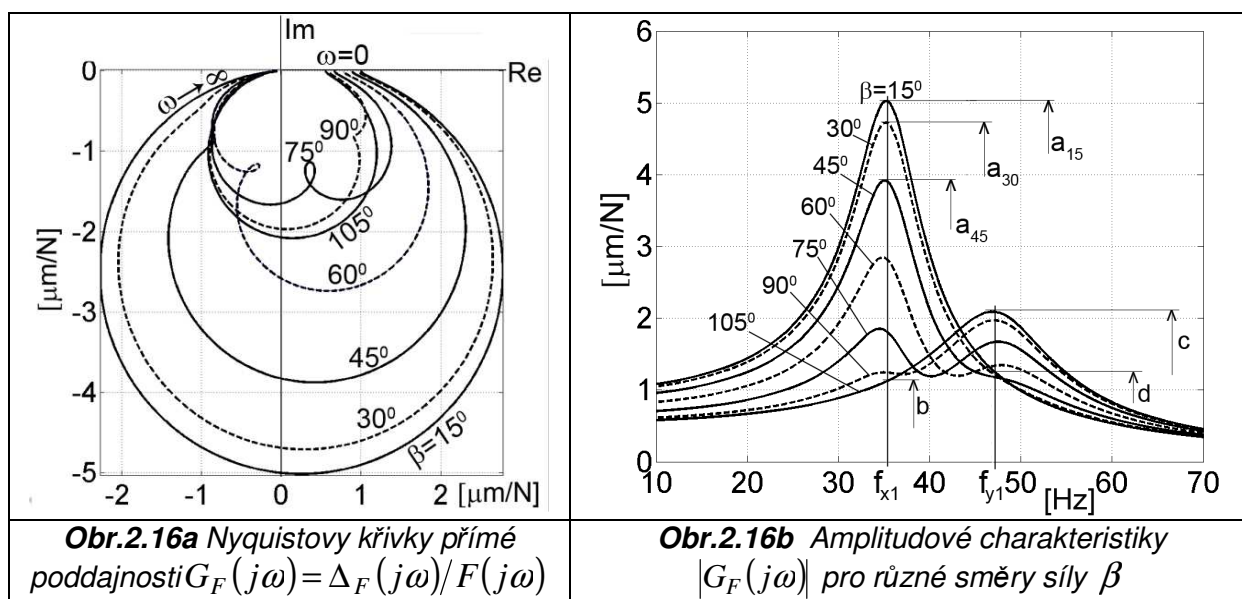
$$G_F(s) = \frac{\Delta_F(s)}{F(s)} = \frac{\cos^2(\beta - \alpha)}{ms^2 + c_{x1}s + k_{x1}} + \frac{\sin^2(\beta - \alpha)}{ms^2 + c_{y1}s + k_{y1}} \quad (2.31c)$$

Při $s=0$ se nutně vracíme k rovnici (2.24) pro přímou statickou poddajnost, kterou jsme odvodili pomocí energie napjatosti. Ve vztazích (2.31a,b,c) se sice jedná o součty přenosových funkcí 2.řádu, ale po uvedení na společného jmenovatele obdržíme přenosové funkce 4.řádu, neboť jmenovatele obou sčítanců se liší. Příslušné frekvenční charakteristiky nabývají vlivem směrových koeficientů nejrozmanitější podobu. To je patrné např. u Nyquistových křivek $G_F(j\omega)$ pro různé směry síly β - viz **obr.2.16a**. Číselné parametry dosazené do (2.31c) jsou:

$$m = 20\text{kg}, k_{x1} = 1e6\text{N/m}, \Omega_{x1} = 223,6\text{rad/s} (f_{x1} = 35,6\text{Hz}), c_{x1} = 894,4\text{Ns/m} (\zeta_{x1} = 0,1)$$

$$k_{y1} = 1,8e6\text{N/m}, \Omega_{y1} = 300\text{rad/s} (f_{y1} = 47,7\text{Hz}), c_{y1} = 1610 (\zeta_{y1} = 0,134), \alpha = 15^\circ$$

Protože většinou vyšetřujeme málo tlumené systémy ($\zeta \approx 0,1$ a méně), je zřejmé, že amplitudy funkce $G_F(j\omega)$ nebezpečně narůstají v okolí vlastních kmitočtů při směru síly blízkém ke hlavním směrům kmitání. Na amplitudové charakteristice v **obr.2.16b** je vidět, že u systému s výše uvedenými parametry nastává největší rezonanční výchylka $a_{15} = 5\ \mu\text{m}/\text{N}$ nepatrně pod prvním vlastním kmitočtem $f_{x1} = 35,6\text{Hz}$ při směru síly $\beta = \alpha = 15^\circ$ (jedná se o tzv. první tvar kmitů). Další maximum $c = 2,1\ \mu\text{m}/\text{N}$ nastává u druhého tvaru, tj. při orientaci síly $\beta = \alpha + 90^\circ = 105^\circ$ blízko druhého vlastního kmitočtu $f_{y1} = 47,7\text{Hz}$. Při obvykle malých hodnotách poměrného tlumení $\zeta \leq 0,05$ nastávají rezonanční vrcholy téměř přesně na vlastních kmitočtech (s odchylkou v řádu promile), viz poznámka ke vztahu (2.22d).



2.8.3 Polární diagram přímé dynamické poddajnosti

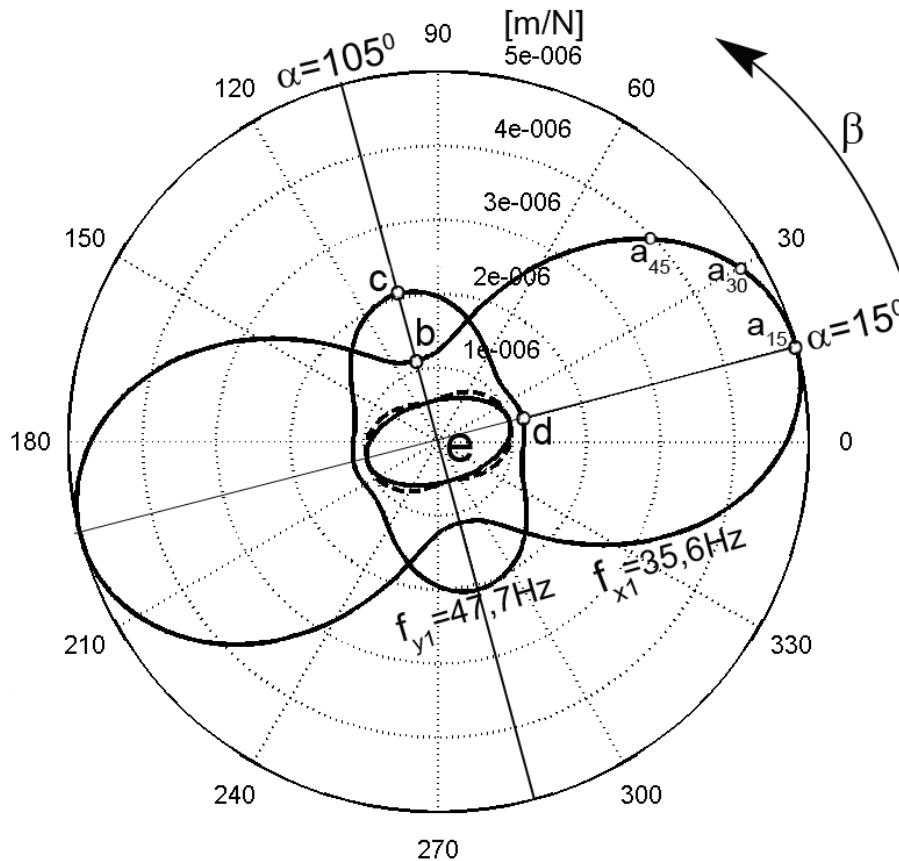
Tento diagram, jehož příklad je na **obr.2.16c**, se skládá ze dvou křivek, vzniklých výpočtem hodnot funkce $|G_F(j\omega)|$ zvlášť pro oba vlastní kmitočty Ω_{x1}, Ω_{y1} a pro různé směry síly v celém intervalu $\beta = 0 \div 360^\circ$. Zobrazuje přehledným způsobem rezonanční vrcholy amplitudových charakteristik z **obr.2.16b**. Jedná se o dvě středově souměrné křivky a z porovnání rovnic (2.24) a (2.31c) je ihned jasné, že jejich tvar vznikne „nafouknutím“ křivky přímé statické poddajnosti, protože pro $s = j\Omega_{x1}, j\Omega_{y1}$ a malé tlumení se jmenovatele zlomků v (2.31c) zmenšují. Osy symetrie jsou totožné s oběma hlavními poloosami elipsy statické poddajnosti e ; ta je v obrázku vyznačena plnou čarou, křivka přímé statické poddajnosti pak čárkovaně. Obě křivky dynamické poddajnosti v **obr.2.16c** se protínají již při úhlu $\beta \approx 77^\circ$, což znamená, že při této orientaci síly by byly na amplitudové charakteristice v **obr.2.16b** dva stejně vysoké vrcholy. V obou obrázcích jsou písmeny $a_{15}, a_{30}, a_{45}, b, c, d$ vyznačeny některé společné body.

Poznámky: 1) Polární diagram může podat rychlou a přehlednou informaci o některých rizikových stavech stroje. Bude-li **obr.2.16c** platit např. pro radiální zatěžování svíslého vřetena frézky, měli bychom se při frézování se zubovou frekvencí frézy $35,6\text{Hz}$ vyhnout

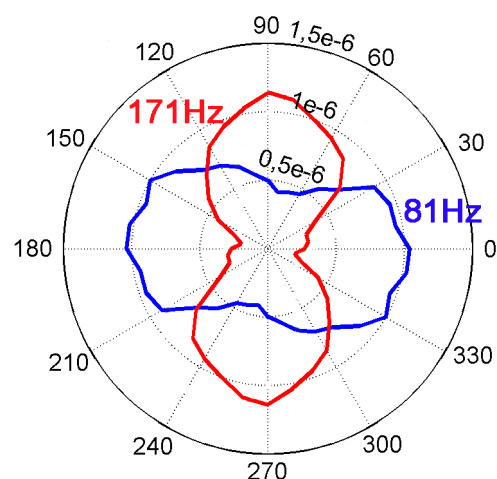
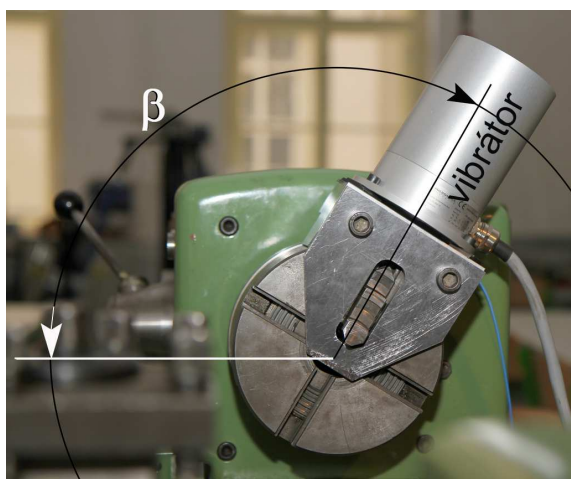
takovému směru pohybu křížového stolu, kdy průmět řezné síly do jeho roviny zaujme úhel $\alpha = 15^\circ$;

2) Rovinný model reálného konstrukčního uspořádání zpravidla není ortogonální a obecně obsahuje hmotu, zavěšenou na více pružinách pod obecnými úhly, jak poznáme v **kap.3.6** na **obr.3.8**. Bude však dokázáno, že každý takový obecný případ lze převést na náhradní ortogonální případ.

Příklad uspořádání experimentu u vřetena soustruhu je na **obr.2.16d**.



Obr.2.16c Polární diagram přímé dynamické poddajnosti $|G_F(j\Omega_{x1}, j\Omega_{y1})| = fce(\beta)$



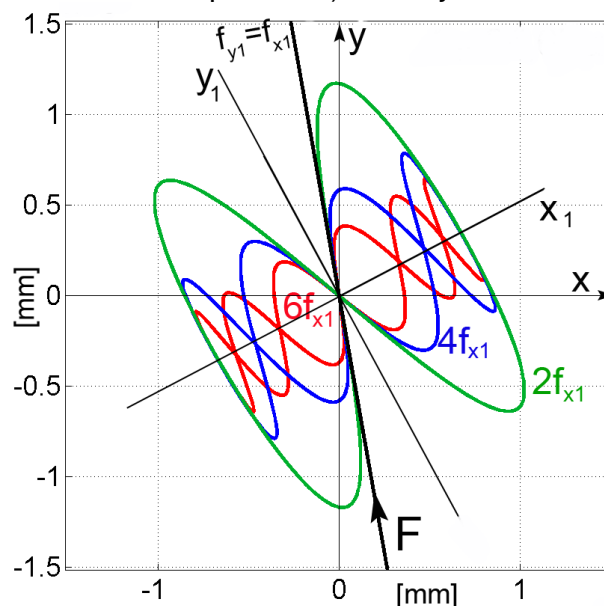
Obr.2.16d Měření přímé dynamické poddajnosti vřetena soustruhu

Měření je časově náročné, neboť je třeba vřeteno zatěžovat periodickou silou v dostatečně širokém kmitočtovém pásmu, nejprve identifikovat na amplitudové charakteristice rezonanční vrcholy a jim příslušné kmitočty Ω_{x1}, Ω_{y1} , posléze vynášet amplitudy funkce $|G_F(j\omega)|$ pro každý z obou těchto kmitočtů zvlášť a postup vícekrát

opakovat pro různé úhly β v intervalu alespoň $0 \div 180^0$. Protože rezonanční výchylky jsou podstatně větší než u zatěžování statického, při dlouhodobém buzení vibrátorem může hrozit poškození proměřovaného systému a navíc hmotnost samotného vibrátoru může ovlivnit původní hmotové parametry. Proto je někdy lépe systém opakovaně budit úderý modálního kladívka a zaznamenávat odezvy při různých směrech úderů, což je rychlejší a bezpečnější postup.

Volný pohyb ortogonálního systému

Závěrem uvedeme výsledek výpočtu volného pohybu systému po vybuzení krátkodobým silovým impulzem. Pohyb má dvě samostatné harmonické složky ve směrech souřadných os x_1, y_1 . Na **obr.2.17** jsou zobrazeny čtyři případy pro netlumený systém, kde tuhost k_{y1} je odstupňována tak, aby vlastní kmitočet v ose y_1 byl postupně jedno-, dvoj-, čtyř- a šestinásobkem kmitočtu f_{x1} . Silový impulz $10000N$ trval $1ms$ a měl směr $\beta = 100^0$. Složením obou harmonických pohybů (v tomto případě bez vzájemného fázového posuvu!!) vznikají známé Lissajousovy obrazce.



Obr.2.17 Volné kmitání netlumeného rovinného systému

$m = 20kg$, $k_{x1} = 1e6$, $\alpha = 30^0$, $\beta = 100^0$, $\zeta_{x1} = \zeta_{y1} = 0$, $\Omega_{x1} = 223,6rad / s$ ($f_{x1} = 35,6Hz$)

2.9 Logaritmické frekvenční charakteristiky

Místo obecného vztahu pro frekvenční přenos

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

je výhodné počítat s jeho dekadickým logaritmem

$$\log G(j\omega) = \log |G(j\omega)| + j \log e \cdot \varphi(\omega) \quad (2.32)$$

Analogicky u součinu dvou přenosů

$$G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) = |G_1(j\omega)| \cdot e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot |G_2(j\omega)| \cdot e^{j\varphi_2(\omega)}$$

vznikne logaritmováním vztah

$$\log |G_1(j\omega)| + \log |G_2(j\omega)| + j \log e \cdot (\varphi_1 + \varphi_2) \quad (2.33)$$

Součiny (nebo podíly) více přenosů se převádějí na součty (nebo rozdíly) jejich logaritmů. Je zvykem vynášet zvlášť **amplitudovou logaritmickou charakteristiku** (podle tvůrce metody též **Bodeův diagram**) v tzv. decibelech (znak dB)

$$20 \log |G(j\omega)| = fce(\log \omega) \quad [dB, rad/s]$$

a **fázovou charakteristiku** (v souřadnicích semilogaritmických)

$$\varphi = fce(\log \omega) \quad [rad, rad/s] \quad (\text{alternativně } deg, Hz)$$

Místo jedné křivky v komplexní rovině (viz např. **obr.2.8**) získáme zvlášť průběhy amplitudy a fáze, které jsou ovšem spolu jednoznačně svázány (jde o zobrazení jediné funkce komplexní proměnné). Charakteristiky součinu přenosů vzniknou podle (2.33) prostým grafickým sečtením příslušných křivek. Dále platí

$$\log \frac{1}{G(j\omega)} = -\log G(j\omega) = -\log|G(j\omega)| - j \log e \cdot \varphi(\omega)$$

takže amplitudová i fázová log. charakteristika reciprokého přenosu vznikne překlopením charakteristiky původní okolo vodorovné osy kmitočtů. Na typických příkladech dále ukážeme, že použití logaritmu v obou souřadných osách přináší výhody při náhradě amplitudových charakteristik asymptotami, což nebylo možné u souřadnic semilogaritmických např. na **obr.2.9**.

A. Integrační člen s přenosem $\frac{1}{s}$:

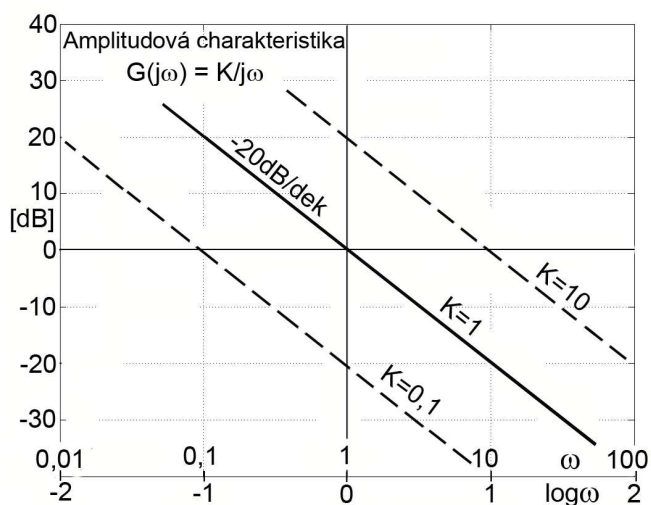
- frekvenční přenos je

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}, \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$

$$\varphi = konst = -\frac{\pi}{2}$$

$$20 \log|G(j\omega)| = -20 \log \omega$$

Zvýší-li se ω desetkrát (o jednu dekádu), klesne amplituda o $-20 \log 10 = -20 \text{ dB}$. Amplitudová charakteristika je tedy přímka se sklonem -20 dB/dek . Zvětší-li se čísel K - krát, přímka se posune vzhůru o $20 \log K \text{ [dB]}$, viz **obr.2.18**.



Obr.2.18 Amplitudová charakteristika integračního členu

B. Přenos 1.řádu s časovou konstantou τ (viz např. **obr.1.23a**):

Nejprve zopakujeme učebnicový výpočet frekvenční charakteristiky přenosu

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} = \frac{1 - j\omega}{\tau^2 \omega^2 + 1}$$

$$\text{Re } G = \frac{1}{\tau^2 \omega^2 + 1} > 0, \quad \text{Im } G = \frac{-\tau\omega}{\tau^2 \omega^2 + 1} < 0$$

$$\text{Re } G^2 + \text{Im } G^2 = \frac{1}{\tau^2 \omega^2 + 1} = \text{Re } G$$

$$(\text{Re } G - 0,5)^2 + \text{Im } G^2 = (0,5)^2$$

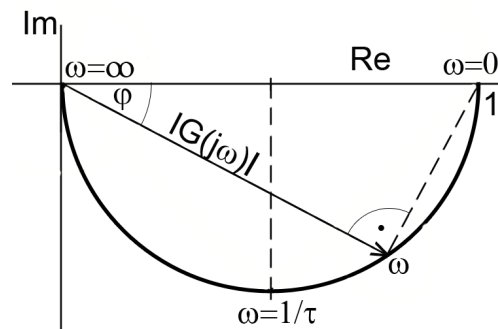
Pro $0 < \omega < \infty$ se v komplexní rovině jedná o rovnici půlkružnice o poloměru 0,5 se středem v bodě $(0,5 \ 0)$, viz **obr.2.19a**.

Absolutní hodnota frekvenčního přenosu je

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} \quad \text{a logarimováním vychází} \quad 20 \log|G(j\omega)| = -20 \log \sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}$$

Amplitudová charakteristika na **obr.2.19b** má dvě asymptoty:

- pro $\tau\omega \ll 1$ (tj. $|G(j\omega)| \approx 1$) je to vodorovná přímka $-20 \log 1 = 0 \text{ [dB]}$
- pro $\tau\omega \gg 1$ (tj. $|G(j\omega)| \approx 1/\tau\omega$) vychází $-20 \log \tau\omega$ a přímka má sklon -20 dB/dek .



Obr.2.19a Nyquistova křivka přenosu 1.řádu

Zde je výhodné na vodorovnou osu vynášet logaritmus bezrozměrné veličiny $\tau\omega$. Maximální odchylka přesného průběhu od asymptotické náhrady nastává v průsečíku asymptot (tj. při $\tau\omega=1$) a činí $-20\log\sqrt{2} = -3,01 \text{ dB}$.

Zvětšením čitatele K -krát opět dojde k svislému posunu křivky o $20\log K \text{ [dB]}$.

C. Přenos 2.řádu s vlastním kmitočtem Ω a poměrným tlumením ζ :

$$G(j\omega) = \frac{1}{\frac{(j\omega)^2}{\Omega^2} + \frac{2\zeta}{\Omega}j\omega + 1}, \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2/\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2/\Omega^2}} \quad (\text{viz (2.21)}).$$

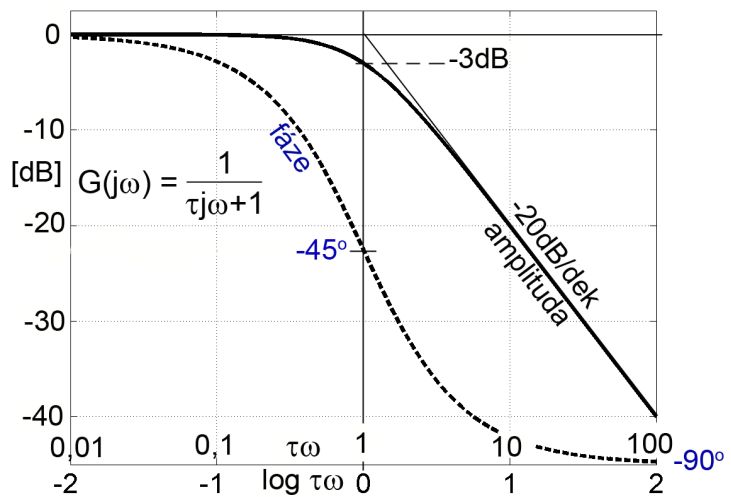
Budeme uvažovat pouze podkritické tlumení (tj. $0 \leq \zeta < 1$), neboť v případě reálných pólů se jedná o součin dvou přenosů 1.řádu, jejichž charakteristiky se sčítají. Opět je výhodné pracovat s bezrozměrnou veličinou ω/Ω . Asymptoty jsou:

- pro $\omega/\Omega \ll 1$ (tj. $|G(j\omega)| \approx 1$) vodorovná přímka na úrovni $-20\log 1 = 0 \text{ [dB]}$
- pro $\omega/\Omega \gg 1$ převládne ve jmenovateli vliv členu se 4. mocninou poměru ω/Ω (tj. $|G(j\omega)| \approx 1/\sqrt{(\omega/\Omega)^4}$) a bude

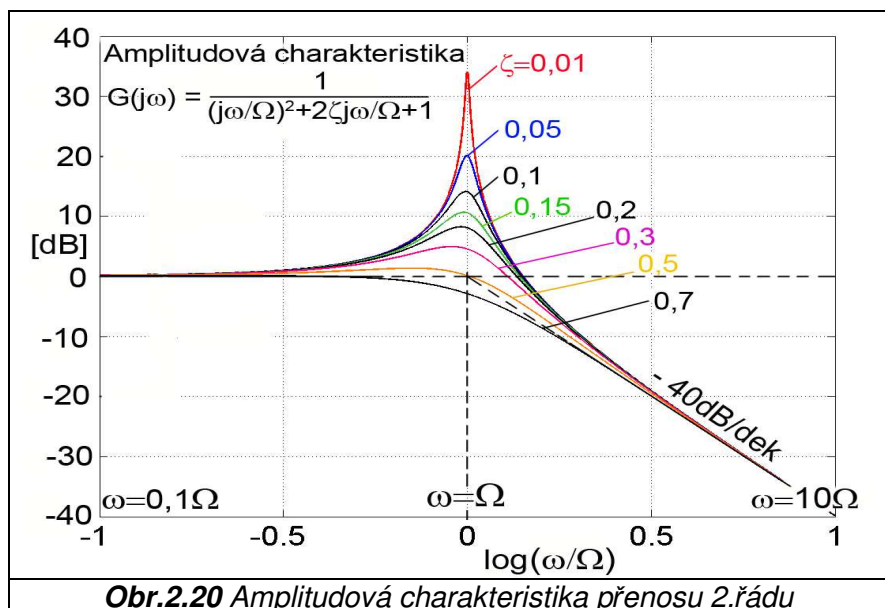
$$20\log|G(j\omega)| \approx 20\log 1 - 20\log\sqrt{(\omega/\Omega)^4} = -40\log(\omega/\Omega)$$

Asymptotou je přímka se sklonem -40dB/dek , viz **obr.2.20**. Obě asymptoty se protínají při $\omega/\Omega = 1$, kde je $|G(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta}$, takže pro malé hodnoty tlumení odchylka od asymptotické náhrady v okolí bodu $\omega = \Omega$ roste. Maximum je dáno vztahem (2.22d).

Fázová charakteristika v semilogaritmických souřadnicích již byla uvedena na **obr.2.9** dole.



Obr.2.19b Amplitudová a fázová charakteristika přenosu 1.řádu



Obr.2.20 Amplitudová charakteristika přenosu 2.řádu

3. Systémy s více stupni volnosti

Úvodní poznámky: 1) V dalším textu budeme používat pro prvky vektorů písmena psaná kurzívou (např. u, v) na rozdíl od symbolu v pro rychlost nebo \mathbf{u}, \mathbf{v} pro celý vektor.

2) V matematice je většinou zvykem zapisovat vektory do řádků (jako např. u komplexních čísel), zde jsou sloupcové!! Při indexování u matic se přidržíme matematických zvyklostí, takže první index značí pořadové číslo řádku (tedy prvku vektoru), druhé je číslo sloupce (pořadové číslo vektoru).

3.1 Některé obecné vlastnosti čtvercových matic - opakování

Vlastní vektor \mathbf{u} čtvercové matice \mathbf{A} o rozměru $N \times N$ má tu vlastnost, že po vynásobení maticí \mathbf{A} tzv. „nezmění směr“, tj. platí rovnost

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (3.1a)$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.1b)$$

\mathbf{E} ... jednotková matice o rozměru $N \times N$.

Aby dávalo násobení matice a vektoru smysl, je třeba vektor \mathbf{u} definovat jako sloupcový.

Poznámka: Jedná se o tzv. pravostranný vlastní vektor (matici \mathbf{A} jím násobíme zprava), na rozdíl od vlastního vektoru levostranného (opět sloupcového), který označíme \mathbf{w} . Ten je definován rovnicí

$$\mathbf{w}^T\mathbf{A} = \lambda\mathbf{w}^T \quad (3.1c)$$

(v rovnici je jeho transpozice nutná, aby násobení dávalo smysl). Transpozicí (3.1c) zjistíme, že \mathbf{w} je zároveň pravostranným vektorem čtvercové matice \mathbf{A}^T . U symetrických matic se tedy levo- i pravostranné vektory shodují.

Konstanta úměrnosti λ (tzv. vlastní číslo matice) může být i komplexní (geometrická představa zachování směru je ale přesnější pro hodnoty reálné). Čtvercová matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ o rozměru $N \times N$ je tzv. charakteristická matice k matici \mathbf{A} . Rovnici (3.1b) řešíme Cramerovým pravidlem, takže k -tý prvek (řádek) vlastního vektoru \mathbf{u} zjistíme podílem

$$u_k = \frac{\det\mathbf{D}_k}{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})}$$

Matice \mathbf{D}_k vznikne dosazením prvků pravé strany rovnice (které jsou ale všechny nulové!!) do k -tého sloupce charakteristické matice, takže čitatel zlomku je $\det\mathbf{D}_k = 0$. Nemá-li být identicky $u_k = 0$, musí být i jmenovatel nulový ,tj.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0 \quad (3.2)$$

Jedině tehdy existuje možnost, že vyjde nenulová limita $u_k = \lim \frac{0}{0} \neq 0$. Výraz na

levé straně (3.2) je tzv. charakteristický determinant a vzhledem k číslu λ je polynomem stupně N . Řešením charakteristické rovnice (3.2) vyjde N kořenů (vlastních čísel $\lambda_{i=1 \rightarrow N}$) a potažmo z (3.1a,b) též N vlastních vektorů $\mathbf{u}_{i=1 \rightarrow N}$. Dále budeme předpokládat, že vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou nenásobná. Seřazením všech vlastních (sloupcových) vektorů do jednoho řádku vzniká čtvercová matice vlastních vektorů (tzv. modální matice)

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_i \ \dots \ \mathbf{u}_N] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1i} & \dots & u_{1N} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2i} & \dots & u_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{k1} & u_{k2} & \dots & u_{ki} & \dots & u_{kN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{N1} & u_{N2} & \dots & u_{Ni} & \dots & u_{NN} \end{bmatrix}$$

Bez důkazu uvádíme tato dvě tvrzení:

- stopa matice (součet prvků v hlavní diagonále) je rovna součtu vlastních čísel

$$\text{st}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \quad (3.3)$$

- determinant matice je roven součinu vlastních čísel

$$\det\mathbf{A} = \prod_{i=1}^N \lambda_i \quad (3.4)$$

Vynásobením obou stran rovnice (3.1a) nenulovou obecně komplexní konstantou b_i se nic nezmění:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{u}_1 b_1 &= \lambda_1 \mathbf{u}_1 b_1 = \mathbf{u}_1 b_1 \lambda_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{u}_2 b_2 &= \lambda_2 \mathbf{u}_2 b_2 = \mathbf{u}_2 b_2 \lambda_2 \\ &\dots\dots \\ \mathbf{A}\mathbf{u}_N b_N &= \lambda_N \mathbf{u}_N b_N = \mathbf{u}_N b_N \lambda_N \end{aligned} \quad (3.5)$$

Je tedy zřejmé, že vlastním vektorem může být zrovna tak dobře vektor $\mathbf{u}_i b_i$, takže řešením rovnice (3.1a,b) lze zjistit pouze směry, nikoliv absolutní velikosti vlastních vektorů \mathbf{u}_i . Modální matice tak může mít obecnější tvar

$$[\mathbf{u}_1 b_1 \quad \mathbf{u}_2 b_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_N b_N] = \mathbf{U} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_N \end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{B}_D \quad (3.5a)$$

Diagonální matici úměrnosti \mathbf{B}_D nebudeme většinou uvádět. Její prvky b_i je ale možno volit libovolně dle potřeby (s výjimkou nuly). Soustavu rovnic (3.5) zapíšeme opět v maticovém tvaru:

$$\mathbf{A}[\mathbf{u}_1 b_1 \quad \mathbf{u}_2 b_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_N b_N] = [\mathbf{u}_1 b_1 \quad \mathbf{u}_2 b_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_N b_N] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix}$$

Pro nově vzniklou diagonální matici vlastních čísel zavedeme označení $\mathbf{\Lambda}$, takže je

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{B}_D &= \mathbf{U}\mathbf{B}_D\mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{B}_D &= \mathbf{B}_D\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{B}_D \end{aligned}$$

a konečně $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix}$ neboli $\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}$ (3.6)

bez ohledu na velikost prvků matice úměrnosti \mathbf{B}_D .

Poznámky: 1) Důležitý vztah (3.6) se nazývá "transformace na diagonální tvar" nebo též "diagonalizace" a je možno jej uplatnit na čtvercovou matici \mathbf{A} s libovolnými prvky;

2) V mechanice nese matice $\mathbf{\Lambda}$ název spektrální, v teorii automatického řízení je zvláštním případem tzv. matice Jordanovy. Písmenem \mathbf{A} je v obou oborech označována tzv. matice dynamiky (též název "matice systému"), má však vždy jiný význam:

- ve stavové teorii automatického řízení je sestavena z koeficientů lineárních diferenciálních rovnic 1.řádu, její prvky mohou být libovolné a její vlastní čísla mohou být obecně komplexní;

- v mechanice má matice \mathbf{A} speciální tvar (3.13), vyplývající z koeficientů pohybových rovnic 2.řádu. Její prvky jsou reálné, vlastní čísla nezáporná;

3) Program Matlab vypočítá modální matici \mathbf{U} a spektrální matici $\mathbf{\Lambda}$ po zadání instrukce $[\mathbf{U}, \mathbf{D}] = \text{eig}(\mathbf{A})$, kde $\mathbf{D} = \mathbf{\Lambda}$

4) Aplikací (3.2) snadno zjistíme, že $\mathbf{\Lambda}$ je sama sobě zároveň maticí svých vlastních čísel, neboť char. rovnice $\det(\mathbf{\Lambda} - \lambda\mathbf{E}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_N - \lambda) = 0$ má kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$.

Dále zavedeme matici

$$\mathbf{A}_Q = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} \quad (3.6a)$$

kde \mathbf{Q} je libovolná čtvercová konstantní matice (s obecně komplexními prvky), splňující podmínku $\det \mathbf{Q} \neq 0$. Každé dvě matice \mathbf{A} , \mathbf{A}_Q , svázané rovnicí (3.6a), se nazývají podobné. Vytvoříme a dále upravíme rozdíl

$$\mathbf{A}_Q - \lambda \mathbf{E} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} - \lambda \mathbf{E} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} - \lambda \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{Q}$$

Použitím pravidla "determinant součinu je součin determinantů" vychází

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_Q - \lambda \mathbf{E}) &= \det[\mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{Q}] = \det \mathbf{Q}^{-1} \cdot \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \det \mathbf{Q} = \\ &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \det \mathbf{Q}^{-1} \cdot \det \mathbf{Q} = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \det(\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \end{aligned}$$

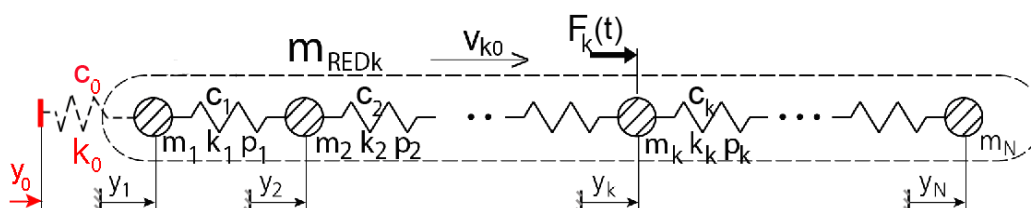
Tím je dokázáno, že podobné matice mají stejný charakteristický determinant, tedy i charakteristickou rovnici a vlastní čísla λ_i . Zvláštním případem podobných matic je dvojice \mathbf{A} a $\mathbf{\Lambda}$ v rovnici (3.6).

3.2 Dynamický model pohonu

Úvodní poznámka: I když mechanismy pohonů ve výrobních strojích mají převážně rotační charakter, dynamické výpočty budeme pro větší názornost demonstrovat na translačním modelu podle **obr.3.1**. U rotační nebo smíšené rotačně-translační varianty pohonu dojde k záměně hmotností m_k za hmotové momenty setrvačnosti J_k ; označení úhlových souřadnic a rychlostí, torzních tuhostí a tlumičů někde ponecháme stejné pro rotační i translační pohyb. Při redukcích veličin přes převody je třeba důsledně dodržovat jednotky [kg], [m], [s], [rad]. Z definice radiánu (úhel, příslušný oblouku o délce poloměru) vyplývá, že jeho rozměr je jedna.

Pohon bude tedy uvažován podle **obr.3.1** jako diskrétní N – hmotový translační systém, který je uvolněn od rámu (čárkovaná pružina i tlumič odpadnou, tj. $k_0 = c_0 = 0$). Systém se může pohybovat jen vodorovným směrem a jeho seriově seřazené hmoty m_k jsou vzájemně vázány nehmotnými pružnými konstantními převody s viskózním tlumením. Tuhosti k_k a konstanty tlumení c_k jsou redukovány přes kvadráty příslušných převodových poměrů na shodně indexované hmoty. Kinematický (statický) převod mezi hmotou m_k a m_{k+1} je definován jako poměr ustálených rychlostí $v_{k0}/v_{(k+1)0} = p_k$, takže převod mezi i – tou a k – tou hmotou je

$$p_{ik} = p_i p_{i+1} \dots p_{k-1} = v_{i0}/v_{k0} = 1/p_{ki} \quad (3.7)$$



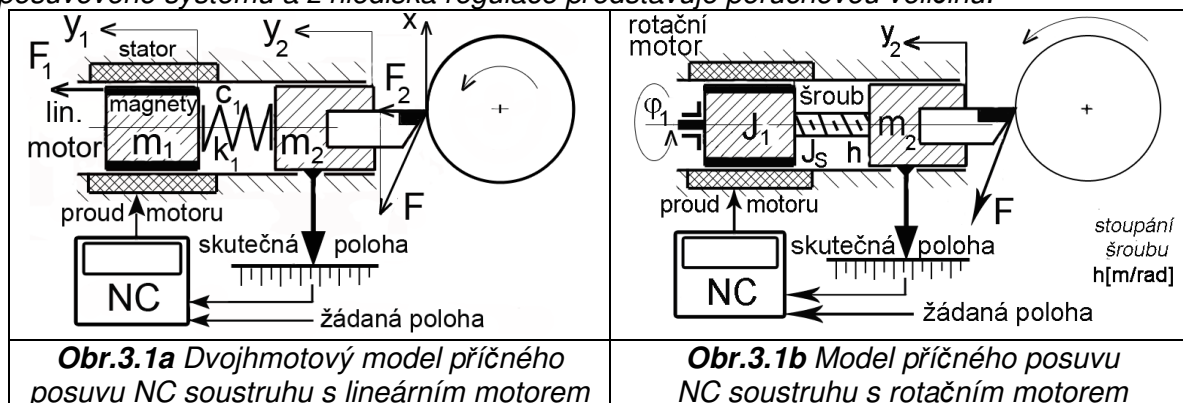
Obr.3.1 Vícehmotový seriový systém uvolněný od rámu ($k_0 = c_0 = 0$), síla na k – té hmotě

Poznámky: 1) Převod se obecně definuje jako poměr rychlosti členu hnacího k rychlosti členu hnaného bez ohledu na to, jedná-li se o pohyby rotační, přímočaré nebo jejich kombinaci (jakou je např. šroubový převod). Stoupání šroubu, které označíme symbolem h , je tedy nutno dosazovat v jednotkách [m/rad]. Rotační i lineární převod (např. pákový) je bezrozměrný, ale je nutno doplnit ještě znaménko podle toho, je-li převodem obrácen smysl pohybu či nikoliv:

- kladné, je-li smysl zachován (převod řemenový, ozubený s vnitřním ozubením, jednozvrtná páka);
- záporné při obrácení smyslu pohybu (převod s překříženým řemenem, s vnějším ozubením u obou kol, dvojzvrtná páka);

2) Obvykle bývá zvykem vyšetřovat vícehmotové systémy ukotvené k rámu, ale pro pohony ve vypnutém stavu je charakteristická spíše varianta neukotvená. Rozdíl mezi uvolněným a ukotveným systémem z **obr.3.1** není podstatný. Uvolněný systém můžeme převést na ukotvený tak, že jedné hmotě přidělíme nekonečnou hmotnost, tj. učiníme z ní rám (zeměkouli). Náš ukotvený systém by obsahoval pružinu k_0 a tlumič c_0 a identicky by platilo, že $y_0 = 0$. Varianta s časově proměnnou souřadnicí $y_0(t)$ - tzv. kinematické buzení, viz **obr.2.1b** - je typická např. pro vačkové mechanismy;

3) Úloha pohonu při ukotvení k rámu je znázorněna dvojhmotovým modelem příčného posuvu soustruhu na **obr.3.1a**. Hmotu m_1 , nesoucí permanentní magnety, je pohyblivým dílem elektromotoru (v tomto případě lineárního), který je pružným spojovacím členem s tuhostí k_1 připojen k nožovému držáku na příčném suportu soustruhu. V konstantě tlumení c_1 mohou být zahrnuty např. pasivní odpory vedení suportu. Suport m_2 je udržován v požadované poloze pomocí zpětnovazebního obvodu, který řídí proud do statorových cívek motoru úměrně k okamžitému rozdílu mezi skutečnou a žádanou polohou. Proudem je určena síla F_1 , přenášena magnetickým polem ve vzduchové mezeře mezi magnety na hmotě m_1 a statorem. Znázorněná zpětnovazební regulace polohy se chová podobně jako pružina, jejíž vlastnosti lze mj. ovlivňovat přemístěním odměřovacího systému z hmoty m_2 na hmotu m_1 . Rozpojením zpětné vazby od měřidla skutečné polohy nebo úplným vypnutím motoru klesne tuhost myšlené náhradní pružiny polohové regulace na nulu a dvojhmotový systém je uvolněn od rámu. Síla F_2 je průmětem řezné síly F do osy pohybu celého posuvového systému a z hlediska regulace představuje poruchovou veličinu.



Smíšená rotačně - translační varianta je na **obr.3.1b**, kde již není dvojhmotové uspořádání jednoznačné, neboť šroub kromě své torzní i tahové poddajnosti často představuje i významný setrvačnický a přístupují další vlivy (např. poddajnost spojky, styková poddajnost v závitech atd.). Nejjednodušší dvojhmotový rotační model by mohl být vytvořen např. takto:

- první setrvačnický (motor + šroub) ... $J_1 + J_s$, druhý (fiktivní) setrvačnický ... $J_2 = m_2 h^2$;
- k_1 ... torzní pružina, zahrnující vliv torze, tahu-tlaku a styku v závitech šroubu a matice;
- poloha druhé hmoty (setrvačnický) ... $\varphi_2 = y_2 / h$.

V **obr.3.1** je zakreslen zjednodušený případ, kdy působí jediná síla $F_k(t)$ pouze na k -tý člen (motor), na který je též přes převody redukována celková hmotnost systému podle vztahu

$$m_{REDk} = \dots m_{k-2} (p_{k-2} p_{k-1})^2 + m_{k-1} p_{k-1}^2 + m_k + \frac{m_{k+1}}{p_k^2} + \frac{m_{k+2}}{(p_k p_{k+1})^2} + \dots = \sum_{i=1}^N m_i p_{ik}^2 \quad (3.8)$$

Nejčastěji je motor první hmotou ($k = 1$) a členy s indexy $k - 1$, $k - 2$ atd. odpadají.

Poznámka: Pokud by osamocená síla $F_k(t)$ působila ve formě konečného impulzu o ploše A , tedy pouze v intervalu $\langle 0, T_0 \rangle$, rychlost k -tého členu po odeznění impulzu

bychom v případě dokonale tuhých převodů určili z 2. Newtonova zákona: „impulz síly = změna hybnosti“, tj.

$$v_{k0} = \frac{1}{m_{REDk}} \int_0^{T_0} F_k(t) dt = \frac{A}{m_{REDk}} \quad (3.9)$$

Dále budeme předpokládat obecný případ, kdy na všechny hmoty působí nezávislé síly. Systém je popsán soustavou vzájemně závislých pohybových rovnic

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + c_1(\dot{y}_1 - p_1 \dot{y}_2) + k_1(y_1 - p_1 y_2) &= F_1(t) \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_1 p_1^2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1/p_1) + c_2(\dot{y}_2 - p_2 \dot{y}_3) + k_1 p_1^2 (y_2 - y_1/p_1) + k_2(y_2 - p_2 y_3) &= F_2(t) \\ m_3 \ddot{y}_3 + c_2 p_2^2 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2/p_2) + c_3(\dot{y}_3 - p_3 \dot{y}_4) + k_2 p_2^2 (y_3 - y_2/p_2) + k_3(y_3 - p_3 y_4) &= F_3(t) \\ \dots\dots\dots & \\ m_{N-1} \ddot{y}_{N-1} + c_{N-2} p_{N-2}^2 (\dot{y}_{N-1} - \dot{y}_{N-2}/p_{N-2}) + c_{N-1}(\dot{y}_{N-1} - p_{N-1} \dot{y}_N) + & \\ + k_{N-2} p_{N-2}^2 (y_{N-1} - y_{N-2}/p_{N-2}) + k_{N-1}(y_{N-1} - p_{N-1} y_N) &= F_{N-1}(t) \\ m_N \ddot{y}_N + c_{N-1} p_{N-1}^2 (\dot{y}_N - \dot{y}_{N-1}/p_{N-1}) + k_{N-1} p_{N-1}^2 (y_N - y_{N-1}/p_{N-1}) &= F_N(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

a maticově $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}(t)$ (3.11)

Sloupcový vektor geometrických souřadnic je

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \quad y_2(t) \quad \dots \quad y_N(t)]^T$$

Matic hmotnosti **M** je diagonální, matice viskózního tlumení **C** a tuhosti **K** jsou symetrické a tzv. „pásové“ (osou pásu je hlavní diagonála):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_N \end{bmatrix} \quad \text{takže} \quad \det \mathbf{M} = \prod_{k=1}^N m_k \quad (3.12a)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} c_1(+c_0) & -c_1 p_1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 p_1 & c_1 p_1^2 + c_2 & -c_2 p_2 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 p_2 & c_2 p_2^2 + c_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_{N-2} p_{N-2}^2 + c_{N-1} & -c_{N-1} p_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{N-1} p_{N-1} & c_{N-1} p_{N-1}^2 \end{bmatrix} \quad (3.12b)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T = \begin{bmatrix} k_1(+k_0) & -k_1 p_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 p_1 & k_1 p_1^2 + k_2 & -k_2 p_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 p_2 & k_2 p_2^2 + k_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_{N-2} p_{N-2}^2 + k_{N-1} & -k_{N-1} p_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & -k_{N-1} p_{N-1} & k_{N-1} p_{N-1}^2 \end{bmatrix} \quad (3.12c)$$

Sloupcový vektor silového buzení je

$$\mathbf{F}(t) = [F_1(t) \quad F_2(t) \quad \dots \quad F_N(t)]^T$$

Poznámky: 1) U matic **C, K** v (3.12b,c) je třeba v případě rotačního systému dbát na správná znaménka u převodů. Obě matice jsou pro $k_0 = c_0 = 0$ singulární (jejich determinant je nulový a nelze provést inverzi), o čemž se snadno přesvědčíme následujícími dovolenými úpravami:

- nový druhý řádek získáme přičtením p_1 – násobku prvního řádku;

- nový třetí řádek získáme přičtením p_2 – násobku nového druhého řádku atd.

Opakováním tohoto postupu nakonec získáme v posledním řádku samé nuly.

Singularita obou matic je logickým důsledkem toho, že systém je uvolněn od rámu a v takovém případě nelze určit tuhost jakožto podíl síly a statické deformace.

V případě kinematického buzení (viz **obr.2.1b**) bude v **obr.3.1** uvažována pružina $k_0 \neq 0$ i tlumič $c_0 \neq 0$ a v (3.10) se změny pouze první rovnice na tvar

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_0 (\dot{y}_1 - \dot{y}_0) + c_1 (\dot{y}_1 - p_1 \dot{y}_2) + k_0 (y_1 - y_0) + k_1 (y_1 - p_1 y_2) = F_1(t)$$

a po úpravě

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_0 \dot{y}_1 + c_1 (\dot{y}_1 - p_1 \dot{y}_2) + k_0 y_1 + k_1 (y_1 - p_1 y_2) = F_1(t) + c_0 \dot{y}_0 + k_0 y_0$$

V prvním řádku a prvním sloupci matic **C, K** budou místo prvků c_1, k_1 výrazy $c_0 + c_1$ a $k_0 + k_1$ a singularita obou matic zanikne. Ve sloupcovém vektoru sil bude první prvek $F_1(t) + c_0 \dot{y}_0 + k_0 y_0$, což je opět výraz pro vnější sílu jakožto zadanou funkci času. U obecného postupu při modální transformaci způsob buzení nehraje roli;

2) Problém tlumení nelze exaktně vysvětlit a jsou přijímány různé matematické formulace pro jeho popis. Hypotéza viskózního tlumení se nejlépe hodí pro vnější tlumení (odpor prostředí, uměle instalované tlumiče), méně již pro konstrukční tlumení (tření ložisek, spojů atd.) a materiálové (vnitřní) tlumení. U pohonů a převodů ve výrobních strojích jde zpravidla o současné působení všech tří vlivů a spokojíme se proto s viskózní hypotézou. Někdy bývá tlumení zcela zanedbáváno, čímž je vytvořena rezerva stability při návrhu regulace hnacího motoru. V **kap.3.2.3** přijmeme ještě další zjednodušení;

3) U pohonů NC obráběcích strojů má vektor sil většinou jen dvě dominantní složky: sílu motoru (na první hmotě) a sílu řeznou na hmotě poslední.

Řešení pohybové rovnice Cramerovým pravidlem

Teoreticky je možné rovnici (3.11) řešit přímo pomocí Laplaceovy transformace, s jejíž pomocí získáme vztah

$$\boxed{(s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{y}(s) = \mathbf{F}(s)} \quad (3.12d)$$

kde bylo zavedeno označení pro matici $s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K} = \mathbf{H}(s)$ a $\mathbf{y}(s), \mathbf{F}(s)$ jsou L.obrazy sloupcových vektorů souřadnic a sil. L.obraz pohybu k -té souřadnice bychom zjistili jako podíl dvou determinantů

$$\boxed{y_k(s) = \frac{\det \mathbf{H}_k(s)}{\det \mathbf{H}(s)}}, \quad k = 1 \div N \quad (3.12e)$$

Matice $\mathbf{H}_k(s)$ vznikne nahrazením k -tého sloupce matice $\mathbf{H}(s)$ sloupcem $\mathbf{F}(s)$. Je ale zřejmé, že tímto postupem dojdeme ke složitému výrazu pro $y_k(s)$, jehož zpětná Laplaceova transformace může být velmi komplikovaná, neboť ve jmenovateli je polynom stupně $2N$. Snazší postup pomocí modální transformace ukážeme v **kap.3.2.3**, viz vztah (3.33b).

Z rovnice (3.12e) je ale možno určit alespoň vlastní kmitočty N -hmotového systému na základě této úvahy:

- předpokládáme netlumený systém, tj. $\mathbf{C} = 0$:

$$\mathbf{H}(s) = s^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} = \mathbf{M}(s^2 \mathbf{E} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) = \mathbf{M}(s^2 \mathbf{E} + \mathbf{A}) \quad (3.12f)$$

kde jsme zavedli tzv. matici systému o rozměru $N \times N$

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}} \quad (3.13)$$

Systém rozkmitáme Diracovým impulzem síly na libovolné (například první) hmotě, tj. $F_1(t) = \delta(t)$, $F_1(s) = 1$, $\mathbf{F}(s) = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$. Je ihned zřejmé, že po náhradě libovolného sloupce matice $\mathbf{H}(s)$ sloupcem $[1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ bude determinant matice $\det \mathbf{H}_k(s)$ polynomem nižšího stupně než $2N$. Je tedy možno provést Heavisideův rozklad zlomku (3.12e) na částečné zlomky podle **kap.1.16**, známe-li $2N$ kořenů s_i rovnice $\det \mathbf{H}(s) = \det \mathbf{M} \cdot \det(s^2 \mathbf{E} + \mathbf{A}) = 0$. To jsou ale zároveň kořeny rovnice

$$\boxed{\det(s^2 \mathbf{E} + \mathbf{A}) = 0} \quad (3.13a)$$

protože $\det \mathbf{M} = \prod_{k=1}^N m_k \neq 0$. Pro L.obraz pohybu k -té souřadnice bude platit

$$y_{kDirac}(s) = \sum_{i=1}^{2N} \frac{C_{ki}}{s - s_i} \quad \text{neboli} \quad y_{kDirac}(t) = \sum_{i=1}^{2N} C_{ki} e^{s_i t} \quad i = 1 \div 2N \quad (3.13b)$$

V rovnici $2N$ -tého stupně (3.13a) se ale vyskytují pouze sudé mocniny neznámé s , takže stačí po substituci $s^2 = -\lambda$ řešit pouze rovnici N -tého stupně pro neznámou λ , neboli hledat vlastní čísla matice \mathbf{A} - viz rovnici (3.2). Bez důkazu uvádíme, že vlastní čísla λ_i ($i = 1 \div N$) vyjdou reálná nezáporná (tato vlastnost vyplývá ze speciálního tvaru matic \mathbf{M}, \mathbf{K}), takže kořeny původní rovnice (3.13a) budou ryze imaginární v počtu N komplexně sdružených dvojic $\pm \sqrt{-\lambda_i} = \pm j\sqrt{\lambda_i} = \pm j\Omega_i$. Komplexně sdružené budou i dvojice konstant $C_{ki} = |C_{ki}| e^{\pm j\varphi_{ki}}$. Dosazením do (3.13b) a použitím Eulerových vztahů (1.2) vychází pohyb k -té souřadnice jakožto součet N harmonických složek

$$y_{kDirac}(t) = \sum_{i=1}^N |C_{ki}| \left(e^{+j\varphi_{ki}} \cdot e^{+j\Omega_i t} + e^{-j\varphi_{ki}} \cdot e^{-j\Omega_i t} \right) = 2 \sum_{i=1}^N |C_{ki}| \cdot \cos(\Omega_i t + \varphi_{ki}) \quad (3.13c)$$

Kladné konstanty $\Omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ jsou hledané vlastní kmitočty systému, neboli vlastní čísla λ_i matice systému \mathbf{A} jsou druhými mocninami vlastních kmitočtů Ω_i .

Poznámky: 1) Rovnici (3.12d) lze upravit na tvar

$$\mathbf{y}(s) = (s^2 \mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{F}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{F}(s) \quad (3.13d)$$

kde $\mathbf{G}(s) = \mathbf{H}^{-1}(s)$ je tzv. matice poddajnosti, jejíž důležitý význam objasníme v **kap.3.4**. Jmenovatelem všech jejích prvků je stejně jako u (3.12e) determinant matice $\mathbf{H}(s)$.

2) Uvolněný systém ($k_0 = 0$) má jedno z vlastních čísel nulové (a tedy i vlastní kmitočet) a je zvykem je dávat na první pořadové místo, tj. $\lambda_1 = 0$. Nulový vlastní kmitočet představuje nekonečně pomalý harmonický pohyb, tj. klid nebo rovnoměrný pohyb uvolněného systému. Vliv ukotvení ukážeme na dvojhmotovém systému, u kterého je

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & -k_1 p_1 \\ -k_1 p_1 & k_1 p_1^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1/m_1 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & -k_1 p_1 \\ -k_1 p_1 & k_1 p_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_0 + k_1}{m_1} & \frac{-k_1 p_1}{m_1} \\ \frac{-k_1 p_1}{m_2} & \frac{k_1 p_1^2}{m_2} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{bmatrix} \frac{k_0 + k_1}{m_1} - \lambda & \frac{-k_1 p_1}{m_1} \\ \frac{-k_1 p_1}{m_2} & \frac{k_1 p_1^2}{m_2} - \lambda \end{bmatrix} = \left(\frac{k_0 + k_1}{m_1} - \lambda \right) \left(\frac{k_1 p_1^2}{m_2} - \lambda \right) - \frac{k_1^2 p_1^2}{m_1 m_2}$$

Roznásobením zjistíme, že v kvadratickém trojčlenu vymizí pro $k_0 = 0$ absolutní člen, takže jeden kořen bude nulový, viz též podobný výpočet v **kap.3.5** a vztah (3.49a). Pro ukotvený systém (když v **obr.3.1** bude $k_0 \neq 0$) vyjdou oba kořeny nenulové.

3.2.1 Transformace pomocí modální matice

Matice systému \mathbf{A} má reálné prvky a její vlastní čísla, mající fyzikální význam druhých mocnin vlastních kmitočtů, jsou rovněž reálná. Podle (3.1a) jsou tedy reálné i vlastní vektory. Rovnici (3.1a) pro i -tý vlastní vektor, příslušející vlastnímu číslu λ_i , upravíme po dosazení z (3.13) a vynásobením maticí \mathbf{M} zleva na tvar

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{M} \mathbf{u}_i \quad (3.13e)$$

Obě strany (3.13e) vynásobíme j -tým transponovaným vektorem \mathbf{u}_j^T :

$$\mathbf{u}_j^T \mathbf{K} \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}_i \quad (3.14)$$

a záměnou indexů i za j bude rovněž

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{K} \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j \quad (3.15)$$

Transpozicí (3.14) se symetrické matice \mathbf{M}, \mathbf{K} nezmění, takže

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{K} \mathbf{u}_j = \lambda_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j \quad (3.16)$$

Odečtením (3.15) od (3.16) vychází

$$(\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j = 0 \quad (3.16a)$$

Má-li být levá strana v (3.16a) nulová, mohou nastat dvě možnosti:

1) Vlastní vektory jsou různé, tj. $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ a musí platit $\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j = 0$ (3.17)

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j = [u_{1i} \ u_{2i} \ \dots \ u_{Ni}] \cdot \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \dots \\ u_{Nj} \end{bmatrix} = 0$$

$$\boxed{u_{1i} m_1 u_{1j} + u_{2i} m_2 u_{2j} + \dots + u_{Ni} m_N u_{Nj} = 0} \quad (3.17a)$$

("vlastní vektory jsou přes hmotnosti ortogonální");

2) Pro jediný vlastní vektor, tj. $i = j = k$, je v (3.16a) nulová závorka a zbylý součin dává nenulové číslo, které označíme $m_{Dk} \neq 0$:

$$\boxed{\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \mathbf{u}_k = u_{1k}^2 m_1 + u_{2k}^2 m_2 + \dots + u_{Nk}^2 m_N = m_{Dk}} \quad (3.18)$$

Po seřazení všech vlastních vektorů do modální matice \mathbf{U} provedeme součin

$$\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{N1} \\ u_{12} & u_{22} & \dots & u_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{1N} & u_{2N} & \dots & u_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1N} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{N1} & u_{N2} & \dots & u_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{D1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{D2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{DN} \end{bmatrix}$$

Po zohlednění (3.17a) a (3.18) zůstaly jen prvky na diagonále. Získaná diagonální matice je tzv. matice modálních hmotností:

$$\boxed{\mathbf{M}_D = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}} \quad (3.19)$$

Touto transformací jsme diagonální matici hmotnosti převedli opět na diagonální tvar, což může působit samoučelným dojmem. Výhoda provedené transformace vynikne až u matice tuhosti. Dosazením (3.13) do (3.6) vychází

$$\mathbf{U}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \quad \text{neboli} \quad \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}$$

a po vynásobení maticí \mathbf{U}^T zleva získáme součin dvou diagonálních matic

$$\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}_D \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}_D$$

Symetrickou matici tuhosti \mathbf{K} se tak podařilo rovněž převést na diagonální tvar

$$\boxed{\mathbf{K}_D = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}_D} \quad (3.20)$$

(tzv. matice modálních tuhostí).

3.2.2 Normovaná modální matice

U předchozí transformace můžeme využít místo matice \mathbf{U} upravenou (tzv. normovanou) modální matici

$$\boxed{\mathbf{V} = \mathbf{U} \mathbf{M}_D^{-1/2}} \quad \text{resp.} \quad \boxed{\mathbf{V}^T = \mathbf{M}_D^{-1/2} \mathbf{U}^T} \quad (3.21)$$

kde diagonální matice úměrnosti $\mathbf{M}_D^{-1/2}$ (tzv. norma) je obdobou matice \mathbf{B}_D v (3.5a):

$$\mathbf{M}_D^{-1/2} = \begin{bmatrix} m_{D1}^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{D2}^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{DN}^{-1/2} \end{bmatrix}$$

(u diagonálních matic je možno zapisovat operaci umocňování a inverze stejně jako u skalárů, transpozicí se jejich tvar zachová). Matice \mathbf{V} je složena ze sloupcových normovaných vlastních vektorů:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_N] = [m_{D1}^{-1/2}\mathbf{u}_1 \quad m_{D2}^{-1/2}\mathbf{u}_2 \quad \dots \quad m_{DN}^{-1/2}\mathbf{u}_N] \quad (3.21a)$$

Analogicky k (3.19) a (3.20) provedeme součiny

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{M}_D^{-1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{M}_D^{-1/2} = \mathbf{M}_D^{-1/2} \mathbf{M}_D \mathbf{M}_D^{-1/2} = \mathbf{E} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{M}_D^{-1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \mathbf{M}_D^{-1/2} = \mathbf{M}_D^{-1/2} \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}_D \mathbf{M}_D^{-1/2} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Původní matice hmotnosti a tuhosti \mathbf{M} , \mathbf{K} se transformovaly na matici jednotkovou a spektrální:

$$\boxed{\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{E}} \quad \text{a} \quad \boxed{\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}} \quad (3.23a)$$

Poznámky: 1) Zavedením normované modální matice \mathbf{V} je odstraněna nejednoznačnost ve velikostech vlastních vektorů, jak lze snadno dokázat: zvolme novou modální matici $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U} \mathbf{B}_D$, kde \mathbf{B}_D je libovolná diagonální matice s nenulovými prvky. Podle (3.19) bude nová matice modálních hmotností

$$\mathbf{M}_{D1} = \mathbf{U}_1^T \mathbf{M} \mathbf{U}_1 = \mathbf{B}_D \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{B}_D = \mathbf{M}_D \mathbf{B}_D^2$$

a nová normovaná modální matice je shodná s původní:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{M}_{D1}^{-1/2} = \mathbf{U} \mathbf{B}_D (\mathbf{M}_D \mathbf{B}_D^2)^{-1/2} = \mathbf{U} \mathbf{B}_D \mathbf{M}_D^{-1/2} \mathbf{B}_D^{-1} = \mathbf{V}$$

2) Analogicky k (3.6) platí, že $\boxed{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}}$ (3.23b)

Po dosažení za \mathbf{A} a $\mathbf{\Lambda}$ z (3.13) a (3.23a) bude $\mathbf{V}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}$ a po úpravě vychází

$$\boxed{\mathbf{V} \mathbf{V}^T = \mathbf{M}^{-1}} \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1N} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{N1} & v_{N2} & \dots & v_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{N1} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{1N} & v_{2N} & \dots & v_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/m_N \end{bmatrix}$$

Provedením součinu a porovnáním stejnoolehých prvků vycházejí pro součet kvadrátů k – tých prvků všech vlastních vektorů rovnosti

$$\boxed{\sum_{i=1}^N v_{ki}^2 = \frac{1}{m_k}} \quad (3.25)$$

3) Po aplikaci (3.18) na normovaný vlastní vektor \mathbf{v}_k a s přihlédnutím k (3.22) je

$$\boxed{\mathbf{v}_k^T \mathbf{M} \mathbf{v}_k = v_{1k}^2 m_1 + v_{2k}^2 m_2 + \dots + v_{Nk}^2 m_N = \sum_{i=1}^N v_{ik}^2 m_i = 1} \quad (3.26)$$

3.2.3 Diagonalizace systému - modální transformace

Ke snadnějšímu řešení soustavy vzájemně svázaných rovnic (3.11) je třeba, aby všechny matice na levé straně byly diagonální. V takovém případě se úloha rozpadne na řešení N vzájemně nezávislých rovnic pro elementární jednohmotové systémy podle **kap.2**. Za tímto účelem provedeme substituci

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \mathbf{V} \mathbf{q}(t)} \quad (3.27)$$

takže rovnice (3.11) přejde na tvar

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{V}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t)$$

Původní vektor $\mathbf{y}(t)$ byl nahrazen novým (též sloupcovým) vektorem $\mathbf{q}(t)$, jinými slovy nově zavedené souřadnice $q_{1+N}(t)$ jsou lineárními kombinacemi původních geometrických souřadnic $y_{1+N}(t)$. Rovnici vynásobíme maticí \mathbf{V}^T zleva, takže bude

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}^T\mathbf{F}(t) \quad (3.28a)$$

a po dosazení z (3.22) a (3.23) vychází

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_D\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}^T\mathbf{F}(t) \quad (3.28b)$$

Úloha diagonalizace ještě není zcela splněna, neboť nově vzniklá matice tzv. „modálního tlumení“

$$\mathbf{C}_D = \mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V} \quad (3.28c)$$

nemusí vyjít diagonální. Aby tomu tak bylo, musely by původní matice \mathbf{C} a \mathbf{K} být komutativní vzhledem k \mathbf{M}^{-1} , jinými slovy muselo by platit

$$\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \quad (3.29a)$$

Důkaz: Má-li být \mathbf{C}_D diagonální, musí pro její součin s diagonální spektrální maticí $\mathbf{\Lambda}$ platit komutativní zákon $\mathbf{C}_D\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{C}_D$, neboli

$$\mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V}$$

a po úpravě a dosazení z (3.24) je požadavek (3.29a) potvrzen.

Dále dokážeme, že diagonalizovat lze matici \mathbf{C} v tzv. Caugheyově tvaru

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M}\mathbf{A}^0 + \beta\mathbf{M}\mathbf{A}^1 + \gamma\mathbf{M}\mathbf{A}^2 + \dots = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} + \gamma\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} + \dots \quad (3.29b)$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ jsou libovolné reálné konstanty:

- transformace (3.28c) totiž vede (opět s využitím (3.24)) na diagonální tvar

$$\mathbf{C}_D = \mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V} = \alpha\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V} + \beta\mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V} + \gamma\mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{V} + \dots = \alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{\Lambda} + \gamma\mathbf{\Lambda}^2 + \dots \quad (3.29c)$$

V praxi obvykle není požadavek komutativnosti (3.29a) splněn a úplná diagonalizace rovnice (3.28b) i se zahrnutím tlumení je vždy doprovázena spekulacemi. V dalším textu ukážeme, že při našem předpokladu viskózního tlumení (což je do jisté míry opět spekulace) musejí být všechny koeficienty počínaje γ nulové a diagonalizovatelný tvar matice tlumení vznikne pouhou lineární kombinací matice hmotnosti a tuhosti (tzv. „proporcionální – Rayleighovo tlumení“)

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (3.29d)$$

Transformovaná diagonální matice bude podle (3.29c)

$$\mathbf{C}_D = \begin{bmatrix} c_{D1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{D2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{DN} \end{bmatrix} = \alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \beta\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + \beta\lambda_N \end{bmatrix} \quad (3.29e)$$

Na pravé straně rovnice (3.28b) je sloupcový vektor silového buzení

$$\mathbf{V}^T\mathbf{F}(t) = \mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N v_{k1} F_k(t) & \sum_{k=1}^N v_{k2} F_k(t) & \dots & \sum_{k=1}^N v_{kN} F_k(t) \end{bmatrix}^T \quad (3.30a)$$

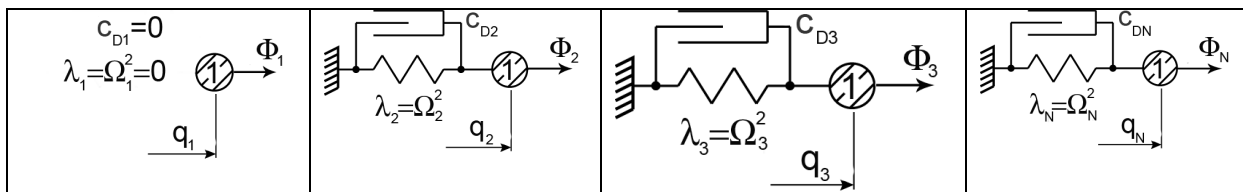
mající N složek (tzv. modálních sil), z nichž obecně i – tá má tvar

$$\Phi_i(t) = \sum_{k=1}^N v_{ki} F_k(t) \quad i = 1 \div N \quad (3.30b)$$

Zavedením matice \mathbf{C}_D je celá úloha diagonalizace splněna a rozepsáním (3.28b) vznikne N nezávislých rovnic v souřadnicích $q_{1+N}(t)$

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_1 + c_{D1}\dot{q}_1 + \lambda_1 q_1 &= \Phi_1(t) \\
 \ddot{q}_2 + c_{D2}\dot{q}_2 + \lambda_2 q_2 &= \Phi_2(t) \\
 \dots\dots\dots \\
 \ddot{q}_i + c_{Di}\dot{q}_i + \lambda_i q_i &= \Phi_i(t) \\
 \dots\dots\dots \\
 \ddot{q}_N + c_{DN}\dot{q}_N + \lambda_N q_N &= \Phi_N(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

Pro náš uvolněný systém je v první rovnici $\lambda_1 = c_{D1} = 0$. Tento tzv. modální rozklad seriového modelu pohonu na jednohmotové systémy je znázorněn na **obr.3.2**.



Obr.3.2 Modální rozklad seriového modelu pohonu

Soustava (3.31) popisuje pohyb N nezávislých fiktivních (tzv. modálních) subsystémů s jednotkovými hmotnostmi a tuhostmi λ_i . Budicí fiktivní síly $\Phi_i(t)$ jsou přes prvky i -tého vlastního vektoru lineárními kombinacemi sil skutečných. Protože hmotnosti jsou jednotkové, tuhosti mají zároveň význam druhých mocnin vlastních kmitočtů, tj. $\lambda_i = \Omega_i^2$. Modální transformací tak zůstaly zachovány vlastní kmitočty původního systému a pro uvolněný systém platí

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_{2+N} = \sqrt{\lambda_{2+N}}
 \tag{3.31a}$$

Stejně jako u jednohmotového systému (2.1b) (ale pro $m=1$!!) zavádíme pojem „poměrný útlum modálního subsystému“

$$\zeta_{qi} = c_{Di} / 2\Omega_i \quad \text{neboli} \quad c_{Di} = 2\zeta_{qi}\Omega_i
 \tag{3.31b}$$

Pro uvolněný systém ($\lambda_1 = c_{D1} = 0$) je tedy

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_1 &= \Phi_1(t) \\
 \ddot{q}_2 + 2\zeta_{q2}\Omega_2\dot{q}_2 + \Omega_2^2 q_2 &= \Phi_2(t) \\
 \text{atd.}
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

Skutečný pohyb původního vícehmotového systému z **obr.3.1** v geometrických souřadnicích $y_{1+N}(t)$ zjistíme vyřešením rovnic (3.32) a zpětnou lineární transformací (3.27). Po jejím rozepsání vyjde soustava rovnic

$$\begin{aligned}
 y_1 &= v_{11}q_1 + v_{12}q_2 + \dots + v_{1N}q_N \\
 y_2 &= v_{21}q_1 + v_{22}q_2 + \dots + v_{2N}q_N \\
 \dots & \dots \dots \dots \dots \\
 y_k &= v_{k1}q_1 + v_{k2}q_2 + \dots + v_{kN}q_N \\
 y_N &= v_{N1}q_1 + v_{N2}q_2 + \dots + v_{NN}q_N
 \end{aligned}
 \tag{3.33a}$$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$
 pohyb každé hmoty = pohyb celku + kmity Ω_2 + kmity Ω_N

a obecně (též pro rychlosti i zrychlení)

$$\begin{aligned}
 y_k(t) &= \sum_{i=1}^N v_{ki}q_i(t) & \dot{y}_k(t) &= \sum_{i=1}^N v_{ki}\dot{q}_i(t) & \ddot{y}_k(t) &= \sum_{i=1}^N v_{ki}\ddot{q}_i(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.33b}$$

kde v_{ki} je k -tý prvek i -tého vlastního vektoru.

V pohybu každé geometrické souřadnice y_k je obsaženo N dílčích harmonických (obecně tlumených) pohybů s vlastními kmitočty $\Omega_i = \sqrt{\lambda_i}$. Složka pohybu s

kmitočtem $\Omega_1 = 0$ představuje pohyb celku, tj. pohyb příslušné hmoty v případě, že systém má dokonale tuhé převody. Složky se stejnými kmitočty jsou na jednotlivých hmotách zastoupeny v poměru velikostí prvků příslušného vlastního vektoru. Postup bude ujasněn v **kap.3.4**.

Budeme-li vyšetřovat volné kmitání, je třeba řešit rovnice (3.32) s nulovou pravou stranou, ale bez znalosti počátečních podmínek nelze určit integrační konstanty. Proto se volí počáteční podmínky nulové a je zavedena budící síla na některou hmotu ve tvaru Diracova impulzu. Rovnice (3.33a) pak vedou na součet váhových funkcí ve tvaru (2.6).

Vliv ukotvení

Obecný tvar diagonalizovatelné matice tlumení \mathbf{C} podle (3.29b) obsahuje nenulové konstanty $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0, \dots$. Uvažujeme-li např. jen tři konstanty α, β, γ , potom

a) pro viskózně tlumený ukotvený systém z **obr.3.1** dává fyzikální smysl pouze případ, kdy $\gamma = 0$ a relevantní je Rayleighův tvar (3.29d). Toto tvrzení lze dokázat porovnáním stejnohlých prvků prvního řádku matic v (3.12b) a (3.29b):

- roznásobením matice $\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{K}$ v (3.29b) zjistíme, že první tři prvky jejího 1.řádku jsou vždy nenulové. Označíme-li je symboly $x_{11}, x_{12}, x_{13} \neq 0$, musí pro prvky prvních řádků všech čtyř matic \mathbf{C} , \mathbf{M} , \mathbf{K} , $\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{K}$ současně platit rovnosti

$$c_1 + c_0 = \alpha \cdot m_1 + \beta(k_1 + k_0) + \gamma \cdot x_{11}$$

$$-c_1 p_1 = \alpha \cdot 0 - \beta \cdot k_1 p_1 + \gamma \cdot x_{12}$$

$$0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot x_{13}$$

Protože je $x_{13} = k_1 p_1 k_2 p_2 / m_2 \neq 0$, ve třetí rovnici musí být $\gamma = 0$. Z druhé rovnice vyplývá, že $c_1 = \beta k_1$ a první rovnice tak přejde na Rayleighův tvar (3.29d)

$$c_1 + c_0 = \alpha \cdot m_1 + \beta(k_0 + k_1) \text{ neboli } c_0 = \alpha \cdot m_1 + \beta k_0$$

Transformovaná matice tlumení ukotveného systému tedy bude

$$\mathbf{C}_D = \mathbf{V}^T (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}) \mathbf{V} = \alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{\Lambda} \quad (3.33c)$$

b) je-li však systém neukotvený (tj. $k_0 = c_0 = 0$), jsou první dvě rovnice současně splněny jedině při $\alpha = 0$. Pro matici viskózního tlumení (3.12b) tedy musí u neukotveného systému platit, že $\mathbf{C} = \beta \mathbf{K}$ a transformovaná matice je

$$\mathbf{C}_D = \beta \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(c_{Di}) \quad \text{s prvky } c_{Di} = 2\zeta_i \Omega_i = \beta \lambda_i = \beta \Omega_i^2 \quad (3.34)$$

Poměrné útlumy modálních subsystémů rostou úměrně s jejich vlastními kmitočty:

$$\zeta_{q1} = 0, \quad \zeta_{q2+N} = \beta \Omega_{2+N} / 2 \quad (3.35)$$

Poznámka: Stále je třeba mít na paměti, že u systému na **obr.3.1** jsme předpokládali viskózní tlumení ve vložených převodech. U experimentů na reálných zařízeních se někdy postupuje opačně, když se z daných útlumů u jednotlivých tvarů kmitů určuje výchozí matice

\mathbf{C} . Je tedy předem známa matice $\mathbf{C}_D = \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V}$, tj. $(\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{C}_D \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{C}$

Po úpravě (3.24) platí $(\mathbf{V}^T)^{-1} = \mathbf{M} \mathbf{V}$ a dále $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T \mathbf{M}$

takže hledaná matice je $\mathbf{C} = \mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{C}_D \mathbf{V}^T \mathbf{M}$

Tento reciproký postup ale není z fyzikálního hlediska správný:

- matice \mathbf{C} je sice diagonalizovatelná, ale neodpovídá výchozímu mechanickému modelu z **obr.3.1**, pro který jsme sestavovali pohybové rovnice (3.10). To lze rozpoznat např. podle toho, že není „pásová“ jako matice tuhosti.

3.2.4 Rozjezd systému – časově omezený silový impulz

Předpokládejme, že na systém v **obr.3.1** zapůsobí pouze jedna síla $F_k(t)$ ve

formě konečného impulzu s plochou A v časovém intervalu $\langle 0, T_0 \rangle$. Při $t > T_0$ budou v rovnicích (3.31) pravé strany nulové a v čase $t \rightarrow \infty$ se v **obr.3.2** utlumí kmitavé pohyby hmot, tj.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_{2+N}(t) = 0$$

Pouze v prvním subsystému se souřadnicí q_1 bude hmota, urychlená impulzem síly $\Phi_1(t) = v_{k1} F_k(t)$, mít podle 2. Newtonova zákona konstantní rychlost

$$\dot{q}_1 = v_{q1} = v_{k1} \int_0^{T_0} F_k(t) dt = v_{k1} A = konst \quad (3.36)$$

Po dosazení do (3.33a) zjišťujeme, že pro geometrické souřadnice bude platit

$$y_1 = v_{11} q_1, \quad y_2 = v_{21} q_1, \quad \dots \quad y_N = v_{N1} q_1$$

Skutečné rychlosti jednotlivých hmot jsou tedy v čase $t \rightarrow \infty$ též konstantní

$$v_{10} = v_{11} v_{q1}, \quad v_{20} = v_{21} v_{q1}, \quad \dots \quad v_{k0} = v_{k1} v_{q1}, \quad \dots \quad v_{N0} = v_{N1} v_{q1} \quad (3.37)$$

Je vidět, že prvnímu vlastnímu vektoru \mathbf{v}_1 s nulovým vlastním číslem λ_1 a kmitočtem $\Omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 0$ přísluší rovnoměrný pohyb celého systému jakožto tuhého celku, který nastane po odeznění impulzu. Rychlosti jsou přitom vázány statickými (tzv. kinematickými) převody

$$p_1 = v_{10}/v_{20} = v_{11}/v_{21}, \quad p_2 = v_{20}/v_{30} = v_{21}/v_{31} \text{ atd.}$$

Převod mezi i -tou a k -tou hmotou je roven poměru i -té a k -té složky prvního vlastního vektoru \mathbf{v}_1 :

$$p_{ik} = p_i p_{i+1} \dots p_{k-1} = \frac{v_{i0}}{v_{k0}} = \frac{v_{i1}}{v_{k1}} \quad (3.38)$$

Vztah (3.38) respektuje i znaménka, takže u rotačních převodů obracejících smysl rotace (např. u ozubených kol s vnějším ozubením) je poměr příslušných složek prvního vlastního vektoru záporný!!

Dosazením do (3.8) určíme celkovou hmotnost redukovanou na k -tý člen:

$$m_{REDk} = \sum_{i=1}^N m_i p_{ik}^2 = \frac{1}{v_{k1}^2} \sum_{i=1}^N m_i v_{i1}^2$$

Použitím (3.26) na první vlastní vektor je $\sum_{i=1}^N v_{i1}^2 m_i = 1$, takže

$$m_{REDk} = 1/v_{k1}^2 \quad (3.39)$$

Rychlost tuhého systému, příslušná k -té hmotě, je podle (3.37) a (3.36)

$$v_{k0} = v_{k1} v_{q1} = v_{k1}^2 \int_0^{T_0} F_k(t) dt = \frac{1}{m_{REDk}} \int_0^{T_0} F_k(t) dt = \frac{A}{m_{REDk}} \quad (3.39a)$$

čímž je opět dokázán vztah (3.9), tentokrát pomocí modální transformace.

Závěrečná poznámka: Diagonalizace pomocí inverzní modální matice

Výše popsaná diagonalizace s pomocí transpozice modální matice není jediná možná. Též cíle lze dosáhnout pomocí její inverze:

- vynásobením rovnice (3.11) zleva inverzní maticí hmotnosti vychází

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t)$$

- provedeme substituci $\mathbf{y}(t) = \mathbf{U}\mathbf{q}(t)$ a použijeme např. Rayleighovo tlumení (3.29d):

$$\mathbf{E}\mathbf{U}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}^{-1}(\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K})\mathbf{U}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{q} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t)$$

- po dosazení $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ a vynásobením maticí \mathbf{U}^{-1} zleva vychází

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{U}^{-1}(\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{A})\mathbf{U}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{q} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t)$$

- použitím (3.6) obdržíme opět diagonalizovaný tvar

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{\Lambda})\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{q}(t) = (\mathbf{M}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{F}(t) \quad (3.40)$$

kde matice modálního tlumení je $\mathbf{C}_D = \alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{\Lambda}$. Levá strana (3.40) je formálně shodná s (3.28b), ale modální souřadnice zde mají jiný význam, protože substituce proběhla oproti (3.27) s nenormovanou modální maticí. Vektor silového buzení na pravé straně je také jiný. Zpětnou transformací do geometrických souřadnic ale musí nutně vyjít stejný výsledek.

Jedině v případě substituce s normovanou modální maticí jsou pravé strany rovnic (3.40) a (3.28b) shodné, protože platí (3.24):

$$(\mathbf{M}\mathbf{V})^{-1} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T$$

a oba způsoby diagonalizace jsou identické. Výpočet pomocí inverze modální matice je ale zvláště při jejím velkém rozměru nepohodlný.

3.3 Zachování energie při modální transformaci

U systému z **obr.3.1** vyjádříme celkovou kinetickou energii jako součet kinetických energií jednotlivých hmot:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \dots)$$

Výraz v závorce je tzv. kvadratická forma, kterou lze zapsat pomocí vektorů:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{y}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{y}} \quad (3.41)$$

Podobně je možno vyjádřit celkovou energií napjatosti všech pružin:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - p_1 y_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - p_2 y_3)^2 + \dots$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} \quad (3.42)$$

Energie zmařená v tlumičích (např. pro Rayleighovo tlumení $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$) je

$$E_{tlum} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^T (\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}) \dot{\mathbf{y}} \quad (3.43)$$

Přejdeme na modální souřadnice pomocí rovnice (3.27) a její transpozice

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{V}\mathbf{q} & \mathbf{y}^T &= \mathbf{q}^T \mathbf{V}^T \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{V}\dot{\mathbf{q}} & \dot{\mathbf{y}}^T &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{V}^T \end{aligned} \quad (3.44)$$

a po úpravách vycházejí vztahy pro energie všech modálních systémů z **obr.3.2** (včetně prvního, u kterého je $\lambda_1 = c_{D1} = 0$) rovněž ve tvaru kvadratických forem:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{q}_i^2 = E_{kinMod}$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i q_i^2 = E_{potMod}$$

$$E_{tlum} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{V}^T (\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}) \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{\Lambda}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_D \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_{Di} \dot{q}_i^2 = E_{tlumMod}$$

Tím je dokázáno, že energie se při modální transformaci zachovává.

3.4 Matice poddajnosti a vlastní tvary kmitů

Z rovnice (3.11) vychází Laplaceův obraz vektoru geometrických souřadnic

$$\mathbf{y}(s) = (s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{F}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{F}(s) \quad (3.44a)$$

kde matice

$$\mathbf{G}(s) = (s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1N}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2N}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{M1}(s) & G_{N2}(s) & \dots & G_{NN}(s) \end{bmatrix} \quad (3.44b)$$

je tzv. matice dynamické poddajnosti (též přenosová matice silového buzení), kterou jsme zmínili již v **kap.3.2** – viz (3.13d). Jejými prvky jsou dílčí přenosové funkce $G_{nk}(s)$ mezi všemi vstupními a výstupními veličinami (tj. mezi jednotlivými silami a souřadnicemi). Podle pravidel o inverzi matic to jsou racionální ryze lomené funkce proměnné s , jejichž jmenovatelem je vždy determinant (polynom stupně $2N$)

$$\det \mathbf{H}(s) = \det(s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K}) \quad (3.44b)$$

Matice poddajnosti je symetrická, což lze snadno dokázat:

- matice $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ jsou symetrické, tj. $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T, \mathbf{C} = \mathbf{C}^T, \mathbf{K} = \mathbf{K}^T$. Z (3.44b) tedy platí

$$\mathbf{G}^{-1} = s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K} = s^2 \mathbf{M}^T + s \mathbf{C}^T + \mathbf{K}^T = (s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K})^T = (\mathbf{G}^{-1})^T$$

Transpozicí rovnice $\mathbf{E} = \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1}$ obdržíme $\mathbf{E} = (\mathbf{G}^{-1})^T \mathbf{G}^T = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^T$

a vynásobením maticí \mathbf{G} zleva vychází konečně symetrie

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}^T(s) \quad \text{a tedy pro dílčí přenosy rovnost} \quad G_{nk}(s) = G_{kn}(s) \quad (3.44c)$$

Pohyb souřadnice $y_n(t)$ při působení jediné síly $F_k(t)$ bychom zjistili zpětnou Laplaceovou transformací výrazu

$$y_n(s) = G_{nk}(s) F_k(s) \quad (3.44cc)$$

Při současném působení více sil je nutno uplatnit princip superpozice.

Poznámky: 1) Podíl konstantní deformace a síly nese v teorii pružnosti název „statická poddajnost“. Pomocí (3.44cc) jsme ale schopni pracovat s obecnými časovými průběhy, takže funkce $G_{nk}(s)$ bývá někdy nazývána jako „obecná dynamická poddajnost“, ve zvláštním případě harmonických průběhů pak jako „frekvenční poddajnost“.

2) Dosazením za $s = 0$ získáme matici statické poddajnosti

$$\mathbf{G}_{stat} = \mathbf{K}^{-1}$$

kteřá má ale význam jen u systému ukotveného k rámu, neboť uvolněný systém se může pohybovat bez omezení, matice tuhosti je singulární ($\det \mathbf{K} = 0$) a nelze provést inverzi !!

3) Matice poddajnosti netlumeného systému je

$$\mathbf{G}(s) = (s^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} = (s^2 \mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{M}^{-1}$$

Jmenovatel jejích prvků vždy obsahuje charakteristický determinant matice \mathbf{A} , neboť

$$\det \mathbf{G} = \frac{1}{\det(s^2 \mathbf{E} + \mathbf{A})} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^N m_k} \quad (3.44ccc)$$

kde $s^2 = -\lambda$ a kořeny jsou $s_i = \pm \sqrt{-\lambda_i} = \pm j \sqrt{\lambda_i} = \pm j \Omega_i$, jak již bylo zmíněno v závěru **kap.3.2** u výpočtu vlastních kmitočtů.

4) Postup podle vztahů (3.44a,b) a (3.44cc) je velmi pracný, protože vyžaduje inverzi matice o rozměru $N \times N$ a zpětnou transformaci složitých výrazů $G_{nk}(s)$ s polynomem stupně $2N$ ve jmenovateli. Lépe je použít modální rozklad, který popíšeme v další kapitole.

5) Symetrii u lineárních soustav poprvé formuloval Maxwell v r. 1864.

Matice poddajnosti v modálním tvaru

Z (3.28b) a (3.30a) vyjádříme Laplaceův obraz vektoru modálních souřadnic:

$$(s^2 \mathbf{E} + s \mathbf{C}_D + \mathbf{\Lambda}) \mathbf{q}(s) = \mathbf{V}^T \mathbf{F}(s) = \mathbf{\Phi}(s)$$

$$\mathbf{q}(s) = (s^2 \mathbf{E} + s \mathbf{C}_D + \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{\Phi}(s) = \mathbf{G}_q(s) \mathbf{\Phi}(s) \quad (3.45)$$

Analogicky k (3.44a) zavádíme pojem matice poddajnosti v modálních souřadnicích

$$\mathbf{G}_q(s) = (s^2 \mathbf{E} + s \mathbf{C}_D + \mathbf{\Lambda})^{-1} \quad (3.45a)$$

kteřá na rozdíl od matice $\mathbf{G}(s)$ v (3.44b) má výhodu v tom, že je diagonální. Jejými prvky v diagonále jsou přenosové funkce 2.řádu (dílčí modální poddajnosti), které jsme mohli získat již z (3.31):

$$G_{qi}(s) = \frac{q_i(s)}{\Phi_i(s)} = \frac{1}{s^2 + c_{Di}s + \lambda_i}, \quad i = 1 \div N, \quad \lambda_i = \Omega_i^2 \quad (3.45aa)$$

Po návratu do původních geometrických souřadnic tedy bude

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{V}\mathbf{q}(s) = \mathbf{V}\mathbf{G}_q(s)\Phi(s) = \mathbf{V}\mathbf{G}_q(s)\mathbf{V}^T\mathbf{F}(s) \quad (3.45aaa)$$

a jiný možný tvar matice poddajnosti v původních geometrických souřadnicích je

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{V}\mathbf{G}_q(s)\mathbf{V}^T = \mathbf{V}(s^2\mathbf{E} + s\mathbf{C}_D + \mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{V}^T \quad (3.45b)$$

Rozepsáním rovnice (3.45aaa) vychází

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \dots \\ y_n(s) \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} & \dots \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_{q1}(s)\Phi_1(s) \\ G_{q2}(s)\Phi_2(s) \\ \dots \\ G_{qn}(s)\Phi_n(s) \\ \dots \end{bmatrix} \quad (3.45bb)$$

Předpokládejme působení jediné síly F_k , takže i -tá složka sloupcového vektoru modálních sil z (3.30b) bude

$$\Phi_i(t) = v_{ki}F_k(t), \quad i = 1 \div N$$

a rovnice (3.45bb) se zjednoduší na tvar

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \dots \\ y_n(s) \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} & \dots \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{k1}G_{q1}(s) \\ v_{k2}G_{q2}(s) \\ \dots \\ v_{kn}G_{qn}(s) \\ \dots \end{bmatrix} F_k(s) \quad (3.45bbb)$$

Pro pohyb souřadnice y_n při působení jediné síly F_k platí

$$y_n(s) = \frac{v_{n1}v_{k1}F_k(s)}{s^2 + c_{D1}s + \lambda_1} + \frac{v_{n2}v_{k2}F_k(s)}{s^2 + c_{D2}s + \lambda_2} + \dots = F_k(s) \sum_{i=1}^N \frac{v_{ni}v_{ki}}{s^2 + c_{Di}s + \lambda_i} \quad (3.45c)$$

Přenosová funkce mezi n -tou souřadnicí a k -tou silou je tedy součtem přenosových funkcí pouze druhého řádu

$$G_{nk}(s) = \frac{y_n(s)}{F_k(s)} = \sum_{i=1}^N \frac{v_{ni}v_{ki}}{s^2 + c_{Di}s + \lambda_i} \quad (3.45d)$$

V čitatelích zlomků jsou součiny n -té a k -té složky i -tého vlastního vektoru. Zpětná transformace součtu jednoduchých zlomků nečiní potíže, neboť se jedná o jednohmotové systémy z **kap.2**.

Kdybychom ale převedli součet (3.45d) na společného jmenovatele, nutně dospějeme ke stejným výsledkům, jako po přímém výpočtu pomocí inverzní matice v (3.44b). Všechny dílčí přenosové funkce jsou racionální ryze lomené a všechny mají shodného jmenovatele, kterým je polynom stupně $2N$:

$$G_{nk}(s) = G_{kn}(s) = \frac{P_{nk}(s)}{\prod_{i=1}^N (s^2 + c_{Di}s + \lambda_i)} \quad (3.45e)$$

Liší se pouze polynomy $P_{nk}(s)$ v čitatelích, jejichž stupeň je maximálně $2(N-1)$ a ve kterých se vyskytují různé složky různých vlastních vektorů (ze symetrie matice poddajnosti ale nadále platí, že $P_{nk}(s) = P_{kn}(s)!!$). Polohu kořenů jmenovatele v komplexní rovině (tzv. pólů) určíme podle **obr.2.2**. Pro nejčastější případ malého (podkritického) tlumení platí, že

- vzdálenosti komplexně sdružených dvojic pólů od počátku jsou $\sqrt{\lambda_i} = \Omega_i$;

- úhly $\gamma_i = \arccos(c_{Di}/2\Omega_i)$ - viz (3.31b);
- uvolněný systém ($\Omega_1 = 0$) má jeden dvojnásobný pól v počátku.

Pro mechanické velmi málo tlumené systémy je typické, že v blízkosti vlastních kmitočtů Ω_i jsou na amplitudové frekvenční charakteristice (tj. průběhu funkce $|G_{nk}(j\omega)|$) výrazné špičky, tzv. "rezonance": např. pro $c_{Di} \rightarrow 0$ a $s = j\Omega_i$ bude i -tý součinitel ve jmenovateli $s^2 + c_{Di}s + \lambda_i = (j\Omega_i)^2 + \lambda_i = 0$, tj. $G_{nk}(j\Omega_i) \rightarrow \infty$.

V okolí kořenů čitatele $P_{nk}(s)$ (tzv. nulových bodů) naopak hodnota $|G_{nk}(j\omega)|$ klesá k nule, což lze při laboratorních měřeních snadno přehlédnout a je výhodné používat logaritmické souřadnice, kde se hodnoty blízké k nule zvýrazní (neboť $\lim_{x \rightarrow 0} (\log_{10} x) = -\infty$), takže amplitudová charakteristika má v okolí kmitočtů, příslušných nulovým bodům, výrazné propady, tzv. "antirezonance".

Poznámky: 1) Ve vztahu (3.45d) je ihned patrná symetrie matice poddajnosti, neboť v čitatelích nezáleží na pořadí násobení složek vlastních vektorů, tj. $v_{ni}v_{ki} = v_{ki}v_{ni}$;
 2) V některých případech (např. u samobuzeného kmitání obráběcích strojů - viz **kap.5**) je důležitý průběh reálné části funkce $G_{nk}(j\omega)$. Potom je součtový tvar (3.45d) velmi výhodný, neboť lze zobrazit reálnou frekvenční charakteristiku pro každý sčítanec zvlášť:

$$\operatorname{Re} G_{nk}(j\omega) = \sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \frac{v_{ni}v_{ki}}{-\omega^2 + c_{Di}j\omega + \lambda_i}$$

a podobně pro imaginární složky. Získáme tak N křivek, majících tvar jako v **obr.2.10**, které lze v normálních (nikoliv logaritmických !!) souřadnicích sečíst.

Vlastní tvary kmitů

K výkladu tohoto pojmu je výhodné předpokládat silové buzení ve tvaru Diracova impulzu na jediné (např. k -té) hmotě netlumeného systému. Laplaceův obraz síly je tedy $F_k(s) = 1$ a systému je udělen impulz síly $A = \int F_k(t)dt = 1Ns$. Zpětná transformace (3.45c) vede na součet váhových funkcí - viz vztah (2.4a) pro $m = 1$. Časové průběhy pohybů jednotlivých hmot budou

$y_1(t) = \frac{v_{11}v_{k1}}{\Omega_1} \sin\Omega_1 t + \frac{v_{12}v_{k2}}{\Omega_2} \sin\Omega_2 t + \dots + \frac{v_{1i}v_{ki}}{\Omega_i} \sin\Omega_i t + \dots + \frac{v_{1k}v_{kk}}{\Omega_k} \sin\Omega_k t + \dots$	$y_2(t) = \frac{v_{21}v_{k1}}{\Omega_1} \sin\Omega_1 t + \frac{v_{22}v_{k2}}{\Omega_2} \sin\Omega_2 t + \dots + \frac{v_{2i}v_{ki}}{\Omega_i} \sin\Omega_i t + \dots + \frac{v_{2k}v_{kk}}{\Omega_k} \sin\Omega_k t + \dots$	$y_i(t) = \frac{v_{i1}v_{k1}}{\Omega_1} \sin\Omega_1 t + \frac{v_{i2}v_{k2}}{\Omega_2} \sin\Omega_2 t + \dots + \frac{v_{ii}v_{ki}}{\Omega_i} \sin\Omega_i t + \dots + \frac{v_{ik}v_{kk}}{\Omega_k} \sin\Omega_k t + \dots$	$y_k(t) = \frac{v_{k1}^2}{\Omega_1} \sin\Omega_1 t + \frac{v_{k2}^2}{\Omega_2} \sin\Omega_2 t + \dots + \frac{v_{ki}^2}{\Omega_i} \sin\Omega_i t + \dots + \frac{v_{kk}^2}{\Omega_k} \sin\Omega_k t + \dots$	$y_n(t) = \frac{v_{n1}v_{k1}}{\Omega_1} \sin\Omega_1 t + \frac{v_{n2}v_{k2}}{\Omega_2} \sin\Omega_2 t + \dots + \frac{v_{ni}v_{ki}}{\Omega_i} \sin\Omega_i t + \dots + \frac{v_{nk}v_{kk}}{\Omega_k} \sin\Omega_k t + \dots$
\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow	
1. tvar	2. tvar	<u>i-tý tvar</u>	k -tý tvar	(3.45f)

V pohybu každé hmoty je obsaženo N harmonických složek. Je patrné, že amplitudy na jednotlivých hmotách, příslušející stejnému kmitočtu Ω_i , jsou v poměru složek i -tého vlastního vektoru $v_{1i}, v_{2i}, v_{3i}, \dots$. Sčítance s tímto kmitočtem, které vidíme v rovnicích (3.45f) pod sebou, zahrnujeme do tzv. vlastních tvarů kmitů (pro

větší přehlednost je zvýrazněn i -tý tvar s kmitočtem Ω_i). Dále je vidět, že amplitudy na všech hmotách jsou nepřímo úměrné kmitočtům (čím větší kmitočet, tím menší amplituda!!) a mění se s pořadovým číslem hmoty, kde Diracův impulz síly zapůsobil, tedy úměrně ke k -tým složkám vlastních vektorů $v_{k1}, v_{k2}, v_{k3} \dots$. Vše shrnuje následující tabulka, která je vlastně rozšířeným zápisem modální matice \mathbf{V} .

	1. tvar	2. tvar	...	i -tý tvar	k -tý tvar	N -tý tvar
y_1	$v_{11}v_{k1}/\Omega_1$	$v_{12}v_{k2}/\Omega_2$...	$v_{1i}v_{ki}/\Omega_i$	$v_{1k}v_{kk}/\Omega_k$	$v_{1N}v_{kN}/\Omega_N$
y_2	$v_{21}v_{k1}/\Omega_1$	$v_{22}v_{k2}/\Omega_2$...	$v_{2i}v_{ki}/\Omega_i$	$v_{2k}v_{kk}/\Omega_k$	$v_{2N}v_{kN}/\Omega_N$
y_i	$v_{i1}v_{k1}/\Omega_1$	$v_{i2}v_{k2}/\Omega_2$...	$v_{ii}v_{ki}/\Omega_i$	$v_{ik}v_{kk}/\Omega_k$	$v_{iN}v_{kN}/\Omega_N$
y_k	v_{k1}^2/Ω_1	v_{k2}^2/Ω_2	...	v_{ki}^2/Ω_i	v_{kk}^2/Ω_k	v_{kN}^2/Ω_N
y_n	$v_{n1}v_{k1}/\Omega_1$	$v_{n2}v_{k2}/\Omega_2$...	$v_{ni}v_{ki}/\Omega_i$	$v_{nk}v_{kk}/\Omega_k$	$v_{nN}v_{kN}/\Omega_N$
y_N	$v_{N1}v_{k1}/\Omega_1$	$v_{N2}v_{k2}/\Omega_2$...	$v_{Ni}v_{ki}/\Omega_i$	$v_{Nk}v_{kk}/\Omega_k$	$v_{NN}v_{kN}/\Omega_N$

Většinou se ale jako vlastní tvary kmitů zobrazují samotné sloupcové vlastní vektory, jak je vidět na **obr.3.3a**, kde se jedná o čtyřhmotový uvolněný systém – viz dále.

Rozběh uvolněného systému

Je-li systém uvolněn od rámu, je $\Omega_1 = 0$ a v (3.45f) použijeme známou limitu

$$\lim_{\Omega_1 t \rightarrow 0} \frac{\sin \Omega_1 t}{\Omega_1 t} = 1 \quad \text{neboli} \quad \lim_{\Omega_1 \rightarrow 0} \frac{\sin \Omega_1 t}{\Omega_1} = t$$

Složky prvního vlastního vektoru \mathbf{v}_1 souvisejí s převodovými poměry podle (3.38). První sčítance v rovnicích (3.45f) se stanou lineárními funkcemi času a po dosazení z (3.38) a (3.39) je vidět, že vyjadřují rovnoměrný pohyb celého systému jakožto tuhého celku, tedy s dokonale tuhými převody:

$$y_1(t) = v_{11}v_{k1}t + \frac{v_{12}v_{k2}}{\Omega_2} \sin \Omega_2 t + \dots = \frac{P_{1k}}{m_{REDk}} t + \frac{v_{12}v_{k2}}{\Omega_2} \sin \Omega_2 t + \dots$$

$$y_k(t) = v_{k1}^2 t + \frac{v_{k2}^2}{\Omega_2} \sin \Omega_2 t + \dots = \frac{1}{m_{REDk}} t + \frac{v_{k2}^2}{\Omega_2} \sin \Omega_2 t + \dots$$

$$y_n(t) = v_{n1}v_{k1}t + \frac{v_{n2}v_{k2}}{\Omega_2} \sin \Omega_2 t + \dots = \frac{P_{nk}}{m_{REDk}} t + \frac{v_{n2}v_{k2}}{\Omega_2} \sin \Omega_2 t + \dots$$

Rychlost k -té hmoty, na které zapůsobil Diracův impulz síly, je

$$v_k(t) = \dot{y}_k(t) = \frac{1}{m_{REDk}} + v_{k2}^2 \cos \Omega_2 t + v_{k3}^2 \cos \Omega_3 t + \dots \quad (3.45g)$$

Ve snaze o klidný rozběh stroje by v (3.45g) měl zůstat pouze první člen a ostatní sčítance s kmitočty $\Omega_2, \Omega_3, \dots$, představující nežádoucí parazitní pohyby, by měly odpadnout. Konečná rychlost k -té hmoty by podle **kap.2.2** byla $v_{k0} = A/m_{REDk}$, kde časový impulz síly je $A=1$.

Poznámka: Diracův impulz vybuze systém na všech kmitočtech současně (jeho amplitudové spektrum je jednotkové - viz **obr.1.6**), v praxi je ale nerealizovatelný. K určení průběhu pohybu při reálném impulzu síly by bylo třeba řešit příslušné pohybové rovnice (3.32) a (3.33a). Zajímá-li nás ale pouze průběh pohybu po jeho ukončení, je v **kap.4** podána jednodušší metoda, založená na znalosti frekvenčního spektra impulzu, která umožňuje parazitní kmitů minimalizovat.

V pohonech výrobních strojů je nejčastěji první hnací hmotou lineární nebo rotační elektromotor, na kterém je kvůli správnému řízení proudů umístěno i měřidlo polohy. V praxi nejnepříjemnějším zdrojem informací je tedy přenosová funkce $G_{11}(s) = y_1(s)/F_1(s)$ mezi silou, resp. momentem (tedy proudem) motoru a jeho

polohou. Často se místo polohy měří zrychlení $a_1(t) = \ddot{y}_1(t)$, tj. $a_1(s) = s^2 y_1(s)$ a příslušná přenosová funkce je lépe zobrazitelná než $G_{11}(s)$:

$$G_{a_{11}}(s) = \frac{a_1(s)}{F_1(s)} = s^2 G_{11}(s) \quad (3.46)$$

Substitucí $s = j\omega$ získáme frekvenční přenos

$$G_{a_{11}}(j\omega) = -\omega^2 \sum_{i=1}^N \frac{v_{1i}^2}{-\omega^2 + c_{Di}j\omega + \lambda_i} \quad (3.46a)$$

Dále určíme jeho limitní hodnoty:

a) pro $\omega \rightarrow 0$ jsou v (3.46a) všechny sčítance nulové kromě prvního, neboť v něm je $\lambda_1 = 0$ a vychází neurčitý výraz $0/0$. Limitu zjistíme dvojnásobným použitím l'Hospitalova pravidla a vztahu (3.39):

$$G_{a_{11}}(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{-\omega^2 v_{11}^2}{-\omega^2 + c_{D1}j\omega} \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{-2\omega v_{11}^2}{-2\omega + c_{D1}j} \Big|_{\omega \rightarrow 0} = v_{11}^2 = \frac{1}{m_{RED1}} \quad (3.46b)$$

Při malých kmitočtech je tedy soustava hnací silou motoru urychlována jako celek;

b) pro $\omega \rightarrow \infty$ upravíme (3.46a) na tvar $G_{a_{11}}(j\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{-v_{1i}^2}{-1 + c_{Di}j/\omega + \lambda_i/\omega^2}$

$$\text{a po dosazení z (3.25) je } G_{a_{11}}(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = \sum_{i=1}^N v_{1i}^2 = \frac{1}{m_1} \quad (3.46c)$$

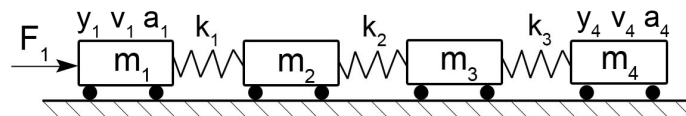
Velké kmitočty nestačí ostatní hmoty přes pružné převody sledovat (brání tomu jejich rostoucí setrvačné síly) a síla motoru urychluje pouze jeho vlastní hmotu.

Řízenou částí stroje, na jejíž poloze nejvíce záleží, je zpravidla hmota poslední a pokud je vybavena odměřováním polohy, je snadné vyšetřit přenos G_{N1} a pomocí druhé derivace i přenos $G_{a_{N1}}$. Typický průběh amplitudových frekvenčních charakteristik $|G_{a_{11}}(j\omega)|$ a $|G_{a_{N1}}(j\omega)|$ ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad: Na **obr.3.2a** je zobrazen uvolněný čtyřhmotový systém s těmito parametry:

- hmotnosti $m_1 = 0,0026$, $m_2 = 0,0018$, $m_3 = 0,0094$, $m_4 = 0,0046 \text{ kg}$, nulové tlumení;

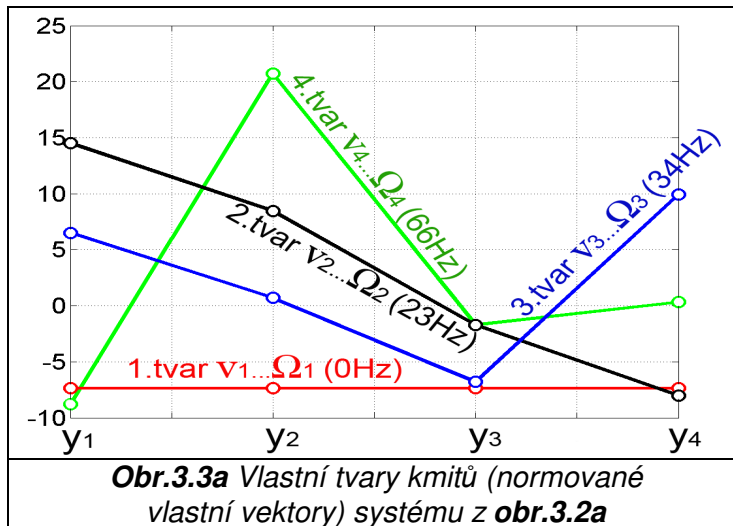
- tuhosti $k_1 = 132,7$, $k_2 = 110,6$, $k_3 = 124,4 \text{ N/m}$, vložené převody $p_1 = p_2 = p_3 = 1$.



Obr.3.2a Čtyřhmotový netlumený systém uvolněný od rámu

Poněkud neobvyklé číselné hodnoty hmot a tuhostí jsou zadány úmyslně, aby si čtenář mohl ověřit, že stejné výsledky obdrží i u reálného rotačního systému z následující **kap.4**, pokud místo jednotek hmotnosti a tuhosti $[\text{kg}]$, $[\text{N/m}]$ použije jednotky $[\text{kgm}^2]$, $[\text{Nm/rad}]$.

Normované vlastní vektory (tvary kmitů 0 Hz , 23 Hz , 34 Hz , 66 Hz) jsou vidět na **obr.3.3a**. Vložené převody mezi hmotami jsou jednotkové, takže první vlastní vektor má všechny čtyři složky shodné a první vlastní tvar kmitů pro $\Omega_1 = 0$ představuje synchronní rovnoměrný pohyb všech čtyř hmot. Amplitudová charakteristika $|G_{a_{11}}(j\omega)|$ je na **obr.3.3b** vyznačena silnou čarou. V případě nulového tlumení jsou rezonanční špičky nekonečně vysoké a nastávají při vlastních kmitočtech Ω_{2+4} ; v případě nenulového tlumení se snižují a přemísťují nepatrně vlevo (viz vztahy (2.22d)). Antirezonance nastávají poblíže kmitočtů označených symboly $\Omega_{L1,2,3}$.

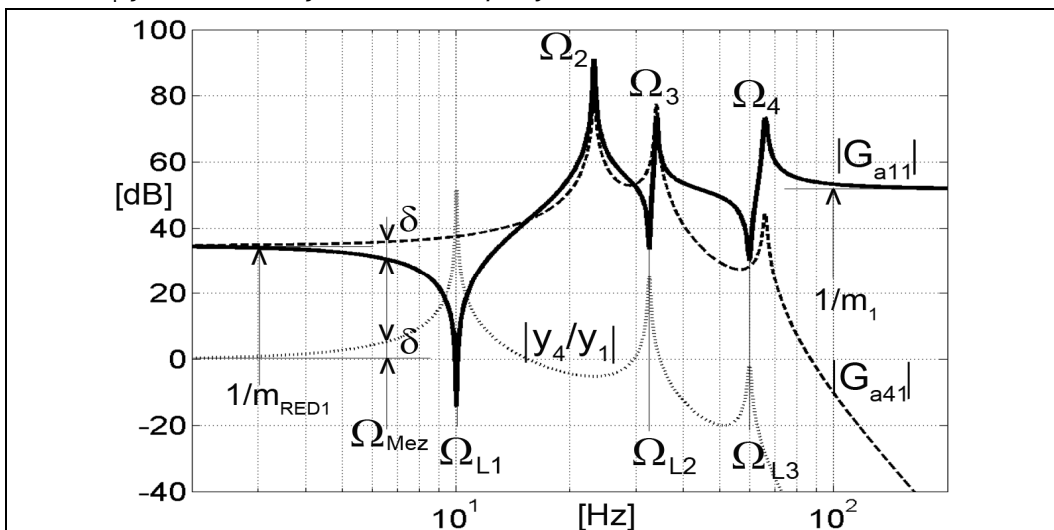


Obr.3.3a Vlastní tvary kmitů (normované vlastní vektory) systému z obr.3.2a

Zjednodušeně lze stav systému v těchto výrazných bodech charakterizovat tak, že při harmonickém průběhu budící síly motoru

- v okolí rezonančních kmitočtů stačí minimální síla motoru k jeho maximálnímu urychlení;
- při antirezonančních kmitočtech se naopak síla motoru na jeho vlastním zrychlení i dráze projevuje minimálně a většina energie vyvinuté motorem je předávána dále.

Amplitudová charakteristika $|G_{a41}(j\omega)|$ je v obrázku vyznačena čárkovaně. Je vidět, že kmitání čtvrté hmoty m_4 v okolí vlastních kmitočtů Ω_{2+4} lokálně narůstá, ale nad posledním kmitočtem Ω_4 jí síla motoru již nestačí rozpohybovat.



Obr.3.3b Amplitudové charakteristiky čtyřhmotového systému

$|G_{a11}(j\omega)|$...silně, $|G_{a41}(j\omega)|$...čárkovaně, $\frac{|G_{41}(j\omega)|}{|G_{11}(j\omega)|} = \frac{|y_4(j\omega)|}{|y_1(j\omega)|}$... tečkovaně

Přenos kinematického buzení

Vzájemný pohyb mezi první a poslední (čtvrtou) hmotou určíme z tzv. kinematického přenosu (nesoucího též název „přenos kinematického buzení“)

$$\frac{y_4(s)}{y_1(s)} = \frac{v_4(s)}{v_1(s)} = \frac{G_{41}(s)}{G_{11}(s)} \quad (3.47)$$

Antirezonanční kmitočty $\Omega_{L1,2,3}$ se na jeho amplitudové charakteristice (v obr.3.3b slabě tečkovaně) objeví naopak jako rezonance. Dosadíme-li totiž za oba přenosy ve zlomku (3.47) výrazy z (3.45e), shodné jmenovatele se vykrátí a získáme přenos mezi polohami (a stejně tak i mezi rychlostmi)

$$\frac{y_4(s)}{y_1(s)} = \frac{v_4(s)}{v_1(s)} = \frac{P_{41}(s)}{P_{11}(s)} \quad (3.47a)$$

Kořeny polynomu $P_{11}(s)$, které byly v (3.45e) nulovými body, jsou nyní ve jmenovateli a v kinematickém přenosu dělíme nulou!!

Po dosažení za $s = j\omega = 0$ do (3.47a) vychází reciprokový kinematický (statický) převod mezi motorem a poslední hmotou $v_{40}/v_{10} = 1/p_{14}$, který je v **obr.3.2a** zvolen jednotkový, takže amplitudová charakteristika v **obr.3.3b** vychází z úrovně 0dB. S narůstajícím kmitočtem se synchronní pohyb obou hmot začíná rozcházet (amplituda kmitání čtvrté hmoty prudce roste až do prvního antirezonančního kmitočtu Ω_{L1} a vzniká i fázový posuv, který zde není zobrazen). Význam kmitočtu Ω_{Mez} a veličiny δ bude vysvětlen dále.

3.4.1 Regulační pohon NC stroje

V **kap.3.2** bylo řečeno, že dynamický model pohonu stroje je možno přijmout jako seriový (obecně N - hmotový), kde první hmotou je pohyblivá část motoru, kterým se snažíme ovládat hmotu poslední, na jejíž poloze nám záleží a na kterou působí vnější zatěžující síly (u obráběcích strojů síly řezné). Dále zobecníme poznatky z předchozího čtyřhmotového příkladu a navážeme na výklad regulace u dvojhmotového modelu z **obr.3.1a,b**.

U pohonů posuvů NC obráběcích strojů se při dráhovém řízení tradičně používá tzv. kaskádní regulace, tvořená hlavní (vnější) polohovou a podřízenou (vnitřní) rychlostní zpětnou vazbou, viz blokové schéma na **obr.3.4a**:

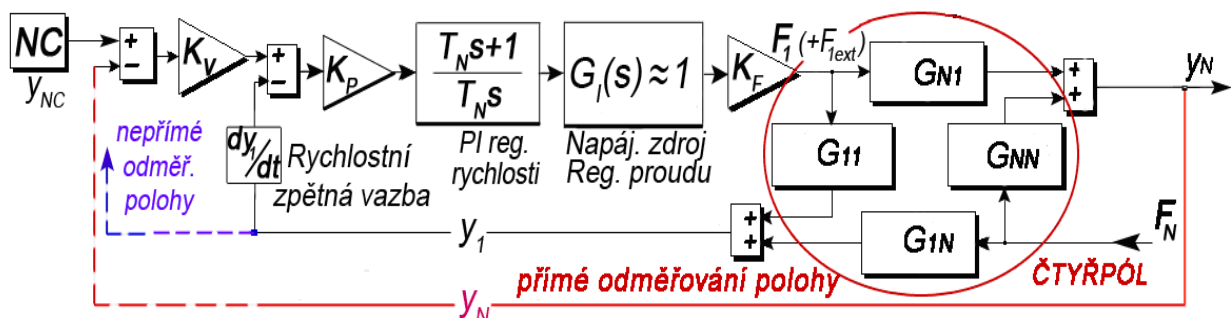
- záporná polohová zpětná vazba je uzavřena buď od polohy motoru y_1 (v **obr.3.1b** od jeho natočení φ_1) a potom jde o tzv. nepřímé odměřování, nebo lépe přímo od polohy koncové hmoty y_N (na **obr.3.1a,b** tedy od polohy y_2). U nepřímého odměřování je poloha koncové hmoty zatížena chybami převodů (např. stoupání šroubu). Rozdíl mezi požadovanou polohou z NC systému y_{NC} a polohou skutečnou (tzv. polohová odchylka) je vynásoben konstantou zesílení K_V (tzv. rychlostní konstantou) a přiveden do rychlostní zpětné vazby jakožto požadavek rychlosti. Signál aktuální rychlosti je vždy vytvořen derivací signálu polohy motoru, tj.

$$v_1 = dy_1/dt \dots \text{v Laplaceově transformaci } v_1(s) = sy_1(s).$$

Poznámka: Derivací se obecně zvýrazňují vysokofrekvenční složky signálů:

- obsahuje-li nějaká veličina y parazitní kmitavou složku $\Delta y_i = A_i \sin \omega_i t$, její amplituda po derivaci naroste ω_i -krát: $d\Delta y_i/dt = A_i \omega_i \cos \omega_i t$. Vibrace koncové hmoty y_N , způsobené např. kolísáním řezné síly při obrábění, jsou při zpětném průchodu k motoru přes vložené převody utlumeny, takže zvýrazňující efekt derivace polohy y_1 není pro stabilitu celé regulace tak škodlivý, jako u derivace y_N .

Přenos rychlostního PI regulátoru je $K_P \frac{T_{NS} s + 1}{T_{NS}}$, kde K_P ... proporcionální zesílení, T_N ... integrační časová konstanta (z něm. „Nachstellzeit“). Vlastnosti tohoto přenosu byly již zmíněny v **kap.1.17** na **obr.1.15**.



Obr.3.4a Blokové schéma zpětnovazebního řízení polohy NC stroje

Výstupním signálem regulátoru je řízen napájecí zdroj s přenosem $G_I(s)$, vybavený svou vlastní velmi rychlou regulací proudu. Proud přes tzv. silovou (u rotačního motoru momentovou) konstantu K_F určuje sílu motoru F_1 (resp. moment). Přenos zdroje s regulací proudu bývá často bez větší újmy na přesnosti matematického modelu předpokládán jednotkový, tj. $G_I(s) \approx 1$.

V pravé části blokového schématu je tzv. čtyřpól, tvořený prvky matice dynamické poddajnosti mechanické stavby pohonu, kterou jsme označili $G(s)$. Schéma je doplněno o event. přídatnou sílu na motoru F_{1ext} , která může být při seřizovacích testech regulace realizována nepřímo přídatným proudem a zmíníme ji v dalším textu.

V nejčastějším případě působí zvenku na systém pouze síla na koncové hmotě F_N , která např. u pohonu suportu NC soustruhu zahrnuje sílu řeznou, třecí ve vodicích plochách, event. i gravitační u svislého uspořádání. Roznásobením (3.44a,b) vycházejí dvě rovnice čtyřpólu:

$$\begin{cases} y_1(s) = G_{11}(s)[F_1(s) + F_{1ext}(s)] + G_{1N}(s)F_N(s) \\ y_N(s) = G_{N1}(s)[F_1(s) + F_{1ext}(s)] + G_{NN}(s)F_N(s) \end{cases} \quad \text{kde } G_{1N}(s) = G_{N1}(s) \quad (3.47b)$$

Pohon lze popsat třemi rovnicemi, z nichž první dvě jsou (3.47b) a třetí popisuje sílu motoru, danou regulačním algoritmem. Pro nepřímé odměřování polohy platí

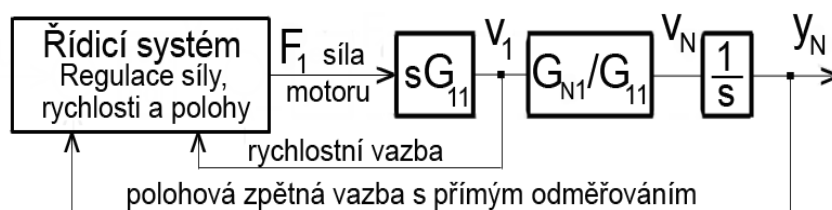
$$F_1 = [K_V(y_{NC} - y_1) - s y_1] K_P \frac{T_N s + 1}{T_N s} G_I(s) K_F \quad (3.47bb)$$

(derivace polohy dy_1/dt je v Laplaceově transformaci vyjádřena vztahem $s y_1$).

U přímého odměřování by hranatá závorka měla tvar $[K_V(y_{NC} - y_N) - s y_1]$.

Stabilita při chodu naprázdno

Při vyšetřování stability regulace stačí uvažovat odlehčený systém, tj. $F_N = 0$, takže v **obr.3.4a** ze čtyřpólu odpadají bloky G_{1N}, G_{NN} . L.obraz rychlosti motoru bude $v_1(s) = s y_1(s) = s G_{11}(s) F_1(s)$ a na rychlost N -té hmoty se dostaneme přes kinematický dynamický přenos $v_N/v_1 = G_{N1}/G_{11}$. Podle zvoleného způsobu odměřování polohy přejdeme z příslušné rychlosti na polohu čistou integrací, tj. přenosem $1/s$. Takto zjednodušené blokové schéma odlehčeného pohonu s variantou přímého odměřování je na **obr.3.4b**.



Obr.3.4b Zjednodušené schéma pohonu při chodu naprázdno (přímé odměřování)

V ideálním případě dokonale tuhého systému by rychlosti prvního a N -tého členu byly svázány pouze konstantním statickým převodem $v_{N0}/v_{10} = 1/p_{1N}$. Kmitočtová závislost kinematického přenosu $\frac{G_{N1}(j\omega)}{G_{11}(j\omega)}$ tuto jednoznačnou vazbu narušuje nejen amplitudově, ale i fázově. Příklad amplitudové frekvenční charakteristiky pro čtyřmotový systém jsme již ukázali na **obr.3.3b** slabě tečkovaně:

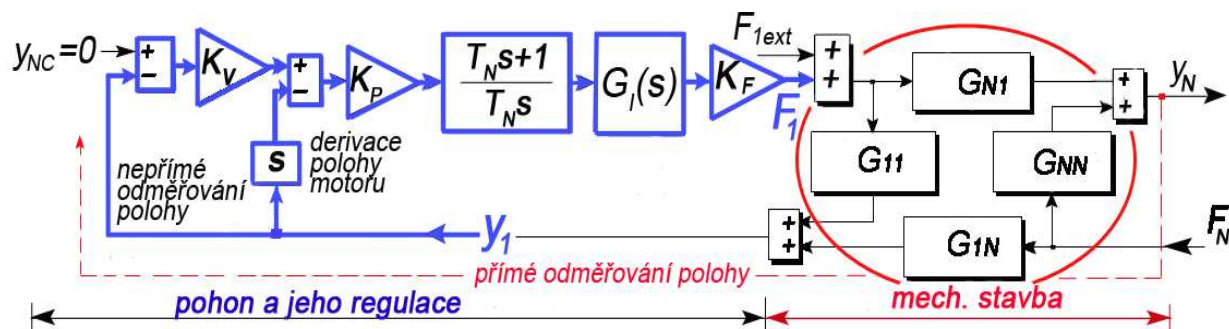
- protože polohová zpětná vazba je zavedena od poslední hmoty a vazba rychlostní od hmoty první (motoru), nad určitým kmitočtem (v obrázku označeném Ω_{mez}) se obě vazby začnou tzv. "hádat", amplitudově i fázově se rozcházet a

výsledná regulace polohy bude činit potíže. Je-li totiž signál polohy poslední hmoty y_N zatížen parazitními vibracemi s amplitudou Δy_N (např. vlivem kolísání řezné síly při frézování vícebřitou frézou), vzniká riziko, že motor bude polohovou zpětnou vazbou také rozkmitán a přes přenosovou funkci G_{N1}/G_{11} předá vibrace dále na poslední hmotu s nárůstem amplitudy δ . Takto se začne rozvíjet proces samobuzeného kmitání, kterému je nutno zabránit tak, že regulačními obvody neprojdou od motoru do stroje vyšší kmitočty než Ω_{Mez} . To znamená, že tzv. propustné pásmo regulace polohy bude maximálně Ω_{Mez} . Ze zkušeností vyplývá, že příslušná odchylka δ by neměla překročit hodnotu asi 5%, takže kmitočet Ω_{Mez} bude v **obr.3.3b** ležet dostatečně vlevo od Ω_{L1} , kde nastává první nebezpečná rezonance přenosu G_{N1}/G_{11} (resp. antirezonance přenosu G_{a11}). Propustné pásmo regulace významně závisí na velikosti konstanty K_V , takže tato je limitována hodnotou první antirezonance Ω_{L1} .

Poznámka: Zesílení K_V podstatně ovlivňuje kvalitu dráhového řízení NC stroje (přesnost, rychlost atd.) a při závěrečném seřizování pohonů na hotové mechanické konstrukci je snahou dosáhnout jeho co nejvyšší hodnoty. První antirezonanční kmitočet u snadno změřitelného přenosu G_{a11} je tedy hlavním ukazatelem hranice možností této snahy. Tradiční spory mezi pohonáři (seřizovači) a konstruktéry o podílu viny na špatných vlastnostech stroje lze rozsoudit parafrázovaným výrokem „sebelepší regulací nelze zcela vyléčit nemocnou mechanickou stavbu stroje“.

Dynamická poddajnost vícehmotového regulačního pohonu

Měření dynamické poddajnosti se zpravidla děje v klidovém stavu pohonu, takže v **obr.3.4a** můžeme položit $y_{NC}=0$, viz **obr.3.4c**. Stroj je zpravidla ve vhodném frekvenčním pásmu zatěžován externí harmonickou silou F_N a pokud není k dispozici vhodný dynamometr, je možno zatěžovat ze strany motoru silou F_{1ext} , imitovanou generováním přídavného proudu zdroje.



Obr.3.4c Upravené schéma pro výpočet dynamické poddajnosti

Dále ukážeme postup zjišťování dynamické poddajnosti u nepřímého odměřování polohy. Blokové schéma na **obr.3.4c** lze rozdělit na dvě části:

- čtyřpólem vpravo je pomocí rovnic (3.47b) popsána mechanická stavba;
- levá část zobrazuje pohon s regulací, popsáný rovnicí (3.47bb) při $y_{NC} = 0$:

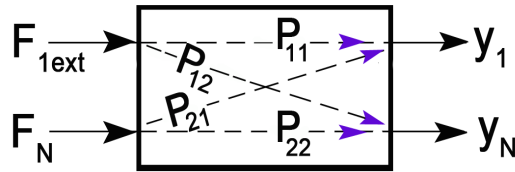
$$F_1 = -y_1(K_V + s)K_P \frac{T_{NS} + 1}{T_{NS}} G_I(s) K_F = -y_1(s)R(s) \quad (3.47c)$$

kde jsme zavedli označení $R(s)$ pro přenos mezi polohou motoru a jeho silou:

$$R(s) = -\frac{F_1(s)}{y_1(s)} = (K_V + s)K_P \frac{T_{NS} + 1}{T_{NS}} G_I(s) K_F \quad (3.47cc)$$

Z hlediska počtu vstupů (F_{1ext} a F_N) a obvykle měřitelných výstupů y_1, y_N má celý model opět charakter čtyřpólu podle **obr.3.4d** a je možno vyjádřit čtyři přenosové funkce pro čtyři možné cesty (a v technické praxi i čtyři možná měření):

$$P_{11}(s) = y_1(s)/F_{1ext}(s) \text{ a dále již stručně } P_{12} = y_N/F_{1ext}, P_{21} = y_1/F_N, P_{22} = y_N/F_N$$



Obr.3.4d Možné varianty vyjádření dynamické poddajnosti pohonu

K tomu je třeba rovnice (3.47b) řešit pro každou sílu odděleně a vždy vyloučit sílu motoru F_1 jakožto vnitřní proměnnou dosazením z (3.47c). Tyto jednoduché algebraické úpravy vynecháme a v následující tabulce uvedeme jen výchozí rovnice a výsledné přenosy.

Nepřímé odměř.	Úprava rovnic (3.47b)	Dynamická poddajnost
$F_N = 0$ $F_1 = -y_1 R$	$y_1 = G_{11}[-y_1 R + F_{1ext}]$ $y_N = G_{N1}[-y_1 R + F_{1ext}]$	$P_{11}(s) = \frac{y_1}{F_{1ext}} = \frac{G_{11}}{1 + G_{11}R}$ $P_{12}(s) = \frac{y_N}{F_{1ext}} = \frac{G_{N1}}{1 + G_{11}R}$
$F_{1ext} = 0$ $F_1 = -y_1 R$	$y_1 = -y_1 R G_{11} + G_{1N} F_N$ $y_N = -y_1 R G_{N1} + G_{NN} F_N$ <i>symetrie</i> $G_{1N} = G_{N1}$	$P_{21}(s) = \frac{y_1}{F_N} = \frac{G_{1N}}{1 + G_{11}R}$ $P_{22}(s) = \frac{y_N}{F_N} = \frac{G_{NN} + R(G_{11}G_{NN} - G_{1N}^2)}{1 + G_{11}R}$

Z hlediska přesnosti obrábění je nejzajímavější dynamická poddajnost $P_{22}(s)$, vyjadřující u pohonu posuvu NC stroje vliv řezné síly na polohu poslední hmoty, kterou je např. u soustruhu suport s nožem nebo u frézky stůl s obrobkem.

Všechny čtyři poddajnosti z tabulky seřadíme do tzv. matice poddajnosti celého pohonu $\mathbf{P}(s)$, která má některé shodné vlastnosti s maticí poddajnosti samotné mechanické stavby $\mathbf{G}(s)$, ale na rozdíl od ní má rozměr pouze 2x2:

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

- matice $\mathbf{P}(s)$ je symetrická, tj. $P_{12}(s) = P_{21}(s)$, což vyplývá ze symetrie matice poddajnosti mechanické stavby $\mathbf{G}(s)$, kde je $G_{1N}(s) = G_{N1}(s)$;
- všechny její prvky mají stejného jmenovatele $1 + G_{11}(s)R(s)$, tedy i shodné kořeny charakteristické rovnice (póly);
- dosazením prvků z tabulky a po úpravě vychází její determinant

$$\det \mathbf{P} = P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21} = \frac{G_{11}G_{NN} - G_{1N}^2}{1 + G_{11}R} \quad (3.48a)$$

Poznámky: 1) Další úpravy a možná zjednodušení prvků matice \mathbf{P} lze provést rozepsáním přenosů $G_{11} \div G_{NN}$ do tvaru zlomků a využitím shodnosti jejich jmenovatelů.

2) U přímého odměřování polohy bude platit v **obr.3.4c** čárkovaná větev a rovnice pro sílu motoru bude mít tvar

$$F_1 = -(K_V y_N + s y_1) K_P \frac{T_N s + 1}{T_N s} G_I(s) K_F$$

Další postup je stejný a poněkud složitější úpravy přenecháme čtenáři.

Dynamická poddajnost dvojhmotového regulačního pohonu

Pro dvojhmotový model mechanické stavby, který bude vyšetřován v **kap.3.5**, se přenos P_{22} zjednoduší, neboť matice $\mathbf{G}(s)$ má také rozměr 2x2 a v čitateli P_{22} bude její determinant $\det \mathbf{G}_{2hm} = G_{11}G_{22} - G_{12}^2$:

$$P_{22}(s) = \frac{y_2(s)}{F_2(s)} = \frac{G_{22}(s) + R(s) \det \mathbf{G}_{2hm}}{1 + G_{11}(s)R(s)} \quad (3.49)$$

Z (3.48a) vychází determinant matice poddajnosti celého dvojhmotového pohonu

$$\det \mathbf{P}_{2hm} = \frac{\det \mathbf{G}_{2hm}}{1 + G_{11}R} \quad (3.49a)$$

Poznámka: U netlumené dvojhmotové mechanické stavby bude odvozeno - viz (3.61),(3.62) - že determinant matice poddajnosti mechanické stavby je

$$\det \mathbf{G}_{2hm} = 1 / \text{denom}G$$

kde $\text{denom}G$ je shodný jmenovatel všech jejích čtyř přenosů. Vyjádříme-li přenosy G_{11}, G_{22} symbolicky ve tvaru zlomků

$$G_{11} = \text{num}G_{11} / \text{denom}G, \quad G_{22} = \text{num}G_{22} / \text{denom}G$$

lze výrazy (3.49) a (3.49a) upravit na tvary

$$P_{22}(s) = \frac{\text{num}G_{22} + R}{\text{denom}G + \text{num}G_{11} \cdot R}$$

$$\det \mathbf{P}_{2hm} = \frac{1}{\text{denom}G + \text{num}G_{11} \cdot R}$$

Dynamická poddajnost jednohmotového regulačního pohonu

V komentáři k **obr.3.1a,b** na **str.76** bylo naznačeno, že polohová regulace motoru se chová jako specifická pružina. Její odlišnosti od klasické pružiny lze nejlépe vysvětlit na nejjednodušším jednohmotovém modelu, který bývá uplatňován např. u pohonů posuvů s lineárními motory (viz příklad **č.2** v tabulce na **str.4**).

U jednohmotového systému je relevantní pouze poloha y_1 pohyblivé hmoty motoru m_1 a síla F_{1ext} , mající význam vnější zatěžující síly. Ve všech předchozích úvahách stačí položit $N=1$, takže v matici $\mathbf{P}(s)$ budou čtyři shodné přenosy

$$P_{11}(s) = \frac{y_1(s)}{F_{1ext}(s)} = \frac{G_{11}(s)}{1 + G_{11}(s)R(s)} \quad (3.50)$$

V blokovém schématu na **obr.3.4c** bude $F_N=0$ a čtyřpól degeneruje na jediný přenos $G_{11}(s)$, jehož tvar získáme L.transformací pohybové rovnice

$$F_1(t) + F_{1ext}(t) = m_1 \ddot{y}_1(t)$$

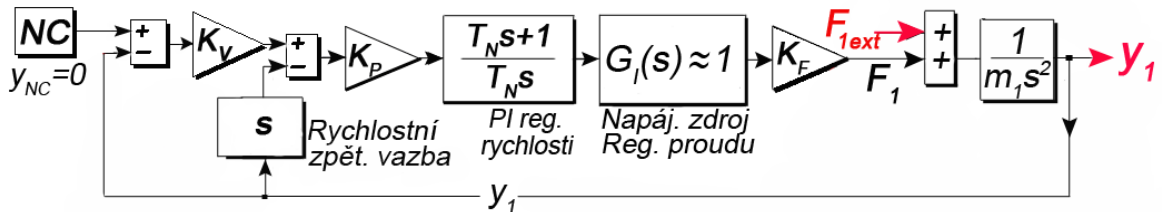
takže

$$G_{11}(s) = \frac{1}{m_1 s^2}$$

Přenos proudové regulace $G_I(s)$ ve vztahu pro $R(s)$ v (3.47cc) zjednodušíme na jedničku a po dosazení do (3.50) a úpravách vychází dynamická poddajnost jednohmotového pohonu jakožto přenos 3.řádu

$$P_{11}(s) = \frac{y_1(s)}{F_{1ext}(s)} = \frac{T_N s}{m_1 T_N s^3 + K_P K_F T_N s^2 + K_P K_F (1 + K_V T_N) s + K_V K_P K_F} \quad (3.50a)$$

Celé blokové schéma je na **obr.3.4e**.



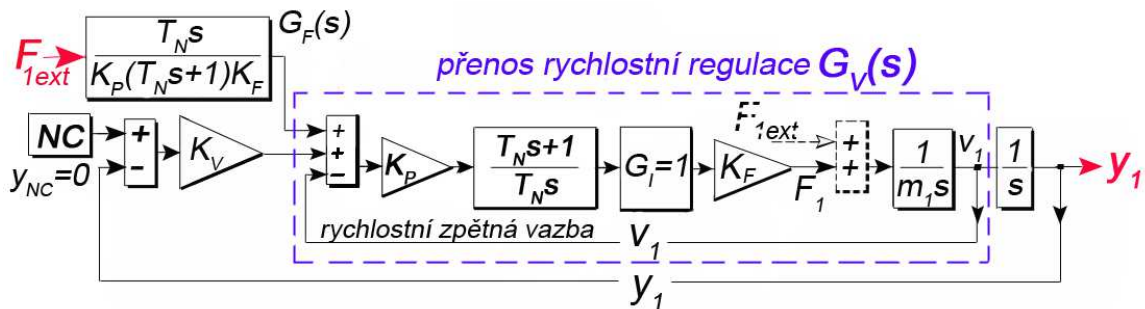
Obr.3.4e Blokové schéma polohové regulace jednohmotového systému

Pro ujasnění významu podřízené rychlostní zpětné vazby uvedeme duplicitní postup, využívající matematicky ekvivalentní úpravy blokového schématu:

- přenos $G_{11}(s)$ rozdělíme na součin $G_{11}(s) = \frac{1}{m_1 s} \cdot \frac{1}{s}$, aby bylo možno zobrazit

rychlost v_1 a získat tak bod pro zapojení rychlostní zpětné vazby, viz **obr.3.4f**;

- vstup vnější síly přemístíme z původního místa (je v **obr.3.4f** vyznačeno čárkovaně) na vstup rychlostní zpětné vazby a doplníme příslušný reciprokový přenos $G_F(s)$. Jde o podobnou úpravu, jako u pravidel **č.34** a **35** na **str.37**.

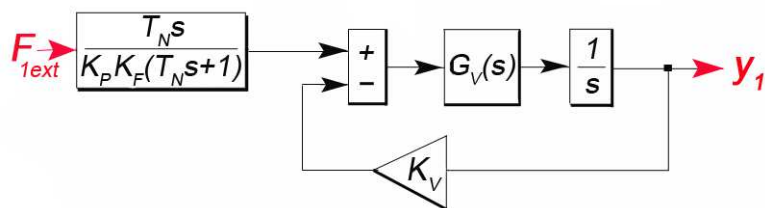


Obr.3.4f Matematicky ekvivalentní úprava schématu z **obr.3.4e**

Těmito dvěma kroky se osamostatnila celá rychlostní regulace, jejíž přenos označíme $G_V(s)$ a pomocí pravidla **č.36** na **str.37** vychází

$$G_V(s) = \frac{T_N s + 1}{\frac{m_1 T_N}{K_P K_F} s^2 + T_N s + 1} \quad (3.50b)$$

Takto vzniklo přehledné blokové schéma podle **obr.3.4g**, ve kterém je konstanta K_V umístěna v záporné zpětné vazbě (signál NC systému stále pokládáme za nulový).



Obr.3.4g Matematicky ekvivalentní úprava schématu z **obr.3.4f**

Celkový přenos (dynamická poddajnost) je

$$R_{11}(s) = \frac{y_1(s)}{F_{1ext}(s)} = \frac{T_N s}{K_P K_F (T_N s + 1)} \cdot \frac{G_V(s)}{s + K_V G_V(s)} \quad (3.50c)$$

a po dosazení z (3.50b) a úpravách nutně vychází vztah (3.50a).

Přenos rychlostní regulace je proporcionální, neboť limita $G_V(s)|_{s \rightarrow 0} = 1$. U správně seřízeného pohonu se rychlostní regulace chová podstatně rychleji než nadřazená regulace polohy (její propustné pásmo bývá až o řád vyšší), takže pro přibližné výpočty je možno předpokládat, že $G_V(s) \approx 1$ pro všechna s (ve jmenovateli (3.50b) vymizí člen s druhou mocninou s). Tím se schéma na **obr.3.4g** dále zjednoduší a dynamická poddajnost bude popsána pouze přenosem 2.řádu s reálnými póly $s_1 = -1/T_N$ a $s_2 = -K_V$:

$$P_1(s) = \frac{y_1(s)}{F_{ext}(s)} \approx \frac{T_N s}{K_P K_F (T_N s + 1)(s + K_V)} \quad (3.50d)$$

Snadno se lze přesvědčit, že tentýž výsledek obdržíme z (3.50a) po vyloučení členu s třetí mocninou s ve jmenovateli.

Charakteristickým a pro praxi velmi důležitým rysem obou vztahů (3.50a,d) je přítomnost samostatného členu $T_N s$ v čitateli, takže

$$\lim_{s \rightarrow 0} P_1(s) = 0 \quad (3.50e)$$

To je zásadní rozdíl oproti vztahům pro poddajnost mechanických systémů, kde v čitateli vždy figuruje samostatná nenulová konstanta, mající význam statické poddajnosti – viz např. (2.17). To znamená, že statická poddajnost jednohmotového regulačního pohonu v polohové zpětné vazbě je nulová (pohon se vůči konstantní vnější síle chová jako dokonale tuhý). Tato výhodná vlastnost je způsobena přítomností integrační složky v přenosu PI regulátoru rychlosti.

Rozdíly v chování mechanického systému hmota-průžina-tlumič s přenosem (2.17) a regulačního pohonu s přenosem (3.50d) jsou patrné na **obr.3.4h**. Pro výpočet byly zvoleny tyto parametry:

1) mechanický systém:

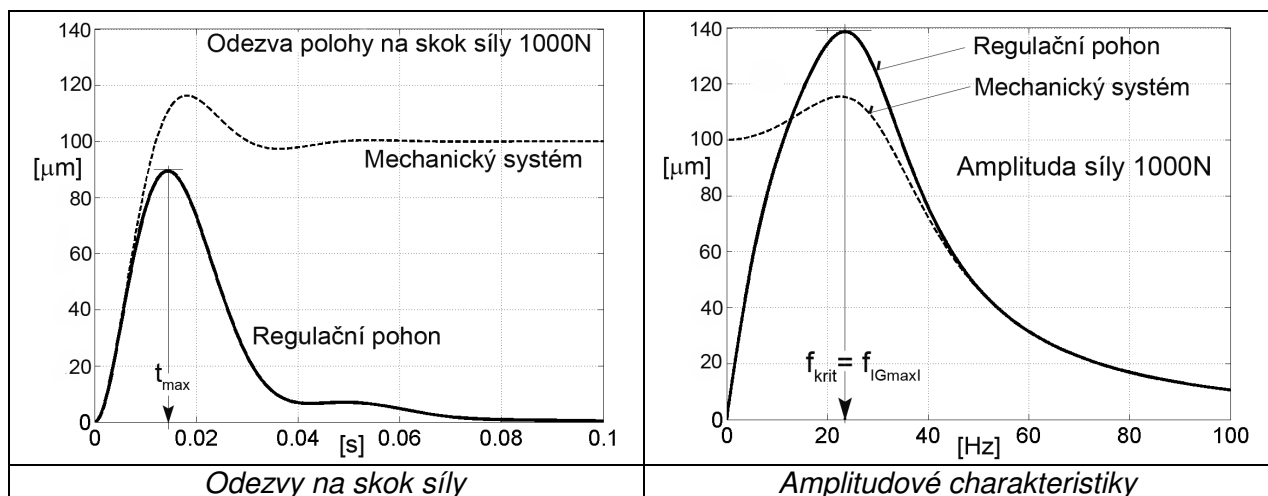
- hmotnost $m_1 = 250\text{kg}$;
- tuhost $k = 10\text{N}/\mu\text{m}$ (vlastní kmitočet $31,83\text{Hz}$);
- poměrné tlumení $\zeta = 0,5$;

2) regulační pohon posuvu s lineárním motorem u stolu NC frézky střední velikosti:

- silová konstanta motoru $K_F = 94,2\text{N}/\text{A}$;
- celková hmotnost pohyblivé části motoru se stolem $m_1 = 250\text{kg}$;
- rychlostní regulátor: $K_P = 600\text{As}/\text{m}$, integrační časová konstanta $T_N = 10\text{ms}$;
- polohový regulátor (rychlostní konstanta) $K_V = 90/\text{s}$.

Na obrázku vlevo jsou odezvy na skok vnější síly 1000N . Mechanický systém zůstává trvale vychýlen o míru $1000\text{N}/k = 100\mu\text{m}$, kdežto pohon se po přechodném vychýlení vrátí do výchozí polohy. Tím je neutralizován např. vliv konstantní řezné síly nebo pasivních odporů ve vedení.

Vpravo je amplitudová charakteristika $|G(j\omega)|$ přenosu (2.17) a $|P_1(j\omega)|$ přenosu (3.50d), opět pro amplitudu kmitání síly $\pm 1000\text{N}$.



Obr.3.4h Rozdíly v chování mechanického systému a jednohmotového regulačního pohonu

Při malých kmitočtech $\omega \rightarrow 0$ je mechanický systém vychýlován o $\pm 100\mu\text{m}$ (tj. stejně jako v případě statické zátěže), kdežto pohon stojí, neboť je díky zpětnovazebnímu řízení schopen postavit se pomalým změnám vnější síly svojí „protisilou“.

Nebezpečná (rezonanční) kmitočtová oblast maximální poddajnosti $|P_{11}(j\omega)|_{max}$ je $f_{krit} = 22,5 \div 23,5 \text{ Hz}$. U mechanického systému je dána vztahy (22d); u pohonu záleží na všech parametrech regulace a zde je vidět, že např. při frézování dvoubřitou frézou bychom se měli vyhnout otáčkám $n_{krit} = 60 \cdot 23,5/2 \approx 700/\text{min}$, kdy střídavá složka řezné síly rozkmitává stroj nejvíce. Stejně jako u mechanického systému platí, že při změně parametrů regulace maximální výkmit odezvy na skok síly a rezonanční vrchol rostou nebo klesají souhlasně a naopak s poklesem příslušného času t_{max} roste rezonanční frekvence f_{krit} . Při vysokých kmitočtech již není pohon schopen překonat setrvačné síly a amplitudová charakteristika klesá stejně jako u mechanického systému k nule.

Závěrečné poznámky k poddajnosti pohonů: 1) Odolnost vůči statické vnější síle, vyjádřenou u jednohmotové varianty rovnicí (3.50e), lze zobecnit i na vícehmotová uspořádání:

- pohon je dokonale staticky tuhý v místě, odkud je zavedena polohová zpětná vazba.

2) Dokonalá statická tuhost platí nejen pro polohu, ale i rychlost.

Předchozí obecné výpočty kmitání budou blíže objasněny na jednoduchých, ale pro obráběcí stroje typických dynamických modelech se dvěma a třemi stupni volnosti. Bude se jednat o

- **pohon vřetena přes pružný převod (např. řemen) kap.3.5;**

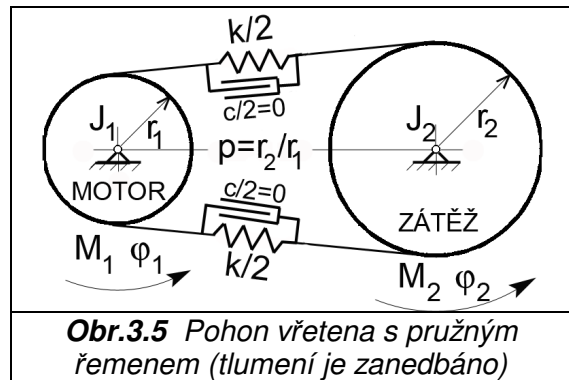
- **rovinné kmitání jedné hmoty (např. vřetena při radiálním zatížení) kap.3.6;**

- **prostorové kmitání jedné hmoty kap.3.7.**

Příslušné operace s maticemi o rozměru 2x2 (násobení, inverze, výpočet vlastních čísel a vektorů atd.) jsou ještě natolik jednoduché a přehledné, že je lze provést obecně, exaktně a tzv. jen s tužkou a papírem. U rozměrů 3x3 v kap.3.7 odkazujeme např. na program Matlab.

3.5 Dvojhmotový rotační systém

Rotační systém na **obr.3.5** bude pro větší přehlednost výpočtů uvažován jako netlumený bez zahrnutí vlivu regulace. Následující postup je možno aplikovat i na dvojhmotový lineární případ podle **obr.3.1a** po záměně příslušných rotačních veličin za translační a při dodržení základních měrových jednotek. Zajímá nás hlavně pohyb hnané hmoty J_2 (vřetena) při působení krouticího momentu motoru M_1



Obr.3.5 Pohon vřetena s pružným řemenem (tlumení je zanedbáno)

nebo momentu M_2 , který může být vyvolán např. řeznou silou při obrábění.

Označení veličin:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} \dots \text{vektor úhlů};$$

$p = r_2/r_1 = v_{10}/v_{20} \dots$ statický převod (poměr ustálených úhlových rychlostí);

$J_1, J_2 \dots$ momenty setrvačnosti hnací a hnané hmoty;

$J_{C1} = J_1 + J_2/p^2 \dots$ redukce na hnací hmotu J_1 (motor);

$J_{C2} = J_1 p^2 + J_2 = p^2 J_{C1} \dots$ redukce na hnanou hmotu J_2 ;

$k \dots$ celková tahová tuhost obou paralelních větví předepnutého řemenu;

$k_1 = r_1^2 k \dots$ torzní tuhost řemenového převodu, redukce na hnací hmotu J_1 ;

$k_2 = r_2^2 k = k_1 p^2$... torzní tuhost, redukce na hnanou hmotu J_2 .

Pohybové rovnice převedeme do maticového tvaru:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + (\varphi_1 - p\varphi_2)k_1 &= M_1(t) \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + (\varphi_2 - \varphi_1/p)k_1 p^2 &= M_2(t) \\ \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1(t) \\ \ddot{\varphi}_2(t) \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 & -p \\ -p & p^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} &= \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Pro vektor krouticích momentů jsme zachovali dřívější označení \mathbf{F} , pro matici momentů setrvačnosti označení \mathbf{M} . Snadno zjistíme, že matice \mathbf{K} je singulární, neboť má nulový determinant. Zavedeme označení pro kmitočty:

$$\Omega_M = \sqrt{k_1/J_1} \dots \text{torzní kmitočet motoru při zablokovaném vřetenu;} \quad (3.51a)$$

$$\Omega_L = \sqrt{k_2/J_2} \dots \text{kmitočet vřetena při zablokovaném motoru} \quad (3.51b)$$

(„locked motor frequency“).

Matice systému je

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = k_1 \begin{bmatrix} 1/J_1 & 0 \\ 0 & 1/J_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -p \\ -p & p^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1/J_1 & -k_1 p/J_1 \\ -k_1 p/J_2 & k_2/J_2 \end{bmatrix}$$

Její charakteristická rovnice má jeden kořen nulový:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 - \lambda\left(\frac{k_1}{J_1} + \frac{k_2}{J_2}\right) = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{k_1}{J_1} + \frac{k_2}{J_2}$$

První vlastní kmitočet volného systému je tedy nulový a druhý je

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_1}{J_1} + \frac{k_2}{J_2}} = \sqrt{\frac{k_2 J_{C1}}{J_1 J_2}} = \sqrt{\frac{k_1 J_{C2}}{J_1 J_2}} \quad \text{neboť } k_1 J_{C2} = k_2 J_{C1}. \quad (3.51c)$$

Pro kmitočty $\Omega_M, \Omega_L, \Omega$ platí v přeneseném slova smyslu „Pythagorova věta“

$$\Omega = \sqrt{\Omega_M^2 + \Omega_L^2} \quad (3.52)$$

Vlastní vektory a modální matici \mathbf{U} určíme postupným dosazením λ_1, λ_2 do rovnice

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{J_1} - \lambda & \frac{-k_1 p}{J_1} \\ \frac{-k_1 p}{J_2} & \frac{k_2}{J_2} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{bmatrix} = 0, \quad i = 1, 2$$

1) První vlastní vektor (pro kořen λ_1): $u_{11} = u_{21}p$, volíme $u_{21} = 1$

2) Druhý vlastní vektor (pro kořen λ_2): $u_{12} = u_{22} \frac{-J_2}{J_1 p}$, volíme $u_{22} = 1$

Matice vlastních vektorů je $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & \frac{-J_2}{J_1 p} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$

Dále použijeme modální transformaci podle obecného návodu počínaje **kap.3.2.1**.

Diagonální matice modálních hmotností:

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} p & 1 \\ \frac{-J_2}{J_1 p} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & \frac{-J_2}{J_1 p} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = J_{C1} \begin{bmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & \frac{J_2}{J_1} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Matice modálních tuhostí:

$$\mathbf{K}_D = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = k_1 \begin{bmatrix} p & 1 \\ -J_2 & 1 \\ J_1 p & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -p \\ -p & p^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & -J_2 \\ J_1 p & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 \left(\frac{J_{C1}}{J_1} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Normovaná modální matice:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{U} \mathbf{M}_D^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{J_{C1}}} \begin{bmatrix} p & -J_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/p & 0 \\ 0 & \sqrt{J_1/J_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{J_{C2}}} \begin{bmatrix} p & -\sqrt{J_2/J_1} \\ 1 & p\sqrt{J_1/J_2} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Spektrální matice:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \frac{k_1}{J_{C2}} \begin{bmatrix} p & 1 \\ -\sqrt{J_2/J_1} & p\sqrt{J_1/J_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -p \\ -p & p^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & -\sqrt{J_2/J_1} \\ 1 & p\sqrt{J_1/J_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_1 J_{C2}}{J_1 J_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Matice poddajnosti mechanické stavby

I když výpočty poddajnosti se dějí s maticemi rozměru pouze 2x2, namísto vztahu (3.44b) použijeme schůdnější modální transformaci, kde se v (3.45b) nabízí diagonální matice

$$\mathbf{G}_q(s) = (s^2 \mathbf{E} + \mathbf{\Lambda})^{-1} = \text{inv} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 + \Omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s^2 & 0 \\ 0 & 1/(s^2 + \Omega^2) \end{bmatrix}$$

Dosazení (3.56) do (3.45b):

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{V} (s^2 \mathbf{E} + \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{V}^T = \frac{1}{J_{C2}} \begin{bmatrix} p & -\sqrt{J_2/J_1} \\ 1 & p\sqrt{J_1/J_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/s^2 & 0 \\ 0 & 1/(s^2 + \Omega^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & 1 \\ -\sqrt{J_2/J_1} & p\sqrt{J_1/J_2} \end{bmatrix}$$

Roznásobením vyjde symetrická matice poddajnosti mechanické stavby:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{J_{C2}} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{s^2} + \frac{J_2/J_1}{s^2 + \Omega^2} & \frac{p}{s^2} - \frac{p}{s^2 + \Omega^2} \\ \frac{p}{s^2} - \frac{p}{s^2 + \Omega^2} & \frac{1}{s^2} + \frac{p^2 J_1/J_2}{s^2 + \Omega^2} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Získali jsme čtyři přenosy mezi L.obrazy samostatně působících momentů $M_1(s)$, $M_2(s)$ a úhlů $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ (tzv. obecné poddajnosti) v součtovém tvaru:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(s) \\ \varphi_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1(s) \\ M_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(s) \cdot \begin{bmatrix} M_1(s) \\ M_2(s) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} G_{11}(s) &= \frac{\varphi_1(s)}{M_1(s)} = \frac{p^2}{s^2 J_{C2}} + \frac{J_2/J_1}{J_{C2}(s^2 + \Omega^2)} \\ G_{12}(s) &= \frac{\varphi_1(s)}{M_2(s)} = G_{21}(s) = \frac{\varphi_2(s)}{M_1(s)} = \frac{p}{s^2 J_{C2}} - \frac{p}{J_{C2}(s^2 + \Omega^2)} \\ G_{22}(s) &= \frac{\varphi_2(s)}{M_2(s)} = \frac{1}{s^2 J_{C2}} + \frac{p^2 J_1/J_2}{J_{C2}(s^2 + \Omega^2)} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Poznámka: Mezi krouticím momentem a úhlem natočení setrvačnicku platí obecná pohybová rovnice $M(t) = J\ddot{\varphi}(t)$, tj. po L.transformaci $\varphi(s) = M(s)/Js^2$, takže první sčítance v jednotlivých přenosech (3.60) vyjadřují pohyb (akceleraci) celého systému jakožto tuhého celku (tj. při dokonale tuhém převodu). Druhé sčítance vyjadřují přídavné kmitání na kmitočtu Ω , způsobené poddajností pružného převodu a záporná znaménka v G_{12} a G_{21} napovídají, že oba setrvačnicku kmitají protisměrně.

Dále uvedeme přehlednější výrazy, získané uvedením na společného jmenovatele v (3.60) a použitím vztahů pro kmitočty (3.51a,b,c). Úpravy přenecháme čtenáři:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{J_1 J_2 s^2 (s^2 + \Omega^2)} \cdot \begin{bmatrix} J_2 (s^2 + \Omega_L^2) & k_1 p \\ k_1 p & J_1 (s^2 + \Omega_M^2) \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Všechny čtyři prvky symetrické matice poddajnosti mají shodný jmenovatel, pro který zavedeme stručné označení

$$\text{denom}G = J_1 J_2 s^2 (s^2 + \Omega^2) \quad (3.61a)$$

a který je polynomem 4.stupně, majícím čtyři kořeny (póly), které ve svých dvojicích odpovídají vlastním kmitočtům:

$s_{1,2} = 0$... nulový kmitočet ("nekonečně pomalá sinusovka", tj. rovnoměrný pohyb systému jako celku nebo klid);

$s_{3,4} = \pm j\Omega$... harmonický pohyb.

Determinant matice poddajnosti je

$$\det \mathbf{G} = G_{11} G_{22} - G_{12} G_{21} = \frac{1}{J_1 J_2 s^2 (s^2 + \Omega^2)} = \frac{1}{\text{denom}G} \quad (3.62)$$

Při současném působení obou momentů (např. při obrábění, kdy motor přemáhá řezný moment na vřetení) použijeme superpozici a L.obrazy časových průběhů úhlů budou (při znalosti časových průběhů momentů i jejich L.obrazů)

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= G_{11}(s)M_1(s) + G_{12}(s)M_2(s) \\ \varphi_2(s) &= G_{21}(s)M_1(s) + G_{22}(s)M_2(s) \end{aligned} \quad (3.63)$$

jak již bylo ukázáno u N -hmotového systému na **obr.3.4a**. Při experimentech s regulačními pohony má největší vypovídací schopnost (a je nejdostupnější) funkce

$$G_{11}(s) = \frac{\varphi_1(s)}{M_1(s)} = \frac{s^2 + \Omega_L^2}{J_1 s^2 (s^2 + \Omega^2)} \quad (3.64)$$

nebo při měření úhlového zrychlení též funkce

$$G_{a11}(s) = \frac{a_1(s)}{M_1(s)} = s^2 G_{11}(s) = \frac{s^2 + \Omega_L^2}{J_1 (s^2 + \Omega^2)} \quad (3.65)$$

Protože vyšetřujeme netlumený systém, chybí v pohybových rovnicích (3.51) členy s 1.derivací a v matici poddajnosti členy s 1.mocninou komplexní proměnné s , takže všechny čtyři frekvenční poddajnosti jsou po dosazení $s = j\omega$ do (3.61) reálnými funkcemi kmitočtu ω .

Na **obr.3.6** jsou vyneseny amplitudové i fázové frekvenční charakteristiky funkcí

$$G_{a11}(j\omega) = \frac{\Omega_L^2 - \omega^2}{J_1 (\Omega^2 - \omega^2)} \text{ (plné čáry), } G_{a21}(j\omega) = \frac{k_1 p}{J_1 J_2 (\Omega^2 - \omega^2)} \text{ (čárkovaně),}$$

kteří mají některé typické znaky, zmíněné již u **obr.3.3b** (obrázek platí pro $p=1$):

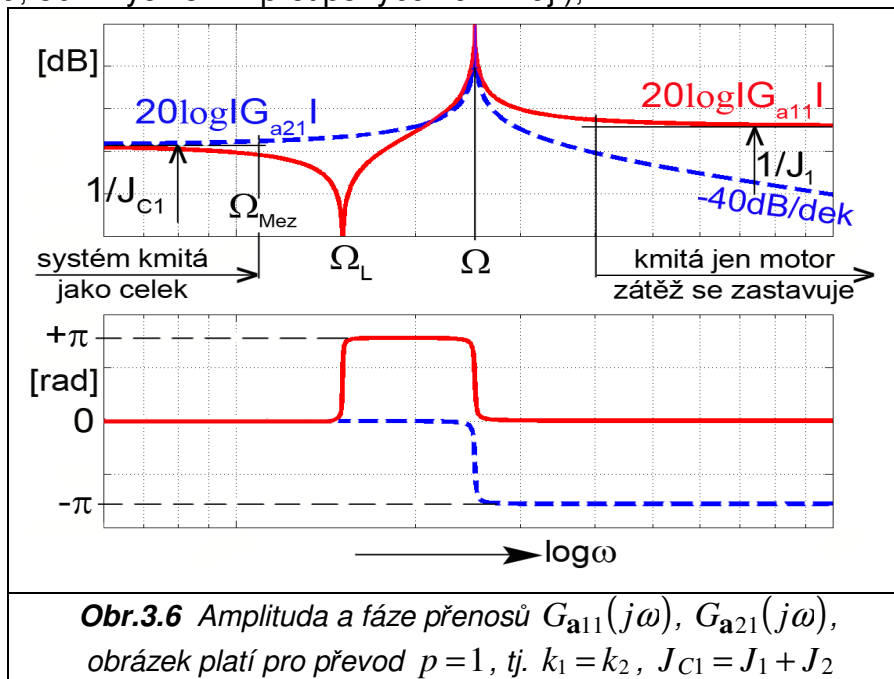
a) pro $\omega \rightarrow 0$ je $|G_{a11}(j\omega)| = 1/J_{C1}$ (při malých kmitočtech momentu motoru se soustava pohybuje jako tuhý celek);

b) pro $\omega < \Omega_L$ se obě hmoty pohybují téměř synchronně bez vzájemného fázového posuvu vůči momentu;

c) při $\omega = \Omega_L$ je pohyb motoru minimální a většinu své energie předává dále;

d) pro $\Omega_L < \omega < \Omega$ je $G_{a11}(j\omega) < 0$, takže zrychlení motoru je v protifázi s jeho momentem, fázový posuv je $+\pi$;

e) pro $\omega = \Omega$ je $|G_{a11}| \rightarrow \infty$, $|G_{a21}| \rightarrow \infty$ (k urychlování obou hmot stačí minimální úsilí motoru, obě zrychlení v protipohybu kulminují);

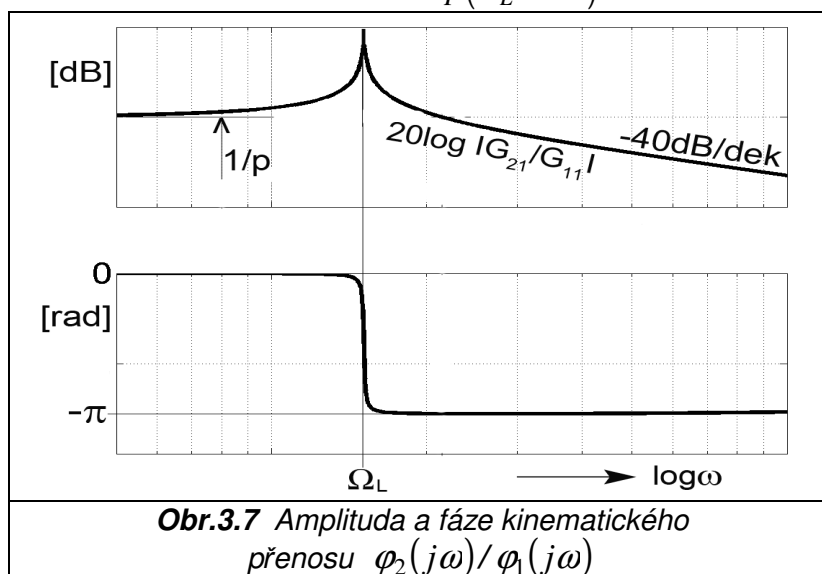


f) pro $\omega > \Omega$ je $G_{a21}(j\omega) < 0$, zrychlení druhé hmoty je v protifázi s momentem motoru, fázový posuv je $-\pi$, amplituda kmitů druhé hmoty výrazně klesá a motor ztrácí šanci druhou hmotu jakkoliv rozpohybovat;

g) pro $\omega \rightarrow \infty$ je $|G_{a11}(j\omega)| = 1/J_1$ (velké kmitočty momentu motoru nestačí druhá hmota přes pružný převod vůbec sledovat a kmitá samotný motor; jeho moment a zrychlení jsou ve fázi);

h) počínaje kmitočtem Ω_L obě hmoty kmitají v protifázi, fázový posuv jejich zrychlení (tedy i poloh) je π . Tento stav je jasnější z **obr.3.7**, kde je vynesena amplituda i fáze kinematického přenosu mezi oběma polohami

$$\frac{\varphi_2(j\omega)}{\varphi_1(j\omega)} = \frac{G_{21}(j\omega)}{G_{11}(j\omega)} = \frac{\Omega_L^2}{p(\Omega_L^2 - \omega^2)} \quad (3.66)$$



Srovnáním s **obr.3.3b** se potvrzuje, že pro dobré ovládání pohybu druhé hmoty je nutná pokud možno co nejlepší amplitudová i fázová shoda u obou přenosů G_{11}, G_{21} , která nastává v kmitočtovém pásmu do určité hodnoty Ω_{Mez} , předurčené antirezonančním kmitočtem Ω_L .

Poznámka: Stále je nutno mít na paměti, že vyšetřujeme netlumený systém. Ostré špičky na amplitudových charakteristikách a prudké změny fáze by v případě nenulového tlumení nebyly tak výrazné.

Deformace pružného převodu (redukováná např. na osu motoru) je dána rozdílem

$$\Delta\varphi(t) = \varphi_1(t) - p\varphi_2(t) \quad (3.67)$$

Použitím funkcí G_{11}, G_{21} z (3.61) vychází frekvenční přenos mezi momentem motoru a deformací převodu

$$\frac{\Delta\varphi(j\omega)}{M_1(j\omega)} = G_{11}(j\omega) - pG_{21}(j\omega) = \frac{1}{J_1(\Omega^2 - \omega^2)} \quad (3.68)$$

Tento vztah uvádíme kvůli zdůraznění rizika poškození převodu při měření frekvenční charakteristiky, neboť při momentovém buzení kmitočtem $\omega \rightarrow \Omega$ deformace převodu výrazně roste.

3.6 Rovinné kmitání jednohmotového systému

Doposud jsme se zabývali dvoj- a obecně N -hmotovým systémem, který měl N stupňů volnosti a tudíž bylo možno provést rozklad na N modálních složek. V této kapitole provedeme rozbor jednohmotového systému,

kmitajícího v rovině podle **obr.3.8** a protože stupně volnosti jsou zde dva, postup nutně povede na dvě modální souřadnice. Na rozdíl od **kap.2.8** nepůjde o ortogonální systém, ale o hmotu (hmotný bod), zavěšenou na obecně i pružinách pod obecnými úhly

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i$$

v souřadném systému x, y . Tento model bývá uplatňován u experimentů na vřetenec soustruhů i frézek při jejich radiálním zatížení a např. u frézky se svislým vřetenem odpovídají směry os x, y orientaci pohybových os křížového stolu.

Deformace pružin budeme opět vůči

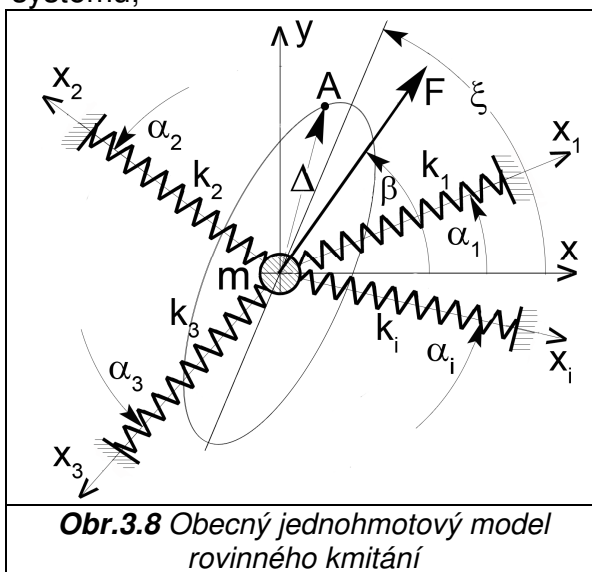
jejich délkám předpokládat tak malé, že nezpůsobí změnu úhlových orientací. I když je hmota zavěšena na více obecně šikmých pružinách, ukážeme pomocí modální analýzy, že je možno nalézt ekvivalentní náhradní ortogonální systém se dvěma navzájem kolmými pružinami i tvary kmitání.

Směrové cosiny os pružin v souřadném systému x, y :

- osa x_1 : $\cos \alpha_1, \cos(\pi/2 - \alpha_1) = \sin \alpha_1$ zkrácené označení $C1, S1$
- osa x_2 : $\cos \alpha_2, \cos(\pi/2 - \alpha_2) = \sin \alpha_2$ zkrácené označení $C2, S2$
- osa x_3 : $\cos \alpha_3, \cos(\pi/2 - \alpha_3) = \sin \alpha_3$ zkrácené označení $C3, S3$

atd.

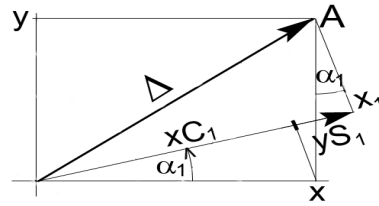
Přepočítání souřadnic z pravouhlé soustavy x, y do jednotlivých os $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ se děje pomocí transformační matice (2.28a), viz též obrázek:



$$\begin{aligned}x_1 &= xC1 + yS1 \\x_2 &= xC2 + yS2 \\x_3 &= xC3 + yS3 \quad \text{atd.}\end{aligned}$$

Osově síly v pružinách při posuvu působí síly F o míru Δ do bodu $\mathbf{A}(x, y)$ jsou

$$\begin{aligned}F_{x1} &= -k_1 x_1 = -k_1 (xC1 + yS1) \\F_{x2} &= -k_2 x_2 = -k_2 (xC2 + yS2) \\F_{x3} &= -k_3 x_3 = -k_3 (xC3 + yS3) \quad \text{atd.}\end{aligned} \quad (3.69)$$



Směrové cosiny působící síly F jsou $\cos\beta$, $\cos(\pi/2 - \beta) = \sin\beta$.

3.6.1 Statické chování

$$\begin{aligned}\text{Rovnováha sil ve směrech } x, y: & F_{x1}C1 + F_{x2}C2 + F_{x3}C3 + \dots + F\cos\beta = 0 \\ & F_{x1}S1 + F_{x2}S2 + F_{x3}S3 + \dots + F\sin\beta = 0\end{aligned} \quad (3.70)$$

Dosazením (3.69) do (3.70) vyjdou vztahy pro souřadnice bodu $\mathbf{A}(x, y)$:

$$\begin{aligned}k_1(xC1 + yS1)C1 + k_2(xC2 + yS2)C2 + k_3(xC3 + yS3)C3 + \dots &= F\cos\beta \\k_1(xC1 + yS1)S1 + k_2(xC2 + yS2)S2 + k_3(xC3 + yS3)S3 + \dots &= F\sin\beta\end{aligned}$$

Po úpravě a zavedení konstant $K_{11} \div K_{22}$ dostáváme

$$\begin{aligned}x \sum_i k_i C_i^2 + y \sum_i k_i S_i C_i &= K_{11}x + K_{12}y = F\cos\beta \\x \sum_i k_i S_i C_i + y \sum_i k_i S_i^2 &= K_{21}x + K_{22}y = F\sin\beta\end{aligned} \quad (3.71)$$

Maticový zápis obou rovnic je

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

kde matice tuhosti \mathbf{K} je symetrická, neboť $K_{12} = K_{21}$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sum_i k_i C_i^2 & \sum_i k_i S_i C_i \\ \sum_i k_i S_i C_i & \sum_i k_i S_i^2 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Snadno se přesvědčíme, že $K_{11} + K_{22} = \sum_i k_i$.

Povýšením rovnic (3.71) na druhou a jejich sečtením vychází rovnice skloněné elipsy (tzv. elipsy statické poddajnosti) ve středové poloze:

$$\left((K_{11}^2 + K_{21}^2)x^2 + 2xy(K_{11}K_{12} + K_{21}K_{22}) + (K_{12}^2 + K_{22}^2)y^2 = F^2 \right) \quad (3.74)$$

(viz **obr.3.8**, kde je elipsa přehnaně zvětšena). Úhel β při úpravách vymizel, protože nemá vliv na tvar elipsy. Podle teorie kuželoseček platí, že existuje taková pravouhlá souřadná soustava, ve které vymizí v (3.74) člen s tzv. podvojným součinem xy . Tato soustava je natočena od soustavy x, y o úhel ξ , což je právě směr hlavní poloosy elipsy a zároveň směr prvního vlastního vektoru matice \mathbf{K} . Rozměry elipsy rostou úměrně s velikostí síly F . Při změně úhlu β se bod \mathbf{A} bude pohybovat po elipse poddajnosti a při hodnotě $\beta = \xi$ (resp. $\beta = \xi \pm \pi/2$) se vektor posuvu působí síly Δ ztotožní s její nositelkou.

3.6.2 Dynamické chování

Pohybové rovnice vzniknou rozšířením (3.71) o setrvačné a viskózní tlumicí síly:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} + C_{11}\dot{x} + C_{12}\dot{y} + K_{11}x + K_{12}y &= F(t)\cos\beta \\
m\ddot{y} + C_{21}\dot{x} + C_{22}\dot{y} + K_{21}x + K_{22}y &= F(t)\sin\beta
\end{aligned}
\quad \text{a maticově}$$

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \mathbf{C} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F(t)\cos\beta \\ F(t)\sin\beta \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

kde $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = m\mathbf{E}$, \mathbf{C} a \mathbf{K} ... symetrické matice. Prvky matice viskózního tlumení \mathbf{C} získáme podobně jako u matice tuhosti (3.73), když místo tuhostí pružin k_i dosadíme koeficienty viskózního tlumení c_i v jednotlivých osách, např. $C_{11} = \sum_i c_i C_i^2$, $C_{12} = C_{21} = \sum_i c_i S_i C_i$ atd. Vlastní kmitočty Ω_1, Ω_2 zjistíme z charakteristického determinantu matice systému

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \frac{1}{m}\mathbf{K} \quad (3.75a)$$

tedy řešením kvadratické rovnice, jejíž kořeny jsou $\lambda_1 = \Omega_1^2$, $\lambda_2 = \Omega_2^2$.

Upozornění: Je třeba rozlišovat symboly pro směrové cosiny C_1, C_2, \dots, C_i (písmeno C psáno kurzívou) a prvky matice tlumení $C_{11} \div C_{22}$!!

Následně vyjádříme matici dynamické poddajnosti a s její pomocí L.obrazy pohybů hmoty v obou směrech x, y :

$$\mathbf{G}(s) = (m\mathbf{E}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F(s)\cos\beta \\ F(s)\sin\beta \end{bmatrix}$$

Poznámka: V případě, že hmota je zavěšena pouze na dvou pružinách s obecnými úhly α_1, α_2 , je ještě možný obecný exaktní výpočet matic s použitím součtových pouček pro funkce \sin, \cos . Přenecháme čtenáři ke kontrole, že determinant matice tuhosti je

$$\det\mathbf{K} = k_1 k_2 S^2 21^2, \text{ kde } S^2 1 = \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$

a všechny dílčí funkce v matici poddajnosti mají stejný jmenovatel 4.stupně $\text{den}G$:

$$\text{den}G = m^2 s^4 + m(c_1 + c_2)s^3 + [m(k_1 + k_2) + c_1 c_2 S^2 1^2] s^2 + S^2 1^2 (k_2 c_1 + k_1 c_2) s + S^2 1^2 k_1 k_2$$

$$G_{11}(s) = \frac{ms^2 + (c_1 S^2 1^2 + c_2 S^2 2^2)s + k_1 S^2 1^2 + k_2 S^2 2^2}{\text{den}G}$$

$$G_{12}(s) = G_{21}(s) = \frac{-(c_1 S^2 1 C_1 + c_2 S^2 2 C_2)s - k_1 S^2 1 C_1 - k_2 S^2 2 C_2}{\text{den}G}$$

$$G_{22}(s) = \frac{ms^2 + (c_1 C_1^2 + c_2 C_2^2)s + k_1 C_1^2 + k_2 C_2^2}{\text{den}G}$$

Směrové poddajnosti jsou

$$G_x(s) = \frac{x(s)}{F(s)} = G_{11}\cos\beta + G_{12}\sin\beta = \frac{\text{num}G_{11}\cos\beta + \text{num}G_{12}\sin\beta}{\text{den}G}$$

$$G_y(s) = \frac{y(s)}{F(s)} = G_{21}\cos\beta + G_{22}\sin\beta = \frac{\text{num}G_{21}\cos\beta + \text{num}G_{22}\sin\beta}{\text{den}G}$$

Pro $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi/2$ nutně vyjdou vztahy (2.31a,b), převedené na společného jmenovatele.

Dále uvedeme univerzálnější postup pomocí modální transformace.

3.6.3 Modální transformace

Rovnice systému (3.75) jsou na rozdíl od **kap.2.8** navzájem závislé. Odstranění závislosti znamená nalézt náhradní ortogonální systém podle **obr.2.14a**, jehož

chování vůči vnější síle (a hlavně vlastní kmitočty) se nezmění. Dále ukážeme, že tento systém, jehož obě modální souřadnice označíme q_1, q_2 , je právě tím, ve kterém v rovnici (3.74) vymizí člen s podvojným součinem xy .

Transformace do modálních souřadnic má tvar

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \text{ kde } \mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

je modální matice, složená z normovaných vlastních vektorů matice systému \mathbf{A} . Protože matice hmotnosti je pouze m -násobkem jednotkové matice, vyplývá ze vztahu (3.17a) podmínka kolmosti obou vlastních vektorů \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 , tj.

$$v_{11}v_{12} + v_{21}v_{22} = 0 \quad \text{neboli} \quad v_{21}/v_{11} = -v_{12}/v_{22} \quad (3.76)$$

Vektor modálních sil je

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{V}^T \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F(t)\cos\beta \\ F(t)\sin\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11}\cos\beta + v_{21}\sin\beta \\ v_{12}\cos\beta + v_{22}\sin\beta \end{bmatrix} F(t) \quad (3.77)$$

Předpokládáme, že u původního systému bylo tlumení proporcionální (pozor: nezaměňovat koeficient β ve vztahu (3.29d) s úhlem nositelky síly F !!), takže po modální transformaci vznikne diagonální matice tlumení \mathbf{C}_D s prvky c_{D1}, c_{D2} . Pro L.obrazy pohybů obou modálních souřadnic platí podle (3.45)

$$\mathbf{q}(s) = \mathbf{G}_q(s)\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + c_{D1}s + \lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2 + c_{D2}s + \lambda_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11}\cos\beta + v_{21}\sin\beta \\ v_{12}\cos\beta + v_{22}\sin\beta \end{bmatrix} F(s)$$

a po roznásobení vycházejí rovnice, popisující pohyby dvou nezávislých subsystémů s jednotkovými hmotnostmi a tuhostmi λ_1, λ_2 (viz **obr.3.8a**):

$$q_1(s) = \frac{v_{11}\cos\beta + v_{21}\sin\beta}{s^2 + c_{D1}s + \lambda_1} F(s) \quad (3.78)$$

$$q_2(s) = \frac{v_{12}\cos\beta + v_{22}\sin\beta}{s^2 + c_{D2}s + \lambda_2} F(s)$$

Pohyby v geometrických souřadnicích jsou

$$\begin{cases} x = v_{11}q_1 + v_{12}q_2 \\ y = v_{21}q_1 + v_{22}q_2 \end{cases} \quad (3.79)$$

Sloučením (3.78) a (3.79) získáme směrové poddajnosti v tzv. „modálním tvaru“

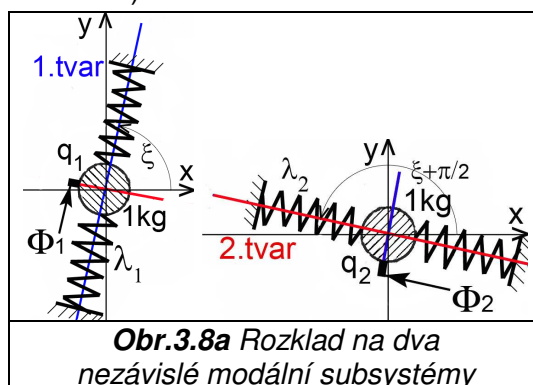
$$\begin{cases} G_x(s) = \frac{x(s)}{F(s)} = v_{11} \frac{v_{11}\cos\beta + v_{21}\sin\beta}{s^2 + c_{D1}s + \lambda_1} + v_{12} \frac{v_{12}\cos\beta + v_{22}\sin\beta}{s^2 + c_{D2}s + \lambda_2} \\ G_y(s) = \frac{y(s)}{F(s)} = v_{21} \frac{v_{11}\cos\beta + v_{21}\sin\beta}{s^2 + c_{D1}s + \lambda_1} + v_{22} \frac{v_{12}\cos\beta + v_{22}\sin\beta}{s^2 + c_{D2}s + \lambda_2} \end{cases} \quad (3.80)$$

Pohyb v každé ze souřadnic x, y se skládá ze dvou příspěvků od modálních souřadnic q_1, q_2 (tvarů kmitání) s kmitočty

$$\Omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \Omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$$

Konstanty λ_1, λ_2 zde mají význam tuhostí, neboť hmotnost je po modální transformaci jednotková!! Úhlovou orientaci ξ_1 první souřadnice q_1 zjistíme podílem prvních sčítanců v (3.80):

$$\text{tg } \xi_1 = v_{21}/v_{11}$$



To je ale právě vztah pro směr prvního vlastního vektoru. Z podílu druhých sčítanců zjistíme, že druhá souřadnice q_2 má směr druhého vlastního vektoru, tj. $tg \xi_2 = v_{22}/v_{12}$ a vzhledem k (3.76) platí

$$\xi_2 = \xi_1 + \pi/2$$

Zbývá dokázat, že úhel prvního vlastního vektoru ξ_1 je totožný s úhlem ξ hlavní poloosy elipsy poddajnosti. Z (3.75a) je ale okamžitě zřejmé, že směry vlastních vektorů matic \mathbf{A} a \mathbf{K} jsou shodné, tj. $\xi = \xi_1$. Směry obou vlastních tvarů kmitání leží na hlavní a vedlejší poloose elipsy poddajnosti. Lze tedy psát

$$tg \xi = \frac{\sin \xi}{\cos \xi} = \frac{v_{21}}{v_{11}}, \quad tg(\xi + \pi/2) = \frac{\cos \xi}{-\sin \xi} = \frac{v_{22}}{v_{12}}$$

a vzájemným přiřazením čitatelů i jmenovatelů můžeme vyjádřit jeden možný tvar modální matice

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{bmatrix}$$

Poznámka: Jde o výraz pro transformační matici \mathbf{T} v (2.28) pro $\alpha = \xi$.

Normováním podle (3.21) vyjde

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} \frac{\cos \xi}{\sqrt{m}} & -\frac{\sin \xi}{\sqrt{m}} \\ \frac{\sin \xi}{\sqrt{m}} & \frac{\cos \xi}{\sqrt{m}} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Dosazením z (3.81) do (3.80) a po úpravách vyjdou směrové dynamické poddajnosti v názornějším tvaru, než v (3.80):

$$\begin{aligned} G_x(s) &= \frac{x(s)}{F(s)} = \frac{\cos \xi \cdot \cos(\beta - \xi)}{ms^2 + m c_{D1}s + m \lambda_1} - \frac{\sin \xi \cdot \sin(\beta - \xi)}{ms^2 + m c_{D2}s + m \lambda_2} = G1_x(s) + G2_x(s) \\ G_y(s) &= \frac{y(s)}{F(s)} = \frac{\sin \xi \cdot \cos(\beta - \xi)}{ms^2 + m c_{D1}s + m \lambda_1} + \frac{\cos \xi \cdot \sin(\beta - \xi)}{ms^2 + m c_{D2}s + m \lambda_2} = G1_y(s) + G2_y(s) \end{aligned} \quad (3.82)$$

Oba výrazy se shodují se směrovými poddajnostmi ortogonálního systému (2.31a,b), který má hmotu m , tuhosti $m \lambda_1, m \lambda_2$ a je natočen o úhel $\alpha = \xi$. Poměrná tlumení v obou navzájem kolmých směrech jsou $\zeta_1 = c_{D1}/2\Omega_1$ a $\zeta_2 = c_{D2}/2\Omega_2$, viz též (3.31b). Stejně jako v **kap.2.8.2** je možno odvodit přenos přímé dynamické poddajnosti mezi silou a výchylkou ve směru nositelky síly. Dosazením z (3.82) do vztahu

$$\Delta_F(s) = x(s)\cos\beta + y(s)\sin\beta$$

vychází modifikovaná rovnice (2.31c):

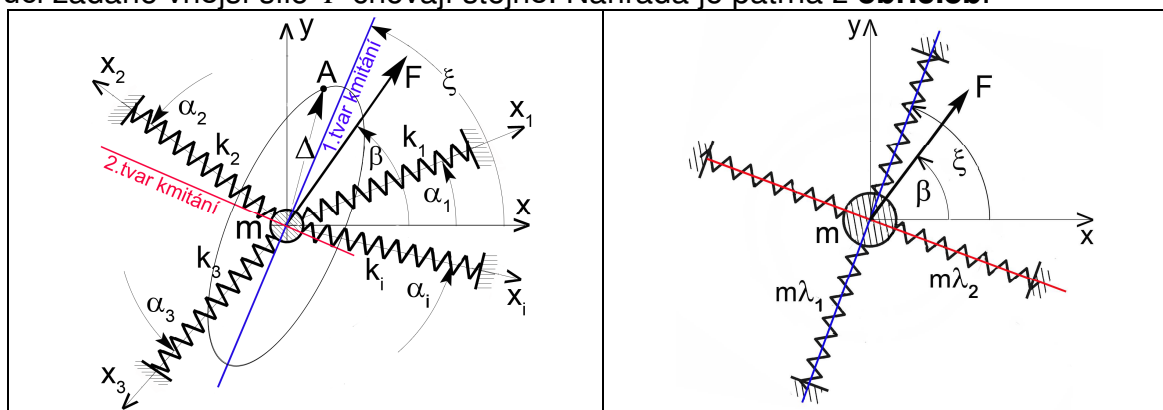
$$G_F(s) = \frac{\Delta_F(s)}{F(s)} = \frac{\cos^2(\beta - \xi)}{ms^2 + m c_{D1}s + m \lambda_1} + \frac{\sin^2(\beta - \xi)}{ms^2 + m c_{D2}s + m \lambda_2} = G1_F(s) + G2_F(s) \quad (3.82a)$$

Pro $s=0$ se opět vracíme k rovnici (2.24) pro přímou statickou poddajnost, kterou jsme odvodili pomocí Castiglianovy věty.

Shrnutí

Pomocí modální transformace bylo dokázáno, že rovinný kmitavý systém s hmotným bodem o hmotnosti m a obecně i šikmými pružinami o tuhostech k_1, k_2, \dots, k_i je možno nahradit ortogonálním systémem s toutéž hmotností, stejnými vlastními kmitočty $\sqrt{\lambda_{1,2}} = \Omega_{1,2}$, tuhostmi $m \lambda_{1,2}$ a poměrnými útlumy $\zeta_{1,2} = c_{D1,2}/2\Omega_{1,2}$. Nový systém je vůči základnímu souřadnému systému x, y

natočen o úhel prvního vlastního vektoru ξ původní matice tuhosti. Oba systémy se vůči zadané vnější síle F chovají stejně. Náhrada je patrná z **obr.3.8b**.



Obr.3.8b Původní obecný (vlevo) a náhradní ortogonální systém (vpravo) (elipsa statické poddajnosti je zvětšena)

Takto jsme se vrátili k výpočtům ortogonálního systému v **kap.2.8** včetně vytvoření polárních diagramů z **obr.2.14b, 2.15 a 2.16c**.

Vztahy (3.82) a (3.82a) se shodují s (2.31a,b,c) a všechny jsou součtem poddajností dvou dílčích modálních subsystémů, jejichž reálné a imaginární frekvenční charakteristiky lze sčítat. Např. pro poddajnost G_F platí

$$\operatorname{Re}G_F(j\omega) = \operatorname{Re}G_{1F}(j\omega) + \operatorname{Re}G_{2F}(j\omega)$$

$$\operatorname{Im}G_F(j\omega) = \operatorname{Im}G_{1F}(j\omega) + \operatorname{Im}G_{2F}(j\omega)$$

Pozor: U frekvenčních přenosů (a obecně u všech komplexních čísel) lze číselně sčítat pouze jejich reálné a imaginární složky, nikoliv absolutní hodnoty, neboť tam hrají roli fázové posuvy a je možno sčítat jen vektorově!!!

Pomocí významných bodů na změřených frekvenčních charakteristikách lze postupem z **obr.2.9, 2.10, 2.13** určit kmitočty, tlumení, tuhosti atd.

V další kap.3.7 případ rovinného kmitání zobecníme a přidáme třetí prostorovou souřadnici. Náročnější čtenář může jejím studiem začít a ke kap.3.6 se vrátit jako ke speciálnímu zjednodušenému případu.

3.7 Prostorové kmitání jednohmotového systému

Úvodní poznámky: 1) V této kapitole nalezne čtenář některé pojmy a analogie s obecnými problémy prostorové napjatosti v teorii pružnosti, na něž v dalším textu příležitostně upozorníme.

2) Předchozí případ rovinného kmitání se dvěma stupni volnosti vedl na dva nezávislé modální subsystémy. Je logické, že případ kmitání jedné hmoty v trojrozměrném prostoru povede na tři modální souřadnice s příslušnými maticemi rozměru 3×3 . Intuitivně lze vytušit, že namísto elipsy u rovinného případu dospějeme nyní k elipsoidu statické poddajnosti, jehož tři hlavní osy budou shodné se třemi osami q_1, q_2, q_3 modálních souřadnic.

Na **obr.3.9** je hmota m zavěšena na obecném počtu i pružin o tuhostech k_i , jejichž osy mají vůči základnímu souřadnému systému x, y, z směry, dané sloupcovými vektory směrových cosinů

$$\mathbf{C}_i = [C_{ix} \ C_{iy} \ C_{iz}]^T \quad (3.82b)$$

$$\mathbf{C}_i^T \mathbf{C}_i = C_{ix}^2 + C_{iy}^2 + C_{iz}^2 = 1$$

Sloupcový vektor směrových cosinů nositelky vnější síly F je

$$\mathbf{C}_F = [C_{Fx} \ C_{Fy} \ C_{Fz}]^T \quad (3.82c)$$

$$\mathbf{C}_F^T \mathbf{C}_F = C_{Fx}^2 + C_{Fy}^2 + C_{Fz}^2 = 1$$

Hmota m (působíště síly F) se posune z bodu $(0,0,0)$ do bodu \mathbf{A} , jehož souřadnice vyjádříme sloupcovým vektorem

$$\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$$

Pro všechny možné směry síly určité konstantní velikosti vyplní body \mathbf{A} plochu statické poddajnosti, jejíž tvar se pokusíme zjistit.

3.7.1 Statické chování

Osová deformace každé pružiny je dána skalárním součinem

$$\delta_i = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{C}_i = xC_{ix} + yC_{iy} + zC_{iz}$$

a její osová síla je $F_i = k_i \delta_i = k_i \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{C}_i = k_i (xC_{ix} + yC_{iy} + zC_{iz})$

Statická rovnováha na hmotě m v jednotlivých osách je vyjádřena rovnicemi

- v ose x : $\sum_i F_i C_{ix} = FC_{Fx} \dots \sum_i k_i (xC_{ix}^2 + yC_{iy}C_{ix} + zC_{iz}C_{ix}) = FC_{Fx}$

- v ose y : $\sum_i F_i C_{iy} = FC_{Fy} \dots \sum_i k_i (xC_{ix}C_{iy} + yC_{iy}^2 + zC_{iz}C_{iy}) = FC_{Fy}$

- v ose z : $\sum_i F_i C_{iz} = FC_{Fz} \dots \sum_i k_i (xC_{ix}C_{iz} + yC_{iy}C_{iz} + zC_{iz}^2) = FC_{Fz}$

Maticový zápis rovnic je

$$\begin{bmatrix} \sum_i k_i C_{ix}^2 & \sum_i k_i C_{iy}C_{ix} & \sum_i k_i C_{iz}C_{ix} \\ \sum_i k_i C_{ix}C_{iy} & \sum_i k_i C_{iy}^2 & \sum_i k_i C_{iz}C_{iy} \\ \sum_i k_i C_{ix}C_{iz} & \sum_i k_i C_{iy}C_{iz} & \sum_i k_i C_{iz}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{Fx} \\ C_{Fy} \\ C_{Fz} \end{bmatrix} F \quad (3.83)$$

Zavedeme stručné označení

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{Fx} \\ C_{Fy} \\ C_{Fz} \end{bmatrix} F \quad (3.84)$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{C}_F F$$

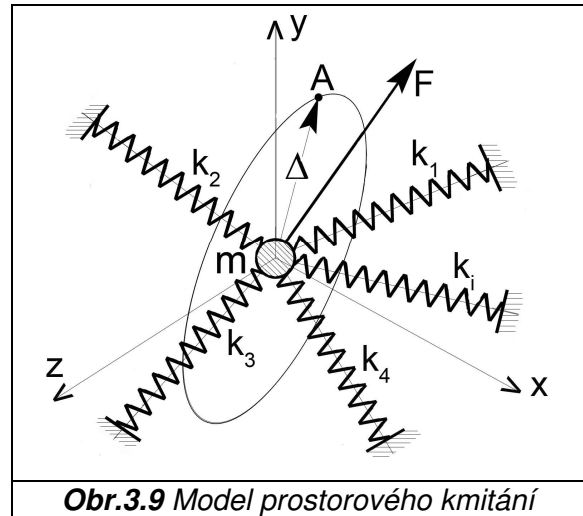
Matice tuhosti je symetrická: $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$, $\mathbf{K}\mathbf{K}^T = \mathbf{K}^2$, $K_{12} = K_{21}$, $K_{13} = K_{31}$, $K_{23} = K_{32}$.
Kromě toho platí, že její stopa je $\text{St}\mathbf{K} = K_{11} + K_{22} + K_{33} = \sum_i k_i$.

Poznámka: Množina bodů $\mathbf{A}(x, y, z)$ je prostorovou plochou, jejíž tvar bychom mohli z (3.84) zjistit opakovaným použitím Cramerova pravidla, což je ale zdlouhavé a nepohodlné:

$$x = \frac{\det \mathbf{K}_x}{\det \mathbf{K}}, \quad y = \frac{\det \mathbf{K}_y}{\det \mathbf{K}}, \quad z = \frac{\det \mathbf{K}_z}{\det \mathbf{K}}, \quad \text{kde determinanty v čitatelích jsou}$$

$$\det \mathbf{K}_x = F \begin{vmatrix} C_{Fy} & K_{12} & K_{13} \\ C_{Fz} & K_{22} & K_{23} \\ C_{Fz} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix}, \quad \det \mathbf{K}_y = F \begin{vmatrix} K_{11} & C_{Fx} & K_{13} \\ K_{21} & C_{Fy} & K_{23} \\ K_{31} & C_{Fz} & K_{33} \end{vmatrix}, \quad \det \mathbf{K}_z = F \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & C_{Fx} \\ K_{21} & K_{22} & C_{Fy} \\ K_{31} & K_{32} & C_{Fz} \end{vmatrix}$$

Pro výpočet souřadnic je nutno zadávat směrové cosiny síly v prostorovém úhlu 4π steradiánů: $x = f(C_{Fx}, C_{Fy}, C_{Fz})$, $y = f(C_{Fx}, C_{Fy}, C_{Fz})$, $z = f(C_{Fx}, C_{Fy}, C_{Fz})$.



Rychlejší řešení rovnice (3.84):

- provedeme její transpozici: $\mathbf{x}^T \mathbf{K}^T = F \mathbf{C}_F^T$

- obě rovnice vynásobíme: $\mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = F^2 \mathbf{C}_F^T \mathbf{C}_F$ a po úpravě vychází rovnice plochy druhého stupně (tzv. Cauchyho kvadriky), obsahující kvadratickou formu

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K}^2 \mathbf{x} = F^2 \quad (3.84a)$$

Druhou mocninou symetrické matice tuhosti je rovněž symetrická matice

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (3.84b)$$

Jejími prvky jsou:

$$a_{11} = K_{11}^2 + K_{12}^2 + K_{13}^2, \quad a_{22} = K_{12}^2 + K_{22}^2 + K_{23}^2, \quad a_{33} = K_{13}^2 + K_{23}^2 + K_{33}^2$$

$$a_{12} = K_{11}K_{12} + K_{12}K_{22} + K_{13}K_{23}$$

$$a_{13} = K_{11}K_{13} + K_{12}K_{23} + K_{13}K_{33}$$

$$a_{23} = K_{12}K_{13} + K_{22}K_{23} + K_{23}K_{33}$$

Roznásobením (3.84a) vychází rovnice kvadriky v implicitní podobě $f(x, y, z) = 0$:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2(a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz) + a_{44} = 0 \quad (3.84c)$$

kde jsme zavedli označení $a_{44} = -F^2$.

Úplnou klasifikaci kvadrik podal **Augustin Louis Cauchy** (1789÷1857) a bez důkazu uvádíme, že v našem případě jsou splněny následující Cauchyho podmínky pro obecně skloněný nerotační elipsoid ve středové poloze:

$$\text{- tzv. velký determinant je záporný: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} < 0$$

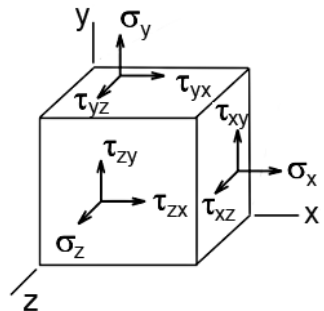
$$\text{- tzv. malý determinant je nenulový: } \det \mathbf{K}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{- a dále } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \cdot \det \mathbf{K}^2 > 0$$

Pro všechny možné směry konstantní síly F v prostorovém úhlu 4π steradiánů vyplní body $\mathbf{A}(x, y, z)$ plochu statické poddajnosti, kterou je obecně skloněný nerotační elipsoid.

Analogie s prostorovou napjatostí v teorii pružnosti

Čtenář s větší dávkou obrazotvornosti si může představit nekonečně malý prvek hmotného tělesa (hmotný bod), zavěšený na nekonečném množství v prostoru rovnoměrně úhlově orientovaných shodných pružin. Tato představa se blíží k problému prostorové napjatosti homogenního tělesa a vidíme zde určitou podobu matice tuhosti \mathbf{K} (včetně symetrie) s tzv. tenzorem napětí \mathbf{T}_σ , který popisuje statické namáhání v určitém bodě tělesa ve třech navzájem kolmých řezech při zadané konstantní síle:



The diagram shows a 3D rectangular element in a Cartesian coordinate system with axes x, y, and z. On the faces of the element, various stress components are shown: normal stresses $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ and shear stresses $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$.

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.85a)$$

Z teorie pružnosti je známo, že při znalosti tohoto tenzoru je rozložení napětí v prostoru dáno obecnou rovnicí 2.stupně, která popisuje tzv. směrovou plochu:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{T}_\sigma \mathbf{x} = \pm 1 \quad (3.85b)$$

$$\sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2(\tau_{xy} xy + \tau_{xz} xz + \tau_{yz} yz) = \pm 1 \quad (3.85c)$$

Pokud je na pravé straně kladné znaménko, je směrovou plochou obecně skloněný nerotační elipsoid ve středové poloze. Jeho hlavní poloosy mají směr vlastních vektorů $\mathbf{u}_{1,2,3}$ matice \mathbf{T}_σ , které vyhovují rovnici

$$\mathbf{T}_\sigma \mathbf{u} = \sigma \mathbf{u} \quad (3.85d)$$

Smyková napětí jsou sdružená (tj. $\tau_{ij} = \tau_{ji}$) a lze najít takovou soustavu tří pravouhlých souřadnic x_1, y_1, z_1 , ve které smyková napětí v (3.85a) vymizí a tenzor získá podobu diagonální matice pouze s normálovými (hlavními) napětími $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Rovnice (3.85c) se zjednoduší na tvar

$$\frac{x_1^2}{1/\sigma_1} + \frac{y_1^2}{1/\sigma_2} + \frac{z_1^2}{1/\sigma_3} = +1$$

a hlavní poloosy elipsoidu, mající velikosti $\sqrt{1/\sigma_1}, \sqrt{1/\sigma_2}, \sqrt{1/\sigma_3}$, se ztotožní s novými souřadnými osami x_1, y_1, z_1 , ve kterých zároveň leží vektory hlavních napětí. Podle teorie pružnosti jsou hlavní napětí $\sigma_{1,2,3}$ vlastními čísly matice \mathbf{T}_σ , neboli kořeny kubické rovnice

$$\det(\mathbf{T}_\sigma - \sigma \mathbf{E}) = 0 \quad (3.85e)$$

Srovnáním rovnic (3.84a,c) s (3.85b,c) vidíme analogii matice \mathbf{K}^2 s tenzorem napětí \mathbf{T}_σ . Je ale nutno zdůraznit, že směry vlastních vektorů matice \mathbf{T}_σ závisí na směru působící síly, kdežto u matice \mathbf{K} jsou dány tuhostmi a úhlovými orientacemi pružin.

Lze dokázat, že s umocněním matice se umocní i vlastní čísla, ale vlastní vektory se nezmění, takže směry vlastních vektorů matic \mathbf{K}, \mathbf{K}^2 jsou shodné. Ukážeme později, že obdobou nové souřadné soustavy x_1, y_1, z_1 je pravouhlá soustava modálních souřadnic q_1, q_2, q_3 , jejíž osy mají směry vlastních vektorů matice tuhosti z (3.84).

3.7.2 Dynamické chování

Pohybová rovnice pro hmotu m je

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{C}_F F(t) \quad (3.86)$$

Opět předpokládáme proporcionální tlumení s maticí $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$, jejíž prvky jsou $C_{11} \div C_{33}$:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{Fx} \\ C_{Fy} \\ C_{Fz} \end{bmatrix} F(t)$$

Upozornění: V dalším textu je stále třeba rozlišovat symboly pro směrové cosiny $C_{ix,y,z}$, $C_{Fx,y,z}$ (písmeno C je psáno kurzívou) od označení prvků matice tlumení $C_{11} \div C_{33}$!!

Stanovení vlastních čísel matice systému \mathbf{A} (tedy i kmitočtů) je na rozdíl od případu rovinného kmitání v **kap.3.6** obtížné (je nutné řešit kubickou rovnici) a přímý výpočet přenosu dynamické poddajnosti, vyžadující inverzi matice o rozměru 3×3 , je nepohodlný. Dále naznačíme univerzální cestu, kterou je použití modální transformace, nejlépe s pomocí programu Matlab.

3.7.3 Modální transformace

Postup je podobný jako v **kap.3.6.3**. Symetrická matice systému o rozměru 3×3 je $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \frac{1}{m}\mathbf{K}$, její tři vlastní čísla (kvadráty vlastních kmitočtů) jsou $\lambda_{1,2,3}$ a normovaná modální matice

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}$$

obsahuje tři sloupcové vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, pro které platí podle (3.17a) ortogonalita přes hmotnost. Protože pracujeme pouze s jednou hmotou, lze v rovnici krátit, takže skalární součin každých dvou různých vektorů $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ je nulový:

$$v_{1i}v_{1j} + v_{2i}v_{2j} + v_{3i}v_{3j} = 0 \quad (3.87)$$

Tím je splněna podmínka vzájemné kolmosti všech tří vlastních vektorů, což jsou zároveň směry tří hlavních os výše zmíněného elipsoidu statické poddajnosti.

Modální transformaci provedeme substitucí $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{q}$, tj.
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

a rovnice (3.86) přejde na diagonalizovaný tvar

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_D\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}^T\mathbf{C}_F\mathbf{F}(t) \quad (3.88)$$

s jednotkovou maticí \mathbf{E} a diagonálními maticemi $\mathbf{C}_D = \mathbf{V}^T\mathbf{C}_V$, $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V}$. Prvky matice \mathbf{C}_D označíme c_{D1}, c_{D2}, c_{D3} a získáme tři vzájemně nezávislé rovnice pro modální souřadnice $q_{1,2,3}(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + c_{D1}\dot{q}_1 + \lambda_1 q_1 &= (v_{11}C_{Fx} + v_{21}C_{Fy} + v_{31}C_{Fz})F(t) = \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{C}_F \cdot \mathbf{F}(t) \\ \ddot{q}_2 + c_{D2}\dot{q}_2 + \lambda_2 q_2 &= (v_{12}C_{Fx} + v_{22}C_{Fy} + v_{32}C_{Fz})F(t) = \mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{C}_F \cdot \mathbf{F}(t) \\ \ddot{q}_3 + c_{D3}\dot{q}_3 + \lambda_3 q_3 &= (v_{13}C_{Fx} + v_{23}C_{Fy} + v_{33}C_{Fz})F(t) = \mathbf{v}_3^T \cdot \mathbf{C}_F \cdot \mathbf{F}(t) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Na pravých stranách jsou skalární součiny transponovaných vlastních vektorů s vektorem směrových cosinů síly \mathbf{F} . Prvky spektrální matice $\mathbf{\Lambda}$ jsou

$$\lambda_{1,2,3} = \Omega_{1,2,3}^2$$

a pro prvky matice tlumení \mathbf{C}_D platí vztahy

$$c_{D1,2,3} = 2\zeta_{q1,2,3} \cdot \Omega_{1,2,3}$$

Laplaceovou transformací (3.89) vzniknou obrazy tří modálních souřadnic

$$q_{1,2,3}(s) = \frac{\mathbf{v}_{1,2,3}^T \cdot \mathbf{C}_F}{s^2 + c_{D1,2,3}s + \lambda_{1,2,3}} F(s) \quad (3.90)$$

L.obrazy geometrických souřadnic jsou

$$\begin{aligned}
x(s) &= v_{11}q_1(s) + v_{12}q_2(s) + v_{13}q_3(s) \\
y(s) &= v_{21}q_1(s) + v_{22}q_2(s) + v_{23}q_3(s) \\
z(s) &= v_{31}q_1(s) + v_{32}q_2(s) + v_{33}q_3(s)
\end{aligned}
\tag{3.91}$$

Z porovnání sčítanců na stejných pořadových místech v (3.91) je vidět, že příspěvky jednotlivých modálních souřadnic q_1, q_2, q_3 do výsledné polohy x, y, z mají směry příslušných vlastních vektorů matice systému A . Ty jsou ale shodné se směry vlastních vektorů matic K a K^2 .

Dále budeme jednotlivé jmenovatele zlomků zapisovat jen pomocí symbolů

$$s^2 + c_{Di}s + \lambda_i \dots (\Omega_i, \zeta_{qi}), \quad i = 1, 2, 3$$

Dosazením výrazů pro L.obrazy (3.90) do (3.91) a převedením $F(s)$ na levou stranu vycházejí přenosové funkce směrových poddajností v osách x, y, z jako součty vždy tří přenosů druhého řádu (srovnej s (3.80) a (3.82), kde se sčítaly vždy dva přenosy):

$$\begin{aligned}
G_x(s) &= \frac{x(s)}{F(s)} = v_{11} \frac{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_1, \zeta_{q1})} + v_{12} \frac{\mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_2, \zeta_{q2})} + v_{13} \frac{\mathbf{v}_3^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_3, \zeta_{q3})} \\
G_y(s) &= \frac{y(s)}{F(s)} = v_{21} \frac{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_1, \zeta_{q1})} + v_{22} \frac{\mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_2, \zeta_{q2})} + v_{23} \frac{\mathbf{v}_3^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_3, \zeta_{q3})} \\
G_z(s) &= \frac{z(s)}{F(s)} = v_{31} \frac{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_1, \zeta_{q1})} + v_{32} \frac{\mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_2, \zeta_{q2})} + v_{33} \frac{\mathbf{v}_3^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_3, \zeta_{q3})}
\end{aligned}
\tag{3.92}$$

3.7.4 Přímá dynamická poddajnost

Přenos přímé dynamické poddajnosti $G_F(s)$ zjistíme podobně jako v **kap.3.6.3** průmětem obrazů souřadnic $x(s), y(s), z(s)$ do směru síly F pomocí jejich směrových cosinů podle vztahu

$$\Delta_F(s) = \mathbf{x}^T(s) \cdot \mathbf{C}_F = x(s)C_{Fx} + y(s)C_{Fy} + z(s)C_{Fz}$$

Po dosazení z (3.92) vychází součet celkem devíti přenosů 2.řádu

$$\begin{aligned}
G_F(s) &= \frac{\Delta_F(s)}{F(s)} = G_x(s)C_{Fx} + G_y(s)C_{Fy} + G_z(s)C_{Fz} = \\
&= v_{11}C_{Fx} \frac{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_1, \zeta_{q1})} + v_{12}C_{Fx} \frac{\mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_2, \zeta_{q2})} + v_{13}C_{Fx} \frac{\mathbf{v}_3^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_3, \zeta_{q3})} + \\
&+ v_{21}C_{Fy} \frac{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_1, \zeta_{q1})} + v_{22}C_{Fy} \frac{\mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_2, \zeta_{q2})} + v_{23}C_{Fy} \frac{\mathbf{v}_3^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_3, \zeta_{q3})} + \\
&+ v_{31}C_{Fz} \frac{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_1, \zeta_{q1})} + v_{32}C_{Fz} \frac{\mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_2, \zeta_{q2})} + v_{33}C_{Fz} \frac{\mathbf{v}_3^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_3, \zeta_{q3})}
\end{aligned}$$

Dále sečteme členy se stejnými vlastními vektory v čitatelích zlomků. Např. u vektoru \mathbf{v}_1^T vznikne v závorce součet tří členů a úprava vede na kvadrát skalárního součinu

$$(v_{11}C_{Fx} + v_{21}C_{Fy} + v_{31}C_{Fz}) \frac{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_1, \zeta_{q1})} = (\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{C}_F) \frac{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{C}_F}{(\Omega_1, \zeta_{q1})} = \frac{(\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{C}_F)^2}{(\Omega_1, \zeta_{q1})}$$

Přidáním součtů pro další dva vektory \mathbf{v}_2^T a \mathbf{v}_3^T vyjde konečný vztah pro přímou dynamickou poddajnost

$$G_F(s) = \frac{\Delta_F(s)}{F(s)} = \frac{(\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{C}_F)^2}{s^2 + c_{D1}s + \lambda_1} + \frac{(\mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{C}_F)^2}{s^2 + c_{D2}s + \lambda_2} + \frac{(\mathbf{v}_3^T \cdot \mathbf{C}_F)^2}{s^2 + c_{D3}s + \lambda_3} \quad (3.93)$$

nebo také

$$G_F(s) = \frac{\Delta_F(s)}{F(s)} = \sum_{i=1}^3 \frac{(\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{C}_F)^2}{s^2 + 2\zeta_{qi}\Omega_i s + \Omega_i^2} \quad (3.93a)$$

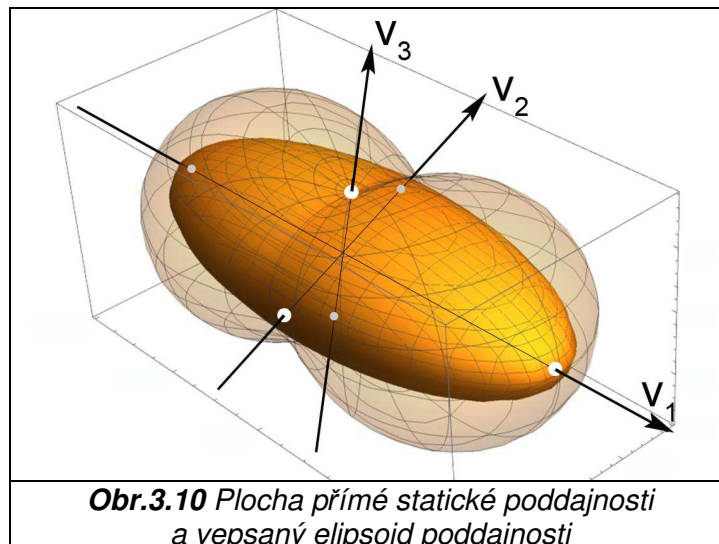
Poznámka: Rovnice (3.92), (3.93) představují logické rozšíření případu rovinného kmitání o třetí souřadnici. Např. vztah pro $G_F(s)$ v (3.82a) bychom získali z prvních dvou sčítanců v (3.93) použitím vlastních vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ z (3.81) a vektoru směrových cosinů síly \mathbf{C}_F :

$$\mathbf{C}_F = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}, \quad \text{skalární součiny jsou}$$

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{C}_F = \begin{bmatrix} \frac{\cos\xi}{\sqrt{m}} & \frac{\sin\xi}{\sqrt{m}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} = \frac{\cos(\beta - \xi)}{\sqrt{m}} \quad \text{atd.}$$

$$\mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{C}_F = \begin{bmatrix} -\frac{\sin\xi}{\sqrt{m}} & \frac{\cos\xi}{\sqrt{m}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} = \frac{\sin(\beta - \xi)}{\sqrt{m}}$$

Plocha přímé statické poddajnosti je popsána rovnicí (3.93) po dosazení $s=0$. V **obr.3.10** je vykreslena průhledně a elipsoid poddajnosti s rovnicí (3.84c) je jí vepsán podobně, jako elipsa v **obr.2.14b**.

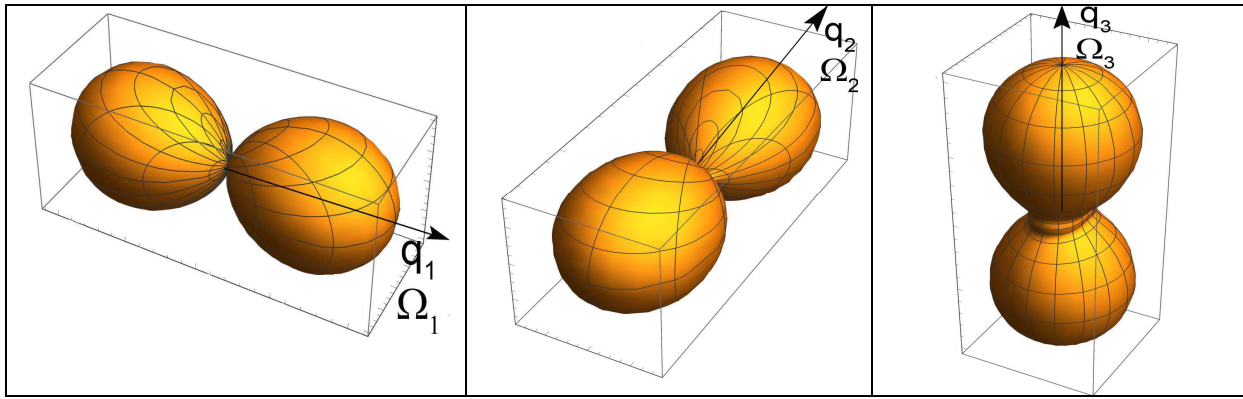


Obr.3.10 Plocha přímé statické poddajnosti a vepsaný elipsoid poddajnosti

Je vyznačeno všech šest bodů dotyku obou ploch, ležících na hlavních poloosách elipsoidu. Zobrazení přímé dynamické poddajnosti je analogické ke **kap.2.8.3**. Pro směry síly \mathbf{C}_F v rozsahu 4π steradiánů je nejnázornější samostatné vykreslení tří ploch pro tři kmitočty (vždy pro $s = j\Omega_1, j\Omega_2, j\Omega_3$ v rovnici (3.93)), viz **obr.3.11**. Podélné osy souměrnosti ploch mají směry příslušných modálních souřadnic q_1, q_2, q_3 a jsou shodné s osami elipsoidu (3.84c). Při malém tlumení dojde podobně jako u rovinného případu na **obr.2.16c** k „nafouknutí“ plochy přímé statické poddajnosti ve směru příslušného vlastního vektoru.

Shrnutí

Systém s hmotným bodem o hmotnosti m , zavěšeným na i v prostoru obecně orientovaných pružinách, je možno zjednodušit na systém se třemi v prostoru navzájem kolnými pružinami. Jejich osy mají směry shodné se směry tří vlastních vektorů původní matice tuhosti, tj. i tří modálních souřadnic s příslušnými vlastními kmitočty.



Obr.3.11 Přímá dynamická poddajnost, tvary q_1, q_2, q_3

3.8 Příklad výpočtu – rovinný systém

Je zadán rovinný systém podle **kap.3.6** s hmotou $m = 20\text{kg}$ a osmi shodnými pružinami o tuhostech $k = 1\text{N}/1\mu\text{m}$, které jsou pravidelně úhlově orientovány po 45° . Pod tímto modelem si lze např. představit nerotující předepnuté válečkové ložisko s osmi válečky – viz **obr.3.12** vlevo. Jedná se o dokonale symetrický systém, jehož matice systému je diagonální

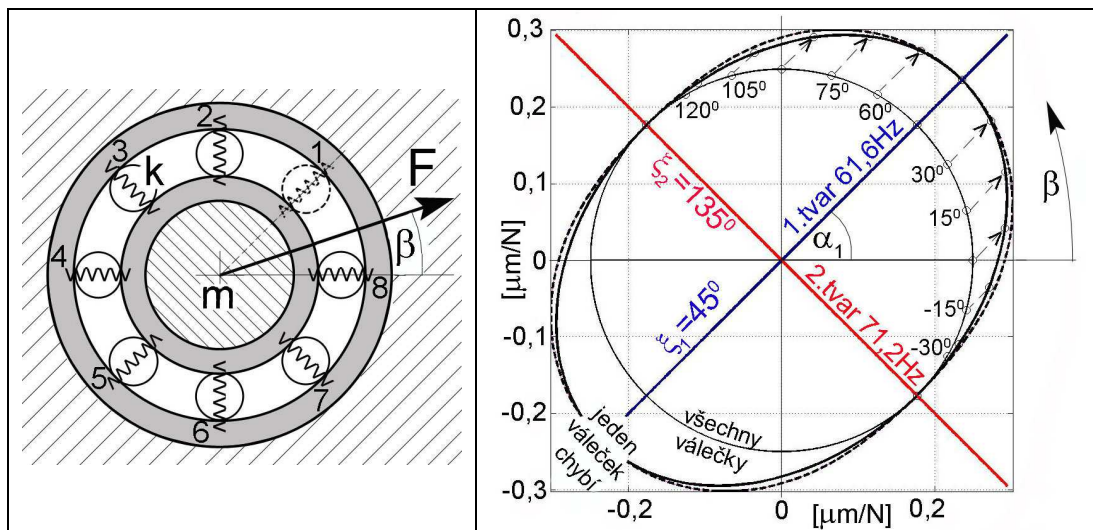
$$\mathbf{A} = \frac{1}{m} \mathbf{K} = \frac{1}{20} \text{diag}(4e6\text{N}/\text{m}) = \text{diag}(2e5)$$

a obě její vlastní čísla shodná: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2e5$.

Přímá statická poddajnost pro všechny směry zatěžující síly β je podle (3.82a)

$$G_{F8stat} = \frac{\cos^2(\beta - \xi)}{m\lambda} + \frac{\sin^2(\beta - \xi)}{m\lambda} = \frac{1}{m\lambda} = \frac{1}{4e6} \text{m}/\text{N} = 0,25 \mu\text{m}/\text{N}$$

Polárním diagramem statické poddajnosti v **obr.3.12** vpravo je kružnice, vyznačená slabou čarou a komentářem „všechny válečky“. Její poloměr je G_{F8stat} .



Obr.3.12 Staticky zatížené nerotující válečkové ložisko a jeho statická poddajnost

Při dynamických výpočtech bylo z důvodů větší přehlednosti grafů zvoleno oproti praxi neobvykle vysoké tlumení $\zeta = 0,3$. Systém má jediný vlastní kmitočet

$$\Omega = \sqrt{\lambda} = \sqrt{1/mG_{F8stat}} = 447 \text{rad}/\text{s} \quad (71,2\text{Hz})$$

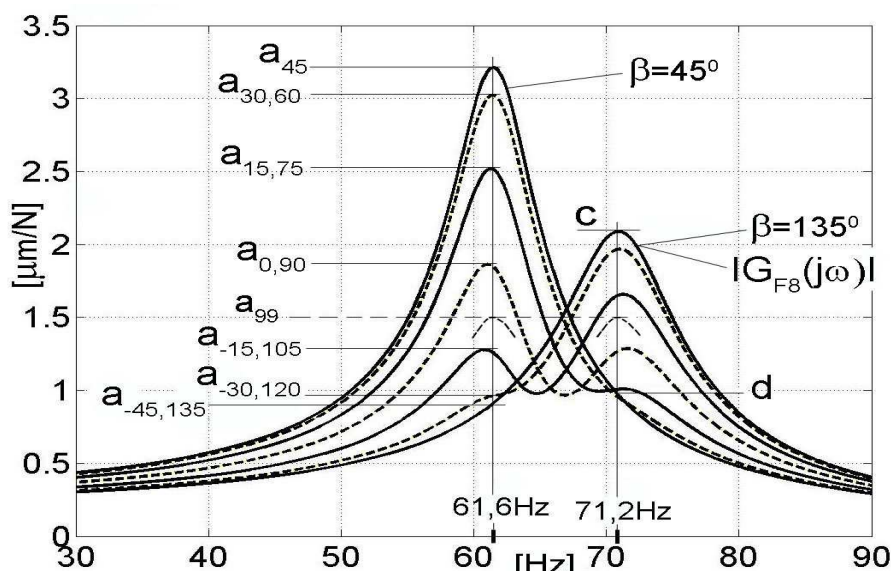
Amplitudová charakteristika přímé dynamické poddajnosti je stejná pro všechny směry síly β a je zobrazena v **obr.3.13** jedinou křivkou s označením $\beta = 135^\circ$ (toto označení zdůvodníme později). Její maximum, které nastává při vlastním kmitočtu $71,2\text{Hz}$, je $c = |G_{F8}(j\omega)|_{MAX} = 2,09 \mu\text{m}/\text{N}$.

V dalším kroku odebereme ložisku jeden váleček, čímž se systém stane nesymetrickým a bude mít dva vlastní kmitočty (v **obr.3.12** vlevo je příslušný váleček označen číslem 1 a jeho úhlová orientace je $\alpha_1 = 45^\circ$). Z kružnice statické poddajnosti na **obr.3.12** vpravo se stane elipsa s orientací hlavní poloosy α_1 , na které jsou vyznačena působišťe síly pro její různé směry v intervalu $\beta = 45^\circ \pm 90^\circ$ po 15° . Při zatížení pod úhlem $\beta = 135^\circ$ není zmíněný váleček nosný, poddajnost se jeho odebráním nezměnila a elipsa i původní kružnice zde mají body dotyku. Křivka přímé statické poddajnosti (v obrázku čárkovaně) se od elipsy příliš neliší.

Amplitudové frekvenční charakteristiky přímé dynamické poddajnosti systému se sedmi válečky $|G_{F7}(j\omega)|$ pro různé směry síly jsou na **obr.3.13**. Na křivkách zřetelně vynikají maxima na dvou vlastních kmitočtech při směrech síly $\beta = 45^\circ$ (amplituda a_{45}) a $\beta = 135^\circ$ (amplituda c). To jsou směry ξ_1, ξ_2 vlastních tvarů kmitání, tedy obou vlastních vektorů matice tuhosti:

$$1.\text{tvar: } \Omega_1 = 387,3 \text{ rad/s (61,6Hz)}, \xi_1 = 45^\circ$$

$$2.\text{tvar: } \Omega_2 = 447,2 \text{ rad/s (71,2Hz)}, \xi_2 = 135^\circ$$

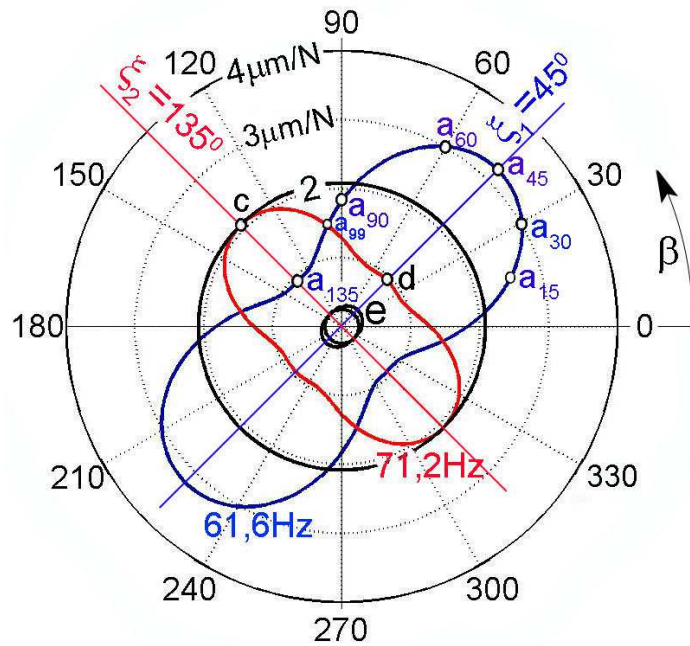


Obr.3.13 Amplitudové charakteristiky $|G_{F7}(j\omega)|$ pro různé směry síly β

Stejně jako statická, tak ani přímá dynamická poddajnost ve směru druhého tvaru kmitů 135° se odebráním válečku č.1 nezměnila a příslušná amplitudová charakteristika v **obr.3.13** s vyznačeným maximem $c = 2,09 \mu\text{m}/N$ splývá s charakteristikou systému s osmi válečky.

Opakovaným vynášením vrcholů amplitudových charakteristik pro různé úhly β z **obr.3.13** získáme dva úplné polární diagramy přímé poddajnosti pro oba vlastní kmitočty $61,6\text{Hz}$ a $71,2\text{Hz}$ - viz **obr.3.14**.

V obou obrázcích jsou vyznačeny některé společné hodnoty $a_{15,30,45,60\dots}, c, d$. Obě křivky se protínají při úhlu $\beta \approx 99^\circ$, což znamená, že při této orientaci síly by byly na amplitudové charakteristice v **obr.3.13** dva stejně vysoké vrcholy a_{99} . Pro srovnání velikostí výchylek při statickém a dynamickém zatěžování je v **obr.3.14** zobrazena také elipsa statické poddajnosti e z **obr.3.12**. Celý postup je stejný jako v **kap.2.8.3**.



Obr.3.14 Polární diagramy přímé dynamické poddajnosti $|G_F(j\Omega_1, j\Omega_2)| = fce(\beta)$

Poznámka: Polární diagram přímé dynamické poddajnosti, zjištěný pro určitý vlastní kmitočet, bývá někdy prezentován pod nesprávným a zavádějícím názvem "eliptický tvar kmitů". Správně by ale měl být pod pojmem "tvar kmitů" chápán **soubor dílčích přenosových funkcí 2. řádu v modálním rozkladu systému, příslušejících jedné proměnné q_i (tedy jednomu vlastnímu kmitočtu Ω_i), jejíž pohyb má směr příslušného vlastního vektoru.** Oproti tomu na podobě každé z obou křivek v **obr.3.14** se stále podílejí obě dílčí přenosové funkce $G1_F(s), G2_F(s)$ z rovnice (3.82a) s různými vlastními kmitočty Ω_1, Ω_2 , buzené vždy jediným z nich. První tvar kmitů je tedy dán pouze funkcí $G1_F(s)$, druhý tvar funkcí $G2_F(s)$.

4. Impulzní buzení dynamických systémů

V této kapitole se budeme zabývat případem, kdy je dynamický systém krátkodobě vybuzen časově omezeným impulzem $f(t)$ s dobou trvání $t \in \langle 0, T_0 \rangle$. Funkce $f(t)$ (v našem případě se nejčastěji jedná o sílu) je na intervalu $t \in (T_0, \infty)$ identicky nulová a její Laplaceův obraz označíme obecně

$$L\{f(t)\} = F(s) \quad (4.1)$$

K tomuto účelu je nutné nejdříve najít vhodný matematický popis konečného impulsu.

Poznámky: 1) Označení $f(t)$ pro impuls zavádíme kvůli odlišení od obecného časově neomezeného průběhu síly, pro který jsme v **kap.2** a **kap.3** používali symbol $F(t)$. Laplaceův obraz impulsu ale nadále značíme $F(s)$;

2) Dále uvedené postupy mají zásadní význam při řešení potíží s klidným rozbíháním a brzděním strojů (nevyjímaje vačkové mechanismy) bez škodlivých vibrací. Východiskem úvah je 2.Newtonův zákon „časový impuls síly je roven změně hybnosti hmoty“.

4.1 Laplaceův obraz konečného impulsu

Matematický postup vyjádření konečného impulsu $f(t)$ je znázorněn na **obr.4.1**.

Přitom je využita pomocná funkce $\varphi(t)$ (tzv. „vytvorující funkce“), definovaná na celém intervalu $t \in \langle 0, \infty \rangle$. Její L.obraz označíme obecně $\Phi(s)$

$$L\{\varphi(t)\} = \Phi(s)$$

a hranici konvergence σ_1 . Dále použijeme Heavisideovu funkci $\eta(t)$ a funkci posunutou $\eta(t - T_0)$, která je nulová na intervalu $t \in \langle 0, T_0 \rangle$ a jednotková na intervalu $t \in (T_0, \infty)$. Konečný impuls, vytvořený z funkce $\varphi(t)$, lze vyjádřit rozdílem

$$f(t) = \varphi(t) - \varphi(t) \cdot \eta(t - T_0) = \varphi(t) \cdot [\eta(t) - \eta(t - T_0)] = \varphi(t) \cdot \gamma(t) \quad (4.2)$$

kde jsme zavedli označení

$$\gamma(t) = \eta(t) - \eta(t - T_0) \quad (4.2a)$$

pro obdélníkový impuls na intervalu $t \in \langle 0, T_0 \rangle$ s jednotkovou výškou, jehož L.obraz je (pravidlo 24 v **kap.1.12**)

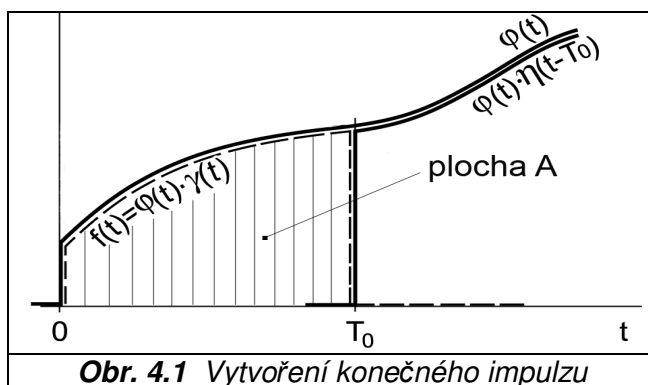
$$\Gamma(s) = \frac{1 - e^{-sT_0}}{s} \quad (4.3)$$

Poznámka: Funkce $\Gamma(s)$ je definována pro všechna komplexní čísla s včetně počátku. Singulární bod $s = 0$ je totiž odstranitelnou singularitou, protože platí

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(s) = (l' \text{ Hosp. pravidlem}) = \Gamma(0) = T_0$$

což je plocha pod čarou obdélníkového impulsu $\gamma(t)$. Hranice konvergence funkce $\Gamma(s)$ je tedy $\sigma_2 = -\infty$. Tyto vlastnosti lze zobecnit na všechny konečné impulsy a jejich obrazy.

Dále budeme předpokládat, že L.obraz $\Phi(s)$ vytvorující funkce má i jednonásobných pólů p_i . K vyhledání obrazu součinu (4.2) použijeme pravidlo 23 v **kap.1.12** o konvoluci obrazů (též **lit.[1]**):



Obr. 4.1 Vytvoření konečného impulsu

$$F(s) = L\{\varphi(t) \cdot \gamma(t)\} = \frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \Phi(q) \Gamma(s-q) dq \quad (4.4)$$

kde číslo σ musí obecně splnit podmínku $\sigma_1 < \sigma < \operatorname{Re} s - \sigma_2$, neboli (pro $\sigma_2 = -\infty$) $\sigma_1 < \sigma < \operatorname{Re} s + \infty$. Dosazením (4.3) do (4.4) vychází

$$F(s) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \Phi(q) \frac{1 - e^{-(s-q)T_0}}{s-q} dq \quad (4.5)$$

Pomocná funkce $\Phi(q) \frac{1 - e^{(q-s)T_0}}{s-q}$ „zdědila“ singulární body p_i od funkce $\Phi(s)$ a navíc má ještě jeden singulární bod $p_{i+1} = s$ (integrační proměnnou je q !!). Integraci (4.5) provedeme pomocí reziduové věty, přičemž integrační dráha obklíčí celou část komplexní roviny vlevo od svislice $\sigma = konst$.

1) Pokud bod $p_{i+1} = s$ leží vpravo od svislice $\sigma = konst$, stačí uvažovat pouze rezidua v bodech p_i , které všechny leží vlevo od svislice $\sigma_1 = konst$ (a tedy i od svislice $\sigma = konst$). Protože jsme předpokládali jednonásobné póly, platí (1.40b):

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_i \operatorname{rez}_{p_i} \left[\Phi(q) \frac{1 - e^{(q-s)T_0}}{s-q} \right] = \sum_i \lim_{q \rightarrow p_i} (q - p_i) \Phi(q) \frac{1 - e^{(q-s)T_0}}{s-q} = \\ &= \sum_i \lim_{q \rightarrow p_i} (q - p_i) \Phi(q) \cdot \lim_{q \rightarrow p_i} \frac{1 - e^{(q-s)T_0}}{s-q} = \sum_i \frac{1 - e^{(p_i-s)T_0}}{s - p_i} \cdot \operatorname{rez}_{p_i} [\Phi(q)] \end{aligned}$$

Zavedeme-li pro reziduum obrazu vytvořující funkce v bodě p_i označení $R_{p_i} = \operatorname{rez}_{p_i} [\Phi(q)] = \operatorname{rez}_{p_i} [\Phi(s)]$, bude Laplaceův obraz $F(s)$ konečného impulsu mít tvar součtu dílčích obrazů $F_{p_i}(s)$:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \sum_i R_{p_i} \frac{1 - e^{(p_i-s)T_0}}{s - p_i} = \sum_i F_{p_i}(s) \quad (4.6)$$

2) Leží-li bod $p_{i+1} = s$ vlevo od svislice $\sigma = konst$, bylo by třeba připočíst jemu příslušné reziduum, které je ale nulové:

$$\operatorname{rez}_s \left[\Phi(q) \frac{1 - e^{(q-s)T_0}}{s-q} \right] = \lim_{q \rightarrow s} (q - s) \Phi(q) \frac{1 - e^{(q-s)T_0}}{s-q} = \lim_{q \rightarrow s} \Phi(q) (e^{(q-s)T_0} - 1) = 0$$

takže na výsledku (4.6) se nic nemění.

Vztah (4.6) udává obecný návod, jak ze známé rovnice vytvořující funkce $\varphi(t)$ a z pólů p_i jejího obrazu $\Phi(s)$ zjistit L. obraz $F(s)$ konečného impulsu o délce T_0 . Obraz vytvořující funkce $\varphi(t)$ i konečného impulsu $f(t)$ mají společné singulární body (v případě impulsu jsou ale tyto odstranitelné, jak bude ukázáno v **kap.4.1.1** !!).

Zpětnou transformací (4.6) určíme další možný tvar rovnice konečného impulsu (kromě již uvedeného tvaru (4.2)):

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \sum_i R_{p_i} \frac{1 - e^{(p_i-s)T_0}}{s - p_i} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_i \frac{R_{p_i}}{s - p_i} - \frac{e^{p_i T_0} R_{p_i} e^{-s T_0}}{s - p_i} \right\}$$

Pomocí pravidla o obrazu exponenciální a posunuté funkce vychází

$$f(t) = \sum_i \left[R_{p_i} e^{p_i t} - e^{p_i T_0} R_{p_i} e^{p_i(t-T_0)} \cdot \eta(t - T_0) \right] = \sum_i R_{p_i} e^{p_i t} \cdot [\eta(t) - \eta(t - T_0)]$$

a konečně

$$f(t) = \chi(t) \sum_i R_{p_i} e^{p_i t} \quad (4.7)$$

Vztah (4.7) vyjadřuje skutečnost, že konečný impulz je složen z dílčích exponenciálních impulzů, vzniklých součinem příslušných exponenciálních vytvořujících funkcí s obecně komplexními exponenty p_i a obdélníkového impulzu o jednotkové výšce a délce T_0 .

Příklad 1: Uvažujme sinusovou vytvořující funkci $\varphi(t) = B \sin \Omega_\varphi t$ s dobou periody $T_\varphi = 2\pi/\Omega_\varphi$. Podle pravidla 16 v kap.1.12 je její L.obraz

$$\Phi(s) = \frac{B\Omega_\varphi}{s^2 + \Omega_\varphi^2} = \frac{B\Omega_\varphi}{(s - j\Omega_\varphi)(s + j\Omega_\varphi)}$$

L.obraz konečného impulzu, tvořeného jednou půlvlnou sinusovky, určíme podle (4.6). Dobu trvání impulzu stále označujeme T_0 , takže platí $T_0 = T_\varphi/2 = \pi/\Omega_\varphi$. Rezidua funkce $\Phi(s)$ v obou komplexně sdružených pólech $\pm j\Omega_\varphi$ jsou rovněž komplexně sdružená:

$$\text{rez}_{+j\Omega_\varphi} [\Phi(s)] = B/2j = -jB/2, \quad \text{rez}_{-j\Omega_\varphi} [\Phi(s)] = -B/2j = +jB/2$$

$$F(s) = \frac{B}{2j} \cdot \frac{1 - e^{(j\Omega_\varphi - s)T_0}}{s - j\Omega_\varphi} - \frac{B}{2j} \cdot \frac{1 - e^{(-j\Omega_\varphi - s)T_0}}{s + j\Omega_\varphi} = \frac{B}{2j} \left[\frac{1 + e^{-sT_0}}{s - j\Omega_\varphi} - \frac{1 + e^{-sT_0}}{s + j\Omega_\varphi} \right]$$

(přitom jsme využili vztahu $\Omega_\varphi T_0 = \pi$, tj. $e^{\pm j\Omega_\varphi T_0} = e^{\pm j\pi} = -1$). Po úpravách vychází

$$F(s) = B\Omega_\varphi \frac{1 + e^{-s\pi/\Omega_\varphi}}{s^2 + \Omega_\varphi^2} \quad (4.7a)$$

viz též pravidlo 29 v tabulce impulzních funkcí v kap.1.12. Stejný výsledek bychom získali přímo z definičního integrálu L.transformace integrací v konečných mezích $0 \rightarrow T_0$, tj.

$$F(s) = B \int_0^{T_0} \sin \Omega_\varphi t \cdot e^{-st} dt = \frac{B e^{-st}}{s^2 + \Omega_\varphi^2} \left(-s \cdot \sin \Omega_\varphi t - \Omega_\varphi \cos \Omega_\varphi t \right) \Bigg|_{t=0}^{t=T_0}$$

a konečnou úpravu přenecháme čtenáři.

Vztah (4.7) je možno na předchozím příkladu obecně interpretovat takto:

- reálný impulz ve tvaru jedné půlvlny sinusovky je složen ze dvou exponenciálních (komplexních) impulzů, jejichž vytvořující funkce mají komplexní tvar a jejich součet je funkce reálná:

$$\varphi_1(t) = e^{+j\Omega_\varphi t}/2j, \quad \varphi_2(t) = -e^{-j\Omega_\varphi t}/2j, \quad \varphi_1(t) + \varphi_2(t) = \sin(\Omega_\varphi t)$$

Z exponenciálních impulzů se tedy lze zpětně dostat na impulz sinusový a potažmo (s využitím harmonické analýzy) i na impulz obecného tvaru.

4.1.1 Obecné vlastnosti konečného impulzu a jeho L. obrazu

1) Singulární body a hranice konvergence L. obrazu konečného impulzu:

- každý jednotlivý sčítanec $F_{p_i}(s)$ v (4.6) má konečnou limitu

$$\lim_{s \rightarrow p_i} R_{p_i} \frac{1 - e^{(p_i - s)T_0}}{s - p_i} = (\text{l'Hosp. pravidlem}) = T_0 R_{p_i}$$

takže singularity p_i jsou odstranitelné. L.obraz konečného impulzu konverguje v celé komplexní rovině pro všechna čísla s , neboli hranice konvergence je $\sigma = -\infty$. Laická představa tohoto tvrzení podle (1.36a) je taková, že každý konečný impulz je možno „schovat“ pod sebestrměji klesající exponenciálu $M e^{\sigma t}$ při dostatečné velikosti M ;

2) U L.obrazu konečného impulzu je možno bez omezení hodnotou σ počítat obě limity (1.36b), takže

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0 \quad \text{a hlavně} \quad \boxed{\lim_{s \rightarrow 0} F(s) = F(0) = A}$$

(limita v počátku je plocha A pod čarou funkce $f(t)$). Integrací každého ze sčítanců v (4.7) vychází pro plochu exponenciálního impulsu

$$\int_0^{T_0} f(t) dt = R_{p_i} \int_0^{T_0} \gamma(t) e^{p_i t} dt = R_{p_i} \int_0^{T_0} e^{p_i t} dt = R_{p_i} \frac{e^{p_i T_0} - 1}{p_i}$$

což je zároveň limita $\lim_{s \rightarrow 0} F_{p_i}(s)$ v (4.6);

3) Laurentovy rozvoje funkcí $F_{p_i}(s)$ v okolí odstranitelných singularit p_i nemají hlavní část se zápornými exponenty, takže rezidua v těchto bodech jsou nulová:

$$\text{rez}_{p_i} [F_{p_i}(s)] = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F_{p_i}(s) = 0$$

4) Výraz za sumačním znaménkem v (4.7) obdržíme též po rozkladu funkce $\Phi(s)$ na parciální zlomky v případě, že tato je racionální a ryze lomená. V takovém případě platí, že koeficienty u parciálních zlomků jsou rezidua v pólech p_i ;

5) Event. komplexní póly p_i racionální funkce $\Phi(s)$ se mohou vyskytovat jen v komplexně sdružených dvojicích. Potom jsou komplexně sdružená i příslušná rezidua R_{p_i} a výraz (4.7) opět vede na reálnou funkci času. Exponenciální impuls (resp. dvojice impulsů s komplexně sdruženými konstantami v exponentu) je univerzálním tvarem, ze kterého lze složit impuls obecného tvaru;

6) Protože funkce $f(t)$ je absolutně integrovatelná, je možno určit i její Fourierův obraz (frekvenční spektrum), který vznikne záměnou $s \rightarrow j\omega$ ve výrazu $F(s)$;

7) Z terminologického hlediska je třeba rozlišovat, že tytéž body p_i jsou pro L. obraz vytvářející funkce $\Phi(s)$ póly, ale pro L. obraz impulsu $F(s)$ odstranitelnými singularitami.

4.2 Odezva lineárního dynamického systému na konečný impuls

Přenosová funkce dynamického systému, popsaného lineárními diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty, je racionální ryze lomená. Jde tedy o podíl dvou polynomů, který lze rozložit na parciální zlomky, které představují přenosy dílčích systémů 1. řádu:

$$\boxed{D(s) = \frac{P_m(s)}{P_n(s)} = \sum_{k=1}^n D_k(s) = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{s - d_k}, \quad m < n} \quad (4.8)$$

C_krezidua funkce komplexní proměnné $D(s)$ v jejích singularitních bodech (pólech) d_k . Předpokládáme nejčastější případ, kdy póly d_k jsou jednonásobné. Jsou-li dva póly komplexně sdružené, jsou komplexně sdružené i jim příslušné konstanty C_k . L.obraz odezvy systému na konečný impuls $f(t)$ je součtem

$$\boxed{Y(s) = F(s)D(s) = \sum_{k=1}^n Y_k(s) = F(s) \sum_{k=1}^n D_k(s) = F(s) \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{s - d_k}} \quad (4.9)$$

kde za obraz impulsu $F(s)$ dosazujeme výraz (4.6):

$$\boxed{Y(s) = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{s - d_k} \sum_i F_{p_i}(s)} \quad (4.10)$$

Celkový počet složek L.obrazu $Y(s)$ je $i \times n$, ale s ohledem na aditivnost L.transformace a princip superpozice stačí ukázat postup jen pro jednu složku

obrazu odezvy $Y_{pd}(s)$, příslušnou jedinému pólu d dynamického systému a jediné složce součtu (4.6), příslušující pólu p . Zpětná transformace funkce

$$Y_{pd}(s) = CR_p \frac{1 - e^{(p-s)T_0}}{(s-d)(s-p)} \quad (4.11a)$$

proběhne pomocí reziduové věty – viz (1.39e) – v obou pólech d, p (stále předpokládáme, že obraz $\Phi(s)$ vytvořující funkce $\varphi(t)$ má jednonásobné póly p_i).

1) Předpokládejme nejpravděpodobnější případ, že póly jsou od sebe různé, $d \neq p$:

$$\begin{aligned} y_{pd}(t) &= L^{-1} \left\{ CR_p \frac{1 - e^{(p-s)T_0}}{(s-d)(s-p)} \right\} = CR_p \sum \text{rez}_{d,p} \frac{(1 - e^{(p-s)T_0}) e^{s t}}{(s-d)(s-p)} = \\ &= CR_p \sum \text{rez}_{d,p} \left[\frac{e^{s t}}{(s-d)(s-p)} \right] - CR_p e^{pT_0} \sum \text{rez}_{d,p} \left[\frac{e^{-sT_0} e^{s t}}{(s-d)(s-p)} \right] \end{aligned} \quad (4.11b)$$

Rozepsáním obou reziduí $\text{rez}_{d,p}$ podle (1.40b) v prvním sčítanci dostáváme první dílčí funkci

$$y_{pd1}(t) = \frac{CR_p e^{d t}}{d-p} + \frac{CR_p e^{p t}}{p-d} = CR_p \frac{e^{d t} - e^{p t}}{d-p}$$

Druhý sčítanec v (4.11b) má v čitateli navíc výraz e^{-sT_0} a je tedy L.obrazem posunuté funkce $e^{pT_0} y_{pd1}(t-T_0) \cdot \eta(t-T_0)$, takže úplná odezva na jeden exponenciální impulz je součtem

$$\begin{aligned} y_{pd}(t) &= y_{pd1}(t) - e^{pT_0} y_{pd1}(t-T_0) \cdot \eta(t-T_0) = \\ &= \frac{CR_p}{d-p} \left[e^{d t} - e^{p t} - e^{pT_0} (e^{d(t-T_0)} - e^{p(t-T_0)}) \cdot \eta(t-T_0) \right] \end{aligned}$$

S využitím vztahu (4.2a) pro obdélníkový impulz $\gamma(t)$ vychází konečně

$$y_{pd}(t) = \frac{CR_p}{d-p} \left[e^{d t} - e^{p t} \gamma(t) - e^{(p-d)T_0} e^{d t} \eta(t-T_0) \right] \quad (4.11c)$$

Výpočet podle tohoto vztahu je nutno rozdělit na dva kroky:

a) V intervalu $t \in \langle 0, T_0 \rangle$ je $\gamma(t) = 1$, $\eta(t-T_0) = 0$, tj.

$$y_{pd}(t) = CR_p \frac{e^{d t} - e^{p t}}{d-p} \quad (4.11d)$$

b) Nejčastěji nás ale zajímá tvar odezvy až po zániku impulzu, tedy pouze v intervalu $t \in \langle T_0, \infty \rangle$, kde je naopak $\gamma(t) = 0$, $\eta(t-T_0) = 1$ a výsledek bude

$$y_{pd}(t) = \frac{CR_p}{d-p} \left[1 - e^{(p-d)T_0} \right] e^{d t} \quad (4.11e)$$

2) V případě, že póly jsou shodné, tj. $d = p$, výraz (4.11a) přejde na tvar

$$Y_{pd}(s) = CR_p \left(\frac{1}{(s-p)^2} - e^{pT_0} \frac{e^{-sT_0}}{(s-p)^2} \right)$$

a dále podle **Příkladu 7** v **kap.1.12**, aplikací pravidla o posunutí a použitím (4.2a)

$$y_{pd}(t) = CR_p \left[t e^{p t} - e^{pT_0} (t-T_0) e^{p(t-T_0)} \eta(t-T_0) \right] = CR_p e^{p t} \left[t \gamma(t) + T_0 \eta(t-T_0) \right] \quad (4.11f)$$

Výpočet se opět dělí na dva intervaly $t \in \langle 0, T_0 \rangle$ resp. $t \in \langle T_0, \infty \rangle$ a platí v nich

$$y_{pd}(t) = CR_p t e^{p t} \quad \text{resp.} \quad y_{pd}(t) = CR_p T_0 e^{p t} \quad (4.11g)$$

Snadno zjistíme, že v limitním případě $d \rightarrow p$ přejdou vztahy (4.11d,e) na (4.11g).

Úplný vztah pro odezvu získáme sečtením dílčích řešení $y_{pd}(t)$ přes všech i odstranitelných singularit L.obrazu impulzu a n pólů p_i systému. Všechny předchozí výpočty byly provedeny pouze pro případ, že singulární body přenosové funkce dynamického systému i L.obrazu budicího impulzu jsou jednonásobné. Bez důkazu uvádíme, že platí i pro případ bodů vícenásobných.

Poznámka: Namísto reziduové věty lze použít také pravidlo o konvoluci, viz **kap.1.12** a

kap.1.13. Originál k součinu dvou obrazů $F(s)$ a $\frac{C_k}{s-d_k}$ je

$$y_k(t) = L^{-1} \left\{ F(s) \frac{C_k}{s-d_k} \right\} = \int_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau) C_k e^{d_k(t-\tau)} d\tau = C_k e^{d_k t} \int_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau) e^{-d_k \tau} d\tau \quad (4.12)$$

Přitom jsme uplatnili pravidlo 8 o L.obrazu exponenciální funkce a člen $e^{d_k t}$ jsme vytknuli před integrál jako konstantu, protože integrační proměnnou je τ . Výpočet konvolučního integrálu v celém časovém intervalu $\tau \in \langle 0, \infty \rangle$ může ale někdy činit potíže a ukážeme proto postup jen pro $\tau > T_0$. Integrál v (4.12) rozdělíme na dva čítance

$$\int_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau) e^{-d_k \tau} d\tau = \int_{\tau=0}^{\tau=T_0} \dots + \int_{\tau=T_0}^{\tau=t} \dots$$

Druhý dílčí integrál je nulový (pro $\tau > T_0$ je $f(\tau) = 0$!!) a vzhledem k (4.7a) platí

$$\int_{\tau=0}^{\tau=T_0} f(\tau) e^{-d_k \tau} d\tau = F(d_k)$$

Odezva dílčího systému 1.řádu po dosažení do (4.12) je

$$y_k(t) = C_k F(d_k) e^{d_k t}$$

Odezva celého systému v časové oblasti $t > T_0$ je na základě superpozice součtem

$$y(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t) = \sum_{k=1}^n C_k F(d_k) \cdot e^{d_k t} \quad (4.12a)$$

Místo úplného výrazu (4.6) zde můžeme s obrazem impulzu $F(s)$ pracovat bez jeho bližší znalosti jen jako s množinou i čísel, vzniklých záměnou proměnné s za póly systému d_k :

$$F(d_k) = \sum_i R_{p_i} \frac{e^{(p_i-d_k)T_0} - 1}{p_i - d_k} \quad (4.12b)$$

Spojením (4.12a,b) vychází odezva celého systému po ukončení impulzu

$$y(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t) = \sum_{k=1}^n \sum_i C_k R_{p_i} \frac{e^{(p_i-d_k)T_0} - 1}{p_i - d_k} e^{d_k t} \quad (4.12c)$$

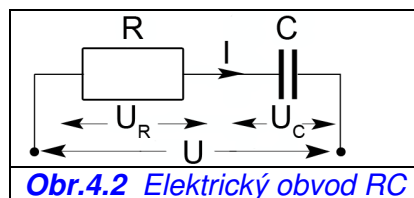
Jednotlivé sčítance v (4.12c) jsou nutně totožné s výrazem (4.11e).

Příklad 2: Elektrický obvod RC, na vstupu je exponenciální impulz napětí U o délce T_0 : obvod RC (odpor – kondenzátor) podle obr.4.2 je systémem 1.řádu. Napájecí napětí U se rozděluje na dvě složky:

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) = RI(t) + \frac{1}{C} \int Idt$$

a po L.transformaci $U(s) = RI(s) + I(s)/Cs$

Přenosová funkce mezi napájecím napětím a napětím na kondenzátoru je 1.řádu s časovou konstantou $T = RC$:



$$D(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{I(s)/Cs}{RI(s) + I(s)/Cs} = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{1/T}{s + 1/T}$$

Jediný pól je $d = -1/T$, jemu příslušné reziduum podle (1.40b) je $1/T$.

Napěťový impulz má vytvořující funkci $\varphi(t) = Be^{pt}$. Její L.obraz je $\Phi(s) = \frac{B}{s-p}$ s jediným pólem p , jemu příslušné reziduum je B . L.obraz impulzu podle (4.6) je

$F(s) = B \frac{1 - e^{(p-s)T_0}}{s-p}$. Pro výpočty v obou úsecích před i po čase T_0 stačí dosadit přímo do

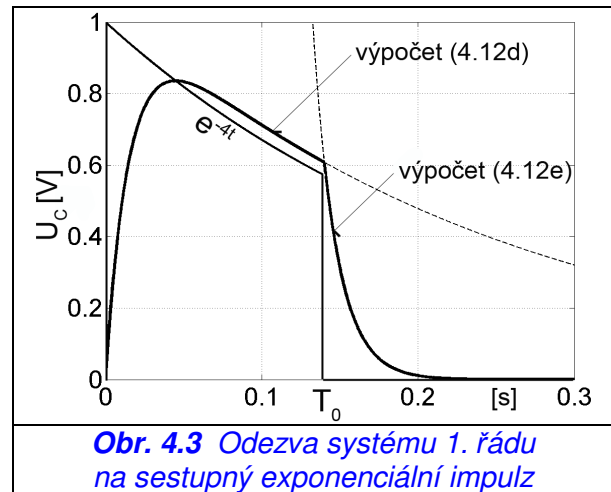
(4.11d,e) a po úpravách vychází

$$U_C(t < T_0) = \frac{B}{Tp+1} (e^{pt} - e^{-t/T}) \quad (4.12d)$$

$$U_C(t > T_0) = \frac{B}{Tp+1} (e^{(p+1/T)T_0} - 1) \cdot e^{-t/T} \quad (4.12e)$$

Na obr.4.3 jsou průběhy pro sestupný impulz s počátečním napětím

$B = 1V, p = -4, T_0 = 0,14s$ a obvod s odporem $R = 1k\Omega$ a kondenzátorem $C = 15\mu F$, tj. s časovou konstantou $T = 0,015s$. V okamžiku zániku impulzu začíná platit vztah (4.12e), který je možno odvodit i z obecného postupu podle (4.12a,b,c). Pro obdélníkový impulz s výškou B stačí do (4.12d,e) dosadit $p = 0$.

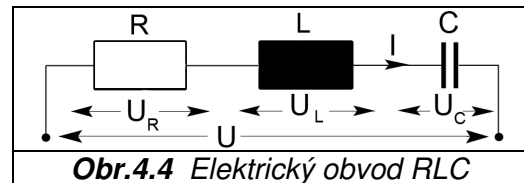


Obr. 4.3 Odezva systému 1. řádu na sestupný exponenciální impulz

4.3 Dynamický systém 2.řádu

Poznámka: Dále odvozené vztahy bude možno použít na elektrické i mechanické systémy, pokud jsou popsány lineární diferenciální rovnicí 2.řádu s konstantními koeficienty.

1) Přenosovou funkcí 2.řádu je popsán elektrický obvod RLC (odpor – indukčnost - kondenzátor) na obr.4.4. Rozložení napětí je



Obr.4.4 Elektrický obvod RLC

$$U(t) = U_R + U_L + U_C = RI(t) + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int Idt$$

a po Laplaceově transformaci $U(s) = RI(s) + LsI(s) + I(s)/Cs$

Přenosová funkce pro napětí na kondenzátoru je $\frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$ (4.13a)

Obdobně jako u mechanického systému hmota–pružina–tlumič definujeme vlastní kmitočet

$$\Omega_{RLC} = 1/\sqrt{LC}$$

2) Diferenciální rovnicí 2.řádu je popsán i stejnoseměrný elektromotor. Zjednodušené schéma lineárního motoru je na obr.4.5. Celé vinutí s hmotností m je zde nahrazeno jedním vodičem o délce l , který se pohybuje v magnetickém poli permanentních magnetů statoru s indukcí B_S . Při znázorněných navzájem kolmých směrech platí podle zákonů elektromagnetismu:

- síla na vodič o délce l při proudu I :

$$F = B_S l I = K_F I, \quad K_F = B_S l \dots \text{tzv. silová konstanta}$$

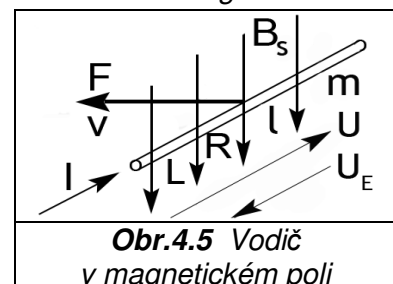
- indukované napětí do vodiče o délce l při rychlosti v :

$$U_E = B_S l v = K_F v$$

- rozložení napětí na vinutí s odporem R a indukčností L :

$$U = U_E + RI + L \frac{dI}{dt}$$

- pohybová rovnice pro pohyblivý díl s vinutím: $F = m \frac{dv}{dt}$



Obr.4.5 Vodič v magnetickém poli

Sloučením rovnic vychází diferenciální rovnice 2.řádu mezi napětím U a rychlostí v :

$$\frac{mL}{K_F^2} \ddot{v} + \frac{mR}{K_F^2} \dot{v} + v = \frac{1}{K_F} U$$

Přenosová funkce je opět 2.řádu

$$\frac{v(s)}{U(s)} = \frac{1/K_F}{\frac{mL}{K_F^2} s^2 + \frac{mR}{K_F^2} s + 1} \quad (4.13b)$$

s tzv. vlastním kmitočtem motoru $\Omega_M = K_F / \sqrt{mL}$.

Důležité upozornění: U elektrických obvodů s napěťovým vstupem je třeba vzít v úvahu, že po ukončení impulzu má být na vstupu nulové napětí, což v praxi znamená, že vstupní svorky je nutno zkratovat. Kondenzátor na **obr.4.2** a **obr.4.4** se počne vybíjet přes odpor a jeho napětí klesne k nule.

Elektromotor na **obr.4.5** po zkratování vstupních svorek setrvačností dobíhá a jeho indukovaným napětím je vyvolán proud opačného smyslu, kterým je motor postupně zastaven. Pokud by na vstupu bylo trvale konstantní napětí $U = konst$, motor zrychluje do okamžiku, kdy $U_E = U$, proud i síla zaniknou a rychlost se ustálí na hodnotě $v_{stat} = U/K_F$. I kdyby v případě malého tlumení rychlost dále rostla, rozdíl $U - U_E$ bude záporný a proudem opačné polaritý bude motor zpomalen, takže stále směřuje do stavu v_{stat} . Přenosová funkce (4.13b) popisuje tzv. napěťové řízení rychlosti.

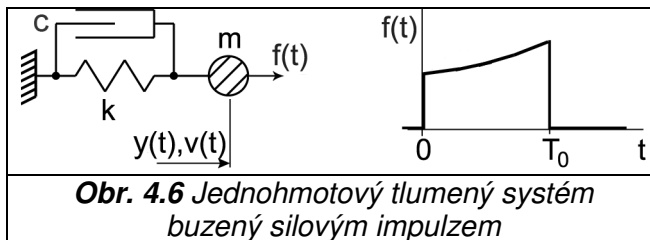
Dále se budeme přednostně věnovat impulznímu buzení jednohmotového mechanického systému podle **obr.4.6**, jehož pohybová rovnice je

$$\ddot{y} + 2\zeta \Omega \dot{y} + \Omega^2 y = f(t)/m \quad (4.13c)$$

$\Omega = \sqrt{k/m}$... vlastní kmitočet,

$\zeta = c/2\sqrt{km}$... poměrné tlumení.

Předpokládáme počáteční podmínky $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.



Poznámka: Pozorný čtenář si jistě povšiml, že v koeficientech u 1.derivace v pohybových rovnicích (neboli u 1.mocniny proměnné s v přenosových funkcích (4.13a,b)), se vždy vyskytuje odpor R . Tím se jen potvrzuje, že elektrický odpor má stejně jako konstanta c v (4.13c) tlumicí účinek.

V **kap.2** jsme odvodili vztahy pro přenosovou funkci a její póly $d_{1,2}$ i rezidua $C_{1,2}$:

$$D(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s-d_1)(s-d_2)} = \frac{C_1}{s-d_1} + \frac{C_2}{s-d_2} \quad (4.14)$$

$$d_{1,2} = -\zeta\Omega \pm j\Omega\sqrt{1-\zeta^2}, \quad C_{1,2} = \frac{\pm 1}{2jm\Omega\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Mimo jiné též platí $d_1 + d_2 = -2\zeta\Omega$, $d_1 - d_2 = 2j\Omega\sqrt{1-\zeta^2}$, $d_1 d_2 = \Omega^2$

L.obraz výchylky hmoty je

$$L\{y(t)\} = Y(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{F(s)}{s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{F(s)}{(s-d_1)(s-d_2)} \quad (4.14a)$$

V dalším výkladu se budeme věnovat převážně systémům s velmi malým, v mezním případě nulovým tlumením, tj. $\zeta \rightarrow 0$.

Příklad 3: Netlumený systém ($\zeta = 0$), reálný exponenciální impulz síly

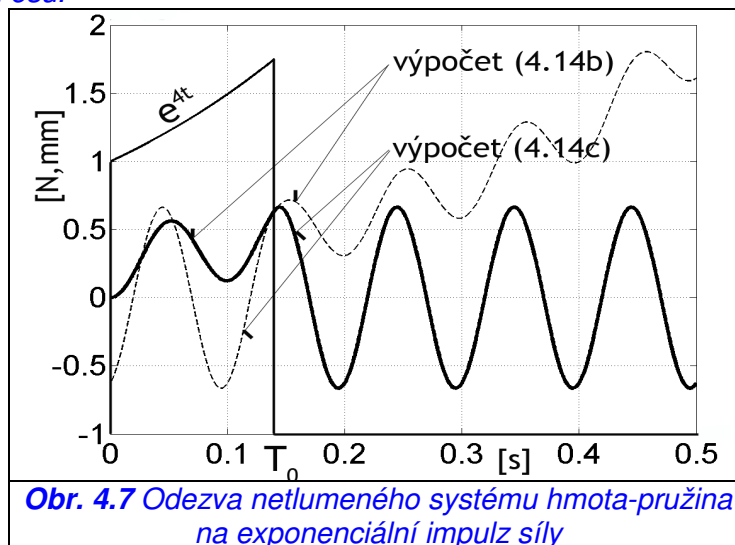
$$F(s) = B \frac{1 - e^{(p-s)T_0}}{s - p}$$

Vztahy (4.11d,e) je nutno použít dvakrát (pro oba póly $d_{1,2} = \pm j\Omega$ i jim příslušná rezidua $C_{1,2} = \pm 1/2jm\Omega$) a sečíst:

- pro $t \in \langle 0, T_0 \rangle$ je
$$y_{(t < T_0)} = \frac{B}{2jm\Omega} \left(\frac{e^{j\Omega t} - e^{pt}}{j\Omega - p} + \frac{e^{-j\Omega t} - e^{pt}}{j\Omega + p} \right) \quad (4.14b)$$

- pro $t \in (T_0, \infty)$ je
$$y_{(t > T_0)} = \frac{B}{2jm\Omega} \left(\frac{1 - e^{(p-j\Omega)T_0}}{j\Omega - p} e^{j\Omega t} + \frac{1 - e^{(p+j\Omega)T_0}}{j\Omega + p} e^{-j\Omega t} \right) \quad (4.14c)$$

Případné úpravy a zjednodušení pomocí Eulerových vztahů přenecháme čtenáři. Na obr. 4.7 je znázorněn průběh polohy hmoty pro impuls s počáteční výškou $B=1\text{N}$, $p=4$, $T_0=0,14\text{s}$ a systém $m=1\text{kg}$, $\Omega/2\pi=10\text{Hz}$. V okamžiku zániku impulsu začíná platit rovnice (4.14c). Slabě čárkované čáry nejsou směrodatné a pouze ilustrují výsledky z obou vztahů, rozšířené na celou časovou osu.



Obr. 4.7 Odezva netlumeného systému hmota-pružina na exponenciální impuls síly

Pro obdélníkový impuls s výškou B stačí do (4.14b,c) dosadit $p=0$ a po úpravách vychází

$$y_{(t < T_0)} = \frac{B}{m\Omega^2} (1 - \cos\Omega t)$$

$$y_{(t > T_0)} = \frac{B}{m\Omega^2} (\cos\Omega(t - T_0) - \cos\Omega t)$$

4.3.1 Netlumený systém, obecný silový impuls

Dále ukážeme, že u netlumeného systému (tj. $\zeta=0$) dojde v intervalu $t \in (T_0, \infty)$ k výraznému usnadnění výpočtu odezvy nejen na exponenciální, ale i na obecný impuls. Laplaceův obraz výchylky hmoty (4.14a) přejde při buzení obecným impulzem $f(t)$ na jednodušší tvar

$$L\{y(t)\} = Y(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{F(s)}{s^2 + \Omega^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{F(s)}{(s - j\Omega)(s + j\Omega)} \quad (4.15)$$

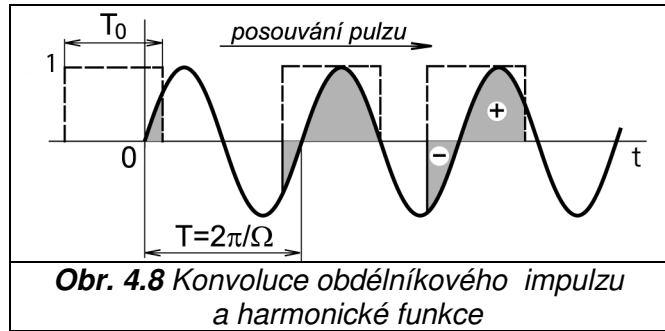
Poznámka: Protože je $L\{\sin\Omega t\} = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}$, bylo by možno pro zpětnou L.transformaci

(4.15) použít i pravidlo o konvoluci:

$$y(t) = \frac{1}{m\Omega} \int_0^t f(t - \tau) \cdot \sin\Omega \tau \, d\tau = \frac{1}{m\Omega} \int_0^t f(\tau) \cdot \sin\Omega(t - \tau) \, d\tau \quad (4.16)$$

Na **obr.4.8** je grafická interpretace konvoluce pro funkci $\sin \Omega t$ a speciální průběh síly $f(t)$ ve tvaru osamoceného obdélníkového impulsu $\gamma(t)$ o délce T_0 a jednotkové výšce.

Okamžitá hodnota konvolučního integrálu (4.16) odpovídá vytmavené ploše, která se mění s posouváním impulsu. Je tedy zřejmé, že i pro obecný tvar impulsu je funkce $y(t)$ vždy omezená, v čase T_0 spojitá a počíná časem T_0 periodická s periodou $T = 2\pi/\Omega$; Integrací per partes pravého vztahu v (4.16) a při $f(0)=0$ vychází



$$y(t) = \frac{f(t)}{k} - \frac{1}{k} \int_0^t \dot{f}(\tau) \cdot \cos \Omega(t - \tau) d\tau = y_{STAT} + y_{DYN}$$

Tohoto vztahu využil Krylov (viz **lit.[7]**) k odhadu maximální výchylky manometru pracujícího na principu hmotný píst – pružina za předpokladu, že doba tlakového impulsu výrazně převyšuje periodu kmitání pístu, tj. $T_0 \gg T = 2\pi/\Omega$ a dále, že impuls má charakteristický tvar exploze (např. v hlavní palné zbraně) s jediným maximem derivace (tlak roste monotónně z nuly a po dosažení maxima monotónně klesá). První sčítanec y_{STAT} představuje statickou výchylku (tedy správný údaj o tlaku) a pro druhý sčítanec (chybu manometru) odvodil Krylov horní odhad:

$$y_{DYN} \leq [df(t)/dt]_{MAX} \cdot \frac{T}{2k} \quad (4.17)$$

přičemž maximální výchylka nastane ještě během doby trvání impulsu. Krylov dále ukázal, že za určitých okolností může být údaj manometru vlivem dynamické složky značně zkreslen směrem vzhůru a rozptýlil obavy o poddimenzování síly stěn kanónů carského loďstva.

Odezvu na obecný budící impuls v intervalu $t \in (T_0, \infty)$ určíme pomocí (4.12a). Pro ryze imaginární póly $d_{1,2} = \pm j\Omega$ vzniknou dva sčítance, obsahující výrazy $F(\pm j\Omega)$, což jsou hodnoty Fourierova obrazu $F(j\omega)$ funkce $f(t)$ na kmitočtech $\pm \Omega$ a platí pravidla pro počítání s frekvenčními spektry.

Rezidua pro $\zeta = 0$ jsou $C_{1,2} = \frac{\pm 1}{2jm\Omega}$, takže pro polohu platí

$$y(t) = \frac{F(j\Omega) \cdot e^{+j\Omega t} - F(-j\Omega) \cdot e^{-j\Omega t}}{2jm\Omega} \quad (4.18)$$

Podle (1.18a) je

$$F(j\Omega) = |F(j\Omega)| \cdot e^{+j\alpha} \quad \text{a podobně} \quad F(-j\Omega) = |F(j\Omega)| \cdot e^{-j\alpha} \quad (4.19)$$

kde $|F(j\Omega)|$, $\pm \alpha$ jsou hodnoty amplitudového a fázového spektra budícího impulsu $f(t)$ na kmitočtech $\pm \Omega$. Dosazením do (4.18) vychází

$$y(t) = \frac{|F(j\Omega)|}{2jm\Omega} (e^{j(\Omega t + \alpha)} - e^{-j(\Omega t + \alpha)})$$

a konečně pomocí Eulerových vztahů (1.2)

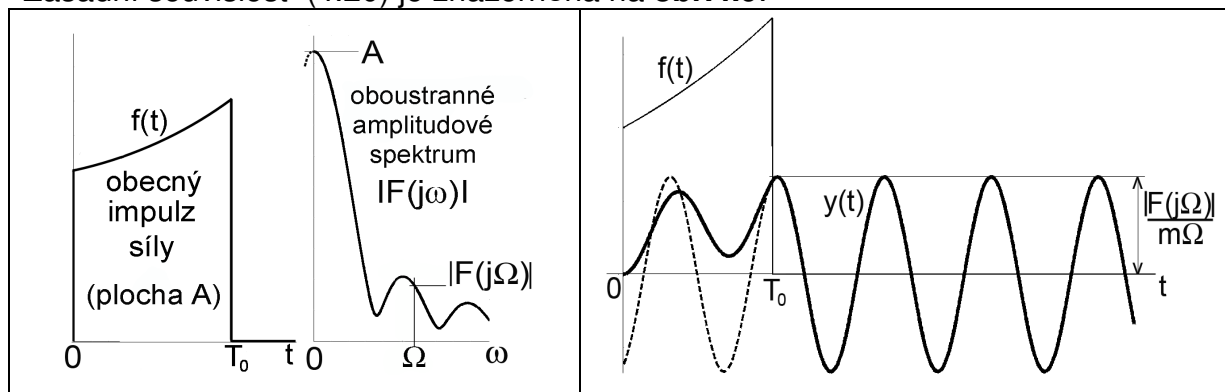
$$y(t) = \frac{|F(j\Omega)|}{m\Omega} \sin(\Omega t + \alpha) \quad v(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{|F(j\Omega)|}{m} \cos(\Omega t + \alpha) \quad (4.20)$$

Kmitavý pohyb netlumeného systému po zániku budícího silového impulsu je jednoznačně určen jedinou hodnotou frekvenčního spektra impulsu $F(j\omega)$ na vlastním kmitočtu systému Ω . Systém by nekmital v případě, kdyby spektrum mělo na kmitočtu Ω právě nulovou velikost, tj. $|F(j\Omega)|=0$.

Amplitudy kmitání polohy a rychlosti jsou

$$y_{max} = \frac{|F(j\Omega)|}{m\Omega}, \quad v_{max} = \frac{|F(j\Omega)|}{m} \quad (4.21)$$

Zásadní souvislost (4.20) je znázorněna na **obr.4.9**.



Obr. 4.9 Souvislost amplitudy kmitání hmoty a frekvenčního spektra silového impulsu po jeho zániku

Poznámky: 1) Zdůrazňujeme, že $F(j\omega)$ je oboustranné spektrum funkce $f(t)$ podle (1.17). Protože tato je v intervalu $t \in (T_0, \infty)$ nulová, stačí integrovat v intervalu $\langle 0, T_0 \rangle$:

$$F(j\omega) = \int_0^{T_0} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

2) Fyzikální rozměr amplitudového spektra síly je [Ns]. Dosazením do (4.21) vychází nutně fyzikální rozměr dráhy [m] resp. rychlosti [m/s].

3) Obecný vztah (4.20) má velký význam v praxi hlavně u naměřených impulsů, které nelze matematicky popsat a které jsou často i zatíženy šumem. Z naměřených dat je ale možno získat frekvenční spektrum pomocí diskrétní Fourierovy transformace a opět použít (4.20).

Příklad 4: Buzení Diracovým impulzem síly, tj. $f(t) = \delta(t)$, $F(s) = L\{\delta(t)\} = 1$.

Pro odezvu na Diracův impuls (váhovou funkci) jsme v **kap.2** odvodili vztah (2.6)

$$g(t) = y(t) = \frac{e^{-\zeta\Omega t}}{m\Omega\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\Omega\sqrt{1-\zeta^2} t\right)$$

Limitou pro $\zeta \rightarrow 0$ vychází **váhová funkce netlumeného systému**

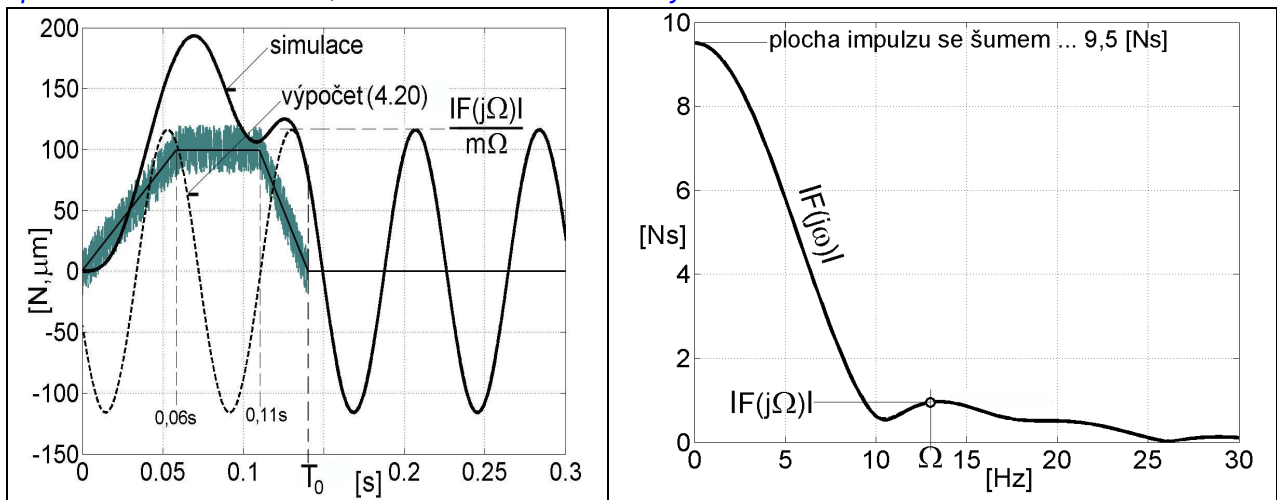
$$g(t) = y(t) = \frac{\sin\Omega t}{m\Omega} = \frac{\sin\Omega t}{\sqrt{km}}$$

Vzhledem k tomu, že amplitudové spektrum Diracova impulsu je pro všechny kmitočty konstantní jednotkové (viz (1.21)) a fázové spektrum nulové, je vztah (4.20) potvrzen.

Příklad 5: Lichoběžníkový silový impuls se šumem.

Na **obr.4.10** jsou uvedeny výsledky simulace pro systém s hmotností $m=100\text{kg}$ a vlastním kmitočtem $\Omega = 2\pi \cdot 13\text{Hz} = 81,7\text{rad/s}$. Impuls budící síly (nerovnoramenný lichoběžník s výškou 100N a šumem $\pm 20\text{N}$) byl ovzorkován a podroben FFT. Vlevo jsou vykresleny časové průběhy síly a výchylky hmoty v mikrometrech, vpravo amplitudové spektrum impulsu, které na vlastním kmitočtu systému 13Hz činí $|F(j\Omega)| = 0,95\text{Ns}$. Amplituda kmitů je $y_{max} = 116\mu\text{m}$, což souhlasí s výpočtem (4.21). Výsledky počítačové simulace a výpočtu podle (4.20) se počínaje okamžikem zániku impulsu $T_0 = 0,14\text{s}$ ztotožňují. Vibrace by bylo možno

minimalizovat tvarem lichoběžníku tak, aby se lokální minimum jeho amplitudového spektra přemístilo z kmitočtu 10,5 Hz na vlastní kmitočet systému Ω .



Obr.4.10 Odezva na zašuměný lichoběžníkový impuls síly (výška 100 N , délka 0,14 s , šum ± 20 N , systém $m=100$ kg , 13 Hz)

Amplitudová spektra časových impulsů mají obecně typický s rostoucím kmitočtem převážně klesající průběh, takže ve zlomku (4.20) s růstem Ω čítec převážně klesá a jmenovatel ve vztahu pro polohu roste, čímž klesá amplituda vibrací. Názorně je tak doložen výrazný vliv prvního (nejnižšího) vlastní kmitočtu konstrukcí strojů na tendenci k jejich rozkmitávání. Např. zvýšení vlastní kmitočtu ze 13 Hz na 17 Hz by v obr.4.10 přineslo pokles amplitudy ze 116 μm na 56 μm a naopak při vlastním kmitočtu 9 Hz amplituda vzroste na 220 μm !!

Pro čistý nezašuměný lichoběžníkový průběh byl v kap.1.12 odvozen vztah (1.52). Náhradou $s = j\omega$ získáme amplitudové spektrum, jehož průběh se jen nepatrně odlišuje od varianty se šumem. Amplituda kmitů se prakticky nezmění, neboť plocha čistého i zašuměného impulsu je téměř stejná.

4.3.2 Energie vložená do jednohmotového systému

Celková práce budící síly v obr.4.6 je obecně

$$E = \int_{t=0}^{t=+\infty} f(t)v(t)dt \quad (4.22)$$

kde $v(t)$ je rychlost hmoty m , jejíž L.obraz získáme ze (4.14a):

$$L\{v(t)\} = sY(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{sF(s)}{s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2}$$

Dále použijeme vztah (1.37) pro zpětnou Laplaceovu transformaci:

$$E = \frac{1}{2jm\pi} \int_{t=0}^{t=+\infty} f(t) \int_{s=\sigma-j\infty}^{s=\sigma+j\infty} \frac{sF(s)e^{st} ds}{s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2} dt = \frac{1}{2jm\pi} \int_{t=0}^{t=+\infty} \int_{s=\sigma-j\infty}^{s=\sigma+j\infty} \frac{sF(s)f(t)e^{st} ds}{s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2} dt$$

a záměnou pořadí integrace

$$E = \frac{1}{2jm\pi} \int_{s=\sigma-j\infty}^{s=\sigma+j\infty} \frac{sF(s)}{s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2} \int_{t=0}^{t=+\infty} f(t)e^{st} dt ds$$

U prvního integrálu musí platit, že $\sigma > -\zeta\Omega$. U druhého integrálu by vzhledem k délce impulsu sice postačoval interval $t \in \langle 0, T_0 \rangle$, ponecháme však $t \in \langle 0, \infty \rangle$. Po srovnání s definičním integrálem L.transformace (1.36) a formální záměně $-s \leftrightarrow s$ zavedeme další funkci $F(-s)$:

$$\int_{t=0}^{t=T_0} f(t)e^{s t} dt = \int_{t=0}^{t=+\infty} f(t)e^{s t} dt = F(-s)$$

Výsledný vztah pro práci budící síly (energie vloženou do systému) tedy zní

$$E = \frac{1}{2jm\pi} \int_{s=\sigma-j\infty}^{s=\sigma+j\infty} \frac{sF(s)F(-s)}{s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2} ds = \frac{1}{2jm\pi} \int_{s=\sigma-j\infty}^{s=\sigma+j\infty} \frac{sF(s)F(-s)}{(s-d_1)(s-d_2)} ds \quad (4.23)$$

Použitím (4.6) obdržíme pro obecný impulz vztahy

$$F(s) = \sum_{j=1}^i R_{p_j} \frac{1 - e^{(p_j-s)T_0}}{s - p_j} \quad F(-s) = \sum_{k=1}^i R_{p_k} \frac{e^{(p_k+s)T_0} - 1}{s + p_k}$$

Poznámka: Limitním přechodem $s \rightarrow -p_k$ snadno zjistíme, že body $-p_k$ jsou opět odstranitelnými singularitami nové funkce $F(-s)$ stejně jako body p_j u L.obrazu impulzu $F(s)$. Funkce $F(-s)$ ale není žádným L.obrazem!!

Po roznásobení součinu $F(s)F(-s)$ by integrál (4.23) přešel na součet celkem i^2 integrálů, jejichž výpočet je zdouhavý a vyžaduje hlubší znalosti funkcí komplexní proměnné. Zde se omezíme na výpočet energie vložené do netlumeného systému, kde existuje jednodušší postup:

- v **kap.4.3.1** jsme odvodili vztah (4.21) pro amplitudu kmitů netlumeného systému hmota – pružina po zániku silového impulzu obecného tvaru

$$y_{max} = \frac{|F(j\Omega)|}{m\Omega}, \quad v_{max} = \frac{|F(j\Omega)|}{m}$$

Počínaje okamžikem T_0 nastane periodické přelévání vložené energie z formy kinetické do potenciální (energie napjatosti pružiny). Maxima obou energií jsou si rovna, takže celková silou vložená energie je

$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}ky_{max}^2 = \frac{|F(j\Omega)|^2}{2m} \quad (4.24)$$

Poznámka: Protože amplitudové spektrum síly v [N] má fyzikální rozměr [Ns], kontrolou rozměrů v (4.24) vychází nutně fyzikální rozměr energie $(Ns)^2/kg = Nm$.

4.4 Rozběh vícemotového uvolněného systému impulzem síly

V této kapitole navážeme na **kap.3.2.4** pouze s tou změnou, že impulz síly zde označíme malým písmenem f ; jeho L.obraz značíme stále $F(s)$. Předpokládejme, že v N – hmotovém uvolněném systému na **obr.3.1** zapůsobí v konečném časovém intervalu $\langle 0, T_0 \rangle$ impulz síly $f_k(t)$ s plochou $A = \int_0^{T_0} f_k(t) dt$ jen na k – té hmotě.

Rovnice (3.32) pro modální souřadnice budou mít při působení jediné síly tvar

$$\ddot{q}_i = v_{k1} f_k(t), \quad \ddot{q}_i + \beta\lambda_i \dot{q}_i + \lambda_i q_i = v_{ki} f_k(t), \quad i = 2 \dots N \quad (4.25)$$

L. obraz impulzu síly $f_k(t)$ je $F_k(s)$, takže L.obrazy souřadnic jsou

$$q_1(s) = \frac{v_{k1} F_k(s)}{s^2}, \quad q_i(s) = \frac{v_{ki} F_k(s)}{s^2 + \beta\lambda_i s + \lambda_i} = \frac{C_{i1} F_k(s)}{s - d_{i1}} + \frac{C_{i2} F_k(s)}{s - d_{i2}}, \quad i = 2 \dots N \quad (4.26a)$$

kde $d_{i,1,2}$ jsou komplexně sdružené dvojice pólů jednotlivých subsystémů.

Pro L. obrazy rychlostí modálních souřadnic $v_{qi}(t) = dq_i(t)/dt$ platí

$$v_{q1}(s) = v_{k1} \frac{F_k(s)}{s}, \quad v_{qi}(s) = \frac{v_{ki} s F_k(s)}{s^2 + \beta\lambda_i s + \lambda_i}, \quad i = 2 \dots N \quad (4.26b)$$

Při zpětné transformaci u první souřadnice použijeme pravidlo 15 v kap.1.12 o integraci originálu $f_k(t)$:

$$v_{q1}(t) = v_{k1} \int_0^t f_k(\tau) d\tau = v_{k1} \int_0^{T_0} f_k(\tau) d\tau = v_{k1} A \quad (4.27)$$

Dále budeme systém vyšetřovat pouze v intervalu $t > T_0$ (tj. po odeznění impulzu), takže pro ostatní modální souřadnice je možno použít vztah (4.12a):

$$\begin{aligned} q_i(t) &= C_{i1} F_k(d_{i1}) \cdot e^{d_{i1}t} + C_{i2} F_k(d_{i2}) \cdot e^{d_{i2}t} \\ v_{qi}(t) &= dq_i/dt = C_{i1} d_{i1} F_k(d_{i1}) \cdot e^{d_{i1}t} + C_{i2} d_{i2} F_k(d_{i2}) \cdot e^{d_{i2}t} \end{aligned} \quad i = 2 \dots N \quad (4.28)$$

Polohu i rychlost n -té hmoty složíme z pohybů modálních souřadnic podle (3.33a):

$$\begin{aligned} y_n(t) &= v_{n1} q_1 + v_{n2} q_2 + \dots + v_{nN} q_N \\ v_n(t) &= v_{n1} v_{k1} A + v_{n2} v_{q2} + \dots + v_{nN} v_{qN} \end{aligned} \quad (4.29)$$

První složka rychlosti $v_{q1} = v_{k1} A$ je konstantní, ostatní složky $v_{q_{2 \dots N}}$ představují přídavné kmitání. Pokud je tlumení nenulové ($\beta \neq 0$), mají sdružené dvojice pólů $d_{i1,2}$ zápornou reálnou část, tj. $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{d_{i1}t} = 0$ a pohyb se postupně zastavuje:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} v_{qi}(t) = 0, \quad i = 2 \dots N$$

Nakonec zůstane pouze jediná ustálená složka pohybu od první modální souřadnice

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_n(t) = v_{n1} v_{k1} A$$

Speciálně pro k -tou hmotu, kde zapůsobil impulz síly, je s využitím vztahu (3.39)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_k(t) = v_{k1}^2 A = \frac{A}{m_{REDk}} = \frac{1}{m_{REDk}} \int_0^{T_0} f_k(t) dt = v_{k0}$$

jak již bylo ukázáno pro dokonale tuhý systém v (3.39a). Rychlosti hmot v čase $t \rightarrow \infty$ budou $v_{n0} = v_{k0} / p_{kn}$. Celý systém získal hybnost

$$A = m_{REDk} v_{k0} \quad (4.29a)$$

což je plocha impulzu a zároveň hodnota jeho amplitudového spektra na kmitočtu $\Omega_1 = 0$, viz obr.4.11.

4.4.1 Vícehmotový netlumený systém

V případě nulového tlumení ($\beta = 0$) je možno na každý modální subsystém použít vztahy (4.20), (4.21) s tím, že hmotnost je jednotková a síla v_{ki} – krát větší. Rychlost i -té modální souřadnice po odeznění impulzu je tedy

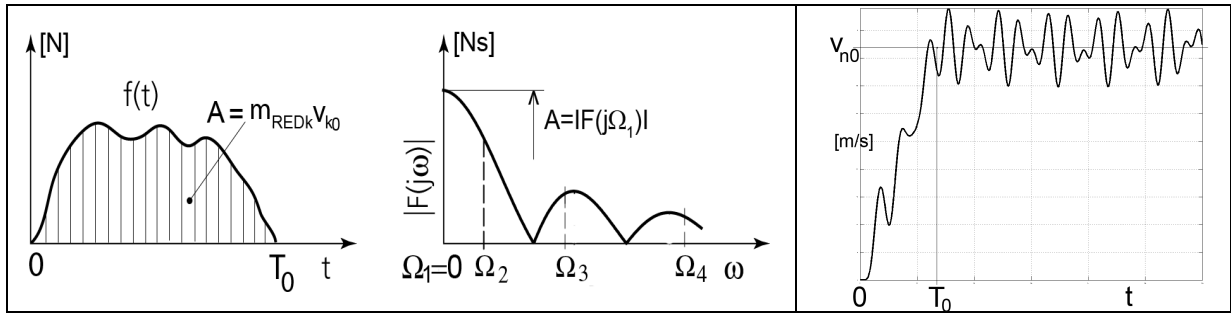
$$v_{qi}(t) = v_{ki} |F(j\Omega_i)| \cos(\Omega_i t + \alpha_i) \quad (4.30)$$

kde $|F(j\Omega_i)|$, α_i jsou hodnoty frekvenčního spektra impulzu $f(t)$ na kmitočtu Ω_i .

Součet (4.29) dává pro časový interval $t \in (T_0, \infty)$ výsledek

$$v_n(t) = \sum_{i=1}^N v_{ni} v_{qi}(t) = v_{n1} v_{k1} A + \sum_{i=2}^N v_{ni} v_{ki} |F(j\Omega_i)| \cos(\Omega_i t + \alpha_i) \quad (4.31)$$

První sčítanec $v_{n1} v_{k1} A = v_{n0}$ představuje konstantní stejnosměrnou složku (střední hodnotu) rychlosti n -té hmoty, ostatní složky jsou netlumené kmity na vlastních kmitočtech $\Omega_{2 \dots N}$, viz obr.4.11 vpravo. Pro klidný rozběh je třeba, aby amplitudové spektrum budícího impulzu mělo na kmitočtech $\Omega_{2 \dots N}$ co nejmenší hodnoty.



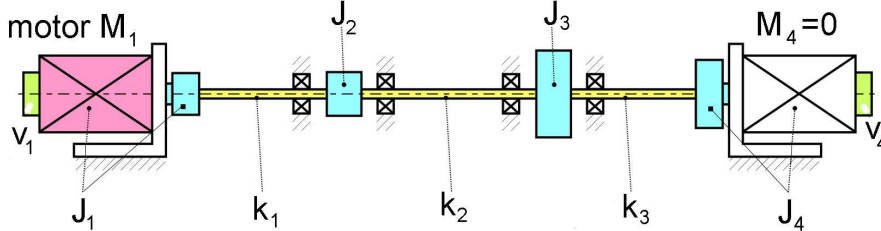
Obr.4.11 Rozběh n -té hmoty netlumeného systému

Příklad 6: Rotační čtyřmotový netlumený systém na obr.4.12 má tyto parametry:

$$J_1 = 0,0026, J_2 = 0,0018, J_3 = 0,0094, J_4 = 0,0046, J_C = \sum_{i=1}^4 J_i = 0,0184 \text{ kgm}^2$$

$$k_1 = 132,7 \quad k_2 = 110,6 \quad k_3 = 124,4 \text{ Nm/rad}$$

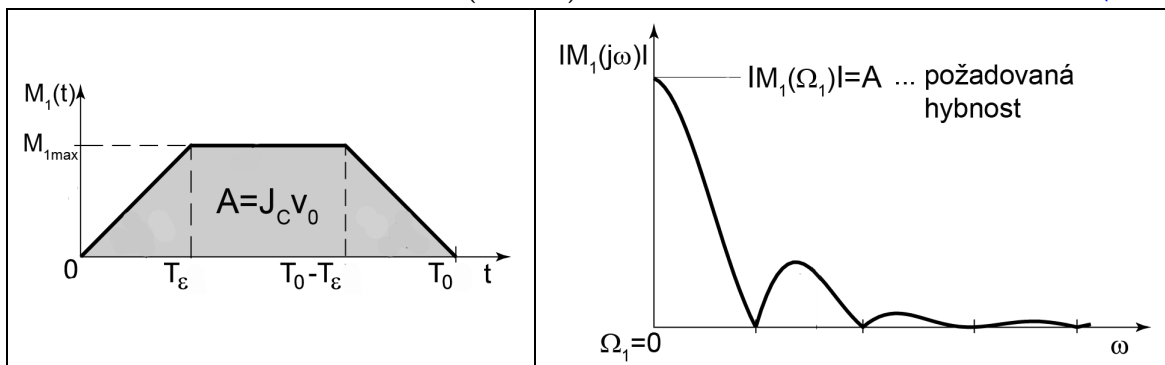
Převody jsou jednotkové, hnací moment působí na 1.hmotě ($k=1$).



Obr.4.12 Rotační netlumený čtyřmotový systém

Vlastní kmitočty jsou $f_{i=1+4} = \Omega_{i=1+4}/2\pi = 0\text{Hz}, 23,2\text{Hz}, 33,97\text{Hz}, 65,9\text{Hz}$, jak lze odečíst i z amplitudové charakteristiky na obr.3.3b v kap.3. Rozběh systému z klidu na 400ot/min ($v_0 = 41,89 \text{ rad/s}$) má proběhnout souměrným lichoběžníkovým impulzem momentu motoru $M_1(t)$, přičemž výška lichoběžníku je omezena dovoleným momentem $M_{1max} = 18\text{Nm}$. Potřebný impulz momentu (neboli jeho plocha v obr.4.13) je tedy

$$A = M_{1max}(T_0 - T_\varepsilon) = J_C v_0 = 0,771\text{Nms} \quad (4.32a)$$



Obr.4.13 Souměrný lichoběžníkový impulz momentu a jeho amplitudové spektrum

Pro celkovou délku lichoběžníku T_0 a délky ramen T_ε platí při zadané hodnotě A omezení

$$T_0 - T_\varepsilon > (T_0 - T_\varepsilon)_{min} = A/M_{1max} = 0,771/18 = 0,0428\text{s} \quad (4.32b)$$

Dále je třeba dodržet podmínku pro lichoběžník $T_0 > 2T_\varepsilon$ (4.32c)

abychom vůbec dosáhli na jeho horní stranu a využili dovolený moment motoru. L.obraz lichoběžníku a frekvenční spektrum určíme z rovnice (1.52) v kap.1.12 pro $a_1 = a_2 = T_\varepsilon$:

$$M_1(s) = \frac{M_{1max}}{T_\varepsilon s^2} (1 - e^{-T_\varepsilon s} + e^{-T_0 s} - e^{-(T_0 - T_\varepsilon)s})$$

Dosazením $s = j\omega$, použitím Eulerových vztahů a vzorců pro goniometrické funkce vychází

$$M_1(j\omega) = \left[\frac{4M_{1max}}{T_\varepsilon \omega^2} \sin \frac{\omega T_\varepsilon}{2} \cdot \sin \frac{\omega(T_0 - T_\varepsilon)}{2} \right] \cdot e^{-j\omega T_0/2} \quad (4.33)$$

Poslední součinitel za závorkou vyjadřuje pouze časové posunutí lichoběžníku o $T_0/2$ od počátku doprava a proto neovlivní velikost absolutní hodnoty spektra (časové posunutí má vliv pouze na fázové spektrum!!), takže amplitudové spektrum je

$$|M_1(j\omega)| = \frac{4M_{1max}}{T_\varepsilon \omega^2} \left| \sin \frac{\omega T_\varepsilon}{2} \cdot \sin \frac{\omega(T_0 - T_\varepsilon)}{2} \right| \quad (4.34)$$

Pro klidný rozběh systému by bylo třeba, aby v (4.34) vyšla pro tři vlastní kmitočty systému $\Omega_{2,3,4}$ vždy nula. Volit však můžeme pouze dvě veličiny T_0, T_ε a zaměříme se proto na eliminaci kmitů na dvou nižších kmitočtech $\Omega_{2,3}$, které mají zřejmě škodlivější účinky. Protože musí být $T_0 - T_\varepsilon > T_\varepsilon$, pomocí posledního součinitele v (4.34) vykompenzujeme nižší z obou a v (4.34) musí zároveň platit

$$a) \Omega_2(T_0 - T_\varepsilon)/2 = m_2\pi, \quad m_2 = 1, 2, \dots \quad \text{neboli} \quad T_0 - T_\varepsilon = 2\pi m_2 / \Omega_2 = m_2 / f_2 = m_2 T_2 \quad (4.35a)$$

$$b) \Omega_3 T_\varepsilon / 2 = m_3\pi, \quad m_3 = 1, 2, \dots \quad \text{neboli} \quad T_\varepsilon = 2\pi m_3 / \Omega_3 = m_3 / f_3 = m_3 T_3 \quad (4.35b)$$

kde T_2, T_3 jsou periody druhého a třetího tvaru kmitů, které chceme u systému potlačit.

Aby rozběh proběhl co nejrychleji, v obou podmínkách zvolíme $m_{2,3} = 1$ a časy budou

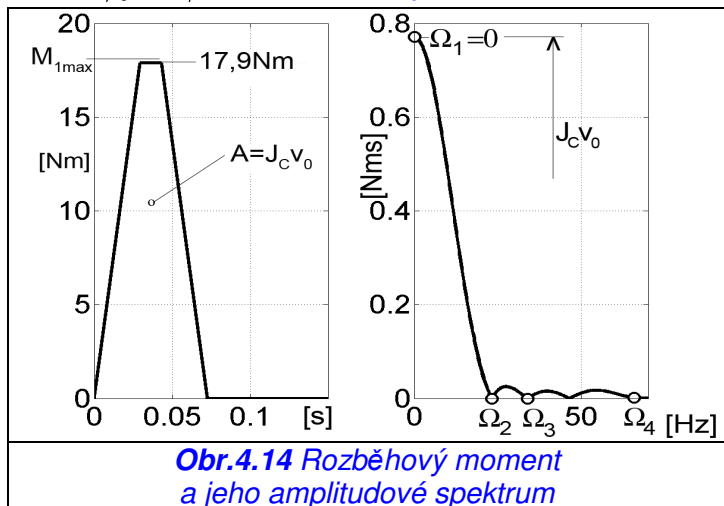
$$T_\varepsilon = 1/f_3 = 1/33,97 = 0,0294s, \quad T_0 - T_\varepsilon = 1/f_2 = 1/23,2 = 0,0431s, \quad \text{tj.} \quad T_0 = 0,0725s.$$

Podmínky (4.32b,c) jsou tedy splněny a ještě zkontrolujeme, není-li překročen dovolený moment motoru:

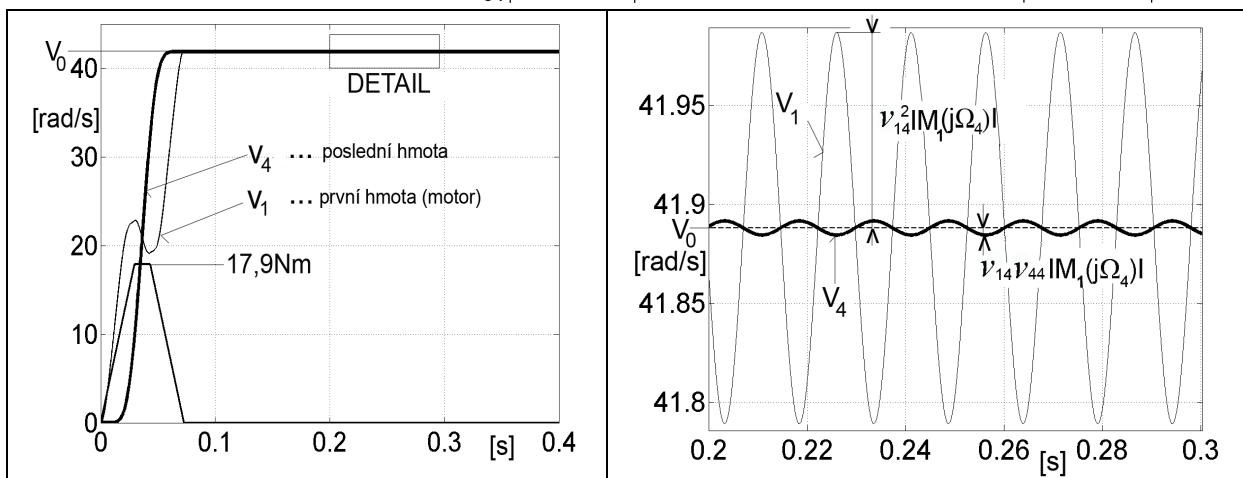
$$\frac{A}{T_0 - T_\varepsilon} = \frac{0,771}{0,0431} = 17,9Nm < M_{1max}$$

Na obr.4.14 je vykreslen zadaný průběh momentu a jeho amplitudové spektrum (4.34). Na obr.4.15 vlevo je průběh rychlosti první a čtvrté hmoty, získaný simulací. Kmitočet Ω_4 (65,9Hz) se nepodařilo zcela eliminovat, jak je patrné z detailního výřezu vpravo. Jeho vliv však není podstatný, neboť amplitudové spektrum v jeho okolí nabývá malých hodnot. Amplitudy netlumených kmitů 65,9Hz souhlasí s výpočtem podle (4.31):

$$\text{- amplituda na 1.hmotě } (n=1) \dots v_{14}^2 |M_1(j\Omega_4)|, \text{ na 4.hmotě } (n=4) \dots v_{44} v_{14} |M_1(j\Omega_4)|.$$



Obr.4.14 Rozběhový moment a jeho amplitudové spektrum



Obr.4.15 Rychlosti první hmoty (motoru) a čtvrté hmoty (v detailu je patrný kmitočet 65,9Hz)

Na lichoběžníku v obr.4.14 je patrné, že dovolený moment motoru je téměř využit, ale jen po krátkou dobu, což se zdá nevhodné. Je však třeba mít na paměti, že podle (4.35a,b)

se časy $T_0 - T_\varepsilon$ a T_ε musí rovnat celistvým násobkům period příslušných tvarů kmitů, které chceme potlačit. Např. s motorem o dovoleném momentu jen o málo nižším $M_{1max} = 17 Nm$ již nelze splnit podmínku (4.32a) a v (4.35a,b) musíme volit $m_2 = 2$, $m_3 = 1$. Tím se rozběh prodlouží na dobu $T_0 = 0,0862 + 0,0294 = 0,1156s$, ale zároveň bychom vystačili s menším (levnějším) motorem $M_{1max} = 9 Nm$. Je tedy třeba zvážit, dáme-li přednost dynamickým vlastnostem nebo ceně.

Ze vztahů (4.35a,b) vyplývá logický a zobecnitelný závěr, že systémy s vysokými vlastními kmitočty mají lepší předpoklady k rychlým změnám rychlosti bez škodlivých vibrací.

Na tomto příkladu jsme ukázali možnost eliminace dvou vlastních kmitočtů souměrným lichoběžníkovým impulzem momentu, jehož plochu je při dané výšce možno ovlivnit dvěma rozměry (náběhovou a celkovou délkou).

U obdélníkového impulzu s danou plochou lze volit jen jeden parametr (výšku nebo šířku) a tím eliminovat jen jeden nenulový kmitočet. Úspěšná aplikace s obdélníkem je tedy možná jen u systému dvojhmotového, ale je třeba zdůraznit, že dokonale skoková (tedy nekonečně rychlá) změna budicího signálu je v praxi těžko realizovatelná, nejvýše v případě napětí u elektrických obvodů. Skoková změna síly (tedy proudu) u elektromotoru již možná není kvůli zpožďujícímu vlivu indukčnosti vinutí!! Při zatěžovacích zkouškách se někdy improvizuje se skokovou změnou síly např. formou náhlého odlehčení přerušením závěsu předepnuté pružiny.

Vložená energie

Protože energie se při modální transformaci zachovává, výpočet se zjednoduší aplikací vztahu pro jednohmotový systém (4.24) na modální subsystémy s jednotkovými hmotnostmi a silovými impulzy $v_{ki} f_k(t)$. Celková energie, vložená silou na k -té hmotě za dobu trvání impulzu je

$$E = \sum_{i=1}^N E_{qi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_{ki}^2 |F(j\Omega_i)|^2 \quad (4.36)$$

Energie vložená do první modální souřadnice (tj. do volné hmoty, $\Omega_1 = 0$) je

$$E_{q1} = \frac{1}{2} v_{k1}^2 |F(j\Omega_1)|^2$$

a dosazením z (3.39) a (4.29a) vychází

$$E_{q1} = \frac{1}{2} m_{REDk} v_{k0}^2$$

což je zároveň kinetická energie, příslušející rovnoměrnému pohybu celého systému jakožto tuhého celku. Celková energie vložená silovým impulzem $f_k(t)$ je tedy

$$E = \frac{1}{2} m_{REDk} v_{k0}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N v_{ki}^2 |F(j\Omega_i)|^2 \quad (4.37)$$

Vztah (4.37) je možno interpretovat tak, že systém přijímá při rozběhu energii na svých vlastních kmitočtech. První sčítanec představuje kinetickou energii tuhého systému (tj. energii přijatou na nulovém kmitočtu), zbytek je energie parazitního kmitání. Ta se u netlumeného systému periodicky přelévá z podoby kinetické do energie napjatosti pružin a měla by být minimalizována takovou volbou tvaru impulzu, aby jeho amplitudové spektrum mělo na vlastních kmitočtech systému $\Omega_{2 \rightarrow N}$ minima (jako např. v **obr.4.14**, ale v **obr.4.11** je tomu téměř naopak!!).

4.5 Dvojhmotový systém

Výše uvedené obecné postupy zde budou aplikovány na rotační dvojhmotový netlumený systém z **kap.3.5**, kde jsme odvodili potřebné vztahy v exaktní podobě:

- vlastní kmitočet $\Omega = \sqrt{k_1 J_{C2} / J_1 J_2}$ kde $J_{C2} = p^2 J_1 + J_2 = p^2 J_{C1}$

- matice vlastních vektorů, viz (3.56) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{J_{C2}}} \begin{bmatrix} p & -\sqrt{J_2/J_1} \\ 1 & p\sqrt{J_1/J_2} \end{bmatrix}$

Zajímají nás rychlosti obou hmot (a hlavně druhé) při působení momentu motoru $M_1(t)$. Jejich L.obrazy získáme upravením (3.60) po dosazení $v_{1,2}(s) = s\varphi_{1,2}(s)$:

$$\begin{aligned} v_1(s) &= \frac{1}{J_{C1}s} M_1(s) + \frac{J_2}{J_1 J_{C2}} \cdot \frac{s}{s^2 + \Omega^2} M_1(s) \\ v_2(s) &= \frac{1}{p J_{C1}s} M_1(s) - \frac{p}{J_{C2}} \cdot \frac{s}{s^2 + \Omega^2} M_1(s) \end{aligned} \quad (4.38)$$

K rozběhu na požadovanou konečnou rychlost $v_{10} = v_{20}p$ musí motor vyvinout impuls momentu $M_1(t)$ o ploše

$$A = J_{C1} v_{10}$$

Jeho amplitudové spektrum je násobkem spektra potřebného zrychlení:

$$|M_1(j\omega)| = J_{C1} \cdot |a_1(j\omega)| \quad (4.39a)$$

Průběh rychlostí po zániku momentu zjistíme z (4.31) po dosazení $N = n = 1, 2$, $k = 1$.

Pro $t > T_0$ tedy platí

$$\begin{aligned} v_1(t) &= v_{11}^2 A + v_{12}^2 |M_1(j\Omega)| \cdot \cos(\Omega t + \alpha) = v_{10} + \frac{J_2}{J_1 J_{C2}} |M_1(j\Omega)| \cdot \cos(\Omega t + \alpha) = v_{10} + \Delta v_1(t) \\ v_2(t) &= v_{21} v_{11} A + v_{22} v_{12} |M_1(j\Omega)| \cdot \cos(\Omega t + \alpha) = v_{20} - \frac{p |M_1(j\Omega)|}{J_{C2}} \cdot \cos(\Omega t + \alpha) = v_{20} + \Delta v_2(t) \end{aligned} \quad (4.39b)$$

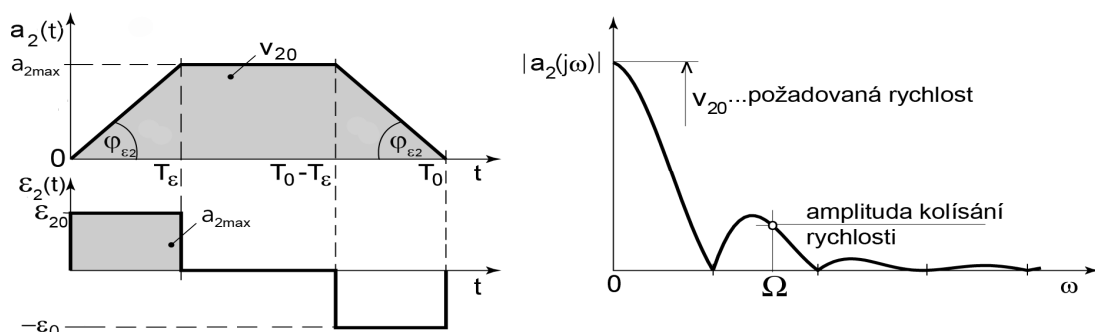
První sčítance vyjadřují rychlosti dokonale tuhého systému, druhé jejich protisměrná kmitání, která jsou v protifázi s konstantním poměrem

$$\frac{\Delta v_2(t)}{\Delta v_1(t)} = \frac{-p J_1}{J_2} \quad (4.39c)$$

Funkce $pM_1(t)/J_{C2}$ se svým spektrem $pM_1(j\omega)/J_{C2}$ představuje požadované zrychlení hnané hmoty $a_2(t)$, takže pro rozběh dvojhmotového systému platí, že

- amplituda nežádoucího kolísání rychlosti hnané hmoty po odeznění impulsu je rovna velikosti amplitudového spektra jí zadávaného zrychlení $a_2(t)$ na vlastním kmitočtu dvojhmotového netlumeného systému.

Tuto souvislost ilustruje **obr.4.16** na příkladu lichoběžníku. Oproti **obr.4.13** zde došlo jen ke změně svislého měřítka přepočtem z momentu motoru $M_1(t)$ na požadované zrychlení $a_2(t)$. Navíc je zobrazen požadovaný ryv (angl. „jerk“, něm. „Ruck“), tj. derivace zrychlení $\varepsilon_2(t) = da_2(t)/dt$, který má v tomto případě obdélníkový průběh s maximem $\varepsilon_{20} = \text{tg } \varphi_{\varepsilon_2} = a_{2\text{max}}/T_\varepsilon$.



Obr.4.16 Zadávané zrychlení a ryv hnané hmoty, amplitudové spektrum zrychlení

Poznámka: U složitějších dynamických systémů je pro potlačení více tvarů kmitů nutná větší volnost při volbě tvaru silového impulsu a přechází se až čtvrtou derivací, tj. lichoběžníkový průběh ryvu.

Vložená energie je podle (4.37)

$$E = \frac{1}{2} J_{C1} v_{10}^2 + \frac{J_2}{2J_1 J_{C2}} |M_1(j\Omega)|^2 \quad (4.39d)$$

Energetický výdej motoru, potřebný pro rozběh na rychlost $v_{10} = v_{20} p$, bude minimální při absenci parazitního kmitání, tj. při $|M_1(j\Omega)| = 0$.

Příklad 7: Rozběh souměrným lichoběžníkovým impulzem podle obr.4.16:

- podle (4.34) a (4.39b) je amplituda kolísání rychlosti hnané hmoty po zániku momentu

$$\Delta v_{2max} = |a_2(j\Omega)| = \frac{4\varepsilon_{20}}{\Omega^2} \left| \sin \frac{\Omega T_\varepsilon}{2} \cdot \sin \frac{\Omega(T_0 - T_\varepsilon)}{2} \right| \quad (4.40)$$

Pro dokonale klidný rozběh stačí splnění alespoň jedné z podmínek (4.35a,b)

$$T_0 - T_\varepsilon = mT, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$T_\varepsilon = mT, \quad m = 1, 2, \dots$$

kde $T = 2\pi/\Omega$ je doba kmitu dvojhmotové soustavy. Naopak nejhorší případ nastane, když obě funkce \sin v (4.40) jsou jednotkové, tj. když zároveň platí, že časy T_ε i $T_0 - T_\varepsilon$ jsou lichými násobky času $T/2$ a amplituda kolísání rychlosti bude maximální:

$$\max[\Delta v_{2max}] = 4\varepsilon_{20}/\Omega^2 \quad (4.40a)$$

Zvláštní případy lichoběžníkového buzení

1) V případě $T_\varepsilon = T_0/2$ vzniká **trojúhelníkový průběh** momentu a podmínka klidného rozběhu je

$$T_0 = 2m \cdot T, \quad m = 1, 2, \dots \text{ viz (4.35a,b);}$$

2) Limitním přechodem pro $T_\varepsilon \rightarrow 0$ vzniká **obdélníkový průběh momentu** a amplitudu

Δv_{2max} určíme z (4.40) použitím známé limity $\frac{\sin x}{x} \Big|_{x \rightarrow 0} = 1$. Vychází

$$\Delta v_{2max} = \frac{2a_{2max}}{\Omega} \left| \sin \frac{\pi T_0}{T} \right|$$

Hnaná hmota nebude kmitat v případě, že $T_0 = m \cdot T$, $m = 1, 2, \dots$

Podrobný rozbor výše uvedených případů, typických pro dráhové řízení NC strojů, je v lit.[11].

Příklad 8: Rozběh impulzem ve tvaru jedné půlvlny sinusovky s maximem M_{1max} :

- amplitudové spektrum momentu (viz (4.7a) v kap.4.1)

$$|M_1(j\omega)| = M_{1max} \Omega_\varphi \left| \frac{1 + e^{-j\pi\omega/\Omega_\varphi}}{\Omega_\varphi^2 - \omega^2} \right|$$

- amplituda kolísání rychlosti podle (4.39b)

$$\Delta v_{2max} = \frac{a_{2max}}{\Omega_\varphi} \left| \frac{1 + e^{-j\pi\Omega/\Omega_\varphi}}{1 - (\Omega/\Omega_\varphi)^2} \right| \quad \text{kde} \quad a_{2max} = pM_{1max}/J_{C2}$$

Kolísání nenastane při $\Omega/\Omega_\varphi = 1, 3, 5, \dots$ (limitu pro $\Omega/\Omega_\varphi = 1$ určíme l'Hospitalovým pravidlem).

Výše uvedené vztahy byly experimentálně ověřovány při rozběhu dvojhmotového netlumeného systému s jednotkovým převodem podle obr.4.17 s těmito parametry:

$$J_1 = 2,6 \cdot 10^{-3}, J_2 = 4,6 \cdot 10^{-3}, p = 1, J_C = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

$$\text{tuhost } k = 41,1 \text{ Nm/rad}, \Omega = 157,3 \text{ rad/s} \dots 25\text{Hz}$$

Systém byl rozbíhán impulzem momentu levého motoru M_1 na rychlost 400 ot/min, pravý motor byl pouze pasivním setrvačником.

Potřebný impulz momentu (jeho plocha A) je

$$A = J_C v_{10} = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 \cdot 41,89 \text{ rad/s} = 0,3016 \text{ Nms}$$

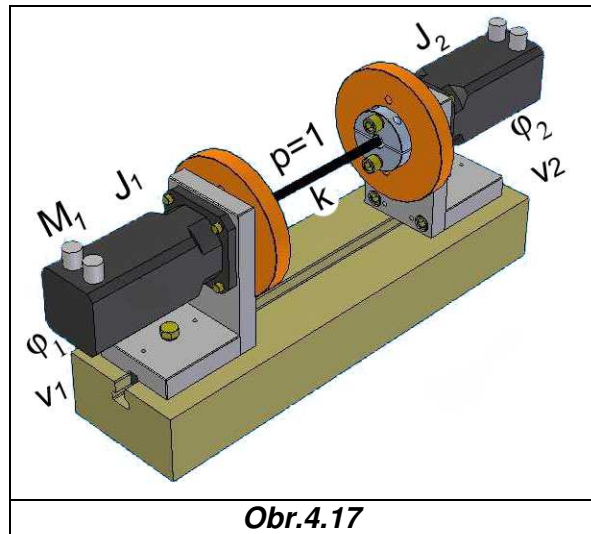
Zvolenými tvary impulzů s touto plochou byly sinusové půlvlny, lichoběžníky a obdélníky podle **obr.4.18** a **obr.4.19**.

Kmitočty sinusových půlvln v **obr.4.18** jsou $f_\phi = \Omega_\phi / 2\pi = 5\text{Hz}, 6,6\text{Hz}, 8,4\text{Hz}, 9,5\text{Hz}$.

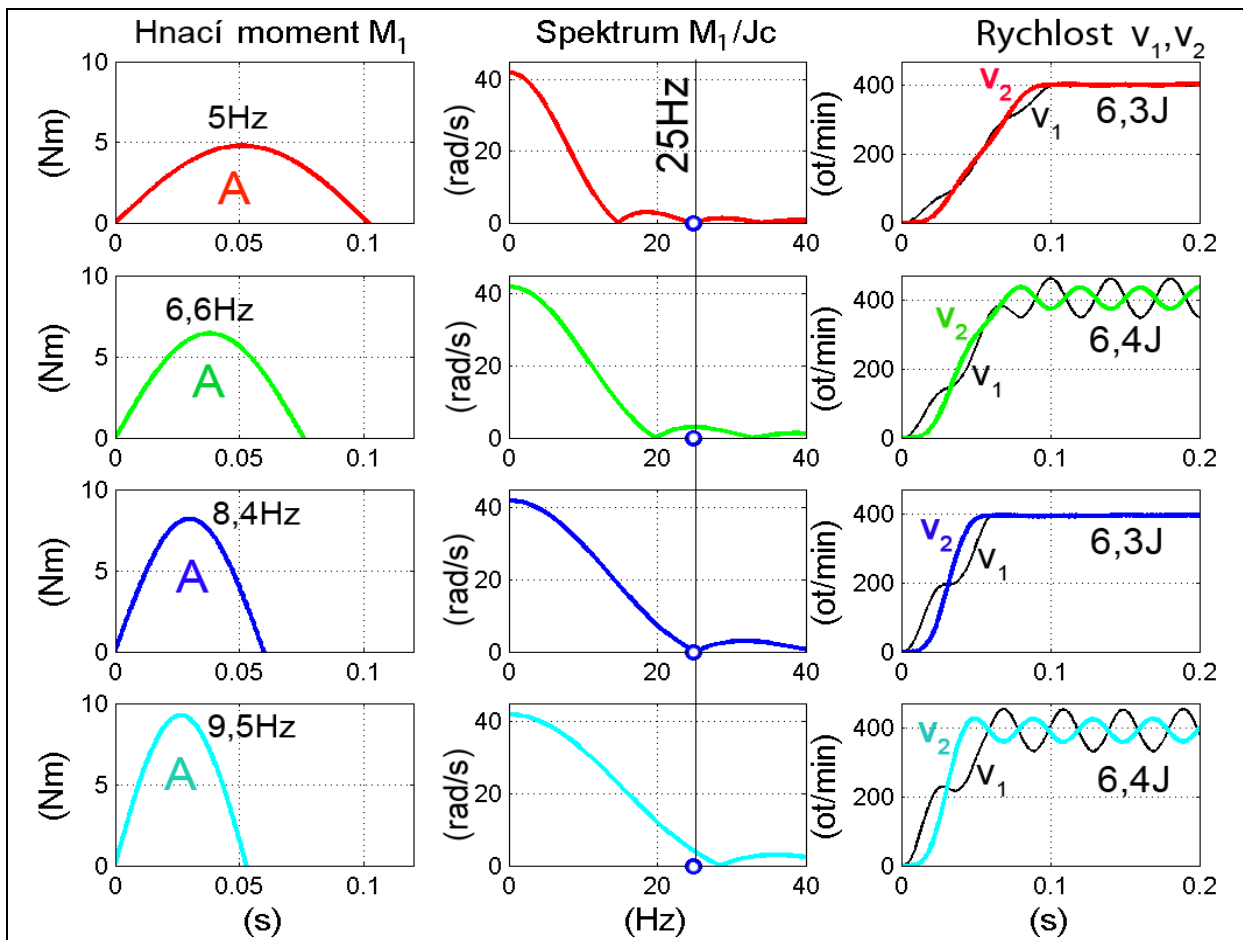
Klidný rozběh nastal při $f_\phi = 5\text{Hz}$ a $8,4\text{Hz}$, tj. v případě, kdy poměr vlastního kmitočtu systému 25Hz a kmitočtu f_ϕ je liché číslo.

Srovnáním měření při impulzu 6,6Hz a 8,4Hz se ukazuje, že rozběh kratším a "ostřejším"

impulzem nemusí být nutně doprovázen kmitáním. Naměřená kolísání obou rychlostí v_1, v_2 po odeznění impulzu souhlasí se vztahy (4.39b) a jsou v poměru (4.39c), tedy v protifázi.



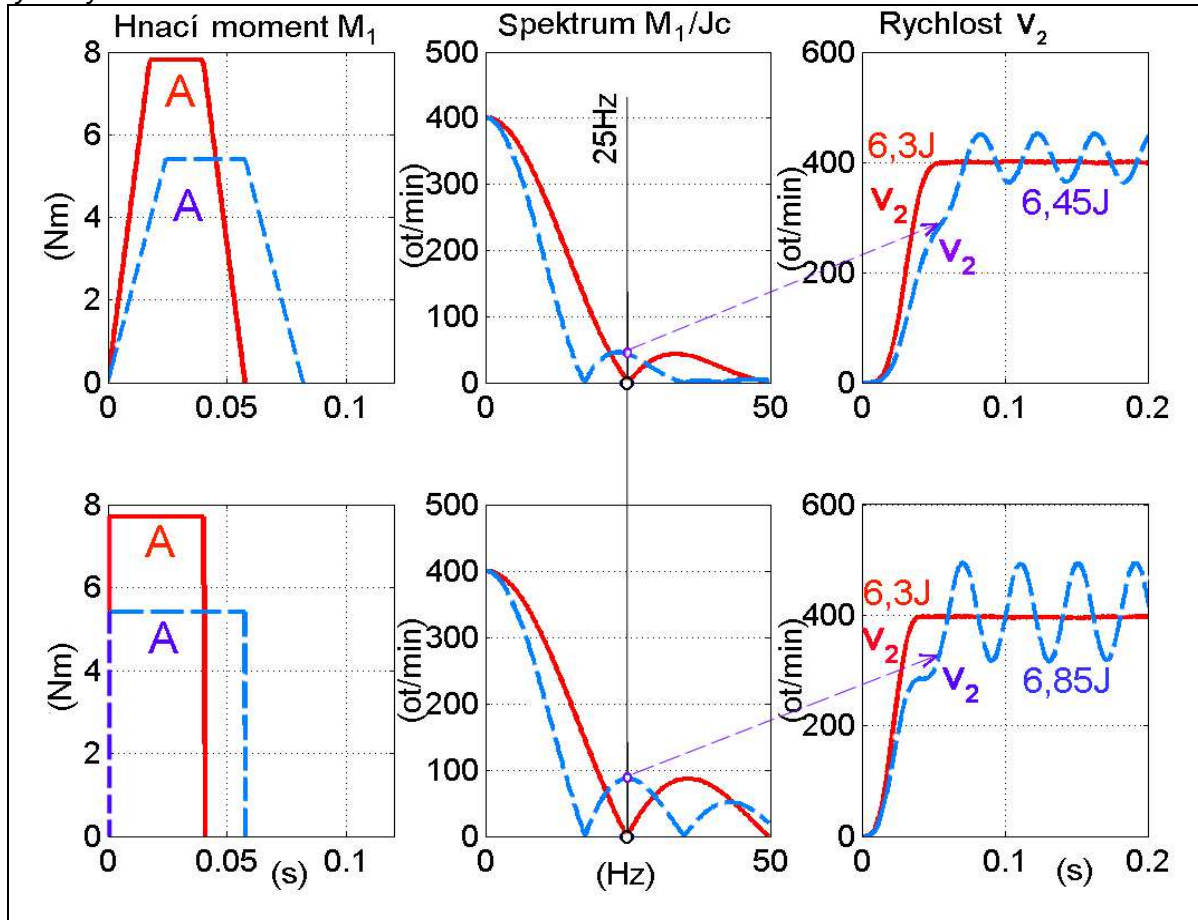
Obr.4.17



Obr.4.18 Rozběh dvojmotového netlumeného systému sinusovým impulzem

Rozběh téhož systému lichoběžníkovým a obdélníkovým impulzem je na **obr.4.19**. Je opět patrné, že při vhodném přizpůsobení spektra impulzu může být vyšší a kratší impulz výhodnější (v obrázku jsou výhodnější případy zobrazeny plnými čarami).

Všechna měření jsou doplněna výpočtem vložené energie podle (4.39d). U klidných rozběhů je její velikost vždy $E = 0,5 J_C v_{10}^2 = 6,32 J$, u ostatních není přídavný energetický výdej podstatný kromě obdélníku $5,4 Nm$, jehož spektrum má na vlastním kmitočtu systému výrazný lokální extrém.

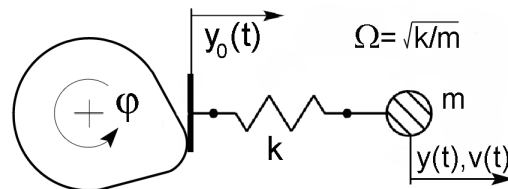


Obr.4.19 Rozběh netlumeného systému lichoběžníkovým a obdélníkovým impulzem

4.6 Kinematické buzení (vačkové mechanismy)

Všechny předchozí úvahy je možno aplikovat i na úlohu tzv. kinematického buzení, jehož jednohmotová varianta je znázorněna na obr.2.1b. Zde se budeme věnovat pouze případu nulového tlumení.

Netlumený jednohmotový systém, viz obr.4.20:



Obr.4.20 Kinematické buzení jednohmotového netlumeného systému

Pohybová rovnice pro hmotu m je

$$m\ddot{y} + k(y - y_0) = 0$$

$$\boxed{m\ddot{y} + ky = ky_0} \quad (4.41)$$

Jedná se tedy o modifikaci silového buzení, kde budicí veličinou je síla $f(t) = ky_0(t)$, daná zdvihem levého konce pružiny $y_0(t)$. Ten je primárně dán natočením vačkového hřídele $\varphi(t)$ a geometrickými tvary vačky s dotykovým členem přes tzv. „zdvihovou závislost“ $y_0(\varphi) = fce(\varphi)$.

Poznámka: Metodika návrhu vačkových mechanismů počíná zvihovou závislostí $y_0(\varphi)$ až k dynamickému rozboru tzv. „pohybové funkce“ $y_0[\varphi(t)]$ a jejích vyšších derivací je samostatnou teoreticky náročnou disciplínou. Je nutno uvažovat nejméně druhou derivaci pohybové funkce, která rozhoduje o zrychlujících silách:

$$- 1. \text{derivace } \frac{dy_0(t)}{dt} = \frac{dy_0(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad 2. \text{derivace } \frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} = \frac{d^2 y_0(\varphi)}{d\varphi^2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{dy_0(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \text{ atd.}$$

Postup bývá často usnadněn, je-li rotace vačkového hřídele rovnoměrná, tj. $\varphi = \omega t$ a druhá derivace je $\frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2 y_0(\varphi)}{d\varphi^2}$. V tomto textu návrh zdvihové závislosti $y_0(\varphi)$ „přeskočíme“ a jako vstupní veličinu zavedeme až pohybovou funkci $y_0(t)$.

Dále budeme předpokládat, že vačka vykoná jednu celou otáčku, tj. $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (o případu necelé otáčky, kdy mechanismus přechází z jedné polohy do druhé, bude pojednáno v **kap.4.6.1**). Funkce $y_0(t)$ bude mít charakter konečného impulzu v čase $t \in \langle 0, T_0 \rangle$ a vačkový mechanismus by se měl vrátit do původní polohy pokud možno bez parazitního kmitání. Frekvenční spektrum budící síly $f(t)$ je

$$F(j\omega) = kY_0(j\omega) \quad (4.42)$$

kde $Y_0(j\omega)$ je spektrum zadané pohybové funkce $y_0(t)$, která má tvar konečného impulzu. Další postup se shoduje s **kap.4.3.1**:

- průběh pohybu po ukončení impulzu zjistíme dosažením (4.42) do (4.20):

$$y(t) = \Omega \cdot |Y_0(j\Omega)| \cdot \sin(\Omega t + \alpha) \text{ pro } t \in (T_0, \infty) \quad (4.43)$$

kde α je hodnota fázového spektra pohybové funkce $y_0(t)$ na kmitočtu Ω . Klidný návrat hmoty do výchozí polohy $y=0$ proběhne v případě, že amplitudové spektrum pohybové funkce bude mít na kmitočtu Ω nulovou hodnotu.

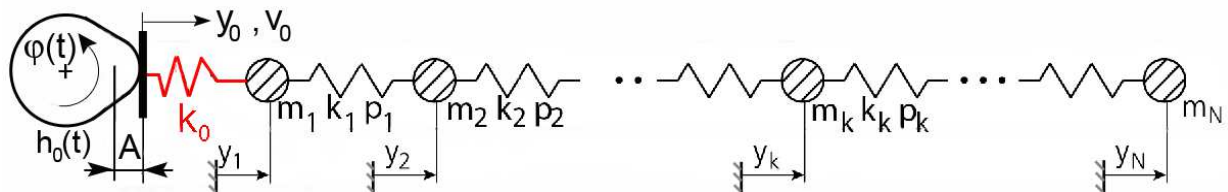
Netlumený vícehmotový systém, viz obr.4.21:

Předpokládáme, že na systém působí pouze síla vzniklá pohybem levého konce pružiny k_0 , takže první rovnice v soustavě (3.10) bude mít tvar

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_0 y_1 + k_1 (y_1 - p_1 y_2) = f_1(t) = k_0 y_0(t) \quad (4.44)$$

a pravé strany ostatních rovnic jsou nulové. V prvním řádku a sloupci matice tuhostí (3.12c) bude $k_0 \neq 0$ a první vlastní kmitočet systému nebude nulový:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$



Obr.4.21 Kinematické buzení vícehmotového systému

Modální síly jsou podle (3.30b)

$$\Phi_i(t) = v_{1i} f_1(t) = v_{1i} k_0 y_0(t)$$

a pro pohyby modálních souřadnic platí rovnice (3.31):

$$\ddot{q}_i + \Omega_i^2 q_i = v_{1i} k_0 y_0(t) \quad (4.45)$$

Pohyb každého modálního subsystému po ukončení buzení v čase $t > T_0$ určíme pomocí (4.20) s tím, že hmotnost je jednotková a síla je v_{1i} -krát větší:

$$q_i(t) = \frac{v_{1i} k_0 |Y_0(j\Omega_i)|}{\Omega_i} \cdot \sin(\Omega_i t + \alpha_i), \quad i = 1 \dots N \quad (4.45a)$$

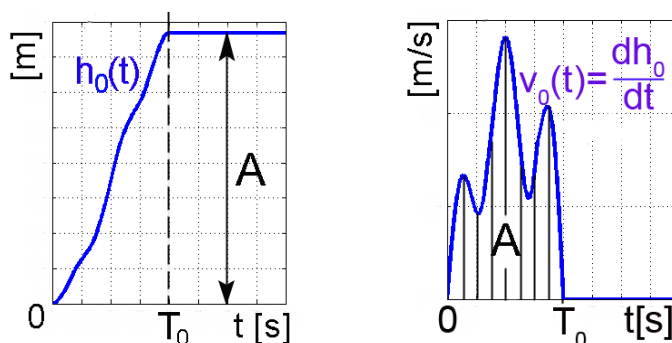
Pohyb n -té hmoty v intervalu $t \in (T_0, \infty)$, tedy po jedné otáčce vačky, je dán součtem podle (3.33a):

$$y_n = \sum_{i=1}^N \frac{v_{ni} v_{1i} k_0 |Y_0(j\Omega_i)|}{\Omega_i} \cdot \sin(\Omega_i t + \alpha_i) \quad \text{pro } t \in (T_0, \infty) \quad (4.46)$$

kde $|Y_0(j\Omega_i)|$ a α_i jsou hodnoty amplitudového a fázového spektra předepsané pohybové funkce $y_0(t)$ na vlastních kmitočtech systému Ω_i a $v_{ni} v_{1i}$ je součin první a n -té složky i -tého vlastního vektoru normované modální matice. Pro klidný návrat do výchozí polohy $y_n = 0$ je třeba minimalizovat hodnoty spektra pohybové funkce na více kmitočtech současně, což bývá v praxi obtížné.

4.6.1 Buzení ve tvaru obecné přechodové funkce

Požadavkem na vačkový mechanismus může být i přechod z jedné polohy do druhé definovaným způsobem např. o míru A , kdy vačka nevykoná jednu celou otáčku, viz **obr.4.21**. Předepsanou pohybovou funkci na celém intervalu $t \in (0, \infty)$ označíme $h_0(t)$, ale počínaje časem T_0 požadujeme od systému klid, takže na **obr.4.22** vlevo je $h_0(t) = konst$ pro $t \in (T_0, \infty)$. Je zřejmé, že derivace pohybové funkce, tj. rychlost $v_0(t) = dh_0(t)/dt$, má tvar konečného impulzu podle **obr.4.22** vpravo a je možno použít výše popsané postupy pro impulzní buzení.



Obr.4.22 Požadavek na změnu polohy $h_0(t)$ a k tomu potřebná rychlost $v_0(t)$

Amplitudové spektrum impulzu požadované rychlosti označíme $|V_0(j\omega)|$ a skutečnou polohu n -té hmoty $h_n(t)$. Odezva na impuls rychlosti (skutečná rychlost) je $v_n(t)$ a podle pravidla "odezva na derivaci je rovna derivaci odezvy" platí, že

$$v_n(t) = dh_n(t)/dt$$

a po integraci

$$h_n(t) = \int v_n(t) dt + C_n \quad (4.47)$$

Zajímá-li nás pohyb pouze v intervalu $t \in (T_0, \infty)$, je možno pro rychlost v_n použít výraz (4.46), ve kterém provedeme pouze záměnu $y_n \rightarrow v_n$, $|Y_0(j\Omega_i)| \rightarrow |V_0(j\Omega_i)|$ a po integraci v (4.47) vyjde vztah pro polohu n -té hmoty

$$h_{nrez}(t) = - \sum_{i=1}^N \frac{v_{ni} v_{1i} k_0 |V_0(j\Omega_i)|}{\Omega_i^2} \cdot \cos(\Omega_i t + \alpha_i) + C_n \quad \text{pro } t \in (T_0, \infty) \quad (4.48)$$

Poznámka: V terminologii, přijaté u vačkových mechanismů, je pro nežádoucí vibrace zaveden název "reziduální kmity" a proto používáme označení h_{nrez} , v_{nrez} .

Integrační konstanty C_n určíme nepřímo touto úvahou:

- po ukončení přechodového děje v čase T_0 zůstane na pravé straně rovnice (4.44) konstanta $k_0 A$ a systém se bude nalézat v režimu volného kmitání. Pokud by bylo tlumení mezi všemi hmotami nenulové, poloha první hmoty by se (teoreticky v čase $t \rightarrow \infty$) nutně ustálila na konečné zadané hodnotě A . V našem netlumeném systému dojde k trvalému kmitání okolo této polohy, které je v (4.48) vyjádřeno funkcemi \cos . Integrační konstanta pro $n=1$ je tedy

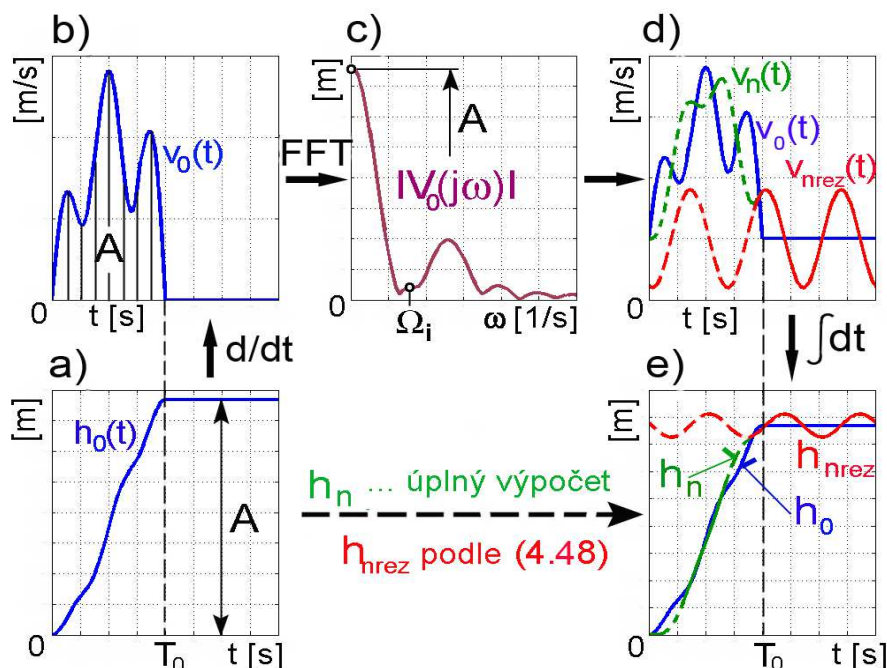
$$C_1 = A$$

a pro ostatní hmoty platí přepočít přes převodové poměry, tj.

$$C_1 / C_n = p_{1n}$$

Míra A je zároveň velikostí plochy impulzu rychlosti $v_0(t)$, neboli též hodnota jeho amplitudového spektra na nulovém kmitočtu.

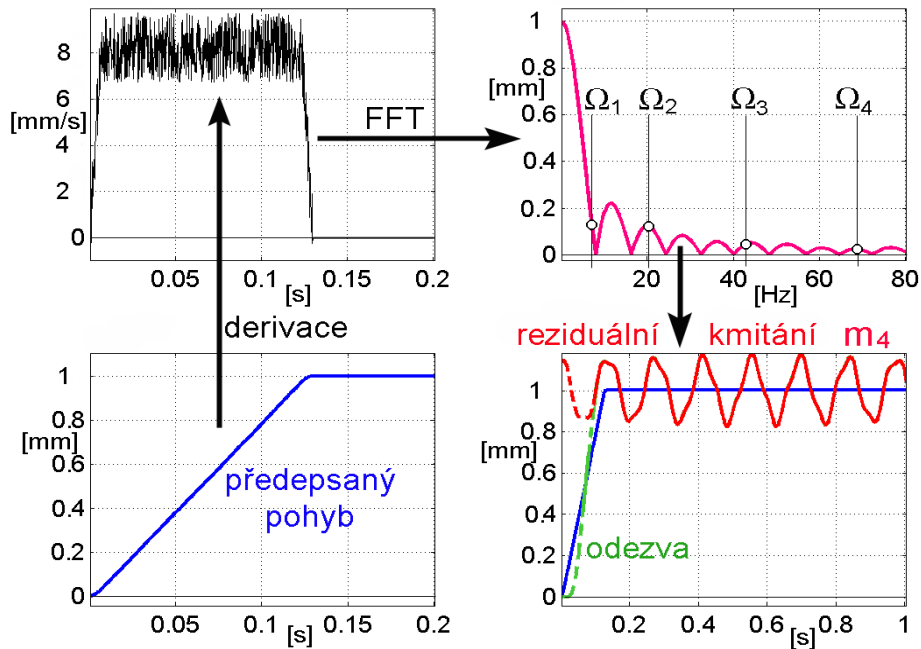
Výše popsaný postup je po jednotlivých krocích **a,b,c,d,e** znázorněn na **obr.4.23**. Čárkovaně jsou zobrazeny i úplné průběhy $v_n(t)$ a $h_n(t)$, získané simulací v celém časovém intervalu. Je vidět, že úplný výpočet přechodového děje a výpočet podle (4.48) dávají počínaje časem T_0 shodný výsledek.



Obr.4.23 Výpočet přechodového děje z frekvenčního spektra impulzu rychlosti

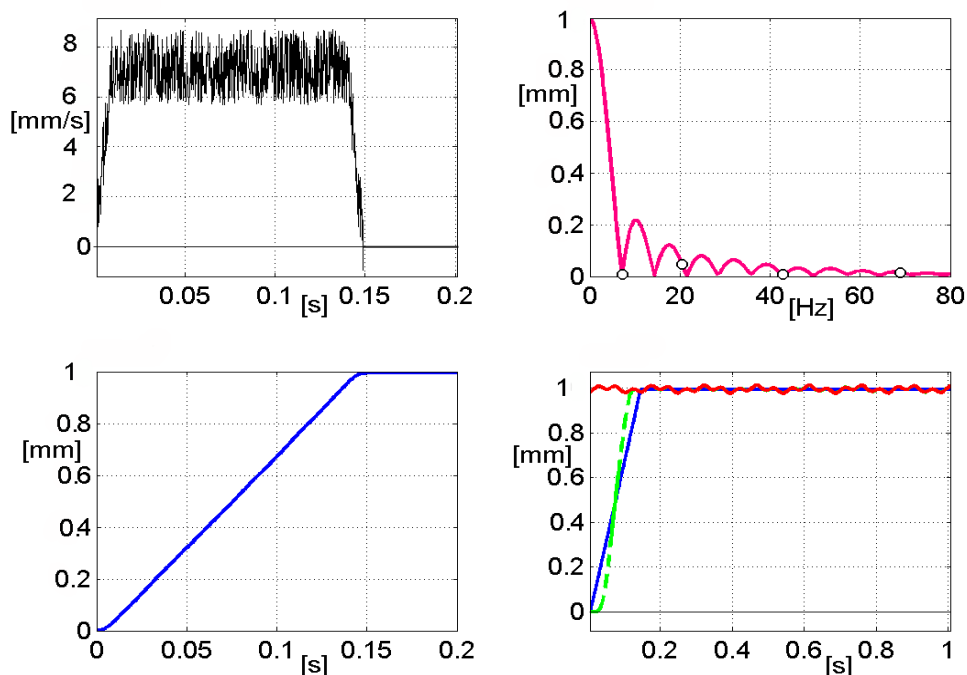
Není-li znám exaktní vztah pro pohybovou funkci $h_0(t)$, je nutno vačku proměřit, provést numerickou derivaci a její výsledek podrobit FFT. Postup pro čtyřhmotový systém s jednotkovými převody a vlastními kmitočty 7,1Hz, 20,4Hz, 42,9Hz, 68,9Hz je uveden na **obr.4.24**. Naměřený průběh funkce $h_0(t)$ může obsahovat náhodné a exaktně nepostižitelné tvary, způsobené např. nepřesnou výrobou, nerovnostmi a špatnou kvalitou povrchu, opotřebením atd., které po derivaci výrazně vyniknou. Na

získaný signál rychlosti jsou sice namodulovány parazitní průběhy připomínající šum, ale pokud je možno uplatnit FFT, výše uvedený postup využívající rovnici (4.48) nadále platí. Úmyslně je zobrazen případ nevhodné volby pohybové funkce pro přemístění o 1mm , neboť na třech ze čtyř vlastních kmitočtů systému má amplitudové spektrum předepsané rychlosti téměř lokální maxima a reziduální kmitý na poslední čtvrté hmotě mají proto velkou amplitudu.



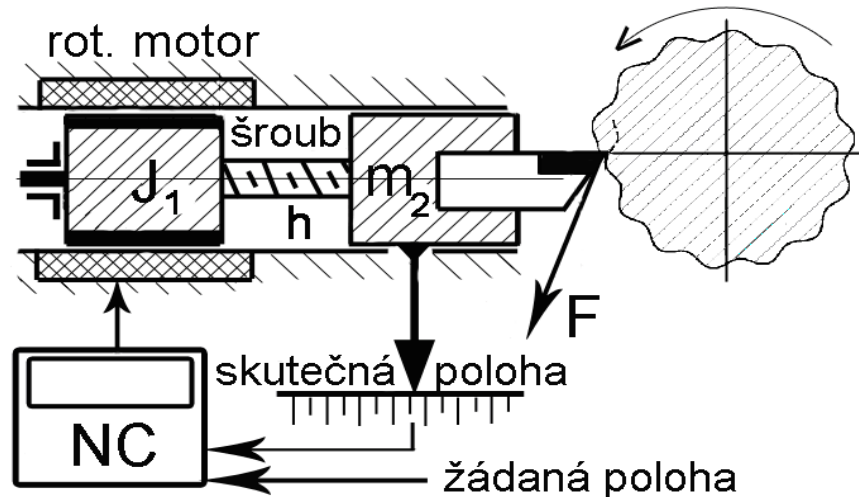
Obr.4.24 Určení reziduálních kmitů poslední hmoty u čtyřhmotového systému ($7,1\text{Hz}$, $20,4\text{Hz}$, $42,9\text{Hz}$, $68,9\text{Hz}$, $p_1 = p_2 = p_3 = 1$)

Na **obr.4.25** je zvolen výhodnější tvar pohybové funkce, u kterého je předepsaná doba přemístění asi o 15% delší. Amplitudové spektrum rychlosti na kmitočtech systému $7,1\text{Hz}$ a $42,9\text{Hz}$ je nulové, což se projeví výrazným snížením reziduálních kmitů. Pouze kmitočt $20,4\text{Hz}$ se nepodařilo zcela potlačit.



Obr.4.25 Potlačení reziduálních kmitů „zpomalením“ pohybové funkce

ZÁKLADY TEORIE SAMOBUZENÉHO KMITÁNÍ PŘI OBRÁBĚNÍ



*Příklad: dvojmotový model posuvové osy soustruhu
s rotačním motorem a šroubem*

Úvodem

Problém samobuzeného kmitání je stejně starý jako samotná technologie obrábění, ale je blíže zkoumán až po 2. světové válce. Již sám název svádí k rozdělení problematiky na dvě oblasti:

- kmitání (obecně dynamika)
- obrábění (technologie, metalografie, materiálové inženýrství).

Posouzení vývoje a pokroku v poznání u obou oblastí:

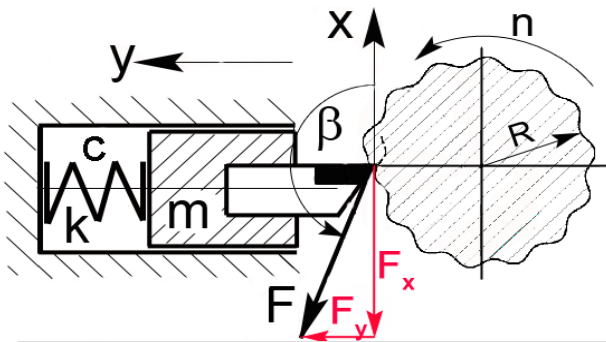
- **pokrok v oblasti dynamiky** za zmíněné cca 70-leté období je nesporný a díky výpočetní i přístrojové technice dnes až překotný, jak v oblasti teoretické, tak v navazující experimentální. Současný stav znalostí dovoluje poměrně dobře vystihnout skutečnost (až na fenomén tření a tzv. procesního tlumení, který je zkoumán pomocí nejrůznějších hypotéz a spekulací a není jej možno univerzálně matematicky popsat, nemluvě o vlivu mazání). Kupodivu zůstává poněkud opomíjena otázka vlivu dynamických vlastností vlastní regulace u pohonů posuvů;

- **pokrok v oblasti obrábění** je spíše jen v oblasti experimentální a technologické. Od počátků obrábění je známo, že tvorbu třísky a velikost i směr řezné síly lze s různými podmínkami výrazně měnit. V celé historii výzkumu samobuzeného kmitání není dosud věrohodně vysvětlen a fyzikálně-matematicky popsán děj v oblasti oddělování třísky od obrobku (pro kterou je přijata abstrakce "střížná rovina"). Děj je chvílemi nespojitý, dochází v něm k překračování mezí pevnosti v tahu-tlaku, ohybu a smyku, probíhají tam mj. i plastické deformace, tvorba nárustků, fázové i chemické změny související s teplotou, záleží na kombinaci materiálu nástroje a obrobku, na mazání a při výzkumu se pohybujeme na tenkém ledě molekulární fyziky, chemie a teorie pružnosti a plasticity. Výzkum materiálů, povlaků a tvaru řezných břitů i utvařečů třísky je založen většinou jen na experimentech a je prakticky nekonečným komerčním soubojem různých výrobců. Pro predikci a věrohodné modelování řezné síly se přijímají hypotézy nejrůznější složitosti (včetně různých opravných koeficientů), předhánějící se v originalitě přístupu.

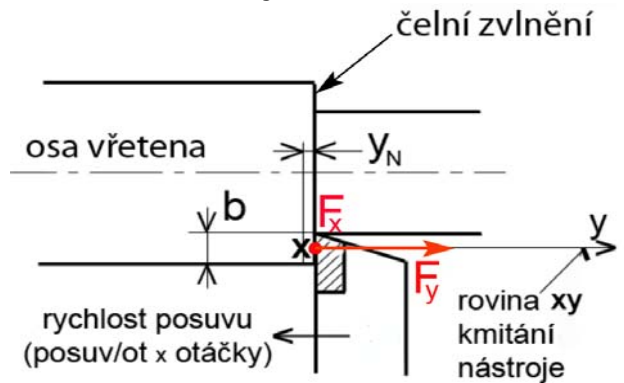
Předložený text si nedělá ambice na přesné vystižení poměrů při tvorbě třísky a měl by sloužit jen k pochopení základních principů celého procesu samobuzeného kmitání a jeho zpětnovazební podstaty. Řezná síla je proto popsána tím nejjednodušším možným způsobem - přímou úměrou s průřezem třísky při ortogonálním soustružení.

Nejjednodušší případ: ortogonální soustružení

(zavedené označení souřadných os x, y nemusí souhlasit se značením u NC strojů!!)



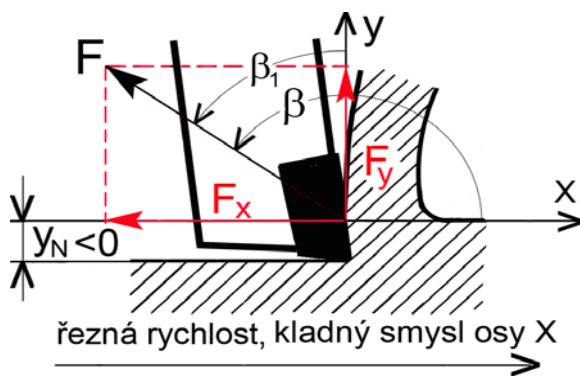
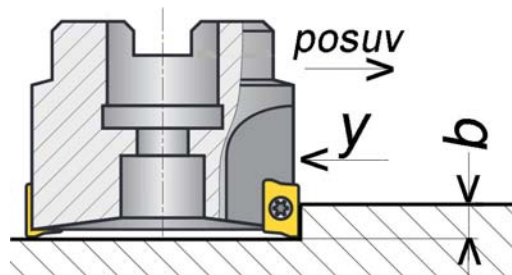
Soustružení zapichováním
(šířka třísky b kolmo k nákresně)



Stranové soustružení
(osa x kolmo k nákresně)

Frézování rovinnou frézou

- šířka třísky b svisle
- kmitání (zvlnění povrchu) ve směru y vodorovně (fréza 63A9R S90AP10D, $Z=9$)



Jiné značení sil než v teorii obrábění:

$$F_x \rightarrow F_c \quad F_y \rightarrow F_f$$

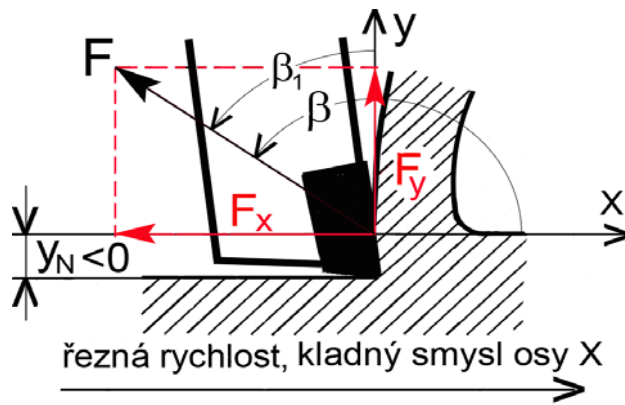
DOHODA: směry souřadných os podle matematických pravidel:

- osa x (nezávisle proměnná): **kladná doprava** (čas nebo vzdálenost měřená na povrchu obrobku), **směr tečny k obrobenému povrchu**;
- osa y (závisle proměnná): **kladná vzhůru ven z obrobku** (hloubka třísky y_N měřená kolmo k obrobenému povrchu je tedy záporná);
- **kladné úhly od osy x proti hodinám (úhel síly β)** :

POZOR: v teorii obrábění se udává úhel od normály β_1 , $\beta = \beta_1 + 90^\circ$

b ... šířka řezu, břit kolmý k nákresně - **ortogonální řezání** (zapichování, hoblování, obrázení, protahování ...)

Jak je to s řeznou silou???



Nejvyšší možné zjednodušení

Tečná řezná síla F_x je úměrná ploše řezu v normále k obráběnému povrchu, koeficient úměry... k_C $F_x = -k_C b y_N$

(v praxi se pro k_C udává několik opravných koeficientů na řeznou rychlost, chlazení-mazání, geometrii břitu a jeho zaoblení-otupení, ale i na okamžitou hloubku řezu y_N !! atd.)

Přepočet na celkovou sílu: $F = F_x / \sin \beta_1 = F_y / \cos \beta_1$

Úhel β_1 se udává v rozmezí 65° - 70° (u titanu i 45°)

**Dále budeme předpokládat, že $k_C = \text{konst}$
a že úhel β je během obrábění neměnný !**

Různé teorie okolo řezné síly (např. Handbook of Mech. Eng., skripta Technologie obrábění - prof. Mádl):

Opravné koeficienty na měrnou řeznou sílu k_C :

1. Řezná kapalina ... $0,7 \div 1$
2. Materiál nástroje ... $1 \div 1,15$
3. Opotřebení břitu ... $1 \div 1,5$
4. Vnější - vnitřní soustružení ... $1 \div 1,2$
5. Řezná rychlost v intervalu $v = 80 \div 250$ m/min $1,03 - 3v/10^4$

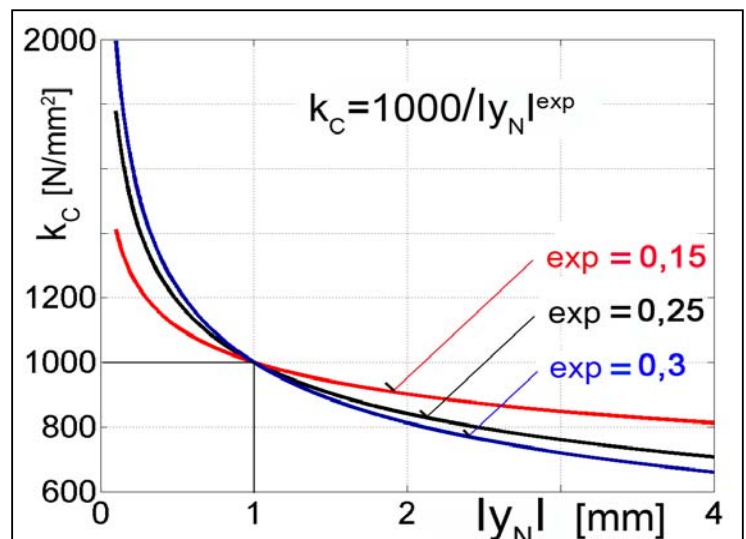
6. Pro úhel čela γ [deg] je
 $k_C = k_{C0} (1 - 0,01\gamma) / |y_N|^{\text{exp}}$
 y_N ... hloubka řezu, exp = ???

7. Pro závislost na hloubce řezu se udává
 $k_C = \text{konst} / |y_N|^{\text{exp}}$
 exp = $0,15 \div 0,3$, konst = ???

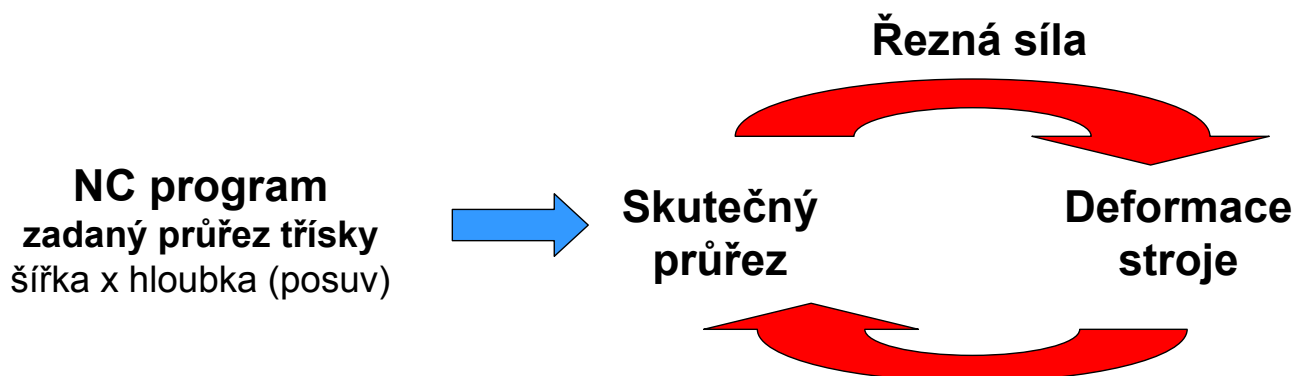
Pozor:

- zde dosazujeme $|y_N|$, tj. kladné číslo (v zavedeném souř. systému je $y_N < 0$!!)

Pokud budeme uvažovat $k_C = \text{konst}$ a $\beta = \text{konst}$, následující lineární model platí pouze v úzkém okolí hloubky y_N



**Proč použít teorii regulace a její metody:
Samobuzené kmitání při obrábění je zpětnovazební děj**



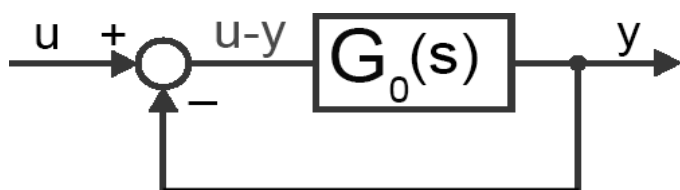
Opakování základů lineární teorie regulace:
Obvody se zápornou zpětnou vazbou
např. *Harry Nyquist: Regeneration theory*
(Bell Telephone Laboratories USA, 1932)

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

$u(t), u(s)$...obecný vstup, $y(t), y(s)$...obecný výstup

$G_0(s)$... přenos otevřené smyčky (přímé větve)

Algebraický zápis: $(u - y)G_0 = y$



Přenos uzavřené smyčky

$$Z(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

Charakteristická rovnice uzavřené smyčky $1 + G_0(s) = 0$

A. Mez stability: alespoň jeden kořen je ryze imaginární: $s = j\omega$

Stabilita je ovlivněna konstantou uvnitř G_0 (zesílením v přímé větvi)

Nyquistova zjednodušená podmínka meze stability
(nadřazená s nejvyšší prioritou)

$$G_0(j\omega) = -1$$

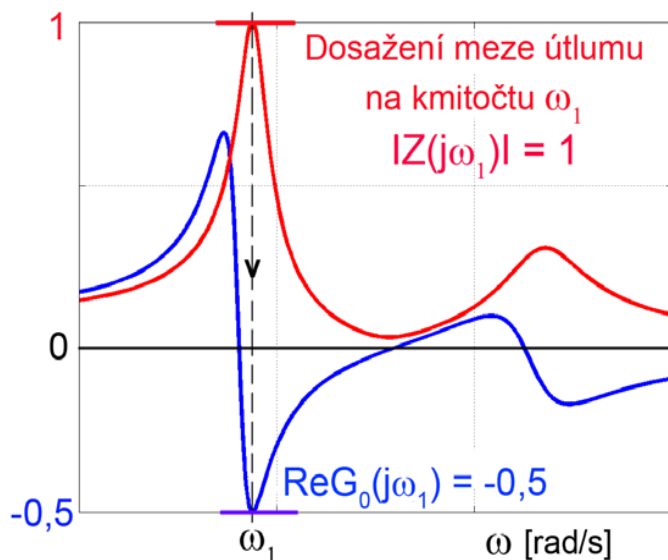
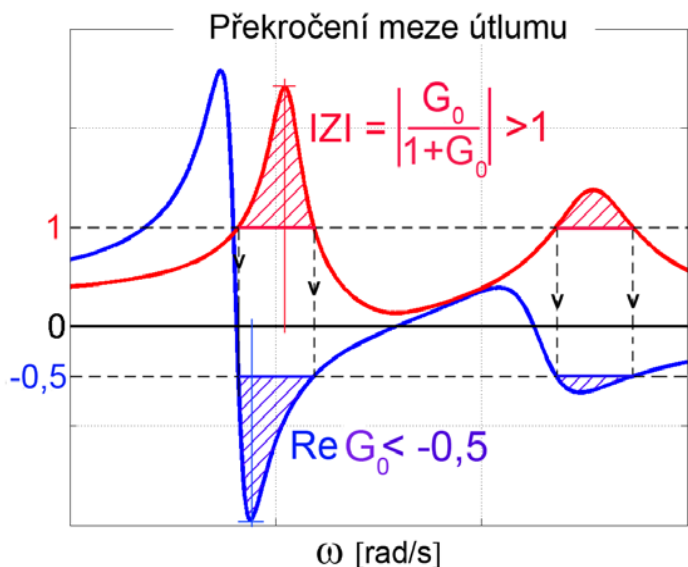
B. Mez útlumu při harmonickém rozkmitávání kmitočtem ω

Amplitudová zesílení

$$absZ = |Z| = \left| \frac{G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)} \right| \leq 1$$

$$\sqrt{\text{Re}^2 G_0 + \text{Im}^2 G_0} \leq \sqrt{(1 + \text{Re}G_0)^2 + \text{Im}^2 G_0} \implies \boxed{\text{Re} G_0(j\omega) \geq -1/2}$$

Při **A** i **B** rozhoduje **reálná část** přenosu otevřené smyčky G_0 !!



Lineární model - zpětnovazební obvod se zápornou zpětnou vazbou

Je nutné uvažovat smysly pohybu:

$y_0 < 0$... žádaná hloubka řezu, měřená ve směru normály **dovnitř obrobku**

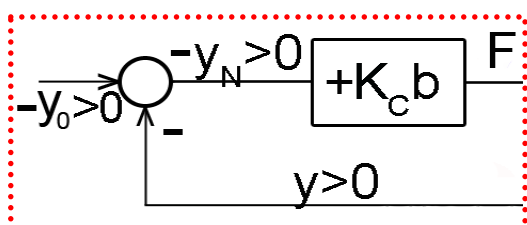
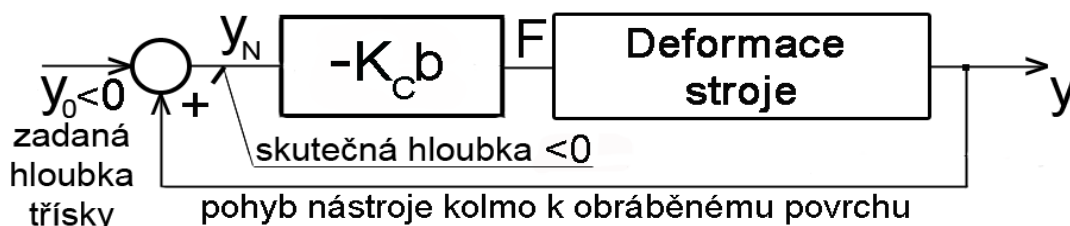
$y > 0$... nástroj je silou F vytlačován **ven z obrobku** (vzhůru)

$y_N(t) = y_0(t) + y(t)$... okamžitá hloubka řezu

- předpokládáme trvale $y_N < 0$ (tj. $|y_0| > |y|$, nástroj nevyskakuje z řezu)

$$F = -k_C b y_N / \sin \beta_1 = -K_C b y_N \quad K_C = k_C / \sin \beta_1$$

$$\boxed{F = -K_C b y_N}$$



Obrácením znamének vyjde matematicky ekvivalentní **záporná zpětná vazba!**

Hloubku třísky (posuv/ot) zadáváme v NC programu kladnou, tedy $-y_0$

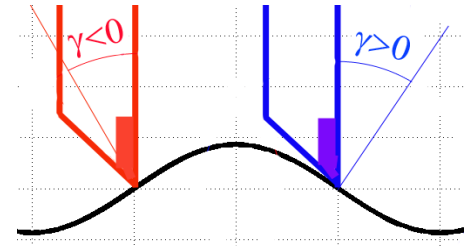
Stabilitu ovlivňuje zesílení přímé větve, tj. šířka **b** (nikoliv hloubka !!)

Diskuse okolo linearity modelu

1. Hloubka řezu $|y_N|$ klesá $\rightarrow k_c$ roste \rightarrow zesílení přímé větve roste \rightarrow sklon k nestabilitě u jemného soustružení (dokončování) roste??

2. Proměnný směr síly β ??

- např. s kolísáním úhlu čela γ (pozitivní - neg. geometrie);
- kdo někdy oral pluhem, ví oč jde: sedlák uvítá $\beta \rightarrow 180^\circ$;
- různý tvar a nastavení radlice pro písčitou půdu a pro "mastnou" černozem



3. Vliv tření - obecný přenos mezi hloubkou y_N a silou F ($k_c \neq \text{konst}$) ??

Např: třecí síla ve směru osy y (mezi odcházející třískou a čelem břitu):

- pokud se y_N mění v čase, může navíc působit síla závislá na rychlosti (viskozní tření $F_T = \text{konst} \cdot dy_N/dt$, fázový posuv mezi F_T a y_N je 90°)

Deformace (poddajnost) stroje

$$\text{statická poddajnost} = \frac{\text{statická deformace } y}{\text{konstantní síla } F}$$

Dynamická poddajnost :

- u obecných časových průběhů nutno použít **Laplaceovy obrazy**

$$G_y(s) = \text{podíl Lapl. obrazů } \dot{y} = \frac{y(s)}{F(s)}$$

$G_y(s)$... index **y** zdůrazňuje, že jde o přenos mezi **normálovou** deformací **y** a silou **F** s **obecným** směrem β

Speciální případ: harmonické rozkmitávání ($s=j\omega$)

Frekvenční dynamická poddajnost:

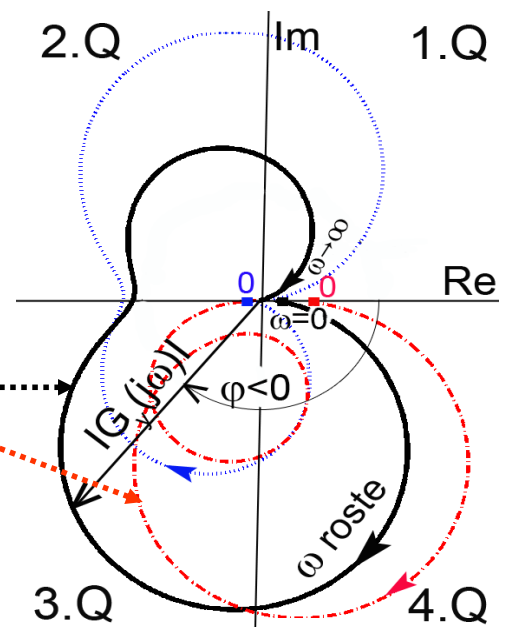
- množina komplexních čísel

Frekvenční charakteristika (Nyquistova křivka):

- různě zakroucené tvary, typicky (průsečík se zápornou reálnou osou ale nemusí existovat)

$$G_y(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{F(j\omega)} = \text{Re}G_y + j\text{Im}G_y = |G_y(j\omega)| \cdot e^{j\varphi}$$

$$0 < \omega < \infty, \quad \varphi < 0$$

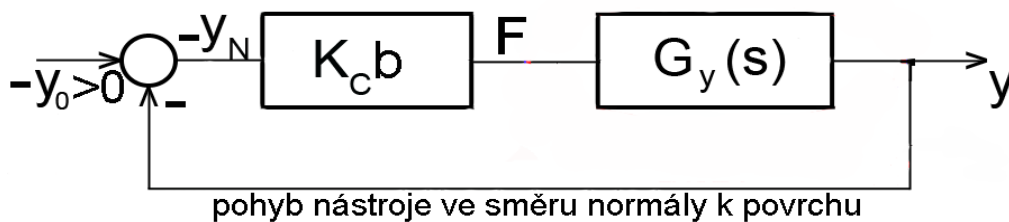


Algebraický zápis rovnic

$$F = -K_C b y_N$$

$$-y_N(t) = -y_0(t) - y(t)$$

$$y(s) = G_y(s) \cdot F(s)$$



Co zahrnujeme do celkové poddajnosti stroje??

$G_y(s)$ = poddajnost nástrojové skupiny
 (+ poddajnost regulace pohonu nástroje)
 + poddajnost obrobkové skupiny

Přenos otevřené smyčky
 $G_0(s) = K_C b G_y(s)$

- Stabilitu ovlivňuje zesílení v přímé větvi,
 mj. šířka b , nikoliv hloubka řezu!!
- obvod má **zápornou zpětnou vazbu**
 - je možno použít obě pravidla **A, B**

Rozlišujeme 3 případy

1. Jednorázové obrábění

Záběr jediné třísky, např. první zdvih při hoblování hladkého povrchu:
 - **pro praxi nepodstatný případ**, ale jeho výsledek má nejvyšší prioritu

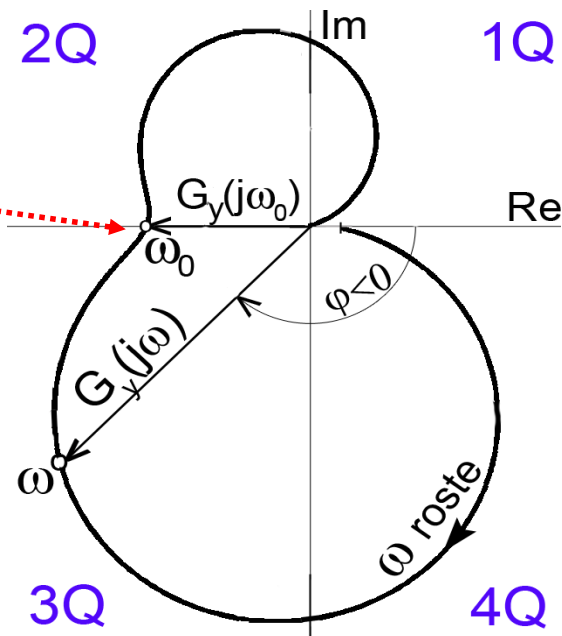
Nyquist A: na mezi stability je $G_0(j\omega) = K_C b G_y(j\omega) = -1$

$\text{Re } G_y + j \text{Im } G_y = \frac{-1}{K_C b}$... reálné záporné
 tj. $\text{Im } G_y = 0$ $G_y(j\omega)$ protne
 zápornou reálnou osu pro $\omega = \omega_0$

Základní podmínka meze stability

$$b_{\text{krit}} = \frac{-1}{K_C \text{Re } G_y(j\omega_0)}$$

Pokud existuje průsečík se záp. reálnou osou,
 je stabilní děj omezen podmínkou $b < b_{\text{krit}}$
 a při b_{krit} se stroj rozkmitá na frekvenci ω_0



2. a 3. Opakované obrábění

Zvlnění povrchu, způsobené kmitáním v prvním pracovním cyklu, se superponuje na novou hloubku řezu, zadanou do druhého cyklu. Druhým řezem už může být systém vybuzen víc, třetím ještě víc atd.

Přestože je zpětnovazební obvod stabilní, začíná se rozvíjet tzv. vynucené regenerativní kmitání

i když je splněna Nyquistova podmínka stability $b < b_{krit}$

Dva rozdílné případy opakovaného obrábění

2. Časový interval mezi dvěma řezy není definován

(např. opakované hoblování):

- dovolená šířka řezu a frekvence kmitání jsou pevně dány vlastnostmi stroje, tj. přenosem $G_y(s)$

3. Časový interval je definován (soustružení, frézování):

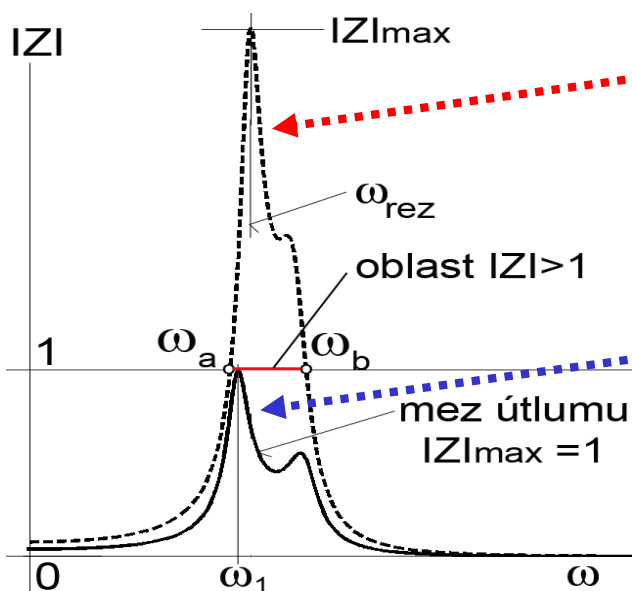
- dovolenou šířku řezu a frekvenci kmitání lze ovlivnit (otáčkami, řeznou rychlostí)

2. Časový interval mezi dvěma řezy není definován

- nástroj dokončí jeden řez a následující řez opakuje po době, která není jednoznačně dána. V pauze mezi řezy se kmitání může nebo nemusí uklidnit.

Záběr nástroje má charakter silového rázu, jehož frekvenční spektrum obsahuje více kmitočtů. Žádný z nich nesmí být amplitudově zesílen, tj. $|Z(j\omega)| < 1$

Amplitudová charakteristika přenosu uzavřené smyčky $Z(j\omega)$ se musí schovat pod úroveň 1



Nestabilní proces, amplitudy v úseku frekvencí mezi ω_a , ω_b jsou zesilovány (nejvíce u ω_{rez})

Proces na mezi stability, útlum amplitud je na všech frekvencích kromě ω_1

Nyquist B: $|Z| \leq 1$
 $\text{Re}G_0 = K_C b \text{Re}G_y \geq -1/2$ tj. $\text{Re}G_y \geq -1/2K_C b$

Mez stabilního obrábění

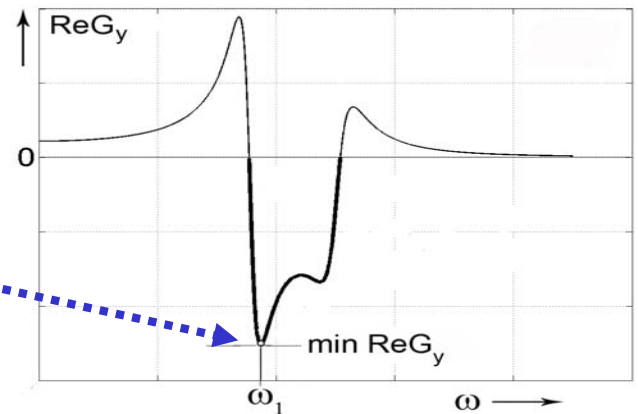
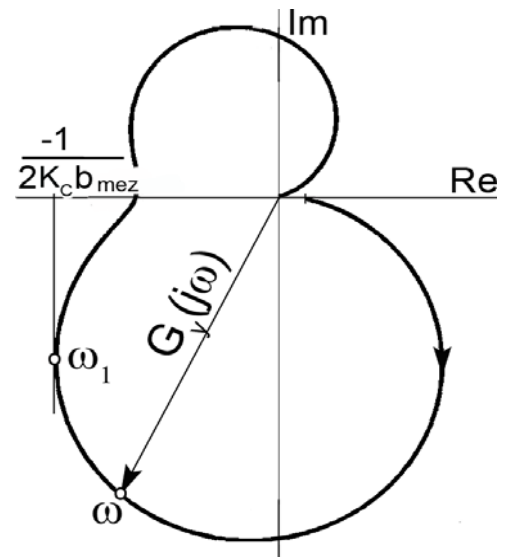
Frekvenční charakteristika dynamické poddajnosti G_y se zprava dotýká svislice $-1/2K_C b$

Frekvence v bodě dotyku je ω_1
 Mezní (maximální dovolená) šířka řezu na mezi stability je

$$b_{mez} = \frac{-1}{2K_C \text{Re}G_y(j\omega_1)}$$

(M. Poláček, VÚOSO)

- při ω_1 nastává minimum $\text{Re}G_y$
- při šířce b_{mez} se kmitání ustálí na této frekvenci
- stabilní obrábění: $b < b_{mez}$



Shrnutí

V případě **2** má záběr do řezu charakter rázu, obsahujícího množství kmitočtů vybudujících stroj. Riziko regenerativního rozkmitání řezného procesu nastává na kmitočtu nejvýraznější špičky $|Z|_{max}$ a **tento kmitočet nelze ovlivnit !!**

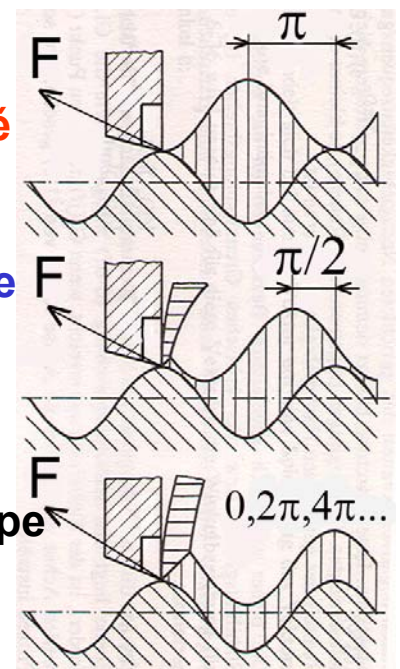
3. Časový interval mezi dvěma řezy je definován

(soustružení – kontinuální řez, frézování – přerušovaný řez). **Kmitočet řezného procesu je možno ovlivnit.** Fázový posuv mezi zvlněním z předchozího řezu a trvajícím kmitáním nástroje lze zmenšit a tím zmenšit kolísání hloubky řezu. Regenerativní rozkmitávání se potlačí a dovolená šířka řezu se může zvětšit na hodnotu $b > b_{mez}$

$\epsilon = \pi \dots$ špatně

$\epsilon = \pi/2 \dots$ lépe

$\epsilon = 2\pi \dots$ nejlépe



Nejnázornější případ - soustružení zapichováním

Počet otáček za vteřinu n_s

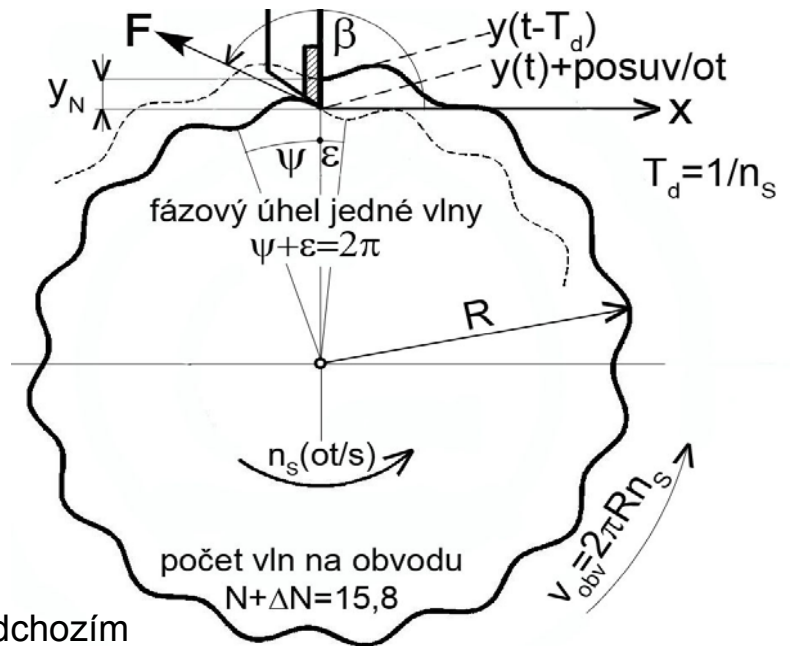
$$n_s = n[\text{min}^{-1}] / 60$$

Stejné místo přichází znovu do řezu s pevným časovým zpožděním času jedné otáčky

$$T_d = 1/n_s$$

$$y_N(t) = y_0(t) + y(t) - y(t - T_d)$$

$$\text{Frekvence kmitání } f[\text{Hz}] = \frac{\omega}{2\pi}$$



ϵ ...zpoždění nového zvlnění za předchozím

Počet vln po obvodu ... $N + \Delta N$, $N = 0, 1, 2, 3, \dots$, $0 < \Delta N < 1$

Fázový úhel ψ neúplné vlny ΔN ... $\psi = 2\pi\Delta N$

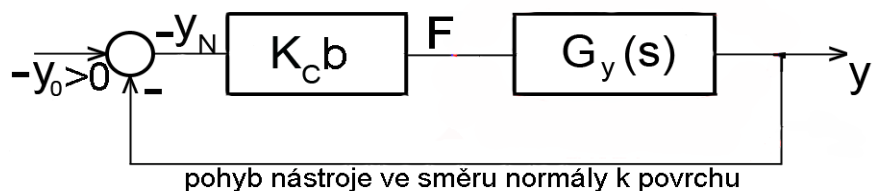
Počet vln = čas jedné otáčky x frekvence kmitání $N + \Delta N = T_d f$

bude se nám hodit vztah $T_d f = N + \psi / 2\pi \implies T_d \omega = 2\pi N + \psi$

L.obraz funkce zpožděné o čas T_d (doprav. zpoždění): $y(t - T_d) \dots y(s)e^{-T_d s}$

Dříve:

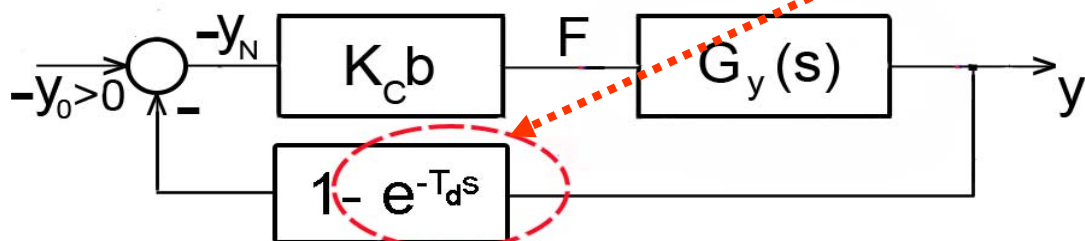
$$y_N(t) = y_0(t) + y(t)$$



Nyní

$$y_N(t) = y_0(t) + y(t) - y(t - T_d)$$

$$y_N(s) = y_0(s) + y(s) - y(s)e^{-T_d s}$$



$$Z(s) = \frac{y(s)}{-y_0(s)} = \frac{K_C b G_y(s)}{1 + K_C b G_y(s)(1 - e^{-T_d s})}$$

Kdyby bylo $T_d \rightarrow \infty \dots e^{-T_d s} = 0 \dots$ návrat k ad 2)

3a. Exaktní řešení

Charakteristická rovnice

$$1/K_C b + G_y(s)(1 - e^{-T_d s}) = 0$$

Charakteristická rovnice má nekonečně mnoho kořenů,
ale stačí vědět, že

na mezi stability je alespoň jeden kořen ryze imaginární: $S = j\omega$

dosazení $s = j\omega$, $T_d \omega = 2\pi N + \psi$

$$e^{-T_d j\omega} = e^{-j(2\pi N + \psi)} = e^{-j\psi}$$

Charakt. rovnice na mezi stability

$$1/K_C b_{mez} + G_y(j\omega)(1 - e^{-j\psi}) = 0$$

Úpravy char. rovnice (Euler) : $e^{-j\psi} = \cos \psi - j \sin \psi$

$$1/K_C b_{mez} + (\operatorname{Re}G_y + j\operatorname{Im}G_y)(1 - \cos \psi + j \sin \psi) = 0$$

Rozepsání na reálnou a imaginární část a eliminace $\operatorname{Im}G_y$:

$$\operatorname{Real} : 1/K_C b_{mez} + \operatorname{Re}G_y(1 - \cos \psi) - \operatorname{Im}G_y \sin \psi = 0$$

$$\operatorname{Imag} : \operatorname{Im}G_y(1 - \cos \psi) + \operatorname{Re}G_y \sin \psi = 0 \dots \operatorname{Im}G_y = \frac{-\operatorname{Re}G_y \sin \psi}{1 - \cos \psi}$$

$$\operatorname{Im}G_y \sin \psi = \frac{-\operatorname{Re}G_y \sin^2 \psi}{1 - \cos \psi} = \frac{-\operatorname{Re}G_y(1 - \cos^2 \psi)}{1 - \cos \psi} = -\operatorname{Re}G_y(1 + \cos \psi)$$

$$1/K_C b_{mez} + \operatorname{Re}G_y(1 - \cos \psi) + \operatorname{Re}G_y(1 + \cos \psi) = 0$$

$$1/K_C b_{mez} + 2\operatorname{Re}G_y = 0$$

$$b_{mez} = \frac{-1}{2K_C \operatorname{Re}G_y(j\omega)}$$

$$b_{mez} = b_\omega = \text{funkce}(\omega)$$

Na první pohled případ **2**
ale důležitý rozdíl:

- nejen ω_1 ale množina ω !!!
Mezní šířku lze ovlivnit kmitočtem,
resp. fázovým úhlem ψ , tj. **otáčkami**

3b. Grafické řešení charakt. rovnice na mezi stability

$$1/K_C b_{mez} + G_y(j\omega) = G_y(j\omega)e^{-j\psi}$$

Součet tří komplexních čísel jako vektorů (pozor na správné směry šipek !!)

Vodorovná strana **rovnoramenného** trojúhelníka: $1/K_C b_{mez} = -2\text{Re}G_y$

Relevantní je jen **2. a 3.kvadrant** (záporná část reálné charakteristiky $\text{Re}G_y$)

Zno vu vychází $b_{mez} = \frac{-1}{2K_C \text{Re}G_y(j\omega)}$

Hledání větší šířky $b_\omega > b_{mez}$:

- trojúhelník by měl mít krátkou základnu

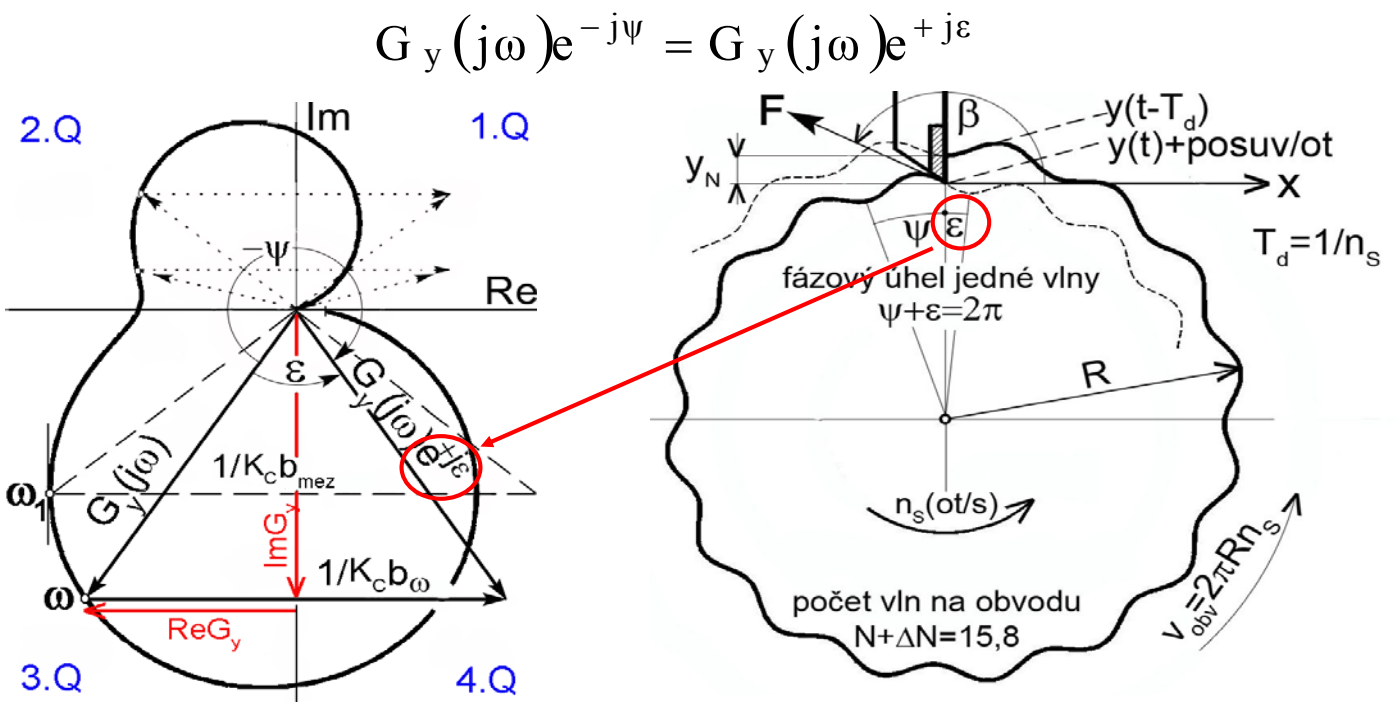
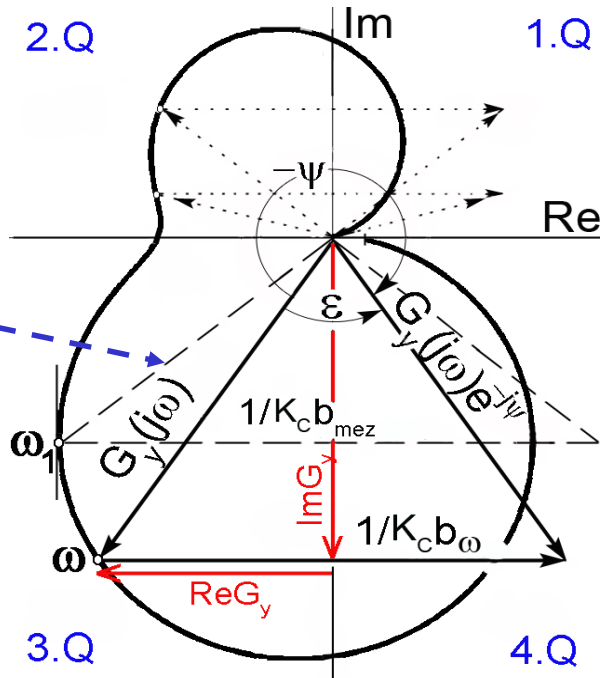
- nejhorší je ten čárkovaný při ω_1

Jak vnutit reznému procesu nějaký výhodnější kmitočet, než je právě ω_1 ???

Otáčkami (viz dále)

Kromě úhlu ψ se nám hodí i jeho doplněk ε

$$\varepsilon = 2\pi - \psi, \quad \text{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\text{Re}G_y}{\text{Im}G_y}, \quad e^{-j\psi} = e^{+j\varepsilon}$$



Úhel $\varepsilon > 0$ ➔ vektor $G_y(j\omega)$ se opožďuje za $G_y(j\omega)e^{+j\varepsilon}$



Zvlnění nového povrchu se za starým opožďuje o úhel ε
(výchylka se opožďuje za silou!!)

Odvodili jsme již dříve:

$$T_{df} = f/n_s = N + \psi/2\pi = N + 1 - \varepsilon/2\pi$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = n_s \left(N + 1 - \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\operatorname{Re}G_y}{\operatorname{Im}G_y} \right)$$

Tzv. "**otáčková rovnice**" ... přiřazuje ke kmitočtu na mezi stability otáčky, počet vln a změřené (resp. vypočtené) hodnoty dynamické poddajnosti. Konstrukce grafů ve 4 krocích z uspořádaných dvojic hodnot:

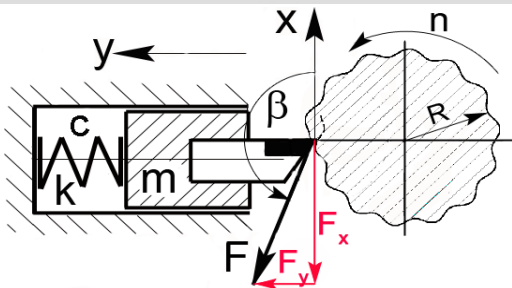
1. $\omega \leftrightarrow \operatorname{Re}G_y, \operatorname{Im}G_y$ změřeno nebo vypočteno z modelu
tj. také $\omega \leftrightarrow \varepsilon = 2\arctg(\operatorname{Re}/\operatorname{Im})$
2. $\omega \leftrightarrow b_\omega = \frac{-1}{2K_C \operatorname{Re}G_y(j\omega)}$ různé šířky na mezi stability
3. $\omega \leftrightarrow n$ **křivky frekvencí** pro $N=0,1,2,3\dots$
 $\omega = fce(n_s)$ z otáčkové rovnice
4. $n \leftrightarrow b_\omega$ **křivky šířek** (tzv. **loby**)
 $b = fce(n_s)$ pro $N=0,1,2,3\dots$

Tvary křivek viz následující **PŘÍKLAD 1** (jednohmotový systém)

PŘÍKLAD 1 (nejjednodušší jednohmotový model)

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)\sin\beta$$

$$\left(s^2/\Omega^2 + 2\zeta s/\Omega + 1\right)y(s) = \frac{\sin\beta}{k}F(s)$$



$$G_y(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sin\beta}{(j\omega)^2/\Omega^2 + 2\zeta j\omega/\Omega + 1}$$

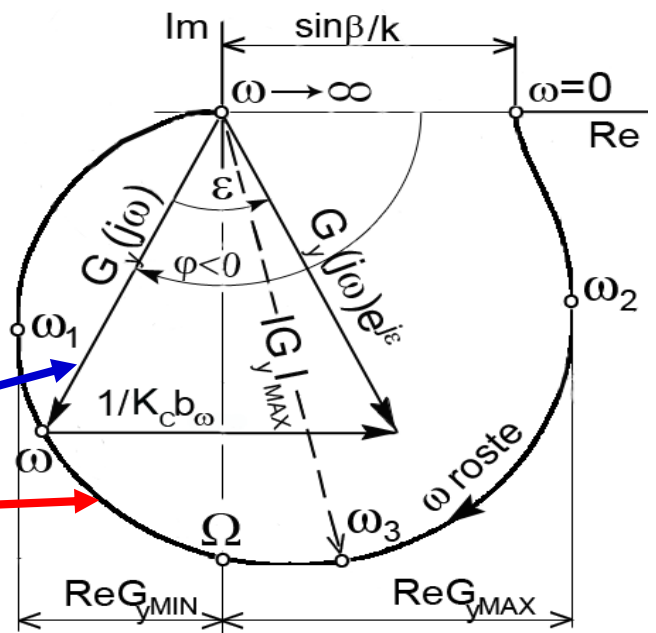
Parametry simulace:

$m=20\text{kg}$, $k=1,5 \text{ N}/\mu\text{m}$,
 $\Omega=274\text{rad/s}$ (43,6Hz)
 $c=550 \text{ Ns/m}$ ($\zeta=0,05$)
 $R=10\text{mm}$, posuv 1mm/ot
 $K_C=1000\text{N}/\text{mm}^2$, $\beta=160^\circ$

Vektorový trojúhelník

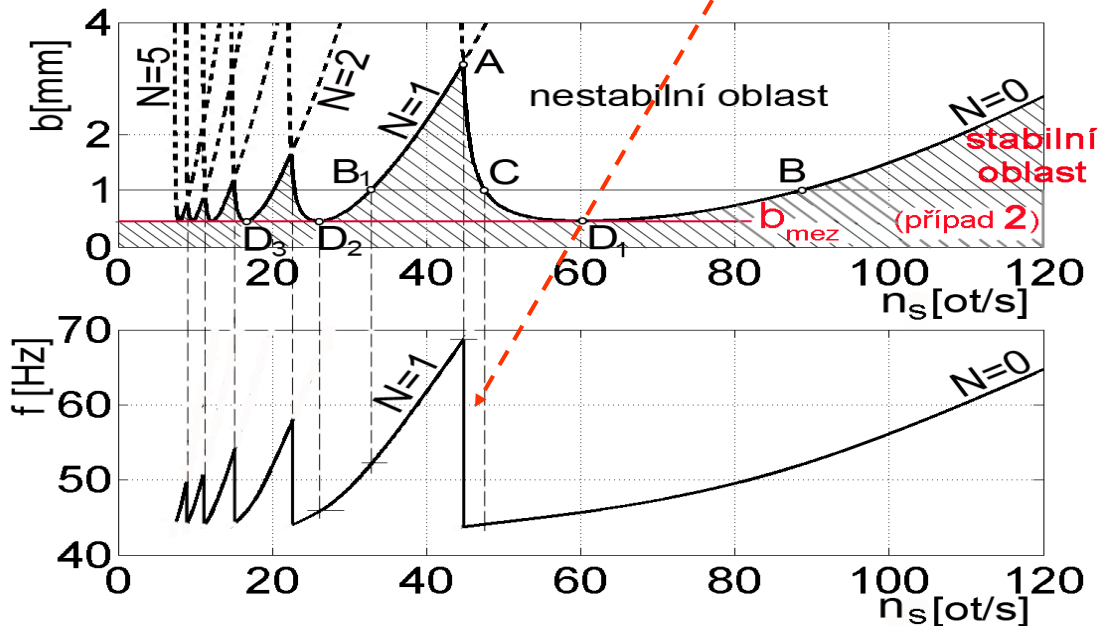
$G_y(j\omega)$ v komplexní rovině

$$G_y(j\omega) = |G_y(j\omega)| \cdot e^{j\varphi}, \quad \varphi = \arctg \frac{\operatorname{Im}(G_y)}{\operatorname{Re}(G_y)}$$



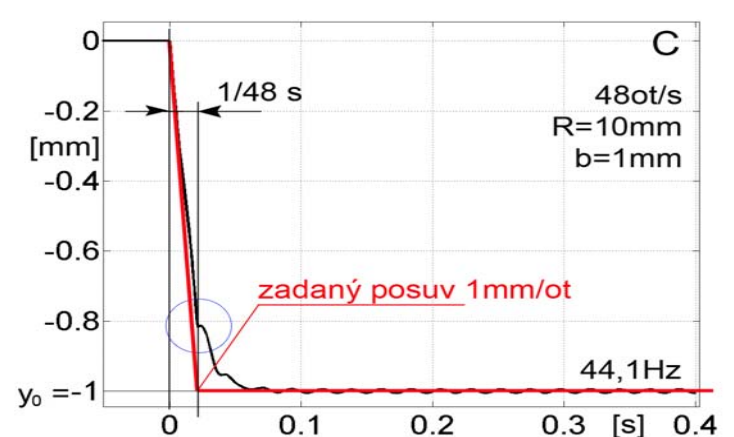
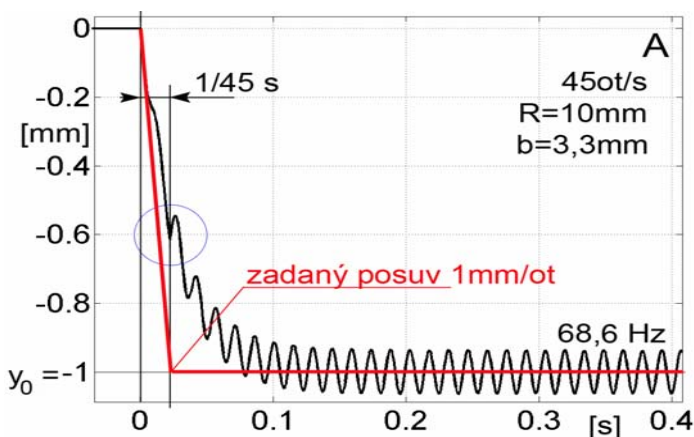
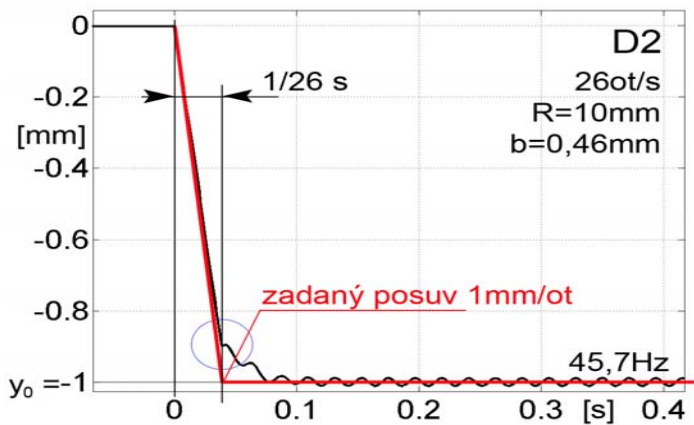
Otáčkový diagram stability

- ve šrafované ploše pod společným průnikem lobů
v grafu $n_s - b$ je stabilní oblast obrábění;
- v oblasti nad úrovní b_{mez} lze zvýšit šířku volbou otáček;
- se změnou otáček dochází k náhlému kmitočtovému přeladování



Časové průběhy $y_N(t)$ na mezi stability pro různé režimy
(např. v bodech A, B₁, C, D₂) - viz dále

Časový úsek od 0 do $T_d=1/n_s$ první otáčka
(vřezávání nože do hladkého povrchu - klidný děj)

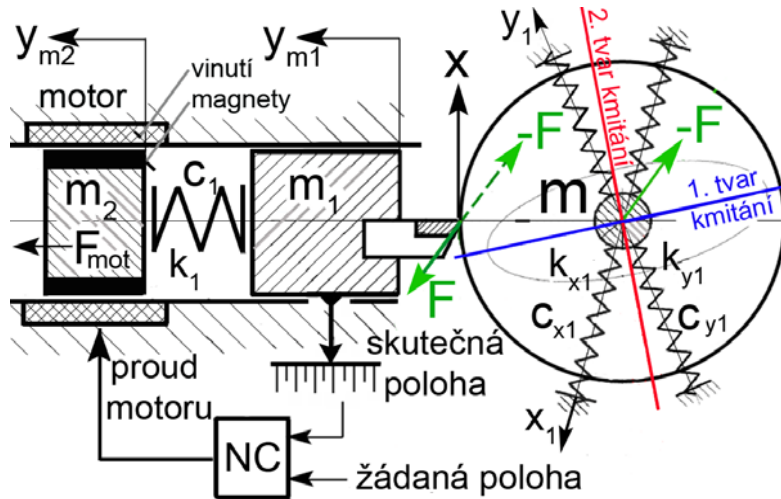


Co zahrnujeme do celkové poddajnosti stroje??

- $G_y(s)$ = poddajnost mechaniky nástrojové skupiny
 + poddajnost regulace pohonu nástroje
 + poddajnost obrobkové skupiny

PŘÍKLAD 2

- model nástrojové skupiny dvojhmotový ($N=2$)
- kaskádní regulace polohy s přímým odměřováním
- radiálně poddajné vřeteno (dva hlavní směry kmitání)



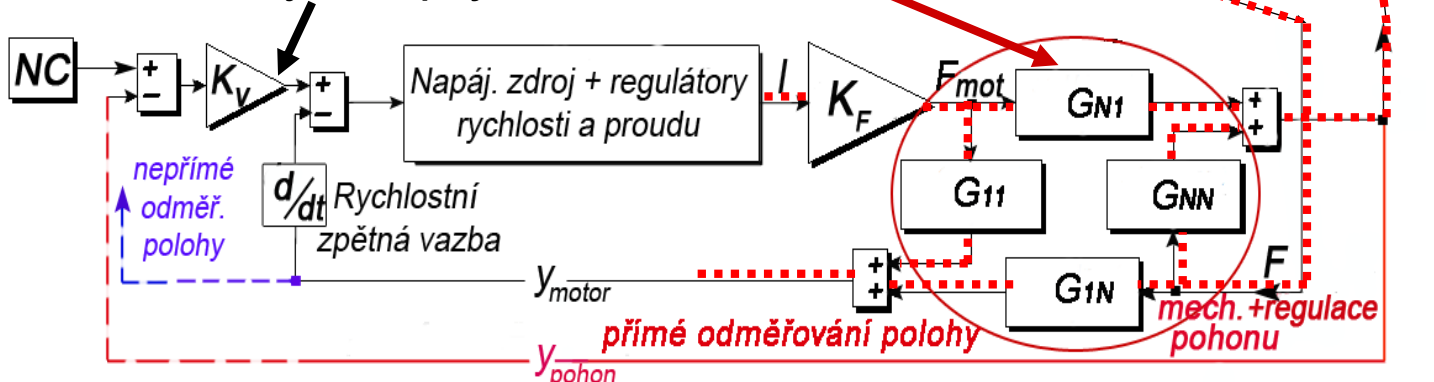
Propojení blokových schémat, sečtení deformací

$$G_y = G_{y\text{mech}} + G_{y\text{pohon}} = \frac{y_{\text{mech}} + y_{\text{pohon}}}{F}$$

modrá cesta
 červená cesta

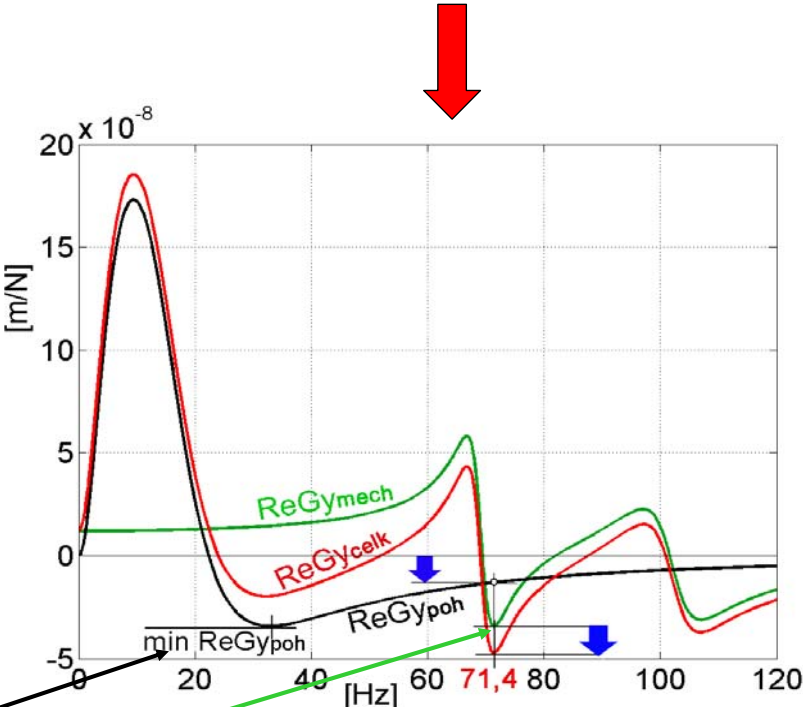
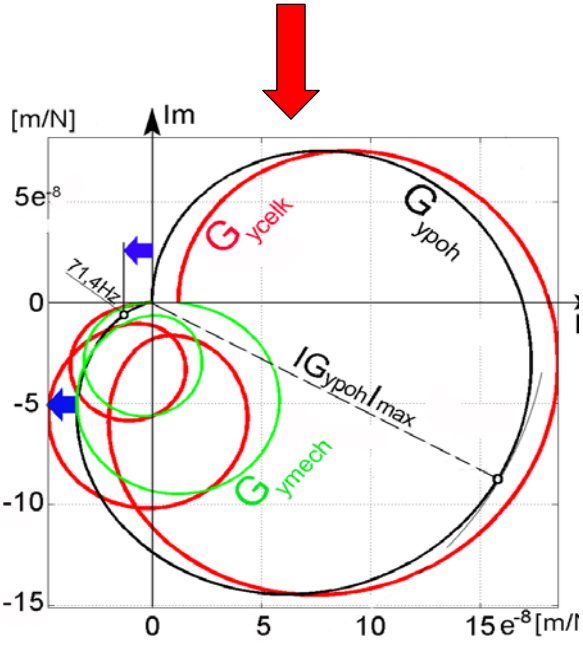
4 prvky matice poddajnosti
 obecně N-hmotové mechaniky
 nástrojové skupiny

Kaskádní regulace polohy
 nástrojové skupiny



Sčítání v frekvenčních charakteristik v komplexní rovině **vektorově**

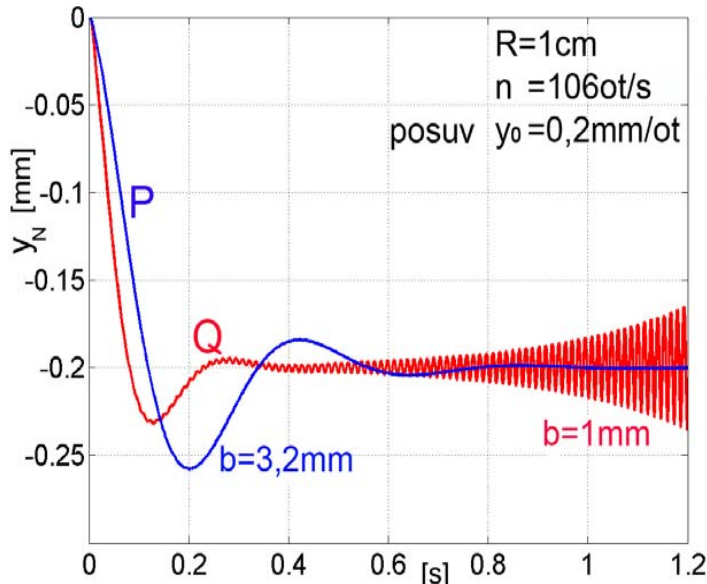
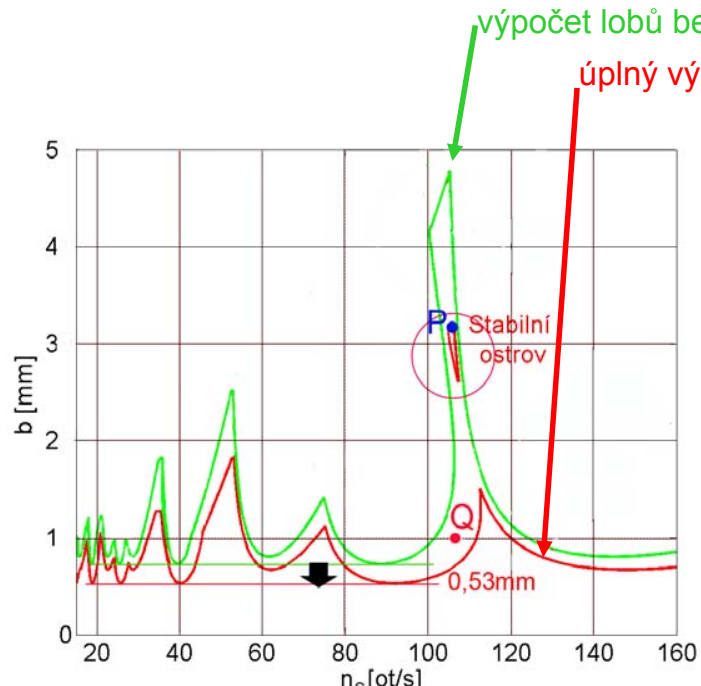
Sčítání reálných částí **algebraicky**



Vliv poddajnosti regulace pohonu: snížení mezní šířky (modré šipky)
 Obě minima ReG_{yboh} a ReG_{ymech} by se neměla potkat na stejném kmitočtu (zde se naštěstí nepotkala)

Různé tvary a průniky lobů, příliš mnoho parametrů pro ovlivnění stability (regulátory, hmotnosti, tuhosti ...)

- teoretická možnost využití stabilních ostrovů (jen v úzkém těžko udržitelném pásmu otáček okolo bodu P)
- podmíněná stabilita (v bodě Q nestabilní)



Dodatek 1

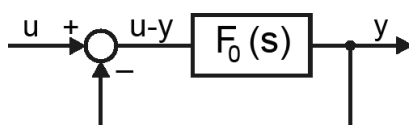
Použití metody GMK (Root Locus) u regulačních pohonů

V **kap.1.18.2** byla u zpětnovazebního obvodu s jednotkovou zápornou zpětnou vazbou na **obr.1.16** zmíněna metoda „geometrického místa kořenů – zkratka GMK“, kterou dále rozvedeme podrobně. Jedná se o postup, umožňující ze znalosti přenosu otevřené smyčky ve tvaru racionální funkce (tj. podílu dvou polynomů)

$$F_0(s) = \frac{Q_m(s)}{Q_n(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m a_k s^k}{\sum_{k=0}^n b_k s^k}$$

(kde $m \leq n$, nejčastěji ale jen $m < n$) a kořenů jejího čitatele i jmenovatele určit kořeny jmenovatele přenosu smyčky uzavřené, který je

$$U(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{F_0(s)}{1 + F_0(s)} = \frac{Q_m(s)}{Q_m(s) + Q_n(s)} \quad (D1)$$



Obř. D1 Obvod s jednotkovou zápornou zpětnou vazbou

Metoda tedy slouží k nalezení kořenů polynomu $Q_m(s) + Q_n(s)$ a v graficko–početní podobě ji poprvé v r.1948 zveřejnil **Walter R. Evans**, po kterém bývá někdy nazývána, ale známější je pod názvem **Root Locus**. Výpočet kořenů polynomů sice dnes již nečiní potíže, ale nedůvěřivý čtenář si může pomocí této metody výsledky svého PC snadno ověřit a procvičit si operace s komplexními čísly.

Výklad bude doplněn několika příklady, z nichž následující ilustrují problematiku regulačních pohonů:

- **příklad 4** (obr.D8, D8a) ... proudová regulace stejnosměrného elektromotoru s PI regulátorem;
- **příklad 5** (obr.D10) ... polohová zpětná vazba s lineárním hydromotorem a mechanickou zpětnou vazbou;
- **příklad 6** (obr.D11, D12a,b) ... GMK rychlostní smyčky dvojhmotového netlumeného systému s elektromotorem;
- **příklad 7** (obr.D13) ... polohová zpětná vazba s lineárním hydromotorem a servoventilem;
- **příklad 8** (obr.D14) ... stabilizace polohové zpětné vazby s málo tlumeným lineárním hydromotorem a servoventilem pomocí filtru.

Úvodem ocitujeme základní větu algebry:

Nechť $P(s) = a_n s^n + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, kde čísla a_0, \dots, a_n jsou obecně komplexní.

Pak existuje alespoň jedno komplexní číslo S , pro které platí $P(S) = 0$.

Jejími dvěma důležitými důsledky jsou:

- polynom n -tého stupně má právě n kořenů včetně jejich event. násobností a lze jej vyjádřit jako součin kořenových činitelů
- každou racionální funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků.

Dále zavedeme označení

N_k kořeny polynomu $Q_m(s)$ nulové body (stručně "nuly") otevřené smyčky

P_k kořeny polynomu $Q_n(s)$ póly otevřené smyčky

S_k kořeny polynomu $Q_m(s) + Q_n(s)$ póly uzavřené smyčky.

Poznámka: Otevřenou smyčku systému s regulačním pohonem lze zpravidla dobře matematicky popsat na základě teoretického nebo experimentálního rozboru, neboť se zpravidla jedná o seriové spojení tří základních typů přenosů, kterými jsou:

- integrační $1/s$ s pólem v počátku;
- proporcionální 1.řádu $\frac{1}{\tau s + 1}$ s pólem $-1/\tau$;
- proporcionální 2.řádu $\frac{1}{\frac{s^2}{\Omega^2} + \frac{2\zeta}{\Omega}s + 1}$ se dvěma komplexními póly $-\zeta\Omega \pm j\Omega\sqrt{1-\zeta^2}$;
- reciproké přenosy k předchozím třem typům.

Z (D1) je vidět, že uzavřením zpětné vazby se nezmění stupeň jmenovatele a čítele zůstane stejný. Nulové body N_k jsou stále tytéž a změní se jen póly přenosu uzavřené smyčky $U(s)$, které zjistíme řešením charakteristické rovnice

$$Q_m(s) + Q_n(s) = 0 \quad \text{nebo také} \quad 1 + F_0(s) = 0 \quad \text{tj.} \quad F_0(s) = -1 \quad (D2)$$

Evansova metoda rozděluje podmínku v (D2) vpravo na dvě části:

$$|F_0(s)| = 1 \quad (D3)$$

$$\arg F_0(s) = \pi \pm 2q\pi, \quad q = 1, 2, 3, \dots \quad (D4)$$

Přenos otevřené smyčky lze obecně upravit na tvar

$$F_0(s) = \frac{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0} = \frac{a_m}{b_n} \cdot \frac{s^m + \dots + a_0/a_m}{s^n + \dots + b_0/b_n} = K_0 \frac{\prod_{k=1}^m (s - N_k)}{\prod_{k=1}^n (s - P_k)} \quad (D5)$$

$$\text{kde} \quad K_0 = a_m/b_n$$

Všechna komplexní čísla s , splňující druhou podmínku (D4), vyplňují tzv. geometrické místo fázového posuvu 180° otevřené smyčky (GMK). Protože vytknutá reálná nezáporná konstanta K_0 (tzv. „zesílení otevřené smyčky“) určuje pouze absolutní hodnotu (modul) komplexního čísla $F_0(s)$, nikoliv jeho argument, tvar geometrického místa je nezávislý na velikosti K_0 . Hledané póly S_k přenosu $U(s)$ z (D1) nutně leží na tomto GMK a jejich poloha na něm se s konstantou K_0 mění tak, aby byla splněna první podmínka (D3).

Poznámky: 1) Za nulové body funkce $F_0(s)$ a tedy i funkce $1 + F_0(s)$ lze považovat i hodnoty $\pm\infty, \pm j\infty$. V případě ryze lomené racionální funkce (tj. když $m < n$) je důkaz triviální a obecně (tedy i při $m = n$) lze prohlásit, že počet těchto „zvláštních“ a nezapsaných nulových bodů je $(n - m)$, což zmíníme v dalším textu u pravidla č.3.

2) V přenosech dílčích reálných prvků otevřené smyčky (regulátorů, napájecích zdrojů, servoventilů, motorů, mechanických systémů s převody, snímačů atd.) vystupují reálné konstanty (tzv. „statická zesílení“), mající v příslušných diferenciálních rovnicích jasný fyzikální význam. Ty dohromady tvoří výslednou konstantu K_0 , jejíž fyzikální význam nemusí být na první pohled jasný, protože je v přenosu otevřené smyčky vyjádřena tak, aby v čitateli i jmenovateli byl u nejvyšší mocniny s jednotkový koeficient - viz tvar v (D5) vpravo. Jedině tak je možný rozklad na kořenové činitele.

3) U úhlů (argumentů komplexních čísel) je možno použít tzv. modulární (též hodinovou) aritmetiku s periodou 2π (360°), takže u některých operací (např. při sčítání více úhlů) stačí uvést druhý sčítanec $\pm 2q\pi$ v (D4) jen jednou.

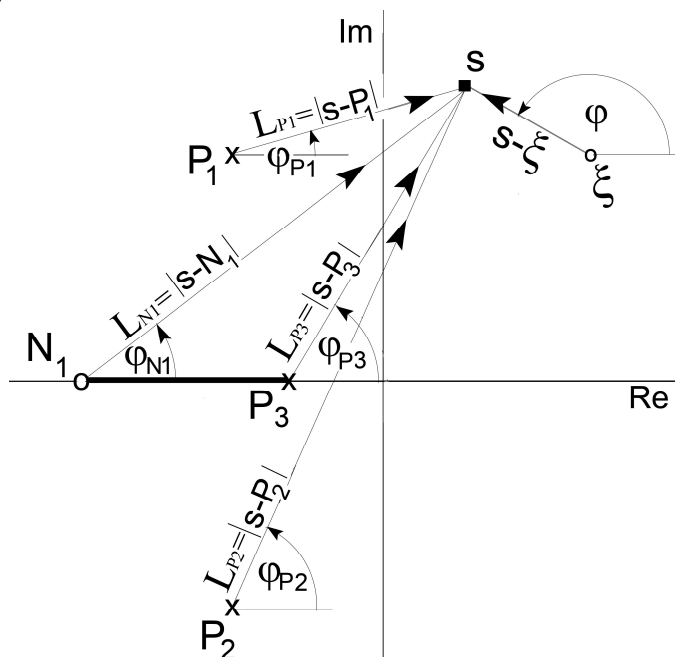
Součinný tvar vpravo v (D5) je výhodný pro graficko – početní postup, neboť násobení (dělení) komplexních čísel ve tvaru

$$s - \xi = |s - \xi| \cdot e^{j\varphi}$$

znamená násobení (dělení) délek L spojnic bodů s, ξ a sčítání (odečítání) jejich úhlů (viz **obr.D2**). Zlomek (D5) lze vyjádřit ve tvaru

$$F_0(s) = K_0 \frac{\prod_{k=1}^m L_{Nk}}{\prod_{k=1}^n L_{Pk}} e^{j(\sum_{k=1}^m \varphi_{Nk} - \sum_{k=1}^n \varphi_{Pk})} \quad (D6)$$

kde $L_{Pk, Nk}$ jsou délky a $\varphi_{Pk, Nk}$ úhly orientovaných spojnic čísla s s póly P_k a nulami N_k přenosu $F_0(s)$.



Obr. D2

Poznámky: 1) Úhly (argumenty) komplexních čísel odměřujeme v kladném smyslu vždy proti hodinám od směru kladné reálné osy!!

2) Často bývá v čitateli přenosu $F_0(s)$ pouze konstanta a_0 a otevřená smyčka nemá nulové body, tj. $m=0$ a $K_0 = \frac{a_0}{b_n}$. V takovém případě je u součinných výrazů v (D5) a (D6) nahrazen čítecel jedničkou a za všechny úhly φ_{Nk} dosazujeme nulu.

Konstrukce GMK spočívá v nalezení takových bodů s v komplexní rovině, pro jejichž orientované spojnice s nulami a póly otevřené smyčky platí

$$\arg F_0(s) = \sum_{k=1}^m \varphi_{Nk} - \sum_{k=1}^n \varphi_{Pk} = \pi \pm 2q\pi \quad (D7)$$

Libovolně zvolený bod nalezeného GMK je hledaným pólem přenosu $U(s)$ pro velikost konstanty

$$K_0 = \frac{\prod_{k=1}^n L_{Pk}}{\prod_{k=1}^m L_{Nk}} \quad (D8)$$

Příklad 1: Otevřená smyčka má přenos se třemi póly $P_{1,2,3}$ a jednou nulou N_1 podle **obr.D2** (póly značíme křížky a nuly kroužky). Leží-li bod s na GMK, musí pro něj platit

$$\varphi_{N1} - \varphi_{P1} - \varphi_{P2} - \varphi_{P3} = \pi \pm 2q\pi$$

a dále, je-li číslo s pólem uzavřené smyčky, příslušná konstanta K_0 je

$$K_0 = \frac{L_{P1} \cdot L_{P2} \cdot L_{P3}}{L_{N1}}$$

Mez stability uzavřené smyčky je dána nejnižší hodnotou K_0 , při které některá z křivek zjištěného GMK protne imaginární osu (tj. pól uzavřené smyčky bude $s = j\omega$). Z obr.D2 je zřejmé, že délky a úhly spojnic nezávisí na poloze imaginární osy, takže obecně

- tvar GMK závisí pouze na vzájemné poloze nul a pólů smyčky otevřené a nehraje zde roli jejich vodorovná vzdálenost od imaginární osy.

I když výpočet pólů uzavřené smyčky pomocí různých iteračních metod nečiní potíže, je prospěšné znát několik jednoduchých pravidel pro konstrukci GMK a odhadnout tvar jeho křivek předem. Vycházíme z některých obecných souvislostí mezi koeficienty a kořeny polynomů v (D5):

$$\begin{aligned} \frac{a_{m-1}}{a_m} &= -\sum_1^m N_k & \frac{b_{n-1}}{b_n} &= -\sum_1^n P_k \\ \frac{a_0}{a_m} &= (-1)^m \prod_1^m N_k & \frac{b_0}{b_n} &= (-1)^n \prod_1^n P_k \end{aligned} \quad (D9)$$

Ve vztazích (D9) nezapočítáváme eventuální nuly a póly v počátku souřadnic.

Pravidla pro konstrukci GMK

1. GMK začíná v pólech P_k (pro $K_0 = 0$) a končí v nulách N_k (pro $K_0 \rightarrow \infty$). Pohyb pólů uzavřené smyčky po GMK je při spojitě změně konstanty K_0 rovněž spojitý.

Důkaz: Charakteristická rovnice uzavřené smyčky je

$$1 + F_0(s) = 0$$

a dosazením z (D5) přejde na tvar

$$\prod_1^n (s - P_k) + K_0 \prod_1^m (s - N_k) = 0 \quad (D10)$$

Její jiné možné vyjádření pomocí pólů uzavřené smyčky je též

$$\prod_1^n (s - S_k) = 0 \quad (D10a)$$

- je-li $K_0 = 0$, zůstává v rovnici (D10) jen první sčítanec a její kořeny jsou P_k ;
- při $K_0 \rightarrow \infty$ vydělíme rovnici číslem K_0 , zůstane jen druhý sčítanec a kořeny jsou N_k .

Poznámky: 1) Grafickým znázorněním pólů a nul otevřené smyčky názorně vyniká možnost zanedbat dvojici pól - nula ležící blízko sebe, neboť příslušná spojovací větev GMK je většinou velmi krátká. Z algebraického hlediska se jedná o krácení kořenových činitelů v přenosu $F_0(s)$. Měřítkem pojmu "blízko" jsou vzájemné vzdálenosti ostatních pólů a nul.

2) Otevřená a uzavřená smyčka nemohou mít při $K_0 \neq 0$ společné póly, protože při spojitě změně konstanty K_0 se spojitě mění i poloha pólů uzavřené smyčky.

2. Počet větví GMK je roven počtu pólů P_k .

Důkaz: Na každé větvi GMK leží jeden pól uzavřené smyčky, neboť uzavřením zpětné vazby se řád charakteristické rovnice nezmění a otevřená i uzavřená smyčka mají stejný počet pólů.

Příklad 2: Na obr.D3 je GMK pro otevřenou smyčku se čtyřmi póly $P_{1,2,3,4}$ a jednou nulou N_1 , které má čtyři silně vytažené větve **1, 2ab, 3ab** a **4**. Při rostoucím zesílení K_0 se například póly uzavřené smyčky, startující z bodů P_2, P_3 , pohybují proti sobě na reálné ose po úsecích **2a, 3a** a v místě svého splynutí (dvojnásobný pól) nastává rozvětvení GMK a každý pól se vydá po své větvi **2b, 3b**.

3. Počet větví GMK, končících v nekonečnu pro $K_0 \rightarrow \infty$, je roven $n - m$.

Důkaz: Toto tvrzení souhlasí s pravidlem **1**, uvědomíme-li si, co bylo řečeno v poznámce pod rovnicí (D2) o nulových bodech, nekonečně vzdálených od počátku. Na obr.D3 končí v nekonečnu větve **2b, 3b** a **4**.

4. Větve GMK jsou souměrné podle reálné osy, neboť komplexní kořeny (ať již otevřené nebo uzavřené smyčky) tvoří vždy sdružené dvojice - viz **obr.D2a**.

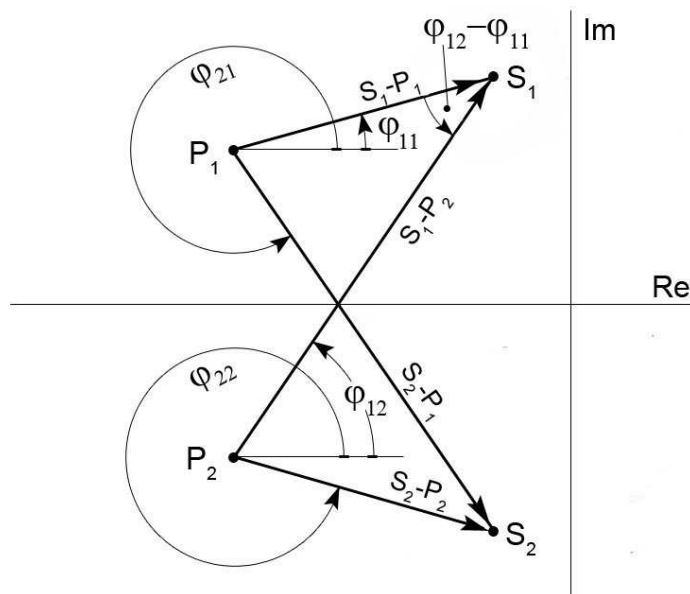
Poznámka: Pokud se v součinném tvaru nějakého přenosu - např. (D5) - vyskytuje komplexní kořen (např. pól P_1), nutně k němu patří i číslo P_2 komplexně sdružené a totéž platí i pro kořeny $S_{1,2}$, ležící na GMK. V součinných tvarech přenosů se tedy mohou vyskytnout až čtyři činitele najednou, např.

$$(S_1 - P_1)(S_1 - P_2)(S_2 - P_1)(S_2 - P_2)$$

Z **obr.D2a** se lze snadno přesvědčit, že pro argumenty jednotlivých činitelů platí

$$\varphi_{11} + \varphi_{22} = 2\pi \quad \varphi_{12} + \varphi_{21} = 2\pi$$

a celkový argument $\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{21} + \varphi_{22}$ vychází vždy jako celočíselný násobek 2π . Totéž platí i v případě kořenů (nul i pólů) vícenásobných, ať již reálných nebo komplexně sdružených dvojic.

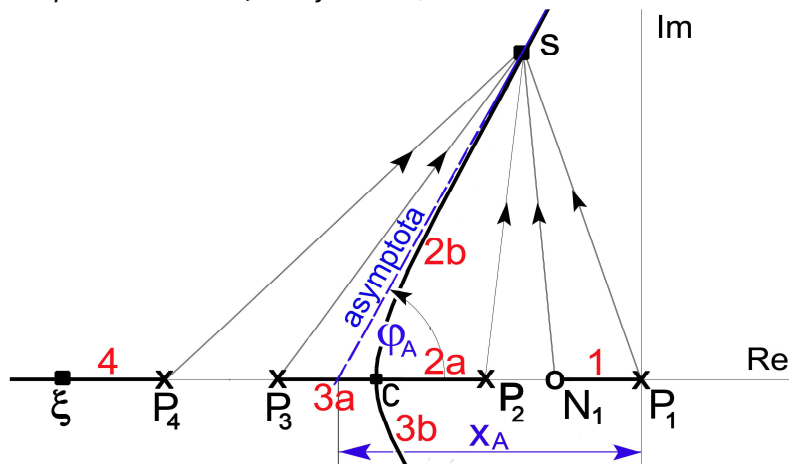


Obr. D2a

5. Pro větve GMK ležící na reálné ose platí, že rozdíl počtu nul N_k a pólů P_k ležících na reálné ose vpravo od nich, je liché číslo. Komplexně sdružené dvojice nepočítáme. Pravidlo lze dále zobecnit:

- pokud je rozdíl dvou čísel lichý, je lichý i jejich součet, takže počty vpravo ležících nul a pólů lze i sčítat.

Důkaz doložíme opět na **obr.D3**, kde je $m=1, n=4$.



Obr. D3 Asymptoty GMK

Například bod ξ větve 4 je bodem GMK, neboť u něj je $m_{\text{vpravo}} - n_{\text{vpravo}} = -3$ a pro úhly jeho spojnic s póly a nulami platí (D7):

$$\varphi_{\xi} = \varphi_{N_1} - \varphi_{P_1} - \varphi_{P_2} - \varphi_{P_3} - \varphi_{P_4} = \pi - 4\pi = -3\pi$$

Lichý rozdíl splňují i všechny body mezi póly P_2, P_3 . Např. u bodu rozvětvení C je $m_{\text{vpravo}} - n_{\text{vpravo}} = -1$ a jeho argument je $\varphi_C = \varphi_{N_1} - \varphi_{P_1} - \varphi_{P_2} = \pi - 2\pi = -\pi$.

Otevřená smyčka má ve zvoleném příkladu pouze reálné póly a nulu. Pokud by měla ještě nějaké komplexní (tedy sdružené) dvojice, úhly spojnic každé z nich s bodem reálné osy dají v součtu hodnotu 2π , kterou není třeba uvažovat.

6. Asymptoty větví GMK mířících do nekonečna svírají s kladnou reálnou osou úhel

$$\pm \varphi_A = \frac{\pi \pm 2q\pi}{n-m} \quad (D11)$$

Důkaz spočívá ve skutečnosti, že pro $s \rightarrow \infty$ se úhly všech spojnic $s - P_k$ a $s - N_k$ rovnají. Např. v **obr.D3** jsou podle (D11) dvě asymptoty s úhly $\pm 60^\circ$ a třetí vodorovná splývá s větví 4.

Poznámka: Pokud je $n - m > 2$, má GMK větve, směřující do levé i pravé poloroviny. Toto tvrzení je přímým důsledkem pravidla 6.

7. Průsečík asymptot leží na reálné ose a jeho souřadnice je

$$x_A = \frac{\sum_1^n P_k - \sum_1^m N_k}{n-m} \quad (D12)$$

Důkaz: Ve výrazu (D5) dělíme jmenovatel čitatelem:

$$\left(s^n + \frac{b_{n-1}}{b_n} s^{n-1} + \dots + \frac{b_0}{b_n} \right) : \left(s^m + \frac{a_{m-1}}{a_m} s^{m-1} + \dots + \frac{a_0}{a_m} \right) = s^{n-m} + \left(\frac{b_{n-1}}{b_n} - \frac{a_{m-1}}{a_m} \right) s^{n-m-1} + \dots$$

takže přenos otevřené smyčky je

$$F_0(s) = \frac{K_0}{s^{n-m} + \left(\frac{b_{n-1}}{b_n} - \frac{a_{m-1}}{a_m} \right) s^{n-m-1} + \dots} \quad (D13)$$

Při vyšetřování asymptot klademe $s \rightarrow \infty$, takže ve jmenovateli (D13) odpadnou (pokud vůbec jsou) členy se zápornými exponenty. Zůstane polynom řádu $(n-m)$, jehož součet kořenů je podle (D9) roven

$$\frac{a_{m-1}}{a_m} - \frac{b_{n-1}}{b_n}$$

Pro $s \rightarrow \infty$ můžeme všechny póly (D13) nahradit jedním $(n-m)$ - násobným pólem

$$x_A = \frac{1}{n-m} \left(\frac{a_{m-1}}{a_m} - \frac{b_{n-1}}{b_n} \right) \quad (D14)$$

neboť všechny spojnice pólů a bodu $s \rightarrow \infty$ jsou zhruba stejně dlouhé a rovnoběžné. Dosazením z (D9) do (D14) dostáváme dokazované tvrzení (D12). Pro $s \rightarrow \infty$ lze tedy psát

$$F_0(s) = \frac{K_0}{(s - x_A)^{n-m}} \quad (D15)$$

Poznámka: Pokud je počet větví GMK mířících do nekonečna větší než dvě, protínají se všechny jejich asymptoty stále v jediném bodě x_A - viz např. **obr.9,10,13**.

8. Úhel tečny ke GMK v komplexním pólu otevřené smyčky je

$$\varphi_{TP} = \pi + \sum_1^m \varphi_{N_k} - \sum_1^{n-1} \varphi_{\text{zbylé } P_k} \quad (D16)$$

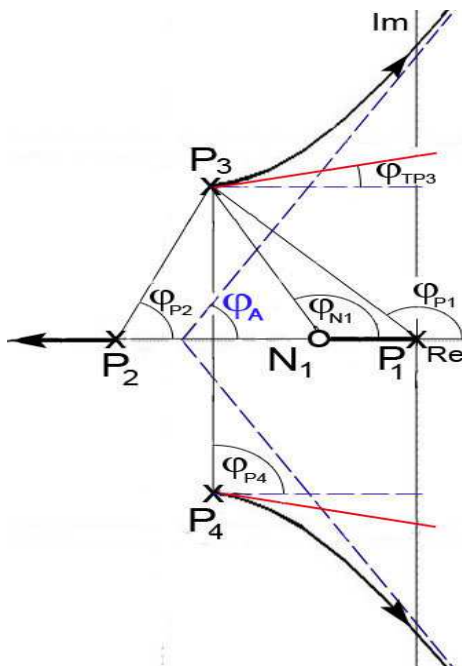
Analogicky úhel tečny v komplexní nule otevřené smyčky je

$$\varphi_{TN} = \pi + \sum_1^n \varphi_{P_k} - \sum_1^{m-1} \varphi_{zbylé N_k} \quad (D17)$$

Důkaz: Uvažujme číslo s na GMK v těsné blízkosti komplexního pólu P (nuly N). Spojnice s a tohoto pólu (nuly) se blíží tečně a má takový směr, aby platil vztah (D7). Na **obr.D4** je znázorněn případ pro přenos $F_0(s)$, mající čtyři póly a jednu nulu. Pro úhly platí:

$$\varphi_{TP3} = \pi + \varphi_{N1} - \varphi_{P1} - \varphi_{P2} - \varphi_{P4} = 180^\circ + 120^\circ - 135^\circ - 65^\circ - 90^\circ = 10^\circ$$

$$\varphi_A = 180^\circ / 3 = 60^\circ$$



Obr. D4 Úhly tečen ke GMK v komplexních pólech otevřené smyčky

Body rozvětvení GMK

Ve vícenásobných pólech otevřené i uzavřené smyčky dochází k rozvětvení GMK do více větví. Tento jev objasníme počínaje následujícím pravidlem **9**, kde se jedná o nejjednodušší případ dvojnásobného reálného pólu uzavřené smyčky.

9. Rozvětvení mezi dvěma reálnými póly otevřené smyčky

Větev GMK, ležící na reálné ose a ukončená z obou stran dvěma póly otevřené smyčky může (ale nemusí) obsahovat bod, ve kterém se GMK rozvětjuje mimo reálnou osu. Dochází k přechodu dvou reálných pólů uzavřené smyčky v jediný dvojnásobný pól C a dále v komplexně sdruženou dvojici. Pokud bod rozvětvení C existuje, tečna v něm je kolmá na reálnou osu a pro jeho souřadnici platí vztah

$$\sum_1^m \frac{1}{C - N_k} = \sum_1^n \frac{1}{C - P_k} \quad (D18)$$

Jde o zvláštní případ reálných pólů otevřené smyčky, ale rovnice (D18) platí i v případě komplexně sdružených dvojic nul i pólů (např. u **obr.D5**). Další případy rozvětvení jsou na **obr.D8, D10, D12, D13**. Rozšíření platnosti vztahu (D18) podáme u následujícího pravidla **10**.

*Pravidlo 9 budeme ilustrovat na **obr.D3a** (jde o případ z **obr.D3**, kde otevřená smyčka má jeden nulový bod a čtyři póly, všechny reálné):*

- pro každý bod s ležící na GMK platí obecně rovnice (D7):

$$\varphi_{N1} - \varphi_{P1} - \varphi_{P2} - \varphi_{P3} - \varphi_{P4} = \pi \pm 2q\pi$$

Pro v obrázku vyznačené úhly $\alpha_{1,2,3,4}, \beta_1$ platí vztahy

$$\varphi_{N1} = \pi - \beta_1, \quad \varphi_{P1} = \pi - \alpha_1, \quad \varphi_{P2} = \pi - \alpha_2, \quad \varphi_{P3} = \alpha_3, \quad \varphi_{P4} = \alpha_4$$

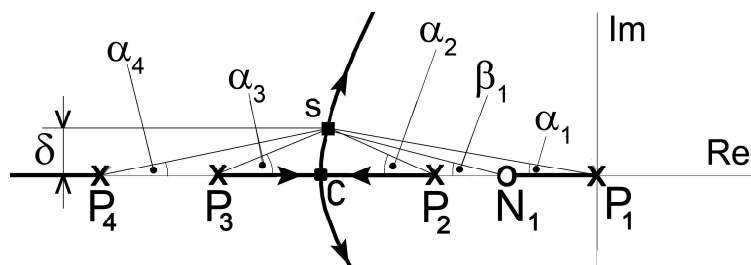
neboli

$$\pi - \beta_1 - \pi + \alpha_1 - \pi + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = \pi \pm 2q\pi$$

$$-\beta_1 + \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 2\pi \pm 2q\pi = 0$$

Pokud je vzdálenost δ bodu s od reálné osy velmi malá, můžeme úhly ve vzniklých trojúhelnících (s respektováním znamének!!) nahradit jejich tangenty:

$$\beta_1 = \frac{\delta}{-C + N_1}, \quad \alpha_1 = \frac{\delta}{-C + P_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\delta}{-C + P_2}, \quad \alpha_3 = \frac{\delta}{-P_3 + C}, \quad \alpha_4 = \frac{\delta}{-P_4 + C}$$



Obř. D3a Rozvětvení GMK na reálné ose

Po sloučení posledních vztahů a úpravě vychází

$$\frac{\delta}{C - N_1} = \frac{\delta}{C - P_1} + \frac{\delta}{C - P_2} + \frac{\delta}{C - P_3} + \frac{\delta}{C - P_4}$$

a po vykrácení δ je potvrzen vztah (D18).

10. Výpočet místa rozvětvení ve vícenásobném pólu uzavřené smyčky

Má-li uzavřená smyčka r -násobný reálný nebo i komplexní pól C , platí v tomto

bodě pro přenos otevřené smyčky $F_0(s) = \frac{Q_m(s)}{Q_n(s)}$ vztahy

$$\left. \frac{d}{ds} F_0(s) \right|_{s=C} = F_0'(C) = 0$$

$$\frac{Q_m'(C)}{Q_m(C)} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{C - N_k} = \frac{Q_n'(C)}{Q_n(C)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C - P_k} \quad (D19)$$

Nuly a póly otevřené smyčky N_k, P_k mohou být reálné i komplexní.

Důkaz: V případě r -násobného pólu C lze vytknout ve jmenovateli přenosu uzavřené smyčky (D1) člen $(s - C)^r$, takže charakteristický polynom má tvar

$$Q_m(s) + Q_n(s) = (s - C)^r H(s)$$

kde výraz $H(s)$ obsahuje součin zbývajících $(n - r)$ kořenových činitelů. Dále je možno psát

$$1 + F_0(s) = \frac{Q_m(s) + Q_n(s)}{Q_n(s)} = \frac{(s - C)^r H(s)}{Q_n(s)} = (s - C)^r G(s) \quad (D19a)$$

Bod C není pólem otevřené smyčky (viz poznámka 2 u pravidla 1), tj. není nulovým bodem funkce $Q_n(s)$, takže funkce $G(s) = H(s)/Q_n(s)$ je v jeho nekonečně malém okolí diferencovatelná. Derivováním (D19a) dostáváme

$$\left[1 + F_0(s) \right]' = F_0'(s) = r(s - C)^{r-1} G(s) + (s - C)^r G'(s)$$

a dosazením $s = C$ vychází

$$F_0'(C) = 0 \quad (D20)$$

Tím je dokázáno první tvrzení v (D19). Zároveň platí pro derivaci podílu dvou funkcí

$$F_0'(s) = \left[\frac{Q_m(s)}{Q_n(s)} \right]' = \frac{Q_m'(s)Q_n(s) - Q_m(s)Q_n'(s)}{Q_n^2(s)} \quad (D21)$$

Pro $s = C$ tedy musí být čítec (D21) nulový, tj.

$$\left. \frac{Q_m'(s)}{Q_m(s)} = \frac{Q_n'(s)}{Q_n(s)} \right|_{s=C} \quad (D21a)$$

Dále se odvoláme na základní větu algebry a na tzv. **Heavisideův rozklad** (1.68), umožňující ryze lomenou racionální funkci s póly p_i rozložit na součet dílčích zlomků:

$$\frac{A_m(s)}{B_n(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} \quad \text{kde } m < n, \quad K_i = \frac{A_m(p_i)}{B_n'(p_i)} \quad (D22)$$

Ve zvláštním případě, když čítec bude derivací jmenovatele, tj. $A_m(s) = B_n'(s)$, se jedná o tzv. **logaritmickou derivaci** funkce $B_n(s)$ a vychází $K_i = 1$, takže

$$\frac{B_n'(s)}{B_n(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} \quad (D23)$$

Aplikací (D23) na funkce $Q_m(s), Q_n(s)$ v (D21a) vychází druhá rovnice v (D19), která zobecňuje platnost rovnice (D18) v pravidle 9, kde se jednalo o speciální jednoduchý případ bodů na reálné ose.

Poznámky: 1) Po zderivování levého vztahu v (D2) vychází pro čítec a jmenovatel přenosu otevřené smyčky v každém bodě GMK (nejen v bodě rozvětvení) rovnost

$$Q_m'(s) = -Q_n'(s) \quad (D23a)$$

2) Nedůvěřivý čtenář si může v některých dále uvedených příkladech zkontrolovat, že postup podle (D18) a obou rovnic v (D19) dává stejné výsledky. Je z nich ale možno zjistit pouze bod C (nebo i více bodů) rozvětvení. Tvar GMK okolo nich zatím neznáme a pro obecný případ $r > 2$ bude vysvětlen v pravidle 13.

Příklad 3:

Exaktní výpočet tvaru GMK představuje hledání kořenů polynomu řádu n . Předcházející pravidla budeme proto demonstrovat na přenosu otevřené smyčky, který má jen dva póly P_1, P_2 a jeden reálný nulový bod N :

$$F_0(s) = K_0 \frac{s - N}{(s - P_1)(s - P_2)} \quad (D24)$$

Tento jednoduchý případ vede na řešení kvadratické rovnice. Charakteristická rovnice uzavřené smyčky je

$$s^2 + (K_0 - P_1 - P_2)s + P_1P_2 - K_0N = 0 \quad (D25)$$

Budeme hledat obecně komplexní kořeny uzavřené smyčky ve tvaru $s = x \pm jy$, tj.

$$x^2 \pm 2jxy - y^2 + (K_0 - P_1 - P_2)x \pm (K_0 - P_1 - P_2)jy + P_1P_2 - K_0N = 0 \quad (D25a)$$

Je-li pravá strana rovnice nulová, musí být nulová imaginární i reálná část levé strany:

$$\text{- imag. část:} \quad \pm 2jxy \pm (K_0 - P_1 - P_2)jy = 0, \quad \text{tj. vždy} \quad K_0 = P_1 + P_2 - 2x \quad (D26)$$

$$\text{- reálná část:} \quad x^2 - y^2 + (K_0 - P_1 - P_2)x + P_1P_2 - K_0N = 0$$

a po dosazení za K_0 z (D26) a úpravách je

$$x^2 + y^2 - 2Nx - P_1P_2 + N(P_1 + P_2) = 0 \quad (D27)$$

Substituce $x = z + N$:

$$z^2 + y^2 = N^2 + P_1P_2 - N(P_1 + P_2) \quad (D28)$$

Dále rozlišíme dvě možnosti:

A) Póly otevřené smyčky jsou komplexní, tj.

$$P_{1,2} = p \pm jq, \quad P_1 + P_2 = 2p, \quad P_1 P_2 = p^2 + q^2$$

Vzhledem k tomu, že o tvaru GMK rozhoduje pouze vzájemná poloha nul a pólů otevřené smyčky, nikoliv poloha vůči imaginární ose, výhodně ji posuneme tak, aby procházela oběma póly, takže bude $p = 0$. Pravá strana rovnice (D28) je vždy kladná:

$$N^2 + P_1 P_2 - N(P_1 + P_2) = N^2 + q^2 > 0$$

Vychází rovnice kružnice $z^2 + y^2 = \rho^2$

s poloměrem $\rho = \sqrt{N^2 + q^2}$ a středem v bodě $z = 0$, tj. v nulovém bodě otevřené smyčky $x = N$. Dva průsečíky kružnice s reálnou osou (při $y = 0$) jsou

$$x_1 = N + \rho, \quad x_2 = N - \rho \quad (D29)$$

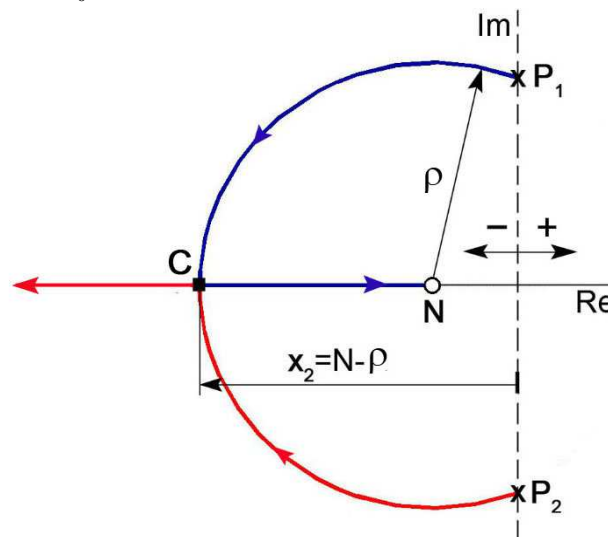
Podle předchozích pravidel se póly uzavřené smyčky při rostoucím zesílení K_0 přemísťují z komplexních pólů $P_{1,2}$ po dvou protilehlých obloucích do jednoho průsečíku s reálnou osou (dvojnásobného pólu C uzavřené smyčky), kde nastane rozvětvení GMK doleva a doprava po reálné ose do dvou nulových bodů, z nichž jeden je N a druhý leží v záporném nekonečnu, viz bod x_2 v **obr.D5**. Vyloučení možnosti rozvětvení v bodě x_1 a pohybu jednoho z pólů do kladného nekonečna vyplývá z rovnice (D26), kde na levé straně je kladná hodnota K_0 , takže

$$K_0 = P_1 + P_2 - 2x = -2x \geq 0$$

neboli $x \leq 0$ a relevantní je pouze část oblouku, ležící vlevo od bodů $P_{1,2}$. Z obou možností v (D29) tedy přichází v úvahu pouze hodnota $x_2 = N - \rho$ a příslušné zesílení je

$$K_0 = -2N + 2\rho = 2\sqrt{N^2 + q^2} - 2N \quad (D30)$$

Celé GMK na **obr.D5** má podle pravidla 2 dvě větve a pohyb pólů po nich je vyznačen šipkami. Při posunutí imaginární osy vlevo nebo vpravo se tvar GMK ani k jeho bodům přiřazené hodnoty zesílení K_0 nezmění.



Obr. D5 Póly otevřené smyčky komplexní, varianta **A**

Kontrola bodu rozvětvení GMK podle (D18): $\frac{1}{C - N} = \frac{1}{C - jq} + \frac{1}{C + jq}$

Úpravami získáme kvadratickou rovnici $C^2 - 2CN - q^2 = 0$

se dvěma kořeny $C_{1,2} = N \pm \sqrt{N^2 + q^2} = x_{1,2}$

a volba bodu rozvětvení $C = x_2$ byla již objasněna výše. Výsledek lze zkontrolovat podle (D19) řešením rovnice $F_0'(s) = 0$.

B) Póly otevřené smyčky $P_{1,2}$ jsou reálné:

- kvůli zjednodušení úvah opět posuneme imaginární osu do některého z obou (např. do P_2), takže bude $P_2 = 0$ a zbývající pól P_1 označíme pouze P . Rovnice (D25) přejde na tvar

$$s^2 + (K_0 - P)s - K_0N = 0$$

Její diskriminant je $D = (K_0 - P)^2 + 4K_0N = K_0^2 + P^2 + 2K_0(2N - P)$ (D31)

B1) Při $N \geq 0$ je vždy $D > 0$ (neboť $K_0 \geq 0$) a póly uzavřené smyčky budou reálné, i když bychom při $0 < P < N$ mohli podle pravidla 9 očekávat možnost rozvětvení GMK do dvou pólů komplexně sdružených, viz obr.D6.

B2) Při $N < 0$ může být diskriminant kladný i záporný, takže póly uzavřené smyčky mohou být reálné i komplexní. Rozhodující je vzájemná velikost N a P :

B2a) Pro $N > P$ je nutně také $2N > P$, takže $D > 0$ a póly jsou reálné, viz obr.D7.

<p>Obr. D6 Póly otevřené smyčky reálné, varianta B1</p>	<p>Obr. D7 Póly otevřené smyčky reálné, varianta B2a</p>

B2b) Pro $N < P$ závisí znaménko diskriminantu i na velikosti zesílení K_0 , takže je nutno uvažovat obecnou komplexní variantu s použitím rovnic (D25a) ÷ (D28):

- protože jsme zvolili $P_2 = 0$, pro zesílení platí z (D26)

$$K_0 = P - 2x \quad (D32)$$

a rovnice (D28) přejde na tvar

$$z^2 + y^2 = N(N - P) \quad (D33)$$

Při $N < P$ je pravá strana kladná a stejně jako v případě A) jde o rovnici kružnice se středem v bodě $x = N$ a poloměrem $\rho = \sqrt{N(N - P)}$. Její průsečíky s reálnou osou jsou

$$x_1 = N + \rho, \quad x_2 = N - \rho$$

a na rozdíl od případu A) jsou zde body rozvětvení GMK dva. Příslušné hodnoty zesílení jsou podle (D32)

$$K_{01} = P - 2x_1 = P - 2N - 2\rho, \quad K_{02} = P - 2x_2 = P - 2N + 2\rho$$

Celé GMK má opět dvě větve a na poloze imaginární osy nezáleží, viz obr.D8. Pro hodnoty zesílení menší než K_{01} nebo větší než K_{02} leží póly uzavřené smyčky na reálné ose.

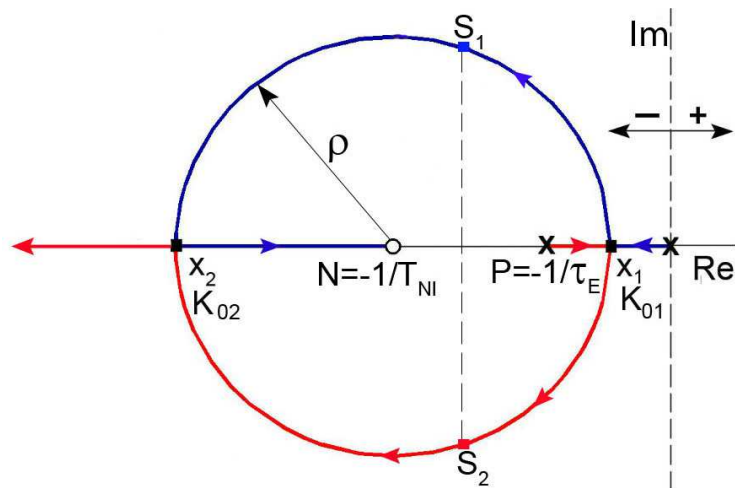
Kontrola bodů rozvětvení GMK podle (D18):

$$\frac{1}{C - N} = \frac{1}{C - P} + \frac{1}{C}$$

a úpravami získáme kvadratickou rovnici $C^2 - 2CN + PN = 0$

se dvěma kořeny $C_{1,2} = N \pm \sqrt{N(N - P)} = N \pm \rho = x_{1,2}$

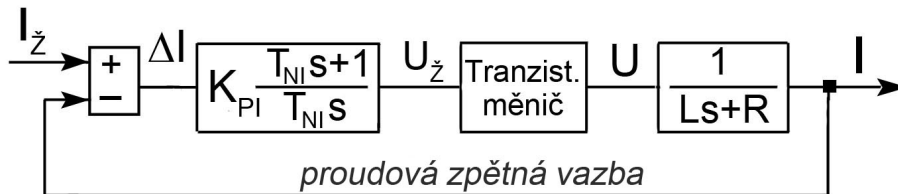
Výsledek lze opět zkontrolovat podle (D19) řešením rovnice $F_0'(s) = 0$.



Obr. D8 Póly otevřené smyčky reálné, varianta B2b

Příklad 4:

U varianty B2b) se jedná o častý případ proudové regulace stejnosměrného elektromotoru s PI-regulátorem - viz zjednodušené blokové schéma na obr.D8a.



Obr. D8a Regulace proudu stejnosměrného elektromotoru

Přenos PI-regulátoru mezi rozdílem požadovaného a skutečného proudu ΔI a požadovaným napětím motoru $U_{\dot{z}}$ má jeden nulový bod $N = -1/T_{NI}$ a jeden pól v počátku:

$$F_{reg}(s) = \frac{U_{\dot{z}}(s)}{\Delta I(s)} = K_{PI} \frac{T_{NI}s + 1}{T_{NI}s}$$

Výstup regulátoru je povel pro pulzní šířkovou modulaci tranzistorového měniče, jehož přenos zde idealizujeme jako jednotkový. Jeho výstupní napětí U určuje proud vinutím motoru s odporem R a indukčností L . Předpokládáme-li stojící motor, není třeba uvažovat jeho vnitřní indukované napětí a přenos mezi napájecím napětím z měniče a proudem má jeden pól $P = -R/L = -1/\tau_E$:

$$F_{mot}(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ls + R} = \frac{1/R}{\tau_E s + 1}$$

Definujeme tzv. elektrickou časovou konstantu $\tau_E = L/R$, která bývá obvykle vlivem indukčnosti příliš velká, takže pól P leží blízko počátku a motor sám by reagoval na rychlé změny napětí svým proudem (tj. momentem) pomalu. Přenos otevřené smyčky je vhodné upravit zavedením konstanty $K_0 = K_{PI}/L$ na tvar, vhodný pro rozklad na kořenové činitele:

$$F_0(s) = K_{PI} \frac{T_{NI}s + 1}{T_{NI}s(Ls + R)} = K_0 \cdot \frac{s + 1/T_{NI}}{s(s + 1/\tau_E)}$$

Proudovou zpětnou vazbou vzniká nový přenos 2.řádu

$$\frac{I(s)}{I_{\dot{z}}(s)} = \frac{K_{PI}(T_{NI}s + 1)}{T_{NI}Ls^2 + (T_{NI}R + T_{NI}K_{PI})s + K_{PI}} = \frac{K_0(s + 1/T_{NI})}{s^2 + s(1/\tau_E + K_0) + K_0/T_{NI}}$$

s možností volby dvou komplexně sdružených pólů $S_{1,2}$, které budou ležet dostatečně daleko od počátku i od imaginární osy, jak je naznačeno u GMK na obr.D8. Tím je potlačen zpožďující vliv indukčnosti a reakce motoru se zrychlí, aniž by byla ohrožena stabilita řízení

jeho proudu. Z obrázku je zřejmé, že poloměr kružnice ρ by měl být velký (tj. integrační časová konstanta T_{NI} malá) a žádané polohy pólů $S_{1,2}$ bude dosaženo zvyšováním zesílení K_{PI} . Nulový bod $N = -1/T_{NI}$ zůstává zachován. Podrobně o proudové regulaci viz lit.[12].

11. Rozvětvení ve vícenásobném reálném pólu (nule) otevřené smyčky

Má-li otevřená smyčka r -násobný reálný pól C_0 , GMK se v něm rozvětjuje do r paprsků, tvořících v jeho bezprostředním okolí souměrnou růžici s úhlem dvou sousedních paprsků

$$\Delta\varphi_{otevr} = 2\pi/r \quad (D34)$$

Totéž platí i pro r -násobný reálný nulový bod.

Rozvětvení zobrazené na **obr.D3** je zvláštním případem pro $r=2$ v případě, že póly otevřené smyčky P_2, P_3 leží nekonečně blízko sebe a podobně i u **obr.D8**.

Rozvětvení ve dvojnásobném pólu v počátku je na **obr.D12a,b**.

Důkaz: Pro r -násobný reálný pól C_0 lze přenos otevřené smyčky (D5) psát ve tvaru

$$F_0(s) = K_0 \frac{\prod_{k=1}^m (s - N_k)}{\prod_{k=r+1}^n (s - P_k) \cdot (s - C_0)^r} = K_0 \frac{G_N(s)}{G_P(s) \cdot (s - C_0)^r} \quad (D35)$$

$$G_N(s) = \prod_{k=1}^m (s - N_k), \quad G_P(s) = \prod_{k=r+1}^n (s - P_k)$$

kde $G_P(s)$ je část jmenovatele, obsahující zbývající póly. Pro úhly platí

$$\begin{aligned} \arg F_0(s) &= \arg G_N(s) - \arg G_P(s) - r \cdot \arg(s - C_0) \\ r \cdot \arg(s - C_0) &= \arg G_N(s) - \arg G_P(s) - \arg F_0(s) \end{aligned} \quad (D36)$$

Zvolíme-li číslo s na GMK v nekonečně malém kruhovém okolí násobného pólu C_0 , jsou úhly spojnic čísla s a reálných nul a pólů otevřené smyčky, ležících vlevo od C_0 , nulové. Úhly spojnic čísla s s případnými komplexně sdruženými dvojicemi nul nebo pólů dají dohromady 2π a rovněž je není třeba uvažovat. Roli hrají pouze reálné nuly a póly otevřené smyčky, ležící vpravo od C_0 . Zde je nutno rozlišit dva případy:

a) Rozdíl počtu nul a pólů ležících vpravo od C_0 je lichý, takže v (D36) bude

$$\arg G_N(s) - \arg G_P(s) \dots \text{lichý násobek } \pi$$

Podle (D4) je ale $\arg F_0(s)$ také lichým násobkem π , takže na pravé straně (D36) je rozdíl dvou lichých násobků, tj. sudý násobek π , neboli

$$\arg(s - C_0) = \frac{2q\pi}{r}, \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

a pro úhel dvou sousedních paprsků platí (D34):

$$\Delta\varphi_{otevr} = \frac{2(q+1)\pi}{r} - \frac{2q\pi}{r} = \frac{2\pi}{r}$$

Čísla s jsou tedy rozmístěna okolo bodu C_0 v pravidelných úhlových roztečích podle (D34), přičemž jedno z nich (a tedy celá jedna větev GMK vycházející z bodu C_0) vždy leží na reálné ose, neboť vždy lze nalézt takové celé číslo q , aby číslo $2q/r$ (tj. násobek π) bylo rovněž celé.

b) Rozdíl počtu nul a pólů ležících vpravo od C_0 je sudý, takže v (D36) je

$$\arg G_N(s) - \arg G_P(s) \dots \text{sudý násobek } \pi$$

a na pravé straně (D36) bude rozdíl sudého a lichého násobku, tj. lichý násobek π , neboli

$$\arg(s - C_0) = \frac{(2q+1)\pi}{r}, \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

a opět platí (D34):

$$\Delta\varphi_{otevr} = \frac{2[(q+1)+1]\pi}{r} - \frac{2(q+1)\pi}{r} = \frac{2\pi}{r}$$

Na rozdíl od případu **a**) ale existuje možnost, že GMK nemá větve ležící na reálné ose, neboť při sudém čísle r nelze nalézt celé číslo ve tvaru $(2q+1)/r$. To je případ dvojnásobného pólu v počátku na **obr.D12a,b**.

Pro r – násobný nulový bod je důkaz pro oba případy **a**) i **b**) analogický.

12. Rozvětvení ve vícenásobném komplexním pólu (nule) otevřené smyčky

Má-li otevřená smyčka r – násobnou dvojici komplexně sdružených pólů nebo nulových bodů, GMK se v nich opět rozvětňuje do r paprsků, tvořících souměrnou růžici s úhlem dvou sousedních paprsků podle (D34):

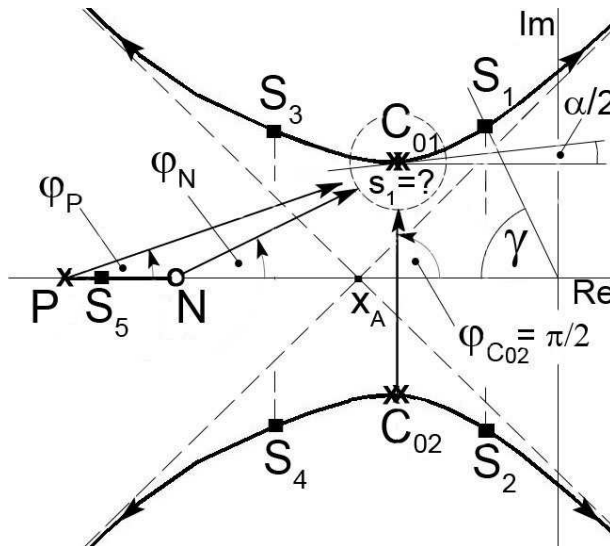
$$\Delta\varphi_{otevr} = 2\pi/r$$

Důkaz provedeme pro variantu s komplexními póly. Ukázka rozvětvení ve dvojnásobné sdružené dvojici $C_{01,2}$ je na **obr.D9**, kde je $r=2$, $m=1$, $n=5$. Zbývající pól i nula jsou zde reálné, ale obecně mohou být i komplexní. Do nekonečně malého kruhového okolí jednoho pólu z r – násobné dvojice (v **obr.D9** např. C_{01}) položíme číslo s_1 , o němž předpokládáme, že leží na GMK. Přenos otevřené smyčky vznikne úpravou (D5):

$$F_0(s_1) = K_0 \frac{\prod_{k=1}^m (s_1 - N_k)}{\prod_{k=2r+1}^n (s_1 - P_k) \cdot (s_1 - C_{01})^r \cdot (s_1 - C_{02})^r} = K_0 \frac{G_N(s_1)}{G_P(s_1) \cdot (s_1 - C_{01})^r \cdot (s_1 - C_{02})^r} \quad (D37)$$

kde N_k, P_k jsou zbývající (a oproti číslu s_1 od bodu C_{01} velmi vzdálené) singulární body. Analogicky k (D35) je

$$G_N(s_1) = \prod_{k=1}^m (s_1 - N_k), \quad G_P(s_1) = \prod_{k=2r+1}^n (s_1 - P_k)$$



Obr.D9 Příklad rozvětvení GMK ve dvojnásobných komplexních pólech otevřené smyčky (význam úhlu γ bude vysvětlen u **obr.D15**)

Pro úhly platí

$$\arg F_0(s_1) = \pi \pm 2q\pi = \arg G_N(s_1) - \arg G_P(s_1) - r \cdot \arg(s_1 - C_{01}) - r \cdot \arg(s_1 - C_{02})$$

Po dosazení za $\arg(s_1 - C_{02}) = \pi/2$ získáváme vztah

$$r \cdot \arg(s_1 - C_{01}) = \arg G_N(s_1) - \arg G_P(s_1) - (r+2) \cdot \pi/2 \mp 2q\pi \quad (D38)$$

Argumenty výrazů $G_N(s_1)$, $G_P(s_1)$ lze považovat za konstantní bez ohledu na pohyb čísla s_1 v nekonečně malém okolí bodu C_{01} . Součet prvních tří sčítanců na pravé straně (D38) je tedy nezávislý na poloze bodu s_1 a označíme jej α :

$$\alpha = \arg G_N(s_1) - \arg G_P(s_1) - (r+2) \cdot \pi/2$$

Bude tedy

$$r \cdot \arg(s_1 - C_{01}) = \alpha \mp 2q\pi$$

Argumenty hledaných čísel s_1 pro hodnoty $q=1,2,3,\dots$ jsou

$$\arg(s_1 - C_{01}) = \frac{\alpha}{r} \mp \frac{2\pi}{r} \mp \frac{4\pi}{r} \mp \frac{6\pi}{r} \mp \dots$$

Pro úhel dvou sousedních paprsků GMK tedy opět platí (D34), ale na rozdíl od pravidla 11 je celá souměrná růžice obecně natočena o úhel α/r , který je dán rozložením zbývajících nul i pólů N_k, P_k . V obr.D9 je rozdíl úhlů $\varphi_N - \varphi_P$ velmi malý, takže úhel natočení dvojamenné "růžice" je zde přibližně $\alpha/2 \approx -2\pi$ a obě větve vycházejí z pólu C_{01} (který je bodem GMK pro velikost zesílení $K_0 = 0$) téměř vodorovně. Na obrázku je zakresleno i všech pět pólů uzavřené smyčky S_k pro určitou nenulovou hodnotu K_0 .

13. Rozvětvení ve vícenásobném pólu uzavřené smyčky

V bodě C , kde má uzavřená smyčka při zesílení K_{0C} reálný nebo komplexní r -násobný pól, se GMK rozvětjuje do $2r$ paprsků, tvořících souměrnou růžici s úhlem dvou sousedních paprsků

$$\Delta\varphi_{uzavr} = \frac{\pi}{r} \quad (D39)$$

Při růstu zesílení ve směru $K_0 < K_{0C} \rightarrow K_{0C} \rightarrow K_0 > K_{0C}$ se póly uzavřené smyčky S_k přibližují k bodu C od pólů P_k smyčky otevřené po lichých paprscích a po sudých se od něj vzdalují směrem k nulám N_k .

Rozvětvení ukázaná na obr.D3,D3a,D5,D8,D12,D13 představují případ pro $r=2$, na obr.D10 pro $r=3$.

Důkaz: Předpokládejme obecný případ, kdy pro určitou hodnotu kladného zesílení K_{0C} v (D5) má uzavřená smyčka kromě jednonásobných pólů i r -násobnou komplexně sdruženou dvojici pólů C_1, C_2 . Podle (D19a) platí např. pro r -násobný pól C_1 obecně

$$1 + F_0(s) = \frac{Q_m(s) + Q_n(s)}{Q_n(s)} = \frac{(s - C_1)^r H(s)}{Q_n(s)} \quad (D40)$$

kde funkce $H(s)$ obsahuje $n-r$ kořenových činitelů, příslušejících zbývajícím pólům uzavřené smyčky (včetně pólu komplexně sdruženého C_2) a funkce $Q_n(s)$ obsahuje n kořenových činitelů, příslušejících pólům smyčky otevřené. Součty argumentů kořenových činitelů u obou funkcí označíme stručně $\arg H(s)$ a $\arg Q_n(s)$, takže celý vztah pro argumenty v (D40) je

$$\arg[1 + F_0(s)] = r \cdot \arg(s - C_1) + \arg H(s) - \arg Q_n(s) \quad (D41a)$$

Předpokládejme, že čísla s leží v nekonečně malém okolí bodu C_1 , takže jejich vzdálenost od ostatních pólů uzavřené i otevřené smyčky je tak velká, že příslušné argumenty lze považovat za konstantní bez ohledu na polohu čísla s . Zavedeme stručné označení

$$\arg H(s) - \arg Q_n(s) = \alpha = konst \quad (D41b)$$

Je-li bod C_1 pólem uzavřené smyčky, platí podle (D2) a (D5)

$$1 + F_0(C_1) = 1 + K_{0C} \frac{\prod_{k=1}^m (C_1 - N_k)}{\prod_{k=1}^n (C_1 - P_k)} = 0$$

a číslo $F_0(C_1) = -1$ leží na záporné reálné poloose v bodě -1 s argumentem $\pi \pm 2q\pi$. V nekonečně malém okolí vícenásobného pólu C_1 tedy nastávají dva případy:

A) $F_{0A}(s) < -1$ tj. $1 + F_{0A}(s) < 0$ neboli $\arg[1 + F_{0A}(s)] = \pi \pm 2q\pi$
a podle (D41a,b) je

$$\arg_A(s - C_1) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\pi}{r} \pm \frac{2q\pi}{r}$$

B) $F_{0B}(s) > -1$ tj. $1 + F_{0B}(s) > 0$ neboli $\arg[1 + F_{0B}(s)] = 0 \pm 2q\pi$

$$\arg_B(s - C_1) = -\frac{\alpha}{r} \pm \frac{2q\pi}{r}$$

Úhel dvou sousedních paprsků je tedy

$$\arg_A(s - C_1) - \arg_B(s - C_1) = \frac{\pi}{r}$$

a celá růžice, která jich obsahuje $2r$, je natočena o úhel $\frac{\alpha}{r}$.

Příklad 5:

Polohová zpětná vazba s lineárním hydromotorem a mechanickou zpětnou vazbou

Jedná se také o **příklad 20** v **kap.1**, kde je GMK uvedeno na **obr.1.23**. Hydromotor jakožto pružný člen se setrvačnou zátěží je popsán přenosem druhého řádu s vlastní frekvencí Ω , řídicí ventil je ovládán mechanicky. V praxi se tento způsob řízení polohy vyskytuje např. u posilovačů řízení, ovládání kormidel letadel nebo u mechanicko-hydraulických kopírovacích systémů obráběcích strojů, viz **obr.2,3,4** v **lit.[15]**.

U **příkladu 20** v **kap.1** zavedeme označení $K_0 = K\Omega^2$, takže přenos otevřené smyčky je

$$F_0(s) = \frac{K}{s\left(\frac{s^2}{\Omega^2} + \frac{2\zeta}{\Omega}s + 1\right)} = \frac{K_0}{s(s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2)}, \text{ tj. } m=0, n=3$$

Její póly jsou $P_{1,2} = -\zeta\Omega \pm j\Omega\sqrt{1-\zeta^2}$, $P_3 = 0$

Charakteristická rovnice uzavřené smyčky je

$$s^3 + 2\zeta\Omega s^2 + \Omega^2 s + K_0 = 0$$

Po zavedení konstanty K_0 bude mít vztah (1.86a) pro kritické zesílení na mezi stability tvar

$$K_{0krit} = 2\zeta\Omega^3 \text{ nebo také } K_{krit} = 2\zeta\Omega$$

V praxi někdy bývá nepříjemným jevem malé poměrné tlumení ζ v řádu jednotek procent, takže póly otevřené smyčky $P_{1,2}$ mají malou reálnou složku a je nutno je oddálit od imaginární osy instalací přídavných tlumičů. Zde budeme hledat takovou hodnotu ζ , při které oddálení pólů $P_{1,2}$ od imaginární osy umožní dosáhnout u uzavřené smyčky stav s trojnásobným reálným pólem C (tj. $r=3$). Musí tedy platit identita

$$s^3 + 2\zeta\Omega s^2 + \Omega^2 s + K_0 = (s - C)^3 = s^3 - 3Cs^2 + 3C^2s - C^3$$

Z rovnosti koeficientů u s^2 vychází velikost trojnásobného pólu

$$C = -2\zeta\Omega/3$$

Rovnost koeficientů u s je $\Omega^2 = 3C^2$, neboli $\Omega^2 = 4\zeta^2\Omega^2/3$. Poměrné tlumení je tedy

$$\zeta_C = \sqrt{3}/2, \text{ tj. } C = -\Omega/\sqrt{3}$$

Z výše uvedené identity vyplývá příslušná velikost zesílení otevřené smyčky

$$K_{0C} = -C^3 = \Omega^3 / \sqrt{27}$$

Její póly $P_{1,2,3}$ tvoří rovnostranný trojúhelník a v trojnásobném pólu uzavřené smyčky C se GMK větví do šesti paprsků, svírajících mezi sebou úhly $\pi/3 = 60^\circ$. Podle (D12) se asymptoty protínají právě v bodě C :

$$x_A = \frac{\sum_1^3 P_k}{3} = \frac{-2\zeta_C \Omega}{3} = -\frac{\Omega}{\sqrt{3}}$$

Podle (D11) je jejich úhel $\pm \varphi_A = \pm 60^\circ$, takže celé GMK je tvořeno třemi přímkami podle **obr.D10** (srovnej s obecným případem jednoho reálného a dvou komplexně sdružených pólů na **obr.1.23**). Kritické zesílení na mezi stability bude

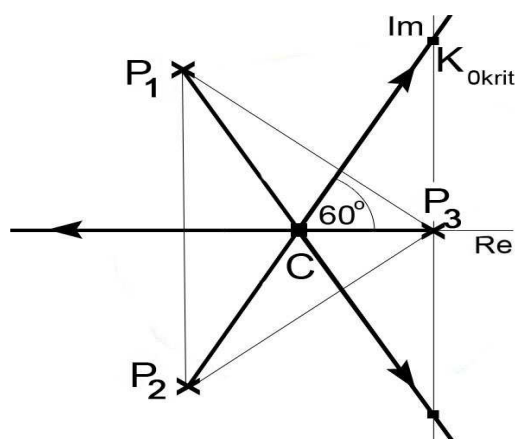
$$K_{0krit} = \Omega^3 \sqrt{3}$$

Kontrola bodu rozvětvení GMK podle (D18):

$$\frac{1}{C - P_1} + \frac{1}{C - P_2} + \frac{1}{C - P_3} = \frac{1}{C + \zeta\Omega - j\Omega\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{1}{C + \zeta\Omega + j\Omega\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{1}{C} = 0$$

a úpravy vedou na řešení kvadratické rovnice $3C^2 + 4\zeta\Omega C + \Omega^2 = 0$

Její diskriminant je při $\zeta = \sqrt{3}/2$ nulový, takže $C = -\Omega/\sqrt{3} = x_A$.

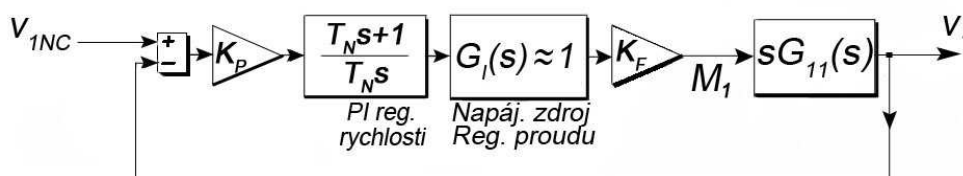


Obr. D10 Rozvětvení GMK v trojnásobném pólu uzavřené smyčky

Příklad 6:

GMK rychlostní smyčky dvojhmotového netlumeného systému s elektromotorem

Vycházíme z obecných blokových schémat na **obr.3.4a,b** pro $N=2$ a ze vztahů, které jsou pro rotační dvojhmotový systém odvozeny v **kap.3.5** podle **obr.3.5**. Moment setrvačnosti rotoru motoru je J_1 , jeho úhlovou rychlost označíme v_1 . Pro hnaný setrvačnick platí analogicky označení J_2, v_2 , převodový poměr je $p = v_1/v_2$. Torzní tuhost pružného převodu redukovaná na hřídel motoru je k_1 , pro redukci na hnaný hřídel platí $k_2 = k_1 p^2$. Rychlostní zpětná vazba je zavedena od rychlosti motoru. Zjednodušené blokové schéma s jednotkovým přenosem proudové regulace je na **obr.D11**.



Obr. D11 Blokové schéma regulace rychlosti elektromotoru

Pro lepší názor na rozložení hmot zavedeme pomocnou veličinu (tzv. "činitel interakce")

$$\chi = J_2 / J_1 p^2$$

Poznámka: Ve snaze dosáhnout při daném krouticím momentu motoru maximální úhlové zrychlení na hnaném hřídeli bývá často volen tzv. "optimální převod" podle zjednodušeného vztahu (9) z lit.[18]: $p_{opt} = \sqrt{J_2/J_1}$, tj. $J_2 = J_1 p_{opt}^2$ a činitel interakce v takovémto speciálním případě je $\chi = 1$. Této výhodné volbě převodu se budeme věnovat později.

Celkový moment setrvačnosti, redukovaný na hřídel motoru, je

$$J_{C1} = J_1 + J_2/p^2 = J_1(1 + \chi)$$

Torzni kmitočet volného systému je po dosazení do (3.51c)

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_2(1 + \chi)}{J_2}} = \Omega_L \sqrt{1 + \chi} \quad (D42)$$

kde $\Omega_L = \sqrt{k_2/J_2}$ je torzni kmitočet samotného setrvačnicku J_2 při zablokovaném motoru.

Přenos mezi momentem motoru M_1 a jeho rychlostí v_1 získáme úpravou vztahu (3.64):

$$sG_{11}(s) = \frac{v_1(s)}{M_1(s)} = \frac{s^2 + \Omega_L^2}{J_1 s (s^2 + \Omega^2)}$$

Přenos otevřené smyčky (přímé větve v obr.D11) je

$$F_0(s) = K_P K_F \frac{T_N s + 1}{T_N s} \cdot \frac{s^2 + \Omega_L^2}{J_1 s (s^2 + \Omega^2)} = K_0 \frac{(s + 1/T_N)(s^2 + \Omega_L^2)}{s^2 (s^2 + \Omega^2)} \quad (D42a)$$

kde $K_0 = K_P K_F / J_1$. Otevřená smyčka má jeden reálný nulový bod $N_1 = -1/T_N$, dva ryze imaginární nulové body $N_{2,3} = \pm j\Omega_L$, dva póly v počátku $P_{1,2} = 0$ a dva ryze imaginární póly $P_{3,4} = \pm j\Omega$. Po dosazení (D42a) do (D1) vychází přenos uzavřené smyčky se jmenovatelem (charakteristickým polynomem 4.stupně):

$$U(s) = \frac{v_1(s)}{v_{1NC}(s)} = \frac{K_0 (s + 1/T_N)(s^2 + \Omega_L^2)}{s^4 + K_0 s^3 + (\Omega^2 + K_0/T_N)s^2 + K_0 \Omega_L^2 s + K_0 \Omega_L^2 / T_N} \quad (D43)$$

Dále budeme řešit speciální případ, kdy má uzavřená smyčka vícenásobné póly.

Jejich předpokládaný tvar je obecně

$$S_{1,2} = x + jy \quad S_{3,4} = x - jy$$

(tj. buď **A**)... jeden čtyřnásobný reálný pól při $y = 0$, nebo **B**)... dvojnásobná komplexně sdružená dvojice). Charakteristický polynom uzavřené smyčky bude tedy

$$(s - x - jy)^2 (s - x + jy)^2$$

a po roznásobení

$$s^4 - 4xs^3 + (6x^2 + 2y^2)s^2 - 4x(x^2 + y^2)s + (x^2 + y^2)^2 \quad (D44)$$

Porovnáním konstant u třetí, druhé, první a nulté mocniny s v (D44) a ve jmenovateli (D43) získáme čtyři rovnice, jejichž řešením jsou čtyři hledané veličiny:

$$T_N = \frac{2}{\Omega_L} \sqrt{\chi}, \quad K_{0opt} = 2\Omega_L \sqrt{\chi} = 4\chi/T_N, \quad x = -\frac{\Omega_L}{2} \sqrt{\chi}, \quad y = \pm \frac{\Omega_L}{2} \sqrt{4 - \chi} \quad (D45)$$

Póly uzavřené smyčky jsou tedy

$$S_{1,2,3,4} = -\frac{\Omega_L}{2} (\sqrt{\chi} \pm j\sqrt{4 - \chi}) \quad (D46)$$

a jejich vzdálenost od počátku (bez ohledu na velikost χ) je

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \Omega_L$$

Pokud vyjdeme z předpokladu, že mechanické vlastnosti dynamického systému (tedy kmitočty Ω_L, Ω) jsou dány, lze tvar křivek GMK ovlivnit pouze integrační časovou konstantou PI regulátoru T_N a při K_{0opt} podle (D45) je požadavek vícenásobných pólů splněn. Vyšetříme dva výše zmíněné případy:

A) Uzavřená smyčka má jediný čtyřnásobný reálný pól, tj. $y=0$ (neboli $\chi=4$) a $S_{1,2,3,4} = x = -\Omega_L$. Tohoto stavu je dosaženo volbou převodu, který je právě jednou polovinou převodu optimálního:

$$p = 0,5\sqrt{J_2/J_1} \text{ neboli } J_2 = 4J_1p^2$$

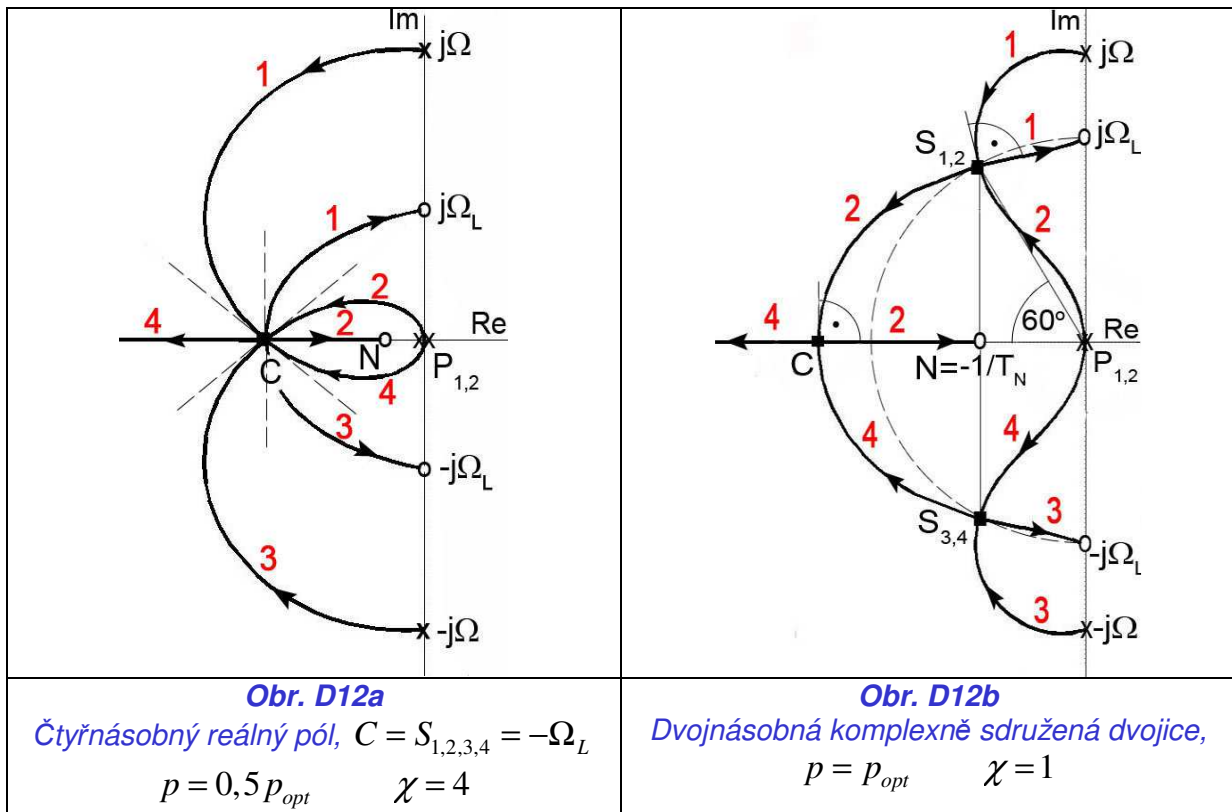
Příslušné GMK je na **obr.D12a** a v souladu s pravidlem 2 má čtyři větve, označené čísly **1,2,3,4**, po nichž se ve směru šipek stěhují póly při rostoucím zesílení K_0 . Při dosažení hodnoty K_{0opt} dosáhnou bodu $C = S_{1,2,3,4}$, kde je podle pravidla 13 patrné osminásobné rozvětvení s pravidelnou úhlovou roztečí sousedních větví $\pi/4$.

B) Uzavřená smyčka má bez ohledu na velikost zvoleného převodu dvě dvojice komplexně sdružených pólů. Kvůli dosažení maximálního zrychlení na hnaném hřídeli vyšetříme případ s optimálním převodem, tj. $\chi=1$, takže podle (D45) a (D46) bude

$$T_N = 2/\Omega_L, K_{0opt} = 2\Omega_L = 4/T_N, S_{1,2,3,4} = \Omega_L(-1 \pm j\sqrt{3})/2 \quad (D46a)$$

Tato volba konstant rychlostního regulátoru bývá považována za "kompromisní" a její podrobnější rozbor je podán v lit.[12], kde je na **obr.6.32** uveden tvar GMK pro větší T_N (regulace rychlosti je pomalá) a na **obr.6.33** pro menší T_N (regulaci rychlosti lze zrychlit, ale s rizikem nestability).

Příslušné GMK na **obr. D12b** má opět čtyři větve označené čísly **1,2,3,4**, které mají dva společné body dotyku.



V nich se při zesílení K_{0opt} nalézá dvojnásobná komplexně sdružená dvojice pólů $S_{1,2}$ a $S_{3,4}$, jejichž reálná část se shoduje s nulovým bodem regulátoru $N = -\Omega_L/2 = -1/T_N$ a

průvodiče svírají se zápornou reálnou osou úhly $\pm 60^\circ$, což odpovídá hodnotě poměrného tlumení $\zeta = \arccos 60^\circ = 1/2$. Tím je zaručeno klidné a dostatečně rychlé chování uzavřené rychlostní smyčky. Pohyb pólů při růstu zesílení K_0 je v **obr.D12b** opět vyznačen šipkami. Pro hodnoty větší než $K_{0opt} = 2\Omega_L = 4/T_N$ se dvojice $S_{1,2}$ a $S_{3,4}$ rozdělí a nastoupí cesty z obou míst rozvětvení ve směru šipek po větvích **1,2** resp. **3,4** směrem k nulovým bodům N a $-\infty$. Při této cestě se póly na větvích **2** a **4** ztotožní v bodě C na záporné reálné ose. Uzavřená smyčka zde tedy má dvojnásobný reálný pól a zbývající dva póly, které nejsou vyznačeny, leží na větvích **1** a **3** nebezpečně blízko u nulových bodů $\pm j\Omega_L$ na imaginární ose. Třetí bod rozvětvení C je možno určit pomocí vztahu (D18):

$$\frac{1}{s-j\Omega} + \frac{1}{s+j\Omega} + \frac{2}{s} = \frac{1}{s-j\Omega_L} + \frac{1}{s+j\Omega_L} + \frac{1}{s+\Omega_L/2}$$

Dosažením za $\Omega = \Omega_L\sqrt{2}$ a po úpravách získáme rovnici 5.stupně, z jejíchž pěti kořenů jsou tři relevantními body rozvětvení:

- dva jsou nám již známé komplexní póly ze vztahu (D46a)

- třetí bod na reálné ose (dvojnásobný pól) je $C = -\Omega_L\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{16}/T_N$. Jemu odpovídající zesílení K_{0C} zjistíme z rovnic (D2) a (D42a) dosažením C za s , tj.

$$1 + F_0(C) = 0$$

Oproti K_{0opt} z (D46a) vychází hodnota asi 1,45-krát vyšší.

Alternativní výpočet bodů rozvětvení je podle pravidla (D19) možný i pomocí derivace přenosu otevřené smyčky (D42a), v němž je $T_N = 2/\Omega_L$. Úpravy vedou nutně na stejnou rovnici 5.stupně, ale jsou poněkud složitější. Na celém GMK si čtenář může ověřit platnost pravidel **10,11,13** o rozvětvení ve vícenásobných pólech otevřené i uzavřené smyčky.

14. Průsečíky GMK s imaginární osou (tj. ryze imaginární póly uzavřené smyčky) stanovíme – pokud existují – řešením rovnice

$$1 + F_0(j\omega) = 0$$

kteřá se rozpadne na dvě rovnice pro reálnou a imaginární část zvlášť:

$$\text{Re } F_0(j\omega) = -1$$

$$\text{Im } F_0(j\omega) = 0$$

Vyjdou hodnoty jedné nebo i více konstant K_{0krit} na mezi stability a příslušné kmitočty ω_{krit} . Řešení bývá usnadněno skutečností, že rovnice pro reálnou část obsahuje pouze sudé mocniny proměnné $j\omega$, takže substitucí $s = (j\omega)^2 = -\omega^2$ je možno snížit její řád. V **kap.1** jsou uvedeny **příklady 20** a **21** s příslušnými GMK na **obr.1.23** a **obr.1.23b**.

15. Je-li počet pólů otevřené smyčky P_k alespoň o dva větší než počet jejích nul N_k , tj. $n \geq m+2$, je součet pólů otevřené i uzavřené smyčky stejný.

Důkaz: Charakteristická rovnice uzavřené smyčky má tvar

$$1 + F_0(s) = 1 + \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} = 0$$

a po úpravě

$$s^n + \frac{b_{n-1}}{b_n} s^{n-1} + \dots + \frac{b_1}{b_n} s + \frac{b_0}{b_n} + \frac{a_m}{b_n} s^m + \frac{a_{m-1}}{b_n} s^{m-1} + \dots + \frac{a_1}{b_n} s + \frac{a_0}{b_n} = 0 \quad (D47)$$

Protože je $n \geq m + 2$, koeficient u s^{n-1} je pouze b_{n-1}/b_n . Podle obecné vlastnosti polynomů (D9) to je záporně vzatý součet pólů otevřené smyčky

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = -\sum_1^n P_k$$

a zároveň i záporně vzatý součet kořenů rovnice (D47).

16. Má-li otevřená smyčka pól v počátku (tj. $b_0 = 0$), je součin pólů uzavřené smyčky

$$(-1)^n \prod_1^n S_k = \frac{a_0}{b_n} \quad (D48)$$

Důkaz: Z rovnice (D47) vymizí člen b_0/b_n , takže u nulté mocniny s zůstane pouze koeficient a_0/b_n a u n -té mocniny je jednička. Podle pravidla (D9) je jejich podíl součinem všech n kořenů polynomu v (D47), které jsme označili S_k .

Příklad 7:

Polohová zpětná vazba s lineárním hydromotorem a servoventilem

Hydromotor je popsán přenosem druhého řádu s vlastní frekvencí Ω , servoventil přenosem prvního řádu s časovou konstantou τ . Jde o stejný obvod jako u příkladu 21 a obr.1.23a,b v kap.1. Zavedením konstanty $K_0 = K\Omega^2/\tau$ by bylo možno přenos otevřené smyčky (1.86b) vyjádřit v názornějším tvaru, vhodném pro rozklad jmenovatele na kořenové činitele:

$$F_0(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)\left(\frac{s^2}{\Omega^2} + \frac{2\zeta}{\Omega}s + 1\right)} = \frac{K_0}{s(s + 1/\tau)(s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2)} \quad (D49)$$

Póly otevřené smyčky jsou $P_{1,2} = -\zeta\Omega \pm j\Omega\sqrt{1-\zeta^2}$, $P_3 = 0$, $P_4 = -1/\tau$

Roznásobením jmenovatele (D49) vychází

$$F_0(s) = \frac{K_0}{s^4 + s^3(2\zeta\Omega + 1/\tau) + s^2(\Omega^2 + 2\zeta\Omega/\tau) + s\Omega^2/\tau} \quad (D49a)$$

takže $m=0$, $n=4$ a při hledání pólů uzavřené smyčky je možno využít pravidla 15 a 16.

Porovnáním s (D5) je $a_0 = K_0$, $b_4 = 1$

Dále se přidržíme levého tvaru v (D49) s konstantou K , která má u servoventilu s hydromotorem jasný fyzikální význam, neboť se jedná o směrnici tzv. statické charakteristiky, což je konstanta úměrnosti mezi řídicím signálem servoventilu (proudem v jeho cívkách) a ustálenou rychlostí hydromotoru, viz lit.[15].

Pro mez stability byly odvozeny vztahy (1.86c,d):

- póly uzavřené smyčky $S_{1,2krit} = \pm j\omega_{krit} = \pm j \frac{\Omega}{\sqrt{2\zeta\tau\Omega + 1}} \quad (D49b)$

- kritické zesílení na mezi stability $K_{krit} = 2\zeta\Omega \cdot \frac{\tau^2\Omega^2 + 2\zeta\tau\Omega + 1}{(2\zeta\tau\Omega + 1)^2} \quad (D49c)$

Na **obr.D13** vlevo je znázorněno GMK pro zvolenou konstantu poměrného tlumení hydromotoru $\zeta = 0,48$ a časovou konstantu servoventilu $\tau = 1,2/\Omega$. Jedná se tedy o relativně "pomalejší" servoventil oproti **obr.1.23b** v **kap.1**, kde bylo $\tau = 1/\Omega$ a je vidět, že touto malou změnou došlo k podstatné změně tvaru GMK, neboť jeho větve obrátily směr (hodnoty $S_{1,2krit}$ a K_{krit} se ale změnilly velmi málo). Všechny čtyři asymptoty se stále protínají v bodě x_A .

Dále budeme řešit výjimečný, ale praxi stále blízký případ, kdy bude

$$\tau = 1/\Omega, \quad \zeta = 0,5$$

a výpočty tak budou usnadněny. Pro různé hodnoty zesílení K lze póly uzavřené smyčky získat řešením její charakteristické rovnice

$$s(\tau s + 1) \left(\frac{s^2}{\Omega^2} + \frac{2\zeta}{\Omega} s + 1 \right) + K = 0 \quad \text{tj.} \quad s \left(\frac{s}{\Omega} + 1 \right) \left(\frac{s^2}{\Omega^2} + \frac{1}{\Omega} s + 1 \right) + K = 0 \quad (D49d)$$

Celé GMK je na **obr.D13** vpravo, kde je patrná změna jeho tvaru oproti obrázku vlevo:

- komplexní větve mají s volbou rychlejšího servoventilu a s malým nárůstem tlumení hydromotoru snahu se vzájemně přibližovat (v **obr.D13** vlevo červené šipky), až se posléze dotknou v bodech rozvětvení $C_{1,2}$, které přibudou k původnímu rozvětvení v bodě C . Póly

otevřené smyčky pro řešený případ $\tau = 1/\Omega$, $\zeta = 0,5$ jsou $P_{1,2} = -\frac{\Omega}{2} \pm j\Omega \frac{\sqrt{3}}{2}$, $P_3 = 0$, $P_4 = -\Omega$, takže v komplexní rovině vytvoří dva rovnostranné trojúhelníky, symetrické k reálné ose. Póly uzavřené smyčky a příslušné zesílení na mezi stability jsou

$$S_{1,2} = \pm j \frac{\Omega}{\sqrt{2}}, \quad S_1 + S_2 = 0, \quad S_1 S_2 = \frac{\Omega^2}{2}, \quad K_{krit} = \frac{3}{4} \Omega^4 \dots \text{(viz (D49b,c) pro } \tau\Omega = 1 \text{)}.$$

Dva zbývající póly $S_{3,4}$ určíme pomocí pravidel 15 a 16:

- podle pravidla 15 je $\sum_1^4 S_k = \sum_1^4 P_k$, tj. $S_3 + S_4 = -2\Omega$

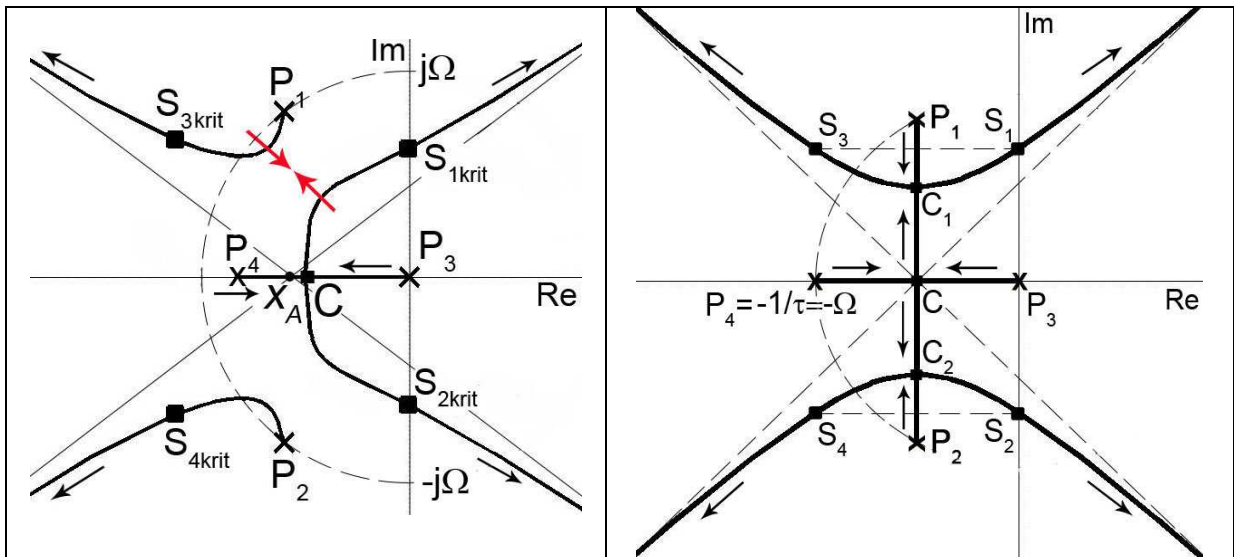
- podle pravidla 16 je $\prod_1^4 S_k = \frac{a_0}{b_4}$, tj. $\frac{\Omega^2}{2} S_3 S_4 = \frac{3}{4} \Omega^4$, tj. $S_3 S_4 = \frac{3}{2} \Omega^2$

Získali jsme dvě rovnice pro S_3, S_4 . Jejich řešením vychází

$$2S_3^2 + 4S_3\Omega + 3\Omega^2 = 0$$

$$S_{3,4} = -\Omega \pm j \frac{\Omega}{\sqrt{2}}$$

Všechny čtyři póly uzavřené smyčky $S_{1,2,3,4}$ na mezi stability vytvoří vrcholy okolo reálné osy souměrného obdélníka se základnou Ω a výškou $\Omega\sqrt{2}$, viz GMK na **obr.D13** vpravo.



Obr.D13 GMK řízení polohy lineárního hydromotoru ($\Omega = 100 / s$) se servoventilem:

- vlevo $\zeta = 0,48$ $\tau = 1,2/\Omega$ $K_{krit} = 74,5$, vpravo $\zeta = 0,5$ $\tau = 1/\Omega$ $K_{krit} = 75$

Úhly asymptot všech větví, mířících do nekonečna, jsou podle (D11) v pravidle 6

$$\pm \varphi_A = \frac{\pi}{4} \pm q \frac{\pi}{2}$$

Souřadnice průsečíku asymptot na reálné ose je podle (D12) v pravidle 7

$$x_A = \frac{\sum_1^4 P_k}{4} = -\frac{\Omega}{2}$$

Úhly tečen v komplexních pólech otevřené smyčky $P_{1,2}$ jsou podle (D16) v pravidle 8

$$\varphi_{TP1} = \pi - \sum (\varphi_{P2} + \varphi_{P3} + \varphi_{P4}) = 180^\circ - \sum (90^\circ + 120^\circ + 60^\circ) = -90^\circ, \quad \varphi_{TP2} = +90^\circ$$

Pohyb pólů uzavřené smyčky po GMK z výchozích pólů smyčky otevřené při rostoucím zesílení K je vyznačen šipkami:

- póly startující proti sobě z bodů P_3, P_4 se nejprve ztotožní ve dvojnásobném pólu C a dále pokračují kolmo k reálné ose vstříc pólům startujícím z bodů P_1, P_2 , až dojde ke splnutí všech čtyř pólů ve dvojnásobné komplexně sdružené dvojici C_1, C_2 . Odtud se GMK rozbíhá do čtyř větví ve směru asymptot do bodů $S_{1,2,3,4}$, kde je při K_{krit} dosažena mez stability.

Podle pravidla 13 se GMK v bodech C, C_1, C_2 rozvětjuje vždy do čtyř větví se vzájemnými úhly $\Delta\varphi_{uzavr} = \pi/2$.

Výpočet bodů rozvětvení GMK podle D(18):

$$\sum_1^4 \frac{1}{C - P_k} = \frac{1}{C + \Omega/2 - j\Omega\sqrt{3}/2} + \frac{1}{C + \Omega/2 + j\Omega\sqrt{3}/2} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C + \Omega} = 0$$

Úpravy vedou na řešení kubické rovnice $(2C + \Omega)(2C^2 + 2\Omega C + \Omega^2) = 0$

Jejími kořeny jsou:

- bod rozvětvení na reálné ose $C = -\frac{\Omega}{2}$

- komplexně sdružené body rozvětvení $C_{1,2} = -\frac{\Omega}{2} \pm j\frac{\Omega}{2}$

Výsledek lze zkontrolovat i podle (D19) řešením podmínky $F_0'(s) = 0$. Po dosazení $\tau = 1/\Omega$, $\zeta = 0,5$ do (D49a) se opět dostaneme ke shora uvedené kubické rovnici.

Příslušná zesílení otevřené smyčky K v bodech rozvětvení zjistíme dosazením za $s = C$ a např. $s = C_1 = -\frac{\Omega}{2} + j\frac{\Omega}{2}$ do (D49d). Vycházejí hodnoty

$$K_C = \frac{3}{16}\Omega \quad \text{a} \quad K_{C_{1,2}} = \frac{\Omega}{4}$$

Příklad 8:

Stabilizace polohové zpětné vazby s málo tlumeným lineárním hydromotorem a servoventilem pomocí filtru

U polohové vazby hydromotoru s malým tlumením se směřování větví GMK obrátí, jak je patrné ze srovnání levých grafů na **obr.D13** ($\zeta = 0,48$ $\tau = \frac{1,2}{\Omega}$) a **obr.D14**

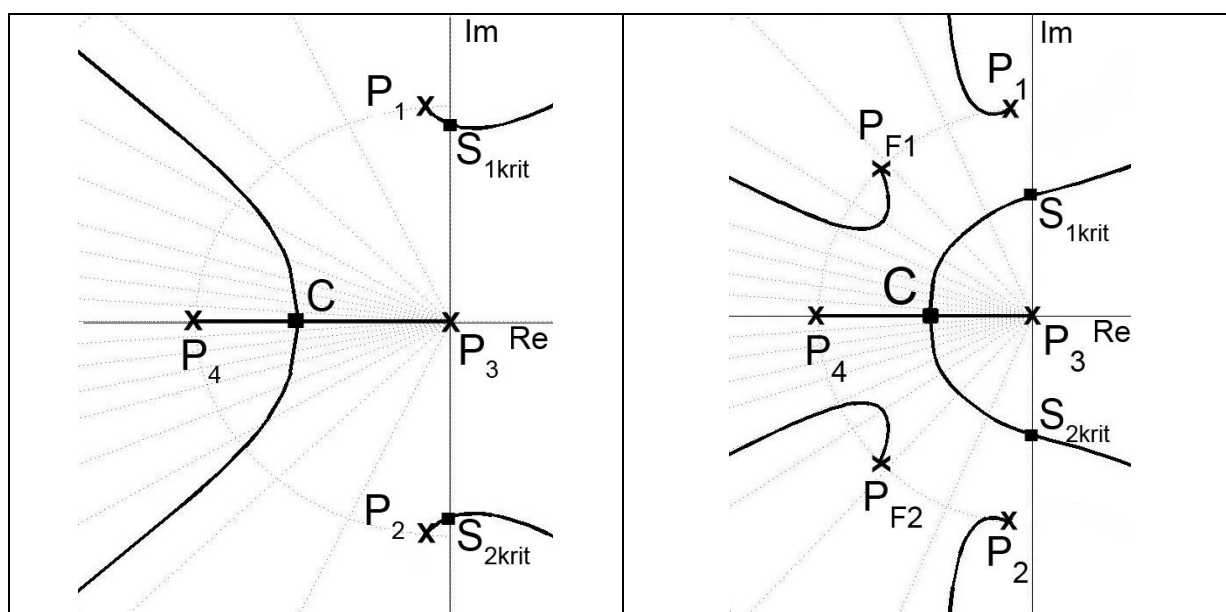
($\zeta = 0,1$ $\tau = \frac{1}{\Omega}$). O stabilitě budou nyní rozhodovat póly $S_{1,2}$ na větvích, vycházejících z bodů $P_{1,2}$, jejichž cesta k imaginární ose je velmi krátká a kritické zesílení na mezi stability proto výrazně klesá (u řešených příkladů z hodnoty $K_{krit} = 74,5$ na $K_{krit} = 30,5$). Nabízí se řešení zavedením přídavného přenosu, který by obrátil směřování větví, vycházejících z bodů $P_{1,2}$, nazpět do levé komplexní poloroviny. V praxi se osvědčuje elektronicky realizovaný filtr 2.řádu (tzv. dolní propust) s přenosem

$$F_F(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\Omega_F^2} + \frac{2\zeta_F}{\Omega_F}s + 1}$$

který bývá instalován v napájecím zdroji servoventilu. Přenos otevřené smyčky bude nyní

$$F_0(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1) \left(\frac{s^2}{\Omega_F^2} + \frac{2\zeta_F}{\Omega_F} s + 1 \right) \left(\frac{s^2}{\Omega^2} + \frac{2\zeta}{\Omega} s + 1 \right)}$$

Volbu parametrů Ω_F, ζ_F je třeba přizpůsobit vlastnostem servoventilu i hydromotoru. Podrobný rozbor i s jednoduchou optimalizací je uveden v **kap.6.2** v **lit.[15]** a u nás řešeného příkladu jsou zvoleny hodnoty $\Omega_F = \Omega, \zeta_F = 0,71$. Nové upravené GMK je na **obr.D14** vpravo, kde je patrná žádoucí změna směřování větví.



Obr.D14

Řízení polohy lineárního hydromotoru ($\Omega = 100 / s, \zeta = 0,1$) se servoventilem ($\tau = 1/\Omega$):
- vlevo bez filtru... $K_{krit} = 30,5$, vpravo s filtrem ($\Omega_F = \Omega, \zeta_F = 0,71$) ... $K_{krit} = 48$

O stabilitě budou nyní rozhodovat stejné větve, jako na **obr.D13** vlevo a mez stability je oddálena z $K_{krit} = 30,5$ na hodnotu $K_{krit} = 48$. Průvodním a někdy nežádoucím jevem tohoto zásahu je ale přiblížení pólů uzavřené smyčky k počátku, tedy kmitočtový pokles.

Volba pólů uzavřené smyčky

Je-li tvar GMK znám, je možno je oceňovat pomocí podmínky (D3) tak, že ke každému jeho vypočtenému bodu přiřadíme příslušnou velikost konstanty K_0 . Tím získáme dobrou představu o jejím vlivu na rychlost postupu pólů S_k po jednotlivých větvích GMK. U složitějších systémů náchylných ke kmitání vycházíme z vlivu poměrného tlumení ζ na polohu pólů základního přenosu 2.řádu

$$U(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2}$$

kde se jedná o středoškolskou úlohu určení polohy kořenů kvadratické rovnice v komplexní rovině (viz **kap.2.1**):

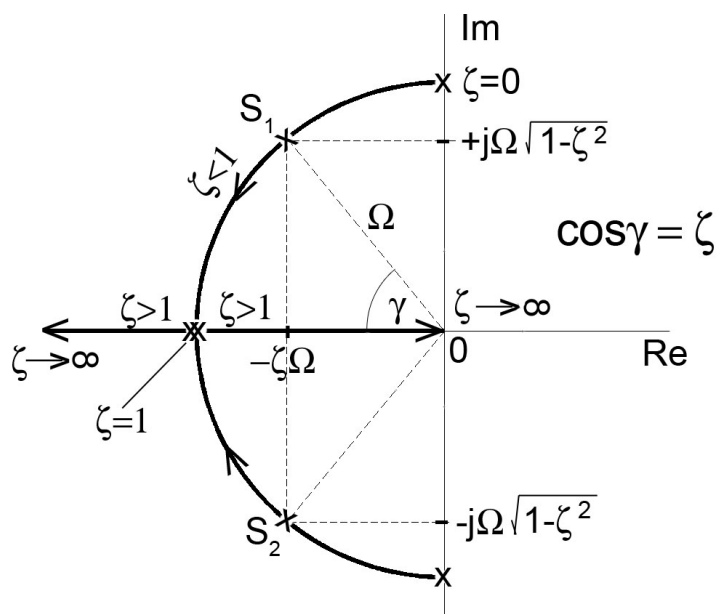
- na **obr.D15** platí vztah $\zeta = \arccos \gamma$ a pokud není vysloveně požadováno aperiodické chování systému, volí se přijatelný kompromis volbou

$$0,5 < \zeta < 0,7, \text{ tj. } 45^\circ < \gamma < 60^\circ$$

Tuto zkušenost je možno přenést i na složitější systémy, známe-li tvar jejich GMK.

Příklad 9: Na obr.D9 se jedná o otevřenou smyčku s pěti póly a jednou nulou. Volbou úhlu γ jsou navoleny komplexní póly uzavřené smyčky $S_{1,2}$, takže v jejím charakteristickém polynomu (D10a) se objeví kmitavý člen 2.řádu s požadovaným tlumením $\zeta = \arccos \gamma$. V obrázku je zakresleno všech pět pólů $S_{1,2,3,4,5}$, které musí splňovat podmínku (D8) a při jejich výpočtu je možno si vypomoci pravidly 15 a 16. Další dva komplexní póly $S_{3,4}$ již náchylnost celého systému ke kmitání ovlivňují méně, neboť jejich tlumení je větší (jejich vzdálenost od počátku a tím i příslušný kmitočet Ω je také větší). Reciproká hodnota vzdálenosti pátého reálného pólu S_5 od počátku odpovídá časové konstantě přenosu 1.řádu, takže s rostoucí vzdáleností časová konstanta klesá a vliv tohoto pólu zaniká (to platí i pro póly komplexní, pokud ale neleží blízko imaginární osy!!).

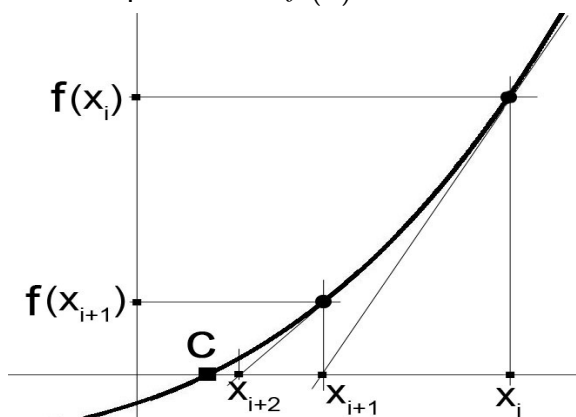
Na uvedeném příkladu jsme demonstrovali význam a rozhodující vliv pólů, ležících blízko počátku a blízko imaginární osy. Někdy je pro ně používán název dominantní póly.



Obr. D15 Poloha kořenů kvadratické rovnice $s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2 = 0$

Výpočet kořenů polynomů Newtonovou metodou tečny

Z několika známých iteračních metod je tato metoda v oboru reálných čísel nejnázornější a zde ukážeme její rozšíření do oboru čísel komplexních. Z obr.D16 je zřejmý postup u funkce reálné proměnné $f(x)$.



Obr.D16 Newtonova metoda tečny v reálném oboru

Pro jeden iterační krok vycházíme z definice derivace

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})}, \quad f'(x_i) \neq 0, \infty$$

Bez důkazu uvedeme tvrzení, že postup lze aplikovat i v komplexním oboru, takže pro posloupnost čísel s , konvergujících k pólu C funkce $f(s)$, platí

$$s_{i+1} = s_i - \frac{f(s_i)}{f'(s_i)} \quad (\text{D50})$$

Postup konverguje velmi rychle, pokud se nalzáme v blízkosti hledaného pólu C . To je u metody GMK splněno, neboť vycházíme ze známé polohy pólů pro K_0 (póly otevřené smyčky) a pro malý přírůstek K_0 se poloha kořenů rovnice (D10) změní rovněž málo. Se spojitou změnou konstanty K_0 postupují póly uzavřené smyčky spojitě po jednotlivých větvích GMK. Upravíme charakteristický polynom uzavřené smyčky z (D47) sloučením koeficientů u stejných mocnin s na tvar

$$f(s) = d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + d_{n-2} s^{n-2} + \dots + d_1 s + d_0 = \sum_{k=0}^n d_k s^k$$

$$f'(s) = n d_n s^{n-1} + (n-1) d_{n-1} s^{n-2} + (n-2) d_{n-2} s^{n-3} + \dots + d_1 = \sum_{k=1}^n k d_k s^{k-1}$$

Po dosažení do (D50) bude

$$s_{i+1} = \frac{s_i f'(s_i) - f(s_i)}{f'(s_i)} = \frac{\sum_{k=1}^n k d_k s_i^k - \sum_{k=0}^n d_k s_i^k}{\sum_{k=1}^n k d_k s_i^{k-1}} = \frac{\sum_{k=0}^n (k-1) d_k s_i^k}{\sum_{k=1}^n k d_k s_i^{k-1}} \quad (\text{D51})$$

Např. pro rovnici 3.řádu $d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 = 0$ bude mít algoritmus tvar

$$s_{i+1} = \frac{2d_3 s_i^3 + d_2 s_i^2 - d_0}{3d_3 s_i^2 + 2d_2 s_i + d_1}$$

Vztah (D51) je možno vyjádřit pomocí polárního tvaru komplexního čísla

$$s_i = |s_i| e^{j\varphi_i} = |s_i| (\cos \varphi_i + j \sin \varphi_i)$$

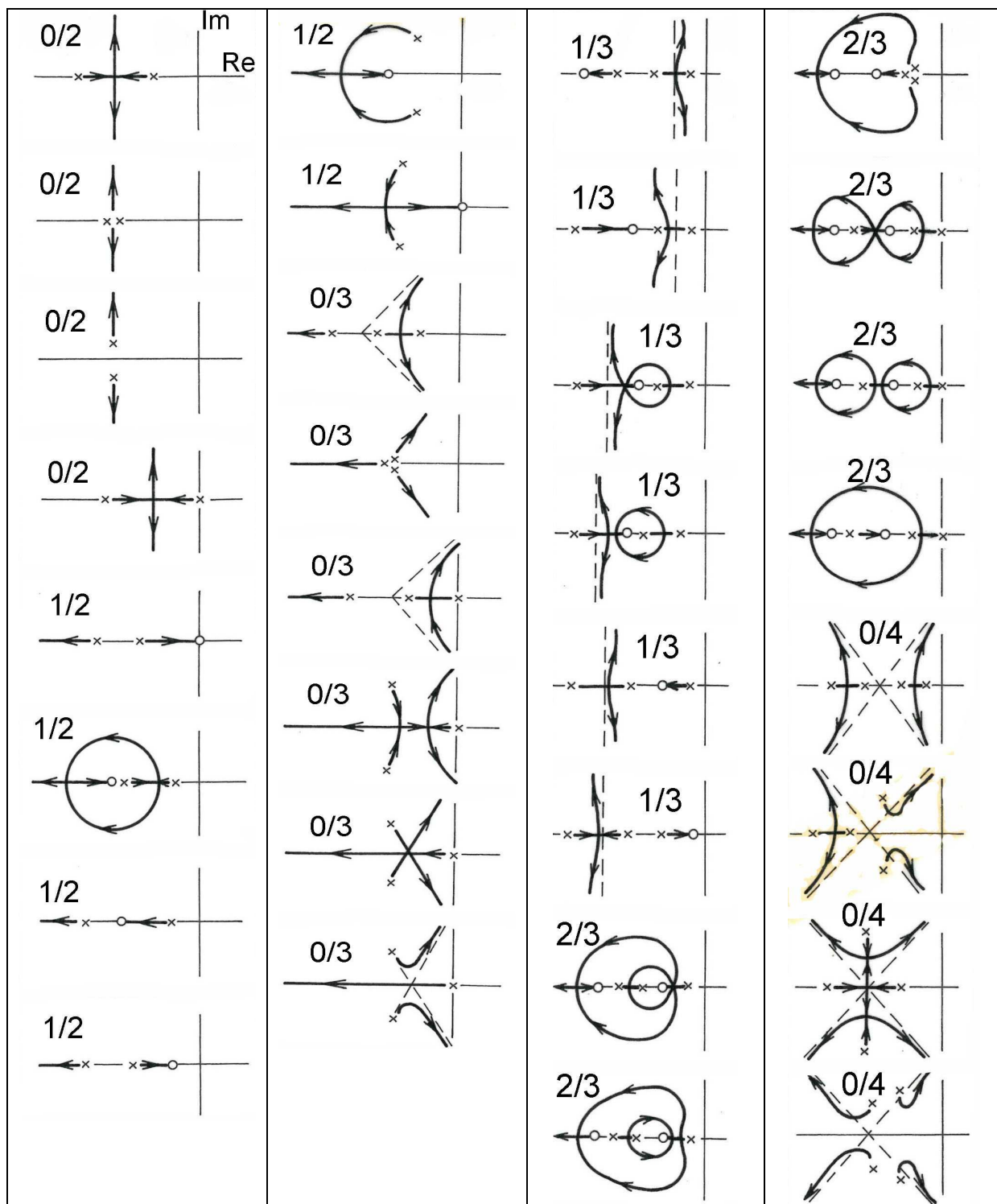
$$s_{i+1} = \frac{\sum_{k=0}^n (k-1) d_k |s_i|^k (\cos k\varphi_i + j \sin k\varphi_i)}{\sum_{k=1}^n k d_k |s_i|^{k-1} (\cos (k-1)\varphi_i + j \sin (k-1)\varphi_i)} \quad (\text{D52})$$

Ve výrazu (D52) je možno čísel i jmenovatel ihned rozdělit na reálnou a imaginární část a upravit dále číslo s_{i+1} na tvar, vhodný pro další iteraci:

$$s_{i+1} = |s_{i+1}| e^{j\varphi_{i+1}} = |s_{i+1}| (\cos \varphi_{i+1} + j \sin \varphi_{i+1})$$

Přehled typických tvarů GMK

Závěrem je uveden stručný výběr možných tvarů GMK pro jednodušší případy přenosu otevřené smyčky až do počtu jejích nulových bodů $N=2$ a počtu pólů $P=4$. Některé jsme sice již zmínili v předcházejícím textu, ale čtenář si u nich zopakuje výše uvedená pravidla a zároveň se přesvědčí o rozmanitosti tvarů zvláště při větších hodnotách ve zlomcích N/P .



Tab.1 Typické tvary GMK (zlomky udávají poměr počtu nul a pólů), převzato z [19]

Dodatek 2

Měrové jednotky v pohonech

V tomto textu jsou používány hlavně čtyři ze sedmi základních zákonných měrových jednotek soustavy SI: kilogram [kg], metr [m], sekunda [s], ampér [A]. Méně nebo vůbec není použit kelvin (teplota), kandela (svítivost) a mol (látkové množství).

Pro úhlové míry používáme přednostně radián [rad] (rozměr [1] plný úhel/2π).

Se sjednocováním kvantifikace mechanických a elektrických přírodních dějů začal již Charles Augustin Coulomb, který svůj zákon o přitažlivých silách mezi elektrickými náboji (1786) formálně (údajně intuicí) přizpůsobil Newtonovu gravitačnímu zákonu. S poznáním souvislosti elektřiny a magnetizmu podle klasické fyziky (Oersted, Ampère, Faraday, ... atd. až po Maxwella) vyvstávala stále naléhavěji nutnost přijmout jednotnou měrovou soustavu pro všechna odvětví fyziky.

Např. ampér, zařazený mezi základní jednotky, je dnes definován jako proud $I=1[A]$, způsobující vzájemnou sílu $F=2 \cdot 10^{-7}[N]$ mezi dvěma nekonečně dlouhými rovnoběžnými vodiči, vzdálenými od sebe 1[m], vztaženou na délku rovněž 1[m]. Čtenář si zde připomene jednotu přírodních věd a uvědomí si, že striktní rozdělení sfér činnosti při vývoji stroje a návrhu pohonů mezi profese "strojař" a "elektrikář" není na místě. Elektrické a mechanické veličiny i jejich měrové jednotky proto nebývají uváděny odděleně. Jejich označování se ale pro nedostatek vhodných symbolů někdy překrývá a je třeba rozlišovat například (vektory jsou psány tučně):

- **F** síla (vektor), ale [F] farad (jednotka kapacity **C**)
- **C** kapacita, ale [C] coulomb (jednotka elektrického náboje **Q**)
- **L** indukčnost, ale **L[m]** nebo **l [m]** délka přímého vodiče (chápána jako vektor)
- **H** intenzita magnetického pole (vektor), ale [H] henry (jednotka indukčnosti **L**)
- **T** perioda(doba cyklu), ale [T] tesla (jednotka magnetické indukce **B**)
- **Ω** úhlový kmitočet, ale [Ω] ohm (jednotka pro elektrický odpor **R**)
- **E**, **E_{kin}**, **E_{pot}** energie (kinetická, potenciální), ale **E** intenzita elektrického pole
- **W** práce, energie, teplo, ale [W] watt (jednotka pro výkon!!)
- **P** výkon (někdy také **P**... příkon a **N** výkon), ale [N] jednotka pro sílu atd.

Jednotky jsou zde na rozdíl od veličin psány v hranatých závorkách, i když to nebývá vždy zvykem. Pokud správné chápání symbolů nevyplývá z výkladu, je na rozdíl zvlášť upozorněno.

Odvozené měrové jednotky jsou vytvořeny ze základních přes známé fyzikální zákony z mechaniky a elektrotechniky formou součinů a podílů. Uvádíme jen několik z nich, potřebných ve výkladu o mechanických převodech a elektrických pohonech:

- **1coulomb [C]**, [As]....el. náboj **Q**, přenesený proudem $I=1[A]$ za čas $t=1[s]$ ($dQ=I \cdot dt$);
- **1 newton [N]**, [kgm/s²] síla **F**, udělující hmotě $m=1[kg]$ zrychlení $a=1[m/s^2]$ ($F=m \cdot a$);
- **1 joule [J]**, [Nm], [kgm²/s²] mechanická práce **W** síly 1[N] na dráze 1[m],
 - nebo mech. práce **W** krouticího momentu 1[Nm] na úhlu 1[rad].
 - Pozor: krouticí moment [Nm] je vektor (rameno x síla ... vektorový součin), ale práce [Nm] je skalár (síla · dráha skalární součin);**
- **1 watt [W]**, [Nm/s], [kgm²/s³] mechanický výkon **P**, neboli práce síly 1[N] při rychlosti 1[m/s] na dráze 1[m],
 - nebo práce krouticího momentu 1[Nm] při rychlosti 1rad/s na úhlu 1 [rad].

Ke sjednocení měrových jednotek u pojmů „mechanická“ a „elektrická“ práce je vhodné zavést pojem „**intenzita elektrického pole**“ (vektor, znak **E**), což je **síla, kterou elektrické pole působí ve směru svých siločar na jednotkový bodový náboj 1[C]**. Mezi silou **F** a nábojem obecné velikosti **Q** platí vztah $F[N]=E \cdot Q[C]$, takže rozměr intenzity je

- **E [N/C]**, [kgm/As³].

Dále budeme předpokládat **stacionární homogenní elektrické pole** (tj. pole, jehož siločáry jsou přímé rovnoběžné a stejně od sebe vzdálené). Práce síly $F[N]$ při přemístění náboje $Q[C]$ na vzdálenost $L[m]$ ve směru siločar je (již bez vektorového zápisu)

$$W_{Q,L} = F \cdot L = E[\text{kgm/As}^3] \cdot Q[\text{As}] \cdot L[\text{m}] = E \cdot Q \cdot L[\text{kgm}^2/\text{s}^2], [\text{Nm}], [\text{J}].$$

Množství práce, potřebné k přemístění jednotkového bodového náboje $1[C]$ o míru $L[m]$ je

$$W_{1C,L[m]} = W_{Q,L}/Q = E \cdot L$$

Součin $E \cdot L = U[\text{kgm}^2/\text{As}^3]$ **elektrické napětí** mezi konci úsečky L . Jeho jednotkou je

- **1 volt** $[V]$, $[\text{kgm}^2/\text{As}^3]$ napětí, pro které je tato práce právě $1[J]$.

Další jednotkou intenzity E kromě $[N/C]$, $[\text{kgm/As}^3]$ je tedy také $[V/m]$.

Definice napětí umožní sjednotit i pojmy „mechanický“ a „elektrický“ výkon. Předpokládejme, že vodičem o délce L protéká konstantní proud $I[A]$ a za čas dt je přenesen náboj $dQ = I \cdot dt$ s vynaložením práce dW síly F elektrického pole. Potřebné napětí mezi konci vodiče je

$$U = dW/dQ = dW/(I \cdot dt) \quad \text{neboli}$$

- $U \cdot I = dW/dt = P[W]$, $[\text{Nm/s}]$, $[\text{kgm}^2/\text{s}^3]$ **elektrický výkon**. U stejnosměrného proudu je výkon $P = U \cdot I[W]$, $[VA]$;

- **1 ohm** $[\Omega]$, $[V/A]$ **elektrický odpor** R konstanta úměrnosti mezi stejnosměrným proudem a napětím (z Ohmova zákona $U = R \cdot I$);

- jiné vyjádření výkonu z Ohmova zákona: $P = U \cdot I = R \cdot I^2 = U^2/R[W]$, $[\Omega A^2]$, $[V^2/\Omega]$;

- jiná definice jednoho voltu pomocí výkonu: **1 volt** je napětí mezi konci vodiče, při kterém je proudem $1[A]$ do vodiče dodáván výkon $1[W]$;

- **1 farad** $[F]$, $[C/V]$, $[As/V]$, $[A^2 s^4/\text{kgm}^2]$ jednotka kapacity C (schopnosti tělesa přijmout náboj). Kapacitu $1[F]$ má kondenzátor, mezi jehož elektrodami vyvolá náboj $1[As]$ napětí $1[V]$. Čím větší je kapacita, tím větší náboj je třeba ke zvýšení napětí. Mění-li se proud s časem, je nutno změnu náboje a napětí psát v diferenciálním tvaru:

$$dQ = I(t) \cdot dt = C \cdot dU$$

a po úpravě a integraci vyjde vztah pro napětí na kapacitě

$$U_C(t) = (1/C) \cdot \int I(t) dt$$

- součin $\tau = R \cdot C[V/A] \cdot [As/V] = [s]$ tzv. **časová konstanta** obvodu odpor – kondenzátor.

Dále uvedeme veličiny, popisující **magnetické pole**, jehož vznik je obecně způsoben pohybem elektrického náboje:

- **magnetický tok** Φ (skalár) kvantifikuje magnetické pole názorným způsobem jako počet indukčních čar, procházejících rovinnou plochou S . Je popsán skalárním součinem

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$$

- $S[m^2]$ orientovaná plocha (vektor se směrem její normály)

- \mathbf{B} **magnetická indukce** (vektor mající směr indukčních čar a vyjadřující jejich hustotu, tj. počet, procházející rovinnou plochou $1[m^2]$, postavenou k nim kolmo).

Podle **Faradayova indukčního zákona** se do uzavřeného elektrického obvodu (závitu, cívky), nalézajícího se v proměnném magnetickém poli, indukuje napětí

$$U_E = - d\Phi/dt$$

(změna magnetického toku může být vyvolána pohybem obvodu, pohybem zdroje mag. toku nebo i změnou proudu);

- rozměr magnetického toku Φ je tedy $[Vs]$, znak $[Wb]$ „weber“;

- rozměr magnetické indukce \mathbf{B} je $[Vs/m^2]$, znak $[T]$ „tesla“.

Proměnným proudem $I(t)$ si vodič (závit, cívka) vytvoří proměnné magnetické pole $\Phi(t)$, indukující podle F. zákona do vodiče napětí, působící proti příčině proudu:

$$U_L = - d\Phi/dt = - (d\Phi/dI) \cdot (dI/dt) = - L \cdot (dI/dt)$$

Součinitel $L = d\Phi/dI$ („indukčnost“) charakterizuje schopnost cívky a jejího okolí vytvořit si proudem své magnetické pole. Rozměr indukčnosti je $[Vs/A]$, znak $[H]$ „henry“;

- součin $L \cdot C$ má rozměr $[H] \cdot [F] = [Vs/A] \cdot [As/V] = [s^2]$;

- tzv. **vlastní kmitočet** netlumeného oscilátoru (obvodu indukčnost – kapacita) je

$$\Omega = (L \cdot C)^{-1/2} \quad [1/s], [rad/s];$$

- tzv. **elektrická časová konstanta** obvodu indukčnost - odpor (cívky, vinutí motoru) je podíl

$$\tau_E = L/R$$

a skutečně platí, že $[H] / [\Omega] = [Vs/A] / [V/A] = [s]$;

Rozepsáním Faradayova zákona vychází

$$U_E = - d\Phi/dt = - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})/dt = - (d\mathbf{B}/dt) \cdot \mathbf{S} - \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{S}/dt)$$

Dále budeme předpokládat **stacionární a homogenní magnetické pole**. Jeho indukční čáry jsou přímé, rovnoběžné, stejně od sebe vzdálené a $\mathbf{B} = \text{konst}$, tj. $d\mathbf{B}/dt = 0$ a platí

$$U_E = - \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{S}/dt)$$

Změnu toku vyvoláme pohybem přímého vodiče o délce L , který bude protínat indukční čáry pohybem v rovině k nim kolmé a kolmo ke své délce rychlostí $\mathbf{v} = d\mathbf{y}/dt$ [m/s]. Vektor plošné rychlosti vodiče je

$$d\mathbf{S}/dt = d(\mathbf{L} \times \mathbf{y})/dt = (d\mathbf{L}/dt) \times \mathbf{y} + \mathbf{L} \times (d\mathbf{y}/dt)$$

ale délka $L = \text{konst}$, takže $dL/dt = 0$ a zbylý vektor má směr indukčních čar:

$$d\mathbf{S}/dt = \mathbf{L} \times (d\mathbf{y}/dt) = \mathbf{L} \times \mathbf{v}$$

Faradayův zákon se zjednoduší na skalární součin dvou rovnoběžných vektorů

$$U_E = - \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{S}/dt) = - |\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{L}| \cdot |\mathbf{v}| \quad (\text{již jen prostý součin}).$$

Opět vychází rozměr magnetické indukce \mathbf{B} [Vs/m²], [T];

- **1 tesla** magnetická indukce pole, které do vodiče o délce 1[m] při jeho rychlosti 1[m/s] (kolmo a příčně k indukčním čarám) indukuje napětí 1[V].

Magnetická indukce \mathbf{B} primárně vyjadřuje podle **Lorentzova vztahu** silové působení magnetického pole na náboj Q [As], pohybující se rychlostí \mathbf{v} [m/s]:

$$d\mathbf{F} = dQ \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = I \cdot dt \cdot (d\mathbf{L}/dt) \times \mathbf{B} = I \cdot d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

Po integraci vychází síla, působící na přímý vodič aktivní délky L , protékaný proudem I :

$$\mathbf{F} = I \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

(vektorový součin podle pravidel pravotočivé vývrtky nebo levé ruky - „prsty ve směru proudu, indukční čáry míří do dlaně, síla ve směru palce“).

Jednotkou magnetické indukce \mathbf{B} je kromě [T], [Vs/m²] tedy i [N/Am] nebo [kg/As²]. Pole 1[T] působí silou 1[N] na kolmý vodič o délce 1[m], protékaný proudem 1[A].

Některé další jednotky:

j imaginární jednotka, $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = +1$

- úhlová rychlost ω , ale také úhlový kmitočet ω nebo Ω [rad/s] nebo [1/s];

- počet kmitů (obecně cyklů) za vteřinu $f = \omega/2\pi$ [Hz] ale někdy také [1/s] !!!;

- doba cyklu (kmitu) $T = 1/f = 2\pi/\omega$ [s];

- převod $p_{jk} = \omega_j/\omega_k$ [1] je poměr (v tomto případě úhlové) rychlosti hnacího členu j ku rychlosti hnaného členu k ;

- celkový převod q [rad/m] mezi rychlostí rotačního motoru [rad/s] a rychlostí suportu [m/s];

- stoupání šroubu h [m/rad] má tedy význam reciprokého převodu mezi posuvem a rotací;

Pro obvyklý údaj v katalogích výrobců „stoupání na otáčku“ platí $s[\text{mm/ot}] = 2000\pi h$.

Na použití vedlejších a doplňkových měrových jednotek je zvlášť upozorněno

(„otáčky“ n [1/min], délka [mm],[μm] atd.) nebo vyplývají z fyzikálních zákonů, např.

- tíhové zrychlení $g = 9,81[\text{m/s}^2]$ tíhové zrychlení na povrchu Země ve středním zeměpisném pásmu (síla, působící na hmotu 1kg);

- úhlový stupeň $^\circ$, [deg] jedna třistašedesátina plného úhlu, $1^\circ = 2\pi/360[\text{rad}]$;

- úhlová minuta $'' = 1/60[\text{deg}]$, úhlová vteřina $''' = 1/60''$.

Frekvenční charakteristiky dynamických soustav (poměr amplitud A_1/A_2 a fázový posuv φ dvou harmonických pohybů s kmitočtem ω) jsou zobrazovány v logaritmických souřadnicích s jednotkami $\log_{10}\omega$, $20\log_{10}(A_1/A_2)$ [dB] a $\log_{10}\omega$, φ [rad]. Jeden radián je $180^\circ/\pi \approx 57,3^\circ$.

Literatura

- [1] Romanovskij, P.I.: Fourierovy řady, teorie pole, analytické a speciální funkce, Laplaceova transformace
SNTL, Praha 1964
- [2] Lavrentěv, M.A., Šabat, B.V.: Metody teorie funkcí komplexní proměnné
Vyd. Nauka, Moskva 1973
- [3] Doetsch, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der L- und Z-Transformation
Oldenbourg, München 1967
- [4] Wunsch, G.: Moderne Systemtheorie
Akad. Verlagsgess., Leipzig 1962
- [5] Nixon, F. E.: Principy soustav automatického řízení
SNTL, Praha 1967
- [6] Slavík, J., Stejskal, V., Zeman, V.: Základy dynamiky strojů
Vyd. ČVUT 1997
- [7] Panovko, J., Gubanova, I.: Stabilita a kmitání pružných systémů
Vyd. Nauka, Moskva 1979
- [8] Kreyszig, E.: Advanced Engineering Mathematics
J.Wiley&Sons, New York 1994
- [9] Šulista, M.: Základy analýzy v komplexním oboru
SNTL, Praha 1981
- [10] Veit, J.: Integrální transformace
SNTL, Praha 1979
- [11] Bubák, A.: Zvyšování dynamiky a přesnosti posuvových os obráběcích strojů
Disertační práce, ČVUT 10/2004
- [12] Souček, P.: Servomechanismy ve výrobních strojích
Vydavatelství ČVUT 2004, ISBN 80-01-02902-6
- [13] Daněk, O., Poláček, M., Špaček, L., Tlustý, J.: Selbsterregte Schwingungen in Werkzeugmaschinen
VEB Verlag Technik Berlin 1962
- [14] King, E., I.: Handbook of high speed machining technology
(Part 3: J. Tlustý: Machine dynamics)
Chapman and Hall, New York 1985
- [15] Souček, P.: Elektrohydraulické servomechanismy
Skriptum ČVUT 1992
- [16] Weck, M., Brecher, C.: Werkzeugmaschinen 5, 7. Bearbeitete Auflage
ISBN 10 3-540-22505-6 Berlin Heidelberg New York
- [17] Tobias, S.A.: Machine Tool Vibration
Blackie & Son Ltd., London 1965
- [18] Souček, P.: Vložené převody v pohonech NC strojů a robotů
Skriptum dSpace ČVUT, FS, Ú12135, výukové materiály 2019
- [19] Oppelt, W.: Příručka regulační techniky
SNTL, Praha 1967
- [20] Grau, J., Souček, P., Sulitka, M.: The Influence of Servo Drive Control on the NC Vertical Milling Machine Dynamic Compliance
Journal of Manufacturing and Materials Processing 2020, 4 (4), 111, ISSN 2504-4494
- [21] Grau, J.: Vliv poddajnosti pohonů na samobuzené kmitání při obrábění
Koncept disertační práce 2020 (interní zpráva Ú12135)

Obsah

Úvod	3
1. Matematický aparát	5
1.1 Základní pojmy z teorie signálů.....	5
1.2 Fourierova řada periodické funkce (kmitočtové spektrum)	5
1.3 Střední výkon periodické funkce.....	7
1.4 Spektrum neperiodické funkce (Fourierova transformace)	9
1.5 Spektra vybraných funkcí	10
1.6 Integrace součinu funkcí, energie neperiodického signálu	12
1.7 Diskrétní Fourierova transformace (DFT)	12
1.8 Laplaceova transformace	15
1.9 Zpětná Laplaceova transformace	17
1.10 Křivkový integrál, Laurentova řada, reziduová věta	18
1.11 Speciální funkce (distribuce)	22
1.12 Základní pravidla pro Laplaceovu transformaci	24
1.13 Konvoluční integrál, součin obrazů	32
1.14 Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty	33
1.15 Váhová a přechodová funkce, přenos	34
1.16 Rozklad na částečné zlomky	36
1.17 Frekvenční přenos	38
1.18 Stabilita	41
1.18.1 Cauchyho teorém o změně argumentu.....	41
1.18.2 Nyquistovo kritérium stability	43
1.18.3 Aproximace dopravního zpoždění	53
2. Jednohmotový dynamický systém	55
2.1 Pohybová rovnice	55
2.2 Buzení Diracovým impulzem síly - váhová funkce	56
2.2.1 Netlumený systém.....	57
2.2.2 Tlumený systém	58
2.3 Buzení jednotkovým skokem - přechodová funkce.....	59
2.4 Harmonické buzení – ustálené vynucené kmity	61
2.5 Obecné buzení	62
2.6 Frekvenční charakteristika systému 2.řádu	63
2.7 Systém 2.řádu s malým tlumením	65
2.8 Rovinné kmitání jednohmotového ortogonálního systému.....	66
2.8.1 Statické chování	67
2.8.2 Dynamické chování	68
2.8.3 Polární diagram přímé dynamické poddajnosti.....	70
2.9. Logaritmické frekvenční charakteristiky.....	72
3. Systémy s více stupni volnosti	75
3.1 Některé obecné vlastnosti čtvercových matic - opakování.....	75
3.2 Dynamický model pohonu.....	77
3.2.1 Transformace pomocí modální matice.....	81
3.2.2 Normovaná modální matice.....	82
3.2.3 Diagonalizace systému - modální transformace	83
3.2.4 Rozjezd systému – časově omezený silový impulz	86
3.3 Zachování energie při modální transformaci.....	88
3.4 Matice poddajnosti a vlastní tvary kmitů.....	88
3.4.1 Regulační pohon NC stroje	95
3.5 Dvojhmotový rotační systém.....	102
3.6 Rovinné kmitání jednohmotového systému	107
3.6.1 Statické chování	108
3.6.2 Dynamické chování	108

3.6.3 Modální transformace	109
3.7 Prostorové kmitání jednohmotového systému.....	112
3.7.1 Statické chování.....	113
3.7.2 Dynamické chování.....	115
3.7.3 Modální transformace.....	116
3.7.4 Přímá dynamická poddajnost.....	117
3.8 Příklad výpočtu – rovinný systém.....	119
4. Impulzní buzení dynamických systémů	122
4.1 Laplaceův obraz konečného impulzu.....	122
4.1.1 Obecné vlastnosti konečného impulzu a jeho L.obrazu.....	124
4.2 Odezva lineárního dynamického systému na konečný impulz.....	125
4.3 Dynamický systém 2.řádu.....	128
4.3.1 Netlumený systém, obecný silový impulz.....	130
4.3.2 Energie vložená do jednohmotového systému.....	133
4.4 Rozběh vícemotového uvolněného systému impulzem síly.....	134
4.4.1 Vícehmotový netlumený systém.....	135
4.5 Dvojhmotový systém.....	138
4.6 Kinematické buzení (vačkové mechanismy)	142
4.6.1 Buzení ve tvaru obecné přechodové funkce	144
5. Samobuzené kmitání při obrábění	147
Dodatek 1: Použití metody GMK (Root Locus) u regulačních pohonů	163
Dodatek 2: Měrové jednotky v pohonech	190
Literatura	193